



LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Physique

Électrocinétique

MPSI

Cours

Méthodes

Exercices résolus

G. ROSSET

Nouveau programme





LES NOUVEAUX
Précis
BRÉAL

Électrocinétique

MPSI

G . R O S S E T

Professeur en classes préparatoires scientifiques
au lycée La Martinière à Lyon

LES NOUVEAUX Précis B R É A L

Mathématiques 1^{re} année

- Analyse MPSI
- Algèbre et géométrie MPSI

Physique 1^{re} année

- Mécanique MPSI
- Électromagnétisme MPSI
- Électrocinétique MPSI
- Optique MPSI-PCSI-PTSI
- Thermodynamique MPSI

Chimie 1^{re} année

- Chimie MPSI

Exercices 1^{re} année

- Mathématiques MPSI
- Physique MPSI

Nous remercions M. Jérôme MAJOU, professeur en classes préparatoires scientifiques au lycée Jules Ferry, à Versailles, pour sa collaboration à cet ouvrage.

Maquette : Sophie Martinet

Couverture : Sophie Martinet

Réalisation : Alpha-Édit

© Bréal 2003

Toute reproduction même partielle interdite.

Dépôt légal : août 2003.

ISBN 2 7495 0224 1

Les Nouveaux Précis Bréal sont conçus pour apporter aux étudiants des classes préparatoires **une aide efficace dans leur travail**. Tout en conservant la rigueur des éditions précédentes, nous nous sommes efforcés d'aplanir au mieux toutes les difficultés inhérentes au discours scientifique. Nous savons par expérience que le rythme de la prépa n'autorise aucune perte de temps, et nous pensons qu'une explication claire et précise permet d'éviter au lecteur tout « blocage » inutile.

Strictement conforme au nouveau programme, cet ouvrage s'adresse à tous les étudiants de première année de la filière MPSI. Chaque chapitre est divisé en trois parties complémentaires.

- Le **Cours**, qui présente les principaux raisonnements à comprendre et à connaître, accompagnés de nombreuses applications directes afin d'assimiler immédiatement les notions traitées.
- Les pages **Méthodes**, qui contiennent deux rubriques indispensables à la progression personnelle : *L'essentiel* permet de mémoriser rapidement tout ce qu'il faut retenir du chapitre, et la *Mise en œuvre* expose les grandes méthodes afin d'acquérir les bons « réflexes » en situation.
- Les **Exercices**, classés par niveaux de difficulté, dont les solutions détaillées sont enrichies d'astuces et de conseils (précédés des logos ⚙️ ou ⚠️). Certains exercices sont accompagnés de courtes indications, comme en colle : il suffit parfois d'un petit « déclic » pour démarrer !

Il nous est apparu nécessaire d'accorder aux **Méthodes** et aux **Exercices** une place équivalente à celle du **Cours**. En effet, l'apprentissage ne peut pas être efficace sans combiner étroitement ces trois dimensions : comprendre, savoir faire et s'entraîner. En revanche, s'il organise intelligemment son travail, l'étudiant pourra s'améliorer dans toutes les disciplines en gérant au mieux son temps et ses efforts, principale condition de la réussite.

Ainsi, les étudiants de MPSI disposeront, en électrocinétique, d'un outil de travail complet, adapté au rythme soutenu de cette première année de préparation aux concours.

Nous espérons que ce Nouveau Précis les aidera à accéder avec confiance en deuxième année et nous répondrons volontiers à toute suggestion, remarque ou critique par e-mail à l'adresse infos@editions-breial.fr.

L'éditeur et les auteurs

Sommaire

Chapitre 1 ■	Lois générales de l'électrocinétique	7
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	18
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	23
Chapitre 2 ■	Modélisations linéaires d'un dipôle	31
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	43
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	54
Chapitre 3 ■	Condensateurs et bobines – Dipôles linéaires	79
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	90
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	94
Chapitre 4 ■	Régimes transitoires	103
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	125
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	133
Chapitre 5 ■	Signaux sinusoïdaux	165
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	173
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	176
Chapitre 6 ■	Étude du circuit RLC série : résonance	181
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	197
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	201
Chapitre 7 ■	Régime sinusoïdal forcé	213
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	224
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	230
Chapitre 8 ■	Filtres du premier ordre	245
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	263
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	273
Index		284

Lois générales de l'électrocinétique

Introduction

Un circuit électrique est constitué de différents composants reliés entre eux par des fils. On appelle *dipôle électrocinétique* un composant ayant deux bornes, par exemple un générateur, une résistance, un condensateur ou une bobine. En travaux pratiques, on étudiera aussi une diode, une lampe à incandescence, une varistance, etc.

Ce chapitre introduit les grandeurs et les lois fondamentales de l'électrocinétique.

Plan du chapitre 1

A. La loi des nœuds	8
1. Les différents courants électriques	8
2. Intensité du courant électrique	9
3. Densité de courant	10
4. Conservation de la charge : la loi des nœuds.	12
B. La loi des mailles	13
1. Différence de potentiel entre deux points.	13
2. Additivité des tensions : la loi des mailles	14
C. Puissance électrique	15
1. Caractère générateur – caractère récepteur	15
2. Convention générateur – convention récepteur.	16
3. Puissance électrique d'un dipôle.	16
C. L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)	17
<i>Méthodes</i>	
L'essentiel ; mise en œuvre	18
Énoncés des exercices.	23
Indications	24
Solution des exercices.	25

Dans un circuit électrique, on appelle *nœud* un point du circuit reliant entre eux trois dipôles ou plus. L'ensemble des dipôles compris entre deux nœuds consécutifs constitue une *branche*. Enfin, un ensemble de branches formant un contour fermé constitue une *maille* (fig. 1).

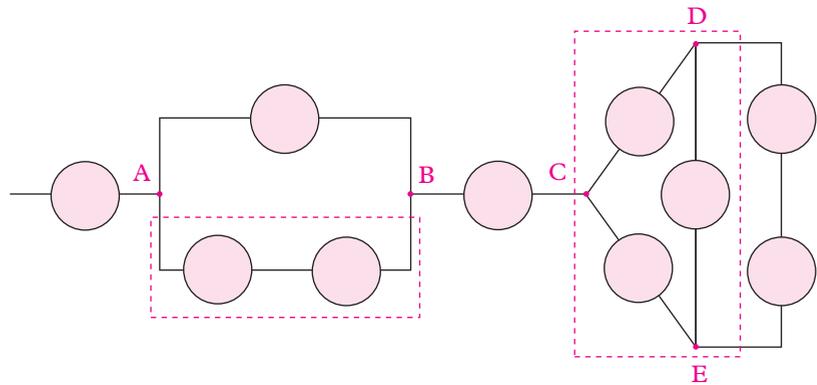


Fig. 1 - Les points A, B, C, D, E sont des nœuds. Sur le schéma, on a encadré en pointillés la branche AB et la maille CDE.

A. La loi des nœuds

Le courant électrique dans un circuit correspond à un mouvement ordonné de charges électriques (appelées *porteurs de charges* ou plus simplement *porteurs*), sans tenir compte du mouvement microscopique désordonné de ces charges.

A.1. Les différents courants électriques

En général, on distingue plusieurs types de courants électriques.

- Le courant de conduction correspond au déplacement de charges électriques dans un support matériel conducteur :
 - dans les conducteurs usuels, les porteurs de charge sont les électrons de charge négative $q = -e$;
 - dans les semi-conducteurs, les porteurs de charge sont soit des électrons (semi-conducteurs dopés n), soit des « trous » de charge $q = +e$ (semi-conducteurs dopés p) ;
 - dans les électrolytes, les porteurs de charge sont des ions en solution (cations et anions).
- Le courant de convection est causé par le déplacement d'un objet lui-même chargé².
- Le courant de particules est dû aux déplacements de particules chargées dans le vide, par exemple d'électrons dans le tube d'un téléviseur ou d'un oscilloscope.
- Le courant de déplacement est introduit lors de la propagation des ondes électromagnétiques.

Le passage d'un courant électrique crée toujours un champ magnétique³, qui met en rotation une aiguille aimantée (par exemple, dans une boussole).

En première année, seul le courant de conduction est étudié : dans la suite, on se placera donc toujours dans ce cas.

1. La charge élémentaire e vaut $1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

2. Par exemple, en frottant un vêtement en acrylique avec une règle en plastique, on arrache des électrons à la règle qui se charge négativement. Si l'opérateur déplace la règle dans la pièce, il crée alors un courant de convection.

3. Hans Christian Ørsted (1777-1851), physicien danois, découvrit en 1820 l'existence du champ magnétique créé par les courants électriques, ouvrant ainsi la voie à la théorie de l'électromagnétisme.

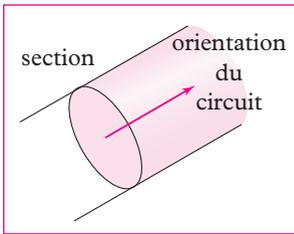


Fig. 2 - Section du circuit orienté.

1. Charles de Coulomb (1736-1806), physicien français, établit les lois expérimentales et théoriques de l'électrostatique et du magnétisme.

2. André Marie Ampère (1775-1836), physicien français, jeta les bases de la théorie de l'électromagnétisme et de la théorie électronique de la matière. Il imagina le galvanomètre.

A.2. Intensité du courant électrique

A.2.1 - Définition de l'intensité

L'intensité du courant mesure la quantité algébrique d'électricité (c'est-à-dire, la charge électrique) traversant la section d'un circuit orienté par unité de temps (fig. 2). L'unité de charge est le coulomb (C)¹ et l'unité d'intensité est l'ampère (A)².

Définition 1

L'**intensité** du courant dans un circuit orienté, exprimée en ampère (A), est la grandeur algébrique correspondant au débit de charges.

A.2.2 - Sens de circulation des charges

D'après la définition, un courant d'intensité positive correspond au déplacement de charges positives dans le sens du circuit orienté ou au déplacement de charges négatives en sens inverse (fig. 3).

A contrario, un courant d'intensité négative correspond au déplacement de charges négatives dans le sens du circuit orienté ou au déplacement de charges positives en sens inverse (fig. 3).

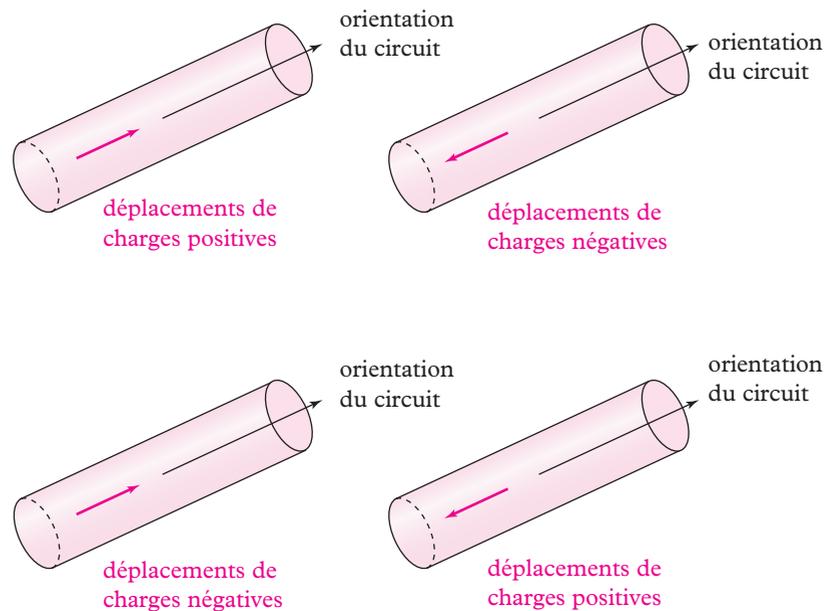


Fig. 3 - En haut, l'intensité du courant est positive (le courant réel circule dans le sens du circuit orienté). En bas, l'intensité du courant est négative (le courant réel circule dans le sens opposé à l'orientation du circuit).

Remarques expérimentales

L'intensité du courant dans un circuit est mesurée à l'aide d'un ampèremètre. En travaux pratiques, on mesure parfois la tension aux bornes d'une résistance de valeur connue, puis on en déduit la valeur de l'intensité par la loi d'Ohm (voir chapitre 2).

A.2.3 - Relation charge-intensité

1. Les unités du Système International sont : le mètre (m), le kilogramme (kg), l'ampère (A), la seconde (s), le kelvin (K), le candela (cd) et la mole (mol). Dans ces unités, on a :

$$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}.$$

2. La notation δt représente un intervalle de temps très petit. Quand on fait tendre cet intervalle de temps δt vers 0, la limite du rapport $\frac{\delta Q}{\delta t}$ est par définition la dérivée de la charge Q par rapport au temps t : $\frac{dQ}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta Q}{\delta t} \right)$.

• En régime permanent, l'intensité I du courant est constante dans le temps. D'après la définition de l'intensité, une section quelconque du circuit est traversée par la charge algébrique $Q = It$ pendant la durée t ¹.

• En régime variable, l'intensité i du courant évolue avec le temps, mais elle peut être considérée constante sur un intervalle de temps δt très petit. Pendant cette durée, il circule alors la charge algébrique $\delta Q = i\delta t$.

Dans un circuit, l'intensité i du courant est égale à **la dérivée par rapport au temps t de la charge Q traversant une section du circuit orienté**² :

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

i intensité en ampère (A)

Q charge en coulomb (C)

t temps en seconde (s)

Application 1 Charge d'une batterie

Pour recharger une batterie, un chargeur délivre un courant d'intensité 5,0 A sous une tension de 12 V et fonctionne pendant 10 heures.

a) Quelle quantité d'électricité circule dans les fils d'alimentation de la batterie lors de cette charge ?

b) Les porteurs de charge sont les électrons. Combien d'électrons ont circulé pendant cette charge ?

Solution

a) L'intensité du courant $I = 5,0 \text{ A}$ est constante. La durée de la charge est $t = 10 \text{ h} = 3,6 \cdot 10^4 \text{ s}$. La quantité d'électricité circulant dans les fils d'alimentation vaut donc :

$$Q = It = 5,0 \times 3,6 \cdot 10^4 = 1,8 \cdot 10^5 \text{ C}.$$

b) La valeur absolue de la charge d'un électron est $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Pour avoir la charge Q , il a donc circulé dans les fils N électrons tels que :

$$Q = Ne, \text{ d'où : } N = \frac{Q}{e} = \frac{1,8 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,1 \cdot 10^{24} \text{ électrons !!!}$$

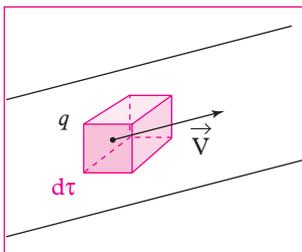


Fig. 4 - Dans le volume élémentaire $d\tau$ circulent des porteurs de charge q à la vitesse moyenne \vec{V} .

3. Dans un conducteur neutre, la densité de charges totale est la somme de la densité de charges due aux porteurs en mouvement et de la densité de charges due aux ions immobiles du réseau conducteur : elle est donc nulle.

A.3. Densité de courant

Le vecteur densité de courant \vec{j} caractérise le mouvement d'ensemble des porteurs de charges dans un circuit électrique.

A.3.1 - Courant créé par un seul type de porteurs

On considère un volume élémentaire $\delta\tau$ dans lequel circulent des porteurs de charges q à la vitesse moyenne \vec{V} (fig. 4). Ce volume est à la fois suffisamment petit pour être considéré ponctuel à l'échelle humaine et suffisamment grand pour contenir de nombreux porteurs. Il s'agit, par exemple, d'un cube de côté de l'ordre du micron ($1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$) : cette dimension est petite par rapport à notre échelle (de l'ordre du mètre), mais grande par rapport à la distance entre les molécules, les ions ou les atomes dans le conducteur (de l'ordre de $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$).

Le volume élémentaire $\delta\tau$ contient $\delta N = n\delta\tau$ porteurs de charges, où n est la densité volumique des porteurs (c'est-à-dire le nombre de porteurs par unité de volume). On appelle alors ρ_m la densité volumique de charges mobiles³ telle que $\rho_m = nq$.

Définition 2

Dans un circuit, le vecteur **densité de courant** \vec{j} caractérise le mouvement d'ensemble des porteurs de charges¹ :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{V}$$

\vec{j}	densité de courant ($A \cdot m^{-2}$)
ρ_m	densité volumique de charges mobiles ($C \cdot m^{-3}$)
\vec{V}	vitesse moyenne des porteurs ($m \cdot s^{-1}$)

1. Comme n s'exprime en m^{-3} , q en coulomb (C) et V en $m \cdot s^{-1}$, l'unité de j est donc :
 $m^{-3} \times C \times m \cdot s^{-1} = C \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$
 $= A \cdot m^{-2}$.

Le vecteur densité de courant \vec{j} a toujours le même sens que le courant réel dans le circuit.

A.3.2 - Courant créé par différents types de porteurs

Si le volume $\delta\tau$ contient différents types de porteurs de charges q_1, q_2, \dots , on définit alors les densités de courant correspondant à chacun :

$$\vec{j}_1 = \rho_1 \cdot \vec{V}_1; \quad \vec{j}_2 = \rho_2 \cdot \vec{V}_2; \quad \dots$$

Des charges positives en mouvement dans un sens ont donc le même effet que des charges négatives en mouvement en sens inverse. Globalement, les porteurs contribuent ensemble au courant total.

Dans un circuit, la densité de courant totale \vec{j} est la somme des densités de courant correspondant à chaque type de porteurs de charges :

$$\vec{j} = \sum_k \vec{j}_k = \sum_k \rho_k \vec{V}_k.$$

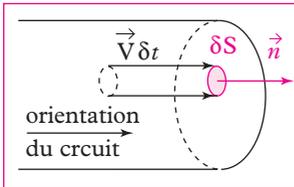


Fig. 5 - La surface δS est orientée par le vecteur normal \vec{n} .

A.3.3 - Densité de courant et intensité

On considère la section d'un circuit électrique dans lequel circule un seul type de porteurs de charges q à la vitesse moyenne \vec{V} . La surface élémentaire δS , de dimensions suffisamment petites pour être considérée comme plane, est orientée par le vecteur normal \vec{n} dans le même sens que le circuit (fig. 5).

Les porteurs de charges traversant la surface δS pendant l'intervalle de temps δt sont tous les porteurs initialement contenus dans le cylindre de base δS et de génératrice $\vec{V} \delta t$, dont le volume est $\delta S \times \delta t \vec{V} \cdot \vec{n}$ ². En notant ρ_m la densité volumique de charges mobiles, la quantité d'électricité traversant δS pendant δt vaut donc³ :

$$\delta^2 Q = \rho_m \vec{V} \cdot \vec{n} \delta S \delta t.$$

Il circule donc à travers la surface δS un courant élémentaire d'intensité :

$$\delta I = \frac{\delta^2 Q}{\delta t} = \rho_m \vec{V} \cdot \vec{n} \delta S, \quad \text{soit : } \delta I = \vec{j} \cdot \vec{n} \delta S.$$

Dans le circuit, le courant total I est la « somme » de tous les courants élémentaires δI . Si la section S est plane et que la densité \vec{j} de courant est uniforme⁴, alors le produit scalaire $\vec{j} \cdot \vec{n}$ est égal pour toutes les surfaces élémentaires δS et la « somme » s'écrit :

$$I = \vec{j} \cdot \vec{n} S.$$

2. Le volume d'un cylindre oblique est le même que celui du cylindre droit de même base S et de même hauteur h .

3. La notation $\delta^2 Q$ signifie que la charge calculée résulte du produit de deux grandeurs élémentaires :
 - l'intervalle de temps élémentaire δt ;
 - la surface élémentaire δS .

4. - Si la section S est plane, le vecteur normal \vec{n} à cette surface est normal à toutes les surfaces élémentaires δS .
 - La densité de courant \vec{j} est uniforme si le vecteur j est le même en tout point du domaine

1. Si ces conditions ne sont pas vérifiées (section S plane et densité de courant \vec{j} uniforme), alors la « somme » des différents courants élémentaires ramène au calcul d'une intégrale « de surface » sur la section S du circuit.

Dans un circuit orienté, si la densité \vec{j} du courant est uniforme, l'intensité I du courant traversant une section plane S vaut¹ :

$$\mathbf{I} = \vec{j} \cdot \vec{n} S$$

I intensité du courant (A)

S section du courant (m^2)

\vec{j} densité de courant ($\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$)

\vec{n} vecteur normal à la section orientée

Application 2 Vitesse des porteurs

Un fil électrique de section droite $S = 1,0 \text{ mm}^2$ est parcouru par un courant d'intensité constante $I = 10 \text{ A}$ (ordre de grandeur du courant d'alimentation d'un radiateur ou d'un lave-linge). La densité volumique des porteurs (électrons de charge $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$) est $n = 1,0 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$.

a) Que vaut la norme j de la densité de courant ?

b) Déterminer la vitesse moyenne des porteurs.

Solution

a) Lorsque la section est droite, le vecteur densité de courant \vec{j} est colinéaire au vecteur \vec{n} normal à la section orientée. On a donc :

$$\mathbf{I} = \vec{j} \cdot \vec{n} S = jS, \text{ soit } j = \frac{I}{S} = \frac{10}{1,0 \cdot 10^{-6}} = 10^7 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}.$$

b) Par définition, on a : $j = n|q|V$, où V est la vitesse moyenne des porteurs. On en déduit donc :

$$V = \frac{j}{ne} = \frac{10^7}{1,0 \cdot 10^{29} \times 1,6 \cdot 10^{-19}} = 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ soit } 0,62 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Remarque : à titre de comparaison, la célérité du son dans l'air à $20 \text{ }^\circ\text{C}$ vaut $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, la célérité de la lumière dans le vide vaut $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et la vitesse quadratique des molécules d'air est de l'ordre de $500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

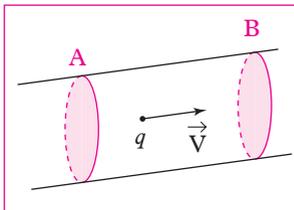


Fig. 6 - En régime permanent, le débit des charges à travers la surface en A est égal au débit des charges à travers la surface en B : l'intensité du courant est donc la même en A et en B.

A.4. Conservation de la charge : la loi des nœuds

En régime permanent, la charge contenue dans un volume quelconque du conducteur ne varie pas au cours du temps : dans ce volume, le débit des charges entrant réellement est donc égal au débit des charges sortant réellement. En conséquence, l'intensité I du courant a la même valeur en tout point d'une branche du circuit (fig. 6).

En revanche, la densité de courant et la vitesse des porteurs ne sont pas nécessairement égales. Ainsi, si la section S de la branche diminue de moitié entre deux points A et B, l'intensité I restant la même, la densité de courant j et la vitesse V des porteurs doublent entre ces points.

En un nœud du circuit, la conservation de la charge se traduit par la loi des nœuds.

Loi 1

Loi des nœuds

La somme des intensités I_i des courants algébriques arrivant à un nœud du circuit est égale à la somme des intensités I_j des courants algébriques s'éloignant de ce nœud (fig. 7) :

$$\sum_{\text{arrivant}} I_i = \sum_{\text{sortant}} I_j.$$

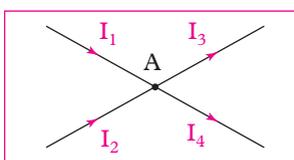
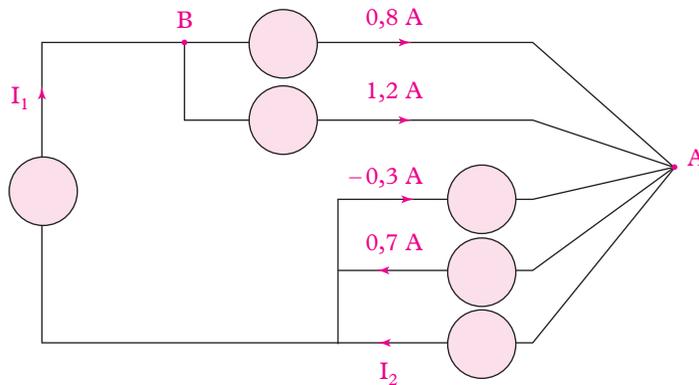


Fig. 7 - Au nœud A, on a : $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$.

Application 3 Intensité du courant dans un dipôle

Déterminer les intensités I_1 et I_2 non précisées sur le schéma ci-dessous.



Solution

- Les courants d'intensité 0,8 A, 1,2 A et -0,3 A arrivent en A, alors que les courants d'intensité 0,7 A et I_2 repartent de A. D'après la loi des nœuds :

$$0,8 + 1,2 - 0,3 = 0,7 + I_2, \text{ d'où : } I_2 = 1 \text{ A.}$$

- De même, le courant d'intensité I_1 arrive en B et les courants d'intensités 0,8 A et 1,2 A repartent de B. D'après la loi des nœuds :

$$I_1 = 0,8 + 1,2 = 2 \text{ A.}$$

B. La loi des mailles

B.1. Différence de potentiel entre deux points

Dans un circuit, le mouvement des porteurs de charges q est dû à la force $q\vec{E}$ créée par le champ électrique \vec{E} . Cette force dérive d'une énergie potentielle qV^1 définie à une constante additive près².

Dans un circuit électrique, les charges évoluent spontanément dans le sens des potentiels décroissants en l'absence de générateur. On peut schématiser cette évolution par analogie avec l'écoulement naturel d'un fluide dans un circuit hydraulique, de l'altitude la plus élevée à l'altitude la plus faible (les charges jouent le rôle du fluide et la fonction potentielle celui de l'altitude).

Définition 3

Dans un circuit, le potentiel électrique V , défini à une constante additive près et exprimé en volt (V)³, est à l'origine du mouvement des charges. La **différence de potentiel** (ddp) ou tension, exprimée comme le potentiel en volt (V), est une grandeur algébrique indépendante de l'origine des potentiels électriques.

1. Le cours d'électrostatique définira le champ électrique \vec{E} et la fonction potentielle V , dont nous admettrons ici les propriétés.

2. En Terminale, on a vu que l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = mgz$ dépend du choix de l'origine des altitudes (elle est donc définie à une constante additive près). Ses variations, en revanche, sont indépendantes de ce choix.

3. Le volt rend hommage à Alessandro Volta (1745-1827), physicien italien, inventeur en 1800 de la première pile électrochimique.

1. Sur les appareils anciens, la masse était reliée à la terre par l'alimentation électrique. Désormais, la double isolation des appareils de laboratoire n'impose plus ce lien. En revanche, les appareils électriques domestiques (lave-linge...) conservent une liaison à la terre.

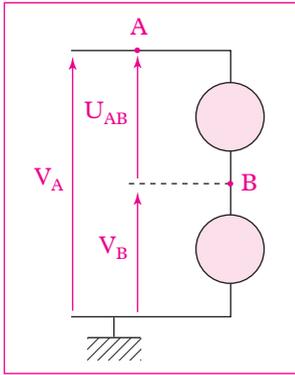


Fig. 8 - Représentation de la différence de potentiel U_{AB} .

En pratique, les appareils électriques sont reliés à la « masse », c'est-à-dire à la carcasse interne de l'appareil (par exemple, la borne noire du générateur)¹. On choisit alors cette masse comme origine des potentiels électriques sur le circuit.

Après avoir défini la masse, on peut associer à chaque point du circuit un potentiel électrique V unique, égal à la différence de potentiel entre ce point et la masse, choisie comme origine des potentiels électriques.

Le potentiel V_A du point A (respectivement V_B du point B) est représenté par une flèche partant de la masse au potentiel nul et arrivant au point A (respectivement au point B). La différence de potentiel $U_{AB} = V_A - V_B$ est alors représentée par une flèche d'origine B et d'extrémité A (fig. 8).

Remarques expérimentales

La différence de potentiel U_{AB} entre deux points A et B du circuit est mesurée à l'aide d'un voltmètre ou observée à l'écran d'un oscilloscope. Il est à noter que celui-ci impose souvent la masse, qui doit être commune aux autres masses présentes sur le circuit. L'oscilloscope permet alors de suivre l'évolution du potentiel d'un point du circuit.

Dans un montage, on veillera toujours à éviter les courts-circuits par les masses.

2. Par définition, on a :
 $U_{BA} = -U_{AB}$.

B.2. Additivité des tensions : la loi des mailles

• Soit trois points A, B et C d'un circuit. Les différences de potentiel entre les points A et B, B et C, A et C s'écrivent respectivement² :

$$U_{AB} = V_A - V_B, \quad U_{BC} = V_B - V_C, \quad U_{AC} = V_A - V_C, \quad \text{d'où} : U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}.$$

Dans un circuit, les différences de potentiel sont additives. Par exemple, si A, B et C sont trois points du circuit, alors on a :

$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}.$$

• On considère une maille dans un circuit (fig. 9). En partant d'un point A quelconque et en parcourant complètement la maille dans un sens donné, l'additivité des différences de potentiel s'écrit :

$$U_{AA} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DE} + U_{EA} = 0.$$

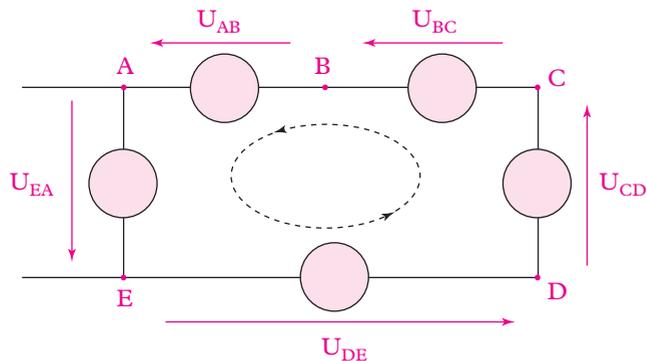


Fig. 9 - La maille est orientée dans le sens des flèches.

Loi 2

Loi des mailles

Dans une maille, la somme algébrique des différences de potentiel mesurées en parcourant complètement la maille dans un sens donné est nulle¹ :

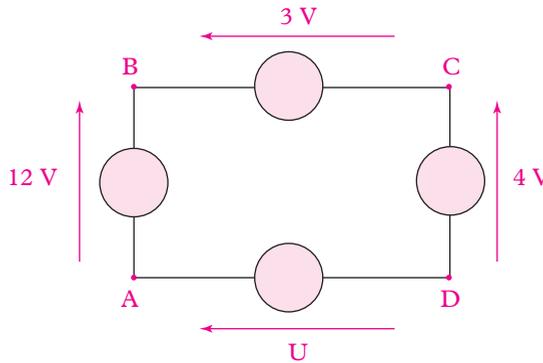
$$\sum_{\text{maille}} U_i = 0.$$

1. La loi des nœuds et la loi des mailles sont appelées les lois de Kirchhoff. Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), physicien allemand, établit en 1845 les lois fondamentales de l'électricité.

Une maille est un contour fermé contenant des dipôles. Elle n'est pas nécessairement isolée du reste du circuit. Par exemple, sur la figure 9, il existe des connexions avec l'extérieur (non représentées) aux points A, E et D de la maille.

Application 4 Calcul d'une différence de potentiel

Déterminer la différence de potentiel U non précisée sur le schéma ci-dessous.



Solution

Dans le circuit, on a : $U_{BA} = 12 \text{ V}$; $U_{BC} = 3 \text{ V}$; $U_{CD} = 4 \text{ V}$; $U_{AD} = U$. La loi des mailles s'écrit :

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} = 0, \text{ avec } U_{AB} = -U_{BA} = -12 \text{ V} \text{ et } U_{DA} = -U_{AD} = -U.$$

On en déduit donc :

$$-12 + 3 + 4 - U = 0, \text{ soit : } U = -5 \text{ V}.$$

C. Puissance électrique

Dans un circuit, le fonctionnement des dipôles met en jeu de l'énergie.

C.1. Caractère générateur – caractère récepteur

• Un dipôle AB possède un **caractère générateur** si le courant réel circule dans le sens des potentiels croissants à travers ce dipôle. Un générateur fournit de l'énergie au circuit électrique.

Exemples : le réseau EDF 220 V, les générateurs électrochimiques (piles, accumulateurs), les générateurs électroniques commandés...

• Un dipôle AB possède un **caractère récepteur** si le courant réel circule dans le sens des potentiels décroissants à travers ce dipôle. Un récepteur reçoit de l'énergie du circuit électrique.

Exemples : les conducteurs ohmiques, les moteurs, de nombreux composants électroniques...

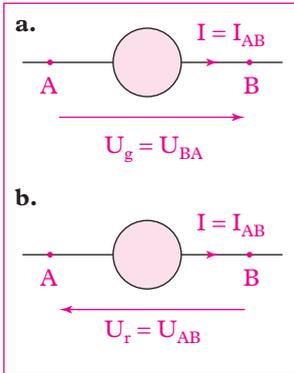


Fig. 10 -
a. Convention générateur.
b. Convention récepteur.

1. En revanche, en convention générateur (respectivement récepteur), si les grandeurs intensité et tension sont de signes opposés, alors le dipôle possède un caractère récepteur (respectivement générateur), car le courant réel circule dans le sens des potentiels décroissants (respectivement croissants).

2. Par définition, la charge algébrique totale traversant le dipôle AB pendant l'unité de temps est égale à l'intensité $I = I_{AB}$ du courant.

3. Dans ce paragraphe, toutes les grandeurs sont algébriques. Si la puissance P_g fournie par le dipôle AB est positive, alors le dipôle fournit effectivement de l'énergie aux charges (et la puissance P_r reçue par le dipôle des charges est bien négative). De même, si la puissance P_r reçue par le dipôle AB est négative, alors le dipôle reçoit effectivement de l'énergie de la part des charges (et la puissance P_g fournie par le dipôle aux charges est bien négative).

C.2. Convention générateur – convention récepteur

On considère un dipôle AB traversé par un courant orienté de la borne A vers la borne B. L'intensité $I = I_{AB}$ du courant est algébrique : I est positive si le courant réel circule de A vers B, négative si le courant réel circule de B vers A.

On peut alors étudier le dipôle AB selon deux conventions (fig. 10) :

- la **convention générateur**, où la tension mesurée aux bornes du dipôle est $U_g = U_{BA}$, orientée dans le même sens que l'intensité $I = I_{AB}$;
- la **convention récepteur**, où la tension mesurée aux bornes du dipôle est $U_r = U_{AB}$, orientée en sens inverse de l'intensité $I = I_{AB}$.

Ces deux conventions permettent de déterminer le caractère générateur ou récepteur du dipôle AB étudié. En effet :

- en convention générateur, si U_g et I ont le même signe (U_g et I positives ou U_g et I négatives), alors le courant réel circule dans le sens des potentiels croissants et le dipôle AB est générateur ;
- en convention récepteur, si U_r et I ont le même signe (U_r et I positives ou U_r et I négatives), alors le courant réel circule dans le sens des potentiels décroissants et le dipôle AB est récepteur.

En convention générateur (respectivement récepteur), si l'intensité traversant un dipôle et la tension à ses bornes ont le même signe, alors le dipôle possède un caractère générateur (respectivement récepteur)¹.

C.3. Puissance électrique d'un dipôle

Lorsqu'un courant circule dans un dipôle AB, des échanges d'énergie électrique ont lieu entre ce dipôle et les charges. L'énergie potentielle d'une charge q passant du point A (au potentiel V_A) au point B (au potentiel V_B) varie ainsi de la quantité $qV_B - qV_A = q(V_B - V_A) = qU_{BA}$. Par définition de l'intensité du courant, la variation d'énergie totale des charges traversant le dipôle pendant l'unité de temps est égale à la quantité algébrique $I_{AB}U_{BA}$ ². La puissance électrique P_g fournie par le dipôle aux charges vaut donc³ :

$$P_g = I_{AB}U_{BA} = IU_g.$$

À l'opposé, la puissance électrique P_r reçue par le dipôle AB des charges vaut :

$$P_r = -I_{AB}U_{BA} = I_{AB}U_{AB} = IU_r.$$

La **puissance électrique** s'exprime en watt (W) si l'intensité est en ampère (A) et la tension en volt (V) :

puissance fournie
(convention générateur)
 $P_g = U_g I$

puissance reçue
(convention récepteur)
 $P_r = U_r I$

- Le dipôle AB possède un caractère générateur si la puissance P_g qu'il fournit (calculée en convention générateur) est positive. La puissance $P_r = -P_g$ qu'il reçoit (calculée en convention récepteur) est alors négative.
- Le dipôle AB possède un caractère récepteur si la puissance P_r qu'il reçoit (calculée en convention récepteur) est positive. La puissance $P_g = -P_r$ qu'il fournit (calculée en convention générateur) est alors négative.

D. L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

1. La grandeur temporelle T caractéristique de l'évolution des grandeurs électriques est, par exemple, la période T du signal si celui-ci est périodique.

Un circuit est en régime « quasi-stationnaire » lorsque les tensions aux bornes des dipôles et l'intensité du courant varient « lentement ». On compare alors la grandeur temporelle T caractéristique de l'évolution des grandeurs électriques¹ avec une grandeur temporelle τ caractéristique du circuit, définie par le temps mis par le signal électrique pour parcourir le circuit de dimension L . Comme on peut associer à ce signal une onde se déplaçant à la célérité c de la lumière dans le vide (programme de deuxième année), on a :

$$\tau = \frac{L}{c}.$$

Définition 4

Un circuit de dimension L vérifie l'**approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)** si la grandeur temporelle τ liée au circuit est négligeable devant la grandeur temporelle T caractéristique de l'évolution des grandeurs électriques :

$$T \gg \tau = \frac{L}{c}, \text{ soit : } L \ll cT \text{ (c célérité de la lumière dans le vide).}$$

Les lois de Kirchhoff (loi des nœuds et loi des mailles), énoncées en régime permanent, restent valables pour les régimes quasi-stationnaires. De même, la puissance électrique d'un dipôle AB en régime quasi-stationnaire s'écrit : $P = ui$, en veillant à la convention choisie.

Application 5 Caractère lentement variable d'un circuit

À quelle condition sur la taille du circuit, peut-on considérer le courant fourni par EDF (de fréquence 50 Hz) comme un signal vérifiant l'approximation des régimes quasi-stationnaires ?

Solution

Le courant délivré par EDF est un courant sinusoïdal de fréquence 50 Hz, donc de période :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ s, soit : } cT = 3 \cdot 10^8 \times 20 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^6 \text{ m} = \mathbf{6\ 000\ km.}$$

L'approximation des régimes quasi-stationnaires est donc valable pour le domicile d'un particulier ou un site industriel, mais elle ne l'est pas pour l'ensemble du réseau français.

L'essentiel

✓ Éléments d'un circuit électrique

- Un **nœud** est un point du circuit reliant entre eux trois dipôles ou plus.
- Une **branche** est constituée par l'ensemble des dipôles compris entre deux nœuds consécutifs.
- Une **maille** est un ensemble de branches formant un contour fermé.

✓ Intensité du courant électrique

- L'intensité i du courant dans un circuit orienté est la grandeur algébrique correspondant au débit de charges à travers une section du circuit :

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad \left| \begin{array}{l} i \text{ intensité en ampère (A)} \\ Q \text{ charge en coulomb (C)} \\ t \text{ temps en seconde (s)} \end{array} \right.$$

- Le vecteur densité de courant \vec{j} (toujours orienté dans le sens du courant réel) caractérise le mouvement d'ensemble des porteurs de charges :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{V} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{j} \text{ densité de courant (A} \cdot \text{m}^{-2}\text{)} \\ \rho_m \text{ densité volumique de charges mobiles (C} \cdot \text{m}^{-3}\text{)} \\ \vec{V} \text{ vitesse moyenne des porteurs (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)} \end{array} \right.$$

S'il y a plusieurs types de porteurs de charges, le vecteur \vec{j} est la somme de toutes leurs contributions :

$$\vec{j} = \sum_k \vec{j}_k = \sum_k \rho_k \vec{V}_k.$$

- Si la densité \vec{j} du courant est uniforme, l'intensité I du courant traversant une section plane S du circuit orienté vaut :

$$I = \vec{j} \cdot \vec{n} S \quad \left| \begin{array}{l} S \text{ section du courant (m}^2\text{)} \\ \vec{j} \text{ densité de courant (A} \cdot \text{m}^{-2}\text{)} \\ \vec{n} \text{ vecteur normal à la section orientée} \end{array} \right.$$

✓ Potentiel électrique

- Le potentiel électrique V , défini à une constante additive près et exprimé en volt (V), est à l'origine du mouvement des charges dans le circuit.
- La différence de potentiel (ddp) ou tension U est une grandeur algébrique indépendante de l'origine des potentiels (en général, la masse du circuit).
- Dans un circuit, les différences de potentiel sont additives. Par exemple, on a : $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$.

✓ Lois de Kirchhoff

- **Loi des nœuds** : la somme des intensités I_i des courants algébriques arrivant à un nœud est égal à la somme des intensités I_j des courants algébriques s'éloignant de ce nœud :

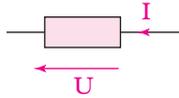
$$\sum_{\text{arrivant}} I_i = \sum_{\text{sortant}} I_j.$$

- **Loi des mailles** : la somme algébrique des différences de potentiel U_i mesurées en parcourant complètement une maille dans un sens donné est nulle :

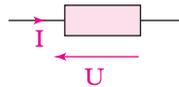
$$\sum_{\text{maille}} U_i = 0.$$

✓ Puissance électrique d'un dipôle

- En **convention générateur**, la tension U mesurée aux bornes du dipôle est orientée dans le même sens que l'intensité I le traversant.



- En **convention récepteur**, la tension U mesurée aux bornes du dipôle est orientée en sens inverse de l'intensité I le traversant.



- La puissance électrique P d'un dipôle est une grandeur algébrique. Dans la convention choisie, elle a pour expression :

$$P = UI \quad \left\{ \begin{array}{l} P \text{ puissance électrique du dipôle (W)} \\ U \text{ tension aux bornes du dipôle (V)} \\ I \text{ intensité traversant le dipôle (A)} \end{array} \right.$$

En convention générateur, la puissance P est la **puissance fournie** par le dipôle.

En convention récepteur, la puissance P est la **puissance reçue** par le dipôle.

✓ Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

Un circuit de dimension L vérifie l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) si la grandeur temporelle τ liée au circuit est négligeable devant la grandeur temporelle T caractéristique de l'évolution des grandeurs électriques :

$$T \gg \tau = \frac{L}{c}, \quad \text{soit : } L \ll cT \quad (c \text{ célérité de la lumière dans le vide}).$$

Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment vérifier la validité de l'électrocinétique ?

Il est judicieux, en préambule à l'étude d'un circuit électrique, de vérifier si les lois de l'électrocinétique peuvent effectivement s'appliquer à ce circuit. On se propose de vérifier ce point.

→ Savoir faire

- ❶ Identifier dans le descriptif du circuit, la grandeur L caractéristique de sa taille.
- ❷ Identifier de même la grandeur caractéristique de la durée d'évolution du signal électrique (ce peut être une fréquence, une période ou une pulsation). Convertir cette grandeur en un temps T .
- ❸ Calculer le rapport $\frac{L}{T}$. Si ce rapport est inférieur de deux ordres de grandeur à la célérité c de la lumière dans le vide ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), les lois de l'électrocinétique sont applicables.

→ Application

Un poste de radio capte un signal de 98,0 MHz à l'aide d'une antenne de 2,0 m. Le signal est filtré puis amplifié par un circuit dont la taille est inférieure à celle de l'antenne. L'électrocinétique classique s'applique-t-elle à ce signal ?

Solution

- 1 La taille du circuit complet n'excède pas deux fois celle de l'antenne : $L = 4,0$ m.
- 2 La fréquence du signal est 98,0 MHz, donc sa période vaut :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{98,0 \cdot 10^6} = 1,02 \cdot 10^{-8} \text{ s.}$$

- 3 Le rapport entre la taille du circuit et la grandeur caractéristique de l'évolution du signal électrique vaut :

$$\frac{L}{T} = \frac{4,0}{1,02 \cdot 10^{-8}} = 3,9 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ d'où : } \frac{L}{T} > c.$$

L'électrocinétique ne s'applique pas à la réception du signal, à interpréter dans le cadre de la théorie électromagnétique.

Méthode n° 2

Comment déterminer la vitesse des porteurs de charge dans un conducteur ?

Soit un milieu conducteur de section S , parcouru par un courant d'intensité I répartie uniformément sur cette section. On se propose de déterminer la vitesse et le sens de déplacement des porteurs de charges.

→ Savoir faire

- 1 Calculer le vecteur densité de courant \vec{j} :
 - de norme $j = \frac{I}{S}$;
 - de direction perpendiculaire à la section S ;
 - dans le sens de I si $I > 0$; dans le sens opposé à celui de I si $I < 0$ (\vec{j} est de même sens que le courant réel).
- 2 Déterminer la charge algébrique q d'un porteur de charge.
- 3 Déterminer la densité de charge libre ρ dans le conducteur. Selon la nature du milieu conducteur, cela nécessite de dénombrer :
 - les atomes et le nombre de porteurs libérés par ceux-ci dans un conducteur solide ;
 - les ions dans une solution conductrice.
- 4 Calculer le vecteur vitesse \vec{v} des porteurs de charges :
 - de norme $v = \frac{j}{|\rho|}$;
 - de direction perpendiculaire à la section S ;
 - de même sens que \vec{j} si les porteurs de charges ont une charge positive ; de sens opposé si les porteurs de charges ont une charge négative.



Dans le cas d'une solution conductrice, les porteurs de charges sont le plus souvent de deux types (anions et cations). Le vecteur densité de courant est lié aux vitesses de ces porteurs par :

$$\vec{j} = \rho^+ \vec{v}^+ + \rho^- \vec{v}^-.$$

Les vecteurs vitesse de deux ions de charges opposées sont généralement opposés.

→ Application

Dans un fil de cuivre de masse volumique $\mu = 8\,800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, les porteurs de charges sont les électrons de charges $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. La masse molaire du cuivre est $M_{\text{cu}} = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et le nombre d'Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Un atome de cuivre libère un électron de conduction.

On considère un fil de cuivre de section 1 mm^2 parcouru par un courant d'intensité 1 A .

Quelle est la vitesse des porteurs de charges ? Quel est leur sens de déplacement par rapport au sens du courant dans le circuit ?

Solution

❶ Le vecteur densité de courant a pour norme :

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{1 \cdot 10^{-6}} = 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}.$$

❷ Les électrons portent la charge négative $-e$.

❸ Le nombre d'atomes de cuivre par mètre cube est :

$$n_{\text{cu}} = \frac{\mu \cdot N_A}{M_{\text{cu}}} = \frac{8,8 \cdot 10^3 \times 6,02 \cdot 10^{23}}{63,5 \cdot 10^{-3}} = 8,3 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

Cela correspond à une densité de charges libres :

$$\rho = n_{\text{cu}} \times (-e) = -1,3 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}.$$

❹ Les porteurs de charges ont une vitesse :

$$v = \frac{j}{|\rho|} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Ils se déplacent dans le sens contraire du courant.

Méthode n° 3

Comment déterminer le caractère générateur/récepteur d'un dipôle ?

Soit un dipôle traversé par l'intensité algébrique I et soumis à la différence de potentiel U . On cherche à déterminer si ce dipôle est générateur ou récepteur.

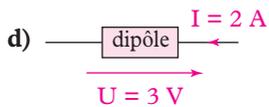
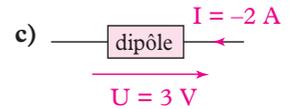
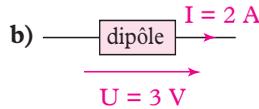
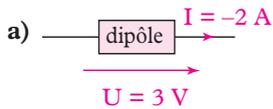
→ Savoir faire

- ❶ Identifier une convention pour l'étude de ce dipôle :
 - si I et U sont orientées dans le même sens, identifier la convention générateur ;
 - si I et U sont orientées en sens inverse, identifier la convention récepteur.

- 2 Déterminer le signe de la puissance algébrique $P = UI$ dans la convention choisie :
- si $P > 0$, alors le dipôle est de même nature que la convention (générateur-générateur ou récepteur-récepteur) ;
 - $P < 0$, alors le dipôle est de nature opposée à la convention (générateur-récepteur ou récepteur-générateur).

→ Application

Le dipôle ci-dessous a-t-il un caractère générateur ou récepteur ?



Solution

- a) 1 L'intensité I et la tension U étant orientées dans le même sens, on étudie le dipôle en convention générateur.
- 2 La puissance fournie par le dipôle $P_g = UI = -6 \text{ W}$ est négative, donc le dipôle est **récepteur**.
- b) 1 L'intensité I et la tension U étant orientées dans le même sens, on étudie le dipôle en convention générateur.
- 2 La puissance fournie par le dipôle $P_g = UI = 6 \text{ W}$ est positive, donc le dipôle est **générateur**.
- c) 1 L'intensité I et la tension U étant orientées en sens opposés, on étudie le dipôle en convention récepteur.
- 2 La puissance reçue par le dipôle $P_r = UI = -6 \text{ W}$ est négative, donc le dipôle est **générateur**.
- d) 1 L'intensité I et la tension U étant orientées en sens opposés, on étudie le dipôle en convention récepteur.
- 2 La puissance reçue par le dipôle $P_r = UI = 6 \text{ W}$ est positive, donc le dipôle est **récepteur**.



Les situations a) et d) d'une part, b) et c) d'autre part, sont identiques. La convention d'orientation du courant dans le circuit diffère, mais le courant réel traversant le dipôle est le même.

Exercices

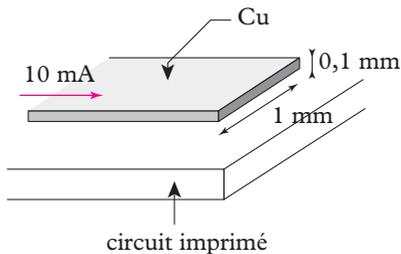
Niveau 1

Ex. 1 Densité de courant

Les liaisons électriques sur les cartes des circuits imprimés se font grâce à de fines couches de cuivre d'épaisseur 0,1 mm et de largeur 1 mm.

Le composant électrique placé sur le circuit débite dans la fine couche un courant de 10 mA.

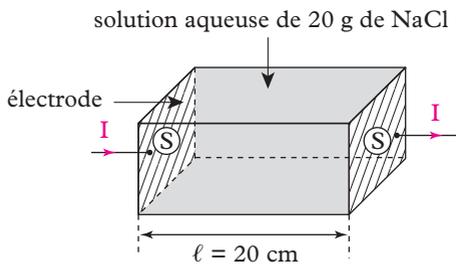
a) Quelle est la densité de courant j ?



b) Comparer cette densité de courant à celle d'une alimentation domestique dont les fils de section 1 mm^2 sont parcourus par un courant d'intensité 1 A.

Ex. 2 Vitesse des porteurs de charge

On dissout une masse $m = 20 \text{ g}$ de chlorure de sodium NaCl dans un bac électrolytique de longueur $\ell = 20 \text{ cm}$ et de section $S = 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ rempli d'eau. La dissolution est totale. On fait passer un courant d'intensité $I = 100 \text{ mA}$ entre deux électrodes situées aux deux extrémités de la cuve.



On donne : les masses molaires de chlore et du sodium $M_{\text{Cl}} = 35,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{\text{Na}} = 23 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; le nombre d'Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ et la charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Sachant que les vecteurs vitesse des ions chlorure et des ions sodium sont de sens opposés et dans le rapport 1,5, déterminer la vitesse et le sens de déplacement de ces ions.

Ex. 3 Référence des potentiels

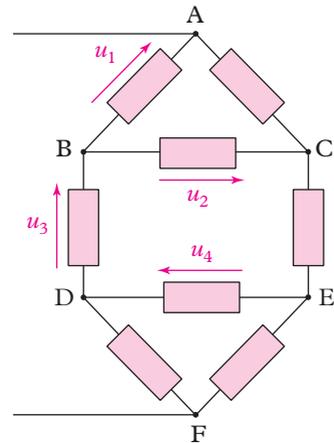
Lors d'une expérience, on a mesuré les potentiels des points A et F par rapport à la masse. On a, de même, mesuré les différences de potentiel u_1, u_2, u_3 , et u_4 .

On obtient les résultats suivants :

$$V_A = 7 \text{ V} \text{ et } V_F = -2 \text{ V}; \quad u_1 = 4 \text{ V}; \quad u_2 = 2 \text{ V}; \\ u_3 = 1 \text{ V} \text{ et } u_4 = 2 \text{ V}.$$

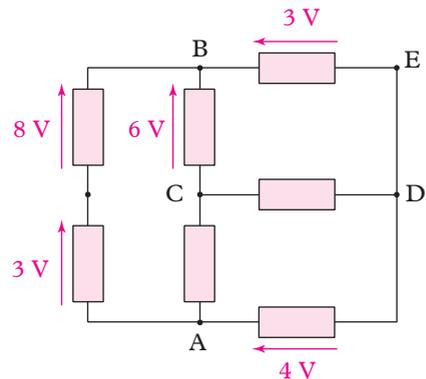
Déterminer les potentiels des points B, C, D et E.

Préciser le point relié à la masse.



Ex. 4 Loi des mailles

On considère le circuit suivant, dans lequel la nature des dipôles n'est pas précisée.



a) Dénombrer les mailles qui peuvent être définies dans ce circuit.

b) Appliquer la loi des mailles à chacune de celles-ci. Combien de relations indépendantes obtient-on ainsi ?

c) Déterminer les tensions u_{AC} , u_{CD} et u_{DF} .

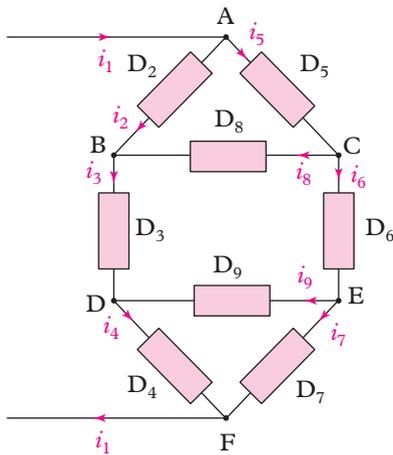
Ex. 5 Loi des nœuds – puissance

a) Dans l'expérience de l'exercice 3, on a mesuré les courants i_1, i_2, i_3 et i_4 . On a obtenu :

$$i_1 = 2 \text{ A}; \quad i_2 = 1 \text{ A}; \quad i_3 = 0,5 \text{ A} \text{ et } i_4 = 1,5 \text{ A}.$$

Déterminer les intensités des courants i_5, i_6, i_7, i_8, i_9 .

Niveau 2



b) On a mesuré les potentiels des points A, B, C, D, E et F, on a obtenu :

$$V_A = 7 \text{ V}; \quad V_B = 3 \text{ V}; \quad V_C = 5 \text{ V};$$

$$V_D = 2 \text{ V}; \quad V_E = 0 \text{ V} \text{ et } V_F = -2 \text{ V}.$$

Déterminer la puissance reçue par chaque dipôle.

Préciser ceux qui sont générateurs et ceux qui sont récepteurs.

c) Déterminer la puissance totale reçue par tous les dipôles. Vérifier la cohérence des résultats.

Ex. 6 Semi-conducteur

Les semi-conducteurs sont des matériaux utilisés en électronique et dont la conduction varie fortement avec la température ou avec la présence d'impureté.

Dans un semi-conducteur, il existe deux types de porteurs de charge :

– les électrons, de charge $-e$, de densité n_e ;

– les trous, de charge $+e$, de densité n_p .

À une température donnée, du fait des propriétés dues aux liaisons internes au semi-conducteur, le produit $n_e n_p = n_i^2$ est constant.

La présence des impuretés permet de modifier n_e ou n_p tout en maintenant le produit constant.

En l'absence d'impuretés, ces deux valeurs sont égales : $n_e = n_p = n_i$.

Pour le silicium, nous avons : $n_i = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$.

Dans les conditions d'étude, la vitesse des électrons est $12 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ et celle des trous est $5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$

a) Déterminer la densité de courant du silicium pur dans les conditions d'étude.

b) Comment varie la densité de courant avec n_e ? Tracer la courbe correspondante et interpréter.

Indications

Ex. 2 Utiliser la relation liant la densité de courant aux porteurs de charges.

Ex. 5 Appliquer la loi des nœuds.

Ex. 6 a) Les contributions des différents types de porteurs s'ajoutent.

b) Un extremum d'une courbe correspond à une dérivée nulle.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

a) La section d'une fine couche de cuivre est constante et vaut :

$$S = \ell e = 1 \times 0,1 = 0,1 \text{ mm}^2, \text{ c'est-à-dire } 1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2.$$

La densité de courant dans la couche est donnée par le rapport entre l'intensité du courant et la section du conducteur :

$$j = \frac{I}{S} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-7}} = 1 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}.$$



On peut appliquer cette formule parce que la densité de courant est homogène et la section du conducteur est constante.

b) De même, dans l'alimentation domestique, on a :

$$j = \frac{I}{S}, \text{ avec } I = 1 \text{ A et } S = 1 \text{ mm}^2 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.$$

$$\text{A.N. } j = \frac{1}{1 \cdot 10^{-6}} = 1 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}.$$

La densité de courant est plus grande dans l'alimentation domestique que dans le semi-conducteur.

Exercice 2



On applique la méthode n° 2 à la solution électrolytique.

La norme du vecteur densité de courant vaut :

$$j = \frac{I}{S} = \frac{0,1}{(0,1)^2} = 10 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Le vecteur \vec{j} est dans le sens du courant, car l'intensité I est positive. Les porteurs de charges sont les ions sodium Na^+ (de charge $+e$) et les ions chlorure Cl^- (de charge $-e$).

La masse molaire du chlorure de sodium est : $M_{\text{NaCl}} = M_{\text{Na}} + M_{\text{Cl}}$.

Le nombre d'ions Na^+ et Cl^- en solution est donc :

$$n_{\text{Na}^+} = n_{\text{Cl}^-} = \frac{m N_A}{(M_{\text{Na}^+} + M_{\text{Cl}^-})} = \frac{20 \times 6,02 \cdot 10^{23}}{(23 + 35,5)} = 2,06 \cdot 10^{23}.$$



Dans l'application numérique, on laisse les masses en g car elles interviennent par un rapport.

Ces ions sont dissous dans un volume $V = S\ell$, d'où :

$$\rho^+ = \frac{n_{\text{Na}^+} e}{S\ell} = \frac{2,06 \cdot 10^{23} \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{(0,1)^2 \times 0,2} = 1,65 \cdot 10^8 \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho^- = \frac{n_{\text{Cl}^-} e}{S\ell} = -1,65 \cdot 10^8 \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Ces deux densités de porteurs contribuent au vecteur densité de courant :

$$\vec{j} = \rho^+ \vec{v}^+ + \rho^- \vec{v}^- = \frac{5}{2} \rho^+ \vec{v}^+, \text{ soit : } \vec{v}^+ = \frac{2\vec{j}}{5\rho^+}.$$

On a : $\rho^- = -\rho^+$ et $\vec{v}^- = -\frac{3}{2}\vec{v}^+$.

A.N. $v^+ = \frac{2 \times 10}{5 \times 1,65 \cdot 10^8} = 2,42 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v^- = \frac{3}{2}v^+ = 3,65 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Les ions sodium vont dans le sens de l'intensité I, les ions chlorure vont dans l'autre sens.

Exercice 3

D'après la définition des différences de potentiel entre deux points, on a :

- $u_1 = V_A - V_B$, d'où $V_B = V_A - u_1 = 7 - 4 = 3 \text{ V}$.
- $u_2 = V_C - V_B$, d'où $V_C = V_B + u_2 = 3 + 2 = 5 \text{ V}$.
- $u_3 = V_B - V_D$, d'où $V_D = V_B - u_3 = 3 - 1 = 2 \text{ V}$.
- $u_4 = V_D - V_E$, d'où $V_E = V_D - u_4 = 2 - 2 = 0 \text{ V}$.

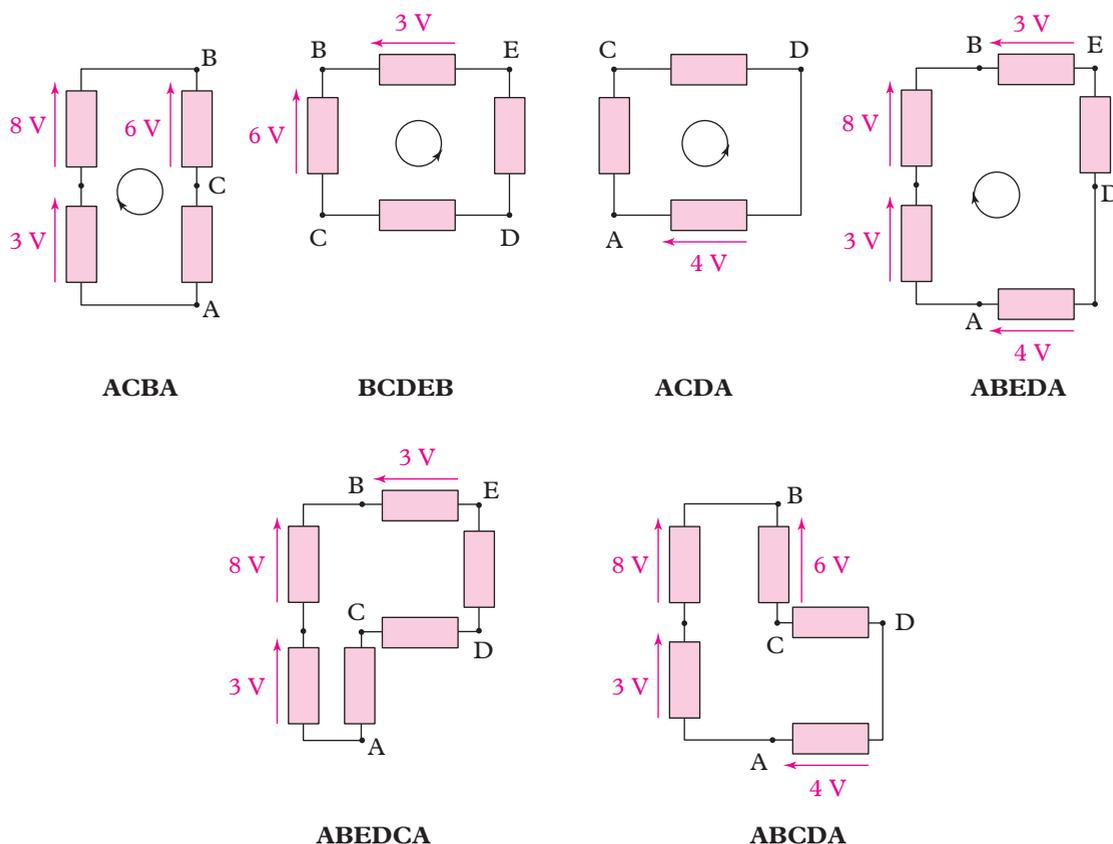
Le point E, de potentiel nul, est relié à la masse.

Exercice 4

a) On dénombre 6 mailles dans le circuit :

ACBA ; BCDEB ; ACDA ; ABEDA ; ABEDCA ; ABCDA.

b)



On obtient le système suivant :

- maille ACBA : $3 + 8 - 6 + u_{AC} = 0$ (1)

- maille BCDEB : $-6 + u_{DC} + u_{ED} + 3 = 0$ (2)
- maille ACDA : $u_{AC} + u_{CD} - 4 = 0$ (3)
- maille ABEDA : $3 + 8 - 3 + u_{DE} + 4 = 0$ (4)
- maille ABEDCA : $3 + 8 - 3 + u_{DE} + u_{CD} + u_{AC} = 0$ (5)
- maille ABCDA : $3 + 8 - 6 + u_{DC} + 4 = 0$. (6)

Les relations (1), (4) et (6) permettent de définir des tensions inconnues : elles sont donc **indépendantes**.

Les relations (2), (3) et (5) s'obtiennent par combinaison linéaire : elles ne sont donc pas **indépendantes**.



Par exemple, on a : $(5) = (1) + (4) - (6)$.

c) À partir de (1), (4) et (6), on trouve facilement :

$$u_{AC} = -5 \text{ V} ; \quad u_{DE} = -12 \text{ V} ; \quad u_{CD} = 9 \text{ V}.$$

Exercice 5

a) On détermine les intensités cherchées en appliquant la loi des nœuds :

- en A : $i_1 = i_2 + i_5$, d'où $i_5 = i_1 - i_2 = 2 - 1 = 1 \text{ A}$.
- en B : $i_2 + i_8 = i_3$, d'où $i_8 = i_3 - i_2 = 0,5 - 1 = -0,5 \text{ A}$.
- en C : $i_5 = i_8 + i_6$, d'où $i_6 = i_5 - i_8 = 1 - (-0,5) = 1,5 \text{ A}$.
- en D : $i_3 + i_9 = i_4$, d'où $i_9 = i_4 - i_3 = 1,5 - 0,5 = 1 \text{ A}$.
- en E : $i_6 = i_9 + i_7$, d'où $i_7 = i_6 - i_9 = 1,5 - 1 = 0,5 \text{ A}$.



Les courants sont algébriques : ils peuvent donc être négatifs.



En F, la loi des nœuds s'écrirait : $i_4 + i_7 = i_1$, ce qui est bien vérifié (car $1,5 + 0,5 = 2$).

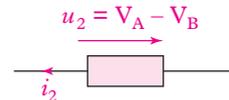
b) On calcule la puissance reçue par un dipôle en étudiant celui-ci en convention récepteur.



De même, on calcule la puissance fournie par un dipôle en se plaçant en convention générateur.

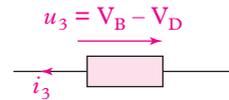
• La puissance reçue par le dipôle D_2 vaut :

$$\mathcal{P}_2 = u_2 i_2 = (V_A - V_B) i_2 = (7 - 3) \times 1 = 4 \text{ W}.$$



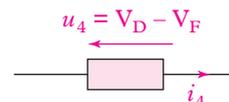
• La puissance reçue par le dipôle D_3 vaut :

$$\mathcal{P}_3 = u_3 i_3 = (V_B - V_D) i_3 = (3 - 2) \times 0,5 = 0,5 \text{ W}.$$



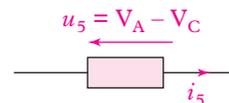
• La puissance reçue par le dipôle D_4 vaut :

$$\mathcal{P}_4 = u_4 i_4 = (V_D - V_F) i_4 = 2 - (-2) \times 1,5 = 6 \text{ W}.$$



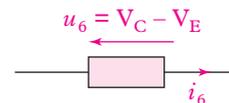
• La puissance reçue par le dipôle D_5 vaut :

$$\mathcal{P}_5 = u_5 i_5 = (V_A - V_C) i_5 = (7 - 5) \times 1 = 2 \text{ W}.$$



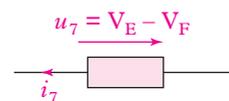
• La puissance reçue par le dipôle D_6 vaut :

$$\mathcal{P}_6 = u_6 i_6 = (V_C - V_E) i_6 = (5 - 0) \times 1,5 = 7,5 \text{ W}.$$



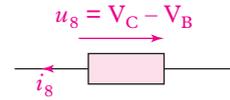
• La puissance reçue par le dipôle D_7 vaut :

$$\mathcal{P}_7 = u_7 i_7 = (V_E - V_F) i_7 = [0 - (-2)] \times 0,5 = 1 \text{ W}.$$



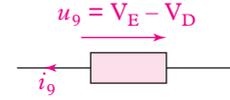
- La puissance reçue par le dipôle D_8 vaut :

$$\mathcal{P}_8 = u_8 i_8 = (V_C - V_B) i_8 = (5 - 3) \times (-0,5) = -1 \text{ W.}$$



- La puissance reçue par le dipôle D_9 vaut :

$$\mathcal{P}_9 = u_9 i_9 = (V_E - V_D) i_9 = (0 - 2) \times 1 = -2 \text{ W.}$$



Les puissances $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5, \mathcal{P}_6$ et \mathcal{P}_7 sont positives : les dipôles D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 et D_7 sont des **récepteurs**.

Les puissances \mathcal{P}_8 et \mathcal{P}_9 sont négatives : les dipôles D_8 et D_9 sont des **générateurs**.

- c) • La puissance totale reçue par l'ensemble des dipôles est :

$$\mathcal{P}_1 = \sum_{i=2}^9 \mathcal{P}_i = 4 + 0,5 + 6 + 2 + 7,5 + 1 - 1 - 2 = 18 \text{ W.}$$

- La différence de potentiel u_1 , en convention récepteur, appliquée aux bornes du réseau entre A et F est :

$$u_1 = V_A - V_F = 7 - (-2) = 9 \text{ V.}$$

La puissance reçue est : $\mathcal{P}_1 = u_1 i_1 = 18 \text{ W}$, donc les résultats sont bien **cohérents**.



Cette égalité traduit la conservation de l'énergie dans le réseau électrique.

Exercices de niveau 2

Exercice 6

- a) Dans le silicium, se déplacent deux types de porteurs de charges :

- les électrons ($\rho_e = -n_e e$), à la vitesse $v_e = 0,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en sens inverse du courant ;
- les trous ($\rho_p = n_p e$), à la vitesse $v_p = 0,05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le sens du courant.

Les deux contributions s'ajoutent pour créer la densité de courant :

$$\mathbf{j} = n_e e v_e + n_p e v_p = (n_e v_e + n_p v_p) e.$$



Le vecteur densité de courant \vec{j} est la somme de deux termes : $\vec{j}_e = -n_e e \vec{v}_e$ et $\vec{j}_p = n_p e \vec{v}_p$, colinéaires et de même sens. On a donc bien : $\mathbf{j} = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_p$.

Dans le cas du silicium pur, on a $n_e = n_p = n_i$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= n_i e (\mathbf{v}_e + \mathbf{v}_p) \\ &= 1,5 \cdot 10^{16} \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times (0,12 + 0,05) = 4,08 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}. \end{aligned}$$



Malgré une vitesse relativement importante des porteurs de charges, la densité de courant reste faible : le silicium pur conduit très mal le courant.

- b) En présence d'impuretés, le produit $n_e n_p = n_i^2$ est constant, donc la densité de courant vaut :

$$\mathbf{j} = \left(n_e \mathbf{v}_e + \frac{n_i^2}{n_e} \mathbf{v}_p \right) e, \text{ avec } n_p = \frac{n_i^2}{n_e}.$$

- Quand $n_e \rightarrow 0$, n_p devient très grand et j devient très grand :

$$j \approx n_p v_p e = \frac{n_i^2}{n_e} v_p e.$$

- Quand $n_e \rightarrow \infty$, n_p devient négligeable et j devient très grand :

$$j \approx n_e v_e e.$$

- La densité de courant passe par un extremum quand la dérivée de j par rapport à n_e s'annule et change de signe. Or, on a :

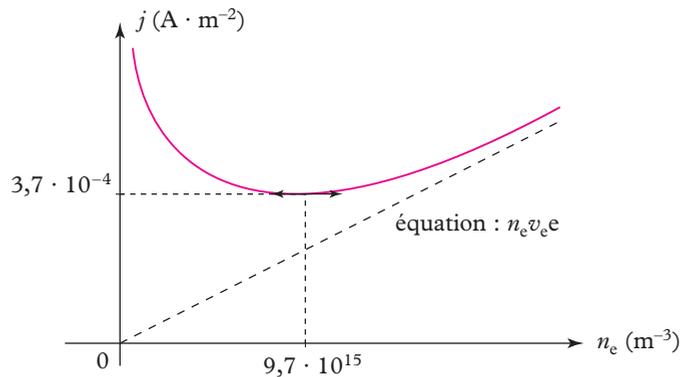
$$\frac{dj}{dn_e} = \left(v_e - \frac{n_i^2}{n_e^2} v_p \right) \times e, \text{ d'où : } \frac{dj}{dn_e} = 0 \text{ pour } n_{e_0} = n_i \sqrt{\frac{v_p}{v_e}}.$$

La valeur de j correspondante est alors :

$$j_0 = n_{e_0} e \times \left(v_e + \frac{n_i^2}{n_{e_0}} v_p \right) = 2 n_{e_0} e v_e = 2 n_i e \sqrt{v_p v_e}.$$

A.N. $j_0 = 2 \times 1,5 \cdot 10^{16} \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times \sqrt{0,05 \times 0,12} = 3,7 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}.$

$$n_{e_0} = 1,5 \cdot 10^{16} \times \sqrt{\frac{0,05}{0,12}} = 9,7 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-3}.$$



La courbe admet deux asymptotes : l'axe des ordonnées en 0 et la droite d'équation $j = n_e v_e e$ en $+\infty$.

On remarque que la densité de courant est presque minimale pour le silicium pur. La présence d'impuretés permet d'augmenter la conduction.

Modélisations linéaires d'un dipôle

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudierons les dipôles en régime permanent, c'est-à-dire parcourus par des courants constants. De nombreux dipôles ont alors pour caractéristique une droite dans leur domaine d'utilisation. Dans ce cas, on peut effectuer une modélisation linéaire du dipôle, encore valable dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

Plan du chapitre 2

A. Caractéristique d'un dipôle	32
1. Définition de la caractéristique	32
2. Dipôles passifs, dipôles actifs	32
3. Point de fonctionnement du circuit	33
B. Les conducteurs ohmiques	33
1. La loi d'Ohm	33
2. Effet Joule	34
3. Association de conducteurs ohmiques	34
4. Loi des nœuds exprimée en termes de potentiels	36
C. Les dipôles générateurs	37
1. Caractéristique d'un générateur	37
2. Les générateurs idéaux	37
3. Modélisation linéaire d'un générateur	38
4. Puissance fournie par un générateur	40
D. Les dipôles récepteurs	41
1. Modélisation linéaire d'un récepteur	41
2. Association de dipôles	42
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	43
Énoncés des exercices	54
Indications	58
Solution des exercices	59

A. Caractéristique d'un dipôle

Dans la suite, les dipôles étudiés vérifient l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

A.1. Définition de la caractéristique

1. En convention générateur, on représente la tension u_g en fonction de l'intensité i et en convention récepteur, on représente la tension u_r en fonction de l'intensité i .

2. Les deux caractéristiques $u = f(i)$ et $i = f(u)$ sont fonctions réciproques l'une de l'autre. Les courbes se déduisent alors l'une de l'autre par symétrie par rapport à la première bissectrice du repère.

Définition 1

On appelle caractéristique d'un dipôle la courbe représentant la tension u à ses bornes en fonction de l'intensité i du courant qui le traverse. La caractéristique d'un dipôle dépend de la convention choisie¹.

On peut tracer deux sortes de caractéristiques :

– la caractéristique tension-courant $u = f(i)$ (l'intensité i est en abscisses et la tension u en ordonnées) ;

– la caractéristique courant-tension $i = f(u)$ (la tension u est en abscisses et l'intensité i en ordonnées)².

Si la caractéristique est une droite, on dit qu'elle est **linéaire**. On parle parfois de dipôle linéaire.

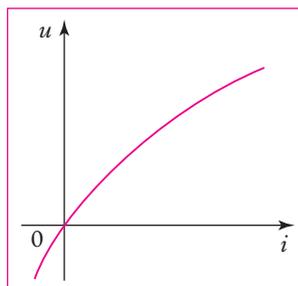


Fig. 1 - Caractéristique tension-courant d'un dipôle passif (tracée en convention récepteur).

A.2. Dipôles passifs, dipôles actifs

Lors du passage du courant, un transfert d'énergie s'effectue du dipôle vers le milieu extérieur.

A.2.1 - Les dipôles passifs

Un dipôle est passif lorsque l'énergie électrique qu'il reçoit est complètement dégradée en énergie thermique. La puissance électrique \mathcal{P}_r reçue par le dipôle est positive : c'est donc un récepteur.

La caractéristique tension-courant $u = f(i)$ d'un dipôle passif passe par l'origine des axes (fig. 1). En convention récepteur, elle appartient aux deux quadrants du plan :

$$(u > 0 \text{ et } i > 0) \text{ et } (u < 0 \text{ et } i < 0).$$

Exemples de dipôles passifs : les conducteurs ohmiques, les diodes, de nombreux composants électroniques.

A.2.2 - Les dipôles actifs

Un dipôle est actif lorsqu'une partie de l'énergie qu'il fournit au milieu extérieur n'est pas de l'énergie thermique.

• Les générateurs convertissent de l'énergie en énergie électrique qu'ils fournissent au circuit. Par exemple, il y a conversion d'énergie chimique en énergie électrique dans une batterie ou une pile. La puissance électrique \mathcal{P}_g fournie par le générateur est positive.

• Les récepteurs convertissent de l'énergie électrique en une autre forme d'énergie. Par exemple, il y a conversion d'énergie électrique en énergie mécanique dans un moteur électrique. La puissance électrique \mathcal{P}_r reçue par le récepteur est positive.

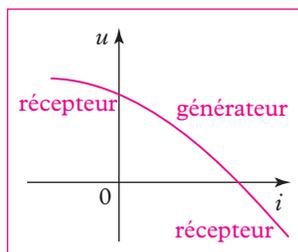


Fig. 2 - Caractéristique tension-courant d'un dipôle actif (tracée en convention générateur).

La caractéristique tension-courant $u = f(i)$ d'un dipôle actif ne passe pas par l'origine des axes (fig. 2).

Remarque

Les fonctionnements d'un récepteur et d'un générateur sont semblables.

Un moteur convertit de l'énergie électrique en énergie mécanique, récupérée grâce au couple exercé sur l'arbre du moteur en rotation. À l'inverse, un couple moteur est exercé sur l'arbre d'une génératrice, qui, en tournant, convertit de l'énergie mécanique en énergie électrique.

De même, lorsqu'elle se décharge, une batterie convertit de l'énergie chimique en énergie électrique. En revanche, lorsqu'elle se charge, elle fonctionne en récepteur : l'énergie électrique est ainsi convertie en énergie chimique.

A.3. Point de fonctionnement du circuit

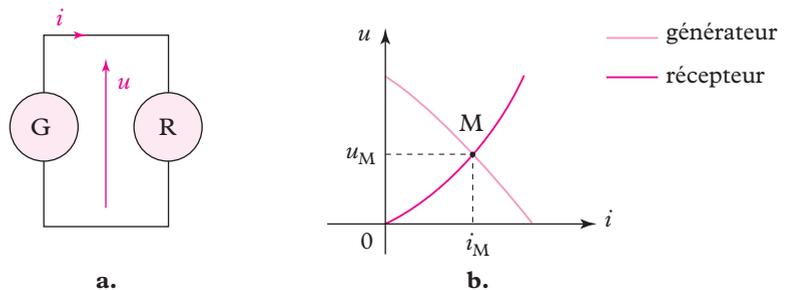


Fig. 3 - Le point de fonctionnement M du circuit est à l'intersection des deux caractéristiques.

On considère le circuit constitué par un dipôle générateur (G) et un dipôle récepteur (R) passif ou actif (fig. 3a). La tension u aux bornes des deux dipôles est la même et l'intensité i du courant qui les traverse est égale.

On représente sur un même graphe les caractéristiques tension-courant des deux dipôles (fig. 3b) : la caractéristique de G est tracée en convention générateur et la caractéristique de R est tracée en convention récepteur.

L'intersection des deux courbes définit le point de fonctionnement M du montage : l'abscisse i représente l'intensité du courant dans le circuit et l'ordonnée u la tension commune aux deux dipôles.

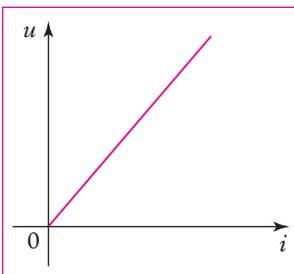


Fig. 4 - Caractéristique tension-courant d'un conducteur ohmique (tracée en convention récepteur).

B. Les conducteurs ohmiques

B.1. La loi d'Ohm

La caractéristique d'un conducteur ohmique est une droite passant par l'origine des axes (fig. 4).

Loi 1

En convention récepteur, un conducteur ohmique vérifie la loi d'Ohm¹ :

$$u = Ri$$

u tension en volt (V)

i intensité en ampère (A)

R résistance en ohm (Ω)

1. Georg Simon Ohm (1789-1854), physicien allemand, énonça en 1827 les lois fondamentales de l'électricité et introduisit la notion de force électromotrice (fém).

2. On a : $1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1}$.

On définit de même la conductance G du conducteur ohmique, exprimée en siemens (S)² :

$$G = \frac{1}{R}, \text{ d'où : } i = Gu.$$

B.2. Effet Joule

1. James Prescott Joule (1818-1889), physicien britannique, étudia l'énergie thermique dégagée par les conducteurs en 1841 et établit en 1842 l'équivalent mécanique de la calorie.

La puissance reçue par un conducteur ohmique, appelée effet Joule¹ et entièrement dégradée sous forme thermique, a pour expression :

$$P_r = R i^2 = G u^2, \text{ avec } R \text{ en } \Omega \text{ et } G \text{ en } S.$$

Dans un premier temps, la température du conducteur ohmique augmente jusqu'à atteindre une valeur constante. Lorsque l'équilibre thermique est atteint, la puissance thermique dissipée par le conducteur ohmique est alors égale à la puissance électrique reçue par le dipôle.

B.3. Association de conducteurs ohmiques

B.3.1 - Division de tension (association série)

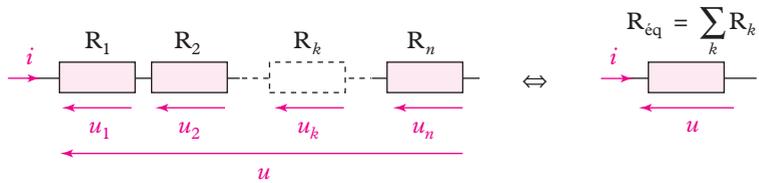


Fig. 5 - Association série de n conducteurs ohmiques et résistance équivalente.

On considère l'association en série de n conducteurs ohmiques traversés par le même courant d'intensité i (fig. 5). En convention récepteur, la tension u totale aux bornes de l'association vaut (addition des tensions) :

$$u = \sum_k u_k = \sum_k R_k i = \left(\sum_k R_k \right) i, \text{ soit : } u = R_{\text{éq}} i \text{ avec } R_{\text{éq}} = \sum_k R_k.$$

L'association série de n conducteurs ohmiques de résistances R_k est équivalente à un conducteur ohmique unique de résistance :

$$R_{\text{éq}} = \sum_k R_k.$$

La tension u_k aux bornes du conducteur ohmique de résistance R_k vaut :

$$u_k = R_k i, \text{ soit : } u_k = \frac{R_k}{R_{\text{éq}}} u.$$

Diviseur de tension

Dans l'association série de n conducteurs ohmiques, la tension u_k aux bornes du conducteur ohmique de résistance R_k est² :

$$u_k = \frac{R_k}{R_{\text{éq}}} u = \frac{R_k}{\sum_k R_k} u.$$

Exemple : si les conducteurs ohmiques de résistance R_1 et R_2 sont associés en série, alors la tension u_1 aux bornes de la résistance R_1 vaut :

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u.$$

2. Pour appliquer la propriété de division de tension, il faut veiller, d'une part, à ce que la même intensité i traverse tous les conducteurs ohmiques, et d'autre part, à ce que la tension totale u soit égale à la somme des tensions u_k à leurs bornes.

B.3.2 - Division de courant (association parallèle)

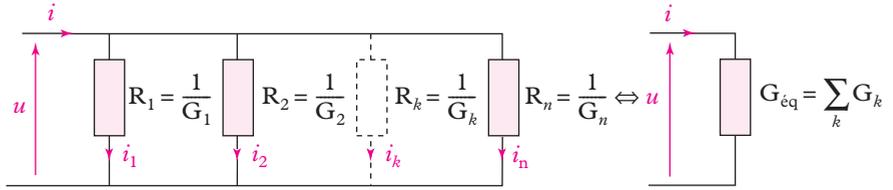


Fig. 6 - Association parallèle de n conducteurs ohmiques et conductance équivalente.

On considère l'association en parallèle de n conducteurs ohmiques soumis à la même tension u (fig. 6). En convention récepteur, l'intensité i totale du courant traversant l'association vaut (loi des nœuds) :

$$i = \sum_k i_k = \sum_k G_k u = \left(\sum_k G_k \right) u, \text{ soit : } i = G_{\text{éq}} u \text{ avec } G_{\text{éq}} = \sum_k G_k.$$

1. On a : $G_{\text{éq}} = \frac{1}{R_{\text{éq}}} = \sum_k \frac{1}{R_k}$.

L'association parallèle de n conducteurs ohmiques de conductances G_k est équivalente à un conducteur ohmique unique de conductance¹ :

$$G_{\text{éq}} = \sum_k G_k.$$

L'intensité i_k dans le conducteur ohmique de conductance G_k vaut :

$$i_k = G_k u, \text{ soit : } i_k = \frac{G_k}{G_{\text{éq}}} i.$$

2. Pour appliquer la propriété de division de courant, il faut veiller, d'une part, à ce que tous les conducteurs ohmiques soient soumis à la même tension u , et d'autre part, à ce que l'intensité totale i soit égale à la somme des intensités i_k les traversant.

Diviseur de courant

Dans l'association parallèle de n conducteurs ohmiques, l'intensité i_k du courant traversant le conducteur ohmique de conductance G_k est² :

$$i_k = \frac{G_k}{G_{\text{éq}}} i = \frac{G_k}{\sum_k G_k} i.$$

Exemple : si les conducteurs ohmiques de résistance R_1 et R_2 sont associés en parallèle, alors l'intensité i_1 traversant la résistance R_1 est :

$$i_1 = \frac{G_1}{G} i, \text{ soit : } i_1 = \frac{1}{R_1} \times \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \times i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i.$$

Application 1 Résistance équivalente à un réseau

Dans le montage schématisé ci-contre, on a : $R_1 = 2,0 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 2,0 \text{ k}\Omega$ et $R_3 = 500 \text{ }\Omega$. Déterminer la résistance $R_{\text{éq}}$ équivalente au montage entre les points A et B.

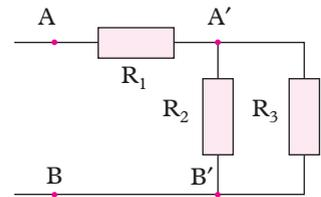
Solution

• Les résistances R_2 et R_3 sont en parallèle entre A' et B'. La résistance équivalente $R_{//}$ vaut :

$$\frac{1}{R_{//}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}, \text{ soit : } R_{//} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 400 \text{ }\Omega.$$

• La résistance $R_{//}$ est en série avec R_1 entre A et B. La résistance équivalente du montage est donc :

$$R_{\text{éq}} = R_1 + R_{//} = 2,4 \text{ k}\Omega.$$



B.4. Loi des nœuds exprimée en termes de potentiels

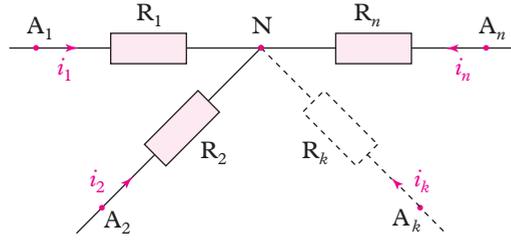


Fig. 7 - Les n conducteurs ohmiques sont reliés au nœud N.

On considère n conducteurs ohmiques reliés en un même nœud N d'un circuit électrique (fig. 7). La loi d'Ohm appliquée à chaque conducteur ohmique s'écrit¹ :

1. La tension $u_k = V_{A_k} - V_N$ est la tension aux bornes du conducteur ohmique R_k étudié en convention récepteur.

$$i_k = G_k u_k = G_k (V_{A_k} - V_N) = \frac{V_{A_k} - V_N}{R_k}.$$

Or, d'après la loi des nœuds en N :

$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots = 0, \text{ d'où : } \sum_k \frac{V_{A_k} - V_N}{R_k} = 0.$$

Théorème 1

Théorème de Millman

La loi des nœuds exprimée en tension s'écrit :

$$V_N \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \right) = \frac{V_{A_1}}{R_1} + \frac{V_{A_2}}{R_2} + \frac{V_{A_3}}{R_3} + \dots$$

Exprimé en termes de conductances, le théorème de Millman s'écrit :

$$V_N (G_1 + G_2 + G_3 + \dots) = G_1 V_{A_1} + G_2 V_{A_2} + G_3 V_{A_3} + \dots$$

Application 2 Calcul du courant dans une résistance

Déterminer grâce au théorème de Millman l'intensité i du courant traversant le conducteur ohmique de résistance r .

Solution

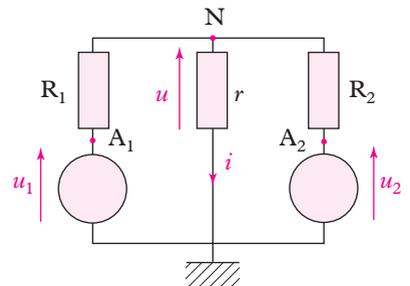
Sur le schéma, la masse impose l'origine des potentiels. Le potentiel V_N représente la tension $u = V_N - 0 = r i$ aux bornes de la résistance r . On a en outre : $V_{A_1} = u_1$ et $V_{A_2} = u_2$.

D'où, d'après le théorème de Millman :

$$V_N \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2}, \text{ soit : } i \left(1 + \frac{r}{R_1} + \frac{r}{R_2} \right) = \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2}.$$

Finalement, on obtient :

$$i = \frac{\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2}}{1 + \frac{r}{R_1} + \frac{r}{R_2}}, \text{ soit : } i = \frac{R_2 u_1 + R_1 u_2}{R_1 R_2 + r(R_1 + R_2)}.$$



C. Les dipôles générateurs

C.1. Caractéristique d'un générateur

La caractéristique d'un dipôle générateur ne passe pas par l'origine des axes. En convention générateur, il s'agit d'une courbe quelconque, difficilement exploitable. En pratique, cependant, les conditions d'utilisation sont telles que seule une petite partie de la caractéristique est concernée. Localement, la caractéristique d'un générateur réel peut donc être modélisée par une droite.

C.2. Les générateurs idéaux

Les modèles idéaux des générateurs ont des caractéristiques linéaires.

C.2.1 - Générateur de tension idéal

Définition 2

Un générateur idéal de tension (fig. 8) délivre une tension constante E quel que soit le courant i , positif ou négatif, débité par celui-ci.

La caractéristique $u = f(i)$ d'un générateur idéal de tension est une droite horizontale.

La puissance fournie par un tel générateur est $\mathcal{P}_g = Ei$.

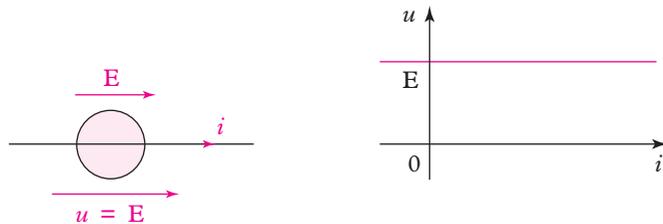


Fig. 8 - Schématisation d'un générateur idéal de tension et caractéristique en convention générateur.

C.2.2 - Générateur de courant idéal

Définition 3

Un générateur idéal de courant (fig. 9) délivre un courant d'intensité constante η quelle que soit la tension, positive ou négative, aux bornes de celui-ci.

La caractéristique $u = f(i)$ d'un générateur idéal de courant est une droite verticale.

La puissance fournie par un tel générateur est $\mathcal{P}_g = \eta u$.

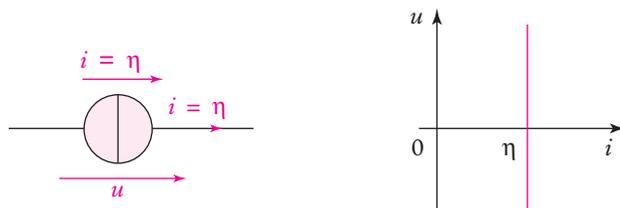


Fig. 9 - Schématisation d'un générateur idéal de courant et caractéristique en convention générateur.

C.2.3 - Association de générateurs idéaux

• Association série de générateurs de tension idéaux

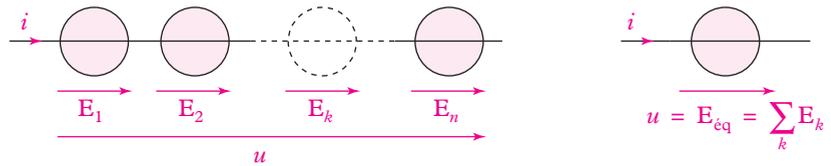


Fig. 10 - Association série de n générateurs idéaux de tension et générateur équivalent.

On considère l'association en série de n générateurs de tension idéaux (fig. 10). L'intensité du courant traversant chaque générateur est la même.

Par additivité des tensions, l'association série est équivalente à un générateur de tension idéal unique tel que :

$$E_{\text{éq}} = \sum_k E_k.$$

• Association parallèle de générateurs de courant idéaux

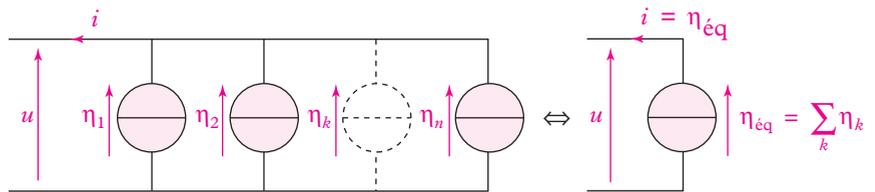


Fig. 11 - Association parallèle de n générateurs idéaux de courant et générateur équivalent.

On considère l'association en parallèle de n générateurs de courant idéaux (fig. 11). La tension aux bornes de chaque générateur est la même. D'après la loi des nœuds, l'association parallèle est équivalente à un générateur de courant idéal unique tel que :

$$\eta_{\text{éq}} = \sum_k \eta_k.$$

C.3. Modélisation linéaire d'un générateur

C.3.1 - Représentation de Thévenin

• Modèle de Thévenin

Définition 4

Dans un domaine où elle est linéaire, la caractéristique $u = f(i)$ d'un générateur réel a pour équation (en convention générateur) :

$$u = E - Ri,$$

où E est la force électromotrice (fém) du générateur en volt (V) et R sa résistance interne en ohm (Ω).

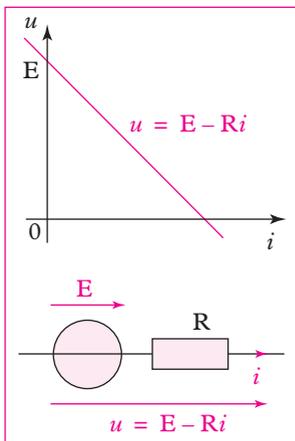


Fig. 12 - Caractéristique tension-intensité d'un générateur linéaire et modèle de Thévenin associé.

La fém E est l'ordonnée à l'origine de la droite $u = f(i)$. En pratique, elle se mesure à l'aide d'un voltmètre lorsque le courant débité par le générateur est nul : elle est donc égale à la tension à vide aux bornes du générateur (si $i = 0$, on a $u = E$).

On peut modéliser le générateur réel ainsi linéarisé par un générateur idéal de tension E en série avec un conducteur ohmique de résistance R (fig. 12). Ce modèle, appelé **modèle de Thévenin**, est valable si le générateur délivre de faibles courants. La tension u à ses bornes est alors voisine de sa fém E .

• Association série de générateurs linéaires

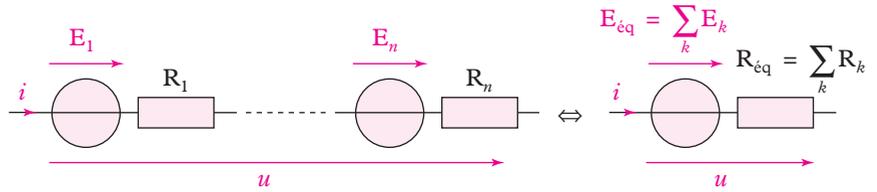


Fig. 13 - Association série de n générateurs linéaires et générateur de Thévenin équivalent.

On considère l'association en série de n générateurs de Thévenin (E_k, R_k) traversés chacun par la même intensité i (fig. 13). Les lois d'association en série des générateurs de tension idéaux et des résistances s'appliquent au circuit.

L'association en série de n générateurs de Thévenin (E_k, R_k) est équivalente à un générateur de Thévenin unique ($E_{éq}, R_{éq}$) tel que :

$$E_{éq} = \sum_k E_k \quad \text{et} \quad R_{éq} = \sum_k R_k.$$

C.3.2 - Représentation de Norton

• Modèle de Norton

Définition 5

Dans un domaine où elle est linéaire, la caractéristique $i = f(u)$ d'un générateur réel a pour équation (en convention générateur) :

$$i = \eta - Gu,$$

où η est le courant électromoteur (cém) du générateur en ampère (A) et G sa conductance interne en siemens (S).

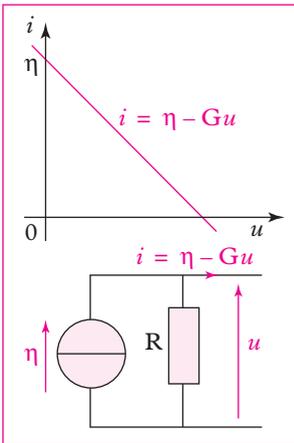


Fig. 14 - Caractéristique intensité-tension d'un générateur linéaire et modèle de Norton associé.

Le cém E est l'ordonnée à l'origine de la droite $i = f(u)$. En pratique, il se mesure à l'aide d'un ampèremètre lorsque la tension aux bornes du générateur est nul : il est donc égal au courant de court-circuit délivré par le générateur (si $u = 0$, on a $i = \eta$).

On peut modéliser le générateur réel ainsi linéarisé par un générateur idéal de courant η en parallèle avec un conducteur ohmique de résistance R (fig. 14). Ce modèle, appelé **modèle de Norton**, est valable si la tension u aux bornes du générateur est proche de zéro, c'est-à-dire au voisinage du court-circuit.

• Association parallèle de générateurs linéaires

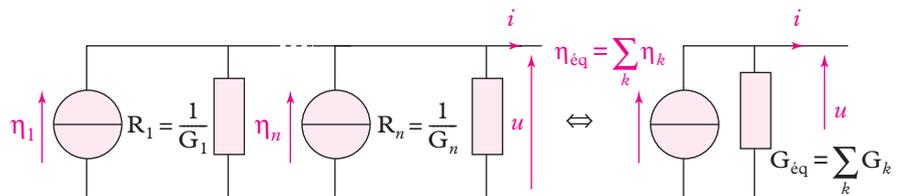


Fig. 15 - Association parallèle de n générateurs linéaires et générateur de Norton équivalent.

On considère l'association en parallèle de n générateurs de Norton (η_k, G_k) soumis chacun à la même tension u (fig. 15). Les lois d'association en parallèle des générateurs de courant idéaux et des conductances s'appliquent au circuit.

L'association en parallèle de n générateurs de Norton (η_k, G_k) est équivalente à un générateur de Norton unique ($\eta_{\text{éq}}, G_{\text{éq}}$) tel que :

$$\eta_{\text{éq}} = \sum_k \eta_k \quad \text{et} \quad G_{\text{éq}} = \sum_k G_k.$$

C.3.3 - Passage d'une représentation à l'autre

Dans le modèle de Thévenin, la fém E est égale à la tension à vide aux bornes du générateur ($i = 0$). De même, dans le modèle de Norton, le cém η est le courant de court-circuit délivré par le générateur ($u = 0$).

Si le générateur est linéaire pour des intensités comprises dans l'intervalle $[0, \eta]$ (c'est-à-dire, pour des tensions comprises dans l'intervalle $[0, E]$), les modèles de Thévenin et de Norton sont valables. On a alors :

$$u = E - Ri = E - R(\eta - Gu) = E - R\eta + RG_u, \quad \text{soit : } E - R\eta = 0.$$

Les modèles de Thévenin et de Norton sont équivalents. On passe de l'un à l'autre par la relation¹ :

$$E = R\eta$$

E tension à vide en volt (V)

R résistance interne en ohm (Ω)

η courant de court-circuit en ampère (A)

1. Le générateur idéal de tension du modèle de Thévenin et le générateur idéal de courant du modèle de Norton sont orientés dans le même sens.

Application 3 Générateur de courant

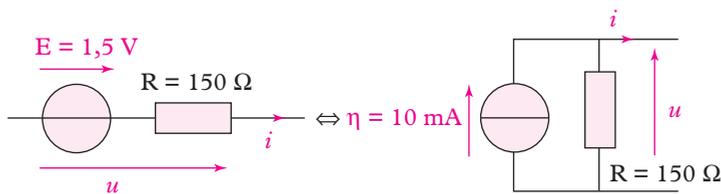
Un générateur électrochimique linéaire délivre une tension à vide $E = 1,5$ V. Sa résistance interne vaut $R = 150 \Omega$. Donner les représentations de Thévenin et de Norton de ce générateur.

Solution

Dans le modèle de Norton, le générateur de courant idéal associé délivre une intensité :

$$\eta = \frac{E}{R} = \frac{1,5}{150} = 10 \text{ mA}.$$

Les représentations équivalentes de Thévenin et de Norton du générateur sont donc :



C.4. Puissance fournie par un générateur

La puissance électrique fournie par un générateur est :

$$\mathcal{P}_g = ui,$$

où i est l'intensité du courant traversant le générateur et u la tension à ses bornes en convention générateur.

• Dans la représentation de Thévenin, on a :

$$u = E - Ri, \quad \text{d'où : } \mathcal{P}_g = \mathbf{Ei} - \mathbf{Ri}^2.$$

– Le terme Ei représente la puissance fournie par le générateur idéal de tension.

– Le terme Ri^2 représente la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance interne².

2. La puissance électrique fournie par la résistance interne, négative, est $-Ri^2$. Elle correspond à la puissance électrique reçue positive Ri^2 .

- Dans la représentation de Norton, on a :

$$i = \eta - Gu, \text{ d'où : } \mathcal{P}_g = \eta u - Gu^2.$$

- Le terme ηu représente la puissance fournie par le générateur idéal de courant.
- Le terme Gu^2 représente la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance interne¹.

1. La puissance électrique fournie par la résistance interne est $-Gu^2$. Elle correspond à la puissance électrique reçue positive Gu^2 .

D. Les dipôles récepteurs

D.1. Modélisation linéaire d'un récepteur

D.1.1 - Caractéristique d'un récepteur

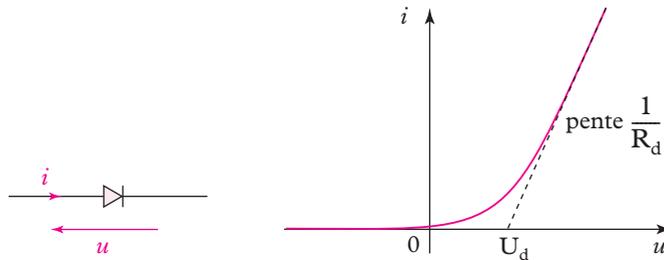


Fig. 16 - Schéma d'une diode et caractéristique courant-tension en convention récepteur.

Les caractéristiques de beaucoup de récepteurs peuvent être linéarisées. Ainsi, la caractéristique courant-tension $i = f(u)$ d'une diode est constituée, en convention récepteur, par deux portions de droites (fig. 16).

- Quand $u < U_d$, l'équation de la portion de droite est $i = 0$; la diode est équivalente à un coupe-circuit (le courant ne circule pas).
- Quand $u > U_d$, l'équation de la portion de droite est : $u = U_d + R_d i$; la diode se comporte donc comme un générateur idéal de tension $E' = U_d$ en série avec un conducteur ohmique de résistance $R' = R_d$.

D.1.2 - Représentation d'un récepteur

Définition 6

Dans un domaine où elle est linéaire, la caractéristique $u = f(i)$ d'un récepteur réel a pour équation (en convention récepteur) :

$$u = E' + R' i,$$

où E' est la force contre-électromotrice² (fcém) du récepteur en volt (V) et R' sa résistance interne en ohm (Ω).

2. La tension E' est appelée force contre-électromotrice, car le générateur, orienté dans le sens récepteur, s'oppose au passage du courant.

On peut donc représenter le récepteur selon le modèle de Thévenin (ou ce qui est équivalent, de Norton), mais orienté en convention récepteur (fig. 17) :

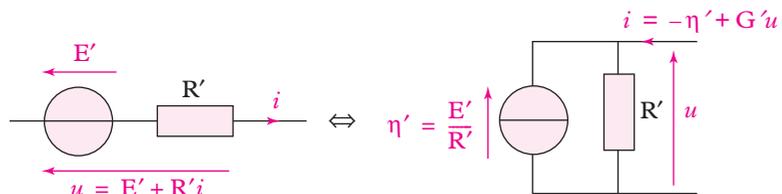


Fig. 17 - Représentations équivalentes d'un récepteur selon les modèles de Thévenin et de Norton.

- En convention générateur, la tension aux bornes du dipôle est opposée :
 $u = -E' - R'i$, soit : $u = E - Ri$ avec $E = -E'$ et $R = R'$.
 Un récepteur (E', R') est donc équivalent à un générateur ($E = -E', R = R'$).
 - De même, la fém d'un générateur utilisé en récepteur est $E' = -E$, et sa résistance interne $R' = R$. En convention récepteur, on a bien :
 $u = -E + Ri$, soit : $u = E' + R'i$.
- Un générateur (E, R) est donc équivalent à un récepteur ($E' = -E, R' = R$).

D.1.3 - Puissance reçue par un récepteur

La puissance électrique reçue par un récepteur est :

$$\mathcal{P}_r = ui, \text{ soit : } \mathcal{P}_r = E'i + R'i^2.$$

- Le terme $E'i$ représente la puissance utile du récepteur, c'est-à-dire la fraction de la puissance électrique reçue par le récepteur pouvant être convertie en une forme d'énergie non thermique.¹
- Le terme $R'i^2$ représente la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance interne.

1. Dans un moteur électrique, par exemple, cette puissance est convertie en puissance mécanique.

D.2. Association de dipôles

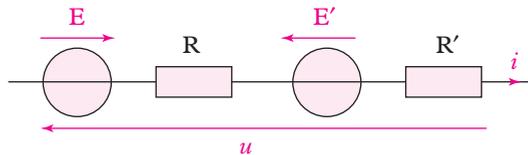
Dans le cas où leurs caractéristiques sont linéaires, on peut modéliser chaque générateur et chaque récepteur d'une association :

- par un générateur idéal de tension en série avec une résistance (modèle de Thévenin), s'il s'agit d'une association série ;
- par un générateur idéal de courant en parallèle avec une résistance (modèle de Norton), s'il s'agit d'une association parallèle.

Dans la convention choisie, on obtient le dipôle équivalent à l'association en appliquant les lois de l'électrocinétique.

Application 4 Association série d'un générateur et d'un récepteur

Un générateur de fém E et de résistance interne R est monté en série avec un récepteur de fém E' et de résistance interne R' . À quelle condition cette association est-elle équivalente à un générateur ? à un récepteur ? (Dans chaque cas, on précisera les caractéristiques du dipôle équivalent.)

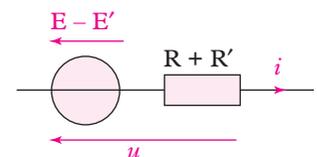
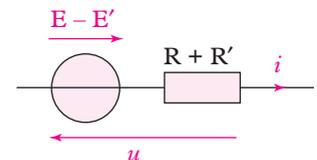


Solution

En convention récepteur, la tension u aux bornes de l'association est :

$$u = E' - E + (R + R')i.$$

- L'association des deux dipôles est un générateur si la fém E est supérieure à la fém E' . La fém de l'ensemble des deux dipôles est $E - E'$. La résistance interne du dipôle équivalent est la somme des résistances internes $R + R'$.
- L'association des deux dipôles est un récepteur si la fém E' est supérieure à la fém E . La fém de l'ensemble des deux dipôles est $E' - E$. La résistance interne du dipôle équivalent est la somme des résistances internes $R + R'$.



L'essentiel

✓ Caractéristique d'un dipôle

- Dans la convention d'étude, on appelle caractéristique d'un dipôle la courbe d'équation $u = f(i)$ (caractéristique tension-courant) ou $i = f(u)$ (caractéristique courant-tension). Si la caractéristique est une droite, on dit qu'elle est **linéaire**.
- La caractéristique d'un dipôle passif passe par l'origine des axes ; la caractéristique d'un dipôle actif ne passe pas par l'origine des axes.

✓ Conducteurs ohmiques

- En convention récepteur, un conducteur ohmique vérifie la loi d'Ohm :

$$u = Ri \text{ ou } i = Gu$$

u tension en volt (V) i intensité en ampère (A) R résistance en ohm (Ω) G conductance en siemens (S)
--

(La conductance G est l'inverse de la résistance R : $G = \frac{1}{R}$.)

- La puissance reçue par un conducteur ohmique (et entièrement dissipée par effet Joule) vaut :

$$\mathcal{P}_j = Ri^2 = Gu^2.$$

- L'association série de n résistances R_k est équivalente à une résistance unique $R_{\text{éq}} = \sum_k R_k$. La tension u_k aux bornes de R_k est (**diviseur de tension**) :

$$u_k = \frac{R_k}{R_{\text{éq}}} u = \frac{R_k}{\sum_k R_k} u, \text{ avec } u \text{ tension aux bornes de l'association.}$$

- L'association parallèle de n conductances G_k est équivalente à une conductance unique $G_{\text{éq}} = \sum_k G_k$. L'intensité i_k du courant traversant G_k est (**diviseur de courant**) :

$$i_k = \frac{G_k}{G_{\text{éq}}} i = \frac{G_k}{\sum_k G_k} i, \text{ avec } i \text{ intensité du courant traversant l'association.}$$

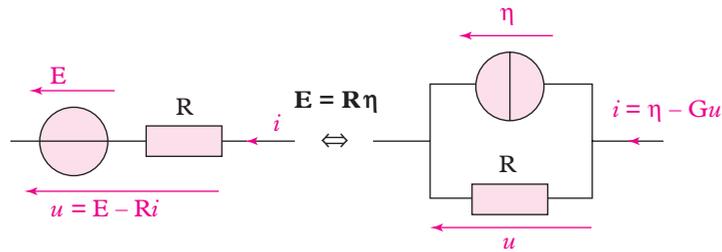
- Si un nœud N d'un circuit est relié à n résistances R_k non nulles, la loi des nœuds exprimée en tension s'écrit (théorème de Millman) :

$$V_N \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \right) = \frac{V_{A_1}}{R_1} + \frac{V_{A_2}}{R_2} + \frac{V_{A_3}}{R_3} + \dots$$

✓ Modélisations linéaires de dipôles

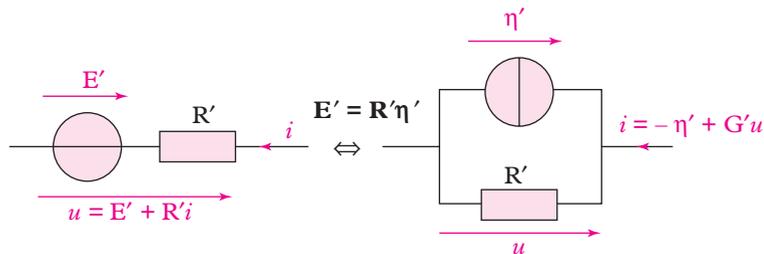
- Un générateur idéal de tension délivre une tension constante E quel que soit le courant i , positif ou négatif, débité par celui-ci. Un générateur idéal de courant délivre un courant d'intensité constante η quelle que soit la tension, positive ou négative, aux bornes de celui-ci.

- Dans un domaine où sa caractéristique est linéaire, on peut représenter un générateur réel par le modèle de Thévenin (E, R) ou par le modèle de Norton (η, R) équivalent :



E est la force électromotrice (fém) du générateur en volt (V) et R sa résistance interne en ohm (Ω).

- Dans un domaine où sa caractéristique est linéaire, on peut représenter un récepteur réel par le modèle de Thévenin (E', R') équivalent :



E' est la force contre-électromotrice (fcém) du récepteur en volt (V) et R' sa résistance interne en ohm (Ω).

(Formellement, un générateur (E, R) est équivalent à un récepteur ($E' = -E, R' = R$) et vice versa.)

Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment appliquer les lois de Kirchhoff à un circuit ramifié ?

Lorsqu'un circuit est constitué de plusieurs mailles, l'écriture systématique des lois de Kirchhoff conduit généralement à un excès d'information. Comment être sûr de n'écrire que des relations nécessaires ?

→ Savoir faire

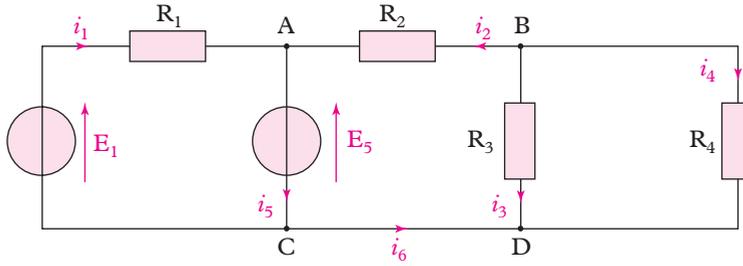
- 1 Dénombrer les nœuds (n) et les mailles indépendantes (m) dans le circuit.
- 2 Écrire ($n - 1$) lois des nœuds entre les intensités. Le dernier nœud conduit à une relation redondante. (Le nœud inutilisé est indifférent.)
- 3 Écrire (m) lois des mailles. (Des mailles sont indépendantes si elles comportent chacune un dipôle que ne comportent pas les autres.)
- 4 Injecter les caractéristiques des dipôles dans les lois des mailles, de façon à n'obtenir que des relations entre les intensités (et les grandeurs caractéristiques des dipôles).
- 5 Résoudre le système constitué de b équations dont les b intensités sont les inconnues.



En écrivant toutes ou certaines de ces équations sans précaution, on risque de « tourner en rond » ou d'aboutir à « $0 = 0$ ».

→ Application

Déterminer les intensités dans le circuit schématisé ci-dessous en fonction des données du problème.



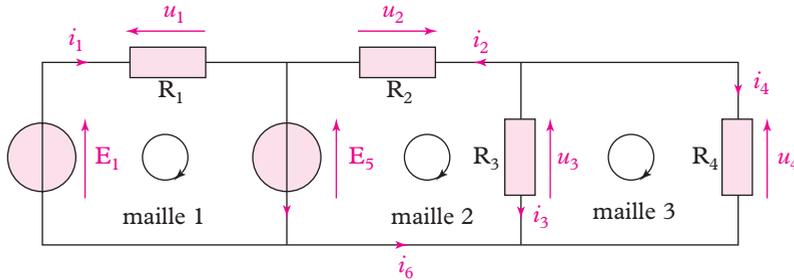
Solution

❶ On dénombre $n = 4$ nœuds A, B, C et D, et $m = 3$ mailles indépendantes.

❷ On écrit donc 3 lois des nœuds (le nœud inutilisé est indifférent) :

$$\begin{cases} \text{au nœud A : } i_1 + i_2 - i_5 = 0 \\ \text{au nœud B : } i_2 + i_3 + i_4 = 0 \\ \text{au nœud C : } i_5 - i_1 - i_6 = 0. \end{cases}$$

❸ On écrit donc 3 lois des mailles. Le fléchage des tensions est arbitraire à ce stade.



$$\begin{cases} \text{maille 1 : } E_1 - U_1 - E_5 = 0 \\ \text{maille 2 : } E_5 + U_2 - U_3 = 0 \\ \text{maille 3 : } U_3 - U_4 = 0. \end{cases}$$

❹ On injecte les caractéristiques en prenant garde aux conventions de fléchage des tensions. Sur cet exemple, toutes les résistances ont été fléchées en convention récepteur.

$$\begin{cases} U_1 = R_1 i_1 \\ U_2 = R_2 i_2 \\ U_3 = R_3 i_3 \\ U_4 = R_4 i_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 - R_1 i_1 - E_5 = 0 \\ E_5 + R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0 \\ R_3 i_3 - R_4 i_4 = 0. \end{cases}$$

❺ Le système complet comporte six équations et six inconnues :

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_5 = 0 & (1) \\ i_2 + i_3 + i_4 = 0 & (2) \\ i_5 - i_1 - i_6 = 0 & (3) \\ E_1 - R_1 i_1 - E_5 = 0 & (4) \\ E_5 + R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0 & (5) \\ R_3 i_3 - R_4 i_4 = 0 & (6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{E_1 - E_5}{R_1} & (4) \\ i_4 = \frac{R_3}{R_4} i_3 & (6) \\ i_2 + \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) i_3 = 0 & (2) + (6) \\ E_5 + R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0 & (5) \\ i_5 = i_1 - i_2 & (1) \\ i_6 = i_5 - i_1 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 i_1 = \frac{E_1 - E_5}{R_1} & (4) \\
 i_3 = -\frac{i_2}{1 + \frac{R_3}{R_4}} & (2) + (6) \\
 E_5 + R_2 i_2 + R_3 \left(\frac{i_2}{1 + \frac{R_3}{R_4}} \right) = 0 & (5) \\
 i_4 = \frac{R_3}{R_4} i_3 & (6) \\
 i_5 = i_1 + i_2 & (1) \\
 i_6 = i_5 - i_1 = i_2 & (3) + (1)
 \end{cases}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 i_1 = \frac{E_1 - E_5}{R_1} \\
 i_2 = \frac{-E_5}{R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} \\
 i_3 = \frac{R_4 E_5}{R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4} \\
 i_4 = \frac{R_3 E_5}{R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4} \\
 i_5 = \frac{E_1 - E_5}{R_1} - \frac{E_5}{R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} \\
 i_6 = i_2.
 \end{cases}$$

La résolution d'un système linéaire d'ordre élevé est rarement demandée en physique ; elle est cependant au programme de l'enseignement de mathématiques.



On pourra remarquer que les nœuds C et D de cet exemple sont équipotentiels car reliés par un fil. Si on choisit de ne dénombrer que trois nœuds en les réunissant, l'intensité i_6 de la branche qui les sépare disparaît. On a alors $m = 3$, $n = 3$, ce qui conduit aux mêmes résultats.

Méthode n° 2

Comment réduire un circuit linéaire à un générateur réel unique ?

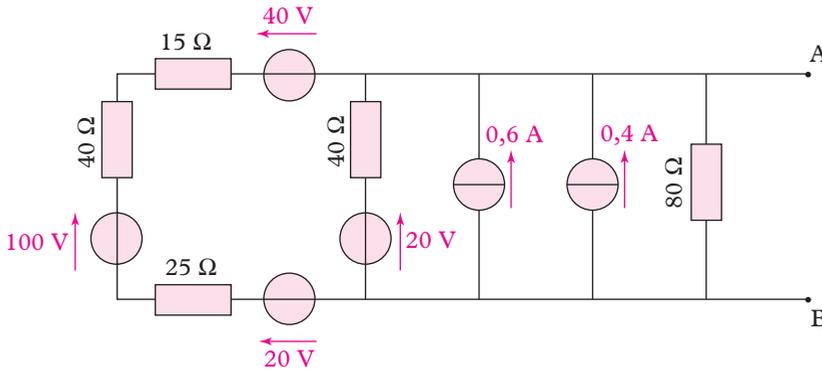
Un circuit constitué uniquement de générateurs idéaux de tension, de générateurs idéaux de courant et de conducteurs ohmiques est équivalent à un générateur réel unique. On se propose de déterminer les caractéristiques de ce générateur.

→ Savoir faire

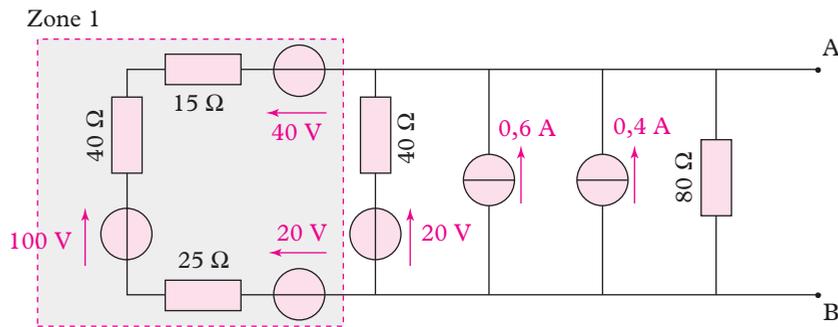
- ❶ Substituer un générateur de tension idéal unique à tous les générateurs de tension associés en série sur la même branche. Les forces électromotrices E_k s'additionnent algébriquement.
- ❷ Substituer un générateur de courant idéal unique à tous les générateurs de courant associés en parallèle. Les courants électromoteurs η_k s'additionnent algébriquement.
- ❸ Substituer un conducteur ohmique à tous les conducteurs ohmiques associés en série sur la même branche (les résistances s'ajoutent).
Substituer de même un conducteur ohmique unique à tous les conducteurs ohmiques associés en parallèle (les conductances s'ajoutent).
- ❹ Convertir les générateurs de Thévenin en générateurs de Norton (et vice versa) si cela permet des simplifications. Reprendre alors au ❶.
 - Dans le cas d'une association parallèle des générateurs, on convertit tous les générateurs de Thévenin en générateurs de Norton.
 - Dans le cas d'une association série des générateurs, on convertit tous les générateurs de Norton en générateurs de Thévenin.

→ Application

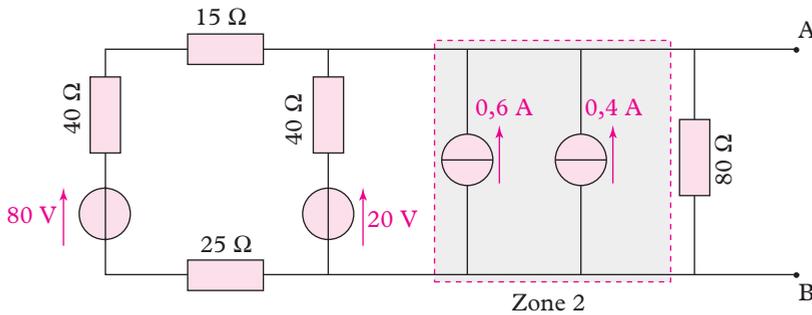
Montrer que le dipôle AB schématisé ci-dessous est équivalent à un générateur réel dont on précisera les caractéristiques.



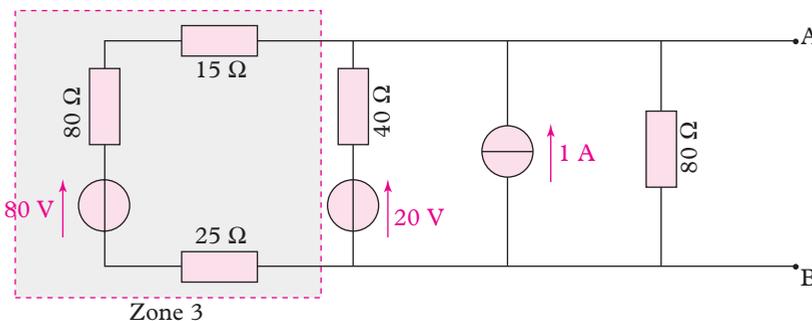
Solution



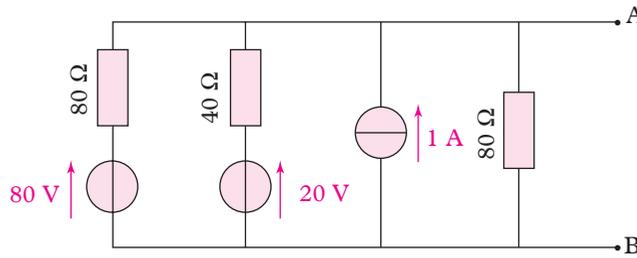
❶ Trois générateurs de tension idéaux sont associés en série (zone 1).



❷ Deux générateurs de courant idéaux sont associés en parallèle (zone 2).

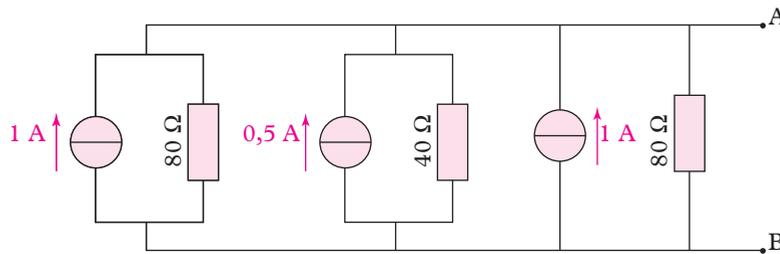


③ Trois résistances associées en série peuvent être combinées (zone 3).

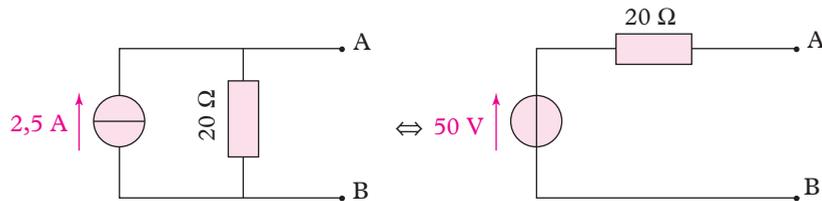


④ Deux générateurs de Thévenin en parallèle sont convertis en générateurs de Norton :

$$E = R\eta, \quad \text{d'où : } \eta = \frac{E}{R}.$$



② et ③ Les trois générateurs de courant idéaux et les trois résistances sont associés en parallèle. On obtient ainsi les représentations de Norton et de Thévenin du générateur réel unique équivalent.



Méthode n° 3

Comment exploiter les symétries d'un réseau de résistances identiques ?

Une association de résistances est trop ramifiée pour une simplification directe, mais avec un fort degré de symétrie. On souhaite calculer la résistance entre deux points A et B du réseau.

→ Savoir faire

- ① Recenser les plans de symétrie du réseau (les plans de symétrie laissent le réseau et les points A et B invariants).
- ② Attribuer à deux points symétriques le même potentiel.
- ③ Identifier le plan d'antisymétrie du réseau (ce plan laisse le réseau invariant mais échange les points A et B).
- ④ Attribuer le même potentiel à tous les points du réseau qui appartiennent au plan d'antisymétrie.
- ⑤ Redessiner le réseau en réunissant tous les points de même potentiel. Vérifier que toutes les résistances ont été replacées sur cette figure.

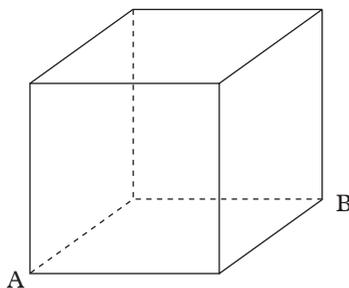
⑥ Calculer la résistance équivalente par association série-parallèle.



La recherche des plans de symétrie ou d'antisymétrie peut amener à « couper » une résistance R en deux résistances $\frac{R}{2}$ placées en série.

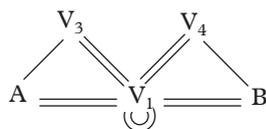
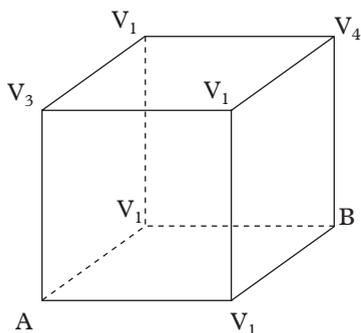
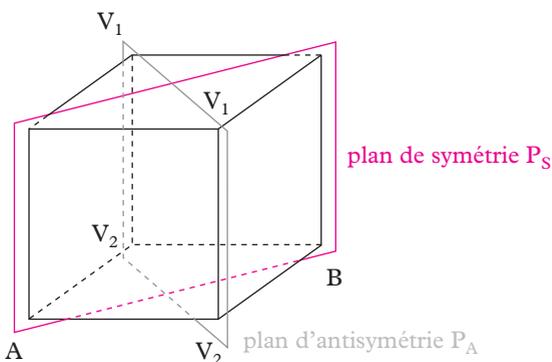
→ Application

Un cube est constitué de 12 arêtes présentant une même résistance R . On cherche la résistance lue par un ohmmètre placé entre deux points A et B du cube.



Solution

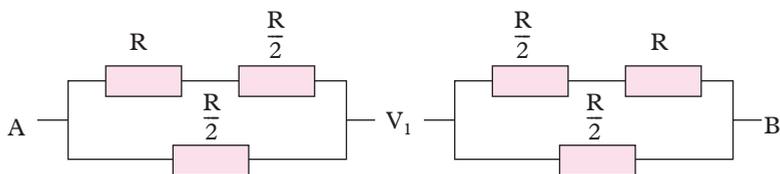
- ① Le plan de symétrie P_S contient la diagonale AB, il est perpendiculaire au plan contenant ces points.
- ② Dans ces conditions, deux sommets symétriques ont le même potentiel V_1 , deux autres ont un potentiel V_2 .
- ③ Le plan d'antisymétrie P_A est perpendiculaire au précédent, il contient les points de potentiels V_1 et V_2 .
- ④ Les quatre points précédents sont au même potentiel $V_1 = V_2$ car ils appartiennent au plan d'antisymétrie.
- ⑤ Le cube se simplifie comme suit :

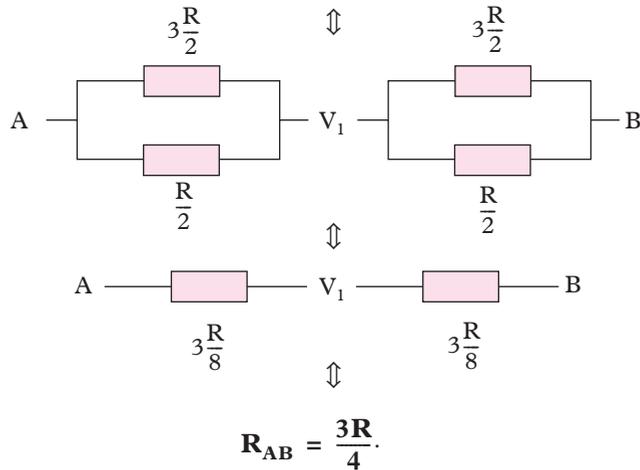


Chaque segment désigne une résistance ; il y a par exemple deux segments entre A et V_1 car deux résistances relient ces deux potentiels sur le cube réel.

Sur cet exemple, deux résistances relient des points de même potentiel V_1 ; elles n'entrent plus en compte dans le calcul de la résistance équivalente.

- ⑤ Les associations série-parallèle conduisent à :





Méthode n° 4

Comment associer à un dipôle quelconque une caractéristique linéaire par morceaux ?

Certains dipôles n'ont pas une caractéristique linéaire. On se propose de découper leur caractéristique en différentes zones, puis d'associer un modèle linéaire à chacune d'elles.

→ Savoir faire

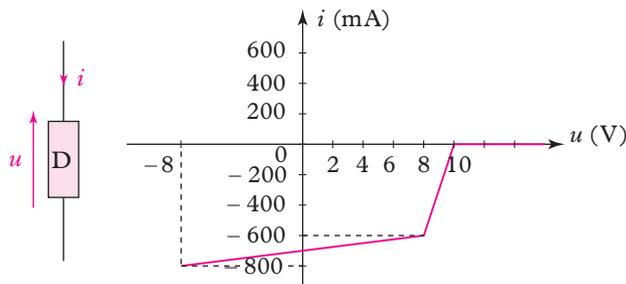
- ❶ Identifier les différentes zones de validité des modèles linéaires sur la caractéristique réelle du composant.
- ❷ Mesurer la pente moyenne de la courbe sur chacune de ces zones. En déduire la résistance de chaque modèle (égale à la valeur absolue de la pente moyenne).
- ❸ Mesurer la tension à vide de chaque zone en prolongeant la modélisation linéaire jusqu'à l'axe ($i = 0$).
- ❹ Donner le générateur réel associé à chaque zone de la caractéristique, assorti du domaine de validité de ce modèle.



Le dipôle peut être un générateur ou un récepteur.

→ Application

Un dipôle actif présente la caractéristique courant-tension expérimentale suivante, donnée en convention récepteur. Proposer une caractérisation linéaire par morceaux.



❶ Sur la caractéristique, on identifie trois zones :

$$\begin{cases} \text{zone 1 : } u < 8 \text{ V} \\ \text{zone 2 : } u \in [8 \text{ V} ; 10 \text{ V}] \\ \text{zone 3 : } u > 10 \text{ V.} \end{cases}$$

❷ On mesure sur ces trois zones la pente $\frac{\Delta i}{\Delta u}$ et on en déduit la résistance $R = \frac{\Delta u}{\Delta i}$.

– Zone 1 : $\frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{16} = 0,0125 \Omega^{-1}$, soit $R_1 = 80 \Omega$.

– Zone 2 : $\frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{600 \cdot 10^{-3}}{2} = 0,3 \Omega^{-1}$, soit $R_2 = 3,33 \Omega$.

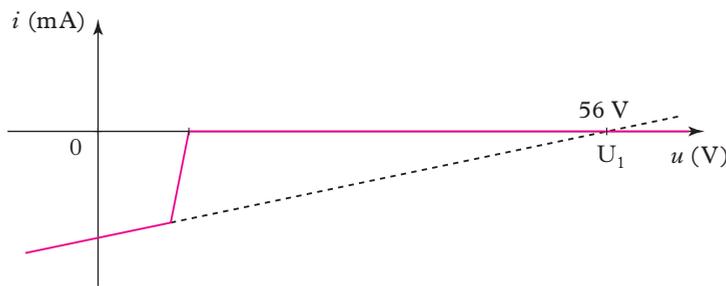
– Zone 3 : $\frac{\Delta i}{\Delta u} = 0 \Omega^{-1}$, soit R_3 infinie.

❸ On mesure la tension à vide en déterminant l'abscisse de l'intersection du morceau de la caractéristique considéré avec l'axe des abscisses.

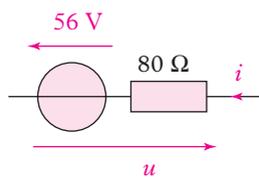
– Zone 1 : on prolonge la caractéristique jusqu'à l'axe des abscisses et on lit $U_1 = 56 \text{ V}$.

– Zone 2 : on lit directement sur le graphe $U_2 = 10 \text{ V}$.

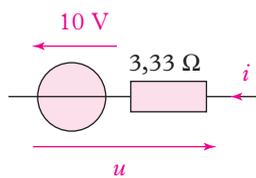
– Zone 3 : U_3 n'est pas définie.



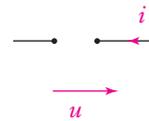
❹ Les trois modélisations linéaires sont donc (en représentation de Thévenin) :



pour $u < 8 \text{ V}$:
 $u = 56 + 80i$.



pour $8 \text{ V} < u < 10 \text{ V}$:
 $u = 10 + 3,33i$.



pour $u > 10 \text{ V}$:
 $i = 0$.

Méthode n° 5

Comment déterminer le point de fonctionnement d'un dipôle linéaire par morceau ?

Soit D un dipôle linéaire par morceau inséré dans un circuit linéaire. On souhaite déterminer le point de fonctionnement de D.

→ Savoir faire

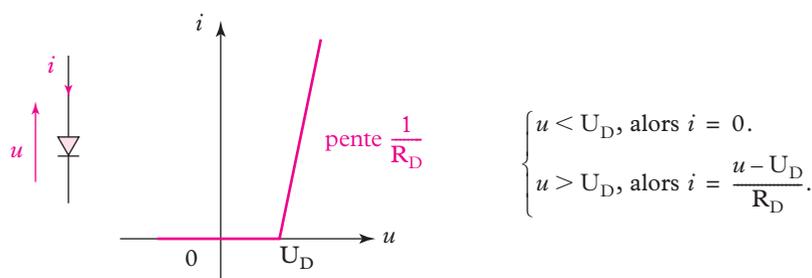
- ❶ Réduire la partie linéaire du courant à un générateur réel unique.
Pour chaque morceau linéaire de la caractéristique :
- ❷ Connecter au générateur réel le modèle linéaire associé à la caractéristique. Préciser le domaine de validité du modèle.
- ❸ Déterminer le point de fonctionnement (u, i) du dipôle D pour le modèle choisi.
- ❹ Déterminer la condition de validité de ce point de fonctionnement.



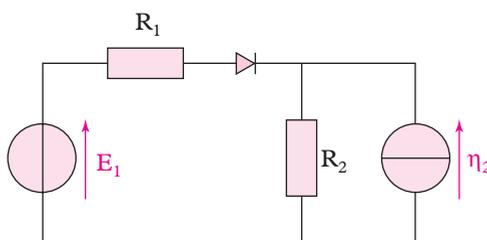
Si la caractéristique de D est continue, les différentes conditions de validité doivent se compléter.

→ Application

Une diode de signal est modélisée par deux demi-droites affines. Sa caractéristique en convention récepteur est donnée ci-dessous.

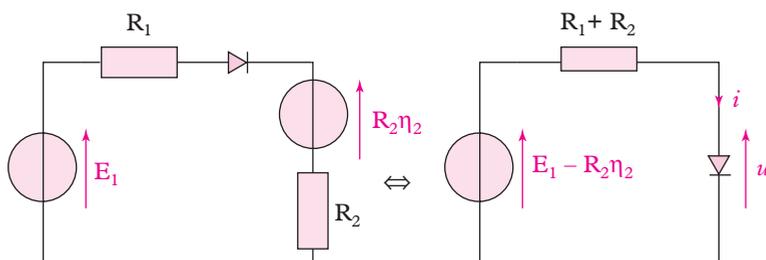


Déterminer le point de fonctionnement de ce dipôle lorsqu'il est inséré dans le circuit suivant.



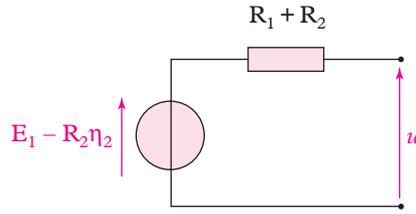
Solution

- ❶ La portion linéaire de circuit se réduit à un générateur réel unique en convertissant le générateur de Norton (η_2, R_2) en générateur de Thévenin et en appliquant les règles d'association série.



• **Domaine $u < U_D$**

- ② La diode est modélisée par un interrupteur ouvert ($i = 0$). La fém du générateur réel se reporte à ses bornes.



- ③ Le point de fonctionnement du circuit est alors :

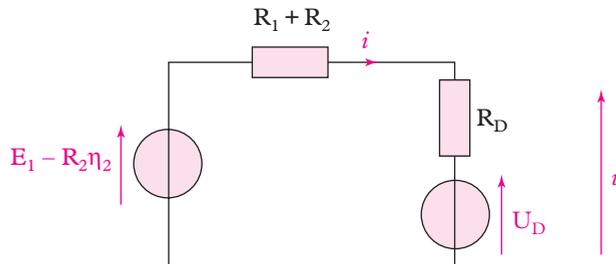
$$(u = E_1 - R_2 \eta_2 ; i = 0).$$

- ④ Ce point est valable pour $u < U_D$, soit :

$$E_1 - R_2 \eta_2 < U_D, \text{ soit : } E_1 < U_D + R_2 \eta_2.$$

• **Domaine $u > U_D$**

- ② La diode est modélisée par un récepteur réel de fém U_D et de résistance interne R_D . On a donc le schéma équivalent ci-dessous :



– La loi des mailles dans le circuit s'écrit :

$$E_1 - R_2 \eta_2 = (R_1 + R_2)i + R_D i + U_D, \quad \text{d'où : } i = \frac{E_1 - R_2 \eta_2 - U_D}{R_1 + R_2 + R_D}.$$

– La tension aux bornes de la diode est :

$$\begin{aligned} u &= U_D + R_D i = U_D + \left(\frac{E_1 - R_2 \eta_2 - U_D}{R_1 + R_2 + R_D} \right) R_D \\ &= \frac{(R_1 + R_2)U_D + (E_1 - R_2 \eta_2)R_D}{R_1 + R_2 + R_D}. \end{aligned}$$

- ③ Le point de fonctionnement du circuit est alors :

$$\left(u = \frac{(R_1 + R_2)U_D + (E_1 - R_2 \eta_2)R_D}{R_1 + R_2 + R_D} ; \quad i = \frac{E_1 - R_2 \eta_2 - U_D}{R_1 + R_2 + R_D} \right).$$

- ④ Ce point est valable pour $u > U_D$, soit :

$$U_D + \frac{E_1 - R_2 \eta_2 - U_D}{R_1 + R_2 + R_D} > U_D, \quad \text{soit : } E_1 > U_D + R_2 \eta_2.$$



Cette condition est bien complémentaire de la précédente, ce qui était prévisible car la caractéristique de la diode est continue.

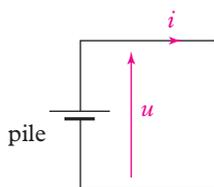
Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Caractéristique d'une pile

Lors de l'étude d'une pile, on a mesuré la tension u à ses bornes et le courant i qu'elle débite.

u (V)	1,5	1,45	1,4	1,35	1,2	0,9	0,5	0
i (mA)	0	50	100	150	200	250	300	350

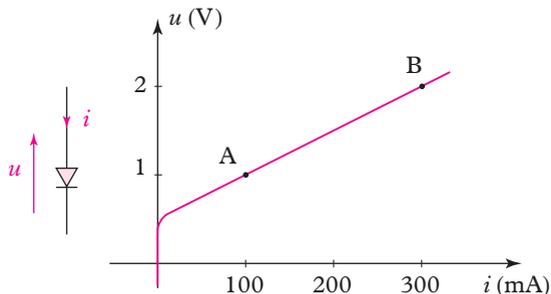


- Décrire un mode opératoire pour les mesures.
- Tracer la caractéristique $u(i)$.
- À faible intensité, la pile est modélisable par un générateur de Thévenin. Le déterminer.
- Quelle est, expérimentalement, l'intensité maximale que peut débiter la pile pour conserver une caractéristique linéaire ?

Ex. 2 Caractéristique d'une diode

Lors de l'étude d'une diode, on a tracé la caractéristique suivante :

- pour $u < 0,3$ V : $i = 0$;
- pour $u > 0,7$ V, la caractéristique est linéaire, passant par les points :
A($u = 1$ V ; $i = 100$ mA) et B($u = 2$ V ; $i = 300$ mA).

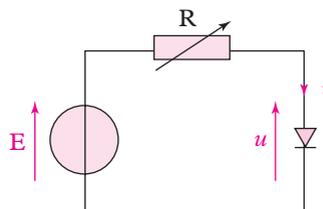


- Comment peut-on tracer la caractéristique d'une telle diode ?
- Dans sa partie linéaire ($u > 0,7$ V), donner un modèle équivalent à la diode.
- On branche aux bornes de la diode un générateur de tension de force électromotrice $E = 1,5$ V et de résistance interne R .
Le courant dans la diode vaut alors $I = 100$ mA.

Déterminer la résistance R , la puissance reçue par la diode et la puissance fournie par le générateur.

d) On modélise la caractéristique de la diode par deux droites. Préciser les droites modélisant le mieux la diode.

e) On utilise le modèle établi en d) pour la diode. Elle est branchée sur un générateur de tension idéal $E = 1,5$ V, placé en série avec une résistance R variable.



Tracer la courbe donnant la puissance \mathcal{P} reçue par la diode en fonction de R .

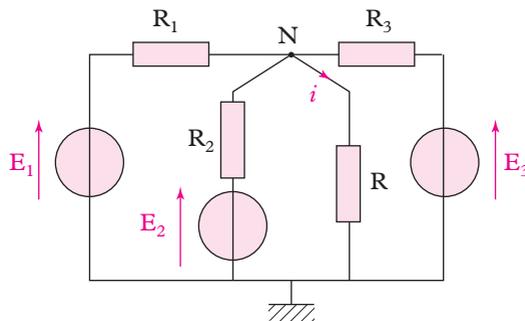
Ex. 3 Adaptation d'impédance

Un générateur modélisé par son modèle de Thévenin (E, R_i) est branché sur une résistance variable R .

- Déterminer le courant circulant dans la résistance R .
- Déterminer la puissance \mathcal{P} dissipée par effet Joule dans la résistance R . Tracer la courbe $\mathcal{P}(R)$.
- Pour quelle valeur R_0 de R la puissance dissipée dans la résistance est-elle maximale ? On parle alors d'adaptation d'impédance.

Ex. 4 Théorème de Millman

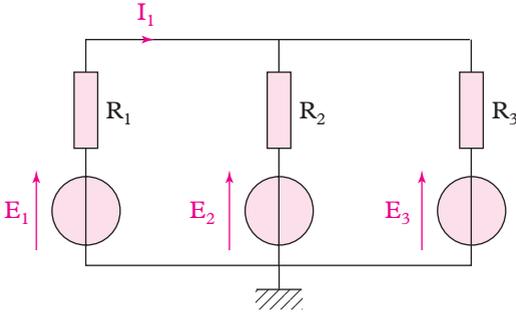
a) Énoncer la loi des nœuds exprimée en tension pour déterminer le potentiel V_N du nœud N dans le montage ci-dessous. En déduire le courant i dans la résistance R .



- Reprendre l'exercice en remplaçant les générateurs de Thévenin (E_k, R_k) par des générateurs de Norton. En déduire alors la source de Thévenin branchée aux bornes de la résistance R et le courant circulant dans cette résistance.

Ex. 5 Théorème de superposition

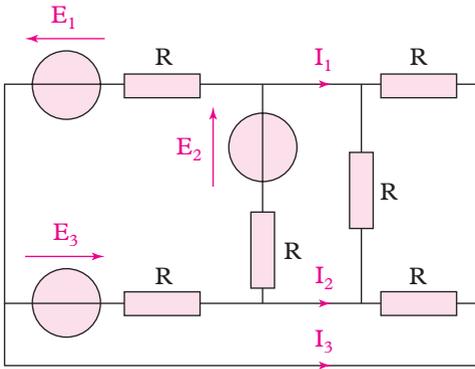
a) Déterminer, par application des lois de Kirchhoff, le courant I_1 circulant dans la résistance R_1 du montage ci-dessous.



- b) • Que vaut le courant, noté I_{11} , quand $E_2 = E_3 = 0$?
 • Que vaut le courant, noté I_{12} , quand $E_1 = E_3 = 0$?
 • Que vaut le courant, noté I_{13} , quand $E_1 = E_2 = 0$?
 Montrer que l'on a bien : $I_1 = I_{11} + I_{12} + I_{13}$.
 Énoncer le théorème de superposition.

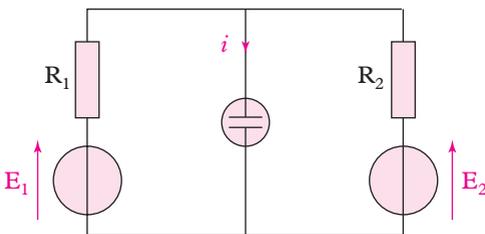
Ex. 6 Calculs de courants

Déterminer les courants I_1 , I_2 et I_3 du montage ci-dessous.

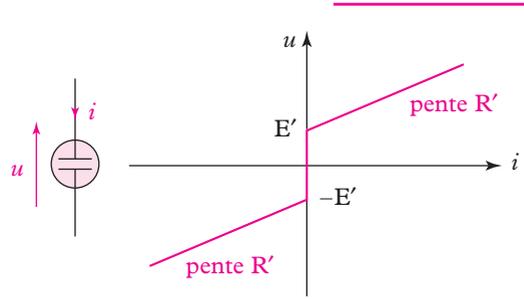


Ex. 7 Alimentation d'un dipôle actif

Le montage étudié est le suivant :



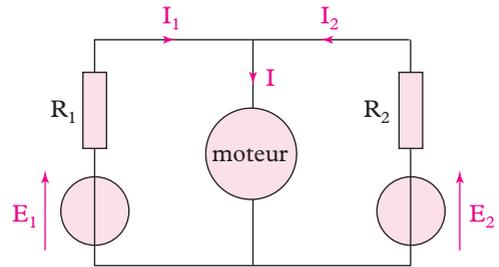
Le générateur de tension de fém $E_1 = 1,5 \text{ V}$ possède une résistance interne $R_1 = 6 \Omega$; celui de fém E_2 a une résistance interne $R_2 = 6 \Omega$. Le dipôle actif est un électrolyseur de fém $E' = 1,5 \text{ V}$ et de résistance interne $R' = 3 \Omega$. Sa caractéristique est représentée sur le graphe ci-dessous.



- a) On a $E_2 = 6 \text{ V}$. Déterminer le courant i dans l'électrolyseur.
 b) Reprendre l'étude quand $E_2 = 1 \text{ V}$. Déterminer à nouveau le courant i .

Ex. 8 Alimentation d'un moteur

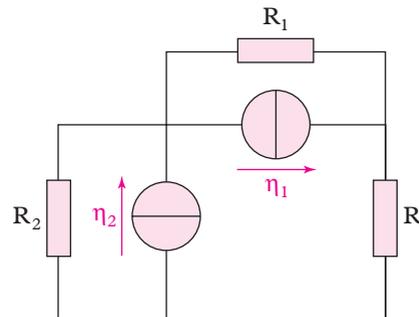
Un moteur de force contre électromotrice E' et de résistance interne R' est alimenté grâce à deux générateurs de forces électromotrices respectives E_1 et E_2 et de résistances internes respectives R_1 et R_2 . Déterminer les courants I , I_1 et I_2 circulant dans le moteur et les générateurs.
 (Pour obtenir ce résultat, on appliquera la loi des nœuds exprimée en tension.)



Ex. 9 Générateurs de courant

Deux générateurs, modélisés par leur modèle de Norton :

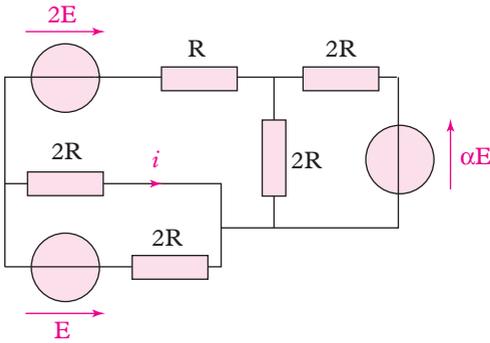
cém η_1 et η_2 ; résistance interne R_1 et R_2 , sont placés en série avec une résistance R .



- a) Remplacer les générateurs de Norton par des générateurs de Thévenin.
 b) En déduire la tension aux bornes de la résistance R , le courant qui y circule et la puissance dissipée par effet Joule.

Ex. 10 Application des lois de Kirchhoff

Déterminer l'intensité i sur le schéma ci-dessous.



Niveau 2

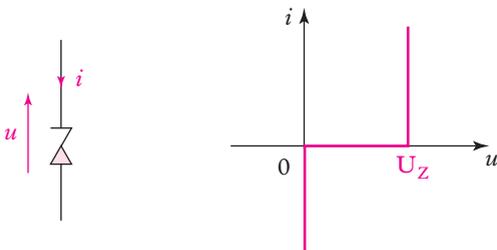
Ex. 11 Alimentation d'un moteur

Un moteur est un récepteur actif de résistance R' et de fém $E' = kN$, où N est la vitesse de rotation du moteur. La puissance motrice fournie par le moteur est $\mathcal{P}_m = E'i$, où i est l'intensité du courant circulant en convention récepteur dans le moteur.

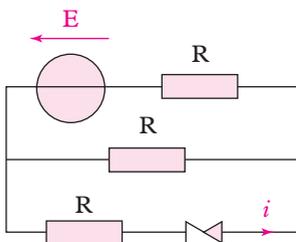
Le moteur est alimenté par un générateur de fém E et de résistance interne R .

- Déterminer l'intensité i circulant dans le moteur. Donner son expression en fonction de E , R , R' et kN .
- Quelle est la puissance motrice \mathcal{P}_m ?
- Tracer la courbe donnant \mathcal{P}_m en fonction de N . Pour quelle valeur N_0 de la vitesse de rotation du moteur la puissance motrice est-elle maximale ?

Ex. 12 Diode Zener



Une diode Zener est placée dans un montage où la fém E peut être réglée ($E > 0$ ou $E < 0$).

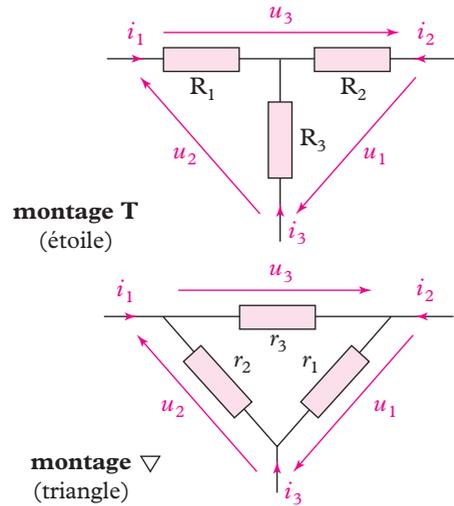


Le but de l'exercice est de déterminer i en fonction de E et de R .

- Réduire la partie linéaire du circuit à un générateur unique.
 - Déterminer alors la condition portant sur E pour avoir $i = 0$.
 - À quelle condition a-t-on $i > 0$? Déterminer alors i .
 - À quelle condition a-t-on $i < 0$? Déterminer alors i .
- Tracer la courbe $i = f(E)$.

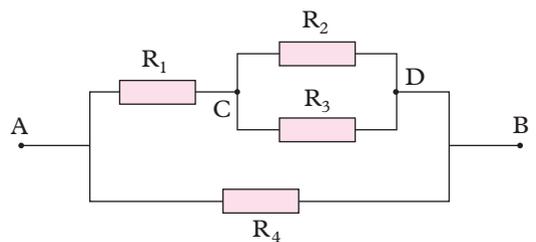
Ex. 13 Théorème de Kennely

À quelles conditions les deux montages sont-ils équivalents ?

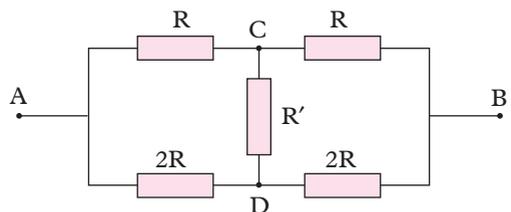


Ex. 14 Résistances équivalentes

a) Déterminer la résistance équivalente au montage entre A et B.

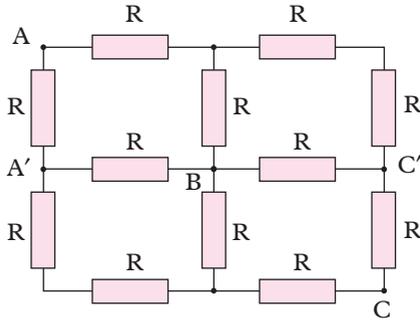


b) Déterminer la résistance équivalente au montage entre A et B.



c) Déterminer la résistance équivalente au montage ci-dessous :

- lorsque le courant entre en A et ressort en B ;
- lorsque le courant entre en A' et ressort en B ;
- lorsque le courant entre en A et ressort en C ;
- lorsque le courant entre en A' et ressort en C'.



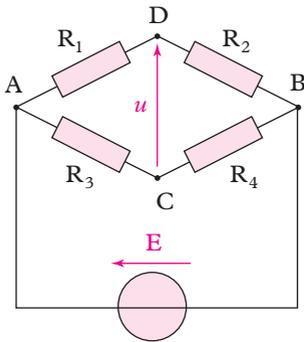
Niveau 3

Ex. 15 Pont de Weahtsone

Un pont de Weahtsone est un montage électrique permettant de déterminer une résistance inconnue.

1) Équilibrage du pont

Le schéma du pont est représenté sur la figure ci-dessous.



La résistance à déterminer est la résistance R_1 . Les résistances R_3 et R_4 sont des résistances fixes connues.

La résistance R_2 est une résistance variable dont on connaît la valeur.

Le pont est équilibré quand la tension u mesurée entre C et D est nulle.

a) Déterminer la tension u en fonction de E et des résistances R_1, R_2, R_3 et R_4 .

b) À quelle condition le pont est-il équilibré ? Déterminer alors R_1 .

A.N. $R_3 = 100 \Omega$; $R_4 = 5 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 1\,827 \Omega$; $E = 6 \text{ V}$.

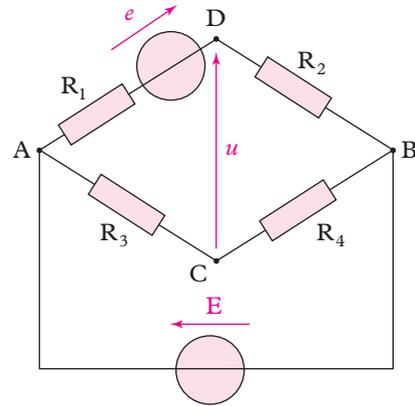
c) Le voltmètre indique la tension « $u = 0$ » si, en réalité, on a : $|u| < 1 \text{ mV}$.

Dans le cadre de l'application numérique de la question précédente, donner la précision sur la mesure de R_1 .

2) Présence de fém parasite

Le pont précédent est supposé en équilibre, c'est-à-dire que l'on a rigoureusement $u = 0$.

Nous allons étudier l'influence d'une force électromotrice e sur l'équilibre du pont (e est placé en série avec la résistance ; cela peut modéliser une tension apparue lors du contact de deux matériaux de nature chimique différente).



a) Exprimer la tension u apparue à cause de la présence de e .

b) On veut que l'influence de e soit négligeable au cours de la mesure. On estime que cette influence est négligeable si $|u| < 1 \text{ mV}$. Quelle est alors la condition portant sur e ? On rappelle que l'on a : $E = 6 \text{ V}$; $R_2 = 1\,827 \Omega$; $R_3 = 100 \Omega$; $R_4 = 5 \text{ k}\Omega$.

Ex. 16 Sources liées

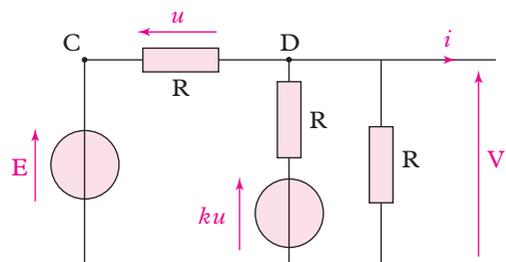
Le montage étudié débite un courant i vers l'extérieur. Il possède un générateur de tension E et une source liée dont la tension ku est proportionnelle à la tension u aux bornes de la résistance située entre C et D.

En utilisant la loi des nœuds, montrer que la tension V se met sous la forme :

$$V = E_{\text{th}} - R_{\text{th}} i,$$

où E_{th} et R_{th} s'expriment uniquement en fonction de R, k et E.

(Le montage est alors équivalent à un générateur de Thévenin de fém E_{th} et de résistance interne R_{th} .)



Indications

Ex. 3 L'extremum d'une fonction correspond à une dérivée nulle.

Ex. 4 a) Exprimer les potentiels utiles en fonction des fém des générateurs.

Ex. 5 Suivre logiquement l'énoncé pas à pas.

Ex. 6 Limiter le nombre d'intensités inconnues dans le circuit avant d'écrire les lois de Kirchhoff.

Ex. 7 Convertir les générateurs de Thévenin en leurs générateurs de Norton équivalents, et vice versa.

Ex. 8 Utiliser la loi des nœuds exprimée en tension.

Ex. 10 Limiter le nombre d'intensités inconnues dans le circuit avant d'écrire les lois de Kirchhoff.

Ex. 11 Une parabole est « symétrique » par rapport à son extremum.

Ex. 12 a) Utiliser les équivalences entre les modèles de Thévenin et de Norton.

Ex. 13 Exercice calculatoire. Exprimer la loi des mailles dans le montage « étoile » et la loi des nœuds dans le montage « triangle », puis combiner les résultats et identifier.

Ex. 14 Exploiter les symétries des circuits et simplifier les montages en débranchant les résistances dans lesquelles ne circule aucun courant.

Ex. 15 1) a) Utiliser un diviseur de tension.

2) a) Appliquer le « théorème de superposition » énoncé à l'exercice 5.

Ex. 16 Utiliser la loi des nœuds exprimée en tension en D.

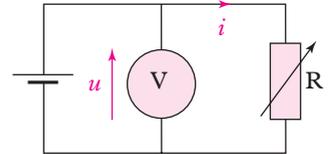
Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

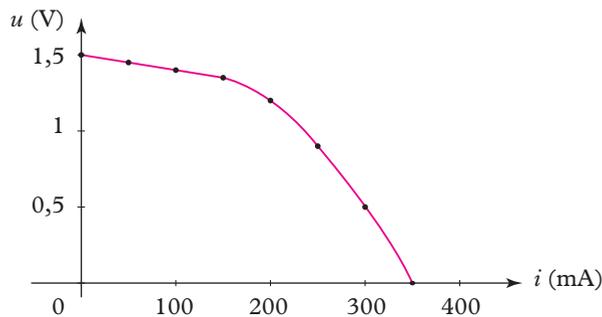
Exercice 1

- a) • Pour effectuer les mesures, on peut utiliser un voltmètre permettant de connaître la tension aux bornes de la pile et un ampèremètre permettant de déterminer le courant qu'elle débite.
- Une autre façon d'effectuer les mesures et de placer aux bornes de la pile une résistance variable étalonnée.

La mesure de la tension grâce au voltmètre donne alors la tension aux bornes de la pile. L'intensité débitée par la pile est : $i = \frac{u}{R}$.



- b) On peut alors tracer la caractéristique tension-courant $u = f(i)$.



- c) À faible intensité, la caractéristique est linéaire ; on peut donc écrire $u = E - Ri$.



On applique la méthode n° 4 à la pile étudiée en convention générateur.

- On mesure la pente $\frac{\Delta u}{\Delta i}$ de la droite et on en déduit la résistance R :

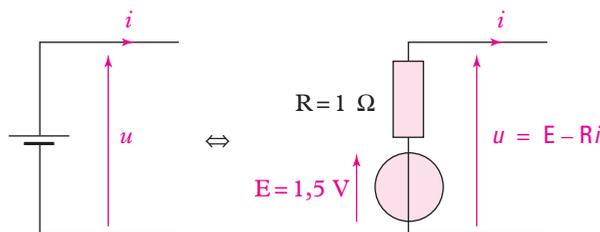
$$R = -\frac{\Delta u}{\Delta i}, \text{ soit : } R = -\frac{1,5 - 1,4}{0 - 0,1} = 1 \Omega.$$

- On mesure la tension à vide E en faisant $i = 0$, d'où : $E = 1,5 \text{ V}$.



Comme la droite modèle est décroissante, sa pente vaut $-R$.

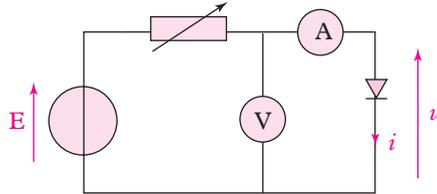
À faible intensité, la pile est donc équivalente au générateur de Thévenin de fém $E = 1,5 \text{ V}$ et de résistance interne $R = 1 \Omega$.



- d) À faible intensité, la caractéristique est linéaire jusqu'à un courant d'intensité 150 mA.

Exercice 2

a) Pour tracer la caractéristique de la diode, il faut placer en amont de celle-ci un générateur dont on peut faire varier la tension (alimentation stabilisée) ou utiliser un générateur en série avec un potentiomètre (résistance variable). Un voltmètre aux bornes de la diode permet de mesurer la tension u , un ampèremètre en série avec celle-ci donnera la mesure de l'intensité i du courant.



b) Pour $u > 0,7$ V, la caractéristique est linéaire ; on peut écrire $u = E' + R'i$, où E' est la tension du générateur de Thévenin et R' la résistance interne.



On applique la méthode n° 4 à la diode étudiée en convention récepteur.

• On mesure la pente $\frac{\Delta u}{\Delta i}$ de la droite et on en déduit la résistance R' :

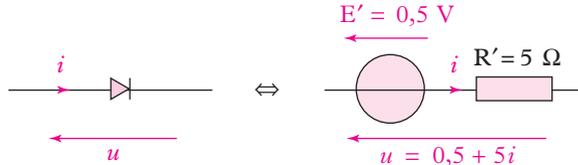
$$R' = \frac{\Delta u}{\Delta i}, \text{ soit : } R' = \frac{2 - 1}{0,3 - 0,1} = 5 \Omega.$$

• On mesure la tension à vide E' en faisant $i = 0$, d'où : $E' = 0,5$ V.



Pour déterminer E' , on prolonge la droite jusqu'à l'axe des ordonnées.

La diode est donc équivalente à la fcém $E' = 0,5$ V en série avec la résistance $R' = 5 \Omega$.



c) Le montage réalisé est schématisé ci-contre.

Comme $I = 0,1$ A, on lit sur la caractéristique de la diode $U = 1$ V.

• En convention générateur, la tension aux bornes du générateur est :

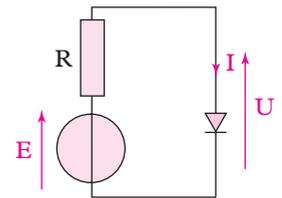
$$U = E - RI, \text{ d'où : } R = \frac{E - U}{I} = \frac{1,5 - 1}{0,1} = 5 \Omega.$$

• La puissance reçue par la diode est :

$$\mathcal{P}_{\text{diode}} = UI = 1 \times 0,1 = 0,1 \text{ W.}$$

• La puissance fournie par le générateur est :

$$\mathcal{P}_g = UI = 0,1 \text{ W.}$$



La puissance reçue par un dipôle se calcule en convention récepteur. La puissance fournie par un dipôle se calcule en convention générateur.



On constate que l'énergie se conserve dans le circuit : la puissance reçue par la diode est égale à la puissance fournie par le générateur.

d) Les droites modélisant le mieux la diode sont (avec u en volt et i en ampère) :

- pour $u < 0,5$, $i = 0$;
- pour $u > 0,5$, $u = 5i + 0,5$.

e)



On applique la méthode n° 5 au circuit constitué du générateur de tension, de la résistance variable et de la diode.

- On se propose de déterminer le point de fonctionnement du circuit quand un courant i circule.
- L'intensité i se déduit de la loi des mailles :

$$u = E' + R'i = E - Ri, \text{ d'où : } i = \frac{E - E'}{R + R'} > 0 \text{ (car } E > E').$$



Il faut toujours vérifier que le point de fonctionnement trouvé est valable. Comme ici $E > E'$, il circule bien un courant positif du générateur vers le récepteur, indépendamment de la valeur de R .

- La tension u aux bornes de la diode vaut alors :

$$u = E' + R'i = E' + R' \frac{E - E'}{R + R'} = \frac{R'E + RE'}{R + R'}.$$

- La puissance \mathcal{P} reçue par la diode est :

$$\mathcal{P} = \mathbf{ui} = \frac{R'E + RE'}{R + R'} \times \frac{E - E'}{R + R'} = \frac{(E - E')(R'E + RE')}{(R + R')^2}.$$

Pour étudier les variations de la fonction $\mathcal{P}(R)$, on calcule sa dérivée :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dR} = (E - E') \frac{E'(R + R')^2 - 2(R + R')(R'E + RE')}{(R + R')^4} = \frac{E - E'}{(R + R')^3} [E'(R' - R) - 2R'E].$$

La dérivée s'annulerait pour :

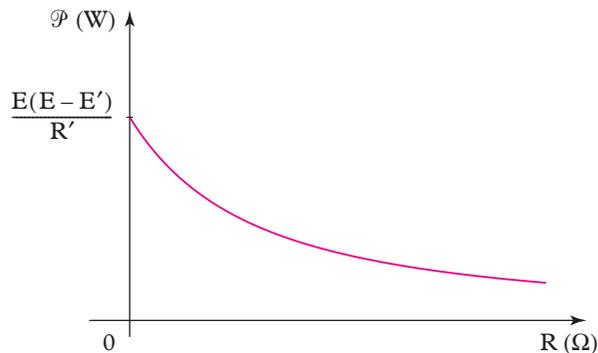
$$E'(R' - R) - 2R'E = 0, \text{ soit : } R = \frac{R'(E' - 2E)}{E'} < 0.$$

Comme la résistance R est toujours positive ou nulle, la dérivée ne s'annule pas et la fonction $\mathcal{P}(R)$ est décroissante avec :

$$\left(\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}_{\max} = \frac{E(E - E')}{R'} = 0,3 \text{ W} \right) \text{ et } (\mathcal{P}(R) \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow \infty).$$



Le signe de la dérivée est donné par : $\frac{d\mathcal{P}}{dR}(R = 0) = \frac{E - E'}{R'^2}(E' - 2E) < 0$.



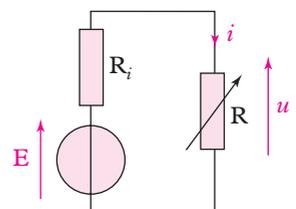
Exercice 3

- a) La loi des mailles donne immédiatement :

$$E - (R_i + R)i = 0, \text{ soit : } i = \frac{E}{R + R_i}.$$



On étudie la résistance en convention récepteur.



b) La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance est :

$$\mathcal{P} = Ri^2, \text{ soit : } \mathcal{P} = \frac{RE^2}{(R + R_i)^2}.$$

• Quand $R \rightarrow 0$, on a : $\mathcal{P} \sim \frac{RE^2}{R_i^2} \rightarrow 0$.

• Quand $R \rightarrow \infty$, on a : $\mathcal{P} \sim \frac{RE^2}{R^2} = \frac{E^2}{R} \rightarrow 0$.

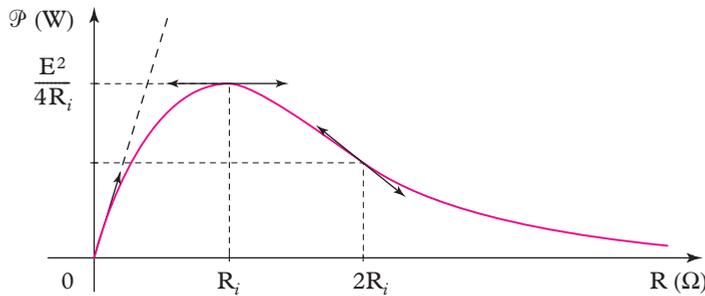
La puissance étant toujours positive, elle passe nécessairement par un maximum. Pour le déterminer, on peut écrire \mathcal{P} sous forme :

$$\mathcal{P} = \frac{E^2}{\frac{(R + R_i)^2}{R}} = \frac{E^2}{R + \frac{R_i^2}{R} + 2R_i} = \frac{E^2}{f(R)}.$$

Le maximum de \mathcal{P} correspond au minimum de f , atteint pour :

$$f'(R) = 1 - \frac{R_i^2}{R^2} = 0, \text{ soit : } R = R_i.$$

La puissance dissipée par effet Joule est donc maximum pour $R = R_i$ et $\mathcal{P}(R_i) = \mathcal{P}_{\max} = \frac{E^2}{4R_i}$.



On peut remarquer que la courbe possède un point d'inflexion en $R = 2R_i$.

c) D'après la question précédente, l'adaptation d'impédance a lieu pour :

$$R_0 = R_i \text{ et } \mathcal{P} = \frac{E^2}{4R_0}.$$

Exercice 4

a) La loi des nœuds exprimée en tension permet de déterminer le potentiel V_N du nœud N :

$$V_N \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R} \right) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}.$$

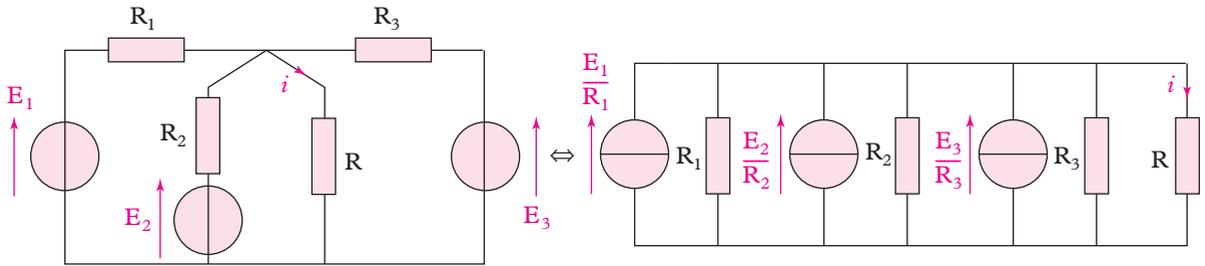


Les générateurs de tension E_1, E_2 et E_3 étant reliés à la masse, le potentiel de la borne reliée à la résistance est égal à la fém.

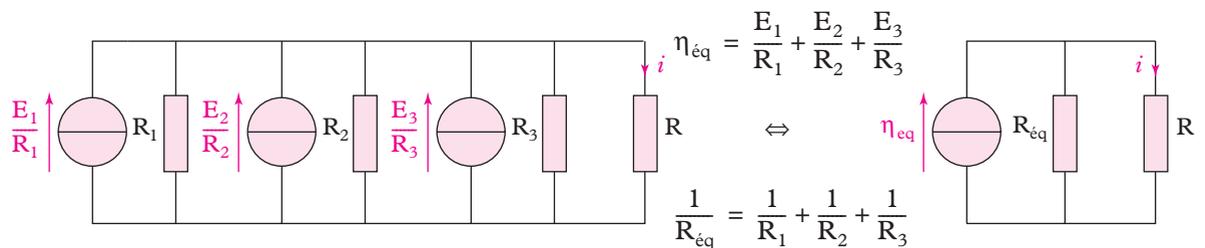
La loi d'Ohm aux bornes de la résistance R s'écrit :

$$V_N - 0 = Ri, \text{ d'où : } i = \frac{V_N}{R} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{1 + R \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)}.$$

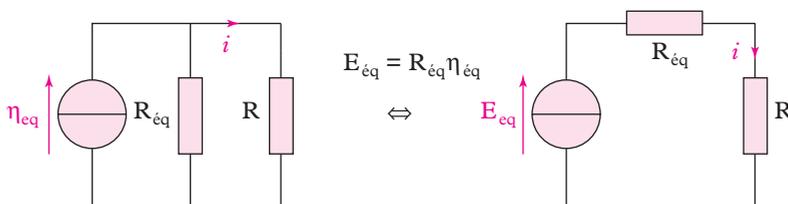
b) • Chaque branche entre la masse et le point N contient un générateur de Thévenin (E_k, R_k) que l'on peut convertir en un générateur de Norton ($\eta_k = \frac{E_k}{R_k}, R_k$). On a donc :



• Les trois générateurs de courant idéaux et les trois résistances sont associés en parallèle. On peut donc les remplacer par un générateur et une résistance équivalents.



• On convertit le générateur de Norton en générateur de Thévenin :



La loi des mailles donne l'intensité i du courant dans le circuit :

$$i = \frac{E_{\text{éq}}}{R + R_{\text{éq}}} = \frac{R_{\text{éq}} \eta_{\text{éq}}}{R + R_{\text{éq}}} = \frac{\eta_{\text{éq}}}{1 + \frac{R}{R_{\text{éq}}}} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{1 + R \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)}$$



Cet exemple montre bien l'intérêt d'utiliser le théorème de Millman quand la configuration du circuit s'y prête.



En appliquant le théorème de division de courant au circuit comprenant le générateur de Norton ($\eta_{\text{éq}}, R_{\text{éq}}$) en parallèle avec la résistance R , on pouvait alors écrire :

$$i = \frac{\eta_{\text{éq}} R_{\text{éq}}}{R + R_{\text{éq}}}$$

Exercice 5

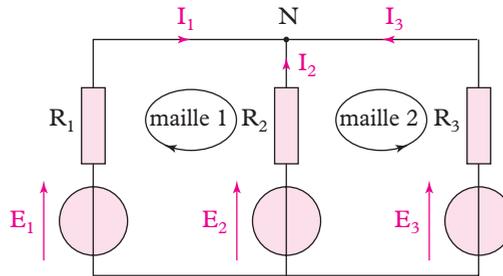
a)



On applique la méthode n° 1 au circuit étudié.

Le montage étudié comporte deux nœuds et deux mailles indépendantes.

On applique donc une fois la loi des nœuds et deux fois la loi des mailles. Les paramètres inconnus sont les courants dans les résistances, notés I_1 , I_2 et I_3 .



L'orientation des courants I_2 et I_3 est arbitraire.

$$\begin{cases} \text{nœud N : } I_1 + I_2 + I_3 = 0 & (1) \\ \text{maille 1 : } E_1 - R_1 I_1 + R_2 I_2 - E_2 = 0 & (2) \\ \text{maille 2 : } E_3 - R_3 I_3 + R_2 I_2 - E_2 = 0. & (3) \end{cases}$$

On reporte $I_2 = -I_1 - I_3$ dans (2) et (3) :

$$(R_1 + R_2)I_1 + R_2 I_3 = E_1 - E_2 \quad (2)$$

$$R_2 I_1 + (R_2 + R_3)I_3 = E_3 - E_2. \quad (3)$$

On élimine I_3 par la combinaison $(R_2 + R_3)(2) - R_2(3)$ et on en déduit :

$$I_1 = \frac{(E_1 - E_2)(R_2 + R_3) - R_2(E_3 - E_2)}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3) - R_2^2} = \frac{(R_2 + R_3)E_1 - R_3 E_2 - R_2 E_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

b) • Si $E_2 = E_3 = 0$, on a : $I_{11} = \frac{(R_2 + R_3)E_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$.

• Si $E_1 = E_3 = 0$, on a : $I_{12} = -\frac{R_3 E_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$.

• Si $E_1 = E_2 = 0$, on a : $I_{13} = -\frac{R_2 E_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$.

On a bien : $I_1 = I_{11} + I_{12} + I_{13}$. Les dipôles utilisés sont tous linéaires. Une conséquence de cette linéarité est le théorème de superposition.

Le courant dans un dipôle, créé par un ensemble de générateurs, est la somme des courants obtenus en prenant chaque source individuellement (en annulant toutes les autres).



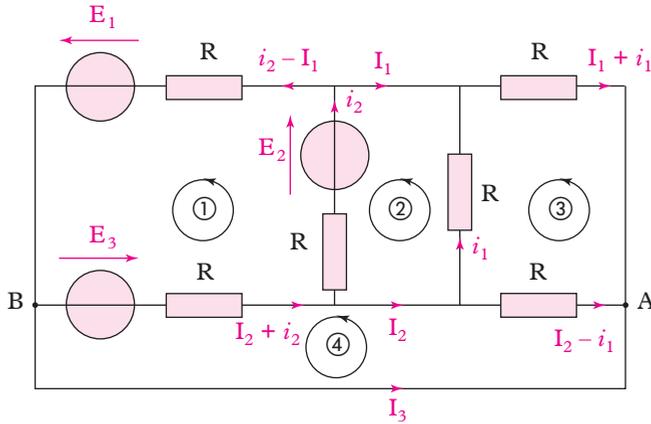
On peut généraliser cette propriété à la tension aux bornes d'un dipôle, comme à la présence de générateurs de courant.

Exercice 6



On applique la méthode n° 1 au circuit étudié.

Le montage étudié comporte 6 nœuds et 4 mailles indépendantes. Pour simplifier l'étude, nous allons paramétrer les courants comme l'indique le schéma ci-dessous :



Initialement, on comptait 9 branches, c'est-à-dire 9 intensités à calculer. En utilisant judicieusement la loi des nœuds, on introduit seulement les deux inconnues supplémentaires i_1 et i_2 .

Le montage se réduit alors à 2 nœuds (A et B) et 4 mailles indépendantes. On applique donc une fois la loi des nœuds et quatre fois la loi des mailles :

$$\begin{cases} \text{nœud A : } I_3 + I_1 + i_1 + I_2 - i_1 = 0 & (1) \\ \text{maille 1 : } E_1 - R(i_2 - I_1) + E_3 - R(I_2 + i_2) + E_2 - Ri_2 = 0 & (2) \\ \text{maille 2 : } -E_2 + Ri_2 - Ri_1 = 0 & (3) \\ \text{maille 3 : } R(I_1 + i_1) + Ri_1 - R(I_2 - i_1) = 0 & (4) \\ \text{maille 4 : } -E_3 + R(I_2 + i_2) + R(I_2 - i_1) = 0. & (5) \end{cases}$$

Le système peut aussi s'écrire :

$$\begin{cases} I_3 = -I_1 - I_2 & (1) \\ -RI_1 + RI_2 + 3Ri_2 = E_1 + E_2 + E_3 & (2) \\ -Ri_1 + Ri_2 = E_2 & (3) \\ RI_1 - RI_2 + 3Ri_1 = 0 & (4) \\ 2RI_2 - Ri_1 + Ri_2 = E_3. & (5) \end{cases}$$

En soustrayant (3) à (5), on obtient :

$$2RI_2 = E_3 - E_2, \text{ soit : } I_2 = \frac{E_3 - E_2}{2R}.$$

En soustrayant (4) à (2), on obtient :

$$\begin{aligned} -2RI_1 + 2RI_2 - 3R(i_1 - i_2) &= E_1 + E_2 + E_3. \\ -2RI_1 + E_3 - E_2 + 3E_2 &= E_1 + E_2 + E_3. \\ I_1 &= \frac{E_2 - E_1}{2R}. \end{aligned}$$

En reportant I_1 et I_2 dans (1), on obtient enfin :

$$I_3 = -\frac{E_2 - E_1}{2R} - \frac{E_3 - E_2}{2R} = \frac{E_1 - E_3}{2R}.$$



Les équations (2) et (4) permettraient de calculer i_1 et i_2 .

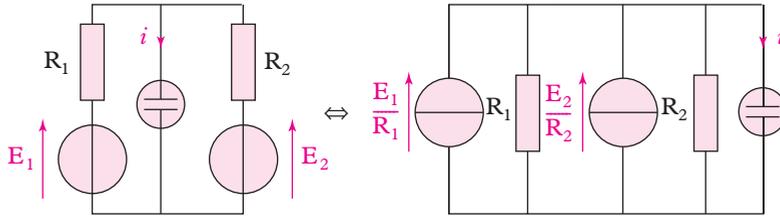
Exercice 7

a)

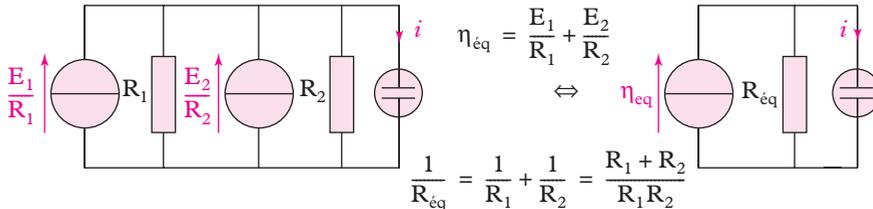
 On applique la méthode (2) au circuit étudié.

• On convertit chaque générateur de Thévenin (E_k, R_k) en un générateur de Norton $(\eta_k = \frac{E_k}{R_k}, R_k)$.

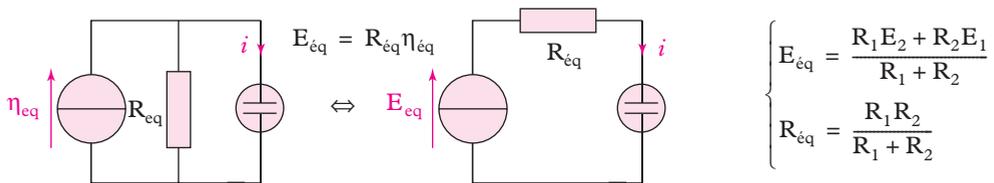
On a donc :



• Les deux générateurs de courant idéaux et les deux résistances sont associés en parallèle. On peut donc les remplacer par un générateur et une résistance équivalents.



• On convertit le générateur de Norton en générateur de Thévenin :

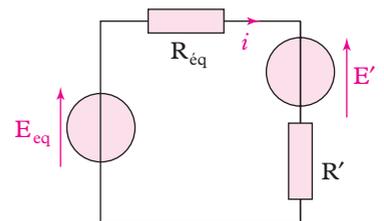


$$\text{A.N. } E_{\text{éq}} = \frac{R_1 E_2 + R_2 E_1}{R_1 + R_2} = \frac{6 \times 6 + 6 \times 1,5}{6 + 6} = 3,75 \text{ V.}$$

$$R_{\text{éq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \times 6}{6 + 6} = 3 \Omega.$$

La fém du générateur équivalent est supérieure à la fém E' de l'électrolyseur. Un courant i positif circule donc dans l'électrolyseur, et la loi des mailles donne :

$$i = \frac{E_{\text{éq}} - E'}{R_{\text{éq}} + R'} = \frac{3,75 - 1,5}{3 + 3} = 0,375 \text{ A.}$$



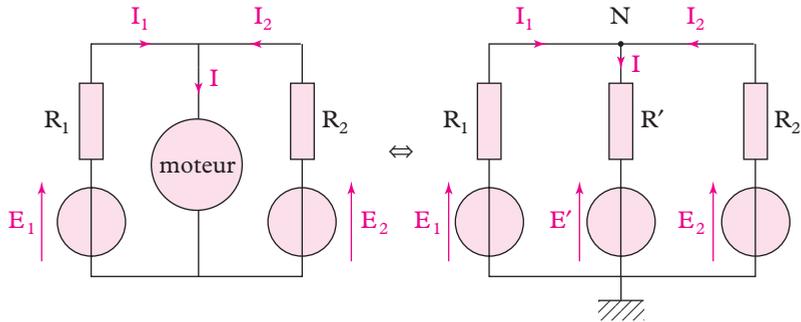
b) Pour $E_2 = 1 \text{ V}$, on a :

$$E_{\text{éq}} = \frac{R_1 E_2 + R_2 E_1}{R_1 + R_2} = \frac{6 \times 1 + 6 \times 1,5}{6 + 6} = 1,25 \text{ V.}$$

La fém du générateur équivalent est inférieure à la fém E' de l'électrolyseur. Le courant ne peut donc pas circuler dans l'électrolyseur : $i = 0$.

Exercice 8

On remplace le moteur par son modèle de Thévenin :



La loi des nœuds exprimée en tension permet de déterminer le potentiel V_N du nœud N :

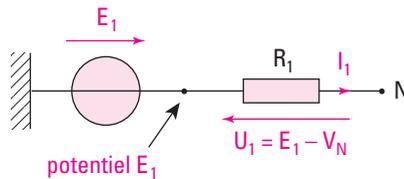
$$V_N = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E'}{R'}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'}}$$

💡 Pour des explications supplémentaires, voir l'exercice 4.

La loi d'Ohm aux bornes de la résistance R_1 s'écrit :

$$R_1 I_1 = E_1 - V_N = \frac{\frac{E_1 - E_2}{R_2} + \frac{E_1 - E'}{R'}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'}}, \text{ soit : } I_1 = \frac{\frac{E_1 - E_2}{R_2} + \frac{E_1 - E'}{R'}}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R'}}$$

💡 En convention récepteur, on a :



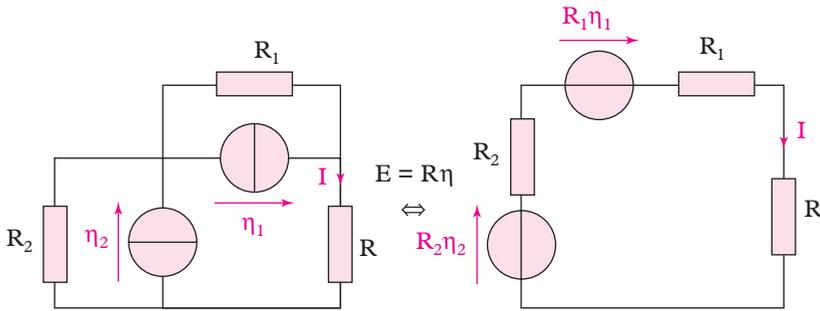
Des calculs identiques donnent :

$$I_2 = \frac{\frac{E_2 - E_1}{R_1} + \frac{E_2 - E'}{R'}}{1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R'}} \quad \text{et} \quad I = I_1 + I_2 = \frac{\frac{E_1 - E'}{R_1} + \frac{E_2 - E'}{R_2}}{1 + \frac{R'}{R_1} + \frac{R'}{R_2}}$$

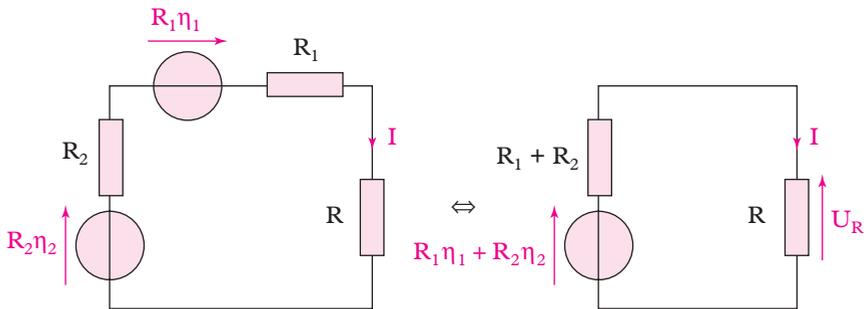
⚠ Les calculs n'ont pas été développés, mais ils ne présentent aucune difficulté technique.

Exercice 9

a) Comme l'indique l'énoncé, on convertit les générateurs de Norton en générateurs de Thévenin :



Deux générateurs de tension et deux résistances sont associés en série :



b) La loi des mailles donne le courant I dans le circuit :

$$I = \frac{R_1\eta_1 + R_2\eta_2}{R_1 + R_2 + R}, \text{ d'où : } U_R = RI = R \frac{R_1\eta_1 + R_2\eta_2}{R_1 + R_2 + R}.$$

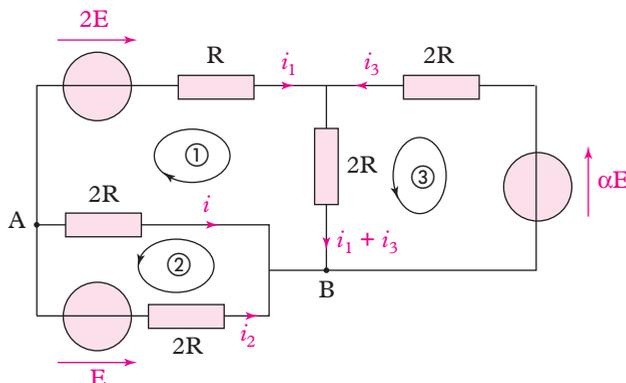
La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance R vaut :

$$\mathcal{P}_J = RI^2 = R \left(\frac{R_1\eta_1 + R_2\eta_2}{R_1 + R_2 + R} \right)^2.$$

Exercice 10

 On applique la méthode n° 1 au circuit étudié.

Le montage étudié comporte 3 nœuds et 3 mailles indépendantes. On le paramètre simplement en introduisant les deux inconnues supplémentaires i_2 et i_3 .





Le montage se réduit alors à 2 nœuds (A et B) et 3 mailles indépendantes. On applique donc une fois la loi des nœuds et trois fois la loi des mailles.

On obtient donc le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \text{nœud A : } i_1 + i + i_2 = 0 & (1) \\ \text{maille 1 : } 2E - Ri_1 - 2R(i_1 + i_3) + 2Ri = 0 & (2) \\ \text{maille 2 : } E - 2Ri_2 + 2Ri = 0 & (3) \\ \text{maille 3 : } \alpha E - 2Ri_3 - 2R(i_1 + i_3) = 0 & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_2 = -i_1 - i & (1) \\ 3Ri_1 + 2Ri_3 - 2Ri = 2E & (2) \\ 2Ri_1 + 4Ri = -E & (3) \\ 2Ri_1 + 4Ri_3 = \alpha E & (4) \end{cases}$$



On a injecté (1) dans l'équation (3). L'objectif est maintenant d'exprimer i_1 et i_3 en fonction de i .

On déduit de l'équation (3) :

$$2Ri_1 = -E - 4Ri, \text{ soit : } Ri_1 = -\frac{1}{2}(E + 4Ri).$$

On déduit de l'équation (4) :

$$4Ri_3 = \alpha E - 2Ri_1 = (\alpha + 1)E + 4Ri, \text{ soit : } Ri_3 = \frac{1}{4}[(\alpha + 1)E + 4Ri].$$

On reporte ces deux résultats dans l'équation (2) :

$$-\frac{3}{2}(E + 4Ri) + \frac{1}{2}[(\alpha + 1)E + 4Ri] - 2Ri = 2E.$$

$$-6Ri + \frac{1}{2}\alpha E - E = 2E.$$

$$i = -\frac{E}{6R}\left(3 - \frac{\alpha}{2}\right).$$



Le système d'équations permettrait de calculer aussi i_1 , i_2 et i_3 .

Exercices de niveau 2

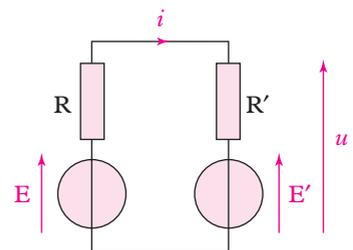
Exercice 11

a) D'après le schéma du montage, la loi des mailles donne immédiatement :

$$i = \frac{E - E'}{R + R'} = \frac{E - kN}{R + R'}.$$



Le moteur est un récepteur. Sur le schéma du montage, la fém E et la fém E' doivent donc avoir des sens opposés par rapport au courant.



b) La puissance motrice du moteur a pour expression :

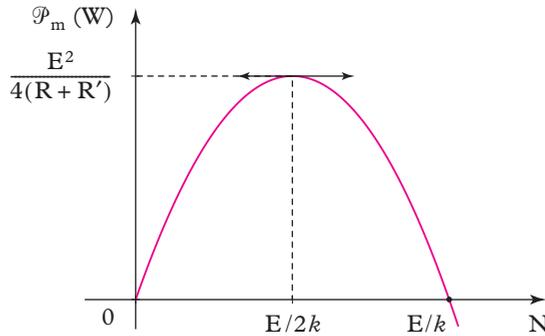
$$\mathcal{P}_m = E'i = k \frac{N(E - kN)}{R + R'}.$$

c) D'après son équation, la courbe donnant \mathcal{P}_m en fonction de N est une parabole à concavité vers le bas. Elle s'annule pour :

$$N(E - kN) = 0, \text{ soit : } N = 0 \text{ ou } N = \frac{E}{k}.$$

La puissance motrice \mathcal{P}_m est donc maximale pour $N_0 = \frac{E}{2k}$. Elle vaut alors :

$$\mathcal{P}_m(N_0) = \mathcal{P}_{\max} = \frac{E^2}{4(R + R')}$$



☀ La concavité d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est donnée par le signe de a (si $a > 0$, la concavité est vers le haut ; si $a < 0$, la concavité est vers le bas).

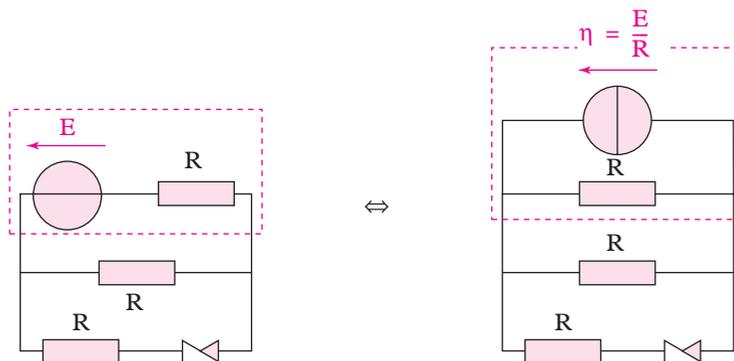
☀ Une parabole est toujours « symétrique » par rapport à l'axe vertical passant par son extremum.

Exercice 12

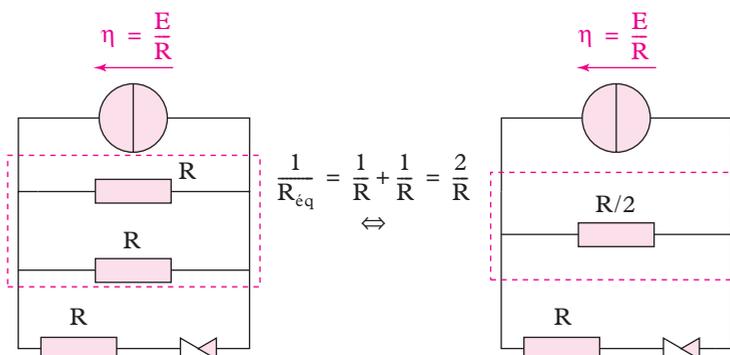
a)

☀ On applique la méthode n° 2 à la partie linéaire du circuit. Le fait que E soit une grandeur algébrique ($E > 0$ ou $E < 0$) ne change rien au raisonnement.

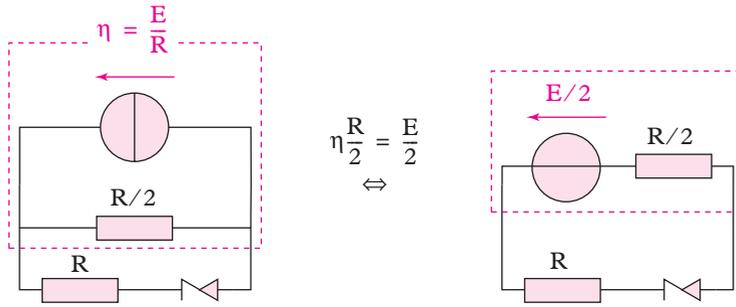
• On convertit le générateur de Thévenin (E, R) en générateur de Norton :



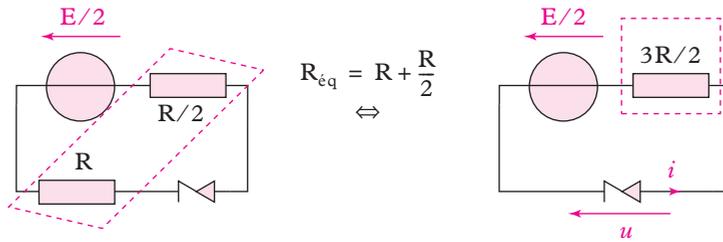
• Les deux résistances R en parallèle peuvent être combinées :



- On convertit le générateur de Norton $\left(\frac{E}{R}, \frac{R}{2}\right)$ en générateur de Thévenin :



- Les deux résistances en série peuvent être associées :



- b) • Si $i = 0$, alors : $u = \frac{E}{2}$. D'après la caractéristique de la diode Zener, on a donc :

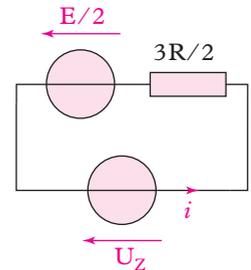
$$u \in [0 ; U_Z], \text{ d'où : } E \in [0 ; 2U_Z].$$

- Si $i > 0$, la diode Zener peut être modélisée par une fcém $E' = U_Z$. La loi des mailles dans le circuit s'écrit alors :

$$\frac{E}{2} - \frac{3R}{2}i = U_Z, \text{ soit : } i = \frac{E - 2U_Z}{3R}.$$

La condition sur E est donc :

$$\frac{E - 2U_Z}{3R} > 0, \text{ soit : } E > 2U_Z.$$

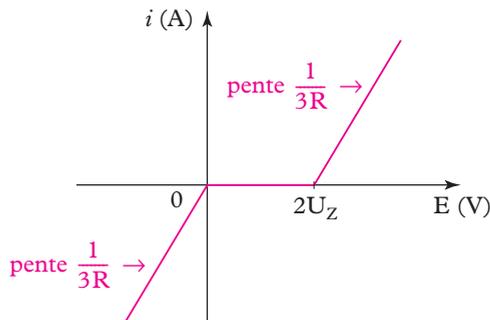
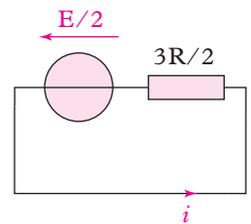


Cette condition traduit simplement le fait que le courant circule dans le circuit si la fém du générateur est supérieure à la fcém du récepteur.

- Si $i < 0$, la diode Zener peut être modélisée par un fil ($u = 0$). La loi des mailles s'écrit alors :

$$\frac{E}{2} - \frac{3R}{2}i = 0, \text{ soit : } i = \frac{E}{3R}.$$

La condition sur E est donc : $E < 0$.





Les conditions sur E sont bien complémentaires, ce qui est logique, car la caractéristique de la diode Zener est continue.

Exercice 13

Dans les montages T et ∇ , on a :

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 0 & (\text{loi des mailles}) \\ i_1 + i_2 + i_3 = 0 & (\text{loi des nœuds}). \end{cases}$$

Seules les tensions u_1 et u_2 d'une part, les courants i_1 et i_2 d'autre part sont indépendants.



D'après les équations, deux tensions et deux courants sont indépendants, mais leur choix est libre.

- Exprimons u_1 et u_2 en fonction de i_1 et i_2 dans le montage T :

$$\begin{cases} u_1 = R_3 i_3 - R_2 i_2 = -R_3 i_1 - (R_2 + R_3) i_2 & (\text{a}) \\ u_2 = R_1 i_1 - R_3 i_3 = (R_1 + R_3) i_1 + R_3 i_2. & (\text{b}) \end{cases}$$

- Exprimons i_1 et i_2 en fonction de u_1 et u_2 dans le montage ∇ :

$$\begin{cases} i_1 = \frac{u_2}{r_2} - \frac{u_3}{r_3} = \frac{u_1}{r_3} + u_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) & (\text{a}') \\ i_2 = \frac{u_3}{r_3} - \frac{u_1}{r_1} = -u_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) - \frac{u_2}{r_3}. & (\text{b}') \end{cases}$$

Reportons les expressions de i_1 et i_2 obtenues en (a') et (b') dans les expressions de u_1 et u_2 de (a) et (b) :

$$\begin{aligned} u_1 &= -R_3 \left[\frac{u_1}{r_3} + u_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) \right] + (R_2 + R_3) \left[u_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{u_2}{r_3} \right] \\ &= u_1 \left[R_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{R_3}{r_1} \right] + u_2 \left[\frac{R_2}{r_3} - \frac{R_3}{r_2} \right] \\ u_2 &= (R_1 + R_3) \left[\frac{u_1}{r_3} + u_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) \right] - R_3 \left[u_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{u_2}{r_3} \right] \\ &= u_1 \left[\frac{R_1}{r_3} - \frac{R_3}{r_1} \right] + u_2 \left[R_1 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{R_3}{r_2} \right]. \end{aligned}$$

De ces égalités, nous déduisons :

$$\begin{cases} R_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{R_3}{r_1} = 1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{R_2}{r_3} - \frac{R_3}{r_2} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{R_3}{r_2} = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{R_1}{r_3} - \frac{R_3}{r_1} = 0. & (4) \end{cases}$$



Les deux égalités auxquelles on aboutit peuvent s'écrire : $u_1 = Au_1 + Bu_2$ et $u_2 = Cu_1 + Du_2$, où A, B, C et D sont des constantes. Pour que ces égalités soient vérifiées quelles que soient les valeurs de u_1 et u_2 , on doit nécessairement avoir :

$$(A = 1 \text{ et } B = 0) \text{ et } (C = 0 \text{ et } D = 1).$$

On tire de (2) : $R_3 = \frac{r_2}{r_3} R_2$, que l'on reporte dans (1) :

$$R_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + \frac{r_2}{r_1 r_3} \right) = 1, \text{ soit : } R_2 = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}.$$

De même, on tire de (4) : $R_3 = \frac{r_1}{r_3} R_1$, que l'on reporte dans (3) :

$$R_1 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{r_1}{r_2 r_3} \right) = 1, \text{ soit : } R_1 = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}.$$

Enfin, grâce à (2) ou (4), on trouve :

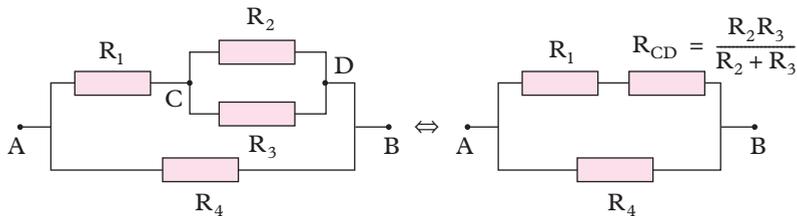
$$R_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3}.$$



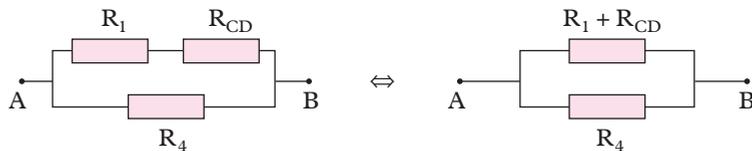
Cette condition d'équivalence entre les deux montages permet de remplacer, selon les cas, un montage triangle par un montage étoile (et vice versa).

Exercice 14

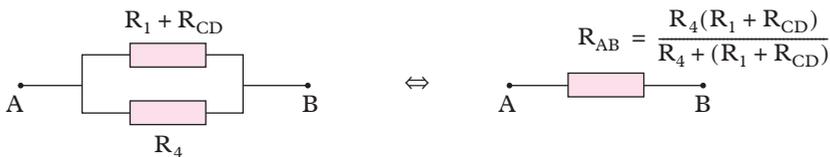
a) Les résistances R_2 et R_3 sont associées en parallèle entre C et D :



Les résistances R_1 et R_{CD} sont associées en série :



Les résistances $(R_1 + R_{CD})$ et R_4 sont associées en parallèle :



La résistance équivalente R_{AB} vaut donc :

$$R_{AB} = \frac{R_4 \left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right)}{R_1 + R_4 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) R_4}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2 R_3}.$$



Sur cet exemple simple, on a utilisé les lois d'association en série et en parallèle des résistances sans autre considération.

b)

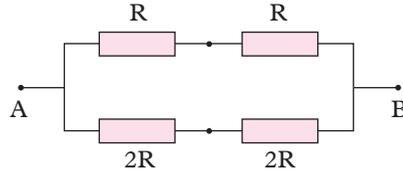


Dans ce circuit, la résistance R' n'est ni en série, ni en parallèle avec les autres résistances. Il faut donc d'abord simplifier le circuit en introduisant des considérations de symétrie.



On applique la méthode n° 3 au circuit étudié.

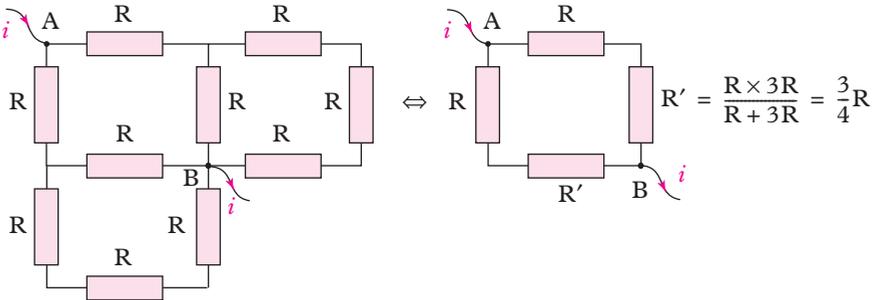
Le montage est antisymétrique par rapport à (CD). Les points C et D sont donc au même potentiel, aucun courant ne circulant dans la résistance R' . On peut alors simplifier le montage en « supprimant » celle-ci.



La résistance équivalente R_{AB} vaut donc :

$$R_{AB} = \frac{(R + R)(2R + 2R)}{(R + R) + (2R + 2R)} = \frac{4}{3}R.$$

c) • Le montage est symétrique par rapport à (AB). Comme le courant sort du circuit en B, il ne circule aucun courant dans la branche contenant C : on peut donc l'éliminer.



La résistance équivalente R_{AB} vaut donc :

$$R_{AB} = \frac{R + R'}{2} = \frac{R + \frac{3}{4}R}{2} = \frac{7}{8}R.$$

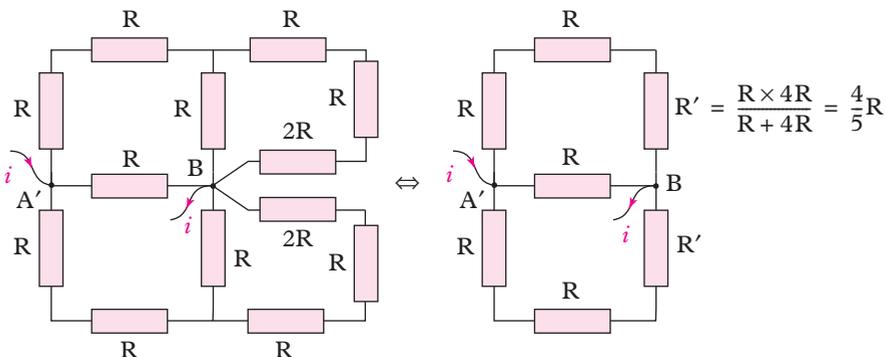


Les symétries du réseau sont aussi des symétries pour les répartitions de courant. En effet, en un nœud, le courant se partage également entre deux résistances égales.



Un courant non nul dans la branche contenant C ne respecterait pas la symétrie de cette répartition.

• Le montage est symétrique par rapport à (A'B). On peut alors modifier le schéma sans modifier la résistance du montage en remplaçant la résistance R entre B et C' par deux résistances en parallèle de valeur $2R$.

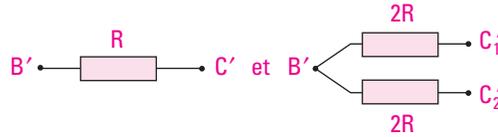


La résistance équivalente $R_{A'B}$ vaut donc (3 résistances en parallèle) :

$$\frac{1}{R_{A'B}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R+R'} + \frac{1}{2R+R'} = \frac{1}{R} + \frac{2}{2R+\frac{4}{5}R} = \frac{1}{R} + \frac{5}{7R} = \frac{12}{7R},$$

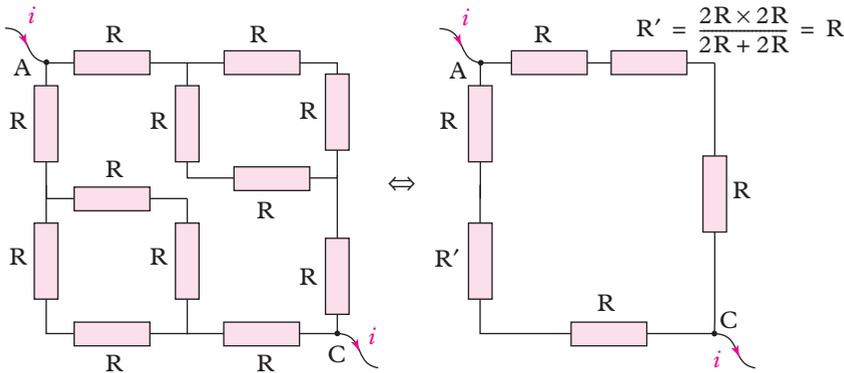
soit : $R_{A'B} = \frac{7}{12}R$.

⚠ On vérifie qu'il y a bien équivalence entre :



Le courant se répartit équitablement entre les deux branches et les points C'_1 et C'_2 sont au même potentiel que le point C' .

• Le montage est symétrique par rapport à (AC). On peut alors séparer les résistances en B sans modifier la résistance du montage et les répartitions de courant.

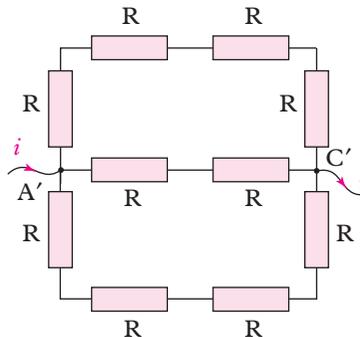


La résistance équivalente R_{AC} vaut donc (2 résistances en parallèle) :

$$\frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{2R+R'} + \frac{1}{2R+R'} = \frac{2}{3R}, \text{ soit : } R_{AC} = \frac{3}{2}R.$$

• Le montage est antisymétrique par rapport à la droite passant par B et perpendiculaire à $(A'C')$.

Tous les nœuds appartenant à cette droite sont au même potentiel, donc aucun courant ne circule dans les branches correspondantes : on élimine ces résistances.



La résistance équivalente $R_{A'C'}$ vaut donc (3 résistances en parallèle) :

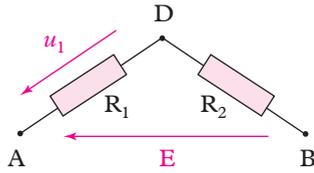
$$\frac{1}{R_{A'C'}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R} + \frac{1}{4R} = \frac{1}{R}, \text{ soit : } R_{A'C'} = R.$$

⚠ Le montage est aussi symétrique par rapport à $(A'C')$, mais cette symétrie ne permet aucune simplification intéressante.

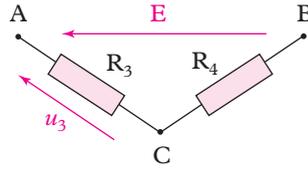
Exercices de niveau 3

Exercice 15

1) a) On applique le théorème de division de tension pour les branches ADB, puis ACB.



$$\text{On a : } u_1 = E \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$



$$\text{On a : } u_3 = E \frac{R_3}{R_3 + R_4}.$$



Les théorèmes de division de tension et de division de courant sont des outils très puissants.

La tension u demandée vaut donc :

$$u = -u_1 + u_3, \text{ soit : } u = E \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = \frac{E(R_2 R_3 - R_1 R_4)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}.$$

b) Le pont est équilibré si $u = 0$, d'où :

$$R_2 R_3 - R_1 R_4 = 0, \text{ soit : } R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4} = \frac{1\,827 \times 100}{5 \cdot 10^3} = 36,5 \, \Omega.$$

c) Dans l'expression trouvée à la question a), le dénominateur croît avec R_1 et le numérateur décroît avec R_1 . La plus petite valeur de u admise ($u_m = -10^{-3}$ V) est associée à la plus grande valeur de R_1 (notée R_{1M}) et la plus grande valeur de u admise ($u_M = +10^{-3}$ V) est associée à la plus petite valeur de R_1 (notée R_{1m}).

On a donc :

$$U_m = E \frac{R_2 R_3 - R_{1M} R_4}{(R_{1M} + R_2)(R_3 + R_4)}, \text{ soit : } R_{1M} = \frac{E \frac{R_2 R_3}{R_3 + R_4} - u_m R_2}{E \frac{R_4}{R_3 + R_4} + u_m}.$$

De même, on obtient :

$$R_{1m} = \frac{E \frac{R_2 R_3}{R_3 + R_4} - u_M R_2}{E \frac{R_4}{R_3 + R_4} + u_M}.$$



Dans le calcul, u_m et u_M jouent le même rôle. On passe donc de l'expression de R_{1M} à celle de R_{1m} en remplaçant u_m par u_M .

A.N. $R_{1M} = 36,8 \, \Omega$ et $R_{1m} = 36,2 \, \Omega$.

Grâce à la mesure effectuée, la résistance R_1 est connue à $0,3 \, \Omega$ près :

$$R_1 = 36,5 \pm 0,3 \, \Omega.$$

2) a)

 On applique le théorème de superposition énoncé dans l'exercice 5.

La tension u est la somme des tensions u_E due à la présence de la fém E seule et u_e due à la présence de la fém e seule.

• Le pont étant équilibré, on a : $u_E = 0$.

• Pour déterminer u_e , on « annule » E , c'est-à-dire qu'on relie les points A et B par un fil.

Aucun courant ne passe donc dans la branche ADB et on a $u_e = u_2$.

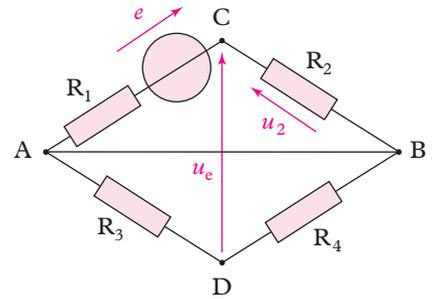
 Le fil court-circuite la branche ADB.

Dans la branche ACB, le théorème de division de tension donne alors :

$$u_e = u_2 = \frac{eR_2}{R_1 + R_2}.$$

Finalement :

$$u = u_E + u_e = \frac{eR_2}{R_1 + R_2}.$$

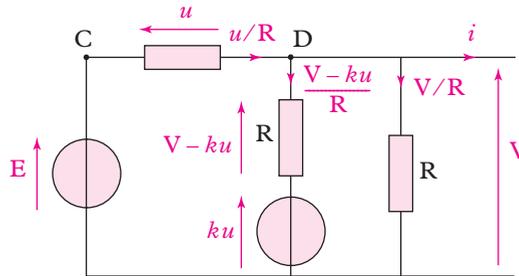


b) On veut $|u| < 1 \text{ mV} = u_M$ (cf. question 1. c), d'où :

$$\left| e \right| \frac{R_2}{R_1 + R_2} < u_M, \text{ soit : } |e| < \frac{R_1 + R_2}{R_2} u_M = 1,02 \text{ mV}.$$

Exercice 16

D'après la loi des mailles, on a : $E = u + V$. Précisons sur le schéma les intensités dans chaque branche et les tensions aux bornes des résistances.



D'après la loi des nœuds en D, on a :

$$\frac{u}{R} = \frac{V - ku}{R} + \frac{V}{R} + i.$$

Comme $u = E - V$, on en déduit :

$$\frac{E - V}{R} = \frac{V - k(E - V)}{R} + \frac{V}{R} + i.$$

$$(k + 1)E = V(k + 3) + Ri.$$

$$V = \frac{k + 1}{k + 3} E - \frac{R}{k + 3} i.$$

Le générateur de Thévenin équivalent au montage a pour caractéristiques :

$$E_{\text{th}} = \frac{k + 1}{k + 3} E \quad \text{et} \quad R_{\text{th}} = \frac{R}{k + 3}.$$

Condensateurs et bobines – Dipôles linéaires

Introduction

Jusqu'à présent, nous avons étudié uniquement des dipôles en régime permanent. De nombreux dipôles, néanmoins, fonctionnent en régime variable. Par exemple, la réponse d'un condensateur ou d'une bobine à un échelon de tension n'est pas instantanée et passe par une phase transitoire. Dans les deux cas, les grandeurs électriques u et i vérifient une équation différentielle linéaire : on dit alors que le condensateur et la bobine sont des dipôles linéaires.

Plan du chapitre 3

A. Étude des condensateurs	80
1. Description d'un condensateur parfait	80
2. Énergie d'un condensateur parfait	81
3. Association de condensateurs parfaits	82
4. Modélisation d'un condensateur réel	83
B. Étude des bobines	84
1. Description d'une bobine parfaite	84
2. Énergie d'une bobine parfaite	85
3. Association de bobines parfaites	86
4. Modélisation d'une bobine réelle	87
C. Les dipôles linéaires	88
1. Définition et exemples	88
2. Associations de dipôles linéaires	88
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	90
Énoncés des exercices	94
Indications	95
Solution des exercices	96

A. Étude des condensateurs

A.1. Description d'un condensateur parfait

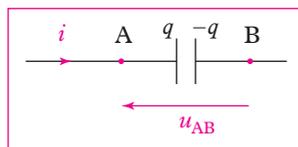


Fig. 1 - Étude d'un condensateur en convention récepteur. Les charges portées par les deux armatures sont opposées.

1. Michael Faraday (1791-1867), chimiste et physicien britannique, découvrit l'induction électromagnétique, établit la loi de l'électrolyse et fonda la théorie de l'électrisation. En chimie, il découvrit le benzène et liquéfia de nombreux gaz.

2. En électronique, on utilise les sous-multiple du farad :

– le microfarad (μF) :

$$1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F} ;$$

– le nanofarad (nF) :

$$1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F} = 10^{-3} \mu\text{F} ;$$

– le picofarad (pF) :

$$1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F} = 10^{-6} \mu\text{F} = 10^{-3} \text{ nF}.$$

3. Si le courant i est positif, la quantité d'électricité $dQ > 0$ s'accumule sur l'armature du condensateur : la charge q augmente. Si le courant i est négatif, la quantité d'électricité $dQ < 0$ quitte l'armature du condensateur : la charge q diminue.

4. En convention générateur, il faut introduire un signe moins.

A.1.1 - Charge d'un condensateur

Un condensateur est l'association de deux conducteurs en regard, appelés armatures. Lorsqu'il est soumis à une différence de potentiel u non nulle, des charges opposées $q_A = q$ et $q_B = -q_A = -q$ s'accumulent sur les deux armatures (fig. 1).

Définition 1

La charge q_A d'un condensateur est proportionnelle à la tension u_{AB} à ses bornes. Le coefficient de proportionnalité C , exprimé en farad (F)¹, s'appelle la capacité du condensateur² :

$$q_A = C u_{AB}$$

q_A charge en coulomb (C)

C capacité en farad (F)

u_{AB} tension en volt (V)

On étudie un condensateur en convention récepteur et on ne représente généralement que l'armature portant la charge q . D'après la relation charge-tension, celle-ci est algébrique :

$$q > 0 \text{ si } u > 0 \text{ et } q < 0 \text{ si } u < 0.$$

A.1.2 - Relation charge-intensité pour un condensateur

D'après le chapitre 1, on sait que l'intensité i du courant s'écrit :

$$i = \frac{dQ}{dt},$$

où dQ est la quantité d'électricité traversant une section quelconque du circuit pendant la durée dt . D'après la conservation de la charge, la charge q de l'armature du condensateur varie donc dans le même temps de la quantité³ $dq = dQ$.

En convention récepteur, la relation charge-intensité s'écrit pour un condensateur :

$$i = \frac{dq}{dt}, \text{ où } q \text{ est la charge du condensateur (C).}$$

A.1.3 - Relation tension-intensité pour un condensateur

Des relations charge-tension et charge-intensité, on déduit la relation tension-intensité pour un condensateur en convention récepteur⁴ :

$$q = C u \text{ et } i = \frac{dq}{dt}, \text{ d'où : } i = C \frac{du}{dt}.$$

L'intensité du courant dans les fils d'alimentation du condensateur ne peut pas être infinie : la tension u ne subit donc pas de discontinuité.

La tension $u(t)$ aux bornes d'un condensateur est toujours une fonction continue du temps.

Application 1 Tension aux bornes d'un condensateur

Un générateur de courant idéal débite un courant constant d'intensité $I = 1,0 \mu\text{A}$ dans un condensateur de capacité $C = 100 \text{ nF}$. Initialement, la tension u aux bornes du condensateur est nulle. Comment u varie-t-elle au cours du temps ?

Solution

En convention récepteur, on a :

$$i = I = C \frac{du}{dt}, \text{ soit : } du = \frac{I}{C} dt.$$

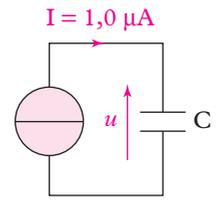
On intègre cette équation par rapport au temps :

$$u(t) = \frac{I}{C} t + \text{cte}, \text{ avec } u(t=0) = 0.$$

On déduit des conditions initiales à $t = 0$:

$$\text{cte} = 0, \text{ d'où : } u(t) = \frac{I}{C} t, \text{ soit : } u(t) = \frac{1,0 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-9}} t = 10t.$$

La tension u varie linéairement avec le temps.



A.2. Énergie d'un condensateur parfait

Définition 2

L'énergie électrostatique $E_{\text{élec}}$ emmagasinée dans un condensateur soumis à la tension u est égale à l'énergie électrique reçue par le condensateur initialement déchargé lorsque la tension à ses bornes passe de 0 à u . Elle a pour expression¹ :

$$E_{\text{élec}} = \frac{1}{2} C u^2$$

$E_{\text{élec}}$ énergie en joule (J)
 C capacité en farad (F)
 u tension en volt (V)

1. D'après la relation charge-tension $q = Cu$, on a aussi :

$$E_{\text{élec}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} q u.$$

L'énergie $E_{\text{élec}}$ emmagasinée par un condensateur est donc d'autant plus grande que sa capacité C est grande.

Démonstration

La puissance électrique P_r reçue par le condensateur à l'instant t vaut :

$$P_r = u i \text{ avec } i = C \frac{du}{dt}, \text{ d'où : } P_r = C u \frac{du}{dt}.$$

L'énergie $dE_{\text{élec}}$ reçue par le condensateur pendant la durée infinitésimale dt vaut donc² :

$$P_r = \frac{dE_{\text{élec}}}{dt}, \text{ d'où : } dE_{\text{élec}} = P_r dt = C u du.$$

L'énergie totale $E_{\text{élec}}$ reçue par le condensateur est la somme des énergies élémentaires reçues lorsque la tension passe de 0 à u . D'où :

$$E_{\text{élec}} = \int_0^u dE_{\text{élec}} = \int_0^u C u du = \frac{1}{2} C u^2.$$

2. Si la puissance P reçue par un système est constante, son énergie E varie de la quantité $\Delta E = P \Delta t$ pendant l'intervalle de temps Δt , d'où :

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

En revanche, si P n'est pas constante, on peut seulement écrire que E varie de la quantité $dE = P dt$ pendant l'intervalle de temps infinitésimal dt , d'où :

$$P = \frac{dE}{dt}.$$

Application 2 Énergie emmagasinée dans un condensateur

Calculer l'énergie emmagasinée dans un condensateur de capacité $C = 100 \text{ nF}$ chargé sous la tension constante $U = 10 \text{ V}$.

Solution

L'énergie du condensateur vaut :

$$E_{\text{élec}} = \frac{1}{2}CU^2, \text{ d'où : } E_{\text{élec}} = \frac{1}{2} \times 1,00 \cdot 10^{-7} \times 10^2 = 5,0 \cdot 10^{-6} \text{ J} = 5,0 \text{ }\mu\text{J}.$$

A.3. Association de condensateurs parfaits

A.3.1 - Association en parallèle

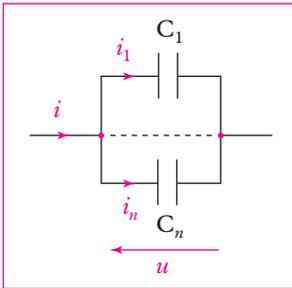


Fig. 2 - Association en parallèle de n condensateurs parfaits.

On considère n condensateurs parfaits associés en parallèle et soumis à la même tension u (fig. 2). En convention récepteur, le condensateur k de capacité C_k est parcouru par le courant d'intensité i_k telle que :

$$i_k = C_k \frac{du}{dt}.$$

D'après la loi des nœuds, l'intensité totale i s'écrit :

$$i = \sum_k i_k, \text{ d'où : } i = \sum_k C_k \frac{du}{dt} = \left(\sum_k C_k \right) \frac{du}{dt}.$$

L'association en parallèle de condensateurs parfaits de capacités C_k est équivalente à un condensateur unique de capacité C telle que :

$$C = \sum_k C_k.$$

A.3.2 - Association en série

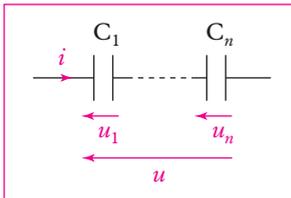


Fig. 3 - Association en série de n condensateurs parfaits.

On considère n condensateurs parfaits associés en série et parcourus par le même courant d'intensité i (fig. 3). En convention récepteur, la tension u_k aux bornes du condensateur k de capacité C_k vérifie :

$$i = C_k \frac{du_k}{dt}, \text{ soit : } \frac{du_k}{dt} = \frac{i}{C_k}.$$

D'après la loi d'addition des tensions, la tension totale u s'écrit :

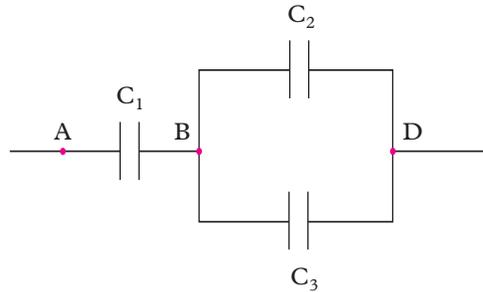
$$u = \sum_k u_k, \text{ d'où : } \frac{du}{dt} = \sum_k \frac{du_k}{dt} = \sum_k \frac{i}{C_k} = i \sum_k \frac{1}{C_k}.$$

L'association en série de condensateurs parfaits de capacités C_k est équivalente à un condensateur unique de capacité C telle que :

$$\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k}.$$

Application 3 Association de condensateurs

Quelle est la capacité du condensateur équivalent à l'association des trois condensateurs schématisée ci-dessous ?



Solution

Entre les points B et D, la capacité du condensateur équivalent aux deux condensateurs en parallèle vaut :

$$C_{BD} = C_2 + C_3.$$

Entre les points A et D, le condensateur de capacité C_{BD} est lui-même en série avec le condensateur de capacité C_1 . La capacité C du condensateur équivalent est donnée par la relation :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{BD}} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_1(C_2 + C_3)}, \text{ soit : } C = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

A.4. Modélisation d'un condensateur réel

A.4.1 - Description d'un condensateur réel

1. Un diélectrique est un isolant augmentant la capacité C du condensateur. (En réalité, il est toujours légèrement conducteur.)

Les deux armatures d'un condensateur réel sont séparées par un diélectrique légèrement conducteur¹, à travers lequel le condensateur se décharge lentement. Un condensateur réel se modélise donc par l'association en parallèle d'un condensateur parfait de capacité C avec une « résistance de fuite » R_f (fig. 4).

En convention récepteur, les intensités i_C dans le condensateur et i_R dans la résistance de fuite valent respectivement :

$$i_C = C \frac{du}{dt} \text{ et } i_R = \frac{u}{R_f} \text{ (loi d'Ohm).}$$

D'après la loi des nœuds, le courant total i s'écrit :

$$i = i_R + i_C, \text{ d'où : } i = \frac{u}{R_f} + C \frac{du}{dt}.$$

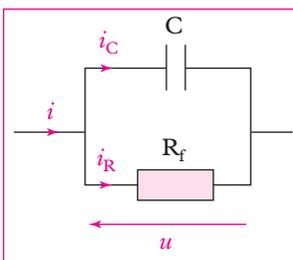


Fig. 4 - Modélisation d'un condensateur réel.

A.4.2 - Énergie reçue par un condensateur réel

La puissance électrique P_r reçue par un condensateur réel à l'instant t vaut :

$$P_r = ui \text{ avec } i = \frac{u}{R_f} + C \frac{du}{dt}, \text{ d'où : } P_r = \frac{u^2}{R_f} + C u \frac{du}{dt}.$$

L'énergie reçue par le condensateur réel est la somme de deux termes :

• L'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance R_f entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant t_u où la tension aux bornes du condensateur vaut u :

$$E_{\text{Joule}} = \int_0^{t_u} \frac{u^2}{R_f} dt.$$

- L'énergie électrostatique emmagasinée dans la capacité C :

$$E_{\text{élec}} = \frac{1}{2} C u^2.$$

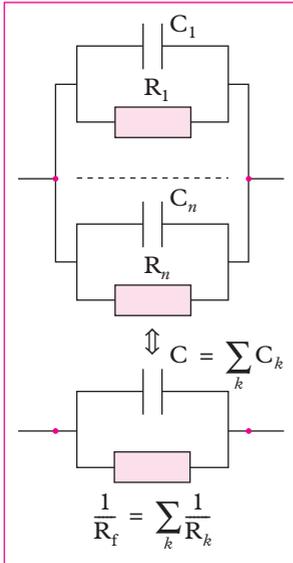


Fig. 5 - Condensateur réel équivalent à l'association en parallèle de n condensateurs réels.

1. On pourrait montrer que l'association en série de deux condensateurs réels (R_1, C_1) et (R_2, C_2) aboutit à une relation tension-intensité compliquée qui n'apporte pas d'informations supplémentaires.

2. Le passage du courant dans la bobine crée un champ magnétique \vec{B} dont la valeur est proportionnelle à l'intensité i .

3. En convention générateur, il faut introduire un signe moins.

4. Joseph Henry (1797-1878), physicien américain, découvrit l'auto-induction en 1832.

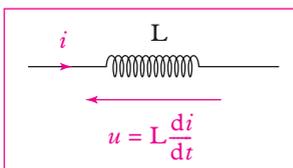


Fig. 6 - En convention récepteur, tension aux bornes d'une bobine parfaite.

A.4.3 - Association de condensateurs réels

• Association en parallèle

On considère n condensateurs réels (C_k, R_k) associés en parallèle et soumis à la même tension u (fig. 5).

– L'association en parallèle des capacités C_k est équivalente à la capacité C :

$$C = \sum_k C_k.$$

– L'association en parallèle des résistances R_k est équivalente à la résistance R_f telle que :

$$\frac{1}{R_f} = \sum_k \frac{1}{R_k}.$$

L'association des n condensateurs est donc équivalente au condensateur réel de capacité C et de résistance de fuite R_f telles que :

$$C = \sum_k C_k \text{ et } \frac{1}{R_f} = \sum_k \frac{1}{R_k}.$$

• Association en série

L'association en série de condensateurs réels n'est pas équivalente à un dipôle simple¹.

B. Étude des bobines

B.1. Description d'une bobine parfaite

Une bobine est constituée par l'enroulement régulier d'un fil métallique conducteur². Elle peut être plate (l'enroulement est constitué de quelques spires) ou longue (le fil est enroulé en hélice sur un cylindre).

Définition 3

La tension u aux bornes d'une bobine est proportionnelle à la dérivée par rapport au temps de l'intensité i du courant qui la traverse. En convention récepteur³, le coefficient de proportionnalité L , exprimé en henry (H)⁴, s'appelle l'inductance propre de la bobine (fig. 6) :

$$u = L \frac{di}{dt}$$

u tension en volt (V)

L inductance propre en henry (H)

i intensité en ampère (A)

La tension aux bornes de la bobine ne peut pas être infinie : l'intensité i du courant qui la traverse ne subit donc pas de discontinuité.

L'intensité $i(t)$ du courant dans une bobine est toujours une fonction continue du temps.

Application 4 Intensité dans une bobine

Une bobine d'inductance $L = 100 \text{ mH}$ est soumise à la tension constante $U = 1,0 \text{ V}$. Initialement, l'intensité i du courant dans la bobine est nulle. Comment i varie-t-elle au cours du temps ?

Solution

En convention récepteur, on a :

$$U = L \frac{di}{dt}, \text{ d'où : } di = \frac{U}{L} dt.$$

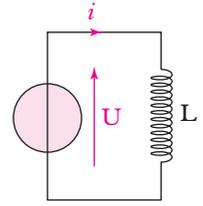
On intègre cette équation par rapport au temps :

$$i(t) = \frac{U}{L}t + \text{cte}, \text{ avec } i(t=0) = 0.$$

On déduit des conditions initiales à $t = 0$:

$$\text{cte} = 0, \text{ d'où : } i(t) = \frac{U}{L}t, \text{ soit : } i(t) = \frac{1,0}{100 \cdot 10^{-3}}t = 10t.$$

L'intensité i du courant varie linéairement avec le temps.



B.2. Énergie d'une bobine parfaite

Définition 4

L'énergie magnétique E_{mag} emmagasinée dans une bobine traversée par un courant d'intensité i est égale à l'énergie électrique reçue par la bobine lorsque l'intensité passe de 0 à i . Elle a pour expression :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i^2$$

E_{mag} énergie en joule (J)
 L inductance propre en henry (H)
 i intensité en ampère (A)

L'énergie E_{mag} emmagasinée dans une bobine est donc d'autant plus grande que son inductance L est grande.

Démonstration

La puissance électrique P_r reçue par la bobine à l'instant t vaut :

$$P_r = ui \text{ avec } u = L \frac{di}{dt}, \text{ d'où : } P_r = Li \frac{di}{dt}.$$

L'énergie dE_{mag} reçue par la bobine pendant la durée infinitésimale dt vaut donc :

$$P_r = \frac{dE_{\text{mag}}}{dt}, \text{ d'où : } dE_{\text{mag}} = P_r dt = L i di.$$

L'énergie totale E_{mag} reçue par la bobine est la somme des énergies élémentaires reçues lorsque l'intensité du courant passe de 0 à i . D'où :

$$E_{\text{mag}} = \int_0^i dE_{\text{mag}} = \int_0^i L i di = \frac{1}{2} L i^2.$$

Application 5 Énergie emmagasinée dans une bobine

Calculer l'énergie emmagasinée dans une bobine d'inductance $L = 100 \text{ mH}$ parcourue par un courant d'intensité $I = 1,0 \text{ A}$.

Solution

L'énergie de la bobine vaut :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2}LI^2, \text{ d'où : } E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \times 0,100 \times 1,0^2 = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ J} = \mathbf{50 \text{ mJ}}.$$

1. Par rapport au condensateur, les rôles de la tension $u(t)$ et de l'intensité $i(t)$ sont inversés.

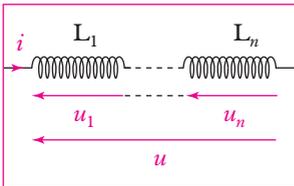


Fig. 7 - Association en série de n bobines parfaites.

B.3. Association de bobines parfaites¹

On suppose que les influences des bobines présentes dans le circuit les unes sur les autres sont nulles.

B.3.1 - Association en série

On considère n bobines parfaites associées en série et traversées par le même courant d'intensité i (fig. 7). En convention récepteur, la tension aux bornes de la bobine k d'inductance L_k s'écrit :

$$u_k = L_k \frac{di}{dt}.$$

D'après la loi d'addition des tensions, la tension totale u s'écrit :

$$u = \sum_k u_k, \text{ d'où : } u = \sum_k L_k \frac{di}{dt} = \left(\sum_k L_k \right) \frac{di}{dt}.$$

L'association en série de bobines parfaites d'inductance L_k est équivalente à une bobine unique d'inductance L telle que :

$$L = \sum_k L_k.$$

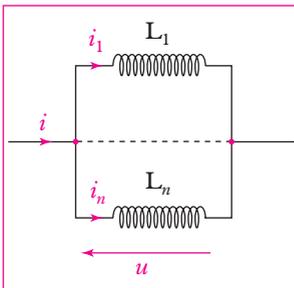


Fig. 8 - Association en parallèle de n bobines parfaites.

B.3.2 - Association en parallèle

On considère n bobines parfaites associées en parallèle et soumises à la même tension u (fig. 8). En convention récepteur, l'intensité i_k du courant traversant la bobine k d'inductance L_k vérifie :

$$u = L_k \frac{di_k}{dt}, \text{ soit : } \frac{di_k}{dt} = \frac{u}{L_k}.$$

D'après la loi des nœuds, l'intensité totale i s'écrit :

$$i = \sum_k i_k, \text{ d'où : } \frac{di}{dt} = \sum_k \frac{di_k}{dt} = \sum_k \frac{u}{L_k} = u \sum_k \frac{1}{L_k}.$$

L'association en parallèle de bobines parfaites d'inductance L_k est équivalente à une bobine unique d'inductance L telle que :

$$\frac{1}{L} = \sum_k \frac{1}{L_k}.$$

B.4. Modélisation d'une bobine réelle

B.4.1 - Description d'une bobine réelle

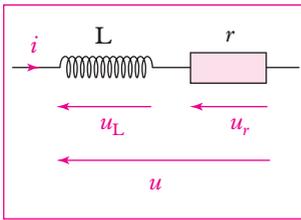


Fig. 9 - Modélisation d'une bobine réelle.

L'enroulement de fil d'une bobine réelle possède une résistance non nulle. Une bobine réelle se modélise donc par l'association en série d'une bobine parfaite d'inductance L avec une résistance r (fig. 9).

En convention récepteur, la tension u aux bornes de la bobine réelle s'écrit donc :

$$u = L \frac{di}{dt} + r i.$$

B.4.2 - Énergie reçue par une bobine réelle

La puissance électrique P_r reçue par une bobine réelle à l'instant t vaut :

$$P_r = u i \text{ avec } u = L \frac{di}{dt} + r i, \text{ d'où : } P_r = r i^2 + L i \frac{di}{dt}.$$

L'énergie reçue par la bobine réelle est la somme de deux termes :

- L'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance r entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant t_1 où l'intensité du courant dans la bobine vaut i :

$$E_{\text{Joule}} = \int_0^{t_1} r i^2 dt.$$

- L'énergie magnétique emmagasinée dans l'inductance L :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i^2.$$

B.4.3 - Association de bobines réelles

• Association en série

On considère n bobines réelles associées en série et traversées par le même courant d'intensité i (fig. 10).

– L'association en série des inductances L_k est équivalente à l'inductance L :

$$L = \sum_k L_k.$$

– L'association en série des résistances r_k est équivalente à la résistance r :

$$r = \sum_k r_k.$$

L'association des n bobines est donc équivalente à la bobine réelle d'inductance L et de résistance r telles que :

$$L = \sum_k L_k \quad \text{et} \quad r = \sum_k r_k.$$

• Association en parallèle

L'association en parallèle de bobines réelles n'est pas équivalente à un dipôle simple.

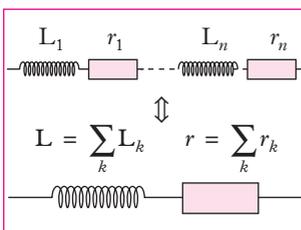


Fig. 10 - Bobine réelle équivalente à l'association en série de n bobines réelles.

C. Les dipôles linéaires

C.1. Définition et exemples

L'étude des dipôles linéaires s'effectue dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ou quasi-permanents). On considère donc que la tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle et l'intensité $i(t)$ du courant le traversant varient lentement au cours du temps.

Définition 5

Un dipôle est linéaire lorsque la tension $u(t)$ à ses bornes et l'intensité $i(t)$ du courant le traversant vérifient une équation différentielle linéaire (à coefficients constants).

1. L'ordre d'une équation différentielle est celui de la dérivée la plus élevée intervenant dans l'équation.

- Les conducteurs ohmiques, les générateurs, les récepteurs... dont la caractéristique $u = f(i)$ peut être localement modélisée par une droite sont des dipôles linéaires vérifiant une équation différentielle linéaire d'ordre 0¹ (relation affine entre u et i).
- Les condensateurs (parfaits ou réels) sont des dipôles linéaires vérifiant une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en $u(t)$.
- Les bobines (parfaites ou réelles) sont des dipôles linéaires vérifiant une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en $i(t)$.

C.2. Associations de dipôles linéaires

C.2.1 - Exemple : association d'un condensateur parfait et d'une bobine réelle

On étudie en convention récepteur l'association d'un condensateur parfait C et d'une bobine réelle (L, r)².

2. En pratique, les condensateurs utilisés peuvent très souvent être considérés comme parfaits, alors que les bobines sont des bobines réelles.

- **Association en série** (fig. 11)

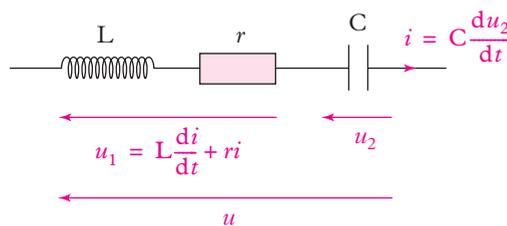


Fig. 11 - Association en série d'une bobine réelle (L, r) et d'un condensateur parfait C.

D'après la loi d'addition des tensions, la tension totale u s'écrit :

$$u = u_1 + u_2 = L \frac{di}{dt} + ri + u_2.$$

En dérivant une fois cette expression, on obtient :

$$\frac{du}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{du_2}{dt}, \quad \text{d'où : } \frac{du}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}.$$

L'association est donc équivalente à un dipôle linéaire vérifiant une équation différentielle d'ordre 2 en $i(t)$ et d'ordre 1 en $u(t)$.

• Association en parallèle (fig. 12)

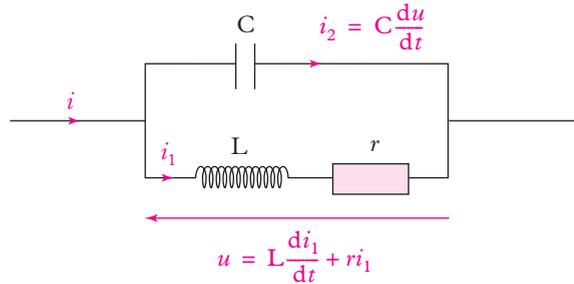


Fig. 12 - Association en parallèle d'une bobine réelle (L, r) et d'un condensateur parfait C .

D'après la loi des nœuds, l'intensité totale i s'écrit :

$$i = i_1 + i_2, \quad \text{d'où : } i_1 = i - i_2 = i - C \frac{du}{dt}.$$

En reportant i_1 dans l'expression de la tension u écrite aux bornes de la bobine réelle, on obtient :

$$\begin{aligned} u &= L \frac{di_1}{dt} + ri_1 = L \frac{d}{dt} \left(i - C \frac{du}{dt} \right) + r \left(i - C \frac{du}{dt} \right) \\ &= L \frac{di}{dt} - LC \frac{d^2u}{dt^2} + ri - rC \frac{du}{dt}. \end{aligned}$$

D'où finalement, en ordonnant les termes en u et les termes en i :

$$u + rC \frac{du}{dt} + LC \frac{d^2u}{dt^2} = L \frac{di}{dt} + ri.$$

L'association est donc équivalente à un dipôle linéaire vérifiant une équation différentielle d'ordre 2 en $u(t)$ et d'ordre 1 en $i(t)$.

C.2.2 - Propriété

1. Par exemple, l'association en série de deux condensateurs réels vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 en $u(t)$. De même, l'association en parallèle de deux bobines réelles vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 en

On peut généraliser les résultats obtenus sur les exemples précédents à l'association de n dipôles linéaires quelconques.

L'association de n dipôles linéaires est équivalente à un dipôle linéaire. L'ordre de l'équation différentielle obtenue augmente avec le nombre de dipôles associés¹.

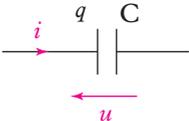
L'essentiel

✓ Propriétés des condensateurs

- La charge q d'un condensateur est proportionnelle à la tension u à ses bornes :

$$q = Cu$$

q	charge en coulomb (C)
C	capacité en farad (F)
u	tension en volt (V)



- En convention récepteur, les relations charge-intensité et tension-intensité s'écrivent pour un condensateur :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}, \text{ où } i \text{ est l'intensité du courant dans le circuit.}$$

- La tension $u(t)$ aux bornes d'un condensateur est toujours une fonction continue du temps.
- L'énergie électrostatique E_{elec} emmagasinée dans un condensateur a pour expression :

$$E_{\text{elec}} = \frac{1}{2}Cu^2$$

E_{elec}	énergie en joule (J)
C	capacité en farad (F)
u	tension en volt (V)

- L'association parallèle de condensateurs de capacités C_k est équivalente à un condensateur unique de capacité $C = \sum_k C_k$.

L'association série de condensateurs de capacités C_k est équivalente à un condensateur unique de capacité C telle que $\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k}$.

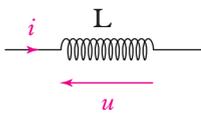
- Un condensateur réel se modélise par l'association en parallèle d'un condensateur de capacité C avec une « résistance de fuite » R_f .

✓ Propriétés des bobines

- La tension u aux bornes d'une bobine est proportionnelle à la dérivée par rapport au temps de l'intensité i du courant qui la traverse. En convention récepteur, on a :

$$u = L \frac{di}{dt}$$

u	tension en volt (V)
L	inductance en henry (H)
i	intensité en ampère (A)



- L'intensité $i(t)$ du courant dans une bobine est toujours une fonction continue du temps.
- L'énergie magnétique E_{mag} emmagasinée dans une bobine a pour expression :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2}Li^2$$

E_{mag}	énergie en joule (J)
L	inductance en henry (H)
i	intensité en ampère (A)

- L'association série de bobines d'inductance L_k est équivalente à une bobine unique d'inductance $L = \sum_k L_k$.

L'association parallèle de bobines d'inductance L_k est équivalente à une bobine unique d'inductance L telle que $\frac{1}{L} = \sum_k \frac{1}{L_k}$.

- Une bobine réelle se modélise par l'association en série d'une bobine d'inductance L avec une résistance r .

✓ Les dipôles linéaires

- Un dipôle est linéaire lorsque la tension $u(t)$ à ses bornes et l'intensité $i(t)$ du courant le traversant vérifient une équation différentielle linéaire (à coefficients constants).

Exemple : les conducteurs ohmiques, les dipôles dont la caractéristique peut être localement modélisée par une droite, les condensateurs (parfaits ou réels), les bobines (parfaites ou réelles)...

- L'association de n dipôles linéaires est équivalente à un dipôle linéaire. L'ordre de l'équation différentielle obtenue augmente avec le nombre de dipôles associés.

Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment déterminer les conditions initiales d'un régime transitoire ?

Lorsqu'on modifie un régime continu en ouvrant ou en fermant un interrupteur, certaines grandeurs électriques varient continûment, tandis que d'autres subissent des discontinuités. On se propose de déterminer les valeurs de ces grandeurs à l'instant $t = 0^+$ qui suit la modification du circuit.

→ Savoir faire

- 1 Construire le schéma équivalent au circuit en régime permanent continu. Il faut pour cela substituer :

- un fil à une bobine ;
- un interrupteur ouvert à un condensateur.



En régime permanent continu : $u_L = L \frac{di_L}{dt} = 0$ et $i_C = C \frac{du_C}{dt} = 0$.

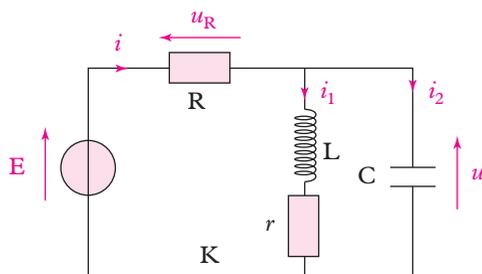
- 2 Déterminer les grandeurs électriques en $t = 0^-$ (avant la modification du circuit) à partir de ce schéma équivalent.
- 3 Identifier les grandeurs continues (ce sont les tensions aux bornes des condensateurs et les intensités dans les bobines) et préciser leurs valeurs en $t = 0^+$.
- 4 Déterminer les valeurs des autres grandeurs électriques en $t = 0^+$ par application des lois de Kirchhoff. Ce calcul doit être mené sur le circuit réel (et non sur le schéma équivalent) après modification de celui-ci.
- 5 Pour chaque condensateur (chaque bobine), déterminer la dérivée de u (respectivement de i) en $t = 0^+$ en exploitant sa caractéristique.



Ces résultats seront utilisés pour l'étude des régimes transitoires au chapitre 4.

→ Application

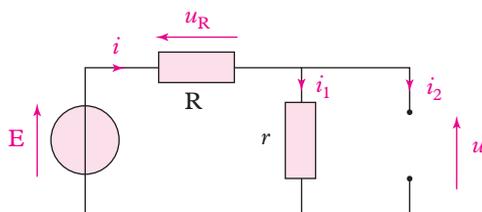
Le circuit ci-dessous est en régime permanent continu lorsque l'interrupteur K est ouvert à un instant choisi comme origine des temps.



Déterminer les valeurs des différentes grandeurs électriques juste après l'ouverture de l'interrupteur, ainsi que les valeurs de $\frac{di_1}{dt}$ et $\frac{du}{dt}$.

Solution

❶ Le schéma équivalent *avant* ouverture de l'interrupteur est :



❷ Avant l'ouverture de l'interrupteur K, le théorème de division de tension donne :

$$u_R = \frac{RE}{R+r} \quad \text{et} \quad u = \frac{rE}{R+r}.$$

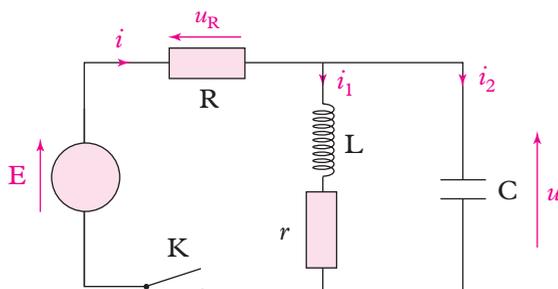
On en déduit les intensités :

$$i = \frac{E}{R+r}; \quad i_1 = \frac{E}{R+r}; \quad i_2 = 0.$$

❸ Seules u et i_1 sont nécessairement continues. Leurs valeurs en $t = 0^+$ sont inchangées :

$$u(0^+) = \frac{rE}{R+r} \quad \text{et} \quad i_1(0^+) = \frac{E}{R+r}.$$

❹ Après ouverture de l'interrupteur K, le circuit réel devient :



- $i(0^+) = 0$, car la branche est ouverte.
- $u_R(0^+) = 0$, d'après la caractéristique de la résistance R.
- $i_2(0^+) = i(0^+) - i_1(0^+)$, soit : $i_2(0^+) = -\frac{E}{R+r}$.

Ces trois grandeurs électriques sont discontinues en $t = 0$.



Les grandeurs autres que les tensions aux bornes de condensateurs et les courants dans les bobines ne sont pas nécessairement discontinues. La tension aux bornes de r , par exemple, est continue, bien que cela ne soit pas systématique pour une résistance.

- La caractéristique de la bobine s'écrit :

$$u_L = L \frac{di_1}{dt}, \text{ soit : } \frac{di_1}{dt} = \frac{u_L}{L} \text{ avec } u_L = u - ri_1.$$

On en déduit :

$$u_L(0^+) = u(0^+) - ri_1(0^+) = \frac{rE}{R+r} - \frac{rE}{R+r} = 0, \text{ soit : } \frac{di_1}{dt}(0^+) = 0.$$

- De même, la caractéristique du condensateur donne :

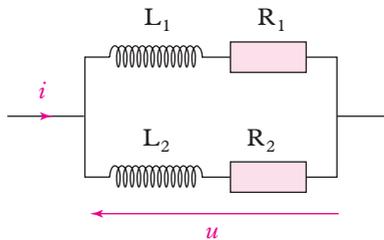
$$i_2 = C \frac{du}{dt}, \text{ soit : } \frac{du}{dt}(0^+) = \frac{i_2(0^+)}{C} = -\frac{E}{(R+r)C}.$$

Exercices

Niveau 1

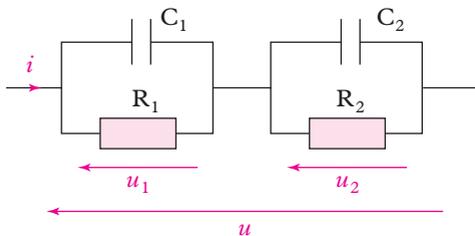
Ex. 1 Bobines réelles en parallèle

Déterminer l'équation différentielle liant la tension u et le courant i dans le montage ci-dessous, comportant deux bobines réelles en parallèle.



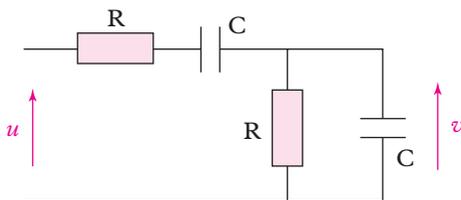
Ex. 2 Condensateurs avec fuite en série

Déterminer l'équation différentielle liant la tension u et le courant i dans le montage ci-dessous, comportant deux condensateurs avec fuite en série. On notera u_1 et u_2 les tensions aux bornes de chaque condensateur.



Ex. 3 Filtre de Wien

Le montage schématisé ci-dessous comporte deux résistances identiques R et deux condensateurs de capacité C .

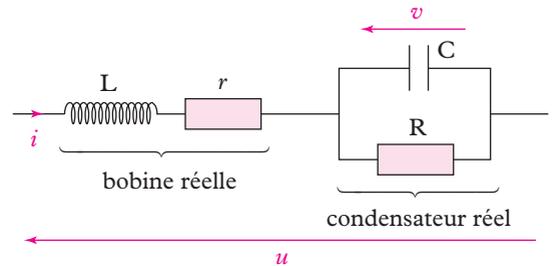


a) Écrire l'équation différentielle liant la tension de sortie v aux bornes du condensateur et la tension d'entrée u .

b) À l'instant initial, les deux condensateurs sont déchargés et la tension $u = E$ est constante. Déterminer les conditions initiales portant sur v et $\frac{dv}{dt}$ juste après le branchement du circuit ($v(0^+)$ et $\frac{dv}{dt}(0^+)$).

Ex. 4 Bobine réelle en série avec un condensateur avec fuite

Une bobine réelle d'inductance L possède une résistance r . Elle est placée en série avec un condensateur de capacité C et de résistance de fuite R .



On note u la tension totale, v la tension aux bornes du condensateur et i l'intensité du courant.

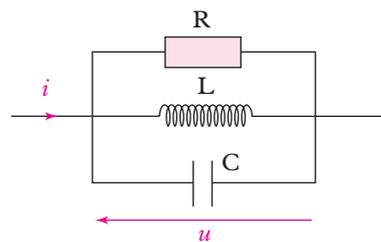
a) Déterminer l'équation différentielle liant l'intensité i et la tension u .

b) À $t = 0$, la tension aux bornes du condensateur vaut v_0 et pour $t \geq 0$, on impose $u = 0$.

Juste après installation du court-circuit, que valent $i(0^+)$? $v(0^+)$? $\frac{di}{dt}(0^+)$? $\frac{dv}{dt}(0^+)$?

Ex. 5 Circuit RLC parallèle

Un conducteur ohmique de résistance R , une bobine parfaite d'inductance L et un condensateur sans fuite de capacité C sont placés en parallèle. On note u la tension aux bornes des trois composants et i l'intensité totale traversant l'association.



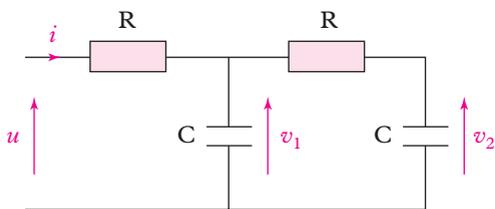
a) Quelle est l'équation différentielle liant u et i ?

b) On impose à partir de $t = 0$, un courant $i = I_0$. Pour les instants négatifs, le condensateur était déchargé et la bobine n'était parcourue par aucun courant.

Déterminer $u(0^+)$ et $\frac{du}{dt}(0^+)$.

Ex. 6 Cascade de circuits RC

On étudie le montage ci-dessous comportant deux circuits RC en cascade. On note u la tension d'entrée et v_1 et v_2 les tensions respectives aux bornes des condensateurs.



- a) Déterminer l'équation différentielle liant v_2 à u .
 b) Déterminer l'équation différentielle liant v_1 à u .
 c) À l'instant $t = 0$, on a : $u = U_0$, $v_1 = V_{10}$ et $v_2 = 0$.
 Déterminer $\frac{dv_1}{dt}(0)$ et $\frac{dv_2}{dt}(0)$.

Indications

Ex. 2 Distinguer deux cas possibles.

Ex. 3 a) Noter v_1 la tension aux bornes du condensateur et N le nœud du circuit. Appliquer les lois de Kirchhoff.

b) Utiliser les propriétés de continuité.

Ex. 4 b) Utiliser les propriétés de continuité.

Ex. 5 a) Dériver l'expression obtenue en appliquant la loi des nœuds.

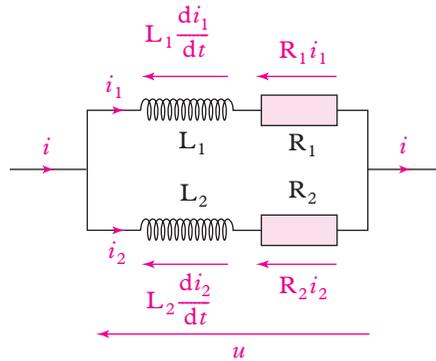
b) Utiliser les propriétés de continuité.

Ex. 6 b) et c) Utiliser les équations posées à la question a).

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1



La tension u se retrouve aux bornes de chaque bobine. En notant i_1 et i_2 les courants les traversant, on peut écrire :

$$\begin{cases} u = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 & \text{(a)} \\ u = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 & \text{(b)} \end{cases} \quad \text{avec } i = i_1 + i_2 \quad \text{(c)}.$$

On reporte $i_2 = i - i_1$, tiré de (c), dans (b) :

$$u = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i - L_2 \frac{di_1}{dt} - R_2 i_1.$$



On cherche à exprimer i_1 en fonction de i et de u , puis on injecte cette expression dans la caractéristique de la première bobine.



On pourrait aussi chercher à exprimer i_2 en fonction de i et de u , puis injecter cette expression dans la caractéristique de la deuxième bobine. Les calculs aboutiraient à la même équation différentielle.

On reporte $\frac{di_1}{dt} = \frac{u}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} i_1$, tiré de (a), dans l'équation ci-dessus :

$$u = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i - \frac{L_2}{L_1} u + \left(\frac{L_2}{L_1} R_1 - R_2 \right) i_1,$$

$$\text{d'où : } i_1 = \frac{u \left(1 + \frac{L_2}{L_1} \right) - L_2 \frac{di}{dt} - R_2 i}{\frac{L_2}{L_1} R_1 - R_2} \quad \text{si } \frac{R_2}{R_1} \neq \frac{L_2}{L_1}.$$

On reporte cette expression dans (a) :

$$u = \frac{L_1}{L_2 R_1 - R_2} \left[\left(1 + \frac{L_2}{L_1} \right) \frac{du}{dt} - L_2 \frac{d^2 i}{dt^2} - R_2 \frac{di}{dt} \right] + \frac{R_1}{L_2 R_1 - R_2} \left[\left(1 + \frac{L_2}{L_1} \right) u - L_2 \frac{di}{dt} - R_2 i \right].$$

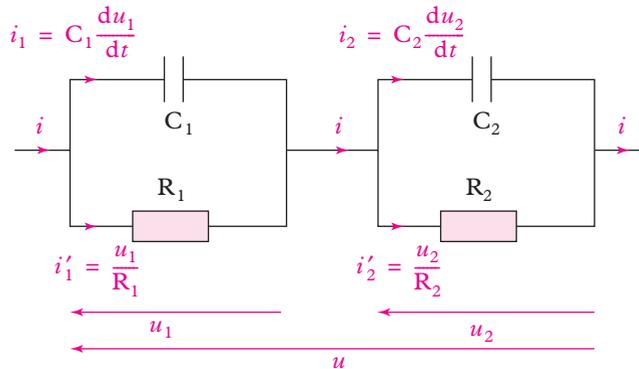
Après simplification, on obtient :

$$(L_1 + L_2) \frac{du}{dt} + (R_1 + R_2)u = L_1 L_2 \frac{d^2 i}{dt^2} + (R_1 L_2 + R_2 L_1) \frac{di}{dt} + R_1 R_2 i.$$

⚠ Si $\frac{L_2}{L_1} = \frac{R_2}{R_1}$, l'expression est plus simple et on a immédiatement :

$$u = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i - \frac{L_2}{L_1} u, \text{ d'où : } u \left(1 + \frac{L_2}{L_1}\right) = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i.$$

Exercice 2



On a pour chaque condensateur réel :

$$i = C_1 \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{R_1} = C_2 \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R_2}, \text{ avec } u = u_1 + u_2.$$

Reportons $u_2 = u - u_1$ dans l'expression précédente :

$$i = C_2 \frac{du}{dt} + \frac{u_2}{R_2} - C_2 \frac{du_1}{dt} - \frac{u_1}{R_2}.$$



On cherche à exprimer u_1 en fonction de i et de u , puis on injecte cette expression dans la caractéristique du premier condensateur.



On pourrait aussi chercher à exprimer u_2 en fonction de i et de u , puis injecter cette expression dans la caractéristique du deuxième condensateur. Les calculs aboutiraient à la même équation différentielle.

Reportons $\frac{du_1}{dt} = \frac{i}{C_1} - \frac{u_1}{R_1 C_1}$ dans l'expression précédente :

$$i = C_2 \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_2} - \frac{C_2}{C_1} i + \frac{C_2}{R_1 C_1} u_1 - \frac{u_1}{R_2}.$$

• Si $R_1 C_1 = R_2 C_2$, l'expression obtenue est :

$$i \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) = C_2 \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_2}.$$

• Si $R_1 C_1 \neq R_2 C_2$, on extrait $u_1 = \frac{i \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) - C_2 \frac{du}{dt} - \frac{u}{R_2}}{\frac{C_2}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2}}$, d'où :

$$i = \frac{C_1}{\frac{C_2}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2}} \left[\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) \frac{di}{dt} - C_2 \frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{1}{R_2} \frac{du}{dt} \right] + \frac{1}{\frac{C_2}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2}} \left[\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) i - C_2 \frac{du}{dt} - \frac{u}{R_2} \right].$$

Après simplification, nous obtenons :

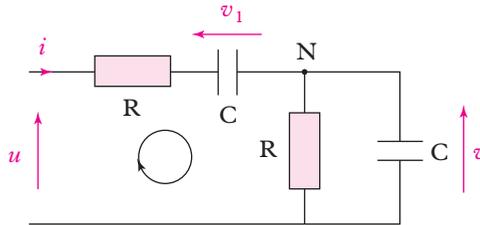
$$C_1 C_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{C_1}{R_2} + \frac{C_2}{R_1} \right) \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_1 R_2} = (C_1 + C_2) \frac{di}{dt} + i \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$



Il ne faut pas oublier de traiter les deux cas possibles.

Exercice 3

a) Notons v_1 la tension aux bornes du premier condensateur et i l'intensité du courant le parcourant en convention récepteur.



• En appliquant la loi des nœuds en N, nous avons :

$$i = C \frac{dv_1}{dt} = \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

• En appliquant la loi des mailles, nous avons aussi :

$$u = Ri + v_1 + v = R \left(\frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} \right) + v_1 + v,$$

soit : $u = RC \frac{dv}{dt} + 2v + v_1 \quad (2)$

Dérivons cette expression par rapport au temps :

$$\frac{du}{dt} = RC \frac{d^2 v}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} + \frac{dv_1}{dt}.$$



On ne dispose pas d'une relation exprimant directement v_1 en fonction de u et de v . En revanche, l'égalité (1) fait intervenir la dérivée de v_1 . Pour pouvoir l'exploiter, on dérive donc l'égalité (2).

• Reportons l'égalité (1) dans l'expression précédente :

$$\frac{du}{dt} = RC \frac{d^2 v}{dt^2} + 3 \frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC}.$$



Nous obtenons bien une équation différentielle linéaire.

b) • La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue. On a donc :

$$v_1(0^+) = v_1(0^-) = 0 \quad \text{et} \quad v(0^+) = v(0^-) = 0.$$

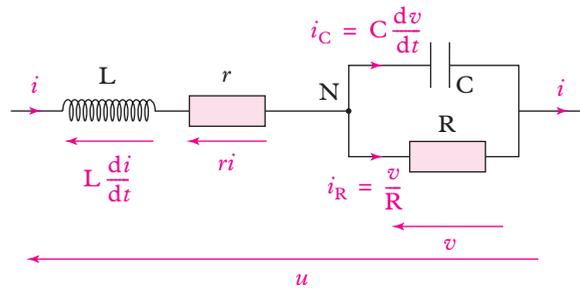


Les deux condensateurs sont déchargés, donc la tension à leurs bornes est nulle.

• Comme $u(0^+) = E$, nous obtenons grâce à l'équation (2) :

$$\frac{dv}{dt}(0^+) = \frac{u(0^+)}{RC} - 2v(0^+) - v_1(0^+), \quad \text{soit} : \frac{dv}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC}.$$

Exercice 4



a) • La loi des nœuds en N s'écrit :

$$i = i_C + i_R = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} \quad (1)$$

• La loi d'addition des tensions donne en outre :

$$u = L \frac{di}{dt} + ri + v, \text{ soit : } v = u - ri - L \frac{di}{dt} \quad (2)$$

• En reportant (2) dans (1), on a donc :

$$i = C \left(\frac{du}{dt} - r \frac{di}{dt} - L \frac{d^2i}{dt^2} \right) + \frac{u - ri - L \frac{di}{dt}}{R}.$$

L'équation différentielle linéaire s'écrit alors :

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + \left(rC + \frac{L}{R} \right) \frac{di}{dt} + i \left(1 + \frac{r}{R} \right) = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R}.$$

b) • Le courant dans la bobine et la tension aux bornes du condensateur sont continus :

$$i(0^+) = i(0^-) = 0 \quad \text{et} \quad v(0^+) = v(0^-) = v_0.$$



Avant d'installer le court-circuit, l'association n'est pas branchée : il ne circule donc aucun courant ($i(t < 0) = 0$).

• L'équation (2) écrite à l'instant $t = 0^+$ donne :

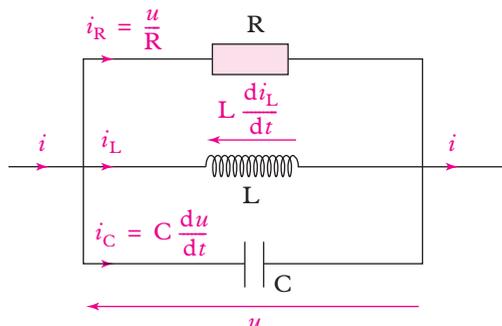
$$v_0 = 0 - 0 - L \frac{di}{dt}(0^+), \text{ soit : } \frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{v_0}{L}.$$

• L'équation (1) écrite à l'instant $t = 0^+$ donne :

$$0 = C \frac{dv}{dt}(0^+) + \frac{v_0}{R}, \text{ soit : } \frac{dv}{dt}(0^+) = -\frac{v_0}{RC}.$$

Exercice 5

a)



La tension aux bornes de la bobine vaut :

$$u = L \frac{di_L}{dt}.$$

La loi des nœuds s'écrit :

$$i = i_R + i_L + i_C = \frac{u}{R} + i_L + C \frac{du}{dt}.$$

On dérive cette expression par rapport au temps :

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{di_L}{dt} + C \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} + C \frac{d^2u}{dt^2}.$$

L'équation différentielle se met alors sous la forme :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du}{dt} + u = L \frac{di}{dt}.$$



Pour pouvoir exploiter la relation donnée par la bobine, il est nécessaire de dériver la loi des nœuds par rapport au temps. Techniquement, les calculs sont très simples.

b) • La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue. Comme le condensateur est initialement déchargé, on a donc :

$$u(0^+) = u(0^-) = 0.$$

• La tension aux bornes de la résistance étant nulle, il n'y circule aucun courant : $i_R(0^+) = 0$.

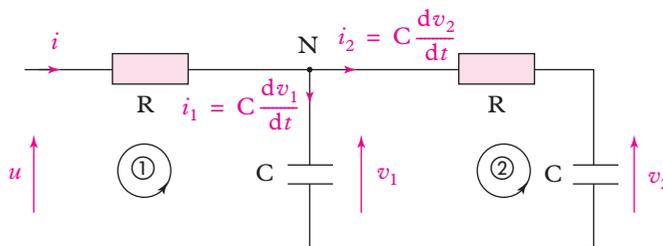
De même, le courant dans la bobine est continu, donc on a : $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$.

La loi des nœuds écrite à l'instant $t = 0^+$ donne alors :

$$i(0^+) = I_0 = i_C(0^+) = C \frac{du}{dt}(0^+), \text{ d'où : } \frac{du}{dt}(0^+) = \frac{I_0}{C}.$$

Exercice 6

a)



• La loi des nœuds en N s'écrit :

$$i = i_1 + i_2 = C \frac{dv_1}{dt} + C \frac{dv_2}{dt} \quad (1)$$

• Le circuit possède deux mailles indépendantes, qui donne deux équations en appliquant la loi des mailles :

$$\begin{cases} \text{maille 1 : } u = Ri + v_1 & (2) \\ \text{maille 2 : } v_1 = RC \frac{dv_2}{dt} + v_2 & (3) \end{cases}$$

• On reporte (1) et (3) dans (2) :

$$u = RC \frac{dv_1}{dt} + RC \frac{dv_2}{dt} + RC \frac{dv_2}{dt} + v_2.$$

On reporte à nouveau (3) dans l'expression précédente :

$$u = R^2 C^2 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + 3RC \frac{dv_2}{dt} + v_2.$$

b)



On repart des équations (1), (2) et (3) établies à la question précédente et on exprime i et v_2 en fonction de u et v_1 .

– De l'équation (2), on tire :

$$i = \frac{u - v_1}{R}.$$

– On reporte ce résultat dans l'équation (1) :

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{i}{C} - \frac{dv_1}{dt} = \frac{u - v_1}{RC} - \frac{dv_1}{dt} \quad (4)$$

– On reporte ce résultat dans l'équation (3) :

$$v_2 = v_1 - RC \frac{dv_2}{dt} = 2v_1 - u + RC \frac{dv_1}{dt}.$$

– On reporte ce résultat dans l'équation (4) :

$$2 \frac{dv_1}{dt} - \frac{du}{dt} + RC \frac{d^2 v_1}{dt^2} = \frac{u}{RC} - \frac{v_1}{RC} - \frac{dv_1}{dt}.$$

On obtient finalement l'équation différentielle :

$$RC \frac{d^2 u}{dt^2} + u = R^2 C^2 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + 3RC \frac{dv_1}{dt} + v_1.$$



Les deux condensateurs ne jouent pas le même rôle dans le circuit. Les équations différentielles vérifiées par v_1 et v_2 ne sont donc pas les mêmes.

c) • À $t = 0$, on a : $v_1 = V_{10}$ et $v_2 = 0$. L'équation (3) donne alors :

$$\frac{dv_2}{dt}(0) = \frac{v_1(0) - v_2(0)}{RC} = \frac{V_{10}}{RC}.$$

• À $t = 0$, on a : $u = U_0$ et $v_1 = V_{10}$. L'équation (2) donne alors :

$$i(0) = \frac{u(0) - v_1(0)}{R} = \frac{U_0 - V_{10}}{R}.$$

En reportant les deux résultats précédents dans (1), on a donc :

$$\frac{dv_1}{dt}(0) = \frac{i(0)}{C} - \frac{dv_2}{dt}(0) = \frac{U_0 - V_{10}}{RC} - \frac{V_{10}}{RC} = \frac{U_0 - 2V_{10}}{RC}.$$

*Régimes transitoires***Introduction**

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier les réponses à un échelon de tension de quelques circuits simples comprenant des condensateurs, des bobines et des résistances (circuit RC série, circuit RL série, circuit RLC série).

Plan du chapitre 4

A. Étude d'un circuit RC série	104
1. Charge du condensateur	104
2. Décharge du condensateur	109
B. Étude d'un circuit RL série	111
1. Établissement du courant dans la bobine	111
2. Arrêt du courant dans la bobine	114
C. Étude d'un circuit RLC série	116
1. Montage expérimental	116
2. Évolution de la tension u_C	116
3. Évolution de l'intensité i	121
4. Interprétation physique	122
5. Étude énergétique	122
6. Analogie avec l'oscillateur linéaire	124
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	125
Énoncés des exercices	133
Indications	138
Solutions des exercices	139

A. Étude d'un circuit RC série

A.1. Charge du condensateur

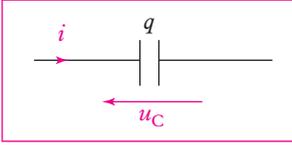


Fig. 1 - En convention récepteur, on a : $q = Cu_C$.

En convention récepteur, la charge q et la tension u_C aux bornes d'un condensateur vérifient la relation :

$$q = Cu_C.$$

L'évolution au cours du temps de la charge q du condensateur est donc identique, au facteur multiplicatif C près, à l'évolution au cours du temps de la tension u_C à ses bornes (fig. 1).

A.1.1 - Montage expérimental

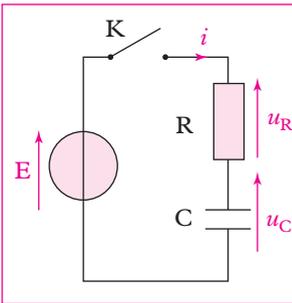


Fig. 2 - Montage pour étudier la charge d'un condensateur dans un circuit RC série.

• Pour étudier la charge d'un condensateur de capacité C à travers un conducteur ohmique de résistance R , on réalise le montage schématisé sur la figure 2 :

– un générateur idéal de tension continue de fém E est branché aux bornes du circuit RC ;

– pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et l'interrupteur K est ouvert ;

– à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K : le générateur débite alors un courant dans le circuit.

• Dans ce circuit, on note i l'intensité du courant, u_C la tension aux bornes du condensateur et u_R la tension aux bornes du conducteur ohmique. D'après les orientations choisies, le conducteur ohmique et le condensateur sont étudiés en convention récepteur. On a donc :

$$u_R = Ri \text{ et } i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}, \text{ d'où : } u_R = RC \frac{du_C}{dt}.$$

A.1.2 - Évolution de la tension u_C

• **Équation différentielle vérifiée par la tension u_C**

– Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert : l'intensité i est nulle, ainsi que les tensions u_R et u_C . La tension E aux bornes du générateur de tension se retrouve donc aux bornes de l'interrupteur ouvert K .

– Pour $t > 0$, la tension aux bornes de l'interrupteur K est nulle et la loi d'addition des tensions s'écrit :

$$E = u_R + u_C.$$

La tension u_C aux bornes du condensateur d'un circuit RC série soumis à l'échelon de tension E vérifie l'équation différentielle du premier ordre :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

• **Constante de temps du circuit**

Les termes E et u_C sont des tensions exprimées en volt (V). L'équation différentielle est homogène si le terme $RC \frac{du_C}{dt}$ a la même dimension que les autres termes. Or, la dérivée $\frac{du_C}{dt}$ s'exprime¹ en $V \cdot s^{-1}$; le produit RC a donc lui aussi la dimension d'un temps.

1. La variation infinitésimale d'une grandeur s'exprime dans la même unité que cette grandeur. Comme du_C s'exprime en V et dt en s, le rapport $\frac{du_C}{dt}$ s'exprime en $V \cdot s^{-1}$.

Définition 1

On définit la constante de temps τ du circuit RC par le produit¹ :

$$\tau = RC$$

τ constante de temps en seconde(s)

R résistance en ohm (Ω)

C capacité en farad (F)

1. On peut retrouver que τ a la dimension d'un temps grâce aux relations : $q = Cu_C$ et $u_R = Ri$.

En effet :

– l'unité de C est celle d'une charge (1 C = 1 A · s) divisée par celle d'une tension (V), c'est-à-dire A · s · V⁻¹ ;

– l'unité de R est celle d'une tension (V) divisée par celle d'une intensité (A), c'est-à-dire V · A⁻¹. Le produit RC s'exprime donc bien en seconde (s).

• Solution de l'équation différentielle

Pour $t > 0$, il faut résoudre l'équation du premier ordre à coefficients constants avec second membre :

$$\tau \frac{du_1}{dt} + u_C = E.$$

(1) *Méthode de résolution mathématique*

La solution générale de cette équation est la somme :

– de la solution générale u_1 de l'équation homogène associée :

$$\tau \frac{du_1}{dt} + u_1 = 0 ;$$

– d'une solution particulière u_2 de l'équation.

(2) *Solution particulière constante*

Comme le second membre de l'équation est constant, on cherche comme solution particulière une fonction constante :

$$\tau \frac{du_2}{dt} + u_2 = E \quad \text{avec} \quad \frac{du_2}{dt} = 0, \quad \text{d'où} : u_2 = E.$$

(3) *Solution de l'équation homogène*

On cherche une solution de l'équation homogène sous la forme :

$$u_1 = Ae^{rt}, \quad \text{où } A \text{ est une constante et } r \text{ un réel.}$$

L'équation homogène s'écrit alors :

$$\frac{du_1}{dt} = A r e^{rt} = r u_1, \quad \text{soit} : \tau r u_1 + u_1 = 0.$$

En simplifiant² par u_1 , on obtient alors le polynôme caractéristique³ en r :

$$\tau r + 1 = 0, \quad \text{d'où} : r = -\frac{1}{\tau}.$$

La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$u_1 = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{où } A \text{ est une constante.}$$

(4) *Solution générale*

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est :

$$u_C = u_1 + u_2, \quad \text{soit} : u_C = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E.$$

• Application des conditions de continuité

La tension u_C aux bornes du condensateur est continue. À l'instant $t = 0$, la condition initiale sur la tension s'écrit⁴ : $u_C(t = 0) = 0$. On en déduit donc, en posant $t = 0$ dans la solution générale de l'équation différentielle :

$$0 = A + E, \quad \text{soit} : A = -E.$$

2. On élimine ainsi la solution triviale $u_1 = 0$ qui ne correspond pas à la réalité physique.

3. Ce polynôme n'admet qu'une solution (ce qui est logique, car l'équation différentielle est du premier ordre).

4. L'équation différentielle étant du premier ordre, connaître une seule condition initiale suffit à déterminer l'unique constante d'intégration A.

1. Lorsque la charge du condensateur est terminée ($t \rightarrow \infty$), la tension u_C à ses bornes vaut E (car $e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0$). Cette tension maximale ne dépend pas des conditions initiales. Elle correspond à la solution particulière constante u_2 . La charge du condensateur est alors CE .

2. Lorsque la charge du condensateur est terminée ($t \rightarrow \infty$), l'intensité i du courant dans le circuit est nulle.

La tension u_C aux bornes du condensateur d'un circuit RC série soumis à un échelon de tension E a pour expression¹ :

$$u_C = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = RC \text{ constante de temps (s).}$$

A.1.3 - Évolution de l'intensité i

L'intensité i du courant est proportionnelle à la dérivée de la tension u_C aux bornes du condensateur :

$$i = C \frac{du_C}{dt}, \text{ soit } i = \frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

L'intensité i du courant est maximale à la fermeture de l'interrupteur K . Pendant la charge du condensateur, elle décroît avec le temps ; lorsque le condensateur est chargé, il se comporte comme un interrupteur ouvert².

Application 1 Quand le courant dans le circuit est-il négligeable ?

On considère le montage schématisé sur la figure 2. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K et le courant commence à circuler dans le circuit. Au bout de combien de temps l'intensité initiale est-elle divisée par 10 ? par 100 ?

Solution

Lors de la charge du condensateur, l'intensité i du courant dans le circuit a pour expression :

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ d'où : } i(0) = \frac{E}{R}.$$

– L'intensité initiale $i(0)$ est divisée par 10 si :

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{10}, \text{ c'est-à-dire : } t = -\tau \ln\left(\frac{1}{10}\right) = \tau \ln(10) = 2,3\tau.$$

– L'intensité initiale $i(0)$ est divisée par 100 si :

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{100} = 10^{-2}, \text{ c'est-à-dire : } t = -\tau \ln(10^{-2}) = 2\tau \ln(10) = 4,6\tau.$$

On peut estimer que le courant devient négligeable au bout de 5τ . Le condensateur est alors chargé à 1 % près ; sa tension vaut E et sa charge CE .

A.1.4 - Représentation graphique

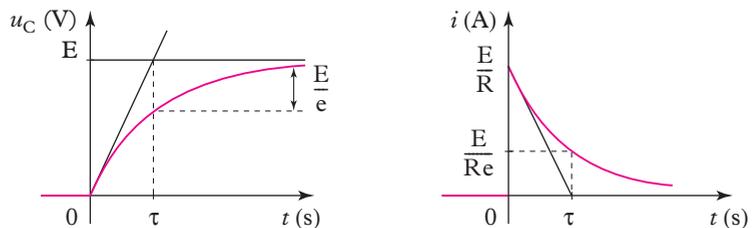


Fig. 3 - Évolution de u_C et de i en fonction du temps.

• On trace les graphes représentant l'évolution au cours du temps de u_C et de i (fig. 3). La tension u_C aux bornes du condensateur est continue ; en revanche, l'intensité i du courant subit une discontinuité lors de la fermeture de l'interrupteur. Pour les deux courbes, la tangente à l'origine des temps coupe l'axe asymptote³ au point d'abscisse $t = \tau$.

3. Pour la tension u_C , l'axe asymptote est la droite horizontale $u_C = E$. Pour l'intensité i , l'axe asymptote est l'axe des abscisses.

- La charge du condensateur correspond à un régime transitoire (le courant dans le circuit varie). Lorsque le condensateur est chargé ($t \rightarrow \infty$), le régime permanent est atteint (le courant dans le circuit est constant) : on a alors $u_C = E$ et $i = 0$ (fig. 4).

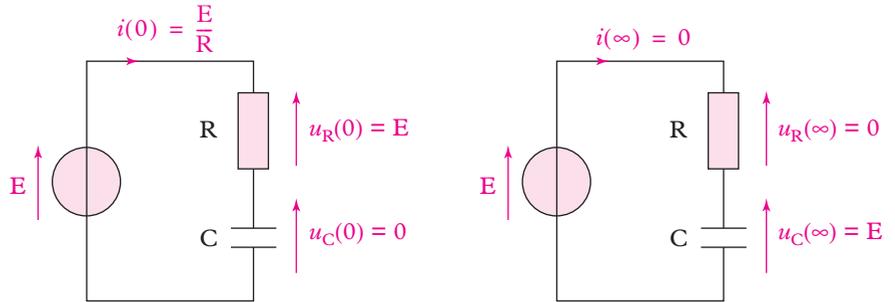


Fig. 4 - État du circuit quand $t=0$ et quand $t \rightarrow \infty$.

Application 2 Démonstration des propriétés de la tangente

Démontrer que la tangente de la courbe $u_C(t)$ à l'origine des temps coupe l'axe asymptote au point d'abscisse $t = \tau$.

Solution

Lors de la charge, la tension u_C aux bornes du condensateur a pour expression :

$$u_C = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

La courbe $u_C(t)$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $u_C = E$. La pente de la tangente à l'origine est donnée par la dérivée à $t = 0$:

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ d'où : } \frac{du_C}{dt}(t=0) = \frac{E}{\tau}.$$

L'équation de la tangente à l'origine est alors :

$$y = \frac{E}{\tau} t, \text{ d'où : } y = E \text{ pour } t = \tau.$$

La tangente de la courbe $u_C(t)$ à l'origine des temps coupe l'axe asymptote au point d'abscisse $t = \tau$. (On pourrait faire la même étude pour l'intensité.)

A.1.5 - Étude énergétique

- Lors de la charge du condensateur, l'addition des tensions dans le circuit étudié s'écrit :

$$E = u_R + u_C = Ri + u_C.$$

Pour passer à une égalité en puissance¹, on multiplie par i :

$$Ei = Ri^2 + u_C i,$$

$$\text{soit}^2 : Ei = Ri^2 + Cu_C \frac{du_C}{dt} = Ri^2 + \frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt}.$$

1. Le générateur est étudié en convention générateur : on fait donc apparaître la puissance fournie. Le conducteur ohmique et le condensateur sont étudiés en convention récepteur : on fait donc apparaître les puissances reçues.

2. On a : $i = C \frac{du_C}{dt}$.

– Le terme Ei est la puissance P_g positive fournie par le générateur de tension idéal de fém E .

– Le terme Ri^2 est la puissance P_J positive reçue par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule dans la résistance R .

$$d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)$$

– Le terme $\frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt}$ est la puissance positive reçue par le condensateur et emmagasinée dans la capacité C sous forme électrostatique¹.

1. L'énergie électrostatique $E_{\text{élec}}$ d'un condensateur est :

$$E_{\text{élec}} = \frac{1}{2}Cu_C^2.$$

2. Cette égalité exprime la conservation de l'énergie dans le circuit électrique :

$$P_{\text{totale fournie}} = P_{\text{totale reçue}}.$$

La puissance électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique et sert à augmenter l'énergie du condensateur² :

$$P_g = P_J + \frac{dE_{\text{élec}}}{dt}. \quad (1)$$

• En intégrant l'égalité (1) entre l'instant $t = 0$ (fermeture de l'interrupteur K) et l'instant t , on obtient l'égalité (2) traduisant les transferts d'énergie :

$$E_g = E_J + \Delta E_{\text{élec}}. \quad (2)$$

– L'énergie électrique E_g fournie par le générateur entre l'instant $t = 0$ et l'instant t est égale à :

$$E_g = \int_0^t P_g dt = \int_0^t E_i dt = E \int_0^t i dt, \text{ avec } i dt = C du_C.$$

On en déduit donc :

$$E_g = CE \int_0^{u_C(t)} du_C = CE u_C(t).$$

– L'énergie électrostatique $\Delta E_{\text{élec}}$ emmagasinée dans la capacité C entre l'instant $t = 0$ et l'instant t est égale à :

$$\Delta E_{\text{élec}} = \int_0^t \frac{dE_{\text{élec}}}{dt} dt = E_{\text{élec}}(t) - E_{\text{élec}}(0) = \frac{1}{2}Cu_C(t)^2.$$

– D'après l'équation (2), l'énergie E_J dissipée par effet Joule dans la résistance R entre l'instant $t = 0$ et l'instant t est égale à :

$$E_J = E_g - \Delta E_{\text{élec}} = Cu_C(t) \left(E - \frac{1}{2}u_C(t) \right).$$

Quand le condensateur est totalement chargé, la tension à ses bornes est $u_C = E$. D'après les expressions précédentes, au cours de la charge :

– le générateur a fourni l'énergie : $E_g = CE^2$;

– le condensateur a emmagasiné l'énergie : $\Delta E_{\text{élec}} = \frac{1}{2}CE^2$;

– le conducteur ohmique a dissipé l'énergie³ : $E_J = \frac{1}{2}CE^2$.

3. Au cours de la charge, l'énergie dissipée par effet Joule ne dépend pas de la résistance R du conducteur ohmique. Elle ne dépend que de la capacité C du condensateur.

4. Lorsque le condensateur est chargé, le générateur ne fournit plus d'énergie au circuit (le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert).

Au cours de la charge, la moitié de l'énergie électrique fournie par le générateur⁴ est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique et l'autre moitié est emmagasinée sous forme électrostatique dans le condensateur.

Application 3 Énergie dissipée par effet Joule

Déterminer, par un calcul direct, l'expression de l'énergie E_J dissipée par effet Joule dans la résistance R en fonction du temps t . Montrer sa cohérence avec celle donnée dans le cours.

Solution

• La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance R est :

$$P_J = Ri^2, \text{ avec } i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ (voir § A.1.3), d'où : } P_J = \frac{E^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}}.$$

L'énergie dissipée par effet Joule entre l'instant $t = 0$ et l'instant t vaut donc :

$$E_J = \int_0^t P_J dt = \frac{E^2}{R} \int_0^t e^{-\frac{2t}{\tau}} dt, \text{ avec } \tau = RC \text{ et } \int_0^t e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{\tau}{2} \left(e^{-\frac{2t}{\tau}} - 1 \right), \text{ d'où : } E_J = \frac{1}{2} CE^2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right).$$

• L'expression de l'énergie E_J en fonction de la tension u_C est :

$$E_J = C u_C \left(E - \frac{1}{2} u_C \right), \text{ avec } u_C = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ (voir § A.1.2).}$$

On obtient donc finalement :

$$E - \frac{1}{2} u_C = \frac{1}{2} E \left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ et } E_J = \frac{1}{2} CE^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{1}{2} CE^2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right).$$

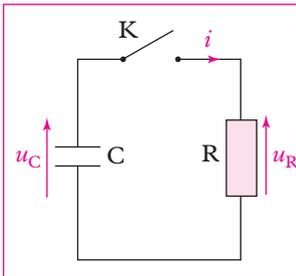


Fig. 5 - Montage pour étudier la décharge d'un condensateur dans un circuit RC série.

1. On aurait pu aussi étudier le condensateur en convention récepteur et le conducteur ohmique en convention générateur. On aurait eu alors :

$$i = C \frac{du_C}{dt} \text{ et } u_R = -Ri,$$

ce qui aurait conduit à la même relation entre u_R et u_C . L'étude du montage ne dépend pas de la convention choisie.

A.2. Décharge du condensateur

A.2.1 - Montage expérimental

- Pour étudier la décharge d'un condensateur de capacité C à travers un conducteur ohmique de résistance R , on réalise le montage schématisé sur la **figure 5** :
 - le condensateur a été chargé sous la tension U_0 constante ;
 - pour $t < 0$, la tension aux bornes du condensateur chargé est égale à U_0 et l'interrupteur K est ouvert ;
 - à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

• Dans ce circuit, on note u_C la tension aux bornes du condensateur, i l'intensité du courant qu'il fournit et u_R la tension aux bornes du conducteur ohmique. D'après les orientations choisies, le condensateur est étudié en convention générateur (attention au signe) et le conducteur ohmique en convention récepteur¹. On a donc :

$$u_R = Ri \text{ et } i = \frac{dq}{dt} = -C \frac{du_C}{dt}, \text{ d'où : } u_R = -RC \frac{du_C}{dt}.$$

A.2.2 - Évolution de la tension u_C

• Équation différentielle vérifiée par la tension u_C

– Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert : l'intensité i est nulle, ainsi que la tension u_R . La tension E aux bornes du condensateur se retrouve donc aux bornes de l'interrupteur ouvert K .

– Pour $t \geq 0$, la tension aux bornes de l'interrupteur K est nulle et on a :

$$u_C = u_R, \text{ soit : } u_C - u_R = 0.$$

La tension u_C aux bornes d'un condensateur de capacité C se déchargeant dans une résistance R vérifie l'équation différentielle du premier ordre :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

La constante de temps du circuit RC est encore égale à $\tau = RC$.

• Expression de la tension u_C

Le second membre étant nul, la solution générale de l'équation différentielle est la solution u_1 de l'équation homogène du § A.1 :

$$u_C = u_1 = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

La tension u_C aux bornes du condensateur est continue. À l'instant $t = 0$, la condition initiale sur la tension s'écrit : $u_C(t = 0) = U_0$, d'où : $A = U_0$.

1. Lorsque la décharge du condensateur est terminée ($t \rightarrow \infty$), la tension u_C à ses bornes est nulle (car $e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0$).

2. En revanche, le sens du courant change, car le condensateur est étudié en convention récepteur pendant la charge et en convention générateur pendant la décharge.

3. Pour les deux courbes, l'axe asymptote est l'axe des abscisses.

4. Le condensateur est étudié en convention générateur : on fait donc apparaître la puissance fournie. Le conducteur ohmique est étudié en convention récepteur : on fait donc apparaître la puissance reçue.

5. On a : $i = -C \frac{du_C}{dt}$.

6. Le condensateur se comporte alors comme un générateur dans le circuit.

7. Cette égalité exprime la conservation de l'énergie dans le circuit électrique :

$$P_{\text{totale fournie}} = P_{\text{totale reçue}}$$

La tension u_C aux bornes d'un condensateur de capacité C se déchargeant dans une résistance R a pour expression¹ :

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A.2.3 - Évolution de l'intensité i

L'intensité i du courant dans le circuit a donc pour expression :

$$i = -C \frac{du_C}{dt}, \text{ soit : } i = \frac{CU_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La loi de décroissance du courant est la même lors de la charge et lors de la décharge du condensateur².

A.2.4 - Représentation graphique

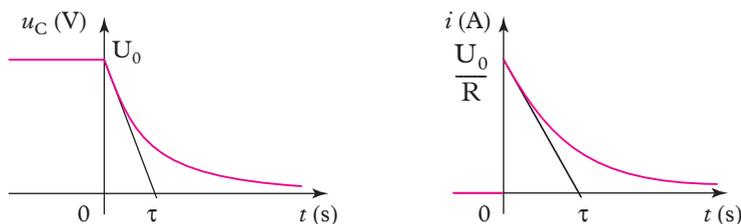


Fig. 6 - Évolution de u_C et de i en fonction du temps.

• On trace les graphes représentant l'évolution au cours du temps de u_C et de i (fig. 6). La tension u_C aux bornes du condensateur est continue ; en revanche, l'intensité i du courant subit une discontinuité lors de la fermeture de l'interrupteur. Pour les deux courbes, la tangente à l'origine des temps coupe l'axe asymptote³ au point d'abscisse $t = \tau$.

• La décharge du condensateur correspond à un régime transitoire. Lorsque le régime permanent est atteint, on a alors : $u_C = 0$ et $i = 0$.

A.2.5 - Étude énergétique

• Lors de la décharge du condensateur, on a :

$$u_C = u_R = Ri.$$

Pour passer à une égalité en puissance⁴, on multiplie par i :

$$u_C i = Ri^2, \text{ soit}^5 : -Cu_C \frac{du_C}{dt} = -\frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt} = Ri^2.$$

– Le premier terme est la puissance $-\frac{dE_{\text{élec}}}{dt}$ positive fournie par le condensateur⁶.

– Le terme Ri^2 est la puissance P_J positive reçue par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule dans la résistance R .

La puissance fournie par le condensateur correspond à une diminution de l'énergie électrostatique emmagasinée. Elle est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique⁷ :

$$-\frac{dE_{\text{élec}}}{dt} = P_J$$

1. L'énergie initiale du condensateur est :

$$E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C U_0^2.$$

2. L'énergie dissipée par effet Joule ne dépend pas de la résistance R du conducteur ohmique.

3. La résistance R représente la résistance totale du circuit, incluant éventuellement la résistance interne r de la bobine si celle-ci est réelle.

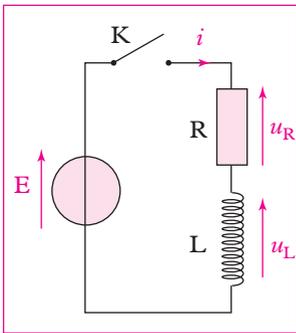


Fig. 7 - Montage pour étudier l'établissement du courant dans un circuit RL série.

Quand le condensateur est déchargé ($u_C = 0$), son énergie est nulle : il a donc fourni toute son énergie au circuit¹.

Au cours de la décharge, l'énergie électrostatique E_{elec} initialement emmagasinée dans le condensateur est entièrement dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique².

B. Étude d'un circuit RL série

B.1. Établissement du courant dans la bobine

B.1.1 - Montage expérimental

- Pour étudier l'établissement du courant dans une bobine d'inductance L à travers un conducteur ohmique de résistance R³, on réalise le montage schématisé sur la figure 7 :

- un générateur idéal de tension continue de fém E est branché aux bornes du circuit RL ;

- pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert ;

- à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K : le générateur débite alors un courant dans le circuit.

- Dans ce circuit, on note i l'intensité du courant, u_L la tension aux bornes de l'inductance L et u_R la tension aux bornes du conducteur ohmique. D'après les orientations choisies, le conducteur ohmique et la bobine sont étudiés en convention récepteur. On a donc :

$$u_R = R i \quad \text{et} \quad u_L = L \frac{di}{dt}.$$

B.1.2 - Évolution de l'intensité i

- **Équation différentielle vérifiée par l'intensité i**

- Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert : l'intensité i est nulle, ainsi que les tensions u_R et u_L . La tension E aux bornes du générateur de tension se retrouve donc aux bornes de l'interrupteur ouvert K.

- Pour $t > 0$, la tension aux bornes de l'interrupteur K est nulle et la loi d'addition des tensions s'écrit :

$$E = u_R + u_L, \quad \text{soit :} \quad E = R i + L \frac{di}{dt}.$$

L'intensité i du courant traversant un circuit RL série soumis à l'échelon de tension E vérifie l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}.$$

- **Constante de temps du circuit**

Les termes $\frac{E}{R}$ et i sont des intensités exprimées en ampère (A). L'équation

différentielle est homogène si le terme $\frac{L}{R} \frac{di}{dt}$ a la même dimension. Or, la dérivée

vée $\frac{di}{dt}$ s'exprime en $A \cdot s^{-1}$; le rapport $\frac{L}{R}$ a donc la dimension d'un temps.

Définition 2

On définit la constante de temps τ du circuit RL par le rapport :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

τ constante de temps en seconde(s)

L inductance en henry (H)

R résistance en ohm (Ω)

• Solution de l'équation différentielle

Pour $t > 0$, il faut résoudre l'équation différentielle avec second membre :

$$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$$

Par analogie avec l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C au § A.1.2, la solution générale i de cette équation s'écrit¹ :

$$i = i_1 + i_2 = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}, \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

• Application des conditions de continuité

L'intensité i du courant dans l'inductance est continue. À l'instant $t = 0$, la condition initiale sur l'intensité s'écrit : $i(t=0) = 0$. On en déduit donc, en posant $t = 0$ dans la solution générale de l'équation différentielle :

$$0 = A + \frac{E}{R}, \text{ soit : } A = -\frac{E}{R}.$$

L'intensité i du courant traversant un circuit RL série soumis à l'échelon de tension E a pour expression² :

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = \frac{L}{R} \text{ constante de temps (s).}$$

1. Dans les deux cas, l'équation différentielle est de la forme :

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = \text{cte.}$$

2. Lorsque le courant est établi ($t \rightarrow \infty$), l'intensité i dans le circuit vaut $\frac{E}{R}$ (car $e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0$). Cette intensité maximale ne dépend pas des conditions initiales. Elle correspond à la solution particulière constante i_2 . La tension aux bornes du conducteur ohmique est alors E .

3. Lorsque le courant est établi ($t \rightarrow \infty$), la tension u_L aux bornes de l'inductance est nulle.

B.1.3 - Évolution de la tension u_L

La tension u_L aux bornes de l'inductance L est proportionnelle à la dérivée de l'intensité i du courant :

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \text{ soit : } u_L = \frac{LE}{R\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = E e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La tension u_L aux bornes de l'inductance est maximale à la fermeture de l'interrupteur K . Pendant l'établissement du courant, elle décroît avec le temps ; lorsque le courant est établi, l'inductance se comporte comme un fil³.

B.1.4 - Représentation graphique

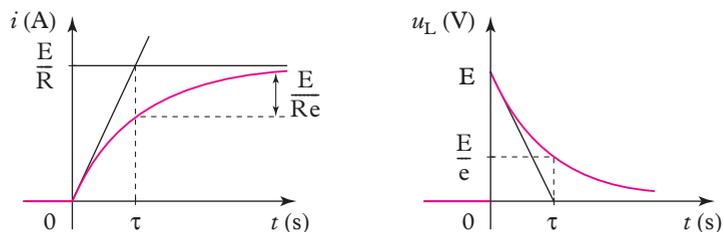


Fig. 8 - Évolution de i et de u_L en fonction du temps.

• On trace les graphes représentant l'évolution au cours du temps de i et de u_L (fig. 8). L'intensité i du courant dans l'inductance est continue ; en revanche,

1. Pour l'intensité i , l'axe asymptote est la droite horizontale $u_L = \frac{E}{R}$. Pour la tension u_L , l'axe asymptote est l'axe des abscisses.

la tension u_L à ses bornes subit une discontinuité lors de la fermeture de l'interrupteur. Pour les deux courbes, la tangente à l'origine des temps coupe l'axe asymptote¹ au point d'abscisse $t = \tau$.

• L'établissement du courant correspond à un régime transitoire. Lorsque le régime permanent est atteint, on a alors : $i = \frac{E}{R}$ et $u_L = 0$ (fig. 9).

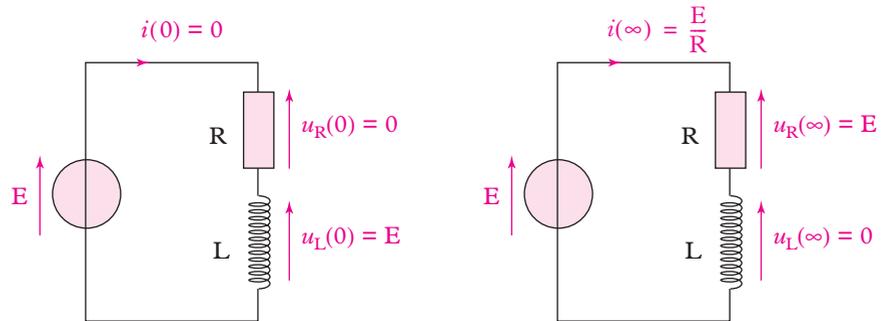


Fig. 9 - État du circuit quand $t = 0$ et quand $t \rightarrow +\infty$.

Application 4 Établissement du courant dans une bobine

On établit le courant dans une bobine idéale d'inductance $L = 100 \text{ mH}$ à travers une résistance $R = 100 \Omega$ grâce à un générateur idéal de tension de fém $E = 5 \text{ V}$. Calculer la constante de temps τ du circuit RL, l'intensité i lorsque le courant est établi dans le circuit et l'instant t au bout duquel l'intensité vaut 90 % de sa valeur finale.

Solution

– La constante de temps τ du circuit RL est alors :

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{100} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s, c'est-à-dire } \tau = 1 \text{ ms.}$$

– Lorsque le courant est établi dans le circuit, la bobine se comporte comme un fil et la tension du générateur se retrouve aux bornes du conducteur ohmique :

$$u_R = E = Ri, \text{ d'où : } i = \frac{E}{R} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ A c'est-à-dire } i = 50 \text{ mA.}$$

– D'après l'expression déterminée au § B.1.2, l'intensité i vaut 90 % de sa valeur si :

$$\frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = 0,9 \frac{E}{R}, \text{ d'où : } e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,1 = 10^{-1}, \text{ soit : } t = \tau \ln(10) = 2,3 \text{ ms.}$$

B.1.5 - Étude énergétique

• Lors de l'établissement du courant, l'addition des tensions s'écrit :

$$E = u_R + u_L = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

Pour passer à une égalité en puissance², on multiplie par i :

$$Ei = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}, \text{ soit : } Ei = Ri^2 + \frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt}.$$

– Le terme Ei est la puissance P_g positive fournie par le générateur idéal de fém E .

– Le terme Ri^2 est la puissance P_j positive reçue par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule dans la résistance R .

2. Le générateur est étudié en convention générateur : on fait donc apparaître la puissance fournie. Le conducteur ohmique et la bobine sont étudiés en convention récepteur : on fait donc apparaître les puissances reçues.

1. L'énergie magnétique E_{mag} d'une bobine est :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i^2.$$

2. Cette égalité exprime la conservation de l'énergie dans le circuit électrique :

$$P_{\text{totale fournie}} = P_{\text{totale reçue}}.$$

3. L'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine dépend de la résistance R . Elle est d'autant plus faible que R est grande.

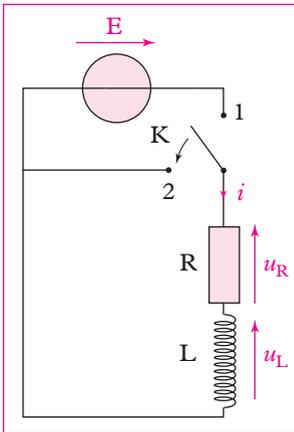


Fig. 10 - Montage pour étudier l'arrêt du courant dans un circuit RL série.

4. On a : $i_0 = \frac{E}{R}$.

– Le dernier terme est la puissance $\frac{dE_{\text{mag}}}{dt}$ positive reçue par la bobine et emmagasinée dans l'inductance L sous forme magnétique¹.

La puissance électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique et sert à augmenter l'énergie de la bobine² :

$$P_g = P_J + \frac{dE_{\text{mag}}}{dt}.$$

• Quand le courant est établi, l'intensité dans le circuit est $i = \frac{E}{R}$. En régime permanent, l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine n'augmente plus :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L \left(\frac{E}{R} \right)^2 = \text{cte}, \text{ d'où : } \frac{dE_{\text{mag}}}{dt} = 0.$$

La puissance électrique fournie par le générateur et la puissance dissipée par effet Joule sont donc égales et valent :

$$P_g = P_J = \frac{E^2}{R}.$$

Lorsque le courant est établi, l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine reste constante³. L'énergie électrique fournie par le générateur est alors entièrement dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.

B.2. Arrêt du courant dans la bobine

B.2.1 - Montage expérimental

• Pour étudier l'arrêt du courant lors de la fermeture d'un circuit comportant une bobine d'inductance L et un conducteur ohmique de résistance R , on réalise le montage schématisé sur la figure 10 :

– un générateur idéal de tension continue de fém E , branché aux bornes du circuit RL, a permis d'établir un courant permanent d'intensité I_0 positive⁴ ;
 – pour $t < 0$, l'interrupteur K relie le circuit RL au générateur (position 1) ; à l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur K en position 2 : le circuit RL est alors en court-circuit.

• Dans ce circuit, on note i l'intensité du courant, u_L la tension aux bornes de l'inductance L et u_R la tension aux bornes du conducteur ohmique. D'après les orientations choisies, le conducteur ohmique et la bobine sont étudiés en convention récepteur. On a donc :

$$u_R = R i \quad \text{et} \quad u_L = L \frac{di}{dt}.$$

B.2.2 - Évolution de l'intensité i

• Équation différentielle vérifiée par l'intensité i

– Pour $t < 0$, l'interrupteur K est en position 1 : $i = I_0$, $u_R = R I_0$ et $u_L = 0$.

– Pour $t > 0$, la tension aux bornes de l'interrupteur K est nulle et la loi des mailles s'écrit :

$$0 = u_R + u_L, \text{ soit : } 0 = R i + L \frac{di}{dt}.$$

L'intensité i du courant traversant un circuit RL série en court-circuit vérifie l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = 0.$$

La constante de temps du circuit RL est encore égale à $\tau = \frac{L}{R}$.

• Expression de l'intensité i

Le second membre étant nul, la solution générale de l'équation différentielle est la solution i_1 de l'équation homogène :

$$i = i_1 = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

L'intensité i du courant dans l'inductance est continue. À l'instant $t = 0$, la condition initiale sur l'intensité s'écrit : $i(t = 0) = I_0$, d'où : $A = I_0$.

1. L'intensité i tend alors vers 0.

L'intensité i du courant traversant un circuit RL série en court-circuit a pour expression¹ :

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

B.2.3 - Évolution de la tension u_L

La tension u_L aux bornes de l'inductance a donc pour expression :

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \text{ soit : } u_L = -\frac{LI_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La loi de décroissance de la tension est la même lors de l'établissement du courant dans le circuit RL et lors de son arrêt².

2. En revanche, la tension aux bornes de l'inductance change de signe.

B.2.4 - Représentation graphique

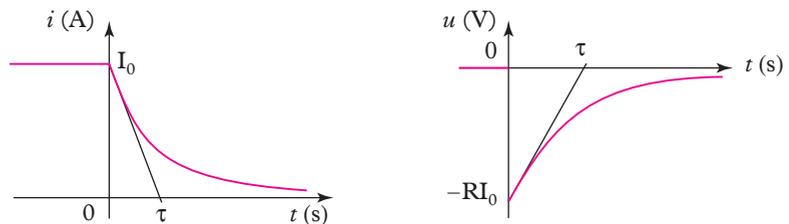


Fig. 11 - Évolution de i et de u_L en fonction du temps.

• On trace les graphes représentant l'évolution au cours du temps de i et de u_L (fig. 11). L'intensité i du courant dans l'inductance est continue ; en revanche, la tension u_L à ses bornes subit une discontinuité lors de la fermeture de l'interrupteur. Pour les deux courbes, la tangente à l'origine des temps coupe l'axe asymptote³ au point d'abscisse $t = \tau$.

3. Pour les deux courbes, l'axe asymptote est l'axe des abscisses.

• L'arrêt du courant correspond à un régime transitoire. Lorsque le régime permanent est atteint, on a alors : $i = 0$ et $u_L = 0$.

B.2.5 - Étude énergétique

Lors de l'arrêt du courant, la loi des mailles s'écrit :

$$0 = u_R + u_L = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

4. Le conducteur ohmique et la bobine sont étudiés en convention récepteur : on fait donc apparaître les puissances reçues.

Pour passer à une égalité en puissance⁴, on multiplie par i :

$$0 = Ri^2 + L i \frac{di}{dt}, \text{ soit : } -\frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt} = Ri^2.$$

1. La bobine se comporte alors comme un générateur dans le circuit.

2. Cette égalité exprime la conservation de l'énergie dans le circuit électrique :

$$P_{\text{totale fournie}} = P_{\text{totale reçue}}$$

3. L'énergie initiale de la bobine est :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i_0^2$$

4. La résistance R représente la résistance totale du circuit, incluant éventuellement la résistance interne r de la bobine si celle-ci est réelle.

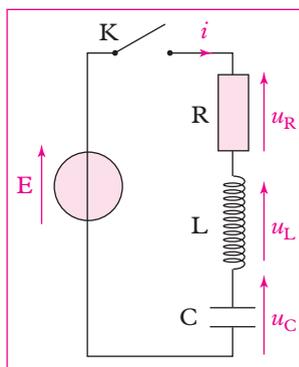


Fig. 12 - Montage pour étudier la charge d'un condensateur dans un circuit RLC série.

– Le terme $\frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt}$ est la puissance $\frac{dE_{\text{mag}}}{dt}$ négative reçue par la bobine,

donc $-\frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt}$ est la puissance $-\frac{dE_{\text{mag}}}{dt}$ positive fournie par la bobine¹.

– Le terme Ri^2 est la puissance P_J positive reçue par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule dans la résistance R.

La puissance fournie par la bobine correspond à une diminution de l'énergie magnétique emmagasinée. Elle est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique² :

$$-\frac{dE_{\text{mag}}}{dt} = P_J$$

À l'arrêt du courant ($i = 0$), l'énergie de la bobine est nulle : celle-ci a donc fourni toute son énergie au circuit³.

Au cours de l'arrêt du courant, l'énergie magnétique E_{mag} initialement emmagasinée dans la bobine est entièrement dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.

C. Étude d'un circuit RLC série

C.1. Montage expérimental

• Pour étudier la charge d'un condensateur de capacité C à travers une bobine d'inductance L et un conducteur ohmique de résistance R⁴, on réalise le montage schématisé sur la figure 12 :

– un générateur idéal de tension continue de fém E est branché aux bornes du circuit RLC ;

– pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et l'interrupteur K est ouvert ;

– à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K : le générateur débite alors un courant dans le circuit.

• Dans ce circuit, on note i l'intensité du courant, u_C la tension aux bornes du condensateur, u_L la tension aux bornes de l'inductance et u_R la tension aux bornes du conducteur ohmique. D'après les orientations choisies, le conducteur ohmique, le condensateur et la bobine sont étudiés en convention récepteur. On a donc :

$$u_R = Ri \text{ et } u_L = L \frac{di}{dt} \text{ avec } i = C \frac{du_C}{dt}, \text{ d'où : } u_R = RC \frac{du_C}{dt} \text{ et } u_L = LC \frac{d^2u_C}{dt^2}.$$

C.2. Évolution de la tension u_C

C.2.1 - Équation différentielle vérifiée par u_C

– Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert : l'intensité i est nulle, ainsi que les tensions u_R , u_L et u_C . La tension E aux bornes du générateur de tension se retrouve donc aux bornes de l'interrupteur ouvert K.

– Pour $t > 0$, la tension aux bornes de l'interrupteur K est nulle et la loi d'addition des tensions s'écrit :

$$E = u_R + u_L + u_C.$$

La tension u_C aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série soumis à l'échelon de tension E vérifie l'équation différentielle du second ordre :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

C.2.2 - Résolution de l'équation différentielle

Pour $t > 0$, il faut résoudre une équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre.

(1) *Méthode de résolution mathématique*

La solution générale de cette équation est la somme :

– de la solution générale u_1 de l'équation homogène associée :

$$LC \frac{d^2 u_1}{dt^2} + RC \frac{du_1}{dt} + u_1 = 0 ;$$

– d'une solution particulière u_2 de l'équation.

(2) *Solution particulière constante*

Comme le second membre de l'équation est constant, on cherche comme solution particulière une fonction constante :

$$LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} + RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = E \text{ avec } \frac{d^2 u_2}{dt^2} = \frac{du_2}{dt} = 0, \text{ d'où : } u_2 = E.$$

(3) *Solution de l'équation homogène*

On cherche une solution de l'équation homogène sous la forme :

$$u_1 = Ae^{rt}, \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

L'équation homogène s'écrit alors :

$$\frac{du_1}{dt} = A r e^{rt} = r u_1 \text{ et } \frac{d^2 u_1}{dt^2} = r^2 u_1, \text{ soit : } LC r^2 u_1 + RC r u_1 + u_1 = 0.$$

En simplifiant¹ par u_1 , on obtient alors le *polynôme caractéristique* en r :

$$LC r^2 + RC r + 1 = 0, \text{ soit : } r^2 + \frac{R}{L} r + \frac{1}{LC} = 0.$$

Ce polynôme admet deux solutions², éventuellement confondues. Pour les déterminer, on introduit les variables réduites du problème.

C.2.3 - Utilisation des variables réduites

• Pulsation propre

Définition 3

On définit la pulsation propre ω_0 du circuit LC par la relation³ :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ω_0 pulsation propre en s^{-1} (ou $\text{rad} \cdot s^{-1}$)⁴

L inductance en henry (H)

C capacité en farad (F)

Elle correspond à la pulsation des oscillations du système en l'absence d'amortissement ($R = 0$)⁵.

1. On élimine ainsi la solution triviale $u_1 = 0$ qui ne correspond pas à la réalité physique.

2. Ce qui est logique, car l'équation différentielle est du second ordre.

3. On retient plus aisément l'expression : $LC \omega_0^2 = 1$.

4. La pulsation s'exprime en s^{-1} ou en $\text{rad} \cdot s^{-1}$. L'unité rad, définie comme le rapport de deux longueurs, est sans dimension. Les unités s^{-1} ou $\text{rad} \cdot s^{-1}$ sont donc équivalentes.

5. L'étude des oscillations libres du circuit RLC série a été effectuée en Terminale S. On caractérise l'évolution temporelle du système par la période propre T_0 ou la pulsation propre ω_0 telles que :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Application 5 Détermination de l'unité de ω_0

En utilisant les constantes de temps des circuits RC et RL, montrer que la pulsation propre ω_0 s'exprime en s^{-1} .

Solution

Les constantes de temps des circuits RC et RL s'écrivent :

$$\tau_{RC} = RC \text{ et } \tau_{RL} = \frac{L}{R}, \text{ d'où : } \tau_{RC} \times \tau_{RL} = LC = \frac{1}{\omega_0^2}.$$

Le produit LC s'exprime en s^2 , donc la pulsation propre ω_0 s'exprime en s^{-1} .

• Facteur d'amortissement

Définition 4

On définit le facteur d'amortissement λ du circuit par la relation¹ :

$$\lambda = \frac{R}{2L}$$

λ facteur d'amortissement en s^{-1}

R résistance en ohm (Ω)

L inductance en henry (H)

1. Le facteur d'amortissement λ est directement lié à la constante de temps τ_{RL} du circuit RL.

2. Le facteur d'amortissement est parfois noté m ou ξ .

Plus le facteur d'amortissement λ est grand, plus le circuit est amorti. Un circuit non amorti correspond à $\lambda = 0$, donc à $R = 0$ (circuit LC série).

– Afin d'avoir des grandeurs sans dimension, on introduit le coefficient d'amortissement α tel que² :

$$\lambda = \alpha\omega_0, \text{ soit : } \alpha = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{1}{2}RC\omega_0 \text{ ou } \alpha = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

– Pour étudier les circuits, on introduit souvent le facteur de qualité Q , sans dimension, lié au coefficient d'amortissement α par la relation :

$$\alpha = \frac{1}{2Q}, \text{ soit : } Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}.$$

• Écriture du polynôme caractéristique en variables réduites

En utilisant les variables réduites ω_0 et λ (ou α), le polynôme caractéristique en r associé à l'équation homogène s'écrit :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{ou} \quad r^2 + 2\alpha\omega_0 r + \omega_0^2 = 0.$$

Les deux expressions précédentes sont homogènes. Comme λ et ω_0 s'expriment en s^{-1} , les racines r_1 et r_2 du polynôme caractéristique s'expriment aussi en s^{-1} .

C.2.4 - Conditions de continuité

La tension u_C aux bornes du condensateur et l'intensité i du courant dans l'inductance sont continues. À l'instant $t = 0$, les conditions initiales sur la tension et l'intensité s'écrivent donc³ : $u_C(t = 0) = 0$ et $i(t = 0) = 0$.

Comme $i = C \frac{du_C}{dt}$, la condition $i(t = 0) = 0$ équivaut à : $\frac{du_C}{dt}(t = 0) = 0$.

Les deux conditions initiales permettant de résoudre le problème sont :

$$u_C(t = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du_C}{dt}(t = 0) = 0.$$

3. L'équation différentielle étant du second ordre, il faut connaître deux conditions initiales pour déterminer les deux constantes d'intégration :

- continuité de u_C à $t = 0$;
- continuité de i à $t = 0$.

C.2.5 - Les différents régimes solutions

On détermine les racines du polynôme caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ en utilisant le discriminant réduit Δ' :

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2(\alpha^2 - 1).$$

Selon le signe de Δ' , trois cas sont possibles.

• **Le régime aperiodique : $\Delta' > 0$.**

Cette condition est réalisée pour :

$$\lambda > \omega_0 \Leftrightarrow \alpha > 1 \Leftrightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Le polynôme caractéristique admet alors deux racines négatives¹ :

$$r_1 = -\lambda - \sqrt{\Delta'} = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda + \sqrt{\Delta'} = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

On en déduit la solution générale de l'équation homogène :

$$u_1 = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}.$$

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est donc :

$$u_C = u_1 + u_2, \text{ soit : } u_C = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + E.$$

D'après les conditions initiales, on a :

$$(u_C(t=0) = 0 \Rightarrow A_1 + A_2 + E = 0) \quad \text{et} \quad \left(\frac{du_C}{dt}(t=0) = 0 \Rightarrow r_1 A_1 + r_2 A_2 = 0\right).$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues fournit :

$$A_1 = \frac{r_2}{r_1 - r_2} E \quad \text{et} \quad A_2 = -\frac{r_1}{r_1 - r_2} E.$$

La tension u_C aux bornes du condensateur vaut donc (fig. 13) :

$$u_C(t) = E \left(\frac{r_2}{r_1 - r_2} e^{r_1 t} - \frac{r_1}{r_1 - r_2} e^{r_2 t} + 1 \right).$$

Si le coefficient d'amortissement α du circuit RLC série est strictement supérieur à 1 ($\alpha > 1$), l'oscillateur est fortement amorti : le régime est dit **apériodique**.

• **Le régime critique : $\Delta' = 0$.**

Cette condition est réalisée pour :

$$\lambda = \omega_0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \Leftrightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_c \text{ (résistance critique)}.$$

Le polynôme caractéristique admet alors une racine double négative :

$$r = -\lambda = -\omega_0.$$

On en déduit la solution générale de l'équation homogène :

$$u_1 = (At + B) e^{-\lambda t}.$$

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est donc :

$$u_C = u_1 + u_2, \text{ soit : } u_C = (At + B) e^{-\lambda t} + E.$$

D'après les conditions initiales, on a :

$$(u_C(t=0) = 0 \Rightarrow B + E = 0) \quad \text{et} \quad \left(\frac{du_C}{dt}(t=0) = 0 \Rightarrow A - \lambda B = 0\right).$$

¹ Les racines peuvent aussi s'écrire :

$$r = -\omega_0(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}).$$

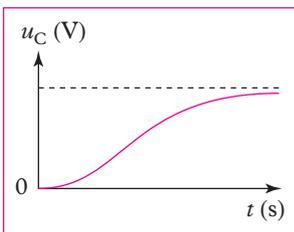


Fig. 13 - Allure de la tension en régime aperiodique.

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues fournit :

$$B = -E \text{ et } A = -\lambda E.$$

La tension u_C aux bornes du condensateur vaut donc (fig. 14) :

$$u_C(t) = E[1 - (\lambda t + 1)e^{-\lambda t}].$$

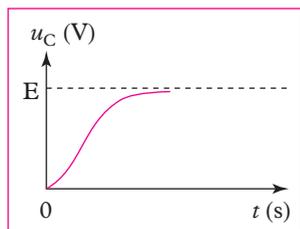


Fig. 14 - Allure de la tension en régime critique.

Si le coefficient d'amortissement α du circuit RLC série est égal à 1 ($\alpha = 1$), le régime est dit apériodique critique ou **critique**.

• **Le régime pseudo-périodique** : $\Delta' < 0$.

Cette condition est réalisée pour :

$$\lambda < \omega_0 \Leftrightarrow \alpha < 1 \Leftrightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Le polynôme caractéristique admet alors deux racines complexes conjuguées à partie réelle négative. En posant $\omega^2 = -\Delta'$, il vient :

$$r_1 = -\lambda - j\omega \text{ et } r_2 = -\lambda + j\omega.$$

On en déduit la solution générale de l'équation homogène :

$$u_1 = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]e^{-\lambda t}.$$

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est donc :

$$u_C = u_1 + u_2, \text{ soit : } u_C = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]e^{-\lambda t} + E.$$

D'après les conditions initiales, on a :

$$(u_C(t=0) = 0 \Rightarrow A + E = 0) \text{ et } \left(\frac{du_C}{dt}(t=0) = 0 \Rightarrow -\lambda A + \omega B = 0 \right).$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues fournit :

$$A = -E \text{ et } B = \frac{\lambda}{\omega} E.$$

La tension u_C aux bornes du condensateur vaut donc (fig. 15) :

$$u_C(t) = E \left\{ 1 - e^{-\lambda t} \left[\cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t) \right] \right\}.$$

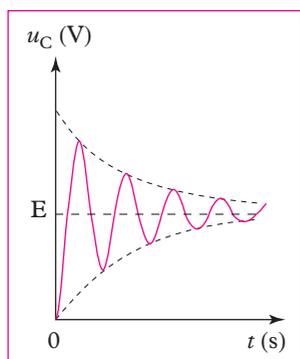


Fig. 15 - Allure de la tension en régime pseudo-périodique.

Si le coefficient d'amortissement α du circuit RLC série est strictement inférieur à 1 ($\alpha < 1$), l'oscillateur est faiblement amorti : le régime est dit oscillatoire amorti ou **pseudo-périodique**. La pseudo-pulsation ω des oscillations vaut¹ :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}, \text{ où } \omega_0 \text{ est la pulsation propre } (\omega < \omega_0).$$

1. On associe à la pseudo-pulsation ω la pseudo-période T telle que :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

On a donc toujours : $T > T_0$.

Remarque

Si $\alpha = 0$, on retrouve bien les oscillations non amorties du circuit RLC série.

C.2.6 - Le réseau de graphes

La figure 16 montre l'évolution du régime d'oscillations en fonction de la valeur du coefficient d'amortissement α . Pour simplifier, les graphes sont tracés en coordonnées x et y définies par :

$$x = \omega_0 t \text{ et } y = \frac{u_C}{E}.$$

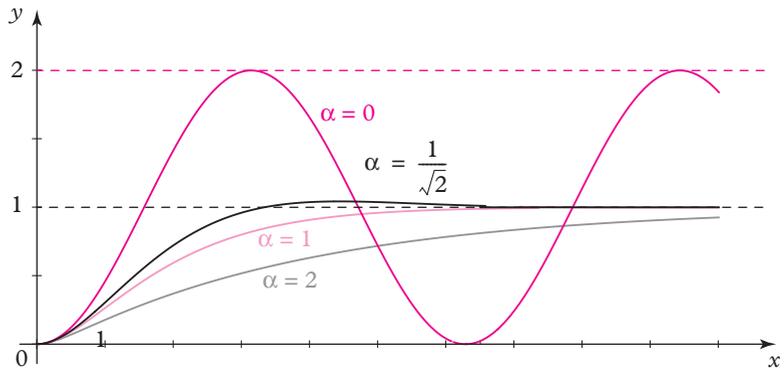


Fig. 16 - Tracés des graphes pour $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

C.3. Évolution de l'intensité i

1. Les détails des calculs, longs mais simples, ne sont pas donnés ici.

• On obtient l'intensité i du courant en dérivant la tension u_C aux bornes du condensateur¹ :

$$i = C \frac{du_C}{dt}.$$

– En régime apériodique ($\alpha > 1$) :

$$i(t) = C \frac{r_1 r_2 E}{r_1 - r_2} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}).$$

– En régime critique ($\alpha = 1$) :

$$i(t) = CE\lambda^2 t e^{-\lambda t}.$$

– En régime pseudo-périodique ($\alpha < 1$) :

$$i(t) = CE \frac{\omega^2 + \lambda^2}{\omega} e^{-\lambda t} \sin(\omega t).$$

• La figure 17 montre l'évolution du régime d'oscillations en fonction de la valeur du coefficient d'amortissement α . Pour simplifier, les graphes sont tracés en coordonnées x et y définies par :

$$x = \omega_0 t \quad \text{et} \quad y = \frac{i}{CE\omega_0} = \frac{i}{E} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

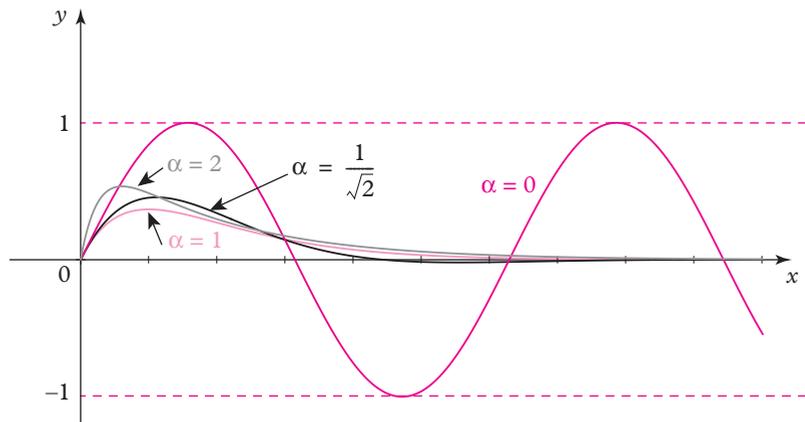


Fig. 17 - Tracés des graphes pour $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

Application 6 Équation différentielle vérifiée par l'intensité i

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i du courant et préciser les conditions initiales permettant de résoudre cette équation.

Solution

• La loi d'addition des tensions s'écrit pour $t > 0$:

$$E = u_R + u_L + u_C, \text{ soit : } Ri + L \frac{di}{dt} + u_C = E \text{ avec } i = C \frac{du_C}{dt}.$$

Par dérivation, on obtient donc l'équation différentielle caractérisant l'évolution de l'intensité i au cours du temps :

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad \text{ou} \quad LC \frac{d^2i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = 0.$$

Le polynôme caractéristique est le même que pour l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C . Quand u_C évolue suivant un régime pseudo-périodique (ou apériodique ou critique), alors i évolue aussi suivant un régime pseudo-périodique (ou apériodique ou critique).

• L'intensité i du courant dans l'inductance est continue, d'où la première condition initiale :

$$i(t=0) = 0.$$

Il faut aussi déterminer une condition sur la dérivée de i . À l'instant $t = 0$, la tension aux bornes du conducteur ohmique est nulle : $u_R(t=0) = Ri(t=0) = 0$. En outre, la tension u_C aux bornes du condensateur est continue, d'où : $u_C(t=0) = 0$. D'après la loi d'addition des tensions, on obtient donc la seconde condition initiale :

$$u_L(t=0) = E \text{ avec } u_L(t=0) = L \frac{di}{dt}(t=0), \text{ soit : } \frac{di}{dt}(t=0) = \frac{E}{L}.$$

C.4. Interprétation physique

Quel que soit le régime, la charge du condensateur correspond à un régime transitoire. Lorsque le condensateur est chargé ($t \rightarrow \infty$), le régime permanent est atteint : on a alors $u_C = E$ et $i = 0$ (fig. 18).

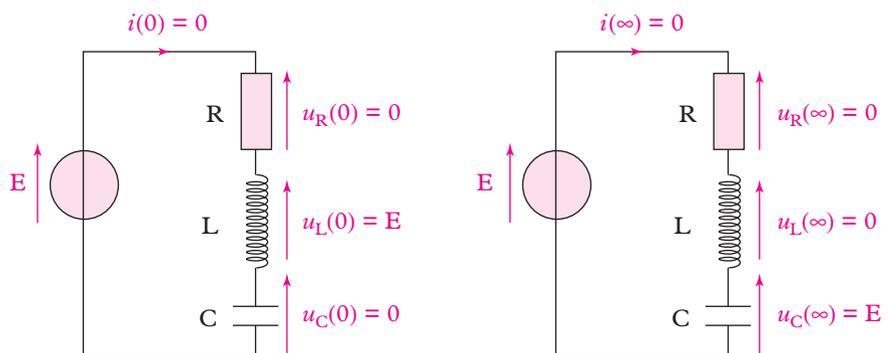


Fig. 18 - État du circuit quand $t = 0$ et quand $t \rightarrow \infty$.

C.5. Étude énergétique

• Lors de la charge du condensateur, l'addition des tensions s'écrit :

$$E = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C.$$

1. Le générateur est étudié en convention générateur : on fait donc apparaître la puissance fournie. Le conducteur ohmique, la bobine et le condensateur sont étudiés en convention récepteur : on fait donc apparaître les puissances reçues.

Pour passer à une égalité en puissance¹, on multiplie par $i = C \frac{du_C}{dt}$:

$$Ei = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} + Cu_C \frac{du_C}{dt}.$$

– Le terme Ei est la puissance P_g positive fournie par le générateur idéal de fém E .

– Le terme Ri^2 est la puissance P_J positive reçue par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule dans la résistance R .

– Le terme $\frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt}$ est la puissance $\frac{dE_{\text{mag}}}{dt}$ positive ou négative reçue par la bobine correspondant aux variations de l'énergie emmagasinée dans l'inductance L sous forme magnétique.

– Le terme $\frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt}$ est la puissance $\frac{dE_{\text{élec}}}{dt}$ positive ou négative reçue par le condensateur correspondant aux variations de l'énergie emmagasinée dans la capacité C sous forme électrostatique.

La puissance électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique et sert à faire varier l'énergie de la bobine et l'énergie du condensateur² :

$$P_g = P_J + \frac{dE_{\text{mag}}}{dt} + \frac{dE_{\text{élec}}}{dt} \quad (1)$$

• En intégrant l'égalité (1) entre l'instant initial $t = 0$ (fermeture de l'interrupteur K) et l'instant final $t \rightarrow \infty$, on obtient l'égalité (2) traduisant les transferts d'énergie dans le circuit :

$$E_g = E_J + \Delta E_{\text{mag}} + \Delta E_{\text{élec}} \quad (2)$$

– L'énergie électrique E_g fournie par le générateur entre l'instant $t = 0$ et l'instant t est égale à (voir § A. 1. 5) :

$$E_g = \int_0^t P_g dt = E \int_0^t i dt = CE \int_0^{u_C(t)} du_C = CEu_C(t).$$

Quand le condensateur est totalement chargé, la tension u_C vaut E et le générateur a fourni l'énergie :

$$E_g = CE^2.$$

– L'intensité du courant est nulle à $t = 0$; elle est de nouveau nulle quand $t \rightarrow \infty$. L'énergie magnétique ΔE_{mag} emmagasinée dans l'inductance L entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t \rightarrow \infty$ est égale à :

$$\Delta E_{\text{mag}} = E_{\text{mag}}(\infty) - E_{\text{mag}}(0) = 0.$$

L'énergie magnétique emmagasinée par la bobine au début du régime transitoire est redonnée à la fin de ce régime lorsque le courant s'arrête.

– La tension aux bornes du condensateur croît de 0 à E . L'énergie électrostatique $\Delta E_{\text{élec}}$ emmagasinée dans la capacité C entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t \rightarrow \infty$ est égale à :

$$\Delta E_{\text{élec}} = E_{\text{élec}}(\infty) - E_{\text{élec}}(0) = \frac{1}{2}CE^2.$$

– D'après l'équation (2), l'énergie E_J dissipée par effet Joule dans la résistance R entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t \rightarrow \infty$ est égale à³ :

$$E_J = E_g - \Delta E_{\text{élec}} - \Delta E_{\text{mag}} = CE^2 - \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}CE^2.$$

2. Cette égalité exprime la conservation de l'énergie dans le circuit électrique :

$$P_{\text{totale fournie}} = P_{\text{totale reçue}}.$$

3. Au cours de la charge, l'énergie dissipée par effet Joule ne dépend pas de la résistance R du conducteur ohmique. Elle ne dépend que de la capacité C du condensateur.

1. Lorsque le condensateur est chargé, le générateur ne fournit plus d'énergie au circuit (le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert).

2. Au cours de la charge, lorsque le courant traverse le circuit, l'énergie de la bobine n'est pas nulle.

Au cours de la charge, la moitié de l'énergie électrique fournie par le générateur¹ est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique et l'autre moitié est emmagasinée sous forme électrostatique dans le condensateur. L'énergie magnétique, nulle au début de la charge, est à nouveau nulle à la fin de la charge².

C.6. Analogie avec l'oscillateur linéaire

Dans un circuit RLC série, l'équation différentielle vérifiée par la charge q du condensateur s'écrit :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E, \text{ avec } \dot{q} = \frac{dq}{dt} = i \text{ et } \ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{di}{dt}.$$

En mécanique, l'équation différentielle de l'oscillateur linéaire est :

$$m\ddot{x} + f\dot{x} = kx = 0, \text{ avec } \dot{x} = \frac{dx}{dt} = v \text{ et } \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

Cette équation est formellement identique à celle de l'équation homogène de l'oscillateur électrique étudié précédemment. Bien que les oscillateurs électrique et mécanique correspondent à des situations physiques *a priori* très différentes, leurs comportements, décrits par un même « squelette algébrique », sont les mêmes. Le tableau ci-dessous définit les grandeurs analogues.

Grandeurs électriques		Grandeurs mécaniques	
charge du condensateur	q	déplacement de la masse	x
intensité du courant	i	vitesse de la masse	v
inductance propre	L	masse	m
résistance du circuit	R	coefficient de frottement	f
capacité du condensateur	C	inverse de la raideur du ressort	$\frac{1}{k}$
énergie magnétique	$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2}L i^2$	énergie cinétique	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$
énergie électrostatique	$E_{\text{elec}} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$	énergie potentielle élastique	$E_p = \frac{1}{2}kx^2$
pertes par effet Joule	$P_J = Ri^2$	pertes par frottement	$P_f = fv^2$

On peut alors poser :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \lambda = \alpha\omega_0 = \frac{f}{2m}.$$

En fonction de la valeur de α , on retrouve trois régimes d'oscillations : le régime apériodique ($\alpha > 1$), le régime critique ($\alpha = 1$) et le régime pseudo-périodique ($\alpha < 1$).

L'essentiel

✓ Étude d'un circuit RC série

- On définit la constante de temps τ du circuit RC par le produit :

$$\tau_{RC} = RC$$

τ constante de temps en seconde (s)
 R résistance en ohm (Ω)
 C capacité en farad (F)

- Charge et décharge du condensateur :

	Charge du condensateur	Décharge du condensateur
Montage		
Équation différentielle (premier ordre)	$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = E$	$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$
Conditions initiales	$u_C(0) = 0$	$u_C(0) = U_0$
Tension u_C (V)	$u_C = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$	$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$
Intensité i (A)	$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$	$i = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$
Allure de $u_C(t)$		
Bilan énergétique	La moitié de l'énergie électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance et l'autre moitié est emmagasinée sous forme d'énergie électrostatique $E_{\text{élec}}$ dans la capacité.	L'énergie électrostatique $E_{\text{élec}}$ initialement emmagasinée dans la capacité est entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance.

Méthodes

✓ Étude d'un circuit RL série

- On définit la constante de temps τ du circuit RL par le rapport :

$$\tau_{RL} = \frac{L}{R}$$

τ constante de temps en seconde (s)
 L inductance en henry (H)
 R résistance en ohm (Ω)

- Établissement et arrêt du courant dans la bobine :

	Établissement du courant dans la bobine	Arrêt du courant dans la bobine
Montage		
Équation différentielle (premier ordre)	$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$	$\tau \frac{di}{dt} + i = 0$
Conditions initiales	$i(0) = 0$	$i(0) = I_0$
Intensité i (A)	$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$	$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$
Tension u_L (V)	$u_L = L \frac{di}{dt} = E e^{-\frac{t}{\tau}}$	$u_L = L \frac{di}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$
Allure de $u_C(t)$		
Bilan énergétique	Lorsque le courant est établi, l'énergie magnétique E_{mag} emmagasinée dans la bobine reste constante. L'énergie électrique fournie par le générateur est alors entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance.	L'énergie magnétique E_{mag} initialement emmagasinée dans la bobine est entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance.

✓ Étude d'un circuit RLC série

- Pour l'étude du régime transitoire du circuit RLC, on introduit les variables réduites :

Pulsation propre (s ⁻¹ ou rad · s ⁻¹)	Facteur d'amortissement (s ⁻¹)	Coefficient d'amortissement (sans dimension)	Facteur de qualité (sans dimension)
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\lambda = \frac{R}{2L}$	$\alpha = \frac{\lambda}{\omega_0}$	$Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$

La pulsation propre ω_0 est la pulsation des oscillations en l'absence d'amortissement.

- La tension u_C aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série soumis à l'échelon de tension E vérifie l'équation différentielle du second ordre :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E.$$

- En fonction de la valeur de α (ou, ce qui est équivalent, de la valeur de Q), on distingue trois régimes différents.

<p>Régime apériodique : $\alpha > 1$ ou $Q < \frac{1}{2}$ (fort amortissement)</p>	<p>Solution de l'équation homogène ($\Delta > 0$): $u_1 = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$, avec r_1 et r_2 racines réelles du polynôme caractéristique.</p>	
<p>Régime critique : $\alpha = 1$ ou $Q = \frac{1}{2}$ (amortissement critique)</p>	<p>Solution de l'équation homogène ($\Delta = 0$): $u_1 = (At + B)e^{rt}$, avec r racine double du polynôme caractéristique.</p>	
<p>Régime pseudo-périodique : $\alpha < 1$ ou $Q > \frac{1}{2}$ (amortissement faible)</p>	<p>Solution de l'équation homogène ($\Delta < 0$): $u_1 = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] e^{-\lambda t}$, avec $r_1 = -\lambda + j\omega$ et $r_2 = -\lambda - j\omega$ racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique.</p>	

- Au cours de la charge, la moitié de l'énergie électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance et l'autre moitié est emmagasinée sous forme d'énergie électrostatique $E_{\text{élec}}$ dans la capacité. L'énergie magnétique E_{mag} emmagasinée dans l'inductance, nulle au début de la charge, est à nouveau nulle à la fin de la charge.

Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment résoudre une équation différentielle linéaire à second membre constant ?

L'étude d'un régime transitoire fait systématiquement appel à la résolution d'une équation différentielle. On se propose de résoudre cette équation.

→ Savoir faire

- 1 Chercher la solution particulière constante qui vérifie l'équation différentielle avec second membre.
- 2 Injecter une solution exponentielle du type Ae^{rt} dans l'équation différentielle dont le second membre a été annulé (équation homogène). Le coefficient r vérifie une équation appelée polynôme caractéristique.
- 3 Déterminer la ou les valeurs de r qui sont racines du polynôme caractéristique. Construire la solution sans second membre, de la forme :
 - Ae^{rt} pour une équation du premier ordre ;
 - $Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ pour une équation du second ordre admettant deux racines réelles ou complexes conjuguées ;
 - $(A + Bt)e^{rt}$ pour une équation du second ordre admettant une racine double.



Dans le cas de deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm j\beta$, on peut écrire la solution sous la forme :

$$[A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)]e^{\alpha t}.$$

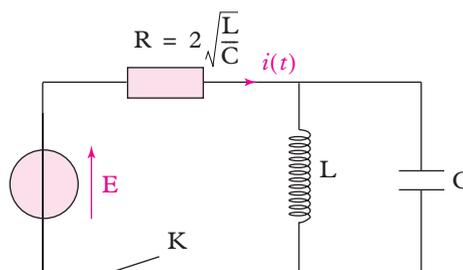
- 4 Déterminer la ou les constantes d'intégration de la solution générale, qui est la somme de la solution particulière établie au 1 et de la solution sans second membre établie au 3. Cette étape nécessite de connaître les conditions initiales données par les relations de continuité (voir la méthode n° 1 du chapitre 3).



Il faut veiller à déterminer les constantes d'intégration sur la solution générale, c'est-à-dire *après* avoir réuni les solutions particulières et sans second membre.

→ Application

On considère le circuit ci-dessous, dont l'interrupteur K est fermé à l'instant $t = 0$.



La mise en équation du circuit et la recherche des conditions initiales conduisent, pour l'intensité dans la branche principale, à :

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}, \text{ avec } \begin{cases} i(0^+) = \frac{E}{R} \\ \frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{E}{R^2 C} \end{cases}$$

Déterminer l'expression de $i(t)$.

Solution

❶ La solution particulière constante est :

$$i_2(t) = \frac{E}{R}$$

❷ L'équation sans second membre s'écrit :

$$LC \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_1}{dt} + i_1 = 0.$$

On injecte la solution type Ae^{rt} dans cette équation :

$$LCr^2 Ae^{rt} + \frac{L}{R} r Ae^{rt} + Ae^{rt} = 0.$$

❸ Comme Ae^{rt} ne s'annule pas (car $A = 0$ est une solution sans intérêt), le polynôme caractéristique est donc :

$$LCr^2 + \frac{L}{R}r + 1 = 0.$$

Son discriminant vaut : $\Delta = \frac{1}{R^2 C^2} - \frac{4}{LC}$, c'est-à-dire zéro compte tenu du choix des composants. Le polynôme caractéristique admet une racine double (régime critique) :

$$\alpha = -\frac{1}{2RC}.$$

Replacée dans la solution, cette racine double conduit à :

$$i_1(t) = (A + Bt) \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right).$$

❹ La solution générale est donc :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{E}{R} + (A + Bt) \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right).$$

En $t = 0^+$, on détermine les constantes d'intégration A et B :

$$\begin{cases} i(0^+) = \frac{E}{R} = \frac{E}{R} + A \\ \frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{E}{R^2 C} = B - \frac{A}{2RC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{E}{R^2 C} \end{cases}$$

Soit en remplaçant ces valeurs dans la solution générale :

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{Et}{R^2 C} \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right),$$

d'où :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \frac{t}{RC} \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right)\right).$$

Méthode n° 2

Comment caractériser un régime transitoire du premier ordre à partir de son oscillogramme ?

Soit un oscillogramme indiquant un régime transitoire du premier ordre. On se propose d'établir l'équation différentielle associée à cet oscillogramme.

→ Savoir faire

- 1 Déterminer la valeur initiale $u(t=0) = u_0$ de la tension étudiée.
- 2 Déterminer la valeur limite u_∞ en $t \rightarrow +\infty$ de la tension étudiée.
- 3 Tracer la tangente à la courbe $u(t)$ issue du point $t = 0$. Mesurer le temps τ caractéristique du régime transitoire à l'intersection de cette tangente avec la droite $u = u_\infty$.
- 4 Écrire l'équation différentielle sous la forme :

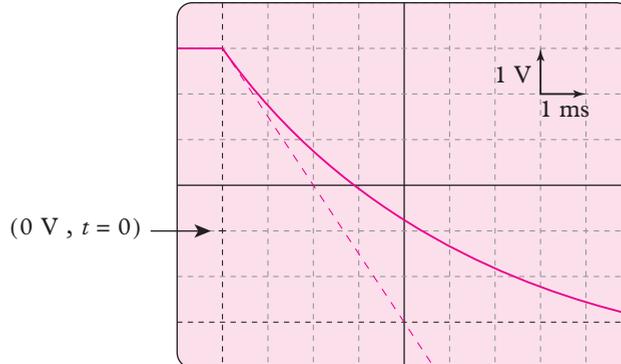
$$\tau \frac{du}{dt} + (u - u_\infty) = 0.$$

La solution de cette équation s'écrit :

$$u(t) = u_\infty + (u_0 - u_\infty) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

→ Application

Établir l'équation différentielle associée à l'oscillogramme représenté ci-dessous.



Solution

- 1 On mesure 4 divisions verticales à partir du point origine (0 V, $t = 0$) : $u(0) = 4$ V.
- 2 En $t = +\infty$, l'asymptote a pour équation : $u_\infty = -2$ V.
- 3 La tangente à la courbe $u(t)$ à l'origine coupe la droite $u_C = -2$ V en ($t = 4$ ms ; $u = -2$ V), soit : $\tau = 4$ ms.
- 4 L'équation différentielle vérifiée par u est donc :

$$(4 \cdot 10^{-3}) \frac{du}{dt} + u = -2, \text{ avec } u \text{ en V et } t \text{ en s.}$$



La solution de cette équation est :

$$u(t) = -2 + 4 \exp\left(-\frac{t}{4 \cdot 10^{-3}}\right), \text{ avec } u \text{ en V et } t \text{ en s.}$$

Méthode n° 3

Comment effectuer le bilan énergétique d'un régime transitoire ?

On se propose d'évaluer l'énergie dissipée par effet Joule au cours d'un régime transitoire.

→ Savoir faire

- 1 Déterminer les valeurs prises par les courants et les tensions du circuit à l'issue du régime transitoire en utilisant un schéma équivalent du circuit.
- 2 Déterminer l'énergie reçue (et stockée) par les condensateurs et bobines du circuit pendant ce régime transitoire :

$$\Delta E_{\text{stockée}} = \Delta E_{\text{elec}} + \Delta E_{\text{mag}}.$$

– Pour un condensateur : $\Delta E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C u_{\infty}^2 - \frac{1}{2} C u_0^2.$

– Pour une bobine : $\Delta E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i_{\infty}^2 - \frac{1}{2} L i_0^2.$

(u_0 , u_{∞} , i_0 et i_{∞} sont les tensions et courants avant et après le régime transitoire.)

- 3 Exprimer le courant $i_g(t)$ qui traverse le générateur. Si ce courant s'annule au bout d'un temps infini, calculer l'énergie fournie au circuit par le générateur :

$$E_{\text{fournie}} = \int_0^{+\infty} u_g i_g dt, \text{ avec } u_g \text{ et } i_g \text{ en convention générateur.}$$

- 4 Si l'énergie fournie par le générateur est finie, calculer l'énergie dissipée par effet Joule :

$$E_J = E_{\text{fournie}} - \Delta E_{\text{stockée}}.$$

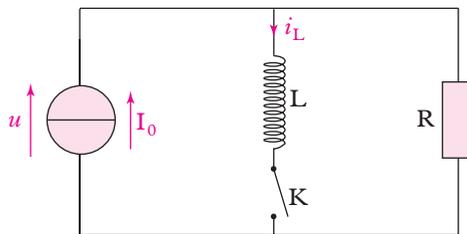


Dans la plupart des circuits, un courant circule encore à l'issue du régime transitoire. La puissance fournie par le générateur est alors entièrement dissipée par le réseau de résistances.

→ Application

On considère le circuit suivant, dans lequel l'interrupteur K est initialement ouvert. On choisit comme origine des temps l'instant où K est fermé.

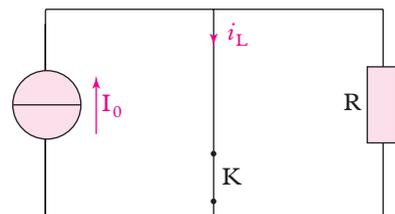
On montre que $u(t) = R I_0 \exp\left(-\frac{R}{L} t\right)$. Calculer l'énergie dissipée par effet Joule pendant le régime transitoire à l'aide d'un bilan énergétique.



Solution

- 1 Initialement, $i_L(0) = 0$ car la branche est ouverte. Au bout d'un temps infini, le régime permanent est établi et la bobine équivaut à un fil : $i_L(\infty) = I_0$.
- 2 Le circuit reçoit et stocke de l'énergie dans la bobine :

$$\Delta E_{\text{stockée}} = \frac{1}{2} L i_L(\infty)^2 - \frac{1}{2} L i_L(0)^2 = \frac{1}{2} L I_0^2.$$



- ③ Le courant dans le générateur ne s'annule pas, mais la tension à ses bornes s'annule. La puissance fournie s'annule donc et l'énergie fournie au circuit est calculable :

$$E_{\text{fournie}} = \int_0^{+\infty} I_0 u(t) dt = RI_0^2 \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) dt.$$

On intègre la fonction exponentielle entre $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$:

$$E_{\text{fournie}} = RI_0^2 \left[-\frac{L}{R} \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \right]_0^{+\infty} = RI_0^2 \left(\frac{L}{R} \right) = LI_0^2.$$

- ④ L'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance vaut donc :

$$E_J = E_{\text{fournie}} - \Delta E_{\text{stockée}} = LI_0^2 - \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}LI_0^2.$$

La moitié de l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance, et ceci indépendamment de sa valeur.



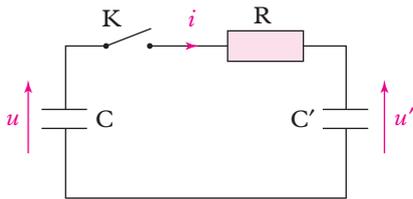
On peut retrouver ce résultat en intégrant la puissance reçue par la résistance pendant le régime transitoire, mais ce calcul est techniquement plus compliqué.

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Décharge d'un condensateur dans un autre

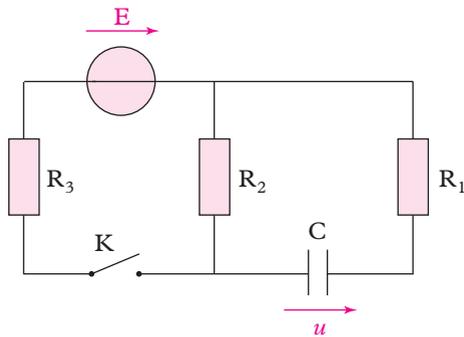
Le condensateur de capacité C est chargé sous une tension U_0 . Il est branché à l'instant initial sur un autre condensateur de capacité C' , initialement déchargé, par l'intermédiaire d'une résistance R . On note u la tension aux bornes de C et u' la tension aux bornes de C' .



- Déterminer les évolutions des tensions $u(t)$ et $u'(t)$.
- Déterminer l'évolution de l'intensité $i(t)$.
- Déterminer l'énergie E_J dissipée par effet Joule. Effectuer un bilan énergétique et retrouver le résultat précédent.

Ex. 2 Charge et décharge d'un condensateur

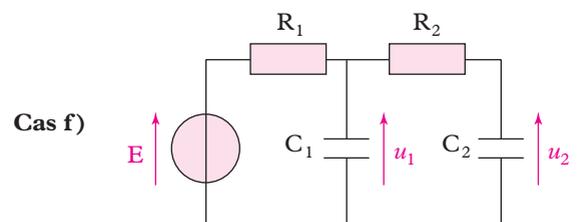
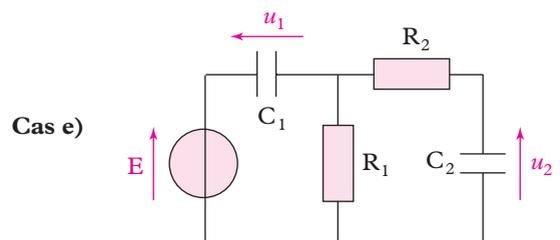
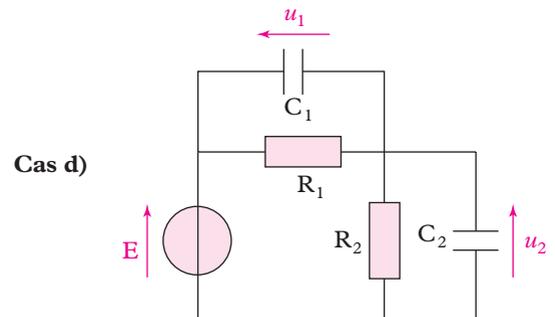
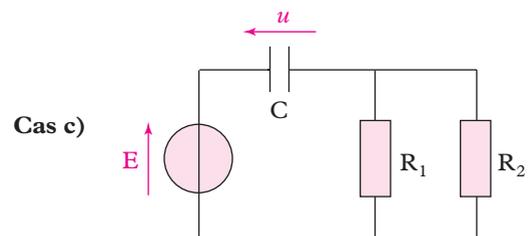
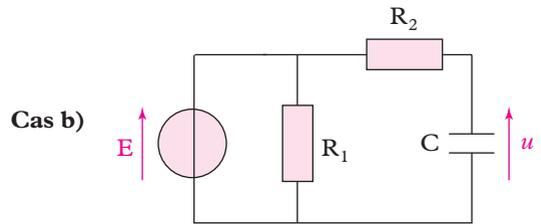
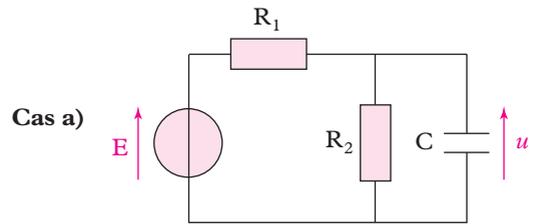
On considère le circuit suivant, comportant les résistances R_1 , R_2 et R_3 , le condensateur de capacité C et le générateur de tension E .



- Initialement, le condensateur est déchargé et on ferme l'interrupteur K à $t = 0$. Déterminer l'évolution de la tension $u(t)$. Peut-on prévoir la tension maximale u_{\max} du condensateur ?
- L'interrupteur K étant fermé depuis longtemps, on a alors $u = u_{\max}$. À l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur. Déterminer l'évolution de la tension $u(t)$.

Ex. 3 Recherche de régimes permanents avec des condensateurs

Dans les montages ci-dessous, déterminer la (ou les) tension(s) aux bornes du (ou des) condensateur(s) lorsque le régime permanent est établi.



Ex. 4 Résistance d'un voltmètre

Un condensateur chimique de capacité $47 \mu\text{F}$ est chargé sous une tension $u_0 = 4,5 \text{ V}$. On le branche aux bornes d'un voltmètre.

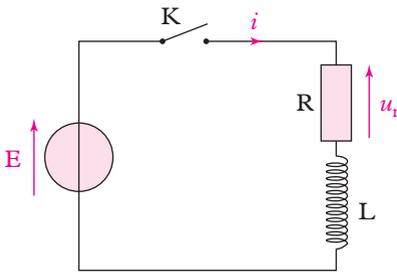
À l'instant $t = 0$, on mesure normalement $u_0 = 4,5 \text{ V}$.
À l'instant $t = 200 \text{ s}$, on lit sur le voltmètre $u = 3 \text{ V}$.
Quelle est la résistance du voltmètre ?

Ex. 5 Établissement du courant dans une bobine

Une bobine parfaite d'inductance L est en série avec un conducteur ohmique de résistance $R = 15 \Omega$ et une batterie de force électromotrice $E = 6 \text{ V}$.

À l'instant $t = 0$, on ferme le circuit.

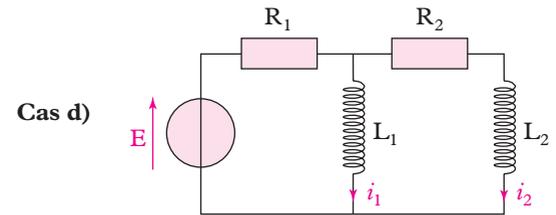
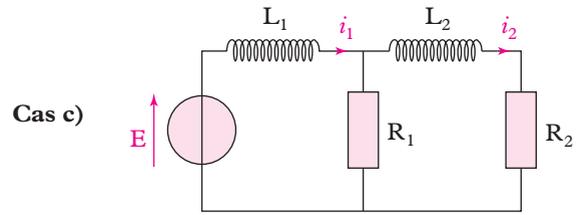
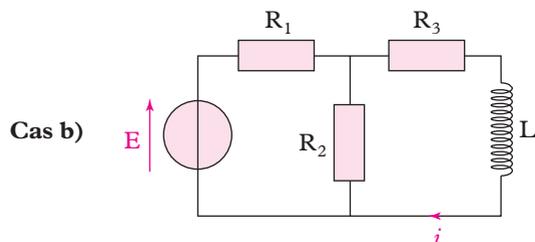
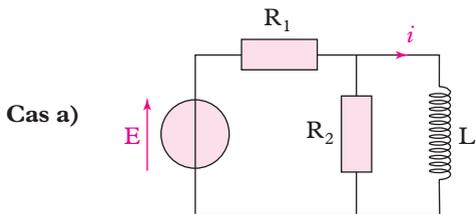
La tension aux bornes de la résistance croît pour atteindre $u_R = 2,7 \text{ V}$ à l'instant $t = 2 \text{ ms}$.



- Déterminer la valeur de l'inductance L .
- Quelle est l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine à l'instant $t = 2 \text{ ms}$?
- Quelle est l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance entre $t = 0$ et $t = 2 \text{ ms}$.

Ex. 6 Recherche de régimes permanents en présence de bobines

Dans les montages ci-dessous, déterminer l'intensité du courant circulant dans chaque bobine lorsque le régime permanent est établi.



Ex. 7 Oscillations d'un circuit LC

Un condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$ est initialement chargé sous une tension $U_0 = 6 \text{ V}$. On le connecte à l'instant $t = 0$ à une bobine de résistance négligeable et d'inductance $L = 25 \text{ mH}$.

- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur.
- Déterminer $u(t)$. Exprimer la fréquence des oscillations et l'amplitude de celles-ci.
- Déterminer $i(t)$. Quelle est alors l'amplitude de l'intensité ?
- Exprimer l'énergie du condensateur et celle de la bobine au cours du temps. Vérifier que l'énergie totale reste constante.

Ex. 8 Régime critique

Le condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$, initialement chargé sous une tension $U_0 = 6 \text{ V}$, est connecté à l'instant $t = 0$ à une bobine d'inductance $L = 25 \text{ mH}$ et de résistance R .

- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur.
- Le régime étudié est le régime critique. Déterminer R . Exprimer alors $u(t)$. Tracer $u(t)$.
- En déduire l'intensité $i(t)$. Tracer $i(t)$.
- Quelle est l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance R ?

Ex. 9 Régime pseudo-périodique

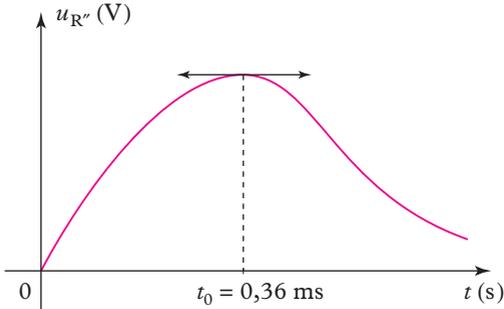
On reprend l'étude de l'exercice 8, mais la résistance de la bobine est maintenant R' .

Le régime étudié est pseudo-périodique et la pseudo-période vaut $T = 5 \text{ ms}$.

- Déterminer la résistance R' .
- Déterminer numériquement $u(t)$.

Ex. 10 Régime apériodique

Un condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$, chargé sous la tension U_0 , se décharge dans une bobine d'inductance $L = 2 \text{ mH}$ et de résistance R'' . Le régime est apériodique et l'on a enregistré l'évolution de la tension aux bornes de la résistance R'' .

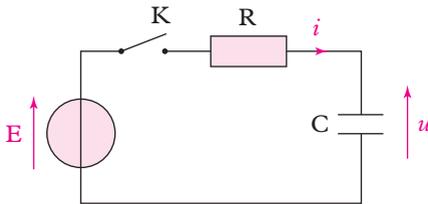


On observe un maximum de $u_{R''}$ à l'instant $t_0 = 0,36 \text{ ms}$. Déterminer R'' .

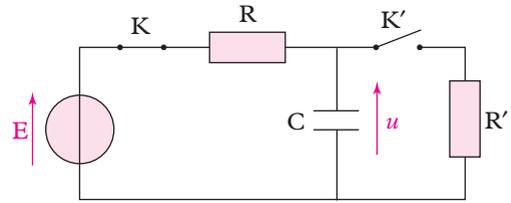
Niveau 2

Ex. 11 Établissement du courant dans un condensateur

1) Le condensateur étudié est chargé sous une tension U_0 . Il est placé en série avec une résistance R , un générateur de tension E et un interrupteur K . Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



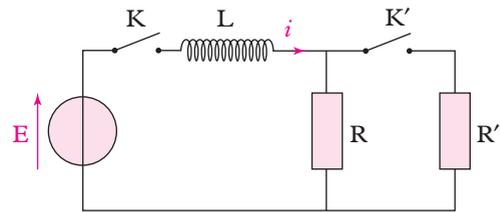
- Déterminer l'équation d'évolution de la tension u aux bornes du condensateur.
 - Résoudre l'équation obtenue pour $t > 0$.
 - Tracer la courbe $u(t)$.
 - Déterminer l'intensité $i(t)$ du courant.
 - Déterminer l'énergie dissipée par effet Joule.
 - Faire un bilan énergétique et retrouver le résultat précédent.
- 2) Le condensateur est maintenant chargé sous la tension E . On branche à ses bornes, comme l'indique le schéma ci-dessous, une résistance R' . On choisit l'origine des temps au moment du branchement de R' .



- Déterminer l'équation d'évolution de la tension u aux bornes du condensateur.
- Déterminer $u(t)$ et tracer la courbe correspondante.
- Effectuer un bilan énergétique.

Ex. 12 Établissement du courant dans un circuit

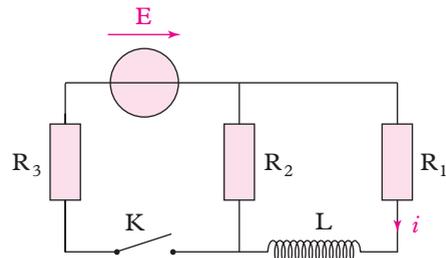
On considère le circuit suivant comportant une bobine d'inductance L et deux résistances R et R' . K et K' sont deux interrupteurs et le générateur de tension possède la fém E .



- K' est ouvert. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K . Déterminer la loi d'évolution de l'intensité $i(t)$. Quel est le courant I en régime permanent ?
- Le régime permanent d'intensité I est établi (K est fermé). À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K' . Établir la nouvelle loi d'évolution de l'intensité $i(t)$. Quelle est la nouvelle intensité I' en régime permanent ?

Ex. 13 Trois résistances et une bobine

Le circuit étudié comporte trois résistances R_1 , R_2 et R_3 , une bobine parfaite d'inductance L , un générateur de fém E et un interrupteur K .



- Initialement, la bobine n'est parcourue par aucun courant. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K . Établir la loi d'évolution de $i(t)$ et déterminer le courant I en régime permanent dans la bobine.
- Le courant d'intensité I est établi, on ouvre K à $t = 0$. Déterminer la nouvelle loi donnant $i(t)$ et l'énergie dissipée par effet Joule dans les résistances.

Ex. 14 Diode de roue libre

Un moteur est modélisé par une résistance R et une bobine L .

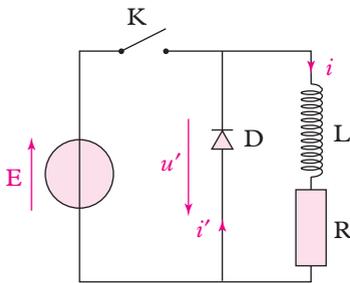
L'interrupteur K est fermé depuis longtemps. Le courant permanent dans la bobine est :

$$i = I = \frac{E}{R}$$

Pour éviter une étincelle aux bornes du moteur, lors de l'ouverture du circuit, on place en parallèle avec le moteur une diode D .

Quand l'interrupteur K est fermé, aucun courant ne circule dans D .

Quand on ouvre K , la diode court-circuite le moteur et l'énergie magnétique contenue dans la bobine est dissipée par effet Joule dans la résistance R .



a) La caractéristique de la diode vérifie les conditions données ci-dessous :

$$u' \leq 0 : i' = 0 ; \quad i' \geq 0 : u' = 0.$$

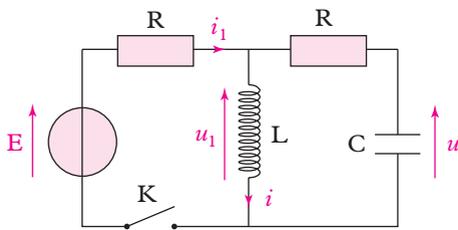
Déterminer la loi d'évolution de $i(t)$.

b) Reprendre l'étude en tenant compte de la tension seuil V_s de la diode :

$$u' \leq V_s ; \quad i' = 0 ; \quad i' \geq 0 : u' = V_s .$$

Ex. 15 Établissement et rupture dans un « circuit parallèle »

On considère le montage schématisé ci-dessous.



a) Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé. On a :

$$\tau = \frac{L}{R} = RC.$$

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

Établir $i(t)$ et $u(t)$ pour $t > 0$.

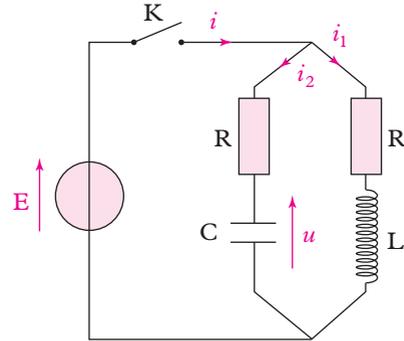
Déterminer le régime permanent I de courant dans la bobine et le régime permanent U de tension aux bornes du condensateur.

b) Le régime permanent est établi. À l'instant $t = 0$, on ouvre K . Déterminer $i(t)$ et $u(t)$ pour $t > 0$.

Ex. 16 Évolution simultanée du courant dans une bobine et un condensateur

Le circuit comporte un condensateur de capacité C en série avec une résistance R . Cette branche est en parallèle avec une branche comportant une bobine d'inductance L et de résistance R . On a : $\tau = RC = \frac{L}{R}$.

L'ensemble est alimenté par un générateur de fém E comme l'indique le schéma suivant :



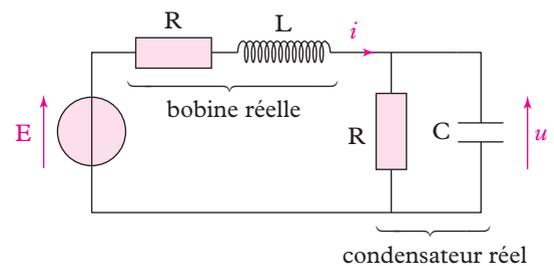
a) Le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur K . Déterminer $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i(t)$. Déterminer $u(t)$.

b) Le régime permanent est établi. On ouvre K . Déterminer $u(t)$.

Ex. 17 Bobine réelle en série avec un condensateur réel

Le montage ci-dessous modélise une bobine réelle (L, R) en série avec un condensateur réel (C, R) initialement déchargé. On a la propriété :

$$\tau = \frac{L}{R} = RC.$$



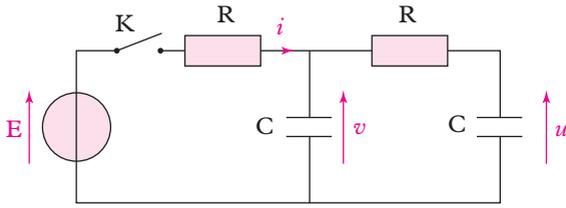
a) Déterminer l'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur lorsque le circuit est branché, à $t = 0$, sur un générateur de tension E . Représenter $u(t)$.

b) Peut-on prévoir le régime permanent sans calcul ? Si oui, déterminer U , tension aux bornes du condensateur, et I , courant dans la bobine, en régime permanent.

Ex. 18 Circuit avec deux condensateurs

Le circuit schématisé ci-après comporte deux résistances R et deux condensateurs de capacité C , initialement déchargés. À l'instant $t = 0$, on le branche sur

un générateur de tension E . Déterminer $u(t)$. Quel est le facteur de qualité Q du montage ? On pose $\tau = RC$.

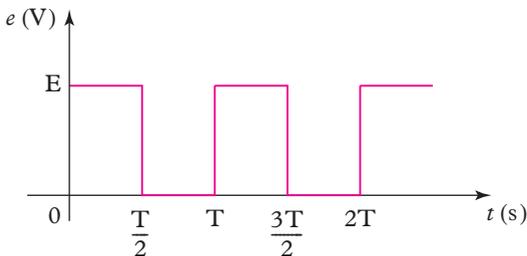
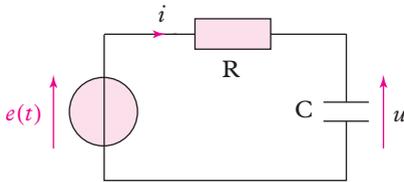


Niveau 3

Ex. 19 Alimentation d'un condensateur par une tension créneau

Le condensateur de capacité C est alimenté par l'intermédiaire d'une résistance R grâce à un générateur délivrant une tension créneau $e(t)$ vérifiant la propriété suivante ($n \in \mathbb{N}$) :

- si $t \in]nT ; nT + \frac{T}{2}[$, $e(t) = E$;
- si $t \in]nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T[$, $e(t) = 0$.



La tension $u(t)$ aux bornes du condensateur évolue en permanence. Nous allons étudier les premières phases de cette évolution pour essayer d'en tirer une loi, puis nous regarderons le régime oscillatoire permanent.

Nous noterons u_n la tension $u\left(nT + \frac{T}{2}\right)$ et v_n la tension $u(nT)$.

a) Écrire l'équation d'évolution de la tension u dans chaque intervalle de temps.

- pour $t \in]nT ; nT + \frac{T}{2}[$;
- pour $t \in]nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T[$;

b) Déterminer $u(t)$ pour $t \in \left[0 ; \frac{T}{2}\right]$. En déduire u_0 .

On suppose que le condensateur est déchargé à $t = 0$ ($v_0 = 0$).

c) Déterminer $u(t)$ pour $t \in \left[\frac{T}{2} ; T\right]$. En déduire v_1 .

d) Étudier $u(t)$ pour $t \in [nT ; (n+1)T]$ en décomposant l'intervalle en deux parties et obtenir u_n en fonction de v_n et v_{n+1} en fonction de u_n . Nous avons ainsi défini la double loi de récurrence.

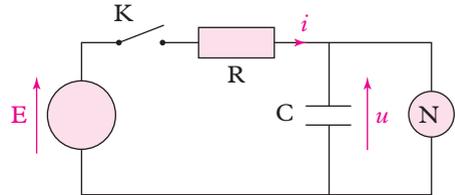
e) On admet que la suite $\{u_n\}$ tend vers une limite U et la suite $\{v_n\}$ vers une limite V . Déterminer U et V . Tracer alors l'allure du régime oscillatoire permanent $u(t)$.

Ex. 20 Oscillateur de relaxation

Une ampoule au néon est placée en parallèle sur le condensateur d'un circuit RC. La lampe au néon présente la particularité de ne s'allumer que si la tension entre ses bornes atteint la valeur V_a , dite tension d'allumage. En revanche, elle reste allumée tant que la tension à ses bornes est supérieure à $V_e < V_a$; V_e est appelée tension d'extinction.

La lampe éteinte ne conduit pas le courant ; elle est équivalente à un interrupteur ouvert.

La lampe allumée est équivalente à une résistance r . Le condensateur étant initialement déchargé, on ferme l'interrupteur K .



a) À quelle condition la lampe s'allume-t-elle ?

Décrive $u(t)$ entre l'instant $t = 0$ et l'instant d'allumage t_a . Déterminer t_a .

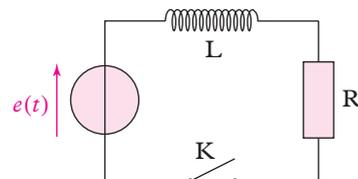
b) La lampe étant allumée, comment évolue $u(t)$?

À quelle condition la lampe s'éteint-elle ?

c) Les deux conditions précédentes étant vérifiées, décrire l'évolution de $u(t)$. Faire apparaître une période T décrivant cette évolution.

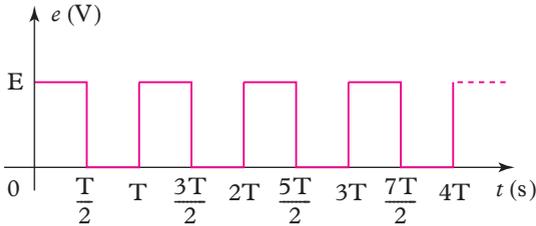
Ex. 21 Lissage du courant

1) Déterminer la loi d'établissement du courant dans une bobine d'inductance L à travers une résistance R . Le générateur a une fém constante : $e(t) = E$.



Déterminer le temps nécessaire pour que le courant dans le circuit ne diffère pas de plus de 5 % de sa valeur finale.

2) Le générateur de tension $e(t)$ est maintenant périodique, comme le précise sa loi d'évolution sur le schéma ci-dessous.



a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour chaque demi-période :

$$\left] nT ; nT + \frac{T}{2} \right[\text{ et } \left] nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T \right[.$$

b) À l'instant $t = 0$, on a : $i(t) = 0$. Représenter l'allure de la courbe $i(t)$ sur les quatre premières périodes.

c) On recherche le régime périodique permanent.

À l'instant nT , le courant est I_m .

À l'instant $nT + \frac{T}{2}$, le courant est I_M .

À l'instant $(n+1)T$, le courant vaut I_m , etc.

Déterminer I_m et I_M . Tracer l'allure de $i(t)$ en régime permanent.

Indications

Ex. 1 Un des condensateurs est étudié en convention générateur, l'autre en convention récepteur.

Ex. 3 En régime permanent, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

Ex. 5 c) Utiliser la conservation de l'énergie dans le circuit électrique.

Ex. 6 En régime permanent, une bobine se comporte comme un fil.

Ex. 9 a) Déduire la valeur de la résistance de celle de la pseudo-pulsation ω du circuit.

Ex. 10 Déterminer l'extremum de la fonction $u_{R'}(t)$.

Ex. 11 Faire attention aux conditions initiales portant sur la tension aux bornes du condensateur.

Ex. 14 a) La diode court-circuite le moteur quand on ouvre l'interrupteur.

b) L'équation n'est valable que pour $i \geq 0$.

Ex. 20 Si les deux conditions sont réalisées, la lampe s'allume et s'éteint périodiquement (oscillateur de relaxation).

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

a) • L'intensité i du courant dans le circuit s'écrit :

$$i = C' \frac{du'}{dt} = -C \frac{du}{dt}, \quad \text{soit : } C' \frac{du'}{dt} + C \frac{du}{dt} = 0.$$



Le condensateur C est étudié en convention générateur : il ne faut pas oublier le signe « - » dans l'expression de i .

En intégrant, on obtient : $C'u' + Cu = \text{cte}$. Or, à $t = 0$, on a : $u' = 0$ et $u = U_0$, d'où :

$$C'u' + Cu = CU_0.$$

• La loi des mailles donne :

$$u = Ri + u', \quad \text{soit : } U_0 - \frac{C'}{C}u' = RC' \frac{du'}{dt} + u'.$$

L'équation différentielle vérifiée par u' est alors :

$$\frac{RCC'}{C + C'} \frac{du'}{dt} + u' = \frac{CU_0}{C + C'}.$$

La constante de temps est $\tau = \frac{RCC'}{C + C'}$ et la solution particulière constante est $u'_2 = \frac{CU_0}{C + C'}$.



La constante de temps τ n'apparaît que si l'équation est écrite sous sa forme canonique, c'est-à-dire si le coefficient de u' est égal à 1.

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$u' = u'_1 + u'_2 = \frac{CU_0}{C + C'} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{avec } \tau = \frac{RCC'}{C + C'}.$$

La tension aux bornes du condensateur est continue, d'où :

$$u'(t=0) = 0 = \frac{CU_0}{C + C'} + A, \quad \text{soit : } A = -\frac{CU_0}{C + C'}.$$

La loi d'évolution de la tension u' s'écrit :

$$u'(t) = \frac{CU_0}{C + C'} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \text{avec } \tau = -\frac{RCC'}{C + C'}.$$

On en déduit donc :

$$u(t) = U_0 - \frac{C'}{C} u'(t) = \frac{U_0}{C + C'} \left(C + C' e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$



La tension u' croît au cours du temps, alors que la tension u décroît, ce qui est normal, car le condensateur C se décharge dans le condensateur C' .

b) L'intensité i du courant vaut alors :

$$i = C' \frac{du'}{dt} = C' \times \frac{CU_0}{C + C'} \times \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{soit : } i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

c) • L'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance R vaut :

$$\mathcal{E}_J = \int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} Ri^2 dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{U_0^2}{R} \left[-\frac{\tau e^{-\frac{2t}{\tau}}}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\tau U_0^2}{2R} = \frac{1}{2} \frac{CC'}{C+C'} U_0^2.$$

• La loi des mailles donne pour $t > 0$: $u = Ri + u'$.

On multiplie les deux membres de l'égalité par $i = C' \frac{du'}{dt} = -C \frac{du}{dt}$:

$$ui = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right) = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C'u'^2 \right),$$

d'où : $Ri^2 = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 + \frac{1}{2} C'u'^2 \right).$

↑
puissance Joule
dissipée dans R

↑
variation de l'énergie des
condensateurs au cours
du temps

⚙️ On a : $ui = -Cu \frac{du}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right)$ et $u'i = C'u' \frac{du'}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C'u'^2 \right).$

On intègre chaque terme de l'égalité précédente sur la durée de la décharge de C dans C' :

$$\int_0^{+\infty} Ri^2 dt = -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 + \frac{1}{2} C'u'^2 \right) dt.$$

$$\mathcal{E}_J = -(\Delta \mathcal{E}_{\text{elec}} + \Delta \mathcal{E}'_{\text{elec}}).$$

La variation de l'énergie électrostatique des condensateurs vaut :

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{elec}} = \frac{1}{2} Cu(\infty)^2 - \frac{1}{2} Cu(0)^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{CU_0}{C+C'} \right)^2 - \frac{1}{2} CU_0^2.$$

$$\Delta \mathcal{E}'_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C'u'(\infty)^2 - \frac{1}{2} C'u'(0)^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{CU_0}{C+C'} \right)^2.$$

⚠️ La variation de l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur C est négative, car celui-ci fournit de l'énergie au circuit.

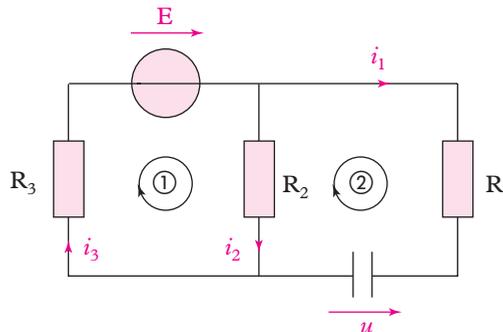
On en déduit donc :

$$\mathcal{E}_J = -\frac{1}{2} C \left(\frac{CU_0}{C+C'} \right)^2 + \frac{1}{2} CU_0^2 - \frac{1}{2} C' \left(\frac{CU_0}{C+C'} \right)^2 = \frac{1}{2} CU_0^2 \left(1 - \frac{C}{C+C'} \right) = \frac{1}{2} \frac{CC'}{C+C'} U_0^2.$$

On retrouve bien le résultat précédent.

Exercice 2

a) Paramétronsons le circuit comme l'indique le schéma ci-dessous :



• La loi des nœuds donne :

$$i_1 + i_2 = i_3, \text{ avec } i_1 = C \frac{du}{dt}.$$

Le circuit comporte deux mailles indépendantes pour lesquelles on peut écrire :

$$\begin{cases} \text{maille 1 : } E = R_2 i_2 + R_3 i_3 = (R_2 + R_3) i_2 + R_3 C \frac{du}{dt} \\ \text{maille 2 : } R_2 i_2 = R_1 i_1 + u = R_1 C \frac{du}{dt} + u. \end{cases}$$

Reportons alors i_2 dans l'égalité obtenue pour la maille 1 :

$$E = \left[\frac{(R_2 + R_3)R_1}{R_2} + R_3 \right] C \frac{du}{dt} + \frac{R_2 + R_3}{R_2} u = \left[R_1 + R_3 + \frac{R_3 R_1}{R_2} \right] C \frac{du}{dt} + \frac{R_2 + R_3}{R_2} u.$$

L'équation différentielle vérifiée par la tension u s'écrit donc :

$$\frac{(R_1 + R_3)R_2 + R_3 R_1}{R_2 + R_3} C \frac{du}{dt} + u = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E,$$

ou sous sa forme « canonique » :

$$\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3} C \frac{du}{dt} + u = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E.$$

La constante de temps est $\tau = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3} C$ et la solution particulière constante vaut

$$u_2 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E.$$



La constante de temps τ n'apparaît que si l'équation est écrite sous sa forme canonique, c'est-à-dire si le coefficient de u est égal à 1.

Compte tenu des conditions initiales ($u(0) = 0$), nous obtenons :

$$u(t) = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3} C.$$

La tension maximale est obtenue pour $t \rightarrow +\infty$: $u_{\max} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E$.

• En régime permanent, nous avons $u = u_{\max} = \text{cte}$, d'où : $i_1 = 0$ et $i_2 = i_3$. La tension u_{\max} vaut :

$$u_{\max} = R_2 i_2 \text{ avec } i_2 = \frac{E}{R_2 + R_3}, \text{ d'où : } u_{\max} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E.$$



En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

b) L'étude correspond à la décharge d'un condensateur initialement chargé sous la tension u_{\max} à travers une résistance $R = R_1 + R_2$.

La constante de temps vaut $\tau' = (R_1 + R_2)C$ et nous avons alors :

$$u(t) = u_{\max} e^{-\frac{t}{\tau'}} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E e^{-\frac{t}{\tau'}}, \text{ avec } \tau' = (R_1 + R_2)C.$$



Pour plus de détails se reporter au § A. 2 du cours (décharge du condensateur).

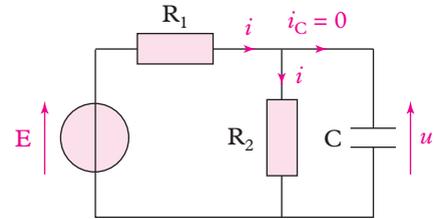
Exercice 3



En régime permanent, les tensions aux bornes des condensateurs sont constantes et les courants qui y circulent sont nuls (les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts).

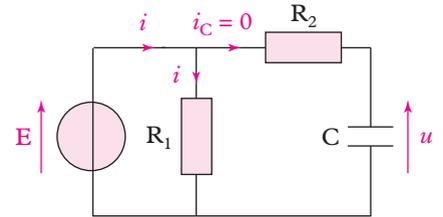
a) Tout le courant passant dans R_1 passe dans R_2 comme si le condensateur n'était pas présent. D'après le théorème de division de tension, on a :

$$u = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E.$$



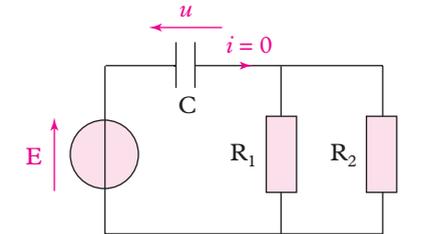
b) Le courant dans R_2 est nul. La tension u se retrouve entièrement aux bornes de R_1 . On a donc :

$$u = E.$$



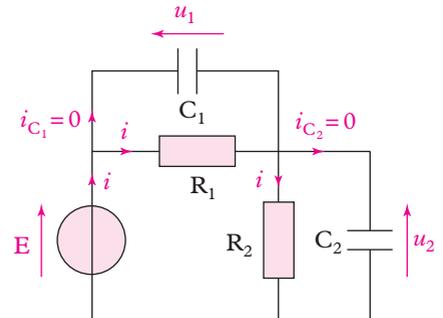
c) Aucun courant ne passe dans R_1 et R_2 . La tension aux bornes du dipôle équivalent est alors nulle et on a :

$$u = E.$$



d) Comme les courants dans C_1 et C_2 sont nuls, tout le courant passant dans R_1 passe dans R_2 comme si aucun condensateur n'était présent. D'après le théorème de division de tension, on a :

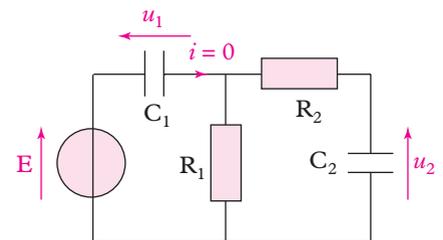
$$u_1 = \frac{ER_1}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}.$$



e) Comme la tension u_2 est constante, le courant dans R_2 est nul. La tension u_2 se retrouve alors aux bornes de R_1 .

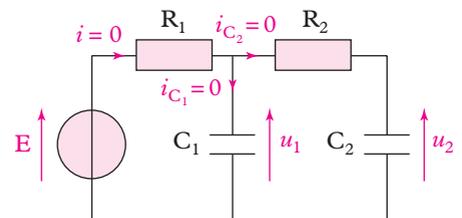
Comme la tension u_1 est constante, le courant dans R_1 est nul et on a :

$$u_2 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = E.$$



f) Les tensions u_1 et u_2 sont constantes. Aucun courant ne circule et on a alors :

$$u_1 = u_2 = E.$$



Exercice 4

Notons R la résistance du voltmètre et C la capacité du condensateur. La tension aux bornes du condensateur évolue suivant la loi $u(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, avec $\tau = RC$ (décharge d'un condensateur dans une résistance).

Nous en tirons :

$$\frac{t}{RC} = \ln\left(\frac{U_0}{u(t)}\right), \text{ d'où : } R = \frac{t}{C \ln\left(\frac{U_0}{u(t)}\right)}.$$



Cette relation est valable quel que soit l'instant t considéré.

$$\text{A.N. } R = \frac{200}{47 \cdot 10^{-6} \times \ln\left(\frac{4,5}{3}\right)} = 1,05 \cdot 10^7 \Omega = 10,5 \text{ M}\Omega.$$

Exercice 5

a) La loi des mailles donne l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i du courant :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E, \text{ soit : } \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}.$$

Lors de l'établissement du courant dans la bobine, l'intensité i suit la loi d'évolution :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

La tension aux bornes de la résistance R a pour expression :

$$u_R = Ri = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

On en déduit la valeur de l'inductance L :

$$\frac{Rt}{L} = -\ln\left(1 - \frac{u_R}{E}\right), \text{ d'où : } L = -\frac{Rt}{\ln\left(1 - \frac{u_R}{E}\right)} = 50 \text{ mH}.$$



Cette relation est valable quel que soit l'instant t considéré.

b) L'énergie magnétique stockée dans la bobine à l'instant t vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} Li(t)^2 = \frac{L}{2R^2} u_R(t)^2.$$



Comme l'énoncé indique la valeur de u_R pour $t = 2$ ms, il est plus rapide d'utiliser cette donnée que l'expression de i trouvée à la question précédente.

$$\text{A.N. } \mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \times 2,7^2}{2 \times 15^2} = 0,81 \text{ mJ}.$$

c)



On applique la méthode n° 3 au circuit étudié. Le calcul direct de l'énergie dissipée par effet Joule est plus long.

L'énergie fournie par le générateur entre l'instant $t = 0$ et l'instant t vaut :

$$\mathcal{E}_g = \int_0^t Ei(t) dt = \frac{E^2}{R} \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) dt = \frac{E^2}{R} \left[t + \frac{L}{R} e^{-\frac{Rt}{L}} \right]_0^t = \frac{E^2}{R} \left[t + \frac{L}{R} \left(e^{-\frac{Rt}{L}} - 1 \right) \right].$$

$$\text{A.N. } \mathcal{E}_g = 1,19 \text{ mJ}.$$

D'après la loi de conservation de l'énergie dans le circuit, l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance R entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = 2$ ms vaut donc :

$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_g - \mathcal{E}_{\text{mag}} = 0,38 \text{ mJ}.$$

Exercice 6

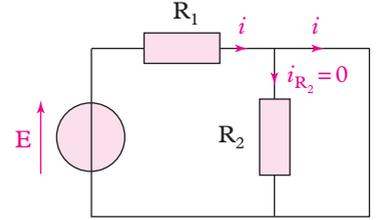


En régime permanent, le courant est constant, la tension aux bornes de chaque bobine est donc nulle (une bobine se comporte comme un fil).

a) La tension aux bornes de R_2 est nulle.

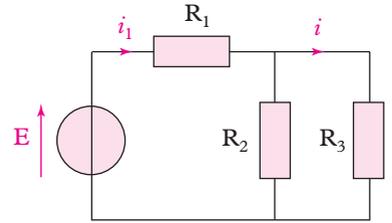
Tout le courant passe donc dans l'inductance :

$$i = \frac{E}{R_1}.$$



b) Comme la tension aux bornes de L est nulle, les résistances R_2 et R_3 sont en parallèle. D'après la loi des mailles, le courant principal i_1 vaut :

$$i_1 = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}.$$

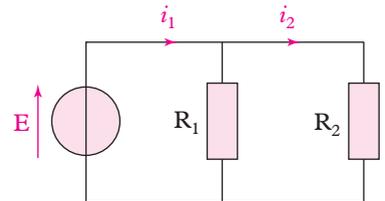


En appliquant le théorème de division de courant, on obtient :

$$i = \frac{R_2}{R_2 + R_3} i_1, \text{ soit : } i = \frac{R_2 E}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

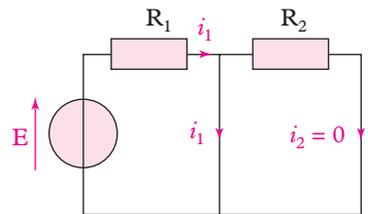
c) Les deux bobines se comportent comme des fils. On a donc simplement :

$$i_2 = \frac{E}{R_2} \text{ et } i_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} E.$$



d) Les deux bobines se comportent comme des fils. On a donc simplement :

$$i_2 = 0 \text{ et } i_1 = \frac{E}{R_1}.$$



Exercice 7

a) Dans le circuit LC, les caractéristiques du condensateur et de la bobine s'écrivent :

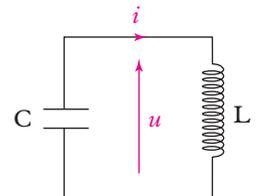
$$i = -C \frac{du}{dt} \text{ et } u = L \frac{di}{dt}.$$



Le condensateur C est étudié en convention générateur : il ne faut pas oublier le signe « - » dans l'expression de i .

L'équation différentielle du second ordre vérifiée par u et donc :

$$u = -LC \frac{d^2 u}{dt^2}, \text{ soit : } LC \frac{d^2 u}{dt^2} + u = 0.$$



b) • La solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Les conditions initiales à l'instant $t = 0$ sont :

$$\begin{cases} u(0) = U_0 \Rightarrow A = U_0 \\ \frac{du}{dt}(0) = -\frac{i(0)}{C} = 0 \Rightarrow B = 0. \end{cases}$$



L'équation différentielle étant du second ordre, il faut deux conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégration.

La loi d'évolution de la tension u est donc :

$$u(t) = U_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

• La fréquence des oscillations du circuit LC est :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 318 \text{ Hz}.$$

L'amplitude de la tension est : $U_0 = 6 \text{ V}$.



On a l'égalité : $f = \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{\omega}$.

c) La loi d'évolution de l'intensité i du courant est :

$$i(t) = -C \frac{du}{dt} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin(\omega_0 t).$$

L'amplitude de l'intensité est : $I_0 = U_0 \sqrt{\frac{L}{C}} = 20 \text{ mA}$.

d) • L'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur à l'instant t vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C u(t)^2 = \frac{1}{2} C U_0^2 \cos^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

• L'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine à l'instant t vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i(t)^2 = \frac{1}{2} C U_0^2 \sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

• L'énergie totale stockée dans le circuit à l'instant t vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_{\text{elec}} + \mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} C U_0^2.$$



L'énergie totale stockée dans le circuit est égale à l'énergie initiale du condensateur. En l'absence de résistance, cette énergie reste constante car il n'y a pas de perte par effet Joule.

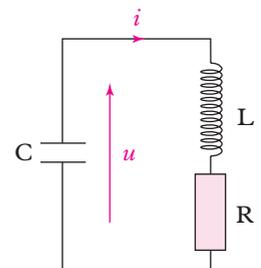
Exercice 8

a) Les notations utilisées sont indiquées sur le schéma ci-contre. La loi des mailles donne :

$$u = L \frac{di}{dt} + Ri, \text{ avec } i = -C \frac{du}{dt}.$$



Le condensateur C est étudié en convention générateur : il ne faut pas oublier le signe « - » dans l'expression de i .



L'équation différentielle du second ordre vérifiée par u est donc :

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = 0.$$

b)



On applique la méthode n° 1 au circuit étudié.

– Le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle est :

$$LCr^2 + RCr + 1 = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 0$ (régime critique). On en déduit :

$$\Delta = R^2 C^2 - 4LC = 0, \text{ soit } R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 100 \Omega.$$

Le polynôme caractéristique admet la racine double :

$$r = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{\sqrt{LC}} = -\omega_0.$$

– La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$u(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

On détermine les constantes A et B grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = U_0 \Rightarrow B = U_0 \\ \frac{du}{dt}(0) = -\frac{i(0)}{C} = 0 \Rightarrow A - \omega_0 B = 0, \text{ d'où : } A = U_0 \omega_0. \end{cases}$$

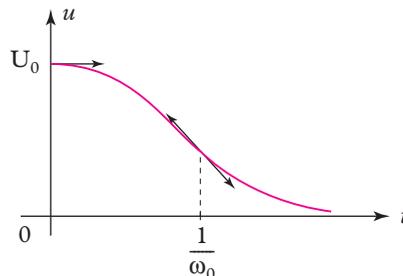


L'équation différentielle étant du second ordre, il faut deux conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégration.

– La loi d'évolution de la tension u est donc :

$$u(t) = U_0(\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

L'allure de la courbe $u(t)$ est :



c) • La loi d'évolution de l'intensité i est :

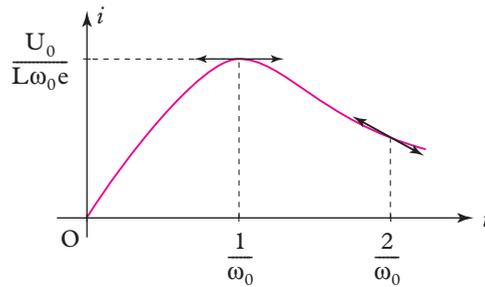
$$i = -C \frac{du}{dt} = CU_0 \omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}, \text{ soit : } i(t) = \frac{U_0}{L} t e^{-\omega_0 t}.$$

En régime critique, l'intensité i croît au début de la décharge du condensateur, puis décroît jusqu'à s'annuler. Le maximum de i est donné par :

$$\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{L} e^{-\omega_0 t} - \frac{U_0}{L} \omega_0 t e^{-\omega_0 t} = 0, \text{ soit : } t = \frac{1}{\omega_0}.$$



D'après la relation entre i et u , $\frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2u}{dt^2} = 0$. Le maximum de i est donc point d'inflexion pour u .



d) L'énergie électrostatique initialement emmagasinée dans le condensateur est entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance :

$$\mathcal{E}_J = \frac{1}{2} C U_0^2 = 180 \mu\text{J}.$$



L'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine est nulle au début et à la fin de la décharge du condensateur ($i(0) = 0$ et $i(\infty) = 0$).

Exercice 9

a)



Pour un raisonnement complet, se reporter à la question a) et au début de la question b) de l'exercice 8.

En régime pseudo-périodique, le discriminant Δ du polynôme caractéristique est négatif. Celui-ci admet donc deux racines complexes conjuguées :

$$r = \frac{-R'C \pm j\sqrt{4LC - R'^2C^2}}{2LC} = -\frac{R'}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R'^2}{4L^2}}.$$

La pseudo-pulsation ω du circuit vaut alors :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R'^2}{4L^2}} = \frac{2\pi}{T}, \text{ d'où : } R' = 2L\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{4\pi^2}{T^2}}.$$

A.N. $R' = 77,8 \Omega$.



Les racines du polynôme caractéristique s'écrivent : $r = \lambda \pm j\omega$, où λ est le facteur d'amortissement du circuit et ω sa pseudo-pulsation.

b) La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) e^{-\frac{R'}{2L}t}.$$

On détermine les constantes A et B grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = U_0 \Rightarrow A = U_0 \\ \frac{du}{dt}(0) = -\frac{i(0)}{C} = 0 \Rightarrow \omega B - \frac{R'}{2L}A = 0, \text{ d'où : } B = \frac{R'U_0}{2L\omega}. \end{cases}$$

Numériquement : $A = 6$; $B = 7,43$; $\omega = 1\,257 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

La loi numérique d'évolution de la tension u est donc :

$$u(t) = 6e^{-1,556t}(6 \cos(1\,257t) + 7,43 \sin(1\,257t)), \text{ avec } t \text{ en s et } u \text{ en V.}$$

Exercice 10



Le montage est identique à celui des exercices 8 et 9. Pour un raisonnement complet, se reporter à la question a) et au début de la question b) de l'exercice 8.

- En régime apériodique, le discriminant Δ du polynôme caractéristique est positif. Celui-ci admet donc deux racines réelles :

$$r_1 = -\frac{R''}{2L} + \sqrt{\frac{R''^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{R''}{2L} - \sqrt{\frac{R''^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$



Les racines du polynôme caractéristique s'écrivent : $r = -\lambda \pm \omega$, où λ est le facteur d'amortissement du circuit et $\omega = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$.

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}.$$

On détermine les constantes A et B grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = U_0 \Rightarrow A + B = U_0 \\ \frac{du}{dt}(0) = -\frac{i(0)}{C} = 0 \Rightarrow Ar_1 + Br_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{r_2}{r_2 - r_1} U_0 \\ B = -\frac{r_1}{r_2 - r_1} U_0 \end{cases}$$

La loi d'évolution de la tension u est :

$$u(t) = \frac{U_0}{r_2 - r_1} (r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}).$$

- La tension aux bornes de la résistance R'' a pour expression :

$$u_{R''} = R'' i = -R'' C \frac{du}{dt} = \frac{R'' C U_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} (e^{r_2 t} - e^{r_1 t}).$$

La tension est maximale lorsque la dérivée de $u_{R''}$ s'annule, c'est-à-dire à l'instant t_0 tel que :

$$r_2 e^{r_2 t_0} - r_1 e^{r_1 t_0} = 0.$$

En posant : $r_1 = -\lambda + \omega$ et $r_2 = -\lambda - \omega$, l'équation à résoudre devient :

$$-(\lambda + \omega)e^{-\omega t_0} + (\lambda - \omega)e^{\omega t_0} = 0,$$

d'où en introduisant les fonctions hyperboliques :

$$2\lambda \operatorname{sh}(\omega t_0) - 2\omega \operatorname{ch}(\omega t_0) = 0, \text{ soit : } \operatorname{th}(\omega t_0) = \frac{\omega}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}.$$



Les fonctions hyperboliques sont définies par :

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

La résolution numérique de cette équation en ω donne : $\omega = 4\,027 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



Graphiquement, on détermine l'abscisse du point d'intersection des courbes (avec $X = 10^{-3} \omega$) :

$$Y_1 = \operatorname{th}(0,36X) \quad \text{et} \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{X^2}}}.$$

La résistance R'' s'obtient alors par la relation :

$$\lambda = \frac{R''}{2L} = \sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}, \text{ soit : } R'' = 2L\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2} = 225 \, \Omega.$$

Exercices de niveau 2

Exercice 11

1) a) Quand l'interrupteur est fermé, il circule le courant : $i = C \frac{du}{dt}$. La tension aux bornes de la résistance vaut : $u_R = Ri = RC \frac{du}{dt}$. La loi des mailles nous donne alors :

$$\mathbf{E} = \mathbf{u} + \mathbf{RC} \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \text{ avec } \tau = \mathbf{RC}.$$

b) – La solution particulière constante de l'équation différentielle est : $u_2 = E$.

– La solution de l'équation homogène est : $u_1 = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

– La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$u = u_1 + u_2 = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \mathbf{RC}.$$

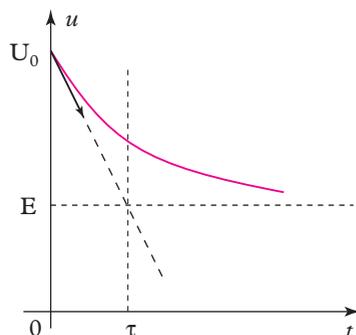
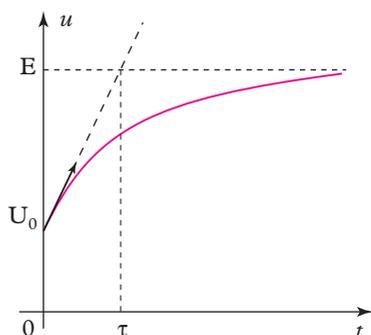
– La tension aux bornes du condensateur est continue, d'où :

$$u(t=0) = U_0 = E + A, \text{ soit : } A = U_0 - E.$$

La loi d'évolution de la tension u s'écrit donc :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{E} + (\mathbf{U}_0 - \mathbf{E})e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \mathbf{RC}.$$

c) L'allure de la courbe est la suivante (cas $U_0 < E$ et cas $U_0 > E$) :



Si la fém E du générateur est supérieure à la tension initiale U_0 du condensateur, celui-ci se charge ; si la fém E du générateur est inférieure à la tension initiale U_0 du condensateur, celui-ci se décharge.

d) L'intensité $i(t)$ du courant est :

$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{C} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\mathbf{C} \frac{\mathbf{U}_0 - \mathbf{E}}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\mathbf{E} - \mathbf{U}_0}{\mathbf{R}} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

e) L'énergie dissipée par effet Joule au cours de la charge vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_J &= \int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \mathcal{P}_J dt = \int_0^{+\infty} Ri(t)^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{(\mathbf{E} - \mathbf{U}_0)^2}{\mathbf{R}} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{\tau}{2} \frac{(\mathbf{E} - \mathbf{U}_0)^2}{\mathbf{R}} \left[e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{C} (\mathbf{E} - \mathbf{U}_0)^2. \end{aligned}$$



Comme la loi d'évolution de l'intensité est exponentielle, le calcul direct est assez simple.

f) • La loi des mailles donne pour $t > 0$: $E = Ri + u$.



On applique la méthode n° 3 au circuit étudié.

On multiplie les deux membres de l'égalité par $i = C \frac{du}{dt}$:

$$Ei = CE \frac{du}{dt} = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right).$$

↑
puissance
fournie par
le générateur
↑
puissance Joule
dissipée dans R
↑
variation de l'énergie du
condensateur au cours
du temps

• On intègre chaque terme de l'égalité précédente sur la durée de la charge.

– L'énergie fournie par le générateur vaut :

$$\mathcal{E}_g = \int_0^{+\infty} E i dt = \int_{U_0}^E CE du = CE(E - U_0).$$

– La variation de l'énergie électrostatique contenue dans le condensateur vaut :

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{elec}} = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} CU^2 \right) dt = \frac{1}{2} CE^2 - \frac{1}{2} CU_0^2.$$

– L'énergie dissipée par effet Joule vaut :

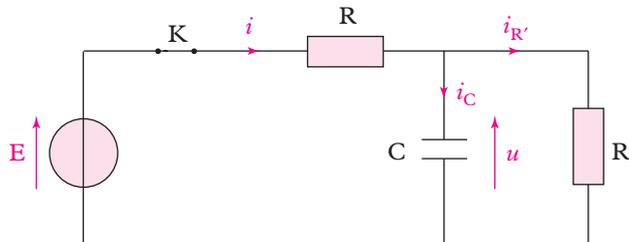
$$\mathcal{E}_J = \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_J dt.$$

• La conservation de l'énergie dans le circuit donne :

$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_g - \Delta \mathcal{E}_{\text{elec}} = CE(E - U_0) - \left[\frac{1}{2} CE^2 - \frac{1}{2} CU_0^2 \right] = \frac{1}{2} C(E - U_0)^2.$$

On retrouve bien le résultat précédent.

2) a) On paramètre, pour $t > 0$, le circuit comme le précise le schéma ci-dessous :



On a : $i_C = C \frac{du}{dt}$ et $i_{R'} = \frac{u}{R'}$, d'où d'après la loi des nœuds :

$$i = i_C + i_{R'} = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R'}.$$

La loi des mailles donne alors l'équation différentielle :

$$E = Ri + u, \text{ d'où : } E = RC \frac{du}{dt} + \left(\frac{R}{R'} + 1 \right) u.$$

b) La constante de temps du circuit est : $\tau' = \frac{RR'}{R + R'} C$.



Pour la mettre en évidence, il faut récrire l'équation différentielle sous la forme canonique :

$$\frac{RR'}{R + R'} C \frac{du}{dt} + u = \frac{R'}{R + R'} E.$$

La solution particulière constante de l'équation est :

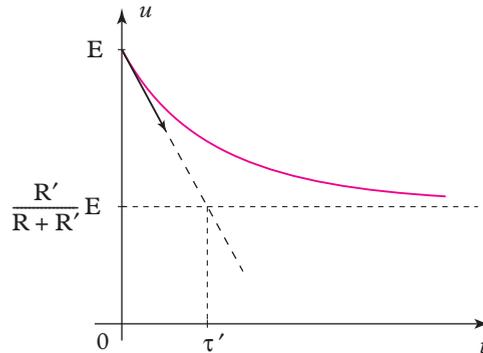
$$u_2 = \frac{R'}{R+R'} E, \text{ d'où : } u(t) = \frac{R'}{R+R'} E + A' e^{-\frac{t}{\tau'}}.$$

À l'instant $t = 0$, $u(0) = E$, soit : $A' = \frac{R}{R+R'} E$.

La loi d'évolution de la tension u s'écrit donc :

$$u(t) = \frac{E}{R+R'} \left[R' + R e^{-\frac{t}{\tau'}} \right], \text{ avec } \tau' = \frac{RR'}{R+R'} C.$$

L'allure de la courbe est la suivante :



c) Comme à la question 1) f), on a toujours l'équation :

$$Ei = Ri^2 + ui, \text{ avec } ui = ui_C + ui_{R'} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right) + R' i_{R'}^2.$$



La tension aux bornes de la résistance R' vaut en effet : $u = R' i_{R'}$, d'où : $u i_{R'} = R' i_{R'}^2$.

On obtient donc l'égalité :

$$Ei = Ri^2 + R' i_{R'}^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right).$$

↑ puissance fournie par le générateur
 ↑ puissance Joule dissipée dans R
 ↑ puissance Joule dissipée dans R'
 ↑ variation de l'énergie du condensateur au cours du temps

La puissance fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans les résistances R et R' et sert à faire varier l'énergie emmagasinée dans le condensateur.



On pourrait calculer tous les termes intervenant dans ce bilan et les intégrer pour obtenir les énergies correspondantes, car on connaît u et i (donc $i_{R'}$).

Exercice 12

a) L'interrupteur K' étant ouvert, le circuit est un circuit RL alimenté par un générateur de fém E . La loi d'évolution de l'intensité i lors de l'établissement du courant dans la bobine est alors :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

Lorsque le régime permanent est atteint, le courant dans la bobine est constant et la tension à ses bornes est nulle. On a donc :

$$I = \frac{E}{R}.$$

b) Quand l'interrupteur K' est fermé, la résistance équivalente branchée en série avec l'inductance L est :

$$R_{\text{eq}} = \frac{RR'}{R+R'}, \text{ d'où : } \frac{L}{R_{\text{eq}}} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R_{\text{eq}}}.$$

La solution générale de cette équation différentielle s'écrit :

$$i(t) = \frac{E}{R_{\text{eq}}} + Ae^{-\frac{t}{\tau'}}, \text{ avec } \tau' = \frac{L}{R_{\text{eq}}}.$$

Le courant dans la bobine est continu, donc à $t = 0$, on a :

$$i(0) = I = \frac{E}{R} = \frac{E}{R_{\text{eq}}} + A, \text{ d'où : } A = \frac{E}{R} - \frac{E}{R_{\text{eq}}} = -\frac{E}{R'}.$$

La loi d'évolution de l'intensité i est alors :

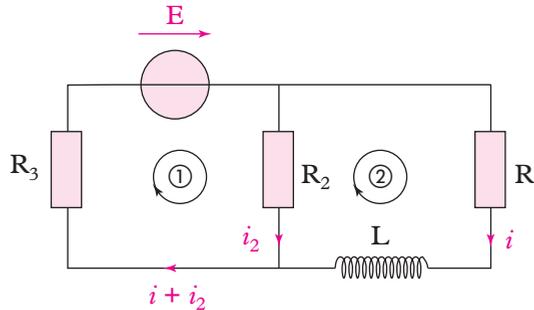
$$i(t) = E \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) - \frac{E}{R'} e^{-\frac{t}{\tau'}} = \frac{E(R+R')}{RR'} - \frac{E}{R'} e^{-\frac{t}{\tau'}}, \text{ avec } \tau' = \frac{L(R+R')}{RR'}.$$

En régime permanent, l'intensité devient :

$$I' = E \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) = \frac{E(R+R')}{RR'}.$$

Exercice 13

a) On note i_2 le courant dans la résistance R_2 . D'après la loi des nœuds, la résistance R_3 est donc traversée par le courant $i + i_2$.



La loi des mailles donne le système suivant :

$$\begin{cases} \text{maille 1 : } E = R_2 i_2 + R_3 (i + i_2) \\ \text{maille 2 : } R_2 i_2 = R_1 i + L \frac{di}{dt} \end{cases}$$

En reportant i_2 de la deuxième équation dans la première, on obtient l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i :

$$\begin{aligned} E &= R_3 i + \frac{(R_2 + R_3)}{R_2} \left(R_1 i + L \frac{di}{dt} \right) \\ E &= \left(R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2} \right) i + \frac{(R_2 + R_3)L}{R_2} \frac{di}{dt} \\ \frac{(R_2 + R_3)L}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \frac{di}{dt} + i &= \frac{R_2 E}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \end{aligned}$$

La constante de temps est $\tau = \frac{(R_2 + R_3)L}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$ et la solution particulière constante (régime permanent) vaut :

$$I = \frac{R_2 E}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Compte tenu des conditions initiales ($i(0) = 0$), on obtient donc :

$$i(t) = I \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

b) • Quand on ouvre l'interrupteur K, l'équation différentielle vérifiée par i devient :

$$\frac{L}{R_1 + R_2} \frac{di}{dt} + i = 0.$$

Compte tenu des conditions initiales ($i(0) = I$), on obtient donc :

$$i = I e^{-\frac{t}{\tau'}}, \text{ avec } \tau' = \frac{L}{R_1 + R_2}.$$

• L'énergie magnétique initialement emmagasinée dans la bobine est : $\frac{1}{2} LI^2$.

Le circuit ne comporte pas de générateur. Au cours de l'arrêt du courant, l'énergie magnétique de la bobine est entièrement dissipée par effet Joule dans les résistances R_1 et R_2 .

$$\mathcal{E}_J = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{R_2 E}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \right)^2.$$



Un raisonnement physique simple permet de répondre à la question posée sans aucun calcul.

Exercice 14

a) La diode joue le rôle de court-circuit. La loi des mailles donne l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{L di}{R dt} + i = 0.$$

Compte tenu des conditions initiales ($i(0) = I = \frac{E}{R}$), on obtient donc :

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$



Si K est ouvert, on a : $i' = i > 0$. La diode est bien passante.

b) Quand on ouvre K, le courant $i' = i > 0$ circule dans la diode et la tension à ses bornes vaut $u' = V_S$. La loi des mailles donne l'équation différentielle vérifiée par i :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = -\frac{V_S}{R}, \text{ tant que } i \geq 0.$$

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$i = -\frac{V_S}{R} + A e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

Le courant dans la bobine est continu, donc à $t = 0$, on a :

$$i(0) = I = \frac{E}{R} = -\frac{V_S}{R} + A, \text{ d'où : } A = \frac{E + V_S}{R}.$$

La loi d'évolution de l'intensité i est alors :

$$i(t) = -\frac{V_S}{R} + \frac{E + V_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ tant que } i \geq 0.$$

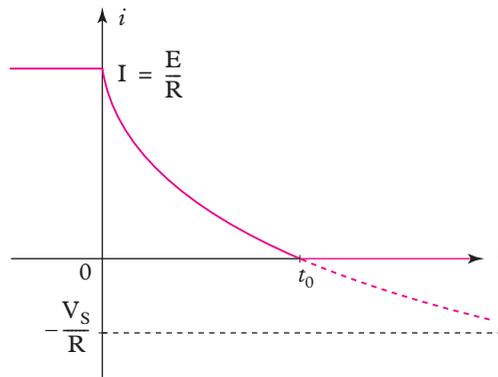


Le courant dans le circuit ne peut pas prendre de valeurs négatives. Il s'annule quand toute l'énergie magnétique initialement emmagasinée dans la bobine a été dissipée dans le circuit.

L'intensité i du courant s'annule à l'instant t_0 tel que :

$$-V_S + (E + V_S)e^{-\frac{t_0}{\tau}} = 0, \text{ d'où : } t_0 = -\tau \ln\left(\frac{V_S}{E + V_S}\right) = \tau \ln\left(1 + \frac{E}{V_S}\right).$$

Pour $t > t_0$, le courant reste nul. On peut représenter l'évolution de l'intensité i au cours du temps :



L'énergie magnétique de la bobine s'est dissipée par effet Joule dans la résistance R , mais aussi dans la diode qui reçoit une puissance positive (quand $i \geq 0$, on a : $v' i' = V_S i \geq 0$).

Exercice 15

a) • Dans le circuit étudié, la loi des nœuds donne :

$$i_1 = i + C \frac{du}{dt} \quad (1)$$

Le circuit comporte deux mailles indépendantes, d'où :

$$\begin{cases} \text{maille de gauche : } E = R i_1 + L \frac{di}{dt} & (2) \\ \text{maille de droite : } L \frac{di}{dt} = RC \frac{du}{dt} + u & (3) \end{cases}$$



On cherche à combiner les égalités (1), (2) et (3) pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par u .

On reporte les égalités (1) et (3) dans l'égalité (2) :

$$E = \left(Ri + RC \frac{du}{dt}\right) + \left(RC \frac{du}{dt} + u\right) = Ri + 2RC \frac{du}{dt} + u \quad (4)$$

On dérive l'égalité précédente et on utilise (3) :

$$0 = R \frac{di}{dt} + 2RC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = \frac{R}{L} \left(RC \frac{du}{dt} + u\right) + 2RC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt}.$$

L'équation différentielle vérifiée par u s'écrit donc :

$$2\tau^2 \frac{d^2u}{dt^2} + 2\tau \frac{du}{dt} + u = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{u}{2\tau^2} = 0, \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R} = RC.$$

 On applique la méthode n° 1 au circuit étudié.

• Le polynôme caractéristique est :

$$r^2 + \frac{1}{\tau}r + \frac{1}{2\tau^2} = 0, \quad \text{avec } \Delta = -\frac{1}{\tau^2} < 0.$$

Le polynôme admet donc deux racines complexes conjuguées (régime pseudo-périodique) :

$$r = -\frac{1}{2\tau} \pm j\frac{1}{2\tau}.$$

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[A \cos\left(\frac{t}{2\tau}\right) + B \sin\left(\frac{t}{2\tau}\right) \right].$$

À l'instant $t = 0$, les conditions initiales sont : $u(0) = 0$ et $i(0) = 0$. D'après la loi des mailles :

$$i_1(0) = \frac{E}{2R}, \quad \text{d'où} : \frac{du}{dt}(0) = \frac{i_1(0)}{C} = \frac{E}{2RC} = \frac{E}{2\tau}.$$

 À l'instant $t = 0$, tout le courant débité par le générateur traverse la branche contenant le condensateur.

On peut ainsi déterminer les constantes A et B :

$$\begin{cases} u(0) = 0 \Rightarrow A = 0. \\ \frac{du}{dt}(0) = \frac{E}{2\tau} \Rightarrow \frac{B}{2\tau} = \frac{E}{2\tau}, \quad \text{d'où} : B = E. \end{cases}$$

La loi d'évolution de la tension u s'écrit donc :

$$u(t) = E e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin\left(\frac{t}{2\tau}\right).$$

La loi d'évolution de l'intensité i se déduit de l'égalité (4) :

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{2\tau}{R} \frac{du}{dt} - \frac{u}{R} = \frac{E}{R} \left[1 - \cos\left(\frac{t}{2\tau}\right) e^{-\frac{t}{2\tau}} \right].$$

En régime permanent, on a donc :

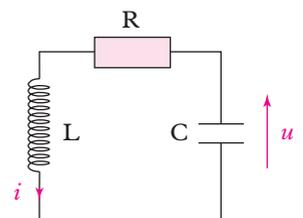
$$u = 0 \quad \text{et} \quad I = \frac{E}{R}.$$

 En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil et court-circuite la branche contenant le condensateur. Tout le courant débité par le générateur traverse donc la bobine.

b) À l'ouverture du circuit, on se ramène à l'étude d'un circuit RLC série avec $i = -C \frac{du}{dt}$ (le condensateur est en convention générateur).

L'équation différentielle du second ordre vérifiée par la tension u est donc :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau^2} = 0.$$



 On a : $\tau = RC = \frac{L}{R}$, d'où : $LC = \frac{L}{R} \times RC = \tau^2$.

Le polynôme caractéristique s'écrit alors :

$$r^2 + \frac{r}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} = 0, \text{ avec } \Delta = -\frac{3}{\tau^2} < 0.$$

Le polynôme admet donc deux racines complexes conjuguées (régime pseudo-périodique) :

$$r = -\frac{1}{2\tau} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2\tau}.$$

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2\tau}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2\tau}t\right) \right].$$

On détermine les constantes A et B grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = 0 \Rightarrow A = 0. \\ \frac{du}{dt}(0) = -\frac{i(0)}{C} = -\frac{E}{\tau} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}B}{2\tau} = -\frac{E}{\tau}, \text{ d'où : } B = -\frac{2E}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

La loi d'évolution de la tension u s'écrit donc :

$$u(t) = -\frac{2E}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2\tau}t\right).$$

On en déduit la loi d'évolution de l'intensité i :

$$i(t) = -C \frac{du}{dt} = \frac{E}{R\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[-\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2\tau}t\right) + \sqrt{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2\tau}t\right) \right].$$

Exercice 16

a) • Le circuit RL contenant la bobine est soumis à l'échelon de tension E. Lors de l'établissement du courant dans la bobine ($i_1(0) = 0$), on a donc :

$$i_1(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

• Le circuit RC contenant le condensateur est soumis à l'échelon de tension E. Lors de la charge du condensateur ($u(0) = 0$), on a donc :

$$u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = RC.$$

On en déduit l'expression de i_2 :

$$i_2(t) = C \frac{du_2}{dt} = \frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

• On obtient alors l'intensité totale i d'après la loi des nœuds :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{E}{R}.$$

b) Quand on ouvre K, le condensateur C se décharge dans la résistance $2R$ et la bobine L. L'équation vérifiée par u est alors :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + 2RC \frac{du}{dt} + u = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau^2} = 0.$$

Le polynôme caractéristique est :

$$r^2 + \frac{2}{\tau}r + \frac{1}{\tau^2} = 0, \quad \text{avec } \Delta = 0 \text{ et } r = -\frac{1}{\tau}.$$

En régime critique, la solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

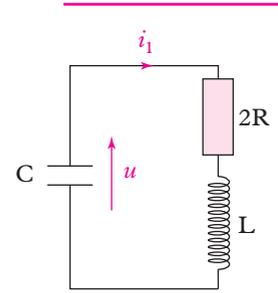
$$u(t) = (At + B)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

On détermine les constantes A et B grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = E \Rightarrow B = E \\ \frac{du}{dt}(0) = -\frac{i_1(0)}{C} = -\frac{E}{RC} \Rightarrow A - \frac{B}{\tau} = -\frac{E}{RC}, \text{ d'où : } A = 0. \end{cases}$$

La loi d'évolution de la tension u s'écrit donc :

$$u(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}.$$



Exercice 17

a) • La loi des nœuds donne la relation :

$$i = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} \quad (1)$$

La loi des mailles donne la relation :

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + u \quad (2)$$

En reportant (1) dans (2), on a :

$$E = \left(RC \frac{du}{dt} + u \right) + \frac{L}{R} \left(RC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} \right) + u = \tau^2 \frac{d^2u}{dt^2} + 2\tau \frac{du}{dt} + 2u,$$

$$\text{soit : } \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{2}{\tau^2} u = \frac{E}{\tau^2}.$$



On applique la méthode n° 1 au circuit étudié.

• La solution particulière constante est : $u_2(t) = \frac{E}{2}$.

L'équation sans second membre s'écrit :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{2}{\tau^2} u = 0,$$

de polynôme caractéristique : $r^2 + \frac{2}{\tau}r + \frac{2}{\tau^2} = 0$, avec $\Delta = -\frac{4}{\tau^2} < 0$.

Le polynôme admet deux racines complexes conjuguées :

$$r = -\frac{1}{\tau} \pm j \frac{1}{\tau}.$$

En régime pseudo-périodique, la solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = \frac{E}{2} + e^{-\frac{t}{\tau}} \left[A \cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + B \sin\left(\frac{t}{\tau}\right) \right].$$

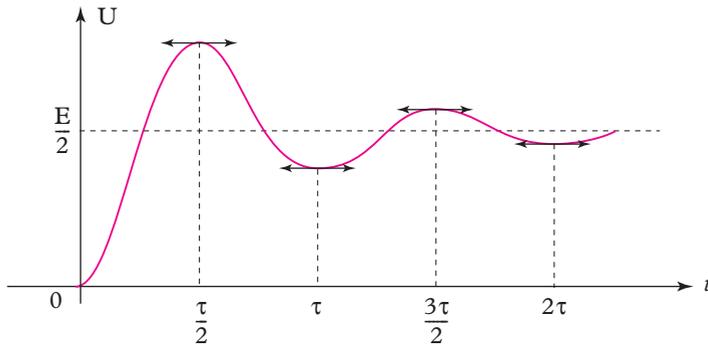
On détermine les constantes A et B grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = 0 = A + \frac{E}{2} = 0, & \text{doù : } A = -\frac{E}{2} \\ \frac{du}{dt}(0) = \frac{1}{C} \left(i(0) - \frac{u(0)}{R} \right) = 0 \Rightarrow \frac{B}{\tau} - \frac{A}{\tau} = 0, & \text{doù : } B = A = -\frac{E}{2}. \end{cases}$$

La loi d'évolution de la tension u s'écrit donc :

$$u(t) = \frac{E}{2} \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left[\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + \sin\left(\frac{t}{\tau}\right) \right] \right\}.$$

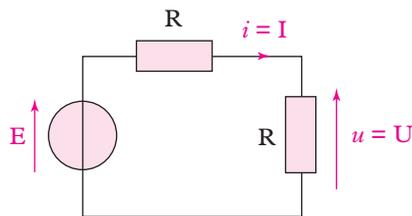
L'allure de u est représentée ci-dessous :



b) En régime permanent, la tension u aux bornes du condensateur et l'intensité i dans la bobine sont constantes :

$$u = U \quad \text{et} \quad i = I.$$

Le condensateur se comporte alors comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. Le montage est équivalent au schéma simple ci-dessous :



La loi des mailles donne immédiatement :

$$I = \frac{E}{2R}, \quad \text{d'où : } U = \frac{E}{2}.$$



On retrouve évidemment ces résultats en utilisant les lois d'évolution de la tension $u(t)$ et de l'intensité $i(t)$.

Exercice 18

• La loi des nœuds donne :

$$i = C \frac{dv}{dt} + C \frac{du}{dt} \quad (1)$$

Le circuit comporte deux mailles indépendantes. On en déduit le système ci-dessous :

$$\begin{cases} E = Ri + v & (2) \\ v = RC \frac{du}{dt} + u & (3) \end{cases}$$

On reporte les égalités (1) et (3) dans l'égalité (2) :

$$E = RC \left(\frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt} \right) + \left(RC \frac{du}{dt} + u \right).$$

On reporte l'égalité (3) dans l'expression précédente :

$$E = R^2 C^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 3RC \frac{du}{dt} + u \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{3}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau^2} = \frac{E}{\tau^2}.$$



On applique la méthode n° 1 au circuit étudié.

• La solution particulière constante est : $u_2(t) = E$.

Le polynôme caractéristique associé à l'équation sans second membre s'écrit :

$$r^2 + \frac{3}{\tau} r + \frac{1}{\tau^2} = 0, \quad \text{avec} \quad \Delta = \frac{5}{\tau^2} > 0.$$

Le polynôme admet deux racines réelles :

$$r_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2\tau} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2\tau}.$$

En régime apériodique, la solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = E + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}.$$

On détermine les constantes A et B grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = 0 \Rightarrow E + A + B = 0. \\ \frac{du}{dt}(0) = \frac{1}{RC}(v(0) - u(0)) = 0 \Rightarrow Ar_1 + Br_2 = 0. \end{cases}$$

On en déduit donc :

$$\begin{cases} A = \frac{r_2}{r_1 - r_2} E = -\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} E \\ B = -\frac{r_1}{r_1 - r_2} E = \frac{3\sqrt{5} - 5}{10} E. \end{cases}$$

La loi d'évolution de la tension u s'écrit alors :

$$u(t) = E \left[1 - \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \exp\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2\tau} t\right) + \frac{3\sqrt{5} - 5}{10} \exp\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2\tau} t\right) \right].$$

• L'équation différentielle vérifiée par u est :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{u}{R^2 C^2} = \frac{E}{R^2 C^2}.$$

Par identification avec l'expression en variables réduites, on obtient :

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{RC} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{R^2 C^2}, \quad \text{soit} : \quad Q = \frac{1}{3}.$$



En variables réduites, on a : $\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E$.

Exercices de niveau 3

Exercice 19

a) • Si $t \in]nT ; nT + \frac{T}{2}[$, on a : $e(t) = E$, d'où : $RC \frac{du}{dt} + u = E$.

• Si $t \in]nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T[$, on a : $e(t) = 0$, d'où : $RC \frac{du}{dt} + u = 0$.

b) Pour $t \in]0 ; \frac{T}{2}[$, on est dans le cas de la charge du condensateur d'un circuit RC, initialement déchargé, soumis à l'échelon de tension E. On a donc :

$$u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ avec } \tau = RC.$$

On en déduit : $u_0 = u\left(\frac{T}{2}\right) = E \left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}} \right)$.

c) Pour $t \in]\frac{T}{2} ; T[$, on est dans le cas de la décharge d'un condensateur chargé sous la tension u_0 à l'instant $\frac{T}{2}$. On a donc :

$$u(t) = u_0 e^{-\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{T}{2}\right)} = E \left(e^{\frac{T}{2\tau}} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

 Dans l'expression de u , on introduit un décalage temporel de $\frac{T}{2}$ car la décharge commence à $t = \frac{T}{2}$.

On en déduit : $v_1 = u(T) = E \left(e^{-\frac{T}{2\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)$.

d) On découpe l'intervalle $]nT ; (n+1)T[$ en deux intervalles :

$$]nT ; nT + \frac{T}{2}[\text{ et }]nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T[.$$

• Pour $t \in]nT ; nT + \frac{T}{2}[$, on est dans le cas de la charge du condensateur d'un circuit RC, initialement chargé sous la tension $u(nT) = v_n$, soumis à l'échelon de tension E.

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors : $u(t) = E + A_n e^{-\frac{1}{\tau}(t-nT)}$.

 Le condensateur n'étant pas initialement déchargé, on n'a pas $A_n = -E$. En outre, on tient compte du décalage temporel de nT .

À l'instant $t = nT$, on a : $u(nT) = v_n = E + A_n$, soit : $A_n = v_n - E$.

On en déduit donc :

$$u(t) = E + (v_n - E) e^{-\frac{1}{\tau}(t-nT)}.$$

À l'instant $t = nT + \frac{T}{2}$, on obtient :

$$u\left(nT + \frac{T}{2}\right) = u_n = E + (v_n - E) e^{-\frac{T}{2\tau}}.$$

• Pour $t \in \left] nT + \frac{T}{2}; (n+1)T \right[$, on est dans le cas de la décharge d'un condensateur initialement chargé sous la tension u_n . On a donc :

$$u(t) = u_n e^{-\frac{1}{\tau} \left[t - \left(nT + \frac{T}{2} \right) \right]}.$$

À l'instant $t = (n+1)T$, on obtient :

$$u[(n+1)T] = v_{n+1} = u_n e^{-\frac{T}{2\tau}}.$$

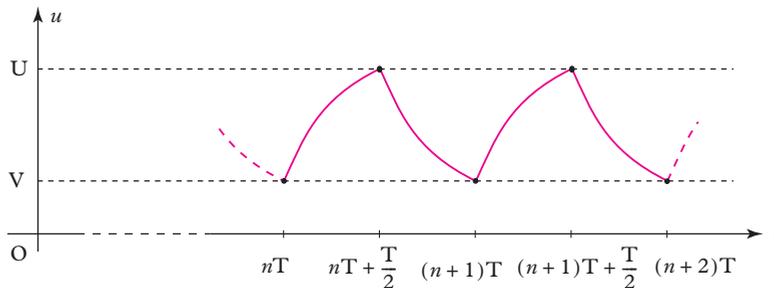
e) Les limites U et V des suites (u_n) et (v_n) vérifient les équations :

$$\begin{cases} U = E + (V - E)e^{-\frac{T}{2\tau}} \\ V = Ue^{-\frac{T}{2\tau}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) = E(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}) \\ V = Ue^{-\frac{T}{2\tau}} \end{cases}$$

On en déduit donc :

$$U = E \frac{1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \quad \text{et} \quad V = E \frac{e^{-\frac{T}{2\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}.$$

En régime oscillatoire permanent, l'allure de $u(t)$ est représentée ci-dessous :



En régime oscillatoire *permanent*, on peut considérer le temps écoulé suffisamment grand pour que les limites U et V soient atteintes.

Exercice 20

a) • La lampe étant éteinte, le circuit est un circuit RC alimenté par un générateur de fém E. Comme le condensateur est initialement déchargé, on a :

$$u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

- La lampe s'allume si $u > V_a$. Il suffit donc que : $E > V_a$.
- L'instant d'allumage t_a vérifie :

$$V_a = E \left(1 - e^{-\frac{t_a}{\tau}} \right), \quad \text{soit} : \quad t_a = -\ln \left(1 - \frac{V_a}{E} \right).$$

b) • La lampe allumée est équivalente à une résistance r .

Le courant i traversant la résistance R est la somme du courant traversant le condensateur et du courant traversant la lampe. La loi des mailles s'écrit :

$$E = Ri + u = R \left(C \frac{du}{dt} + \frac{u}{r} \right) + u, \quad \text{d'où} : \quad \frac{Rr}{R+r} C \frac{du}{dt} + u = \frac{r}{r+R} E.$$

La constante de temps du circuit est $\tau' = \frac{Rr}{R+r}C$ et la solution particulière constante $u_2 = \frac{r}{r+R}E$.

La solution générale de l'équation différentielle est :

$$u = \frac{r}{r+R}E + Ae^{-\frac{(t-t_a)}{\tau'}}.$$



On tient compte dans l'expression de u du décalage temporel t_a .

À l'instant $t = t_a$, on a :

$$u(t_a) = V_a, \quad \text{soit : } A = V_a - \frac{r}{r+R}E.$$

On en déduit donc :

$$u(t) = \frac{r}{r+R}E + \left(V_a - \frac{r}{r+R}E\right)e^{-\frac{(t-t_a)}{\tau'}}, \quad \text{avec } \tau' = \frac{Rr}{R+r}C.$$

• La lampe s'éteint si $u < V_e$. Il suffit donc que :

$$\frac{r}{R+r}E < V_e.$$

c) On suppose les deux conditions précédentes réalisées. On peut donc distinguer différentes phases.

• Si $t \in]0 ; t_a[$, alors le condensateur se charge. Il existe un instant t_e tel que $u(t_e) = V_e$:

$$t_e = -RC \ln\left(1 - \frac{V_e}{E}\right).$$

• Si $t \in]t_a ; t'_e[$, alors le condensateur se décharge et la lampe s'éteint quand $t = t'_e$ tel que :

$$u(t'_e) = V_e = \frac{r}{r+R}E + \left(V_a - \frac{r}{r+R}E\right)e^{-\frac{(t'_e-t_a)}{\tau'}}, \quad \text{soit : } t'_e = -\tau' \ln\left(\frac{V_e - \frac{r}{r+R}E}{V_a - \frac{r}{r+R}E}\right) - t_a.$$



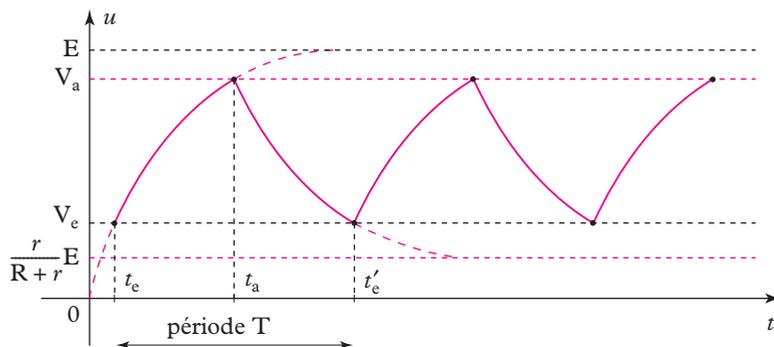
Les calculs sont longs, mais pas très difficiles.

• Si $t \in]t'_e ; t'_e + t_a[$, alors le condensateur se charge à nouveau dans les mêmes conditions que précédemment, etc. On peut donc définir la période T du phénomène par :

$$T = t'_e - t_e = \tau' \ln\left(\frac{V_a - \frac{r}{r+R}E}{V_e - \frac{r}{r+R}E}\right) + \tau \ln\left(\frac{E - V_e}{E - V_a}\right).$$



On remplace t'_e , t_e et t_a par leurs expressions et on utilise les propriétés des logarithmes.



Exercice 21

1) • L'équation différentielle d'établissement du courant dans la bobine est :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

Compte tenu des conditions initiales ($i(0) = 0$), on obtient donc :

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

• La valeur limite de i est $\frac{E}{R}$. Elle est atteinte à 5 % près à l'instant t tel que :

$$0,95 \frac{E}{R} = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ soit : } t = -\tau \ln(0,05) \approx 3\tau.$$



Le régime permanent est établi à 5 % près au bout de 3τ .

2) a) • Si $t \in \left] nT ; nT + \frac{T}{2} \right[$, on a : $e(t) = E$, d'où : $\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$.

• Si $t \in \left] nT + \frac{T}{2} ; nT + T \right[$, on a : $e(t) = 0$, d'où : $\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = 0$.



Cette question est analogue à la question a) de l'exercice 19.

b) D'après les équations différentielles écrites à la question présente, l'intensité i a la forme :

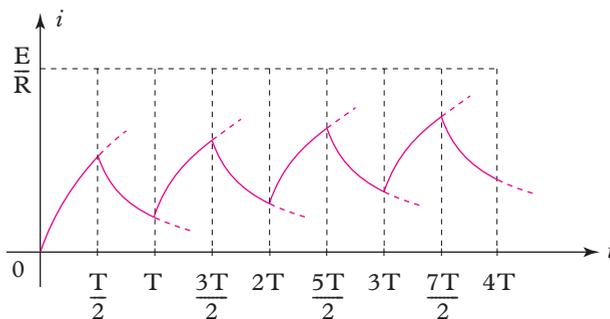
– d'une exponentielle croissante sur la demi-période $\left] nT ; nT + \frac{T}{2} \right[$;

– d'une exponentielle décroissante sur la demi-période $\left] nT + \frac{T}{2} ; (n+1)T \right[$.



La première demi-période correspond à l'établissement du courant dans la bobine, la seconde à l'arrêt du courant dans la bobine.

L'allure de l'évolution de $i(t)$ sur les quatre premières périodes est représentée ci-dessous :



c) On se place maintenant en régime périodique permanent. L'intensité du courant varie entre les valeurs I_m et I_M au cours d'une période T .

• Si $t \in \left] nT ; nT + \frac{T}{2} \right[$, la solution de l'équation différentielle posée à la question 2) a) est :

$$i(t) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{(t-nT)}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$



On tient compte dans l'expression de i du décalage temporel nT .

– À l'instant $t = nT$, on a :

$$i(nT) = I_m = \frac{E}{R} + A, \text{ soit : } A = I_m - \frac{E}{R} \quad (1)$$

– À l'instant $t = nT + \frac{T}{2}$ on a :

$$i\left(nT + \frac{T}{2}\right) = I_M = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{T}{2\tau}}, \text{ soit : } A = \left(I_M - \frac{E}{R}\right)e^{\frac{T}{2\tau}} \quad (2)$$

Des égalités (1) et (2), on déduit donc :

$$I_m - \frac{E}{R} = \left(I_M - \frac{E}{R}\right)e^{\frac{T}{2\tau}} \quad (a)$$

• Si $t \in \left]nT + \frac{T}{2}; (n+1)T\right[$, la solution de l'équation différentielle posée à la question 2) **a)** est :

$$i(t) = A'e^{-\frac{t - \left(nT + \frac{T}{2}\right)}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

 On tient compte dans l'expression de i du décalage temporel $nT + \frac{T}{2}$.

– À l'instant $t = nT + \frac{T}{2}$, on a :

$$i\left(nT + \frac{T}{2}\right) = I_M = A' \quad (3)$$

– À l'instant $t = (n+1)T$, on a :

$$i[(n+1)T] = I_m = A'e^{-\frac{T}{2\tau}} \quad (4)$$

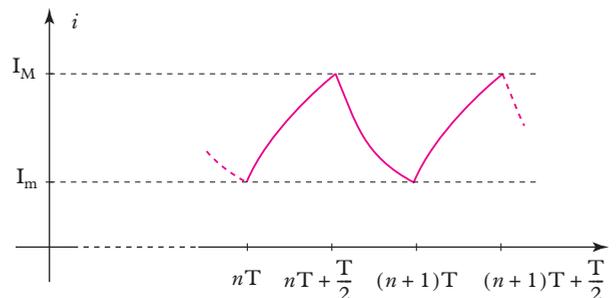
Des égalités (3) et (4), on déduit donc :

$$I_m = I_M e^{-\frac{T}{2\tau}} \quad (b)$$

• Des égalités (a) et (b), on obtient donc finalement :

$$I_M = \frac{E}{R} \frac{e^{\frac{T}{2\tau}} - 1}{e^{\frac{T}{2\tau}} - e^{-\frac{T}{2\tau}}} \quad \text{et} \quad I_m = \frac{E}{R} \frac{1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}}{e^{\frac{T}{2\tau}} - e^{-\frac{T}{2\tau}}}$$

En régime périodique permanent, l'allure de la courbe $i(t)$ devient :



Signaux sinusoïdaux

Introduction

Ce chapitre constitue une courte introduction à l'étude des circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé. Les définitions données seront alors réinvesties en exercices ou en travaux pratiques.

Plan du chapitre 5

A. Description des signaux sinusoïdaux	166
1. Écriture d'un signal sinusoïdal.	166
2. Analyse de Fourier d'un signal périodique.	167
3. Notations complexes	167
B. Observation de signaux sinusoïdaux	169
1. Visualisation à l'oscilloscope	169
2. Mesures et comparaison	170
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	173
Énoncés des exercices.	176
Indications	176
Solution des exercices.	177

A. Description des signaux sinusoïaux

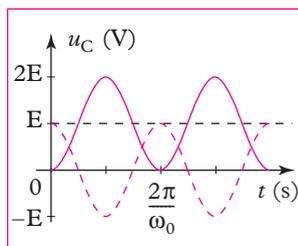


Fig. 1 - Mise en évidence de la composante continue et de la composante sinusoïdale.

1. Ce qui équivaut à $R = 0$, donc au cas d'un circuit LC série.

2. On rappelle que la pulsation propre ω_0 vaut :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

3. Le signal S peut être une tension ou une intensité.

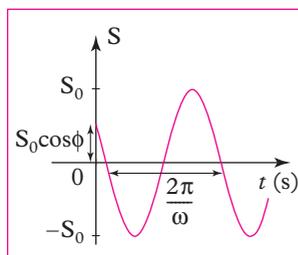


Fig. 2 - Représentation d'un signal sinusoïdal.

4. Nous verrons dans un prochain chapitre une définition énergétique de la valeur efficace S_{eff} .

A.1. Écriture d'un signal sinusoïdal

A.1.1 - Exemple : circuit RLC série non amorti

Considérons la charge du condensateur d'un circuit RLC série soumis à un échelon de tension E étudiée au chapitre 4 (voir § C). En régime pseudo-périodique, la tension u_C aux bornes du condensateur a pour expression (voir § C.2.5) :

$$u_C(t) = E \left\{ 1 - e^{-\alpha\omega_0 t} \left[\cos(\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2} t) + \frac{\lambda}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2} t) \right] \right\}$$

où α est le coefficient d'amortissement du circuit. Si α est nul¹, alors les oscillations du circuit ne sont pas amorties et on a :

$$u_C(t) = E[1 - \cos(\omega_0 t)], \text{ avec } \omega_0 \text{ pulsation propre}^2.$$

La tension u_C aux bornes du condensateur s'écrit alors comme la différence de deux termes (fig. 1) :

- une tension continue E ;
- une tension sinusoïdale $E \cos(\omega_0 t)$.

A.1.2 - Caractéristiques d'un signal sinusoïdal

Définition 1

Le signal électrique S^3 est sinusoïdal si son évolution au cours du temps peut s'écrire sous la forme (fig. 2) :

$$S(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi).$$

• Amplitude du signal – Valeur efficace

- La grandeur S_0 correspond à la valeur maximale du signal au cours du temps : on l'appelle l'amplitude du signal (elle s'exprime dans la même unité que le signal).

- On définit aussi la valeur efficace S_{eff} liée au signal sinusoïdal S par le rapport⁴ :

$$S_{\text{eff}} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}, \text{ où } S_0 \text{ est l'amplitude du signal.}$$

• Pulsation – Période – Fréquence

- La grandeur ω , exprimée en s^{-1} (ou en $\text{rad} \cdot s^{-1}$), s'appelle la pulsation du signal.

- La période T du signal, exprimée en seconde (s), correspond à la durée d'une oscillation complète : on a donc $S(t + T) = S(t)$.

- La fréquence f du signal, exprimée en hertz (Hz), est par définition l'inverse de la période T (en s).

La pulsation ω , la période T et la fréquence f du signal sinusoïdal sont liées par la relation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \text{ (ou } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \text{).}$$

• Phase du signal – Phase à l'origine

La grandeur $(\omega t + \phi)$, exprimée en radian (rad), s'appelle la phase du signal. Le nombre ϕ , compris entre $-\pi$ et π , est la phase à l'origine des temps ($t = 0$).

A.2. Analyse de Fourier d'un signal périodique

L'étude des signaux sinusoïdaux revêt un grand intérêt, car un signal périodique quelconque de fréquence f_0 peut toujours être décomposé en une somme (finie ou infinie) de signaux sinusoïdaux de fréquences f_n (n est un entier naturel), appelée **série de Fourier**. Dans ce développement :

- la fréquence $f_1 = f_0$ correspond au fondamental ($n = 1$) ;
- la fréquence $f_n = n f_0$ correspond à l'harmonique d'ordre n ($n > 1$).

Les amplitudes A_n des signaux sinusoïdaux sont liées à l'amplitude A_0 du signal périodique. Les logiciels actuels permettent de décomposer très rapidement les signaux en leur série de Fourier¹.

Exemple :

Un signal carré de période T_0 et d'amplitude A_0 (fig. 3) peut être décomposé de la façon suivante :

– Fondamental :

$$\text{fréquence } f_1 = f_0 = \frac{1}{T_0} ; \quad \text{amplitude } A_1 = \frac{4}{\pi} A_0.$$

– Harmoniques impaires ($n = 2p + 1$) :

$$\text{fréquence } f_n = n f_0 ; \quad \text{amplitude } A_n = \frac{A_1}{n}.$$

– Harmoniques paires ($n = 2p$) :

$$\text{fréquence } f_n = n f_0 ; \quad \text{amplitude } A_n = 0.$$

1. Le calcul analytique des coefficients du développement en série de Fourier sera traité dans le cours de mathématiques de deuxième année.

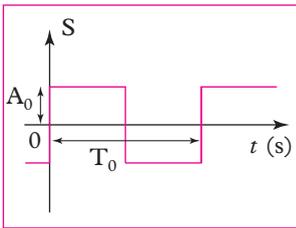


Fig. 3 - Signal carré de période T_0 et d'amplitude A_0 .

A.3. Notations complexes

A.3.1 - Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

Considérons le signal sinusoïdal S tel que : $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)$. En passant à une écriture complexe², ce signal peut aussi s'écrire :

$$S(t) = \text{Re}[\underline{S}(t)], \quad \text{avec } \underline{S}(t) = S_0 e^{j(\omega t + \phi)}.$$

Un signal sinusoïdal peut donc être représenté par une grandeur complexe³. L'amplitude S_0 du signal est le module : $S_0 = |\underline{S}(t)|$. La phase $(\omega t + \phi)$ du signal est l'argument⁴ : $\omega t + \phi = \arg(\underline{S}(t))$.

L'écriture complexe de la grandeur sinusoïdale $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)$ est :

$$\underline{S}(t) = S_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{S}_0 e^{j\omega t}, \quad \text{avec } \underline{S}_0 = S_0 e^{j\phi}.$$

\underline{S}_0 est l'amplitude complexe du signal S : son module est l'amplitude réelle S_0 ($S_0 = |\underline{S}_0|$) ; son argument est la phase à l'origine des temps ($\phi = \arg(\underline{S}_0)$).

Le passage à l'écriture complexe permet très souvent de simplifier techniquement les calculs.

2. En électrocinétique, on utilise le nombre complexe j (tel que $j^2 = -1$) plutôt que le nombre i (pour ne pas introduire de confusion avec l'intensité du courant i).

3. On a :

$$\underline{S}(t) = S(t) + j\text{Im}(\underline{S}(t))$$

4. On écrit parfois :

$$\omega t + \phi = \angle \underline{S}(t).$$

Application 1 Addition de deux signaux de même fréquence

On considère les signaux sinusoïdaux $S_1(t) = S_0 \cos(\omega t)$ et $S_2(t) = S_0 \sin(\omega t)$. En utilisant les représentations complexes, calculer la somme $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$. Préciser l'amplitude et la phase à l'origine de ce signal.

Solution

Les représentations complexes des signaux S_1 et S_2 s'écrivent :

$$\underline{S}_1(t) = S_0 e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{S}_2(t) = S_0 e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}, \quad \text{car} \quad \sin(\omega t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

La somme $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ admet donc pour représentation complexe :

$$\underline{S}(t) = \underline{S}_1(t) + \underline{S}_2(t) = S_0 e^{j\omega t} [1 - j], \quad \text{car} \quad e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j.$$

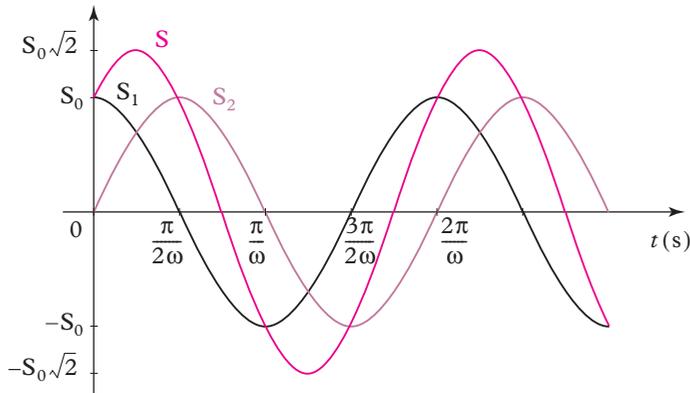
Le complexe $1 - j$ a pour module $\sqrt{2}$ et pour argument $-\frac{\pi}{4}$. D'où :

$$1 - j = \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}, \quad \text{soit} \quad \underline{S}(t) = S_0 e^{j\omega t} \times \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} = S_0 \sqrt{2} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Le signal réel $S(t)$ est la partie réelle du complexe $\underline{S}(t)$:

$$S(t) = \text{Re} \left[S_0 \sqrt{2} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)} \right] = S_0 \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

L'amplitude du signal vaut $S_0 \sqrt{2}$ et la phase à l'origine des temps est $-\frac{\pi}{4}$.



A.3.2 - Dérivation et intégration

Soit le signal sinusoïdal $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)$ représenté par le complexe $\underline{S}(t) = \underline{S}_0 e^{j\omega t}$, que l'on peut aussi écrire $\underline{S}(t) = S(t) + j \text{Im}[\underline{S}(t)]$. En dérivant ces deux expressions de $\underline{S}(t)$ par rapport au temps, on obtient donc :

$$\frac{d\underline{S}}{dt} = j\omega \underline{S}_0 e^{j\omega t} = j\omega \underline{S}(t) \quad \text{et} \quad \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dt} + j \frac{d \text{Im}[\underline{S}]}{dt}.$$

Soit le signal sinusoïdal $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)$ représenté par le complexe $\underline{S}(t)$. La dérivée par rapport au temps de S s'écrit :

$$\frac{dS}{dt} = \text{Re} \left[\frac{d\underline{S}}{dt} \right], \quad \text{avec} \quad \frac{d\underline{S}}{dt} = j\omega \underline{S}.$$

De manière générale, on remplace en notations complexes l'opérateur dérivation $\frac{d}{dt}$ par $j\omega$ et l'opérateur dérivation $n^{\text{ième}} \frac{d^n}{dt^n}$ par $(j\omega)^n$.

Remarque

De même, une primitive du signal sinusoïdal $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)$ s'écrit :

$$\int S(t) dt = \text{Re}[\int \underline{S}(t) dt], \text{ avec } \int \underline{S}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \underline{S}(t).$$

B. Observation de signaux sinusoïaux

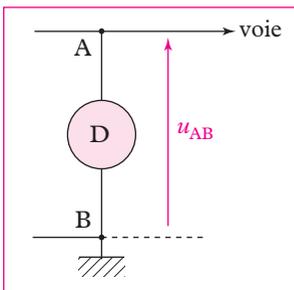


Fig. 4 - La tension aux bornes du dipôle D visualisée sur la voie de l'oscilloscope est la tension u_{AB} .

B.1. Visualisation à l'oscilloscope

L'oscilloscope permet de visualiser en temps réel les tensions mesurées aux bornes des dipôles d'un circuit (fig. 4). Pour une bonne observation des signaux, il est nécessaire d'effectuer différents réglages.

B.1.1 - Les réglages initiaux

- Pour déterminer les valeurs de certaines grandeurs caractéristiques du signal, il faut au préalable **calibrer** les boutons de mesure. On réalise en général cette opération en plaçant les boutons en « butée ». Dans ces conditions, les indications fournies par les calibres sont valables. En position non calibrée, l'observation des signaux ne donne que des indications relatives sur les grandeurs mesurées.
- Pour effectuer les mesures de tension, il est nécessaire de connaître le « **zéro** » du circuit et éventuellement de recentrer le signal. On obtient la position zéro en mettant la touche associée au calibre sur la position **ground** (terre).
- Dans le cas de plusieurs signaux, l'observation est facilitée par une bonne utilisation de la touche de **synchronisation**. On choisit en général de synchroniser les signaux sur le signal de plus grande amplitude.
- Si on étudie seulement la composante alternative du signal au cours du temps, on utilise le mode A-C de la voie de l'oscilloscope, qui supprime la composante continue. En revanche, si on s'intéresse à la valeur de la tension mesurée par rapport au zéro, on utilise le mode D-C qui laisse aussi passer la composante continue du signal.

B.1.2 - Base de temps et sensibilité verticale

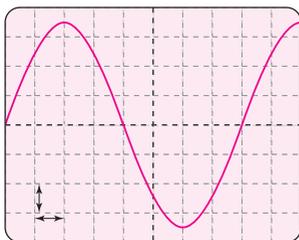


Fig. 5 - Choix de la base de temps et de la sensibilité verticale pour bien visualiser le signal à l'écran de l'oscilloscope.

• La **base de temps** (calibre temporel donnant le défilement horizontal des signaux) permet de connaître la durée du signal visualisé. En pratique, la plupart des signaux étudiés sont périodiques. En général, on choisit un calibre tel que l'on puisse observer une, deux ou trois périodes des signaux (fig. 5).

• La **sensibilité verticale** (calibre d'amplification augmentant la taille des signaux sur l'écran) permet de connaître la valeur de la tension visualisée. En général, on choisit un calibre tel que l'on puisse observer une amplitude maximale des signaux (fig. 5).

B.1.3 - Mode X-Y

Lorsqu'on étudie simultanément deux signaux, il est possible d'observer le signal 2 en fonction du signal 1, la courbe étant alors paramétrée par le temps t . Sur l'oscilloscope, cette opération s'effectue automatiquement en enfonçant la touche X-Y.

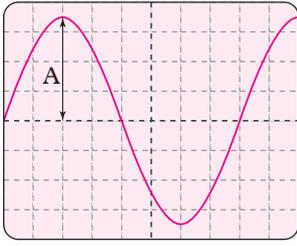


Fig. 6 - Le signal étant centré verticalement, son amplitude A vaut 3,5 carreaux.

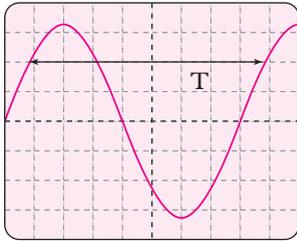


Fig. 7 - La période T du signal vaut 8 carreaux.

1. C'est-à-dire, deux signaux qui ont la même période T .

2. Cela revient à effectuer le changement de variable :

$$t \rightarrow t - \frac{\phi_1}{\omega}$$

3. Le maximum de S_2 est atteint à l'instant $t = -\frac{\phi}{\omega} > 0$, donc après le maximum de S_1 .

4. Le maximum de S_2 est atteint à l'instant $t = -\frac{\phi}{\omega} < 0$, donc avant le maximum de S_1 .

5. Ce décalage se mesure entre deux maxima ou entre deux passages à zéro dans le même sens.

B.2. Mesures et comparaison

En travaux pratiques, on utilise souvent l'oscilloscope pour comparer plusieurs signaux sinusoïdaux différents.

B.2.1 - Mesure de l'amplitude

Sur l'écran de l'oscilloscope (fig. 6), l'amplitude A d'un signal se mesure grâce à la sensibilité verticale en repérant l'élongation maximale du signal par rapport à sa valeur moyenne.

À l'aide de l'oscilloscope, on peut comparer les amplitudes de deux signaux différents, en veillant aux calibres utilisés sur les deux voies.

B.2.2 - Mesure de la période

Sur l'écran de l'oscilloscope (fig. 7), la période T d'un signal périodique se mesure grâce à la base de temps en repérant deux points consécutifs correspondant à la répétition du signal (même élongation et même pente).

À l'aide de l'oscilloscope, on peut comparer les périodes de deux signaux périodiques différents (même base de temps).

B.2.3 - Mesure temporelle d'une différence de phase

Deux signaux sinusoïdaux synchrones¹ n'ont pas nécessairement la même phase à l'origine des temps. On étudie par exemple les signaux S_1 et S_2 tels que :

$$S_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \quad \text{et} \quad S_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2).$$

En choisissant convenablement l'origine des temps², on peut écrire :

$$S_1(t) = A_1 \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad S_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi).$$

Le nombre sans dimension ϕ compris entre $-\pi$ et π ($\phi = \phi_2 - \phi_1$ à 2π près), s'appelle l'**avance de phase** (ou déphasage) du signal S_2 sur le signal S_1 .

Avec l'origine des temps ainsi choisie, le signal S_1 est maximal à l'instant initial $t = 0$ et le signal S_2 est maximal à l'instant t tel que $\omega t = -\phi$.

– Si $\phi < 0$, le signal S_2 est décalé vers la droite par rapport au signal S_1 sur l'écran de l'oscilloscope³ : S_2 est « en retard » par rapport à S_1 .

– Si $\phi > 0$, le signal S_2 est décalé vers la gauche par rapport au signal S_1 sur l'écran de l'oscilloscope⁴ : S_2 est « en avance » par rapport à S_1 .

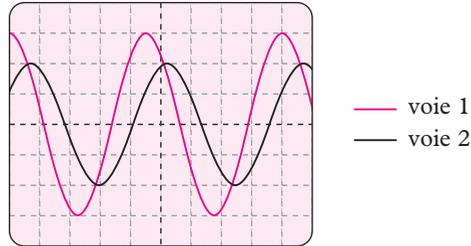
Pour déterminer la valeur de ϕ , on compte sur l'écran de l'oscilloscope le nombre N de carreaux correspondant à la période T des signaux et le nombre n de carreaux correspondant au décalage de S_2 par rapport à S_1 vers la droite ou vers la gauche⁵. La période T vérifie $\omega T = 2\pi$, c'est-à-dire 360° . En raisonnant par proportionnalité, on en déduit :

$$|\phi| = 2\pi \frac{n}{N} \quad (\text{en rad}) \quad \text{ou} \quad |\phi| = 360 \frac{n}{N} \quad (\text{en } ^\circ).$$

Pour obtenir une meilleure mesure du déphasage, il est préférable que T corresponde à la valeur maximale de N , c'est-à-dire à 10 carreaux (cette opération est possible en « décalibrant » la base de temps). Un carreau représente alors un déphasage de 36° .

Application 2 Mesures d'amplitude, de période et de déphasage

On observe simultanément deux signaux sur les voies 1 et 2 de l'oscilloscope. La base de temps est 1 ms/carreau. Les calibres sont 2 V/carreau pour la voie 1 et 50 mV/carreau pour la voie 2. L'oscillogramme obtenu est représenté ci-contre. Déterminer les amplitudes des deux signaux, leur période et leur fréquence, ainsi que le déphasage de la voie 2 sur la voie 1.



Solution

• Les deux signaux sont centrés verticalement. L'élongation maximale de la voie 1 est donc de 3 carreaux et celle de la voie 2 est de 2 carreaux. En tenant compte des calibres de chaque voie, les amplitudes des deux signaux valent :

$$A_1 = 3 \text{ carreaux} \times 2 \text{ V/carreaux} = 6 \text{ V}$$

et

$$A_2 = 2 \text{ carreaux} \times 50 \text{ mV/carreaux} = 100 \text{ mV} = 0,1 \text{ V}.$$

• Pour les deux signaux, les deux premiers maxima sont distants de 4,5 carreaux. En tenant compte de la base de temps, la période T des signaux (synchrones) vaut :

$$T = 4,5 \times 1 \text{ ms/carreau} = 4,5 \text{ ms}, \text{ d'où : } f = \frac{1}{4,5 \times 10^{-3}} = 2,2 \cdot 10^2 \text{ Hz}.$$

• La voie 2 est décalée vers la droite par rapport à la voie 1, donc $\phi < 0$ (retard de phase). On mesure environ 0,7 carreaux de décalage entre les deux courbes. Comme la période correspond à 4,5 carreaux, on a donc :

$$|\phi| = 360 \times \frac{0,7}{4,5} = 56^\circ, \text{ soit : } \phi = -56^\circ.$$

(Cette mesure n'est pas très précise du fait de l'incertitude sur le repérage des courbes à l'écran.)

B.2.4 - Mesure d'une différence de phase en mode X-Y

Quand les signaux observés à l'oscilloscope sont sinusoïdaux et synchrones, la courbe obtenue sur l'écran de l'oscilloscope en mode X-Y est une ellipse. Sur cette courbe, on peut mesurer l'amplitude de chaque signal et le déphasage entre les deux signaux.

En effet, en choisissant convenablement l'origine des temps, on peut écrire comme précédemment :

$$S_1 = A_1 \cos(\omega t) \text{ et } S_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi).$$

– L'écart entre les deux positions extrêmes de S_1 est $2A_1$ et l'écart entre les deux positions extrêmes de S_2 est $2A_2$.

– Le signal S_2 s'annule quand $\omega t + \phi = \pm \frac{\pi}{2} (2\pi)$, soit : $S_1 = \pm A_1 \sin \phi$.

– Le signal S_1 s'annule quand $\omega t = \pm \frac{\pi}{2} (2\pi)$, soit : $S_2 = \pm A_2 \sin \phi$.

On peut donc déterminer les valeurs de A_1 , A_2 et ϕ comme l'indique la figure 8.

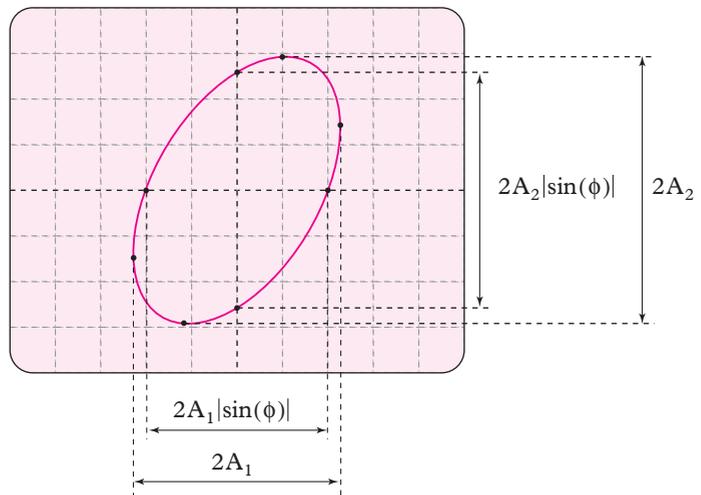


Fig. 8 - Détermination des valeurs de A_1 , A_2 et ϕ en mode X-Y.

La **figure 9** résume les différents cas de figure en fonction de la valeur du déphasage ϕ .

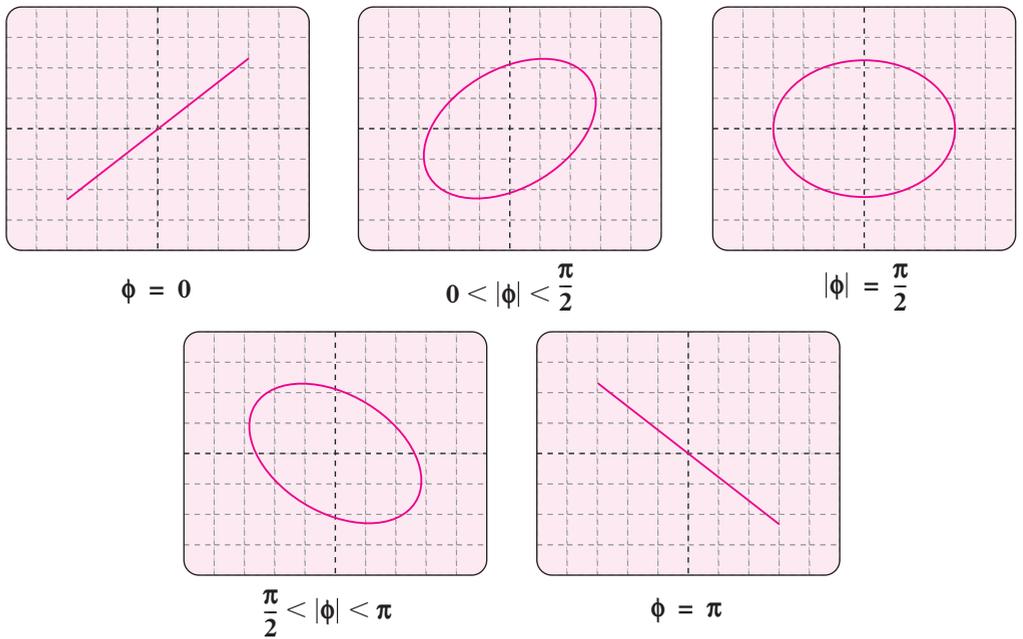


Fig. 9 - Le déphasage ϕ est compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

L'essentiel

✓ Description d'un signal sinusoïdal

- Le signal électrique S est sinusoïdal si son évolution au cours du temps peut s'écrire sous la forme :

$$S(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)$$

S_0 amplitude du signal (unité de S)

ω pulsation du signal ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)

ϕ phase à l'origine (rad)

- La pulsation ω (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$), la période T (en s) et la fréquence f (en Hz) du signal sinusoïdal vérifient la relation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \quad \text{ou} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

- L'écriture complexe de la grandeur sinusoïdale $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)$ est :

$$\underline{S}(t) = S_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{S}_0 e^{j\omega t}, \quad \text{avec} \quad \underline{S}_0 = S_0 e^{j\phi}.$$

– Le complexe \underline{S}_0 est l'amplitude complexe du signal S . Son module est l'amplitude réelle S_0 ($S_0 = |\underline{S}_0|$) et son argument est la phase à l'origine ($\phi = \arg(\underline{S}_0)$).

– En notations complexes, on remplace l'opérateur dérivation $\frac{d}{dt}$ par $j\omega$ et l'opérateur dérivation $n^{\text{ième}} \frac{d^n}{dt^n}$ par $(j\omega)^n$.

✓ Observation à l'oscilloscope d'un signal sinusoïdal

- L'amplitude A d'un signal se mesure grâce à la sensibilité verticale en repérant l'élongation maximale du signal par rapport à sa valeur moyenne.
- La période T d'un signal se mesure grâce à la base de temps en repérant deux points consécutifs correspondant à la répétition du signal (même élongation et même pente).
- Deux signaux sinusoïdaux S_1 et S_2 sont synchrones s'ils ont même pulsation ω :

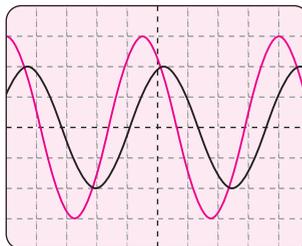
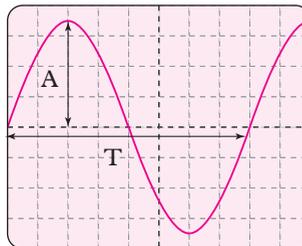
$$S_1(t) = A_1 \cos(\omega t)$$

et
$$S_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi).$$

Le nombre sans dimension ϕ compris entre $-\pi$ et π ($\phi = \phi_2 - \phi_1$ à 2π près) est l'avance de phase (ou déphasage) du signal S_2 sur le signal S_1 .

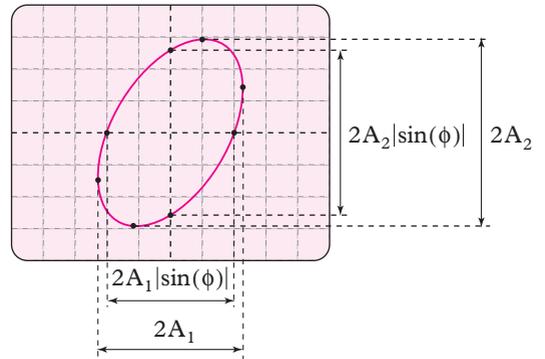
– Si $\phi < 0$, le signal S_2 est décalé vers la droite par rapport au signal S_1 sur l'écran de l'oscilloscope : S_2 est « en retard » par rapport à S_1 .

– Si $\phi > 0$, le signal S_2 est décalé vers la gauche par rapport au signal S_1 sur l'écran de l'oscilloscope : S_2 est « en avance » par rapport à S_1 .



voie 1 (avance)
voie 2 (retard)

- Quand deux signaux sinusoïdaux synchrones S_1 et S_2 sont observés à l'oscilloscope, la courbe obtenue en mode X-Y est une ellipse. Sur cette ellipse, on peut mesurer l'amplitude de chaque signal et le déphasage ϕ entre les deux signaux.



Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment mesurer un déphasage ?

Deux signaux sinusoïdaux de même fréquence qui n'atteignent pas leur maximum en même temps sont déphasés. Comment mesurer le déphasage ϕ entre ces deux signaux ?

→ Savoir faire

- ❶ Mesurer la période T des signaux S_1 et S_2 .
- ❷ Déterminer les instants t_1 et t_2 correspondant à deux maxima voisins de $S_1(t)$ et $S_2(t)$.
- ❸ Calculer la phase ϕ en degré :

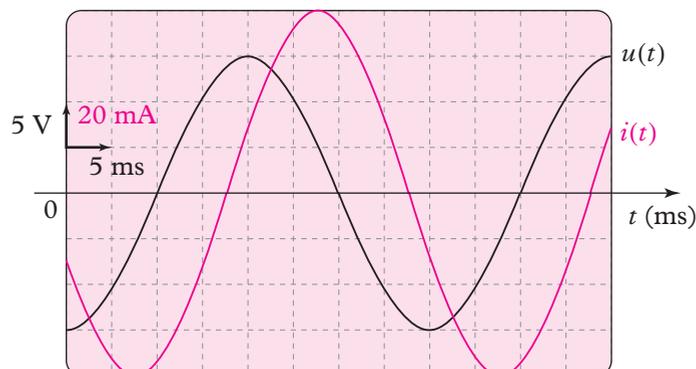
$$\phi (^{\circ}) = \frac{t_2 - t_1}{T} \times 360^{\circ},$$

ou en radians :

$$\phi (\text{rad}) = \frac{t_2 - t_1}{T} \times 2\pi.$$

→ Application

Mesurer le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$ (visualisé à un coefficient multiplicateur près) sur l'oscillogramme représenté ci-dessous.



Solution

❶ On mesure une période de 8 carreaux pour les deux signaux soit :

$$T = 8 \times 5 \text{ ms} = 40 \text{ ms.}$$

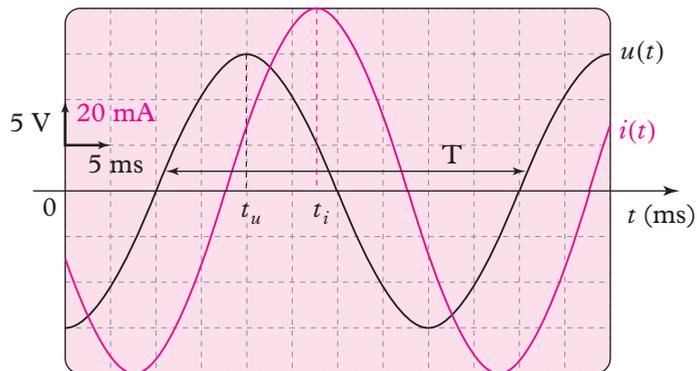
❷ On mesure des instants de passage à la valeur maximale (premier maximum de u et premier maximum de i) :

- $t_u = 20 \text{ ms}$ pour la tension ;
- $t_i = 27,5 \text{ ms}$ pour l'intensité.

❸ Le déphasage entre la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ vaut donc :

$$\phi = \frac{t_u - t_i}{T} \times 360 = \frac{20 \cdot 10^{-3} - 27,5 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-3}} \times 360 = -67,5^\circ,$$

soit : $\phi = -\frac{3\pi}{8}$ (i est en retard sur u).



Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Représentation de signaux

Les signaux envoyés sur la voie 1 et la voie 2 de l'oscilloscope ont respectivement pour expression :

$$\begin{cases} \text{Voie 1 : } Y_1 = A_1 \cos(\omega t), \text{ avec } A_1 = 5 \text{ V.} \\ \text{Voie 2 : } Y_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi), \text{ avec } A_2 = 2 \text{ V et } \phi = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

La fréquence f , égale pour les deux signaux, a pour valeur :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 1\,000 \text{ Hz.}$$

La base de temps est : 200 μs /carreau. Les calibres utilisés sont les suivants :

$$\begin{cases} \text{Voie 1 : } 2 \text{ V/carreau} \\ \text{Voie 2 : } 1 \text{ V/carreau.} \end{cases}$$

Le signal de la voie 1 sert à la synchronisation de l'oscilloscope : niveau 0 ; sens +. (Ceci signifie que le signal de la voie 1 démarre quand il passe par une valeur nulle dans le sens croissant.)

a) Représenter l'écran de l'oscilloscope.

b) Représenter l'écran de l'oscilloscope en mode X-Y :

- la voie 1 est suivant X ;
- la voie 2 est suivant Y.

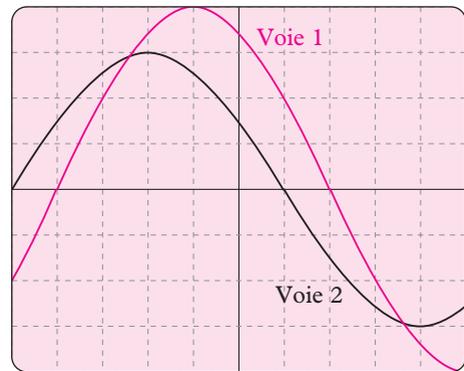
Ex. 2 Détermination d'une avance de phase et d'amplitude

Les calibres de l'oscilloscope sont les suivants :

$$\begin{cases} \text{Voie 1 : } 1 \text{ V/carreau} \\ \text{Voie 2 : } 2 \text{ V/carreau.} \end{cases}$$

La base de temps est 500 μs /carreau. On observe l'écran de l'oscilloscope ci-dessous.

Quelles sont les amplitudes des signaux, leur fréquence et l'avance de phase de la voie 2 sur la voie 1 ?



Représenter l'écran de l'oscilloscope en mode X-Y :

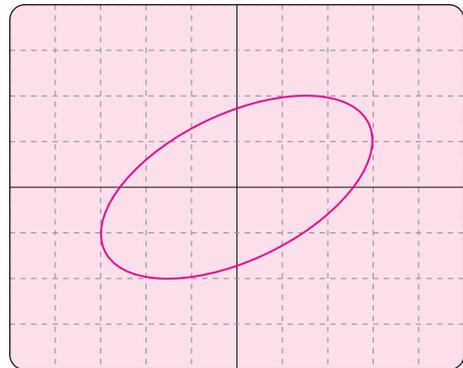
- la voie 1 est suivant X ;
- la voie 2 est suivant Y.

Ex. 3 Courbe X-Y

On observe l'oscilloscope en mode X-Y :

- la voie 1 est suivant X ;
- la voie 2 est suivant Y.

L'écran obtenu est représenté ci-dessous.



Déterminer le déphasage de la voie 2 sur la voie 1. (La voie 2 est en avance.)

Indications

Ex. 1 a) Bien penser aux contraintes imposées par la synchronisation sur la voie 1.

b) Avant de tracer l'ellipse, dresser un tableau de valeurs.

Ex. 2 On ne visualise à l'écran qu'une demi-période des signaux.

Ex. 3 Déduire graphiquement $|\sin\phi|$ de l'ellipse obtenue.

Solutions des exercices

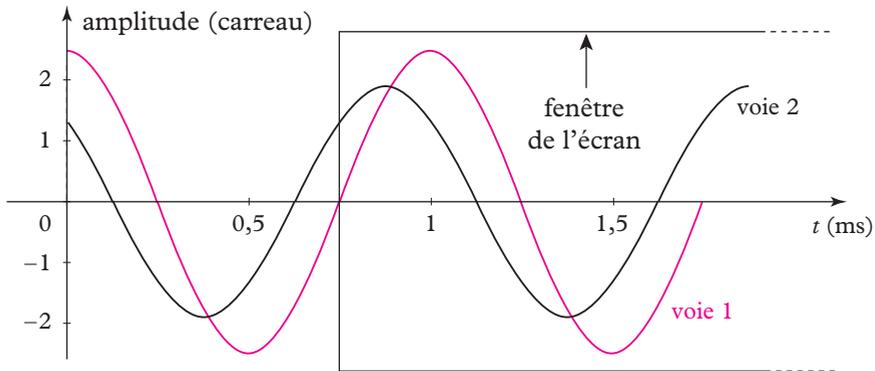
Exercice 1

a) La fréquence des signaux est $f = 1\,000$ Hz, donc leur période vaut :

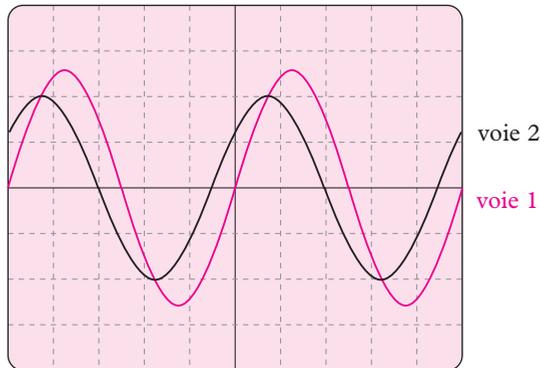
$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1\,000} = 1 \text{ ms.}$$

Représentons sur un même graphe l'allure des deux courbes en tenant compte des calibres des voies :

$$\begin{cases} A_1 = 5 \text{ V avec } 2 \text{ V/carreau, d'où une amplitude de } 2,5 \text{ carreaux.} \\ A_2 = 2 \text{ V avec } 1 \text{ V/carreau, d'où une amplitude de } 2 \text{ carreaux.} \end{cases}$$



Les contraintes liées à la synchronisation imposent de placer la fenêtre de l'écran de l'oscilloscope à l'endroit indiqué sur le schéma. La période des signaux est 1 ms, soit 5 carreaux. L'écran de l'oscilloscope est donc le suivant :

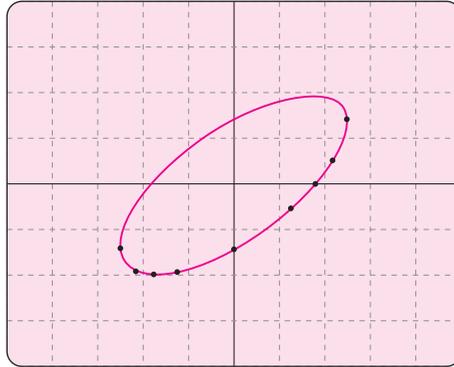


À l'oscilloscope, la base de temps est la même sur les deux voies. En revanche, les calibres sont choisis indépendamment.

b) Pour tracer la courbe XY, avec les calibres utilisés, nous allons dresser un tableau de valeurs.

ωt	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
X	2,5	2,16	1,77	1,25	0	-1,25	-1,77	-2,16	-2,5
Y	1,41	+0,52	0	-0,52	-1,41	-1,93	-2	-1,93	-1,41

On obtient la courbe XY suivante :



En mode X-Y, il faut tenir compte des calibres propres à chaque voie.

Exercice 2

- L'amplitude de la voie 1 est 4 carreaux, d'où : $A_1 = 4 \text{ V}$.
L'amplitude de la voie 2 est 3 carreaux, d'où : $A_2 = 3 \times 2 = 6 \text{ V}$.
- Une demi-période du signal fait 6 carreaux, c'est-à-dire 3 ms.
La période du signal est 6 ms, la fréquence est :

$$f = \frac{1}{6 \cdot 10^{-3}} = 167 \text{ Hz.}$$

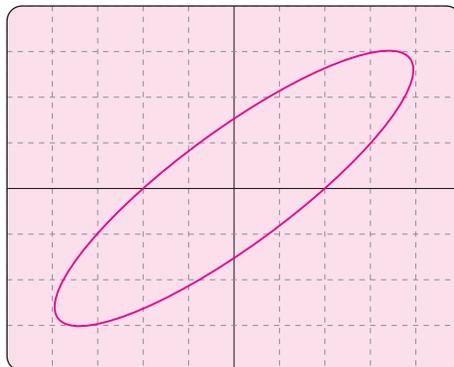
- La voie 2 est décalée de 1 carreau vers la gauche par rapport à la voie 1 ; le déphasage est positif et vaut :

$$\phi = 2\pi \times \frac{1}{2 \times 6} = \frac{\pi}{6} \text{ (avance de phase de la voie 2 sur la voie 1).}$$



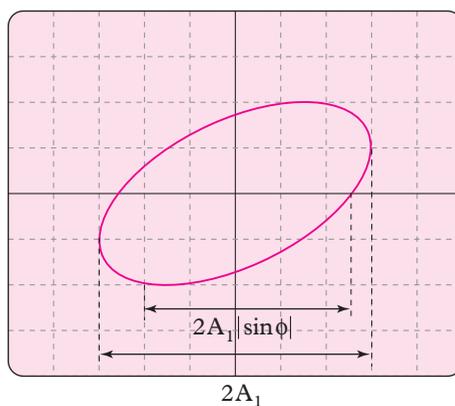
Le décalage entre des deux voies est 1 carreau et une période des signaux occupe $2 \times 6 = 12$ carreaux, d'où la valeur de ϕ .

- Nous pouvons reporter point par point les valeurs de X et Y pour tracer la courbe XY. Nous obtenons la courbe suivante :



Exercice 3

Pour mesurer ϕ , il faut déterminer les grandeurs suivantes sur le graphe :



On trouverait le même résultat en raisonnant « verticalement » sur $2A_2$ et $2A_2|\sin\phi|$.

On mesure sur l'écran de l'oscilloscope :

$$2A_1 = 6 \text{ carreaux} \quad \text{et} \quad 2A_1|\sin\phi| = 5,2 \text{ carreaux},$$

$$\text{d'où : } |\sin\phi| = \frac{5,2}{6} = 0,867, \text{ soit :}$$

$$|\phi| = 60^\circ \quad \text{ou} \quad |\phi| = 120^\circ.$$

L'inclinaison de la courbe impose :

$$0^\circ < |\phi| < 90^\circ, \text{ d'où : } \phi = 60^\circ.$$



L'énoncé précise que la voie 2 est en avance sur la voie 1, ce qui permet de déterminer le signe du déphasage ϕ . Sans cette indication, il serait impossible de conclure quant au signe de ϕ .

Étude du circuit RLC série : résonance

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons introduire les notions essentielles liées aux régimes sinusoïdaux permanents utilisés dans toute l'électronique et l'électrotechnique.

Afin de comprendre l'intérêt de cette utilisation, nous allons étudier le circuit constitué des composants R, L et C en série et mettre en évidence l'apparition de phénomènes de résonance.

Plan du chapitre 6

A. Observations expérimentales	182
1. Montage expérimental	182
2. Observation de la tension aux bornes du condensateur	182
3. Observation du courant dans le circuit	182
B. Étude de la tension u_C	182
1. Régime transitoire – Régime permanent	182
2. Utilisation des nombres complexes	184
3. Expressions en variables réduites	186
4. Étude de la résonance tension	187
5. Solution complète de l'équation différentielle	190
C. Étude du courant dans le circuit	191
1. Régime transitoire – Régime permanent	191
2. Utilisation des nombres complexes	192
3. Étude de la résonance intensité	193
4. Bande passante du circuit	194
D. Aspect énergétique	195
1. Conservation de l'énergie	195
2. Interprétation physique	195
3. Interprétation énergétique de Q	196
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	197
Énoncés des exercices	201
Indications	202
Solution des exercices	203

A. Observations expérimentales

A.1. Montage expérimental

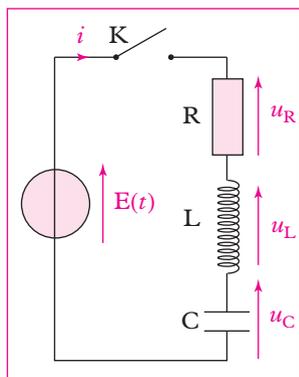


Fig. 1 - Schéma du montage expérimental.

Le montage permettant d'observer le régime permanent sinusoïdal est constitué d'une bobine d'inductance L , d'un conducteur ohmique de résistance R (incluant éventuellement la résistance r de la bobine) et d'un condensateur de capacité C montés en série.

Le circuit est alimenté par un générateur idéal de tension sinusoïdale de fém $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$, relié au circuit RLC par un interrupteur K (fig. 1). Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et l'interrupteur K est ouvert. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur : le générateur débite alors un courant dans le circuit.

A.2. Observation de la tension aux bornes du condensateur

On étudie l'évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur au cours du temps grâce à un oscilloscope ou à un système d'acquisition de données relié à l'ordinateur. Afin d'éviter le court-circuit par les masses, on relie une des bornes du condensateur à la masse du générateur, et donc à celle de l'oscilloscope ou du système d'acquisition (fig. 2).

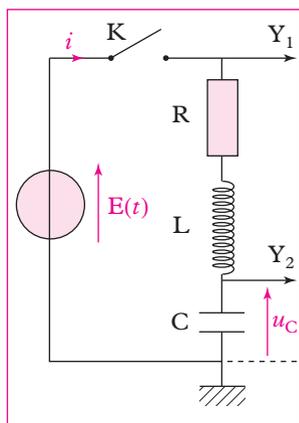


Fig. 2 - Branchements des voies Y_1 et Y_2 sur le circuit pour visualiser simultanément $E(t)$ et $u_C(t)$.

On visualise le signal appliqué au circuit RLC sur la voie Y_1 et la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur sur la voie Y_2 . Le déclenchement de l'acquisition se fait sur la voie 1 lorsque le signal passe à une valeur non nulle afin d'observer le régime transitoire au début de l'acquisition (par exemple, avec un oscilloscope à mémoire). Le régime sinusoïdal permanent est observé à l'oscilloscope avec synchronisation sur la voie 1.

A.3. Observation du courant dans le circuit

Pour étudier l'évolution de l'intensité i du courant dans le circuit au cours du temps, on observe la tension aux bornes de la résistance R ($u_R = Ri$). Par rapport au montage précédent, il suffit d'invertir le condensateur et le conducteur ohmique (fig. 3).

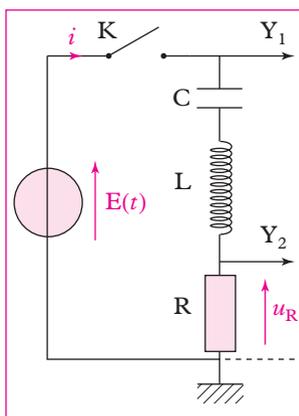


Fig. 3 - Branchements des voies Y_1 et Y_2 sur le circuit pour visualiser $E(t)$ et $i(t)$.

B. Étude de la tension u_C

B.1. Régime transitoire – Régime permanent

B.1.1 - Équation différentielle vérifiée par u_C

Pour $t > 0$, la tension aux bornes de l'interrupteur K est nulle et la loi d'addition des tensions s'écrit :

$$E(t) = u_R + u_L + u_C, \text{ avec } u_R = RC \frac{du_C}{dt} \text{ et } u_L = LC \frac{d^2u_C}{dt^2}.$$

La tension u_C aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série soumis à la tension sinusoïdale $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ vérifie l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre :

$$LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E_0 \cos(\omega t).$$

La solution de l'équation différentielle précédente est la somme :

– de la solution générale u_1 de l'équation homogène :

$$LC \frac{d^2 u_1}{dt^2} + RC \frac{du_1}{dt} + u_1 = 0;$$

– d'une solution particulière u_2 de l'équation.

B.1.2 - Solution de l'équation homogène : régime transitoire

La résolution de l'équation homogène a déjà été effectuée au chapitre 4 (cf. § C.2.3 et § C.2.5). On obtient le polynôme caractéristique en r :

$$LCr^2 + RCr + 1 = 0.$$

Ce polynôme admet deux racines réelles négatives, éventuellement confondues, ou deux racines complexes conjuguées à partie réelle négative. Les solutions de l'équation homogène tendent donc toujours à s'annuler avec le temps¹.

1. Elles correspondent respectivement au régime apériodique, au régime critique et au régime pseudo-périodique.

La solution de l'équation homogène constitue le régime transitoire d'évolution de la tension u_C .

B.1.3 - Solution particulière sinusoïdale : régime sinusoïdal permanent

Comme le second membre de l'équation est une fonction sinusoïdale, on cherche comme solution particulière une fonction sinusoïdale de la forme² :

$$u_2(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi), \text{ où } \omega \text{ est la pulsation du signal.}$$

2. Lorsque le second membre de l'équation différentielle est une fonction sinusoïdale, elle admet pour solution particulière une fonction sinusoïdale de même pulsation.

L'amplitude U_0 et la phase à l'origine ϕ dépendent des données R , L , C , E_0 et ω du problème. Leurs expressions seront déterminées dans le prochain paragraphe en utilisant les nombres complexes.

La solution particulière sinusoïdale de l'équation différentielle constitue le régime sinusoïdal permanent d'évolution de la tension u_C . Ce régime s'installe lorsque le régime transitoire s'annule.

B.1.4 - Conditions de continuité

La tension u_C aux bornes du condensateur et l'intensité i du courant dans l'inductance sont continues. À l'instant $t = 0$, les conditions initiales sur la tension et l'intensité s'écrivent donc³ :

$$u_C(t = 0) = 0 \text{ et } i(t = 0) = 0.$$

Comme $i = C \frac{du_C}{dt}$, la condition $i(t = 0) = 0$ équivaut à :

$$\frac{du_C}{dt}(t = 0) = 0.$$

Les deux conditions initiales permettant de résoudre le problème sont :

$$u_C(t = 0) = 0 \text{ et } \frac{du_C}{dt}(t = 0) = 0.$$

Il est à noter que les conditions de continuité s'appliquent à la solution de l'équation complète. Une erreur classique consiste cependant à ne les appliquer qu'à la seule solution de l'équation homogène.

3. L'équation différentielle étant du second ordre, il faut connaître deux conditions initiales pour déterminer les deux constantes d'intégration :

- continuité de u_C à $t = 0$;
- continuité de i à $t = 0$.

B.2. Utilisation des nombres complexes

B.2.1 - Équation différentielle complexe

• On considère les équations différentielles du second ordre à coefficients constants avec second membre sinusoïdal notées (1) et (2) :

$$\text{LC} \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \text{RC} \frac{du_2}{dt} + u_2 = E_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

$$\text{LC} \frac{d^2 u'_2}{dt^2} + \text{RC} \frac{du'_2}{dt} + u'_2 = E_0 \sin(\omega t) \quad (2)$$

1. On admettra ce résultat.

Elles admettent respectivement les solutions particulières sinusoïdales¹ :

$u_2(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$ (équation 1) et $u'_2(t) = U_0 \sin(\omega t + \phi)$ (équation 2),

où les valeurs de U_0 et ϕ sont déterminées à partir des données du problème.

• En effectuant la combinaison linéaire (1) + j(2), on obtient l'équation différentielle complexe :

$$\text{LC} \frac{d^2}{dt^2} (u_2 + ju'_2) + \text{RC} \frac{d}{dt} (u_2 + ju'_2) + (u_2 + ju'_2) = E_0 [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)],$$

soit en posant $\underline{u}_2 = u_2 + ju'_2$ et $\underline{E}(t) = E_0 \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) = E_0 e^{j\omega t}$:

$$\text{LC} \frac{d^2 \underline{u}_2}{dt^2} + \text{RC} \frac{d \underline{u}_2}{dt} + \underline{u}_2 = \underline{E}(t) = E_0 e^{j\omega t}.$$

2. On a :

$$u_2 = \text{Re}(\underline{u}_2) \quad \text{et} \quad u'_2 = \text{Im}(\underline{u}_2).$$

D'après ce qui précède, cette équation admet pour solution particulière la fonction complexe² :

$$\underline{u}_2(t) = u_2(t) + ju'_2(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi) + jU_0 \sin(\omega t + \phi),$$

que l'on peut écrire plus simplement³ :

$$\underline{u}_2(t) = U_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{U}_0 e^{j\omega t}, \quad \text{où} \quad \underline{U}_0 = U_0 e^{j\phi} \text{ est l'amplitude complexe.}$$

3. Dans cette écriture, U_0 est le module du complexe \underline{U}_0 ($U_0 = |\underline{U}_0|$) et ϕ est son argument ($\phi = \arg(\underline{U}_0)$).

La solution particulière sinusoïdale u_2 est la partie réelle de la solution particulière \underline{u}_2 de l'équation différentielle complexe associée à l'équation différentielle réelle :

$$u_2 = U_0 \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}[\underline{u}_2(t)], \quad \text{avec} \quad \underline{u}_2(t) = \underline{U}_0 e^{j\omega t}.$$

B.2.2 - Solution complexe

D'après les propriétés de dérivation des complexes (cf. chapitre 5), on a :

$$\frac{d \underline{u}_2}{dt} = j\omega \underline{u}_2 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \underline{u}_2}{dt^2} = -\omega^2 \underline{u}_2, \quad \text{d'où} : -\text{LC}\omega^2 \underline{u}_2 + j\text{RC}\omega \underline{u}_2 + \underline{u}_2 = E_0 e^{j\omega t}.$$

La solution particulière \underline{u}_2 de l'équation différentielle complexe a donc pour expression⁴ :

$$\underline{u}_2 = \frac{E_0 e^{j\omega t}}{-\text{LC}\omega^2 + j\text{RC}\omega + 1}.$$

Comme $\underline{u}_2(t) = \underline{U}_0 e^{j\omega t}$, l'amplitude complexe \underline{U}_0 s'écrit :

$$\underline{U}_0 = \frac{E_0}{-\text{LC}\omega^2 + j\text{RC}\omega + 1}.$$

4. L'intérêt d'utiliser les nombres complexes pour simplifier les calculs apparaît ici de manière évidente.

B.2.3 - Solution réelle

- La solution particulière sinusoïdale $u_2 = U_0 \cos(\omega t + \phi)$ est la partie réelle de la solution particulière complexe $\underline{u}_2 = \underline{U}_0 e^{j\omega t}$:

$$u_2 = \text{Re}[\underline{U}_0 e^{j\omega t}], \text{ avec } \underline{U}_0(t) = U_0 e^{j\phi}.$$

L'amplitude réelle U_0 est le module de l'amplitude complexe \underline{U}_0 et la phase à l'origine des temps ϕ est son argument :

$$U_0 = |\underline{U}_0| \text{ et } \phi = \arg(\underline{U}_0).$$

1. Le module du nombre complexe $z = a + jb$ vaut :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On a les propriétés suivantes :

$$|j| = 1 ; |e^{j\alpha}| = 1 ;$$

$$|zz'| = |z| \times |z'| ; \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

2. Un argument du nombre complexe $z = a + jb$ vaut :

$$\arg(z) = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) \text{ si } a > 0.$$

$$\arg(z) = \pm \pi + \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) \text{ si } a < 0.$$

On a les propriétés suivantes :

$$\arg(j) = \frac{\pi}{2} ; \arg(e^{j\alpha}) = \alpha ;$$

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') ;$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg(z').$$

- D'après l'expression de l'amplitude complexe \underline{U}_0 , l'amplitude réelle U_0 vaut¹ :

$$U_0 = |\underline{U}_0| = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}.$$

- Pour calculer la phase à l'origine des temps ϕ , on utilise les propriétés des arguments des nombres complexes². En écrivant l'amplitude complexe \underline{U}_0 comme le rapport de deux nombres, on a :

$$\arg(\underline{U}_0) = -\arg(\text{dénominateur}), \text{ car } \arg(E_0) = 0 \text{ (réel positif)}.$$

La partie réelle du dénominateur est $1 - LC\omega^2$. Comme son signe varie avec les valeurs de la pulsation ω , elle ne permet pas d'aboutir à une formule unique valable dans tous les cas. En revanche, la partie imaginaire $RC\omega$ du dénominateur est toujours positive. On peut donc écrire le dénominateur sous la forme :

$$j[RC\omega - j(1 - LC\omega^2)], \text{ d'argument : } \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right).$$

La phase à l'origine des temps ϕ vaut donc :

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right).$$

Remarque : on pourrait aussi écrire la solution u_2 sous la forme :

$$u_2 = U_0 \sin(\omega t + \varphi), \text{ avec } \varphi = \text{Arctan}\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right).$$

Application 1 Régime sinusoïdal permanent de la tension u_C

On considère un circuit RLC série tel que la pulsation ω de la source de tension est égale à la pulsation propre ω_0 du circuit LC correspondant :

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Écrire la solution réelle $u_2(t)$ du régime sinusoïdal permanent de la tension aux bornes du condensateur en fonction de R , L , C et E_0 .

Solution

- Comme $LC\omega_0^2 = 1$, le dénominateur de l'amplitude complexe \underline{U}_0 est alors :

$$(1 - LC\omega_0^2) + jRC\omega_0 = jRC\omega_0, \text{ soit : } \underline{U}_0 = \frac{E_0}{jRC\omega_0} = -j \frac{E_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

- L'amplitude réelle U_0 est le module de l'amplitude complexe \underline{U}_0 :

$$U_0 = \left| -j \frac{E_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \right| = \frac{E_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

- La phase à l'origine des temps est l'argument de l'amplitude complexe \underline{U}_0 :

$$\phi = \arg(\underline{U}_0) = \arg(-j) = -\frac{\pi}{2}.$$

On trouverait bien le même résultat en appliquant la formule générale. En effet :

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right) \text{ avec } 1 - LC\omega_0^2 = 0, \text{ d'où : } \phi = -\frac{\pi}{2} \text{ (car } \text{Arctan}(0) = 0).$$

- La solution réelle $u_2(t)$ du régime sinusoïdal permanent s'écrit donc :

$$u_2(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi) = \frac{E_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \text{ soit : } \mathbf{u_2(t) = \frac{E_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega t).}$$

B.3. Expressions en variables réduites

B.3.1 - Coefficient d'amortissement α

Le régime sinusoïdal permanent dépend des paramètres R, L et C du circuit. Comme pour l'étude du régime transitoire (cf. chapitre 4), il peut être plus simple d'exprimer l'amplitude réelle U_0 et la phase à l'origine ϕ en fonction de variables réduites. On utilise alors :

– la variable $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la pulsation propre du circuit ;

– le coefficient d'amortissement $\alpha = \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{1}{2}RC\omega_0$ (ou, ce qui est équivalent, le facteur de qualité $Q = \frac{1}{2\alpha}$).

L'amplitude complexe \underline{U}_0 s'écrit alors¹ :

$$\underline{U}_0 = \frac{E_0}{1 - x^2 + 2j\alpha x}.$$

On en déduit donc :

$$U_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2}} \text{ et } \phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1 - x^2}{2\alpha x}\right).$$

B.3.2 - Analogie avec l'oscillateur linéaire

Le tableau ci-dessous résume les analogies entre l'oscillateur électrique en régime sinusoïdal forcé étudié en électrocinétique et l'oscillateur linéaire en régime sinusoïdal forcé étudié en mécanique. L'inductance L correspond à « l'inertie », la résistance R aux « frottements » et l'inverse de la capacité C au « rappel » (cf. chapitre 4 § C. 6).

	Oscillateur électrique	Oscillateur mécanique
Équation différentielle	$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E_0 \cos(\omega t)$	$m \frac{d^2 X}{dt^2} + f \frac{dX}{dt} + kX = F_0 \cos(\omega t)$
Pulsation propre	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

1. Les calculs à effectuer pour obtenir les expressions de \underline{U}_0 , U_0 et ϕ en fonction de x et de α ne sont pas compliqués.

Coefficient d'amortissement	$\alpha = \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{1}{2}RC\omega_0$	$\alpha = \frac{f}{2m\omega_0} = \frac{1}{2}\frac{f}{k}\omega_0$
Facteur de qualité	$Q = \frac{1}{2\alpha}$	$Q = \frac{1}{2\alpha}$
Solution complexe	$\underline{u}_C = \frac{E_0 e^{j\omega t}}{-LC\omega^2 + jRC\omega + 1}$	$\underline{X} = \frac{\frac{F_0}{k} e^{j\omega t}}{-\frac{m}{k}\omega^2 + j\frac{f}{k}\omega + 1}$
Amplitude complexe avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$	$\underline{U}_0 = \frac{E_0}{1 - x^2 + 2j\alpha x}$	$\underline{X}_0 = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - x^2 + 2j\alpha x}$
Amplitude réelle	$U_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2}}$	$X_0 = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2}}$
Phase à l'origine des temps	$\phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1 - x^2}{2\alpha x}\right)$	$\phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1 - x^2}{2\alpha x}\right)$
Régime sinusoïdal permanent	$u_C(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$	$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi)$

B.4. Étude de la résonance tension

L'étude de la résonance tension aux bornes du condensateur du circuit RLC série¹ consiste à étudier les variations de l'amplitude réelle U_0 et de la phase à l'origine ϕ en fonction de la pulsation ω de la source de tension excitatrice, c'est-à-dire en fonction de la variable réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

B.4.1 - Étude de l'amplitude U_0

L'amplitude U_0 s'exprime en fonction de la variable d'étude x par :

$$U_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{f(x)}}$$

La fonction U_0 varie inversement² à la fonction f . Il suffit donc d'étudier les variations de f , dont la dérivée est :

$$f'(x) = 4x(x^2 - 1 + 2\alpha^2).$$

• **Premier cas** : $\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ (c'est-à-dire $Q < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$).

La dérivée f' s'annule pour $x = 0$ et elle est positive pour $x \in]0 ; +\infty[$ (f est croissante). La fonction U_0 décroît donc constamment vers 0 (fig. 4).

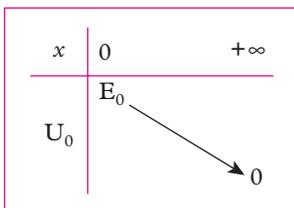


Fig. 4 - Tableau de variation de U_0 .

Si le coefficient d'amortissement α est élevé ($\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$), c'est-à-dire si le facteur de qualité Q est faible ($Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$), alors l'amplitude U_0 des oscillations décroît avec la pulsation ω .

• **Deuxième cas** : $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ (c'est-à-dire $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$).

La dérivée f' s'annule pour $x = 0$ et $x = \sqrt{1 - 2\alpha^2}$; elle est négative pour $x \in]0 ; \sqrt{1 - 2\alpha^2}[$ (f est décroissante) et positive pour $x \in]\sqrt{1 - 2\alpha^2} ; +\infty[$ (f est croissante). La fonction U_0 croît donc jusqu'à un maximum U_{\max} atteint en $x_{\max} = \sqrt{1 - 2\alpha^2}$, puis décroît vers 0 (fig. 5). La valeur du maximum est :

$$U_{\max} = U_0(x_{\max}) = U_0(\sqrt{1 - 2\alpha^2}) = \frac{E_0}{2\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

L'abscisse x_{\max} croît vers 1 quand $\alpha \rightarrow 0$. La pulsation correspondante ω_{\max} croît donc vers la pulsation propre ω_0 du circuit.

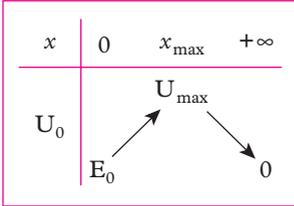


Fig. 5 - Tableau de variation de U_0 .

Propriété 1

Si le coefficient d'amortissement α est faible ($\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$), c'est-à-dire si le facteur de qualité Q est élevé ($Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$), alors l'amplitude U_0 de la tension passe par un maximum ($U_{\max} > E_0$) pour une pulsation ω_{\max} voisine de la pulsation propre ω_0 ($\omega_{\max} < \omega_0$ et $\omega_{\max} \rightarrow \omega_0$ quand $\alpha \rightarrow 0$) : on dit que l'oscillateur entre en **résonance tension**.

On peut tracer le réseau de courbes $y = \frac{U_0}{E_0} = g_\alpha(x)$ paramétrée par le coefficient d'amortissement α , c'est-à-dire par le facteur de qualité Q (fig. 6). Dans tous les cas, on a : $y(0) = 1$ et $y(1) = Q$.

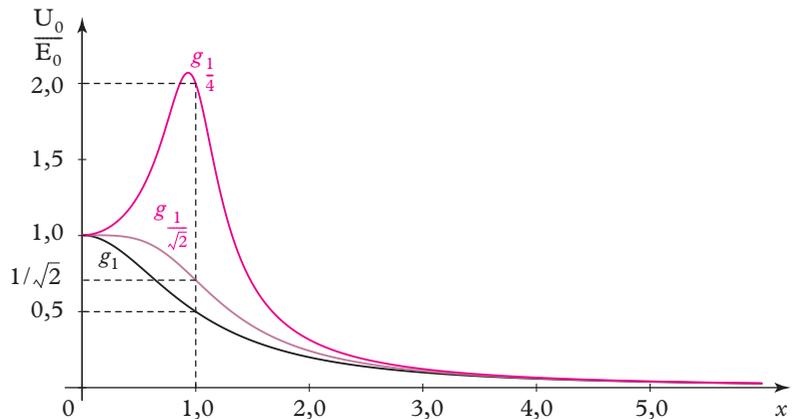


Fig. 6 - Allure des courbes g_1 , $g_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ et $g_{\frac{1}{4}}$. L'ordonnée du point d'abscisse 1 est égale au facteur de qualité Q .

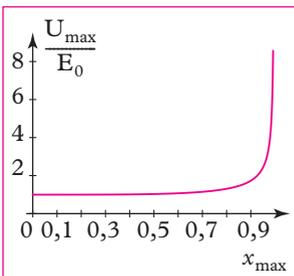


Fig. 7 - Courbe des maxima $U_{\max}(x_{\max})$, au facteur E_0 près.

B.4.2 - Courbe des maxima

Pour $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ou $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$), la courbe $U_0(x)$ passe par un maximum :

$$U_{\max} = \frac{E_0}{2\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}}, \text{ pour } x = x_{\max} = \sqrt{1 - 2\alpha^2}.$$

1. Les calculs à effectuer pour obtenir l'expression de U_{\max} en fonction de x_{\max} ne sont pas compliqués.

On peut alors tracer la courbe des maxima par l'ensemble des points d'abscisse x_{\max} et d'ordonnée U_{\max} . En éliminant le paramètre α entre x_{\max} et U_{\max} , on obtient l'équation cartésienne¹ de cette courbe (fig. 7) :

$$U_{\max}(x_{\max}) = \frac{E_0}{\sqrt{1 - x_{\max}^4}}, \text{ avec } x_{\max} \in [0 ; 1].$$

On déduit de cette expression que :

$$U_{\max} \rightarrow \infty \text{ quand } x_{\max} \rightarrow 1, \text{ c'est-à-dire quand } \alpha \rightarrow 0 \text{ (ou } Q \rightarrow \infty \text{)}.$$

Plus le coefficient d'amortissement α est faible, c'est-à-dire plus le facteur de qualité Q est élevé, et plus **la surtension** aux bornes du condensateur à la résonance tension est grande (fig. 8).

2. On a : $U_0 = QE_0$ pour $x = 1$, c'est-à-dire pour $\omega = \omega_0$.

Pour cette raison, on peut aussi définir le facteur de qualité Q comme le **facteur de surtension** du circuit² :

$$Q = \frac{U_0(\omega_0)}{E_0}, \text{ où } \omega_0 \text{ est la pulsation propre du circuit.}$$

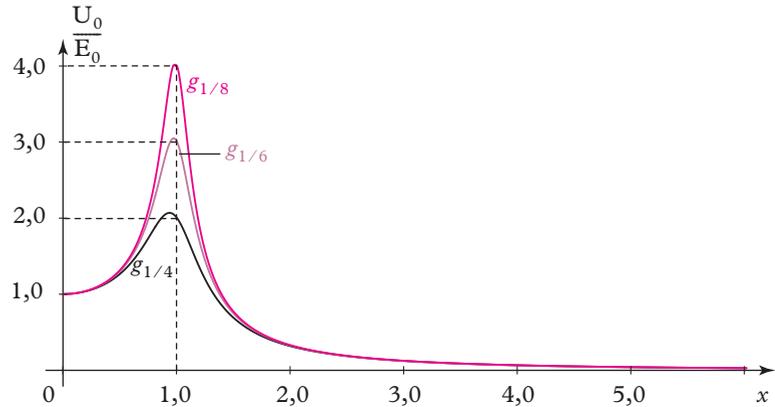


Fig. 8 - Allure des courbes $g_{1/4}$, $g_{1/6}$ et $g_{1/8}$. Plus Q augmente, plus la surtension à la résonance est grande.

B.4.3 - Étude de la phase ϕ

La phase ϕ à l'origine s'exprime en fonction de la variable d'étude x par :

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1 - x^2}{2\alpha x}\right) = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}[f(x)],$$

$$\text{avec } f(x) = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{x} - x\right).$$

La fonction f est une fonction décroissante de x quelle que soit la valeur de α . Comme la fonction Arctan est croissante, la fonction ϕ décroît de 0 à $-\pi$ (fig. 9).

On peut tracer le réseau de courbes $\phi = h_\alpha(x)$ paramétrée par le coefficient d'amortissement α , c'est-à-dire par le facteur de qualité Q (fig. 10). Dans tous les cas, on :

$$\phi(1) = -\frac{\pi}{2}.$$

x	0	1	$+\infty$
ϕ	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$

Fig. 9 - Tableau de variation de ϕ .

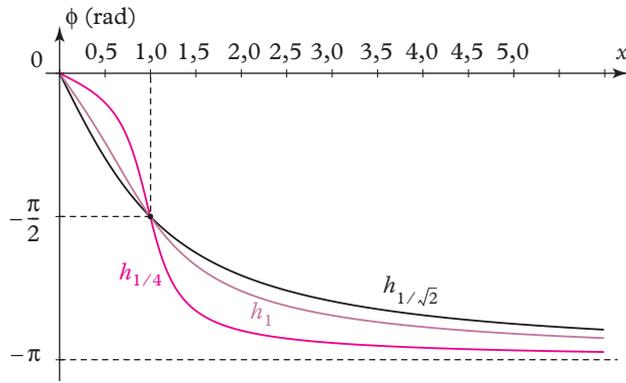


Fig. 10 - Allure des courbes h_1 , $h_{1/\sqrt{2}}$ et $h_{1/4}$. L'ordonnée du point d'abscisse 1 est $-\frac{\pi}{2}$.

B.5. Solution complète de l'équation différentielle

Il est difficile de donner la solution complète de l'équation différentielle dans le cas général, car de trop nombreux paramètres interviennent pour la définir. Nous allons donc étudier le cas particulier suivant :

– la pulsation de la source sinusoïdale est : $\omega = \omega_0$;

– le coefficient d'amortissement vaut : $\alpha = \frac{1}{2}$.

De ces valeurs, on déduit les égalités¹ :

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2} \quad \text{et} \quad RC = \frac{1}{\omega_0}$$

L'équation différentielle établie au § A.1.1 s'écrit alors :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0 \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E_0 \cos(\omega_0 t).$$

• Le régime sinusoïdal permanent correspond à la solution particulière sinusoïdale u_2 de l'équation différentielle. En notations complexes, on peut écrire² :

$$-\omega_0^2 \underline{u}_2 + j\omega_0^2 \underline{u}_2 + \omega_0^2 \underline{u}_2 = \omega_0^2 E_0 e^{j\omega_0 t}, \quad \text{d'où : } \underline{u}_2 = -jE_0 e^{j\omega_0 t} = E_0 e^{j(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})}.$$

La solution réelle est la partie réelle de la solution complexe :

$$\mathbf{u}_2(t) = E_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{E}_0 \sin(\omega_0 t).$$

• Le régime transitoire correspond à la solution de l'équation homogène :

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \omega_0 \frac{du_1}{dt} + \omega_0^2 u_1 = 0.$$

Le polynôme caractéristique en r associé à l'équation est :

$$r^2 + \omega_0 r + \omega_0^2 = 0, \quad \text{de racines : } r = -\frac{1}{2}\omega_0 [1 \pm j\sqrt{3}].$$

Le régime transitoire est donc pseudo-périodique (cf. chapitre 4) :

$$u_1(t) = e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) \right].$$

1. La première égalité découle de l'expression de ω_0 et la seconde de l'expression de α .

2. En notations complexes, on remplace : $\frac{du_2}{dt}$ par $j\omega_0 u_2$ et $\frac{d^2 u_2}{dt^2}$ par $-\omega_0^2 u_2$.

• La solution complète est la somme de u_1 et u_2 :

$$u_C(t) = u_1(t) + u_2(t) = e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) \right] + E_0 \sin(\omega_0 t).$$

Pour déterminer les constantes d'intégration A et B, il faut utiliser les conditions de continuité :

$$u_C(t=0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du_C}{dt}(t=0) = 0.$$

On a donc :

$$A = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} B + E_0 = 0, \quad \text{d'où} : B = -\frac{2\sqrt{3}}{3} E_0.$$

La tension u_C aux bornes du condensateur vaut donc :

$$u_C(t) = E_0 \left[\sin(\omega_0 t) - \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) \right].$$

En posant $x = \omega_0 t$, on peut tracer la courbe d'équation (fig. 11) :

$$y = \frac{u_C}{E_0} = \sin x - \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

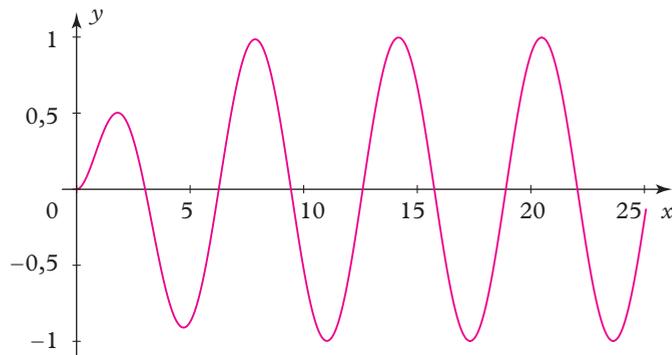


Fig. 11 - Évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur dans le cas particulier où $\omega = \omega_0$ et $\alpha = \frac{1}{2}$.

C. Étude du courant dans le circuit

C.1. Régime transitoire – Régime permanent

La tension u_C aux bornes du condensateur s'écrit $u_C = u_1 + u_2$, où u_1 exprime le régime transitoire et u_2 le régime sinusoïdal permanent. L'intensité i du courant, obtenue en dérivant u_C , est donc aussi la somme de deux termes :

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{du_1}{dt} + C \frac{du_2}{dt} = i_1 + i_2.$$

– Le terme i_1 correspond au régime transitoire. Son expression a déjà été donnée au chapitre 4 (cf. § C.3).

– Le terme i_2 correspond au régime sinusoïdal permanent. L'expression de i_2 est de la forme :

$$i_2(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi'), \quad \text{où } \omega \text{ est la pulsation du signal.}$$

L'amplitude I_0 et la phase à l'origine ϕ' dépendent des données R, L, C, E_0 et ω du problème. Leurs expressions seront déterminées dans le prochain paragraphe en utilisant les nombres complexes.

C.2. Utilisation des nombres complexes

• De même que pour la tension, on peut représenter l'intensité i_2 par une grandeur complexe :

$$i_2 = I_0 \cos(\omega t + \phi') = \text{Re}[i_2(t)], \text{ avec } i_2 = I_{-0} e^{j\omega t} \text{ et } I_{-0} = I_0 e^{j\phi'}$$

L'amplitude réelle I_0 est le module de l'amplitude complexe I_{-0} et la phase à l'origine des temps ϕ' est son argument :

$$I_0 = |I_{-0}| \text{ et } \phi' = \arg(I_{-0}).$$

• D'après la définition de i_2 , on a donc (cf. § A.2.2) :

$$i_2 = C \frac{du_2}{dt} = jC\omega u_2, \text{ d'où : } i_2 = jC\omega \frac{E_0 e^{j\omega t}}{-LC\omega^2 + jRC\omega + 1}$$

Comme $i_2(t) = I_{-0} e^{j\omega t}$, l'amplitude complexe I_{-0} s'écrit :

$$I_{-0} = \frac{jC\omega E_0}{-LC\omega^2 + jRC\omega + 1}$$

• L'amplitude réelle I_0 est le module de l'amplitude complexe I_{-0} :

$$I_0 = |I_{-0}| = \frac{C\omega E_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}$$

• La phase à l'origine ϕ' est l'argument de l'amplitude complexe I_{-0} . Elle se déduit simplement de l'expression $i_2 = jC\omega u_2$:

$$\phi' = \frac{\pi}{2} + \phi, \text{ d'où : } \phi' = \text{Arctan}\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right).$$

Application 2 Régime sinusoïdal permanent de l'intensité i

On considère un circuit RLC série tel que la pulsation ω de la source de tension est égale à la pulsation propre ω_0 du circuit LC correspondant :

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Écrire la solution réelle $i_2(t)$ du régime sinusoïdal permanent de l'intensité dans le circuit en fonction de R, L, C et E_0 .

Solution

Comme $LC\omega_0^2 = 1$, le dénominateur de l'amplitude complexe I_0 est alors :

$$(1 - LC\omega_0^2) + jRC\omega_0 = jRC\omega_0, \text{ soit : } I_{-0} = \frac{jC\omega E_0}{jRC\omega} = \frac{E_0}{R}$$

L'amplitude complexe est un nombre réel positif. On a donc :

$$I_0 = |I_{-0}| = \frac{E_0}{R} \text{ et } \phi' = \arg(I_{-0}) = 0, \text{ d'où : } i_2(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi') = \frac{E_0}{R} \cos(\omega t).$$

C.3. Étude de la résonance intensité

C.3.1 - Utilisation de variables réduites

Comme pour l'étude de la résonance tension aux bornes du condensateur (cf. § A.3.1), on utilise les variables réduites $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et α (ou Q). L'amplitude complexe \underline{I}_0 s'écrit alors¹ :

$$\underline{I}_0 = \frac{2j\alpha x \frac{E_0}{R}}{1 - x^2 + 2j\alpha x} = \frac{\frac{E_0}{R}}{\frac{1}{2j\alpha} \left(\frac{1}{x} - x \right) + 1} = \frac{\frac{E_0}{R}}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

C.3.2 - Étude de l'amplitude I_0

L'amplitude I_0 s'exprime en fonction de la variable d'étude x par :

$$I_0 = \frac{\frac{E_0}{R}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}} = \frac{\frac{E_0}{R}}{\sqrt{f(x)}}$$

La fonction I_0 varie inversement² à la fonction f . Il suffit donc d'étudier les variations de f , dont la dérivée est :

$$f'(x) = 2Q^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \left(x - \frac{1}{x} \right).$$

La dérivée f' s'annule pour $x = 1$; elle est négative pour $x \in]0 ; 1[$ (f est décroissante) et positive pour $x \in]1 ; +\infty[$ (f est croissante). La fonction I_0 croît donc jusqu'à un maximum I_{\max} atteint en $x = 1$, puis décroît vers 0 (fig. 12). La valeur du maximum est :

$$I_{\max} = I_0(1) = \frac{E_0}{R}.$$

Propriété 2

L'amplitude I_0 de l'intensité est maximale pour la pulsation propre ω_0 : on dit que l'oscillateur entre en **résonance intensité**. On a toujours :

$$I_{\max} = \frac{E_0}{R}.$$

On peut tracer le réseau de courbes $y = \frac{I_0}{I_{\max}} = g_Q(x)$ paramétrée par le facteur de qualité Q (fig. 13).

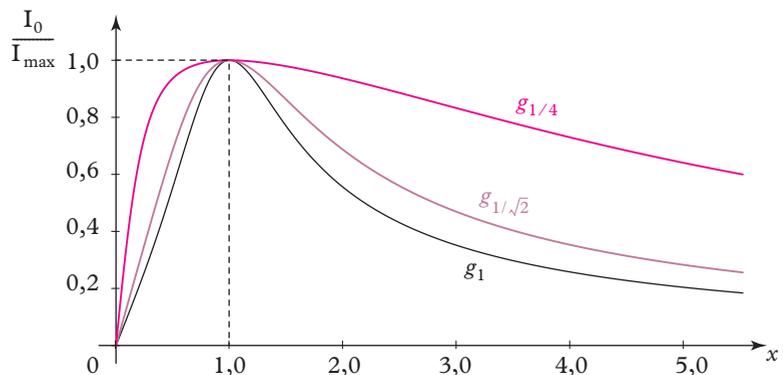


Fig. 13 - Allure des courbes g_1 , $g_{1/\sqrt{2}}$ et $g_{1/4}$. La résonance est obtenue pour $x = 1$.

1. Il est plus commode d'exprimer I_0 en fonction de Q que de α .

2. La fonction $\sqrt{\quad}$ est croissante : elle conserve donc le sens de variation. La fonction inverse est décroissante : elle inverse donc le sens de variation.

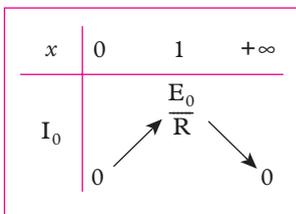


Fig. 12 - Tableau de variation de I_0 .

C.3.3 - Étude de la phase ϕ'

Comme $\phi' = \frac{\pi}{2} - \phi$, on obtient la courbe donnant ϕ' en fonction de x par une translation de $\frac{\pi}{2}$ de la courbe donnant ϕ en fonction de x (fig. 14).

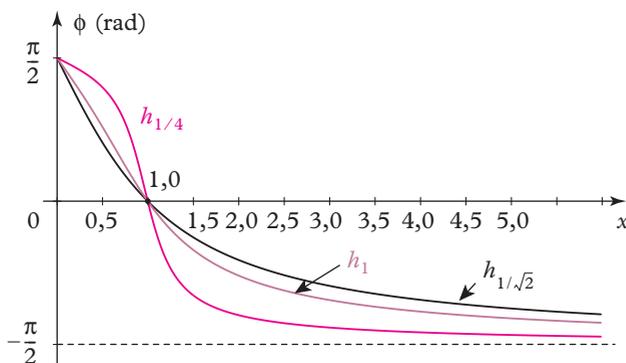


Fig. 14 - Allure des courbes h_1 , $h_{1/\sqrt{2}}$ et $h_{1/4}$. L'ordonnée du point d'abscisse 1 est nulle.

C.4. Bande passante du circuit

On cherche à déterminer les valeurs de la pulsation (appelées « pulsations de coupure ») qui vérifient :

$$I_0(x) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ et } I_{\max} = \frac{E_0}{R}.$$

Il faut donc résoudre l'équation :

$$I_0 = \frac{\frac{E_0}{R}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{E_0}{R\sqrt{2}}, \text{ soit : } Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \text{ ou } x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0.$$

On ne garde que les racines positives de ces deux polynômes :

$$x_1 = \frac{1}{2Q}[\sqrt{1 + 4Q^2} - 1] \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2Q}[\sqrt{1 + 4Q^2} + 1].$$

Les **pulsations de coupure** associées à ces valeurs de x sont donc :

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}[\sqrt{1 + 4Q^2} - 1] \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q}[\sqrt{1 + 4Q^2} + 1].$$

On appelle alors **bande passante** la différence : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

Définition 1

La bande passante d'un circuit est définie par la différence $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, où ω_1 et ω_2 sont les pulsations de coupure du circuit. Pour un circuit RLC série, on a :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

$\Delta\omega$ bande passante (s^{-1})

ω_0 période propre (s^{-1})

Q facteur de qualité (sans dimension)

1. On définit ainsi plus généralement le facteur de qualité Q d'un circuit :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

où ω_0 est la pulsation de résonance et $\Delta\omega$ la largeur de la bande passante.

Plus le facteur de qualité Q est élevé, plus la bande passante $\Delta\omega$ est petite et plus la résonance intensité du circuit est aiguë¹.

D. Aspect énergétique

D.1. Conservation de l'énergie

Dans le circuit, l'addition des tensions s'écrit :

$$E(t) = u_R + u_L + u_C, \text{ soit : } E(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C.$$

Pour passer à une égalité en puissance¹, on multiplie par $i = C \frac{du_C}{dt}$:

$$E(t)i(t) = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} + C \frac{du_C}{dt} u_C,$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$E(t)i(t) = Ri^2 + \frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt} + \frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt}. \quad (1)$$

– Le terme $E(t)i(t)$ est la puissance P_g positive fournie par le générateur idéal de tension sinusoïdale aux bornes du circuit RLC série.

– Le terme Ri^2 est la puissance P_J positive reçue par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule.

– Le terme $\frac{1}{2}Li^2$ représente l'énergie magnétique E_{mag} emmagasinée par la bobine.

– Le terme $\frac{1}{2}Cu_C^2$ représente l'énergie électrostatique $E_{\text{élec}}$ emmagasinée par le condensateur.

La puissance électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique et sert à faire varier l'énergie électromagnétique $E_{\text{élecmag}}$ emmagasinée dans le circuit² :

$$P_g = P_J + \frac{dE_{\text{mag}}}{dt} + \frac{dE_{\text{élec}}}{dt}.$$

D.2. Interprétation physique

Lorsque le régime sinusoïdal permanent est établi, la tension u_C aux bornes du condensateur et l'intensité i du courant dans le circuit sont des fonctions périodiques du temps (de période T imposée par la source de tension). Il est alors plus commode de travailler sur des valeurs moyennes que sur des valeurs instantanées.

Définition 2

Sur l'intervalle $[0 ; T]$, la valeur moyenne de la grandeur G fonction périodique du temps, notée $\langle G \rangle$, est définie par :

$$\langle G \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T G(t) dt.$$

En régime sinusoïdal permanent, on a donc³ :

$$\left\langle \frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt} dt = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2}Li^2 \right]_0^T = 0.$$

1. Le générateur est étudié en convention générateur : on fait donc apparaître la puissance fournie. Le conducteur ohmique, la bobine et le condensateur sont étudiés en convention récepteur : on fait donc apparaître les puissances reçues.

2. On peut définir l'énergie électromagnétique emmagasinée dans le circuit comme la somme de l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine et de l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur :

$$E_{\text{élecmag}} = E_{\text{mag}} + E_{\text{élec}}.$$

3. Comme u_C et i sont périodiques de période T , $u_C(0) = u_C(T)$ et $i(0) = i(T)$.

$$\left\langle \frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt} dt = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2}Cu_C^2 \right]_0^T = 0.$$

1. On a : $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$ et

$\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$. En effet, l'aire comprise sous les deux courbes est la même sur une période T : $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \langle \sin^2(\omega t) \rangle$ et $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$.

En passant aux valeurs moyennes, l'égalité (1) s'écrit donc¹ :

$$\langle E(t)i(t) \rangle = \langle Ri^2 \rangle = \frac{RI_0^2}{2}, \text{ car } i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi').$$

En régime sinusoïdal permanent, la puissance moyenne fournie par le générateur est entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance.

La puissance moyenne P fournie par le générateur est maximale à la résonance intensité ($\omega = \omega_0$). Elle vaut alors :

$$P = \langle E(t)i(t) \rangle = \frac{E_0^2}{2R}.$$

D.3. Interprétation énergétique de Q

2. On a : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

• L'énergie dissipée par effet Joule et perdue par le circuit au cours d'une période T_0 à la résonance intensité vaut² :

$$E_{\text{perdue}} = \langle E(t)i(t) \rangle = \frac{E_0^2}{2R} \times 2\pi\sqrt{LC} = \pi \frac{E_0^2}{R} \sqrt{LC}.$$

À la résonance intensité, l'énergie électromagnétique emmagasinée dans la bobine et dans le condensateur vaut³ :

$$E_{\text{élecmag}} = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2, \text{ avec } i(t) = \frac{E_0}{R} \cos(\omega_0 t) \text{ et } u_C = -\frac{E_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega_0 t).$$

$$E_{\text{élecmag}} = \frac{1}{2}L \times \frac{E_0^2}{R^2} \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}C \times \frac{E_0^2 L}{R^2 C} \sin^2(\omega_0 t) = \frac{LE_0^2}{2R^2}.$$

Le rapport de ces deux énergies est alors :

$$\frac{E_{\text{élecmag}}}{E_{\text{perdue}}} = \frac{\frac{LE_0^2}{2R^2}}{\pi \frac{E_0^2}{R} \sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

4. Cf. chapitre 4 § C.2.3.

• À la résonance intensité, le facteur de qualité Q vaut⁴ :

$$Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ d'où : } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Propriété 3

Le facteur de qualité Q est proportionnel au rapport de l'énergie électromagnétique emmagasinée dans le circuit par l'énergie perdue par effet Joule au cours d'une oscillation électrique à la résonance intensité :

$$Q = 2\pi \frac{E_{\text{élecmag}}}{E_{\text{perdue}}}$$

L'essentiel

✓ Résonance tension du circuit RLC série

- La tension u_C aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série soumis à la tension sinusoïdale $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ vérifie l'équation différentielle du second ordre :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E_0 \cos(\omega t).$$

– La solution u_1 de l'équation homogène correspond au régime transitoire (cf. chapitre 4).

– La solution particulière sinusoïdale u_2 correspond au régime sinusoïdal permanent. Elle est la partie réelle de la solution \underline{u}_2 de l'équation différentielle complexe associée :

$$\underline{u}_2 = \underline{U}_0 \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}[\underline{u}_2(t)], \text{ avec } \underline{u}_2 = \underline{U}_0 e^{j\omega t}.$$

L'amplitude réelle U_0 est alors le module de l'amplitude complexe \underline{U}_0 et la phase à l'origine des temps ϕ est son argument ($\underline{U}_0 = U_0 e^{j\phi}$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{U}_0 = |\underline{U}_0| = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}} \quad \text{ou} \quad U_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \\ \phi = \arg(\underline{U}_0) = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right) \quad \text{ou} \quad \phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(Q \frac{1 - x^2}{x}\right). \end{array} \right.$$

On utilise le facteur de qualité :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} \text{ et } x = \frac{\omega}{\omega_0},$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre (cf. chapitre 4).

- L'étude de la résonance tension aux bornes du condensateur est l'étude des variations de l'amplitude U_0 (et de la phase ϕ) des oscillations en fonction de la pulsation ω de la source excitatrice.

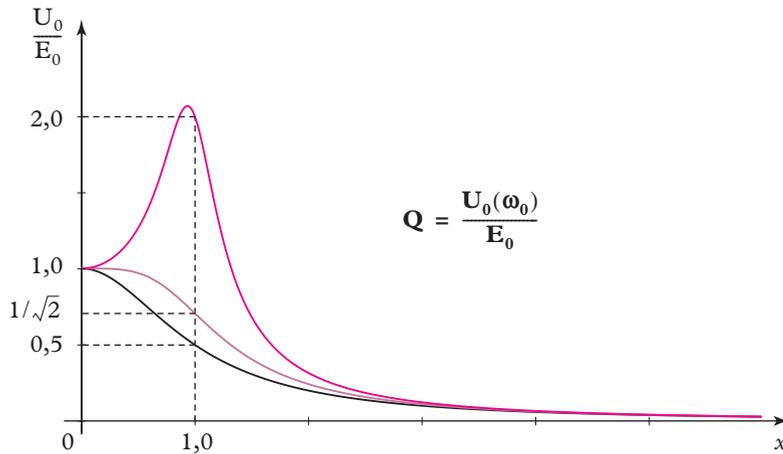
– Si le facteur de qualité Q est faible ($Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$), alors U_0 décroît avec ω .

– Si le facteur de qualité Q est élevé ($Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$), alors l'oscillateur entre en résonance tension pour la pulsation :

$$\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{et} \quad U_{\max} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} E_0.$$

Plus Q est élevé, plus la pulsation ω_{\max} est proche de la pulsation propre ω_0 et plus la surtension U_{\max} aux bornes du condensateur à la résonance est grande ($U_{\max} \approx QE_0$).

Méthodes



✓ Résonance intensité du circuit RLC série

- Comme pour la tension u_C , l'intensité i du courant dans un circuit RLC série soumis à la tension sinusoïdale $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ est la somme du terme i_1 correspondant au régime transitoire et du terme i_2 correspondant au régime sinusoïdal permanent :

$$i_2 = I_0 \cos(\omega t + \phi') = \text{RE}[i_2(t)],$$

avec $[i_2(t)] = \underline{I}_0 e^{j\omega t}$ et $i_2 = C \frac{du_2}{dt} = jC\omega u_2$.

- L'amplitude réelle I_0 est le module de l'amplitude complexe \underline{I}_0 et la phase à l'origine des temps ϕ' est son argument ($\underline{I}_0 = I_0 e^{j\phi'}$) :

$$\begin{cases} I_0 = |\underline{I}_0| = C\omega U_0 = \frac{I_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \\ \phi' = \arg(\underline{I}_0) = \frac{\pi}{2} + \phi = \text{Arctan}\left(Q \frac{1 - x^2}{x}\right) \end{cases}$$

- L'oscillateur entre en résonance intensité pour la pulsation propre ω_0 . L'amplitude maximale vaut :

$$I_{\max} = \frac{E_0}{R}$$

- La bande passante d'un circuit est définie par la différence :

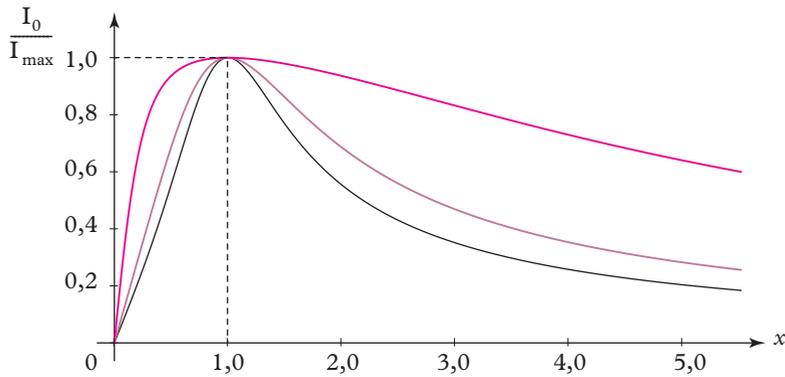
$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1,$$

où ω_1 et ω_2 sont les pulsations de coupure $I_0(\omega_1) = I_0(\omega_2) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$.

Pour un circuit RLC série, on a :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\omega \text{ bande passante (s}^{-1}\text{)} \\ \omega_0 \text{ période propre (s}^{-1}\text{)} \\ Q \text{ facteur de qualité (sans dimension)} \end{array} \right.$$

Plus le facteur de qualité Q est élevé, plus la bande passante $\Delta\omega$ est petite et plus la résonance intensité du circuit est aiguë.



✓ Aspects énergétiques du circuit RLC série

- Sur l'intervalle $[0 ; T]$, la valeur moyenne de la grandeur G périodique est :

$$\langle G \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T G(t) dt.$$

- En régime sinusoïdal permanent, la puissance moyenne fournie par le générateur est entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance.
- Le facteur de qualité Q est proportionnel au rapport de l'énergie électromagnétique $E_{\text{élecmag}}$ emmagasinée dans le circuit par l'énergie E_{perdue} perdue par effet Joule au cours d'une période des oscillations électriques à la résonance intensité :

$$Q = 2\pi \frac{E_{\text{élecmag}}}{E_{\text{perdue}}}.$$

Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment utiliser les nombres complexes pour étudier un circuit en régime sinusoïdal forcé ?

Soit un circuit linéaire soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation ω . On se propose d'utiliser les nombres complexes pour déterminer la solution sinusoïdale permanente de l'équation.

→ Savoir faire

- ① Établir l'équation différentielle avec second membre qui caractérise le circuit.
- ② Construire une équation complexe dont la partie réelle est l'équation précédente (la partie imaginaire n'est pas utile en tant que telle, mais elle permet de simplifier le calcul).
- ③ Injecter une solution complexe de la forme $\underline{x}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ dans l'équation.
- ④ Factoriser l'amplitude complexe $\underline{X}_0 = X_0 e^{j\phi}$. Son expression ne fait plus intervenir le temps.
- ⑤ Déterminer l'amplitude X_0 de la solution réelle et sa phase ϕ :

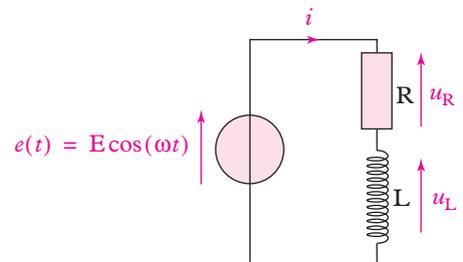
$$X_0 = |\underline{X}_0| \quad \text{et} \quad \phi = \arg(\underline{X}_0).$$



Cette solution s'accompagne d'une solution sans second membre transitoire de durée τ caractéristique. Au bout de quelques τ , la solution sinusoïdale permanente perdure seule.

→ Application

Donner l'expression de l'amplitude du courant $i(t)$ qui parcourt le circuit schématisé ci-contre en fonction de la pulsation ω du générateur de tension :



Solution

- ❶ La loi des mailles conduit à l'équation différentielle :

$$e(t) = u_R + u_L = Ri + L \frac{di}{dt}, \text{ d'où : } \frac{L di}{R dt} + i = \frac{E}{R} \cos(\omega t).$$

- ❷ L'équation complexe associée est :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R} e = \frac{E}{R} e^{j\omega t}.$$

- ❸ On injecte $\underline{i}(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ dans cette équation :

$$\frac{L}{R} j\omega I_0 e^{j(\omega t + \phi)} + I_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \frac{E}{R} e^{j\omega t}.$$

- ❹ On factorise l'amplitude complexe $\underline{I}_0 = I_0 e^{i\phi}$ et on simplifie :

$$\underline{I}_0 \left(\frac{L}{R} j\omega + 1 \right) = \frac{E}{R}, \text{ d'où : } \underline{I}_0 = \frac{E}{R + jL\omega}.$$

- ❺ Le module de \underline{I}_0 est l'amplitude demandée :

$$I_0 = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

La durée $\tau = \frac{L}{R}$ qui apparaît dans l'équation est celle à l'issue de laquelle le régime transitoire disparaît.

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Résonance intensité

On effectue l'étude de la résonance intensité d'un circuit RLC série. Le générateur de tension sinusoïdale branché à ses bornes délivre une tension d'amplitude constante $E_0 = 6$ V. On s'intéresse au régime sinusoïdal permanent. Quand on fait varier la fréquence, on observe que l'intensité du courant passe par un maximum d'amplitude $I_{0\max} = 60$ mA pour la fréquence $f_0 = 1\,590$ Hz.

Pour la fréquence $f = 3\,000$ Hz, l'amplitude de l'intensité est 36 mA.

- Déterminer la pulsation propre ω_0 du circuit.
- Déterminer le facteur de qualité Q et le coefficient d'amortissement α .
- Exprimer les grandeurs L , R et C .

Ex. 2 Résonance aiguë

On étudie la résonance tension aux bornes d'un condensateur de capacité C en série avec une bobine réelle d'inductance L et de résistance r . On observe une résonance aiguë.

Le générateur de tension sinusoïdale branché aux bornes du circuit délivre une tension d'amplitude E_0 indépendante de la fréquence.

On constate qu'à faibles fréquences, la tension aux bornes de C possède l'amplitude : $E_0 = 6$ V.

Cette amplitude passe par un maximum pour la fréquence de résonance $f_r = 800$ Hz : $U_{\max} = 75$ V.

À la fréquence $f = 1\,600$ Hz, cette amplitude vaut : $U_0 = 5,9$ V.

- Quel est le facteur de qualité Q du circuit ? En déduire le coefficient d'amortissement.
- Quelle est la pulsation propre ω_0 ?
- Déterminer L et r sachant que $C = 200$ nF.
- Vérifier alors qu'à la fréquence $f = 1\,600$ Hz, on a bien l'amplitude $U_0 = 5,9$ V pour la tension aux bornes du condensateur.

Déterminer alors l'avance de phase de la tension aux bornes du condensateur par rapport à la tension délivrée par l'alimentation du circuit.

Ex. 3 Résonance floue

En travaux pratiques, nous étudions un circuit RLC avec $C = 800$ nF. On dresse le tableau de mesure suivant, où U_0 est l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur et E_0 l'amplitude de la tension aux bornes du générateur.

$f(\text{Hz})$	0	300	500	600	700
$\frac{U_0}{E_0}$	1	1,07	1,15	1,15	1,10

$f(\text{Hz})$	800	1 000	1 200	1 500
$\frac{U_0}{E_0}$	1	0,73	0,51	0,32

- Tracer la courbe de résonance tension.
- Quel est l'ordre de grandeur de la fréquence de résonance ? La détermination est-elle précise ?
- Estimer le facteur de qualité Q .
- Déterminer, en exploitant la fréquence de 800 Hz, la fréquence de résonance f_r et la fréquence propre f_0 du circuit.
- En déduire les grandeurs L et R .

Niveau 2

Ex. 4 Influence de la capacité

On étudie la résonance tension aux bornes d'un condensateur de capacité C en utilisant une bobine d'inductance L et de résistance R .

On note Q le facteur de qualité, ω_0 la pulsation propre ($\omega_0 = 2\pi f_0$) et ω_r la pulsation de résonance ($\omega_r = 2\pi f_r$).

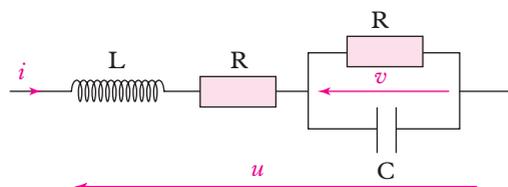
- Exprimer Q , ω_0 et ω_r en fonction de L , R et C .
- On peut faire varier la capacité C . Expérimentalement, on mesure la fréquence de résonance f_r en fonction de C .

Quelle courbe doit-on tracer pour avoir une relation linéaire ?

Montrer qu'à partir de ce tracé, on peut déterminer l'inductance L et la résistance R de la bobine.

Ex. 5 Courant dans un circuit

a) Dans le circuit ci-dessous, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur.



b) La tension appliquée est sinusoïdale, de pulsation ω et d'amplitude U_0 . On étudie le cas particulier où :

$$\frac{L}{R} = RC = \tau.$$

Déterminer la tension v en fonction de ω en régime sinusoïdal permanent.

Tracer la courbe donnant l'amplitude de v en fonction de ω .

Effectuer l'étude de la phase.

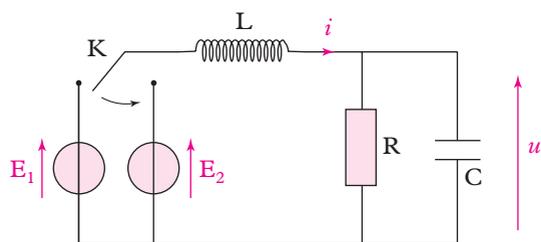
Ex. 6 Deux générateurs : régime transitoire

Le circuit ci-dessous est branché depuis longtemps sur le générateur de tension constante $E_1 = E_0$. À l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur K sur le générateur sinusoïdal $E_2 = E_0 \cos(\omega t)$.

a) Déterminer $u(t)$ pour $t > 0$ dans le cas où :

$$\frac{L}{R} = RC = \tau.$$

b) Étudier le régime sinusoïdal permanent et tracer la courbe de résonance tension.



Niveau 3

Ex. 7 Résonance tension aux bornes de l'inductance L

Le circuit RLC est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

a) Rappeler l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur.

Retrouver, en notations complexes, l'expression de la tension \underline{u}_C en fonction de \underline{e} . En déduire l'amplitude complexe \underline{U}_{C_0} en fonction du E_0 .

b) Retrouver l'expression de l'intensité complexe \underline{i} et celle de l'amplitude complexe \underline{I}_0 .

c) Quelle relation linéaire lie la tension u_L aux bornes de l'inductance L et l'intensité i ? En déduire l'expression de la tension complexe \underline{u}_L et celle de l'amplitude complexe \underline{U}_{L_0} .

d) On pose : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R}$.

Déterminer l'amplitude réelle $U_{L_0} = |\underline{U}_{L_0}|$ en fonction de E_0 , x et Q .

e) On pose $x' = \frac{1}{x}$. Exprimer à nouveau \underline{U}_{L_0} et U_{L_0} en fonction de x' .

Vérifier que la loi obtenue est la même que celle de l'amplitude réelle U_{C_0} de la tension aux bornes du condensateur en fonction de x .

Quelle conclusion peut-on en tirer pour le tracé des courbes de résonance ?

Indications

Ex. 1 b) Connaître l'expression de l'amplitude I_0 en fonction de la variable $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et du facteur de qualité Q .

Ex. 2 a) Lorsque le facteur de qualité Q est élevé, la pulsation à la résonance tension est très proche de la pulsation propre ω_0 .

d) Connaître l'expression de l'amplitude U_0 en fonction de la variable $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et du facteur de qualité Q .

Ex. 3 c) Connaître l'expression de l'amplitude U_0 à la résonance tension.

Ex. 5 b) Utiliser les nombres complexes pour étudier le régime sinusoïdal permanent.

Ex. 6 a) Déterminer les constantes d'intégration grâce aux conditions initiales sur la solution complète.

b) Utiliser les nombres complexes pour étudier le régime sinusoïdal permanent.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

a) La fréquence de résonance intensité est la fréquence propre du circuit. On a donc :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 9\,990 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) L'amplitude I_0 s'écrit en fonction de la variable $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et du facteur de qualité Q :

$$I_0 = \frac{I_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}.$$



Pour retrouver cette expression, se reporter au § C. 3. 1 du cours.

Pour $f = 3\,000 \text{ Hz}$, on a : $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} = 1,89$, d'où :

$$1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{I_{\max}}{I_0}\right)^2, \text{ soit : } Q = \frac{\sqrt{\left(\frac{I_{\max}}{I_0}\right)^2 - 1}}{\left|x - \frac{1}{x}\right|}.$$

A.N. $Q = 0,983$; $\alpha = \frac{1}{2Q} = 0,509$.

c) • À la résonance intensité, on a :

$$I_{\max} = \frac{E_0}{R}, \text{ d'où : } R = \frac{E_0}{I_{\max}} = 100 \, \Omega.$$

• On déduit L de l'expression du facteur de qualité Q :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R}, \text{ d'où : } L = \frac{QR}{\omega_0} = 9,83 \text{ mH}.$$

• On déduit C de l'expression de la pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ d'où : } C = \frac{1}{L\omega_0^2} = 1,02 \, \mu\text{F}.$$



Il faut parfaitement connaître les expressions des variables réduites ω_0 , λ , α et Q , et savoir les utiliser judicieusement en fonction des données de l'énoncé.

Exercice 2

a) Le facteur de qualité Q , aussi appelé facteur de surtension, vérifie la relation :

$$Q = \frac{U_0(\omega_0)}{E_0}, \text{ où } E_0 \text{ est l'amplitude basses fréquences de la tension aux bornes de } C.$$

Lorsque la résonance est aiguë, la pulsation ω_{\max} correspondante est très proche de la pulsation propre ω_0 .

On peut donc considérer en bonne approximation que :

$$Q \approx \frac{U_{\max}}{E_0} = 12,5 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{2Q} = 0,04.$$



Contrairement à la résonance intensité, la résonance tension ne se fait pas pour une pulsation égale à la pulsation propre ω_0 .

b) Plus la résonance est aiguë, plus la fréquence de résonance est voisine de la fréquence propre :

$$f_0 \approx f_r = 800 \text{ Hz}, \quad \text{d'où} : \omega_0 = 2\pi f_0 = 5\,027 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

c) On a : $LC\omega_0^2 = 1$, d'où : $L = \frac{1}{C\omega_0^2} = 0,198 \text{ H}$.



On préfère souvent retenir l'expression de la pulsation propre ω_0 sous la forme $LC\omega_0^2 = 1$.

Par ailleurs : $Q = \frac{L\omega_0}{r}$, d'où : $r = \frac{L\omega_0}{Q} = 79,6 \text{ } \Omega$.

d) • L'amplitude de U_0 s'écrit en fonction de la variable $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et du facteur de qualité Q :

$$U_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}.$$

Pour $f = 1\,600 \text{ Hz}$, on a : $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} = 2$, d'où : $U_0 = 5,92 \text{ V}$.

On retrouve bien le résultat expérimental.

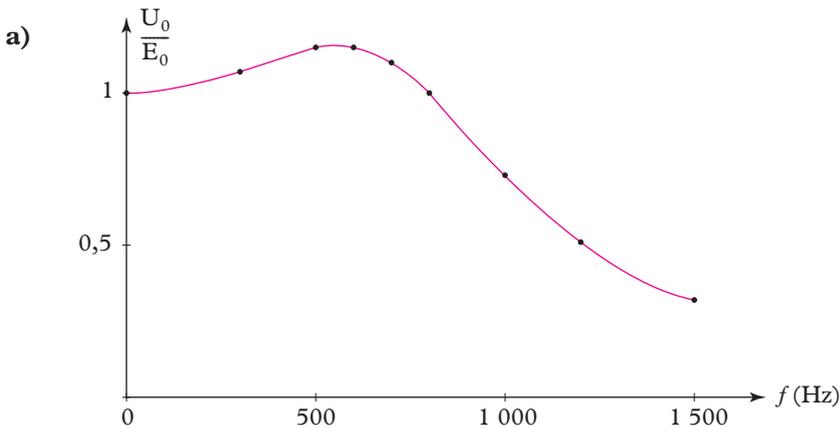
• L'avance de phase ϕ est donnée par la relation :

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(Q \frac{1-x^2}{x}\right) = -3,08 \text{ rad}, \quad \text{soit} : \phi = -177^\circ.$$



Pour retrouver ces expressions, se reporter respectivement aux § B. 4. 1 et B. 4. 2 du cours.

Exercice 3



b) La fréquence de résonance est de l'ordre de 500 à 600 Hz. La détermination n'est pas très précise.

c) La courbe passe par un maximum de valeur :

$$\begin{aligned} \left(\frac{U_0}{E_0}\right)_{\max} &= \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2-1}} = 1,15. \\ 4Q^4 - (1,15)^2(4Q^2-1) &= 0. \\ Q^4 - (1,15)^2Q^2 + \left(\frac{1,15}{2}\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$



Pour retrouver cette expression, se reporter au § B. 4. 1 du cours.

L'équation bicarrée possède deux solutions en Q^2 :

$$\begin{cases} Q^2 = 0,335 \Rightarrow Q = 0,579 \\ Q^2 = 0,988 \Rightarrow Q = 0,994 \end{cases}$$

La courbe admet un maximum si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. On a donc :

$$Q = 0,994, \text{ soit : } Q \approx 1.$$



Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors U_0 décroît avec ω .

d) Pour $f = 800$ Hz, on a : $\frac{U_0}{E_0} = 1 \approx Q$, d'où : $f_0 \approx 800$ Hz.

La fréquence de résonance est donc :

$$f_r = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = 562 \text{ Hz.}$$



Comme $\omega = 2\pi f$, une relation entre pulsations reste valable entre fréquences.

e) On a : $LC\omega_0^2 = 1$, d'où : $L = \frac{1}{C\omega_0^2} = 49,4$ mH.

Par ailleurs : $Q = \frac{L\omega_0}{R}$, d'où : $R = \frac{L\omega_0}{Q} = 250 \Omega$.

Exercices de niveau 2

Exercice 4

a) On a : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ et pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

On en déduit :

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2C}{2L}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

b) Quand C varie, pour vérifier une relation linéaire, il faut tracer f_r^2 en fonction de $\frac{1}{C}$. En effet :

$$\omega_r = 2\pi f_r, \text{ d'où : } f_r^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2} \right).$$

Lorsqu'on trace la droite $f_r\left(\frac{1}{C}\right)$:

– la pente est $\frac{1}{4\pi^2 L}$, d'où la détermination de L ;

– l'ordonnée à l'origine est $-\frac{R^2}{8\pi^2 L^2}$, d'où la détermination de R connaissant l'inductance L.

Exercice 5

a) Notons v la tension aux bornes du condensateur. On a : $i = C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R}$ et $u = L\frac{di}{dt} + Ri + v$.

On obtient l'équation différentielle :

$$u = \left(LC\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dv}{dt} \right) + \left(RC\frac{dv}{dt} + v \right) + v.$$

$$u = LC\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + RC \right)\frac{dv}{dt} + 2v.$$

b) On a : $\frac{L}{R} = RC = \tau$, d'où : $LC = \tau^2$.

L'équation différentielle vérifiée par v peut alors s'écrire :

$$\tau^2\frac{d^2v}{dt^2} + 2\tau\frac{dv}{dt} + 2v = u(t).$$

La tension appliquée étant sinusoïdale, on utilise les notations complexes et on remplace $\frac{dv}{dt}$ par $j\omega v$

et $\frac{d^2v}{dt^2}$ par $-\omega^2 v$. On a donc :

$$\underline{v}[-\omega^2\tau^2 + 2j\omega\tau + 2] = \underline{u}, \text{ avec } \underline{u} = U_0 e^{j\omega t}.$$

$$\underline{v} = \frac{\underline{u}}{2 - \omega^2\tau^2 + 2j\omega\tau} = \frac{\underline{u}}{j[2\omega\tau - j(2 - \omega^2\tau^2)]}.$$

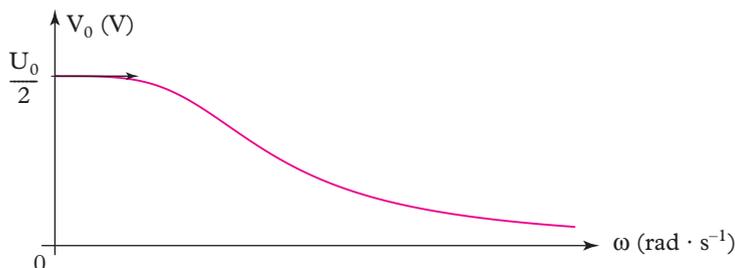


On factorise le dénominateur par j pour simplifier le calcul à venir de la phase ϕ . En effet, la partie réelle du dénominateur $(2 - \omega^2\tau^2)$ change de signe avec ω , alors que la partie imaginaire $2\omega\tau$ est toujours positive. Par cette astuce, on pourra aboutir à une formule valable pour toutes les valeurs de $\omega > 0$.

L'amplitude réelle V_0 est le module de l'amplitude complexe \underline{V}_0 :

$$V_0 = \frac{U_0}{\sqrt{(2 - \omega^2\tau^2)^2 + 4\omega^2\tau^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{4 + \omega^4\tau^4}}.$$

V_0 est une fonction décroissante de la pulsation ω .

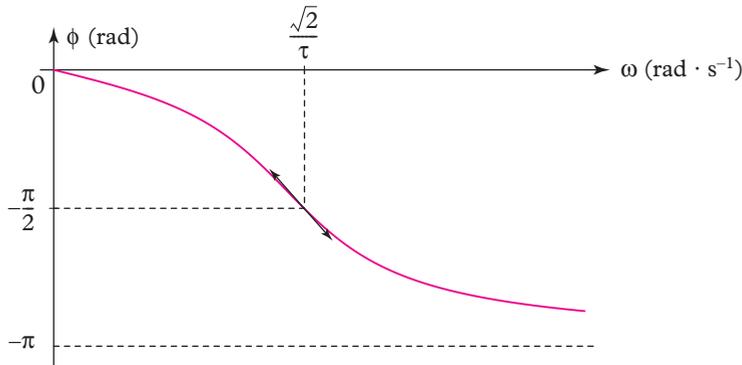


La phase ϕ est l'argument de l'amplitude complexe \underline{V}_0 :

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{2 - \omega^2\tau^2}{2\omega\tau}\right).$$

ϕ est aussi une fonction décroissante de ω , variant de $\phi = 0$ pour $\omega = 0$ à $\phi = -\pi$ pour $\omega \rightarrow +\infty$.

 On peut aussi écrire : $\frac{2 - \omega^2\tau^2}{2\omega\tau} = \frac{1}{\omega\tau} - \frac{\omega\tau}{2}$, somme de deux fonctions décroissantes. Comme la fonction Arctan est croissante, elle conserve le sens des variations.



Exercice 6

a) Pour $t > 0$, on a : $E_2 = L \frac{di}{dt} + u$, avec $i = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt}$.



On applique une fois la loi des mailles et une fois la loi des nœuds au circuit étudié.

On en déduit donc l'équation différentielle vérifiée par u :

$$E_2 = LC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du}{dt} + u,$$

encore écrite :

$$\tau^2 \frac{d^2u}{dt^2} + \tau \frac{du}{dt} + u = E_0 \cos(\omega t).$$

• Recherche de la solution u_1 , de l'équation homogène :

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{\tau^2} = 0.$$

Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$r^2 + \frac{r}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} = 0, \text{ avec } \Delta = \frac{1}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2} = -\frac{3}{\tau^2} < 0.$$

La solution correspondant au régime transitoire (pseudo-périodique) est donc :

$$u_1(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2\tau}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2\tau}\right) \right].$$

• Recherche de la solution particulière u_2 sinusoïdale :

$$\underline{u}_2[-\omega^2\tau^2 + j\omega\tau + 1] = E_0 e^{j\omega t}, \text{ d'où : } \underline{u}_2 = \frac{E_0 e^{j\omega t}}{1 - \omega^2\tau^2 + j\omega\tau}.$$

La solution réelle $u_2(t)$ est la partie réelle de la solution complexe $\underline{u}_2(t)$:

$$\underline{u}_2(t) = \frac{E_0[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)](1 - \omega^2\tau^2 - j\omega\tau)}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2},$$

d'où :

$$u_2(t) = \text{Re}[\underline{u}_2(t)] = \frac{E_0}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2} [(1 - \omega^2\tau^2)\cos(\omega t) + \omega\tau\sin(\omega t)].$$



Pour déterminer la solution particulière sinusoïdale $u_2(t)$, on utilise toujours les nombres complexes.

• Écriture de la solution complète :

$$u(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2\tau}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2\tau}\right) \right] + \frac{E_0[(1 - \omega^2\tau^2)\cos(\omega t) + \omega\tau\sin(\omega t)]}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2}.$$

• Les constantes A et B intervenant dans l'expression du régime transitoire se déterminent grâce aux conditions initiales.

– La tension aux bornes du condensateur est continue. On a donc :

$$u(0) = E_0 = A + \frac{E_0(1 - \omega^2\tau^2)}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2}, \quad \text{d'où : } A = \frac{E_0\omega^4\tau^4}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2}.$$

– L'intensité i dans la bobine est continue. À $t = 0$, on a :

$$i(0) = \frac{E_0}{R} \quad \text{et} \quad u(0) = E_0, \quad \text{d'où : } \frac{du}{dt}(0) = 0.$$

On en déduit :

$$-\frac{A}{2\tau} + \frac{\sqrt{3}}{2\tau}B + \frac{E_0\omega^2\tau}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2} = 0, \quad \text{d'où : } B = \frac{3}{\sqrt{3}}E_0\omega^2\tau^2 \frac{(\omega^2\tau^2 - 2)}{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2}.$$



L'expression complète de $u(t)$ est très lourde !

b) Le régime sinusoïdal permanent correspond à la solution particulière sinusoïdale u_2 . On détermine l'amplitude U_{20} et la phase ϕ en utilisant l'écriture complexe \underline{u}_2 :

$$\underline{u}_2 = \frac{E_0 e^{j\omega t}}{1 - \omega^2\tau^2 + j\omega\tau} = \underline{U}_2 e^{j\omega t}.$$

• L'amplitude réelle est le module de l'amplitude complexe :

$$U_{20} = |\underline{U}_2| = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + \omega^2\tau^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \omega^2\tau^2 + \omega^4\tau^4}}.$$

On pose : $x = \omega\tau$. L'amplitude U_{20} s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{U_{20}}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 + x^4}} = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}, \quad \text{avec } f(x) = 1 - x^2 + x^4.$$

La fonction f passe par un minimum en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On a alors :

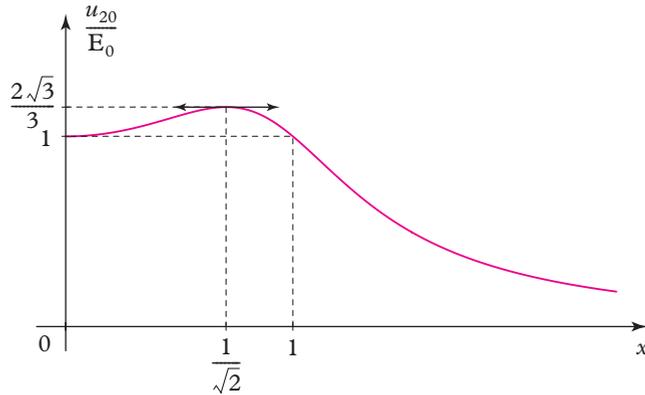
$$\left(\frac{U_{20}}{E_0}\right)_{\max} = \frac{U_{20}}{E_0}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15.$$



On détermine très simplement le sens de variation de la fonction f en étudiant le signe de sa dérivée.



Le minimum de la fonction f correspond au maximum de la fonction U_{20} .



• La phase est l'argument de l'amplitude complexe :

$$\phi = \arg(\underline{U}_2) = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1 - \omega^2\tau^2}{\omega\tau}\right).$$

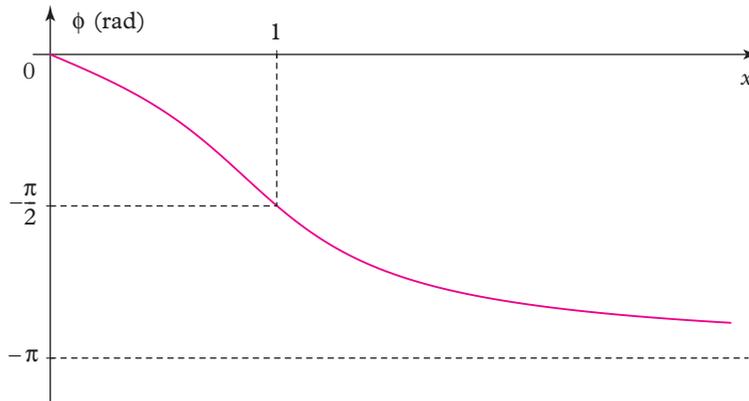


On obtient cette expression en multipliant d'abord le numérateur et le dénominateur par j .

On pose : $x = \omega\tau$. La phase ϕ s'écrit alors sous la forme :

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x} - x\right).$$

La fonction ϕ décroît entre les valeurs 0 (pour $x = 0$) et $-\pi$ (pour $x \rightarrow +\infty$).



Exercices de niveau 3

Exercice 7

a) L'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur est :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = e(t) = E_0 \cos(\omega t).$$

En notations complexes, on remplace $e(t)$ par $\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t}$ et u_C par \underline{u}_C comme $\frac{du_C}{dt} = j\omega \underline{u}_C$ et $\frac{d^2 \underline{u}_C}{dt^2} = -\omega^2 \underline{u}_C$, on obtient :

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{e}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}, \text{ d'où : } \underline{U}_{C_0} = \frac{E_0}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

b) On a : $i = C \frac{du_C}{dt}$, d'où : $\underline{i} = C \frac{d\underline{u}_C}{dt} = jC\omega \underline{u}_C$.

On en déduit donc :

$$\underline{i} = \frac{jC\omega \underline{e}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \text{ et } \underline{I}_0 = \frac{jC\omega E_0}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

c) La relation liant u_L à i est :

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \text{ d'où : } \underline{u}_L = jL\omega \underline{i}.$$

On en déduit donc :

$$\underline{u}_L = \frac{-LC\omega^2 \underline{e}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \text{ et } \underline{U}_{L_0} = \frac{-LC\omega^2 E_0}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

d) On fait apparaître ω_0 dans l'expression de \underline{U}_{L_0} :

$$\underline{U}_{L_0} = \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} E_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + jRC\omega_0 \frac{\omega}{\omega_0}}.$$

Or, $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, d'où :

$$\underline{U}_{L_0} = \frac{-x^2 E_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}.$$

L'amplitude réelle vaut donc :

$$U_{L_0} = |\underline{U}_{L_0}| = \frac{x^2 E_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}.$$

e) On remplace x par $\frac{1}{x'}$ dans l'expression de \underline{U}_{L_0} :

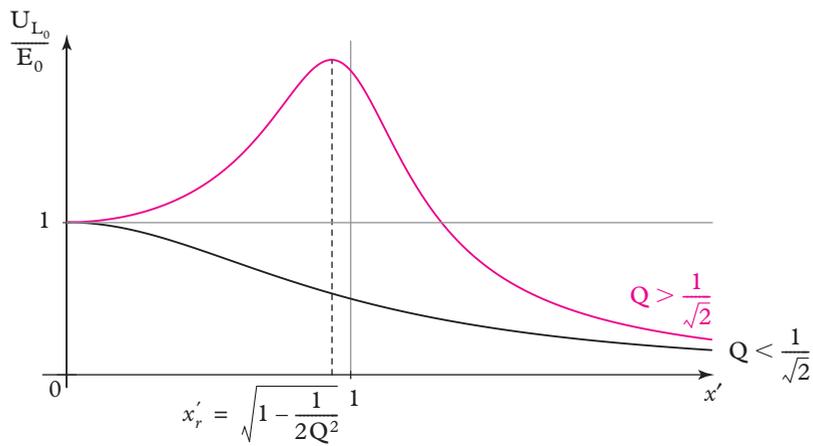
$$\underline{U}_{L_0} = \frac{-\frac{1}{x'^2} E_0}{1 - \frac{1}{x'^2} + j\frac{1}{Qx'}} = \frac{-E_0}{(x'^2 - 1) + j\frac{x'}{Q}}.$$

$$\text{D'où : } U_{L_0} = |\underline{U}_{L_0}| = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - x'^2)^2 + \frac{x'^2}{Q^2}}}.$$

D'après la question a), l'amplitude réelle de la tension aux bornes du condensateur vaut :

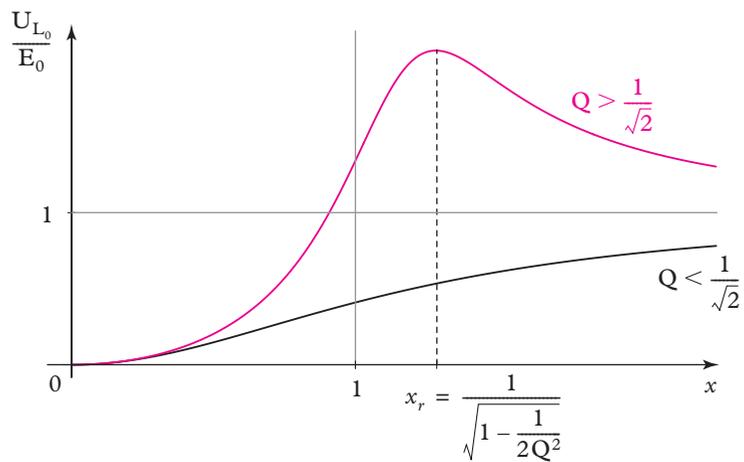
$$U_{C_0} = |\underline{U}_{C_0}| = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}.$$

Les fonctions $U_{L_0}(x')$ et $U_{C_0}(x)$ sont identiques, donc les courbes de résonance sont semblables. On obtient alors le réseau de courbes suivant en fonction de x' :



On retrouve le réseau de courbes tracé dans le cours au § A. 4 sur la figure 6.

En fonction de $x = \frac{1}{x'}$, le réseau de courbe devient :



Régime sinusoïdal forcé

Introduction

Pour étudier le régime sinusoïdal permanent d'un circuit RLC alimenté par un générateur de tension sinusoïdale, nous avons écrit les grandeurs électriques au moyen des nombres complexes. Dans ce chapitre, nous généraliserons cette technique à un circuit électrique quelconque en régime sinusoïdal forcé.

Plan du chapitre 7

A. Généralisation des notations complexes	214
1. Le régime sinusoïdal forcé.	214
2. Utilisation des nombres complexes	214
B. Impédance et admittance complexes	214
1. Définitions	214
2. Cas des composants R, L et C	215
3. Généralisation de la loi d'Ohm	215
C. Lois de l'électrocinétique en complexes	216
1. Loi des nœuds.	217
2. Loi des mailles.	217
3. Théorèmes généraux de l'électrocinétique	217
D. Étude énergétique	220
1. Puissance instantanée – Puissance moyenne	220
2. Valeurs efficaces	221
3. Facteur de puissance	222
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	224
Énoncés des exercices	230
Indications	232
Solutions des exercices	233

A. Généralisation des notations complexes

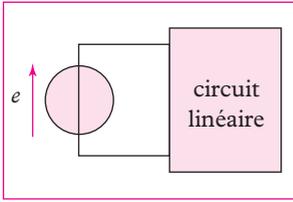


Fig. 1 - circuit linéaire alimenté en tension sinusoïdale.

1. Le régime transitoire dépend des conducteurs ohmiques définissant l'amortissement (cf. chapitre 4).

A.1. Le régime sinusoïdal forcé

Considérons un circuit linéaire quelconque alimenté par un générateur de tension sinusoïdale (fig. 1). Son évolution au cours du temps est caractérisée par une équation différentielle linéaire (cf. chapitre 4).

Définition 1

On appelle **régime sinusoïdal forcé** le régime sinusoïdal permanent associé à la solution particulière sinusoïdale de l'équation différentielle. Les grandeurs électriques i et u sont des fonctions sinusoïdales de même pulsation ω que le générateur.

Lorsque le régime transitoire¹ s'achève, le circuit en régime sinusoïdal forcé évolue de manière analogue à la source de tension branchée à ses bornes. Dans la suite de ce chapitre, on n'étudiera que de tels régimes.

A.2. Utilisation des nombres complexes

L'utilisation des nombres complexes permet de substituer à l'équation différentielle linéaire caractérisant l'évolution d'un circuit une relation linéaire entre la tension complexe \underline{u} à ses bornes et l'intensité complexe \underline{i} du courant le traversant.

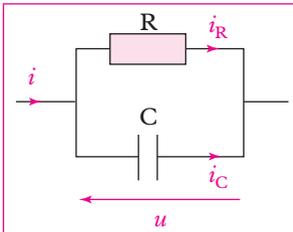


Fig. 2 - Association parallèle d'une résistance R et d'une capacité C.

2. En notations complexes, l'opérateur dérivation s'écrit :

$$\frac{d}{dt} = j\omega.$$

Par exemple, étudions la portion de circuit constituée d'un conducteur ohmique de résistance R en parallèle avec un condensateur de capacité C (fig. 2). La loi des nœuds s'écrit :

$$i = i_R + i_C, \text{ avec } u = Ri_R \text{ et } i_C = C \frac{du}{dt}.$$

On en déduit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants caractérisant l'évolution du circuit :

$$i = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt}.$$

En notations complexes, cette équation différentielle devient² :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{R} + jC\omega\underline{u} = \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)\underline{u}, \text{ avec } \underline{u} = \underline{U}_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \text{ et } \underline{i} = \underline{I}_0 e^{j(\omega t + \varphi')}.$$

B. Impédance et admittance complexes

B.1. Définitions

En régime sinusoïdal forcé, il existe une relation linéaire entre la tension complexe $\underline{u} = \underline{U}_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ et l'intensité complexe $\underline{i} = \underline{I}_0 e^{j(\omega t + \varphi')}$.

Définitions 2

1. Le circuit est étudié en convention récepteur.

- L'impédance complexe \underline{Z} d'un circuit, homogène à une résistance, est définie comme le rapport de la tension complexe \underline{u} aux bornes du circuit par l'intensité complexe \underline{i} du courant le traversant¹ :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

- De même, l'admittance complexe \underline{Y} du circuit, homogène à une conductance, est définie comme l'inverse de l'impédance complexe \underline{Z} :

$$\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}}$$

B.2. Cas des composants R, L et C

B.2.1 - Résistance R

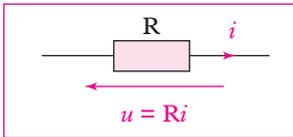


Fig. 3 - Étude d'une résistance en convention récepteur.

La relation entre la tension u aux bornes d'un conducteur ohmique et l'intensité i du courant le traversant est donnée par la loi d'Ohm (fig. 3) :

$$u = Ri, \text{ d'où en notations complexes : } \underline{u} = R\underline{i}.$$

L'impédance complexe \underline{Z} d'un conducteur ohmique est égale à sa résistance R :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = R \quad \text{et} \quad \underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{1}{R} = G.$$

B.2.2 - Capacité C

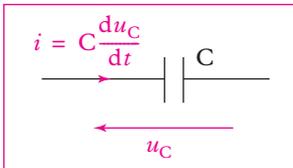


Fig. 4 - Étude d'un condensateur en convention récepteur.

La relation entre la tension u_C aux bornes d'un condensateur et l'intensité i du courant le traversant est (fig. 4) :

$$I = C \frac{du_C}{dt}, \text{ d'où en notations complexes : } \underline{i} = C \frac{d\underline{u}_C}{dt} = jC\omega\underline{u}_C.$$

L'impédance complexe \underline{Z} d'un condensateur de capacité C vaut :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}_C}{\underline{i}} = \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}_C} = jC\omega.$$

B.2.3 - Inductance L

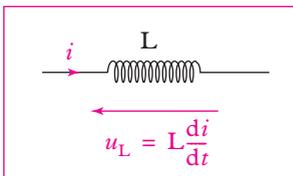


Fig. 5 - Étude d'une bobine en convention récepteur.

La relation entre la tension u_L aux bornes d'une bobine d'inductance L et l'intensité i du courant la traversant est (fig. 5) :

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \text{ d'où en notations complexes : } \underline{u}_L = L \frac{d\underline{i}}{dt} = jL\omega\underline{i}.$$

L'impédance complexe \underline{Z} d'une bobine d'inductance L vaut :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}_L}{\underline{i}} = jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}_L} = \frac{1}{jL\omega}.$$

B.3. Généralisation de la loi d'Ohm

B.3.1 - Loi d'Ohm en notations complexes

En régime sinusoïdal forcé, on peut généraliser la loi d'Ohm à tous les dipôles linéaires grâce aux notations complexes. La tension complexe \underline{u} aux bornes

1. La relation suivante comporte plusieurs informations : l'une contenue dans le module de l'impédance ou de l'admittance complexe, l'autre dans son argument.

2. On remarque que l'impédance complexe \underline{Z} d'un conducteur ohmique est égale à sa résistance R .

d'un dipôle et l'intensité \underline{i} du courant le traversant vérifie en effet une relation de proportionnalité analogue à la loi d'Ohm pour les conducteurs ohmiques¹ :

$$\underline{u} = \underline{Z}\underline{i} \quad \text{ou} \quad \underline{i} = \underline{Y}\underline{u}.$$

Les impédances complexes \underline{Z} (admittances complexes \underline{Y}) des dipôles linéaires en régime sinusoïdal forcé se comportent comme les résistances R (conductances G) des conducteurs ohmiques² en courant continu.

B.3.2 - Impédance et admittance réelles

Définition 3

• On définit l'impédance réelle Z d'un circuit, exprimée en ohm (Ω), comme le module de son impédance complexe \underline{Z} :

$$Z = |\underline{Z}|.$$

• De même, on définit l'admittance réelle Y d'un circuit, exprimée en siemens (S), comme le module de son admittance complexe \underline{Y} :

$$Y = |\underline{Y}| = \frac{1}{Z}.$$

Le module de la tension complexe $\underline{u} = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ est l'amplitude de la tension sinusoïdale u : $U_0 = |\underline{u}|$. De même, le module de $\underline{i} = I_0 e^{j(\omega t + \varphi')}$ est l'amplitude de l'intensité i : $I_0 = |\underline{i}|$.

L'impédance réelle Z du circuit permet de calculer l'amplitude I_0 de l'intensité connaissant l'amplitude U_0 de la tension et réciproquement³ :

$$U_0 = Z I_0 \quad \text{et} \quad I_0 = Y U_0.$$

3. D'après la loi d'Ohm en notations complexes $\underline{u} = \underline{Z}\underline{i}$, on a :

$$|\underline{u}| = |\underline{Z}||\underline{i}|.$$

B.3.3 - Avance de phase

L'argument de la tension complexe $\underline{u} = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ est la phase de la tension sinusoïdale u : $\omega t + \varphi = \arg(\underline{u})$. De même, l'argument de $\underline{i} = I_0 e^{j(\omega t + \varphi')}$ est la phase de l'intensité i : $\omega t + \varphi' = \arg(\underline{i})$.

D'après la loi d'Ohm en notations complexes $\underline{u} = \underline{Z}\underline{i}$, on a donc :

$$\arg(\underline{u}) = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{i}), \quad \text{soit} : \varphi = \arg(\underline{Z}) + \varphi'.$$

En régime sinusoïdal forcé, l'avance de phase $\phi = \varphi - \varphi'$ de la tension u sur l'intensité i est l'argument de l'impédance complexe \underline{Z} du circuit⁴ :

$$\phi = \arg(\underline{Z}) \quad \text{ou} \quad \phi = -\arg(\underline{Y}).$$

4. L'avance de phase ϕ est une grandeur algébrique : $\phi > 0$ si u est en avance sur i , $\phi < 0$ si u est en retard sur i .

C. Lois de l'électrocinétique en complexes

Les lois de l'électrocinétique étudiées pour les dipôles linéaires restent valables en notations complexes.

C.1. Loi des nœuds

Loi 1

Loi des nœuds

La somme des intensités complexes \underline{i}_i des courants algébriques arrivant à un nœud du circuit est égale à la somme des intensités complexes \underline{i}_j des courants algébriques s'en éloignant :

$$\sum_{\text{arrivant}} \underline{i}_i = \sum_{\text{sortant}} \underline{i}_j.$$

C.2. Loi des mailles

Dans un circuit, les différences de potentiel complexes changent de signe si on inverse les bornes de mesure et elles sont additives :

$$\underline{u}_{BA} = -\underline{u}_{AB} \quad \text{et} \quad \underline{u}_{AC} = \underline{u}_{AB} + \underline{u}_{BC}.$$

Loi 2

Loi des mailles

Dans une maille, la somme algébrique des différentielles de potentiel complexes mesurées en parcourant complètement la maille dans un sens donné est nulle :

$$\sum_{\text{maille}} \underline{u}_i = 0.$$

C.3. Théorèmes généraux de l'électrocinétique

C.3.1 - Associations d'impédances complexes

• Association série

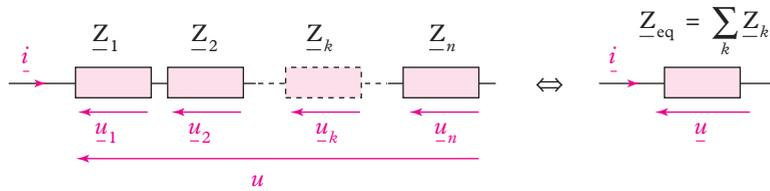


Fig. 6 - Association série de n impédances complexes et impédance complexe équivalente.

On considère l'association série de n dipôles d'impédances complexes \underline{Z}_k (fig. 6). L'intensité complexe \underline{i} du courant est la même dans toutes les impédances. La tension complexe totale \underline{u} est égale à la somme des tensions complexes \underline{u}_k . On a donc :

$$\underline{u} = \sum_k \underline{u}_k = \sum_k \underline{Z}_k \underline{i} = \underline{Z}_{\text{eq}} \underline{i}, \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_k \underline{Z}_k.$$

L'association série de n dipôles d'impédances complexes \underline{Z}_k est équivalente à un dipôle unique d'impédance complexe¹ :

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_k \underline{Z}_k.$$

1. Cette relation n'est pas vraie dans le cas général pour les impédances réelles, modules des impédances complexes.

• Association parallèle

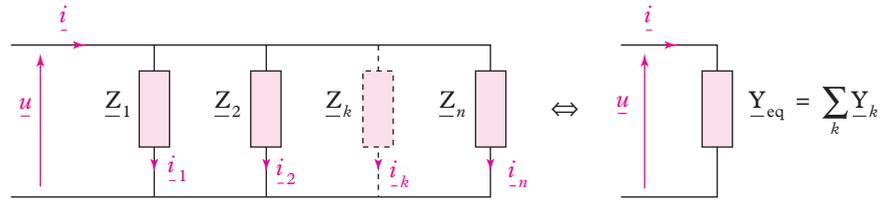


Fig. 7 - Association parallèle de n impédances complexes et admittance équivalente.

On considère l'association parallèle de n dipôles d'impédances complexes \underline{Z}_k (fig. 7). La tension complexe \underline{u} est la même aux bornes de chaque impédance. L'intensité complexe totale \underline{i} du courant est égale à la somme des intensités complexes \underline{i}_k . On a donc :

$$\underline{i} = \sum_k \underline{i}_k = \sum_k \underline{Y}_k \underline{u} = \underline{Y}_{eq} \underline{u}, \quad \text{avec} \quad \underline{Y}_{eq} = \sum_k \underline{Y}_k = \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}.$$

1. Cette relation n'est pas vraie dans le cas général pour les admittances réelles, modules des admittances complexes.

L'association parallèle de n dipôles d'admittances complexe \underline{Y}_k est équivalente à un dipôle unique d'admittance complexe¹ :

$$\underline{Y}_{eq} = \sum_k \underline{Y}_k = \frac{1}{\underline{Z}_{eq}}.$$

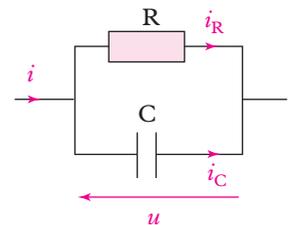
Application 1 Calcul d'une impédance équivalente

Déterminer l'impédance équivalente au circuit constitué par un conducteur ohmique de résistance R en parallèle avec un condensateur de capacité C.

Solution

L'association parallèle de la résistance R et de la capacité C est équivalente à l'admittance complexe :

$$\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1 + jRC\omega}{R}, \quad \text{d'où} : \underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\underline{Y}_{eq}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}.$$



C.3.2 - Diviseur de tension

On considère l'association série de n impédances complexes \underline{Z}_k . La tension complexe \underline{u}_k aux bornes de l'impédance complexe \underline{Z}_k vaut :

$$\underline{u}_k = \underline{Z}_k \underline{i}, \quad \text{d'où} : \underline{u}_k = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_{eq}} \underline{u}.$$

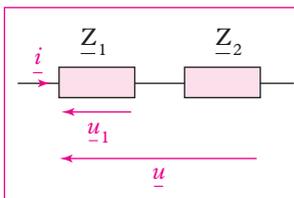


Fig. 8 - Diviseur de tension.

Théorème 1

Diviseur de tension

Dans l'association série de n impédances complexes \underline{Z}_k , la tension complexe \underline{u}_k aux bornes de l'impédance \underline{Z}_k vaut :

$$\underline{u}_k = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_{eq}} \underline{u} = \frac{\underline{Z}_k}{\sum_k \underline{Z}_k} \underline{u}.$$

Exemple : si les impédances complexes \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 sont associées en série (fig. 8), alors la tension complexe \underline{u}_1 aux bornes de l'impédance \underline{Z}_1 vaut :

$$\underline{u}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{u}.$$

Application 2 Calcul d'une fonction de transfert

Déterminer le rapport $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$, où \underline{V}_e est la tension sinusoïdale de pulsation ω appliquée aux bornes du circuit.

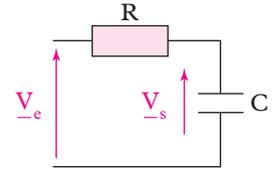
Solution

On applique le théorème de division de tension avec :

$$\underline{Z}_1 = R \text{ et } \underline{Z}_2 = \frac{1}{jC\omega} :$$

$$\underline{V}_s = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{V}_e = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{V}_e.$$

La fonction de transfert vaut donc : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$.



C.3.3 - Diviseur de courant

On considère l'association parallèle de n admittances complexes \underline{Y}_k . L'intensité complexe \underline{i}_k traversant l'admittance complexe \underline{Y}_k vaut :

$$\underline{i}_k = \underline{Y}_k \underline{u}, \text{ d'où : } \underline{i}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_{eq}} \underline{i}.$$

Théorème 2

Diviseur de courant

Dans l'association parallèle de n admittances \underline{Y}_k , l'intensité complexe \underline{i}_k traversant l'admittance \underline{Y}_k vaut :

$$\underline{i}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_{eq}} \underline{i} = \frac{\underline{Y}_k}{\sum_k \underline{Y}_k} \underline{i}.$$

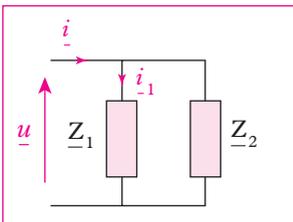


Fig. 9 - Diviseur de courant.

Exemple : si les admittances complexes \underline{Y}_1 et \underline{Y}_2 sont associées en parallèle (fig. 9), alors l'intensité complexe \underline{i}_1 traversant l'admittance \underline{Y}_1 vaut :

$$\underline{i}_1 = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \underline{i} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{i}.$$

C.3.4 - Loi des nœuds exprimée en termes de potentiel

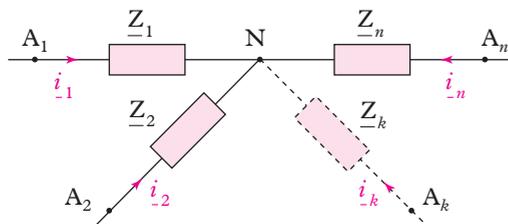


Fig. 10 - Les n impédances complexes sont reliées au nœud N.

On considère plusieurs impédances complexes \underline{Z}_k reliées en un même nœud N comme l'indique la **figure 10**. La loi d'Ohm complexe appliquée à chaque impédance complexe donne¹ :

1. La tension complexe :

$\underline{u}_k = \underline{V}_{A_k} - \underline{V}_N$
est la tension aux bornes de
l'impédance complexe \underline{Z}_k .

$$\underline{i}_k = \frac{\underline{u}_k}{\underline{Z}_k} = \frac{\underline{V}_{A_k} - \underline{V}_N}{\underline{Z}_k}.$$

Or, d'après la loi des nœuds en N :

$$\underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3 + \dots = 0, \text{ d'où : } \sum_k \frac{\underline{V}_{A_k} - \underline{V}_N}{\underline{Z}_k} = 0.$$

Théorème 3

La loi des nœuds exprimée en terme de potentiel s'écrit (théorème de Millman) :

$$\underline{V}_N \left[\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \dots \right] = \frac{\underline{V}_{A_1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}_{A_2}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{V}_{A_3}}{\underline{Z}_3} + \dots$$

Exprimé avec les admittances complexes, le théorème de Millman s'écrit :

$$\underline{V}_N [\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \dots] = \underline{Y}_1 \underline{V}_{A_1} + \underline{Y}_2 \underline{V}_{A_2} + \underline{Y}_3 \underline{V}_{A_3} + \dots$$

Application 3 Courant complexe dans un condensateur

Dans le montage ci-contre, les générateurs de tension \underline{E}_1 et \underline{E}_2 ont la même pulsation ω . Déterminer l'intensité complexe \underline{i} du courant circulant dans le condensateur de capacité C.

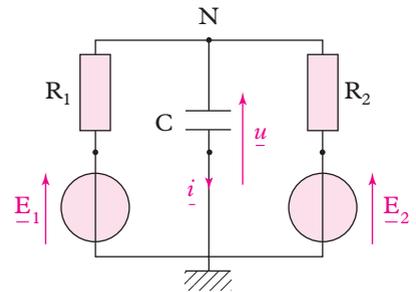
Solution

On applique en N la loi des nœuds exprimée en termes de potentiel. Les potentiels complexes aux origines des dipôles valent respectivement : \underline{E}_1 pour la résistance R_1 , 0 pour la capacité C (reliée à la masse) et \underline{E}_2 pour la résistance R_2 . On a alors (théorème de Millman) :

$$\underline{V}_N = \underline{u} = \frac{\frac{\underline{E}_1}{R_1} + \frac{\underline{E}_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + jC\omega + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2 \underline{E}_1 + R_1 \underline{E}_2}{R_1 + R_2 + jR_1 R_2 C \omega}.$$

L'intensité \underline{i} circulant dans le condensateur vaut donc :

$$\underline{i} = jC\omega \underline{u} = jC\omega \frac{R_2 \underline{E}_1 + R_1 \underline{E}_2}{R_1 + R_2 + jR_1 R_2 C \omega}.$$



D. Étude énergétique

D.1. Puissance instantanée – Puissance moyenne

D.1.1 - Puissance instantanée

La puissance instantanée p d'un dipôle est la puissance reçue par ce dipôle à l'instant t . En régime sinusoïdal forcé, elle s'écrit :

$$p(t) = u(t)i(t), \text{ avec } u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi) \text{ et } i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi').$$

1. On utilise la relation trigonométrique :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)].$$

2. La pulsation de la puissance instantanée p est 2ω , donc sa période est $\frac{T}{2}$.

3. On pourrait se contenter de calculer la valeur moyenne sur la période $\frac{T}{2}$ de la puissance instantanée p .

4. Pour s'en convaincre, il suffit de calculer l'intégrale définissant la puissance moyenne \mathcal{P} .

5. Les grandeurs efficaces sont définies uniquement à partir des grandeurs réelles. On n'utilise jamais les grandeurs complexes.

En remplaçant $u(t)$ et $i(t)$ par leurs valeurs, on obtient donc¹ :

$$p(t) = U_0 I_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi') = \frac{1}{2} U_0 I_0 [\cos(2\omega t + \varphi + \varphi') + \cos(\varphi - \varphi')].$$

La puissance instantanée p est une fonction périodique du temps, de période moitié de la période T de la source².

D.1.2 - Puissance moyenne

Définition 4

En régime sinusoïdal forcé, la puissance moyenne \mathcal{P} est définie comme la valeur moyenne de la puissance instantanée p sur une période T des oscillations³ :

$$\mathcal{P} = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt.$$

La puissance instantanée p est la somme de deux termes :

- un terme sinusoïdal, de valeur moyenne nulle sur une période T ;
- un terme constant, égal à sa valeur moyenne⁴.

La puissance moyenne \mathcal{P} a pour expression :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \phi,$$

où $\phi = \arg(\underline{Z}) = \varphi - \varphi'$ est l'avance de phase de la tension u sur l'intensité i .

D.2. Valeurs efficaces

D.2.1 - Définition

Définition 5

On définit le carré de la valeur efficace g_{eff} de la grandeur périodique $g(t)$ de période T , exprimée dans la même unité que g , comme la valeur moyenne du carré de cette grandeur⁵ :

$$g_{\text{eff}}^2 = \langle g(t)^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T g^2(t) dt$$

Pour la tension u et l'intensité i , on a ainsi :

$$U_{\text{eff}}^2 = \langle u(t)^2 \rangle \quad \text{et} \quad I_{\text{eff}}^2 = \langle i(t)^2 \rangle.$$

L'intensité efficace I_{eff} est l'intensité constante qui donnerait la même puissance moyenne \mathcal{P} que $i(t)$ en traversant une résistance R quelconque.

Application 4 Valeur efficace d'une tension créneau

On considère la tension créneau représentée ci-contre, de période T et d'amplitude U_0 . Déterminer la tension efficace U_{eff} de cette tension.

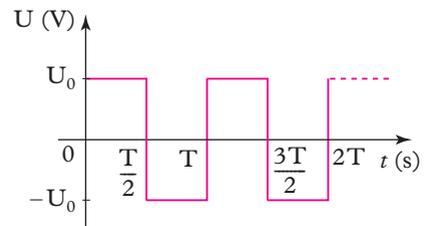
Solution

Par définition, la tension efficace U_{eff} de la tension créneau vaut :

$$U_{\text{eff}}^2 = \langle u(t)^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt, \quad \text{avec} \quad u(t) = U_0 \quad \text{ou} \quad -U_0.$$

On en déduit donc :

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 dt = \frac{1}{T} U_0^2 T = U_0^2, \quad \text{d'où} : \quad U_{\text{eff}} = U_0.$$



D.2.2 - Cas des grandeurs sinusoïdales

1. On utilise la même relation trigonométrique que précédemment, avec $a = b = \omega t + \varphi'$.

Considérons par exemple l'intensité sinusoïdale i . On a¹ :

$$i(t)^2 = I_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi') = \frac{1}{2} I_0^2 [\cos(2\omega t + 2\varphi') + 1].$$

Par définition, le carré de l'intensité efficace I_{eff} vaut :

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt = \frac{1}{2} I_0^2,$$

d'où :

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Si la grandeur électrique g est sinusoïdale, la grandeur efficace g_{eff} et l'amplitude g_0 vérifient la relation :

$$g_{\text{eff}} = \frac{g_0}{\sqrt{2}}.$$

Pour la tension u et l'intensité i , on a ainsi :

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

D.3. Facteur de puissance

En régime sinusoïdal forcé, la puissance moyenne \mathcal{P} s'écrit :

$$\mathcal{P} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi,$$

où $\cos \phi$ est le facteur de puissance du circuit ($\phi = \arg(\underline{Z})$).

• L'impédance complexe d'un conducteur ohmique de résistance R vaut :

$$\underline{Z} = R,$$

d'où : $\phi = \arg(\underline{Z}) = 0$ et $\cos(\phi) = 1$.

La puissance moyenne dissipée dans une résistance est :

$$\mathcal{P} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = R I_{\text{eff}}^2 = G U_{\text{eff}}^2.$$

• L'impédance complexe d'un condensateur de capacité C vaut :

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega},$$

d'où : $\phi = \arg(\underline{Z}) = -\frac{\pi}{2}$ et $\cos(\phi) = 0$.

La puissance moyenne dissipée dans un condensateur est nulle.

• L'impédance complexe d'une bobine d'inductance L vaut :

$$\underline{Z} = jL\omega,$$

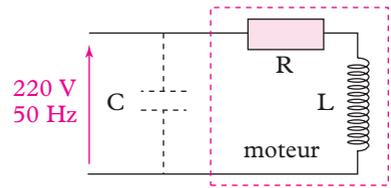
d'où : $\phi = \arg(\underline{Z}) = \frac{\pi}{2}$ et $\cos(\phi) = 0$.

La puissance moyenne dissipée dans une bobine est nulle.

Application 5 Comment relever le facteur de puissance ?

Les circuits industriels doivent avoir un facteur de puissance proche de 1 pour que l'intensité du courant dans le réseau EDF soit la plus faible afin de réduire les pertes d'énergie en ligne par effet Joule. On dit alors que l'on « relève le $\cos(\phi)$ ».

Un moteur d'inductance $L = 1\text{H}$ et de résistance $R = 10\ \Omega$ est alimenté par un courant de fréquence 50 Hz sous une tension efficace de 220 V .



a) Quel est le facteur de puissance du moteur ?

b) Pour « relever le $\cos(\phi)$ », on place en parallèle au moteur un condensateur de capacité C . Déterminer la valeur de C pour que le facteur de puissance de l'association soit égal à 1.

Solution

a) L'impédance \underline{Z} du moteur est : $\underline{Z} = R + jL\omega$. Comme $\phi = \arg(\underline{Z})$, le facteur de puissance du moteur vaut :

$$\cos(\phi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} = 0,032.$$

b) L'admittance équivalente à l'association parallèle du moteur et du condensateur est :

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{R + jL\omega}.$$

Le $\cos(\phi)$ de l'association est égal à 1, donc $\phi = -\arg(\underline{Y}_{\text{eq}}) = 0$ et $\underline{Y}_{\text{eq}}$ est réel. L'argument du numérateur ($1 - LC\omega^2 + jRC\omega$) est égal à l'argument du dénominateur ($R + jL\omega$). On a donc :

$$\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2} = \frac{L\omega}{R}, \quad \text{d'où : } C = \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2} = 1,01 \cdot 10^{-5} \text{ F} = 10 \mu\text{F}.$$

L'essentiel

✓ Régime sinusoïdal forcé

- En régime sinusoïdal forcé, on remplace l'équation différentielle linéaire caractérisant l'évolution d'un circuit par une relation linéaire entre la tension complexe \underline{u} à ses bornes et l'intensité complexe \underline{i} du courant le traversant.
- **L'impédance complexe \underline{Z}** du circuit, homogène à une résistance, et **l'admittance complexe \underline{Y}** du circuit, homogène à une conductance, vérifient la loi d'Ohm en notations complexes :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} \quad \text{et} \quad \underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}}.$$

	Résistance R	Capacité C	Inductance L
Impédance complexe	R	$\frac{1}{jC\omega}$	$jL\omega$
Admittance complexe	G	$jC\omega$	$\frac{1}{jL\omega}$

- L'impédance réelle Z (l'admittance réelle Y) d'un circuit est le module de son impédance complexe \underline{Z} (admittance complexe \underline{Y}) :

$$Z = |\underline{Z}| \quad (\text{en } \Omega) \quad \text{et} \quad Y = |\underline{Y}| = \frac{1}{Z} \quad (\text{en S}).$$

Elle permet de calculer l'amplitude I_0 de l'intensité connaissant l'amplitude U_0 de la tension et réciproquement :

$$U_0 = Z I_0 \quad \text{et} \quad I_0 = Y U_0.$$

- L'avance de phase $\phi = \varphi - \varphi'$ de la tension u sur l'intensité i est l'argument de l'impédance complexe \underline{Z} du circuit :

$$\phi = \arg(\underline{Z}) \quad \text{ou} \quad \phi = -\arg(\underline{Y}).$$

✓ Lois de l'électrocinétique en complexes

- La somme des intensités complexes \underline{i}_i des courants algébriques arrivant à un nœud du circuit est égale à la somme des intensités complexes \underline{i}_j des courants algébriques s'en éloignant :

$$\sum_{\text{arrivant}} \underline{i}_i = \sum_{\text{sortant}} \underline{i}_j \quad (\text{loi des nœuds}).$$

- Dans une maille, la somme algébrique des différentielles de potentiel complexes mesurées en parcourant complètement la maille dans un sens donné est nulle :

$$\sum_{\text{maille}} \underline{u}_i = 0 \quad (\text{loi des mailles}).$$

- L'association série de n impédances \underline{Z}_k est équivalente à une impédance unique $\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_k \underline{Z}_k$. La tension complexe \underline{u}_k aux bornes de \underline{Z}_k est (**diviseur de tension**) :

$$\underline{u}_k = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_{\text{eq}}} \underline{u} = \frac{\underline{Z}_k}{\sum_k \underline{Z}_k} \underline{u}, \quad \text{avec } \underline{u} \text{ tension aux bornes de l'association.}$$

- L'association parallèle de n admittances \underline{Y}_k est équivalente à une admittance unique $\underline{Y}_{\text{eq}} = \sum_k \underline{Y}_k$. L'intensité complexe \underline{i}_k traversant \underline{Y}_k est (**diviseur de courant**) :

$$\underline{i}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_{\text{eq}}} \underline{i} = \frac{\underline{Y}_k}{\sum_k \underline{Y}_k} \underline{i}, \text{ avec } \underline{i} \text{ intensité traversant l'association.}$$

- Si un nœud N du circuit est relié à n impédances \underline{Z}_k non nulles, la loi des nœuds exprimée en termes de potentiels s'écrit (théorème de Millman) :

$$\underline{V}_N \left[\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \dots \right] = \frac{\underline{V}_{A_1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}_{A_2}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{V}_{A_3}}{\underline{Z}_3} + \dots$$

✓ Aspect énergétique

- La puissance instantanée p d'un dipôle est la puissance reçue par ce dipôle à l'instant t . En régime sinusoïdal forcé, c'est une fonction de période moitié de la période T de la source.
- En régime sinusoïdal forcé, la puissance moyenne \mathcal{P} est définie comme la valeur moyenne de la puissance instantanée p sur une période T des oscillations :

$$\mathcal{P} = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \underline{U}_{\text{eff}} \underline{I}_{\text{eff}} \cos \phi.$$

- Les termes $\underline{U}_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ et $\underline{I}_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ sont respectivement la **valeur efficace** de la tension sinusoïdale u et de l'intensité sinusoïdale i .
- Le terme $\cos \phi$ est le **facteur de puissance** du circuit, où $\phi = \arg(\underline{Z})$ est l'avance de phase de la tension u sur l'intensité i .
- La puissance moyenne dissipée dans un condensateur ou dans une bobine est nulle.

Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment déterminer une valeur efficace ou un facteur de forme ?

Un signal périodique d'amplitude U_0 a les mêmes effets énergétiques sur une résistance qu'un signal continu de valeur U_{eff} . On se propose de déterminer la valeur efficace U_{eff} d'un signal périodique, ainsi que son facteur de forme $f = \frac{U_{\text{eff}}}{U_0}$.

→ Savoir faire

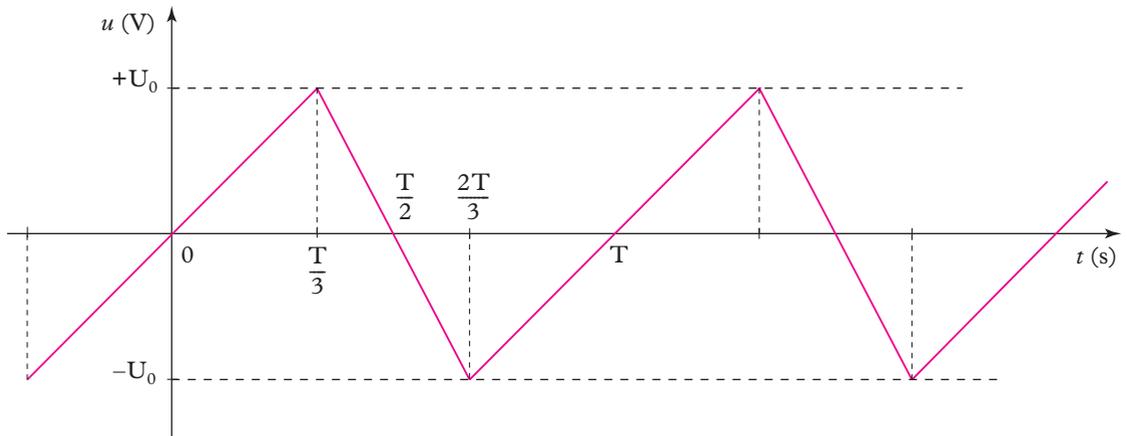
- 1 Découper une période du signal en petits intervalles de temps de façon à disposer d'une expression de $u(t)$ sur chacun de ces intervalles.
- 2 Identifier les zones de la courbe qui conduisent à une même valeur de l'intégrale $\int u^2(t) dt$. Graphiquement, deux portions de courbes symétriques par rapport à l'axe horizontal ou par rapport à un axe vertical conduisent à une intégrale $\int u^2(t) dt$ identique.

- ③ Calculer l'intégrale de $u^2(t)$ sur une période. Ce calcul est simplifié en prenant en compte les contributions identiques de certains intervalles de temps.
- ④ Calculer la valeur efficace U_{eff} du signal et son facteur de forme f :

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \quad \text{et} \quad f = \frac{U_{\text{eff}}}{U_0}$$

→ Application

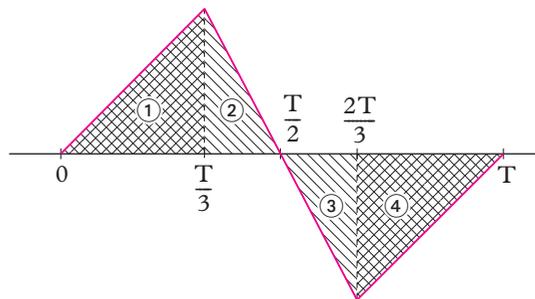
Déterminer la valeur efficace du signal triangulaire suivant :



Ce signal est dissymétrique, puisque le temps de montée est plus long que le temps de descente.

Solution

- ① On peut découper une période T de ce signal en quatre morceaux :



- ① $t \in \left[0 ; \frac{T}{3} \right[$
- ② $t \in \left[\frac{T}{3} ; \frac{T}{2} \right[$
- ③ $t \in \left[\frac{T}{2} ; \frac{2T}{3} \right[$
- ④ $t \in \left[\frac{2T}{3} ; T \right[$

La tension $u(t)$ est affine sur chacun de ces morceaux.



Les morceaux ② et ③ pourraient être traités ensemble.

- ② Les zones ① et ④ d'une part, ② et ③ d'autre part conduisent à une même valeur de $\int u^2(t) dt$.
- ③ Sur l'intervalle ①, on calcule $\int_0^{\frac{T}{3}} u^2(t) dt$ avec $u(t) = U_0 \times \frac{t}{\frac{T}{3}}$, soit :

$$\int_0^{\frac{T}{3}} u^2(t) dt = U_0^2 \int_0^{\frac{T}{3}} \frac{9t^2}{T^2} dt = \frac{9U_0^2}{T^2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{T}{3}} = \frac{U_0^2 T}{9}$$

Sur l'intervalle ③, la tension $u(t)$ peut s'écrire :

$$u(t) = -U_0 \times \frac{t - \frac{T}{2}}{\frac{T}{6}} = -U_0 \times \frac{6\left(t - \frac{T}{2}\right)}{T}.$$

L'intégrale à calculer vaut donc :

$$\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{2T}{3}} u^2(t) dt = \frac{36U_0^2}{T^2} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{2T}{3}} \left(t - \frac{T}{2}\right)^2 dt = \frac{36U_0^2}{T^2} \left[\frac{\left(t - \frac{T}{2}\right)^3}{3} \right]_{\frac{T}{2}}^{\frac{2T}{3}},$$

d'où :

$$\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{2T}{3}} u^2(t) dt = \frac{U_0^2 T}{18}.$$

Sur une période, il n'est pas utile de calculer les contributions des intervalles ② et ④, respectivement égales à celles des intervalles ③ et ①. L'intégrale totale vaut donc :

$$\int_0^T u^2(t) dt = 2 \times \frac{U_0^2 T}{9} + 2 \times \frac{U_0^2 T}{18} = \frac{U_0^2 T}{3}.$$

④ On en déduit donc :

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \times \frac{U_0^2 T}{3}} = \frac{U_0}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad f = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Méthode n° 2

Comment ramener le facteur de puissance d'un dipôle à 1 ?

Un circuit dont le facteur de puissance n'est pas unitaire engendre des effets dissipatifs inutiles dans son alimentation. On cherche à ramener le facteur de puissance d'un dipôle quelconque à 1 en lui adjoignant un dipôle correctif placé en parallèle.

→ Savoir faire

- ① Déterminer l'impédance Z_{cir} équivalente au circuit.
- ② Déterminer le signe de l'argument ϕ de Z_{cir} .
- ③ Associer un dipôle correctif au circuit étudié (les deux étant placés en parallèle) en prenant en compte le signe de ϕ :
 - si $\phi < 0$, le circuit est capacitif (il comporte un condensateur) et doit être corrigé par une bobine d'impédance L ;
 - si $\phi > 0$, le circuit est inductif (il comporte une bobine) et doit être corrigé par un condensateur de capacité C .
- ④ Déterminer l'impédance Z_{eq} de l'association {circuit // dipôle correctif}. Écrire cette impédance sous la forme d'une fraction.
- ⑤ Déterminer la valeur de L (ou C) qui rend Z_{eq} réel. Cela revient, lorsque Z_{eq} est une fraction, à imposer à son dénominateur et son numérateur d'avoir le même argument.



Cette correction n'est *a priori* valable que pour une pulsation donnée. La valeur à donner à L (ou à C) dépend donc généralement de ω .

→ Application

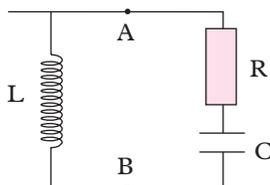
Quel dipôle doit-on associer à un circuit RC série pour rendre le facteur de puissance de l'ensemble égal à 1 ?

Solution

- ❶ La résistance R et le condensateur C sont associés en série, donc :

$$\underline{Z}_{\text{cir}} = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{jRC\omega + 1}{jC\omega}.$$

- ❷ On a : $\tan \phi = -\frac{1}{RC\omega} < 0$. L'argument de $\underline{Z}_{\text{cir}}$ est toujours négatif (quelle que soit la valeur de la pulsation ω).
- ❸ On associe le circuit RC en parallèle à une bobine d'inductance L :



- ❹ L'impédance équivalente à cette association vaut :

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{jL\omega \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right)}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jL\omega(1 + jRC\omega)}{1 - CL\omega^2 + jRC\omega}.$$

- ❺ Pour le numérateur, on a : $\tan \phi_N = \frac{-1}{RC\omega}$.

Pour le dénominateur, on a : $\tan \phi_D = \frac{RC\omega}{1 - CL\omega^2}$.

Soit : $-\frac{1}{RC\omega} = \frac{RC\omega}{1 - CL\omega^2} \Leftrightarrow 1 - CL\omega^2 = -(RC\omega)^2$

$$\Leftrightarrow L = \frac{1 + R^2C^2\omega^2}{C\omega^2}.$$



Sur cet exemple, le circuit RC a un effet capacitif. La plupart des circuits industriels comportent des moteurs électriques, et donc des bobines. Leur comportement est ainsi souvent inductif, et on ramène leur facteur de puissance à 1 en plaçant une batterie de condensateurs en parallèle.

Méthode n° 3

Comment équilibrer un pont ?

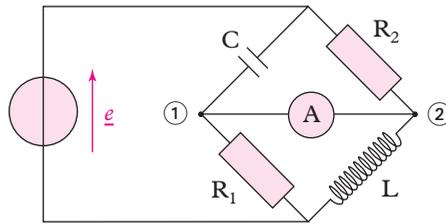
La structure en « pont », très fréquemment rencontrée en électronique, est constituée de quatre impédances disposées sur un carré. Cette structure est alimentée par un générateur placé sur une diagonale ; elle est équilibrée lorsque les potentiels des deux autres sommets sont égaux.

→ Savoir faire

- ❶ Déterminer, par des ponts diviseurs de tension, les potentiels des deux nœuds à équilibrer.
- ❷ Égaler ces potentiels et en déduire deux équations, l'une portant sur la partie réelle et l'autre sur la partie imaginaire de l'égalité.
- ❸ Déterminer les valeurs des composants qui satisfont aux égalités précédentes.

→ Application

Comment choisir les composants R_1 , R_2 , L et C pour annuler l'intensité dans l'ampèremètre du circuit ci-dessous ?



Solution

- ❶ Les potentiels des nœuds situés de part et d'autre de l'ampèremètre sont, en appliquant le théorème de division de tension :

$$\underline{V}_1 = \frac{R_1 \underline{e}}{R_1 + \frac{1}{jC\omega}} \quad \text{et} \quad \underline{V}_2 = \frac{jL\omega \underline{e}}{R_2 + jL\omega}.$$



Ces ponts diviseurs ne sont valables que parce que l'on suppose l'intensité dans l'ampèremètre nulle. Si ce n'était pas le cas, la résistance R_1 ne serait pas en série avec le condensateur, pas plus que la résistance R_2 avec la bobine L .

- ❷ En égalant les potentiels \underline{V}_1 et \underline{V}_2 , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{R_1 \underline{e}}{R_1 + \frac{1}{jC\omega}} &= \frac{jL\omega \underline{e}}{R_2 + jL\omega} \Leftrightarrow R_1(R_2 + jL\omega) = \left(R_1 + \frac{1}{jC\omega}\right)jL\omega \\ &\Leftrightarrow R_1R_2 + jR_1L\omega = jR_1L\omega + \frac{L}{C} \\ &\Leftrightarrow \left(R_1R_2 - \frac{L}{C}\right) + j(R_1L\omega - R_1L\omega) = 0. \end{aligned}$$

- ❸ La condition donnée par la partie imaginaire est systématiquement vérifiée. Celle donnée par la partie réelle impose :

$$R_1R_2 = \frac{L}{C}.$$



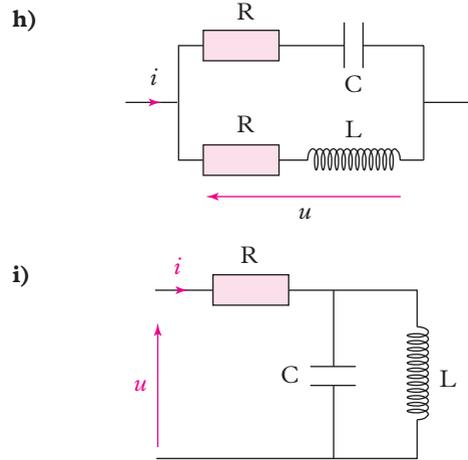
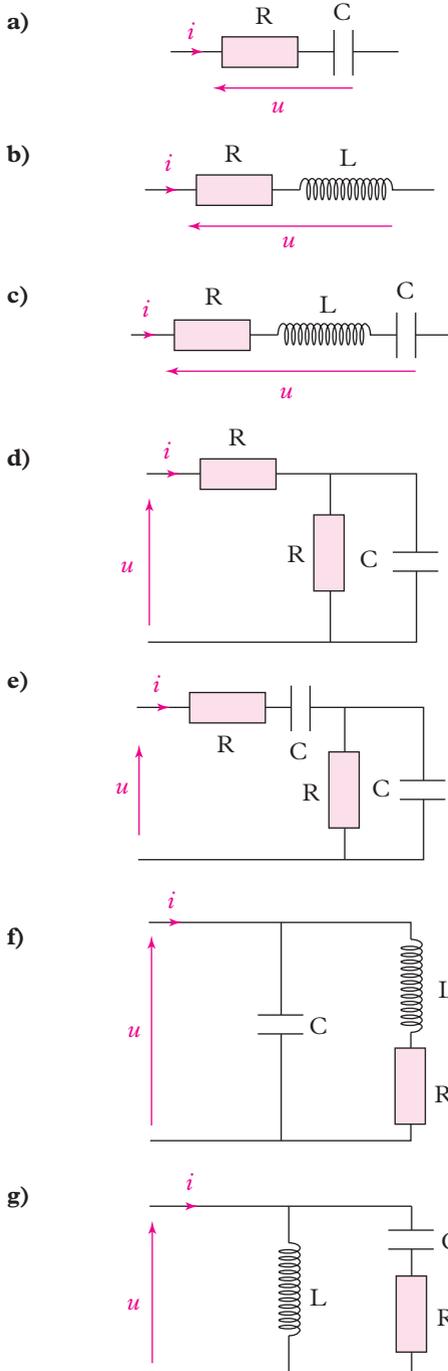
Cet équilibrage est valable pour toutes les valeurs de la pulsation ω . Dans le cas général, les relations obtenues font intervenir la pulsation ω et l'équilibrage n'est valable que pour une fréquence donnée.

Exercices

Niveau 1

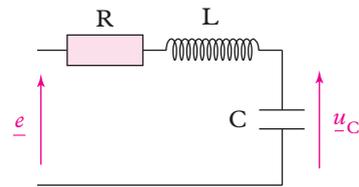
Ex. 1 Calculs d'impédances

Déterminer l'impédance complexe \underline{Z} des montages ci-dessous. En déduire l'impédance réelle Z et l'avance de phase ϕ de la tension sur le courant.



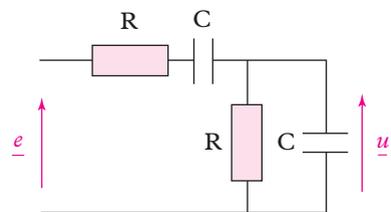
Ex. 2 Diviseur de tension

a) On étudie le circuit RLC série où la tension appliquée est \underline{e} en notations complexes. On mesure la tension aux bornes du condensateur.



Exprimer \underline{u}_C et retrouver l'expression étudiée dans le chapitre 6 permettant de déterminer la résonance tension aux bornes du condensateur.

b) On étudie le montage ci-dessous. Déterminer \underline{u} en fonction de \underline{e} .

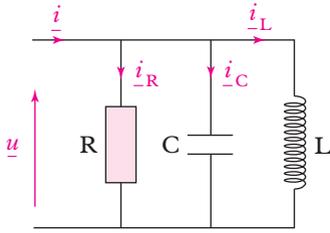


Ex. 3 Résonance intensité

Déterminer l'intensité i dans un circuit RLC série alimenté par un générateur de tension \underline{e} .

Ex. 4 Circuit RLC parallèle

a) Exprimer la tension \underline{u} aux bornes du circuit schématisé ci-après. En déduire \underline{i}_R .

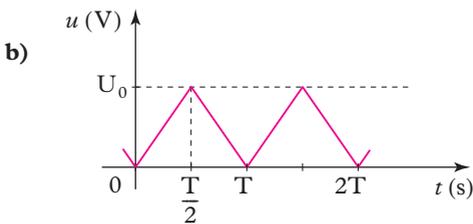
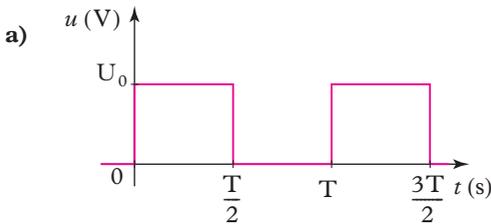


Vérifier que l'étude de la résonance tension u (ou de la résonance courant i_R dans la résistance), lorsqu'on applique un courant sinusoïdal en notation complexe $\underline{i} = I_0 e^{j\omega t}$, est identique à celle de la résonance courant dans le circuit RLC. Exprimer alors ω_0 , pulsation propre, et Q' , facteur de qualité du circuit RLC parallèle (et $\alpha' = \frac{1}{2Q'}$, coefficient d'amortissement).

b) Appliquer le théorème de division de courant et déterminer le courant complexe \underline{i}_L en fonction de \underline{i} . Utiliser ω_0 et Q' (ou α') et vérifier que l'étude de la résonance de i_L est la même que celle de la tension u_C aux bornes du condensateur.

Ex. 5 Grandeurs efficaces

Déterminer les grandeurs efficaces des fonctions périodiques suivantes.

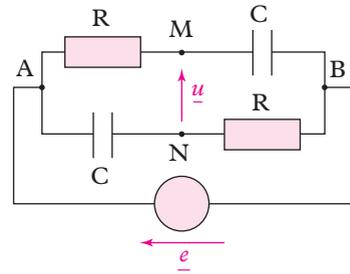


Niveau 2

Ex. 6 Circuit déphaseur

L'association parallèle de dipôles RC est alimentée par une source de tension alternative \underline{e} de grandeur efficace E .

Déterminer \underline{u} , la tension efficace U_{eff} et l'avance de phase ϕ de \underline{u} sur \underline{e} .



Ex. 7 Amélioration du facteur de puissance

Un moteur fonctionnant sous une tension efficace $U = 200 \text{ V}$ à la fréquence $f = 50 \text{ Hz}$ est modélisable par une résistance R en série avec une inductance propre L .

La puissance consommée est $\mathcal{P} = 1\,000 \text{ W}$, alors que l'intensité efficace vaut $I = 10 \text{ A}$.

- Déterminer L et R . Que vaut le $\cos\phi$?
- Quelle est la capacité C du condensateur à placer en parallèle à ses bornes pour que le facteur de puissance soit égal à l'intensité ?
- On utilise un condensateur de capacité $C' < C$. Le facteur de puissance vaut $0,95$. Déterminer C' .

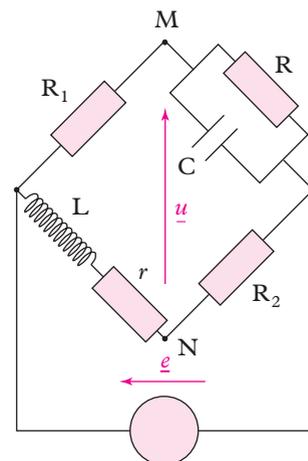
Ex. 8 Facteur de puissance

Un moteur fonctionne sous une tension efficace $U = 20 \text{ V}$, de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$. Il est modélisé par une résistance $R = 3 \Omega$ en série avec une inductance L . Le courant circulant dans le moteur est $I = 4 \text{ A}$.

- Déterminer l'inductance L , l'impédance réelle Z et la puissance \mathcal{P} consommée par le moteur.
- On place en parallèle avec le moteur deux ampoules consommant chacune une puissance de 8 W . Quel est le facteur de puissance du montage ?

Ex. 9 Équilibre d'un pont

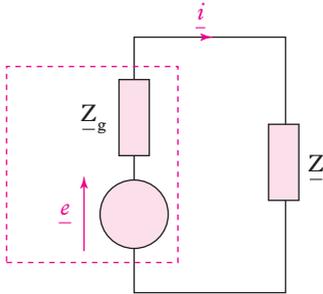
Le pont ci-dessous est alimenté en alternatif. À quelle condition le pont est-il équilibré ? Montrer que l'on peut déterminer L et r en fonction de C et de R_1 , R_2 et R .



Niveau 3

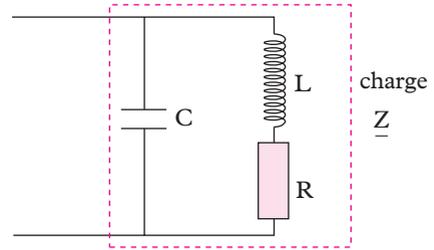
Ex. 10 Adaptation d'impédances

a) Un générateur de tension alternative, de tension efficace E , possède une impédance : $\underline{Z}_g = R_g + jX_g$. Ce générateur est branché sur une charge d'impédance : $\underline{Z} = R + jX$.



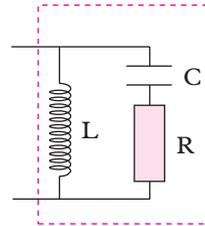
Déterminer les valeurs à donner à R et X pour que la puissance dissipée dans le dipôle \underline{Z} soit maximale.

b) L'impédance du générateur est $\underline{Z}_g = R_g$. La charge est représentée sur le schéma ci-après.

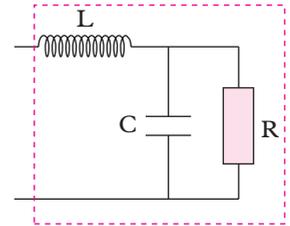


Déterminer L et C en fonction de ω , R et R_g pour avoir l'adaptation d'impédance. Quelle condition doit vérifier R ?

c) Reprendre l'étude avec les montages ci-dessous.



Montage 1



Montage 2

Indications

Ex. 1 Appliquer les propriétés liées aux associations d'impédance.

Ex. 2 Appliquer le théorème de division de tension.

Ex. 3 Utiliser les variables réduites (cf. chapitre 6).

Ex. 4 Utiliser les variables réduites (cf. chapitre 6).

Ex. 5 Écrire la définition des valeurs efficaces.

Ex. 7 a) La puissance est dissipée dans la résistance.
b) $\cos\phi = 1$ si $\underline{Z} \in \mathbb{R}^+$.

Ex. 8 a) La puissance est dissipée dans la résistance.

Ex. 9 Appliquer la méthode n° 3 au circuit.

Ex. 10 a) Déterminer l'intensité efficace I dans le circuit.

b) L'adaptation d'impédance correspond à $\underline{Z} = \underline{Z}_g^*$.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1



En série, les impédances s'ajoutent ; en parallèle les admittances s'ajoutent.

a) On a : $\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}$, d'où :

$$\begin{cases} Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \\ \phi = \arg(\underline{Z}) = \text{Arctan}(RC\omega) - \frac{\pi}{2} = -\text{Arctan}\left(\frac{1}{RC\omega}\right). \end{cases}$$



Cette avance de phase est négative quelle que soit la valeur de ω . Le dipôle est globalement capacitif, ce qui est logique d'après sa constitution ; l'intensité est en avance sur la tension.

b) On a : $\underline{Z} = R + jL\omega$, d'où :

$$\begin{cases} Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \\ \phi = \arg(\underline{Z}) = \text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right). \end{cases}$$

c) On a : $\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$, d'où :

$$\begin{cases} Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \\ \phi = \arg(\underline{Z}) = \text{Arctan}\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right). \end{cases}$$



Le signe de l'avance de phase est à présent fonction de la pulsation ω . Le comportement global (inductif ou capacitif) dépend de la pulsation.

d) On a : $\underline{Z} = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{R(2 + jRC\omega)}{1 + jRC\omega}$, d'où :

$$\begin{cases} Z = |\underline{Z}| = R \sqrt{\frac{4 + R^2 C^2 \omega^2}{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \\ \phi = \arg(\underline{Z}) = \text{Arctan}\left(\frac{RC\omega}{2}\right) - \text{Arctan}(RC\omega). \end{cases}$$

e) On a : $\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{1 - R^2 C^2 \omega^2 + 3jRC\omega}{jC\omega(1 + jRC\omega)}$, d'où :

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{1}{C\omega} \sqrt{\frac{(1 - R^2 C^2 \omega^2)^2 + 9R^2 C^2 \omega^2}{1 + R^2 C^2 \omega^2}}.$$

On peut écrire aussi : $\underline{Z} = R \frac{3 + j \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)}{1 + jRC\omega}$, d'où :

$$\phi = \arg(\underline{Z}) = \text{Arctan} \left(\frac{RC\omega - \frac{1}{RC\omega}}{3} \right) - \text{Arctan}(RC\omega).$$



Pour exprimer l'argument d'un nombre complexe, penser à l'écrire de manière à ce que sa partie réelle soit positive.

f) • On a : $\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{R + jL\omega}$, d'où :

$$|\underline{Z}| = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

On en déduit :

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{\frac{R^2 + L^2\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2 C^2\omega^2}}.$$

• Pour exprimer $\arg(\underline{Z})$, on modifie son expression de manière à faire apparaître des complexes à partie réelle positive :

$$|\underline{Z}| = \frac{R + jL\omega}{jC\omega \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right]}.$$

On en déduit :

$$\phi = \arg(\underline{Z}) = \text{Arctan} \left(\frac{L\omega}{R} \right) - \frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right).$$

g) • On a : $\underline{Y} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{jC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{jL\omega(1 + jRC\omega)}$.

D'où :

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{jL\omega(1 + jRC\omega)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

On en déduit :

$$Z = |\underline{Z}| = L\omega \sqrt{\frac{1 + R^2 C^2\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2 C^2\omega^2}}.$$

• Réécrivons \underline{Y} : $\underline{Y} = \frac{R \frac{C}{L} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{R \frac{C}{L} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)}{1 + jRC\omega}$.

On en déduit :

$$\phi = -\arg(\underline{Y}) = -\text{Arctan} \left(\frac{C\omega - \frac{1}{L\omega}}{R \frac{C}{L}} \right) + \text{Arctan}(RC\omega),$$

soit : $\phi = \text{Arctan} \left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega} \right) + \text{Arctan}(RC\omega)$.

h) • On a : $\underline{Y} = \frac{1}{R + jL\omega} + \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{R + jL\omega} + \frac{jC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{1 - LC\omega^2 + 2jRC\omega}{(R + jL\omega)(1 + jRC\omega)}$.

D'où :

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{(R + jL\omega)(1 + jRC\omega)}{1 - LC\omega^2 + 2jRC\omega}$$

On en déduit :

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{\frac{(R^2 + L^2\omega^2)(1 + R^2C^2\omega^2)}{(1 - LC\omega^2)^2 + 4R^2C^2\omega^2}}$$

• Réécrivons \underline{Z} :
$$\underline{Z} = \frac{(R + jL\omega)(1 + jRC\omega)}{jC\omega \left[2R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right]}$$

On en déduit :

$$\phi = \arg(\underline{Z}) = \text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right) + \text{Arctan}(RC\omega) - \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{2R}\right)$$

i) On a :
$$\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{jL\omega}} = R + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}, \text{ d'où :}$$

$$\begin{cases} Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{L\omega}{1 - LC\omega^2}\right)^2} \\ \phi = \arg(\underline{Z}) = \text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}\right) \end{cases}$$

Exercice 2

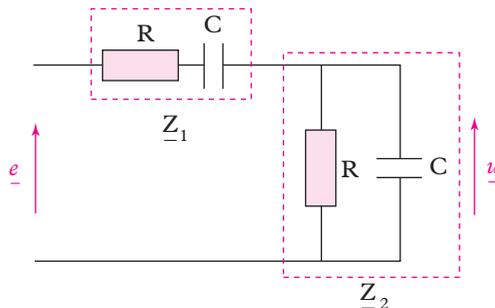
a) Un diviseur de tension entre le condensateur d'une part et l'association série {résistance + bobine} d'autre part donne :

$$\underline{u}_C = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} e = \frac{e}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On retrouve bien le résultat intermédiaire obtenu dans le chapitre 6 lors de l'étude de la résonance tension aux bornes du condensateur. En posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R}$, on a en effet :

$$\underline{u}_C = \frac{e}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\alpha\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{e}{1 - x^2 + 2j\alpha x}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

b) On substitue à l'association série {R + C} une impédance \underline{Z}_1 et à l'association parallèle {R//C} une impédance \underline{Z}_2 :



On a d'après le théorème de division de tension :

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{e} = \frac{1}{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} + 1} \underline{e},$$

d'où :

$$\underline{u} = \frac{\underline{e}}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}, \text{ avec } \underline{Z}_1 = R + \frac{1}{jC\omega} \text{ et } \underline{Z}_2 = \frac{1}{R} + jC\omega.$$



Il faut veiller à n'appliquer le diviseur de tension qu'à des dipôles parcourus par le même courant. C'est bien le cas de \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 dans ce circuit.

On en tire :

$$\underline{u} = \frac{\underline{e}}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)}, \text{ d'où : } \underline{u} = \frac{\underline{e}}{3 + j\left(\mathbf{RC}\omega - \frac{1}{\mathbf{RC}\omega}\right)}.$$

Exercice 3



Le schéma du montage est celui de la question a) de l'exercice 2.

L'intensité \underline{i} dans le circuit RLC est :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}} \text{ avec } \underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega},$$

d'où :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{jC\omega \underline{e}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

On pose encore :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} \quad \text{et} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

On trouve alors :

$$\underline{i} = \frac{\frac{\underline{e}}{R} \times 2j\alpha x}{1 - x^2 + 2j\alpha x} \quad \text{ou} \quad \underline{i} = \frac{\frac{\underline{e}}{R}}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

Exercice 4

a) Déterminons l'admittance du circuit (association parallèle) :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega} = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right).$$

On en déduit :

$$\underline{u} = \frac{\underline{i}}{\underline{Y}}, \text{ d'où : } \underline{u} = \frac{\underline{i}}{\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}.$$

Le courant dans la résistance vaut alors :

$$\underline{i}_R = \frac{u}{R} = \frac{\underline{i}}{1 + jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$

Posons : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q' = \frac{1}{2\alpha'} = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

 On a : $Q' = \frac{1}{Q}$, où Q est le facteur de qualité du circuit RLC série.

On obtient alors :

$$\underline{i}_R = \frac{\underline{i}}{1 + jQ'\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

L'étude de la résonance de i_R est analogue à celle de la résonance courant dans le circuit RLC série.

b) Le théorème de division de courant s'écrit :

$$\underline{i}_L = \frac{\frac{1}{jL\omega}}{\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}} \underline{i} = \frac{\underline{i}}{1 - LC\omega^2 + \frac{jL\omega}{R}}$$

On a donc, avec les notations réduites :

$$\underline{i}_L = \frac{\underline{i}}{1 - x^2 + 2j\alpha'x}$$

L'étude de la résonance de i_L est similaire à celle de la résonance tension aux bornes du condensateur dans le circuit RLC série.

Exercice 5

 On applique la méthode n° 1 aux deux types de signaux.

a) On identifie deux intervalles sur une période du signal :

• $u(t) = U_0$ pour $t \in \left[0 ; \frac{T}{2}\right]$;

• $u(t) = 0$ pour $t \in \left[\frac{T}{2} ; T\right]$.

L'intégrale à calculer vaut donc :

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_0^2 dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T 0 dt = \frac{U_0^2}{2},$$

d'où : $U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$.

Le facteur de forme du signal carré est : $f = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Deux intervalles définissant une aire identique sous la courbe $u^2(t)$ apparaissent.

- Sur $\left[0 ; \frac{T}{2}\right]$, la tension $u(t)$ vérifie : $u(t) = U_0 \times \frac{t}{\frac{T}{2}} = \frac{2U_0 t}{T}$, soit :

$$\int_0^{\frac{T}{2}} u^2(t) dt = \frac{4U_0^2}{T^2} \int_0^{\frac{T}{2}} t^2 dt = \frac{4U_0^2}{3T^2} \left(\frac{T}{2}\right)^3 = \frac{U_0^2 T}{6}.$$

- Sur $\left[\frac{T}{2} ; T\right]$, l'intégrale de $u^2(t)$ prend une valeur identique d'où :

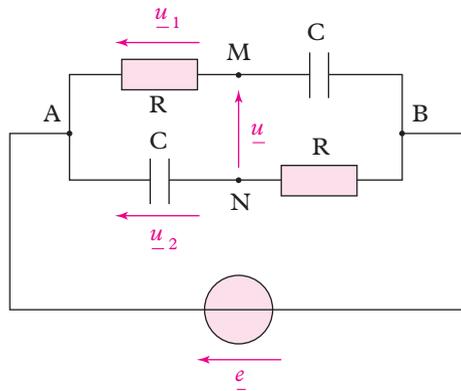
$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \left(2 \times \frac{U_0 T}{6}\right)}, \text{ soit : } U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{3}}.$$

Le facteur de forme du signal triangulaire est : $f = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

⚠ La relation $U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$, valable pour un signal sinusoïdal, n'est pas valable dans le cas général.

Exercices de niveau 2

Exercice 1



Nous allons exprimer les tensions u_1 et u_2 par application du théorème de division de tension :

$$u_1 = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} e = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} e \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} e = \frac{1}{1 + jRC\omega} e.$$

On a : $u = u_2 - u_1$, d'où : $u = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} e$.

⚠ Cette expression de la tension u n'est valable qu'à vide, c'est-à-dire en l'absence de dipôle branché entre les points M et N. Si on connecte un dipôle à ces bornes, un courant circule entre les nœuds M et N et le théorème de division de tension ne s'applique plus.

Le signal étant sinusoïdal, on peut écrire :

$$\underline{u} = U_{\text{eff}} \sqrt{2} e^{j(\omega t + \phi)} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} E \sqrt{2} e^{j\omega t},$$

avec ϕ avance de phase de \underline{u} sur \underline{e} .

On en déduit, en prenant :

– les modules :

$$U_{\text{eff}} = \left| \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} \right| E, \text{ d'où : } \mathbf{U}_{\text{eff}} = \mathbf{E}.$$

– les arguments :

$$\phi = \arg\left(\frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}\right) = -2\text{Arctan}(RC\omega).$$



Le fait que l'amplitude de la tension $u(t)$ soit identique à celle du générateur de fém $e(t)$ justifie le nom de *déphaseur* de ce circuit : il n'agit que sur la phase du signal, qu'il est possible de faire varier entre 0 et $-\pi$ selon la fréquence ω .

Exercice 2

a) • La puissance est dissipée dans la résistance. On a donc :

$$\mathcal{P} = RI^2, \text{ d'où : } \mathbf{R} = \frac{\mathcal{P}}{\mathbf{I}^2} = 10 \Omega.$$

• L'impédance réelle du circuit vaut :

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}} = 20 \Omega.$$

On peut aussi l'écrire (association série d'une résistance et d'une inductance) :

$$\mathbf{Z} = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}, \text{ d'où : } \mathbf{L} = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega} = 55 \text{ mH}.$$

• Enfin, le facteur de puissance a pour expression :

$$\mathcal{P} = UI \cos \phi, \text{ d'où : } \mathbf{\cos \phi} = \frac{\mathcal{P}}{\mathbf{UI}} = \frac{1}{2}.$$

b)



Il s'agit d'appliquer la méthode n° 2. L'impédance du dipôle RL est $\underline{Z} = R + jL\omega$, d'argument :

$$\phi = \text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right), \text{ soit : } \phi = +60^\circ.$$

C'est un dipôle globalement inductif, ce qui était évident d'après sa constitution. Il est logique de ramener son facteur de puissance à 1 à l'aide d'un condensateur.

Lorsque le condensateur de capacité C est placé en parallèle avec le moteur, la nouvelle impédance vérifie :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega}, \text{ d'où : } \underline{Z} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

Le facteur de puissance vaut 1 si \underline{Z} est un réel positif. L'argument de \underline{Z} est donc nul. L'argument du numérateur \underline{N} est égal à l'argument du dénominateur \underline{D} . On a :

$$\underline{N} = R + jL\omega, \text{ d'où : } \arg(\underline{N}) = \text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right).$$

On a :

$$\underline{D} = 1 - LC\omega^2 + jRC\omega = jC\omega \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right], \text{ d'où : } \arg(\underline{D}) = \frac{\pi}{2} + \text{Arctan} \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right).$$

$$\text{On a donc : } \text{Arctan} \left(\frac{L\omega}{R} \right) = \frac{\pi}{2} + \text{Arctan} \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right), \text{ d'où :}$$

$$\frac{L\omega}{R} = \frac{-R}{L\omega - \frac{1}{C\omega}} = \frac{-1}{\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}}$$

 On rappelle que : $\tan \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\frac{1}{\tan \alpha}$.

On en déduit :

$$\frac{L\omega}{R} \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} \right) = -1, \text{ d'où : } C = \frac{L}{L^2\omega^2 + R^2} = 138 \mu\text{F}.$$

 On a aussi $C = \frac{L}{Z^2}$, où Z est l'impédance réelle du moteur.



Lorsque le facteur de puissance vaut 1, la même puissance est obtenue avec une intensité plus faible que dans la question a). Cela ne change rien pour l'utilisateur du moteur, mais cela diminue les pertes par effet Joule dans le réseau qui achemine cette intensité.

c) Avec la capacité C' , nous avons : $\cos \phi = 0,95$. En outre :

$$\begin{aligned} \underline{Z}' &= \frac{R + jL\omega}{1 - LC'\omega^2 + jRC'\omega} = \frac{(R + jL\omega)(1 - LC'\omega^2 - jRC'\omega)}{(1 - LC'\omega^2)^2 + (RC'\omega)^2} \\ &= \frac{R + j\omega[L - C'(R^2 + L^2\omega^2)]}{(1 - LC'\omega^2)^2 + RC'\omega^2}. \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\tan \phi = \frac{\omega[L - C'(R^2 + L^2\omega^2)]}{R} = \frac{\omega[L - Z^2C']}{R},$$

$$\text{soit : } C' = \frac{L - \frac{R \tan \phi}{\omega}}{Z^2}, \text{ où } Z \text{ est l'impédance réelle du moteur.}$$

Comme $\cos \phi = 0,95$ et $C' < C$, il faut prendre :

$$\tan \phi = 0,329, \text{ d'où : } C' = 112 \mu\text{F}.$$



Le cas $\tan \phi = -0,329$ conduit à $C' = 164 \mu\text{F}$. Cette valeur de la capacité conduit à un ensemble {moteur//capacité correctrice} globalement capacitif, et dont le facteur de puissance est également inférieur à 1.

Exercice 3

a) Les valeurs efficaces de la tension U et du courant I circulant dans le moteur permettent de calculer son impédance réelle :

$$Z = \frac{U}{I} = 5 \Omega.$$



Cette impédance diffère de la résistance R du moteur du fait de l'effet inductif de la bobine.

Or, on a (association série d'une résistance et d'une inductance) :

$$Z = \sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}, \text{ d'où : } L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega} = 12,7 \text{ mH.}$$

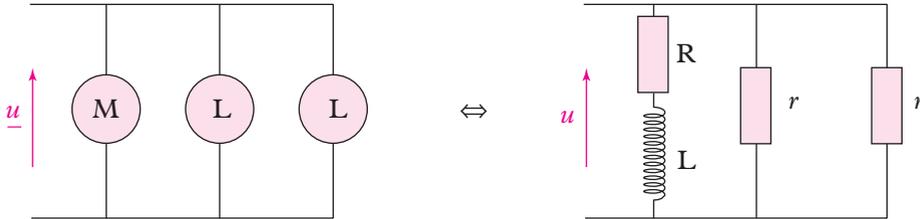
La puissance consommée dans le moteur est le fait des seuls effets résistifs, soit :

$$\mathcal{P} = RI^2 = 48 \text{ W.}$$

b) La résistance d'une lampe est r telle que :

$$\mathcal{P}_{\text{lampe}} = \frac{U^2}{r}, \text{ d'où : } r = \frac{U^2}{\mathcal{P}_{\text{lampe}}} = 50 \Omega.$$

Le montage équivalent est :



$$\text{L'admittance du circuit vaut : } \underline{Y} = \frac{1}{R + jL\omega} + \frac{2}{r} = \frac{r + 2R + 2jL\omega}{r(R + jL\omega)},$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \underline{Z} &= \frac{r(R + jL\omega)}{(r + 2R) + 2jL\omega} = \frac{r(R + jL\omega)(r + 2R - 2jL\omega)}{(r + 2R)^2 + 4L^2\omega^2} \\ &= \frac{r[R(r + 2R) + 2L^2\omega^2 + jL\omega r]}{(r + 2R)^2 + 4L^2\omega^2}. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\tan \phi = \frac{rL\omega}{R(r + 2R) + 2L^2\omega^2} = \frac{50 \times 4}{3 \times 56 + 2 \times 4^2} = 1, \text{ d'où : } \cos \phi = 0,707.$$

Exercice 4



Il s'agit d'appliquer la méthode n° 3 au circuit.

Lorsque le pont est équilibré, les potentiels des points M et N sont égaux. Ces potentiels s'obtiennent par des diviseurs de tension :

$$\underline{V}_M = \frac{R}{R_1 + \frac{R}{1 + jRC\omega}} \underline{e} \quad \text{et} \quad \underline{V}_N = \frac{R_2 \underline{e}}{R_2 + r + jL\omega}.$$

L'égalité entre ces potentiels conduit à :

$$\frac{R}{(1 + jRC\omega)R_1 + R} = \frac{R_2}{R_2 + r + jL\omega}.$$

$$\Leftrightarrow RR_2 + Rr + jRL\omega = R_1R_2 + jRR_1R_2C\omega + RR_2$$

$$\Leftrightarrow RR_2 + Rr - R_1R_2 - RR_2 + j(RL\omega - RR_1R_2C\omega) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Rr = R_1R_2 \\ RL = RR_1R_2C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{R_1R_2}{R} \\ L = R_1R_2C. \end{cases}$$



En règle générale, l'équilibrage d'un pont conduit à deux conditions.

Exercice 5

a) Afin d'accéder à la puissance dissipée dans l'impédance \underline{Z} , évaluons le courant qui la traverse.

On a :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z} + \underline{Z}_g} = \frac{\underline{e}}{(R + R_g) + j(X + X_g)}.$$

D'où la valeur efficace I du courant :

$$I = \frac{E}{\sqrt{(R + R_g)^2 + (X + X_g)^2}}.$$

La puissance moyenne dissipée dans \underline{Z} est celle dissipée dans la résistance R (partie réelle de \underline{Z}). On a donc :

$$\mathcal{P} = RI^2 = \frac{RE^2}{(R + R_g)^2 + (X + X_g)^2}.$$

La résistance R de l'impédance \underline{Z} est nécessairement positive. La réactance X, en revanche, peut être négative. On maximise donc la puissance \mathcal{P} en assurant la condition $X = -X_g$:

$$\mathcal{P} = \frac{RE^2}{(R + R_g)^2} = \frac{RE^2}{R + \frac{R_g^2}{R} + 2R_g}.$$

Cette puissance est maximale quand $f(R) = R + \frac{R_g^2}{R} + 2R_g$ est minimale, c'est-à-dire :

$$f'(R) = 1 - \frac{R_g^2}{R^2} = 0, \quad \text{d'où : } R = R_g.$$

\mathcal{P} est donc maximum pour $\underline{Z} = \underline{Z}_g^* = R_g - jX_g$.



En assurant $\underline{Z} = \underline{Z}_g^*$, nous faisons en sorte que l'association série de \underline{Z} et \underline{Z}_g ait une impédance réelle :

$$(\underline{Z} + \underline{Z}_g) = R + R_g + j(X + X_g) = 2R.$$

Il s'agit en fait de ramener le facteur de puissance de cette association à 1, comme nous avons pu le voir dans la méthode n° 2.

b) On a (association parallèle) :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega}, \quad \text{d'où : } \underline{Z} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

Comme l'impédance du générateur \underline{Z}_g et celle de la charge \underline{Z} doivent être conjuguées, on a :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_g^* = R_g,$$

d'où :

$$R + jL\omega = R_g(1 - LC\omega^2 + jRC\omega) = R_g(1 - LC\omega^2) + jR_gRC\omega.$$

On en déduit :

$$\begin{cases} R = R_g(1 - LC\omega^2) \\ L = R_gRC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} LC\omega^2 = 1 - \frac{R}{R_g} \\ L = R_gRC. \end{cases}$$

Si $R < R_g$, on obtient finalement :

$$C\omega = \frac{1}{\sqrt{R_g R}} \times \sqrt{1 - \frac{R}{R_g}} \quad \text{et} \quad L\omega = \sqrt{R_g R} \times \sqrt{1 - \frac{R}{R_g}}.$$



L'adaptation d'impédance n'est possible que pour $R < R_g$. Elle n'est par ailleurs réalisée que pour une valeur donnée de la pulsation ω .

c) • Montage 1 :

$$\underline{Z} = \frac{jL\omega(1 + jRC\omega)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} = R_g,$$

$$\text{d'où : } jL\omega(1 + jRC\omega) = R_g(1 - LC\omega^2) + jRR_g C\omega$$

$$-RLC\omega^2 + jL\omega = R_g(1 - LC\omega^2) + jRR_g C\omega.$$

On en déduit finalement, si $R < R_g$:

$$\begin{cases} L = RR_g C \\ LC\omega^2 (R_g - R) = R_g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L\omega = R_g \sqrt{\frac{R}{R_g - R}} \\ C\omega = \frac{1}{\sqrt{R(R_g - R)}}. \end{cases}$$

• Montage 2 :

$$\underline{Z} = jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega} = R_g,$$

$$\text{d'où : } R = (R_g - jL\omega)(1 + jRC\omega)$$

$$= R_g + RLC\omega^2 + j(RR_g C - L)\omega.$$

On en déduit finalement, si $R > R_g$:

$$\begin{cases} R = R_g + RLC\omega^2 \\ RR_g C - L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L\omega = \sqrt{R_g R} \times \sqrt{1 - \frac{R_g}{R}} \\ C\omega = \frac{1}{\sqrt{R_g R}} \times \sqrt{1 - \frac{R_g}{R}}. \end{cases}$$

Filtres du premier ordre

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons appliquer les résultats de l'électrocinétique aux circuits électriques afin d'obtenir la réponse à une excitation. Les circuits électriques sont utilisés dans un régime de fonctionnement linéaire ; en outre, tout signal périodique est décomposable en une somme finie ou infinie de fonctions sinusoïdales. Dans ces conditions, il est tout particulièrement intéressant d'étudier la réponse d'un circuit à une excitation sinusoïdale.

Plan du chapitre 8

A. Fonction de transfert d'un quadripôle	246
1. Dipôles et quadripôles	246
2. Quadripôles linéaires	246
3. Fonction de transfert	246
4. Le diagramme de Bode	248
5. Ordre d'un filtre	250
6. Bande passante d'un filtre	250
B. Filtres passifs – Filtres actifs	252
1. Définition	252
2. Amplificateur opérationnel (A.O.)	253
C. Filtres du premier ordre	255
1. Expression de la fonction de transfert	255
2. Filtre passe-bas	255
3. Filtre passe-haut	258
4. Cas plus général	261
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	263
Énoncés des exercices	273
Indications	274
Solution des exercices	275

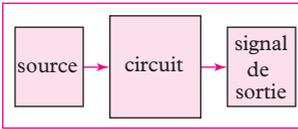


Fig. 1 - Le signal de sortie constitue la réponse du circuit.

1. Par exemple, la tension u_c aux bornes du condensateur d'un circuit RLC en régime sinusoïdal forcé.

2. Conventionnellement, le courant de sortie i_s est orienté de manière à entrer dans le quadripôle en A_s .

A. Fonction de transfert d'un quadripôle

Pour utiliser un circuit électrique, nous branchons celui-ci sur une source de tension. Afin d'obtenir la réponse du circuit, nous nous intéressons à la tension aux bornes d'un élément du circuit¹ (fig. 1).

A.1. Dipôles et quadripôles

- Un **dipôle** est un composant ou un circuit caractérisé par deux bornes. La caractéristique du dipôle relie l'intensité i circulant dans celui-ci à la tension u à ses bornes.

- Un **quadripôle** est une portion de réseau reliée à l'extérieur par quatre bornes : deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. Il est caractérisé par quatre variables : la tension u_e et le courant i_e d'entrée, ainsi que la tension u_s et le courant i_s de sortie². Le montage le plus simple consiste à relier les bornes d'entrée A_e et B_e à un générateur (ou source) et les bornes de sortie A_s et B_s à un récepteur (ou charge) (fig. 2).

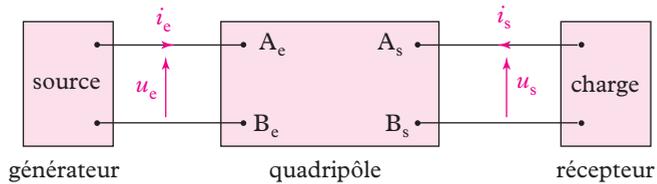


Fig. 2 - La source est branchée à l'entrée du quadripôle, la charge en sortie.

A.2. Quadripôles linéaires

Un quadripôle est constitué de dipôles. Les caractéristiques de ces dipôles définissent les relations liant entre elles les grandeurs instantanées d'entrée u_e et i_e et les grandeurs instantanées de sortie u_s et i_s . Lorsque les relations ainsi obtenues sont linéaires, le quadripôle est dit linéaire.

Si les dipôles constituant le quadripôle sont utilisés en fonctionnement linéaire, le quadripôle est linéaire.

De même, en régime sinusoïdal, l'utilisation des notations complexes permet d'obtenir des relations linéaires aux bornes de certains dipôles³.

Un quadripôle constitué de dipôles linéaires est linéaire.

3. Les dipôles dont l'équation différentielle est linéaire (cf. chapitre 3).

A.3. Fonction de transfert

A.3.1 - Définition

Définition 1

On appelle fonction de transfert H d'un quadripôle le rapport de la valeur d'une grandeur de sortie G_s à la valeur d'une grandeur d'entrée G_e .

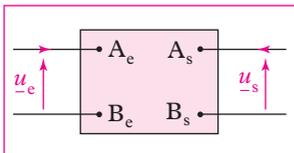


Fig. 3 - Les grandeurs d'entrée et de sortie sinusoïdales sont représentées en notations complexes. Ici, $G_e = \underline{u}_e$ et $G_s = \underline{u}_s$.

A.3.2 - Fonction de transfert complexe

Lorsque la source délivre une tension sinusoïdale de fréquence f (ou de pulsation ω), les grandeurs d'entrée et de sortie du quadripôle sont sinusoïdales (régime harmonique) et elles peuvent être représentées en notations complexes (fig.3).

1. La pulsation ω est toujours associée au nombre complexe j .

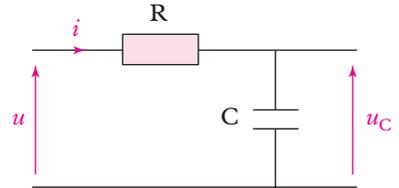
En régime harmonique, la fonction de transfert complexe \underline{H} d'un quadri-pôle est fonction de la pulsation ω de la source¹. Elle s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\text{amplitude complexe de la grandeur de sortie}}{\text{amplitude complexe de la grandeur d'entrée}}$$

Application 1 Fonction de transfert d'un filtre RC

Un réseau constitué d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C est alimenté par un générateur de tension sinusoïdal délivrant la tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$. On définit un quadripôle dont les variables sont :

- en entrée : la tension $u(t)$ du générateur ;
- en sortie : la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.



Déterminer la fonction de transfert du montage en notations complexes : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_c(j\omega)}{\underline{U}(j\omega)}$.

Solution

- L'impédance complexe du montage est :

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega}, \text{ d'où : } \underline{u}(t) = \underline{Z} \underline{i}(t) \text{ ou } \underline{U}_0 = \underline{Z} \underline{I}_0.$$

\underline{U}_0 est l'amplitude complexe de la tension appliquée et \underline{I}_0 celle du courant circulant dans le circuit.

- L'impédance complexe du condensateur vaut :

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{jC\omega}, \text{ d'où : } \underline{u}_c(t) = \underline{Z}_c \underline{i}(t) \text{ ou } \underline{U}_{c_0} = \underline{Z}_c \underline{I}_0.$$

\underline{U}_{c_0} est l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur.

- On obtient en reportant :

$$\underline{U}_{c_0} = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}} \underline{U}_0, \text{ soit : } \underline{U}_{c_0} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{U}_0.$$

Cette relation permet d'écrire la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

A.3.3 - Amplification en tension

Définition 2

En régime harmonique, on appelle amplification en tension complexe la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega)$ définie par le rapport sans dimension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e},$$

où \underline{U}_e est l'amplitude complexe de la tension d'entrée et \underline{U}_s l'amplitude complexe de la tension de sortie.

2. On la trouve parfois écrite $A_u(\omega)$.

Le module $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ de la fonction de transfert est l'amplification en tension² et son argument $\phi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$ est la phase.

L'amplification en tension est la fonction de transfert la plus utilisée dans les montages en électronique. Il est à noter que son module peut être inférieur ou supérieur à 1. Le terme « amplification » ne signifie pas que l'amplitude du signal de sortie est plus grande que celle du signal d'entrée. En revanche, il est utilisé chaque fois que la grandeur d'entrée et la grandeur de sortie sont de même nature.

A.4. Le diagramme de Bode

En régime harmonique, les fonctions de transfert des quadripôles de l'électrocinétique dépendent de la fréquence. Pour exploiter cette propriété, on utilise un diagramme de Bode ou courbe de réponse à un signal sinusoïdal.

A.4.1 - Utilisation de l'échelle logarithmique

La représentation des fonctions de transfert se fait en traçant deux graphes, l'un relatif au module et l'autre à la phase. Usuellement, on représente le graphe du module en utilisant la fonction logarithme¹.

1. En base 10, on a :

$$\log(10^n) = n \log 10 = n.$$

La quantité calculée augmente de 1 chaque fois qu'on multiplie par 10.

2. L'oreille détecte des puissances de $10^{-16} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ à $10^{-3} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ suivant la fréquence. Afin de comparer les sons, on définit l'intensité par la relation :

$$I = 10 \log \left(\frac{P}{P_0} \right), \text{ avec}$$

$$P_0 = 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

L'intensité des sons audibles va donc de 0 dB (bruit d'une feuille tombant) à 130 dB (limite de douleur).

3. L'amplification en puissance est une grandeur réelle dépendant de la pulsation ω .

4. Afin de rappeler le choix de la notation logarithmique, l'unité de gain est le décibel de symbole dB (*déci*- rappelle le facteur 10).

5. La valeur de la constante de proportionnalité k dépend de la nature du circuit.

• Raisons physiologiques

Chez un être vivant, la sensation à une excitation extérieure est proportionnelle au logarithme de l'excitation. L'étendue des puissances ou des énergies perceptibles fait qu'une représentation logarithmique traduit bien les impressions ressenties².

• Raisons techniques

L'échelle logarithmique permet une représentation graphique correcte sur l'ensemble du domaine de variation des fréquences étudiées (de quelques hertz à quelques centaines de kilohertz). De même, l'amplitude peut varier d'un facteur 100 ou 1 000.

A.4.2 - Gains en décibels

• Gain en puissance

L'amplification en puissance A_P du quadripôle est le rapport sans dimension de la puissance moyenne P_s fournie à la charge et de la puissance moyenne P_e reçue du générateur³ :

$$A_P(\omega) = \frac{P_s}{P_e}.$$

Définition 3

On définit le gain en puissance G_P du quadripôle, exprimé en décibel (dB), par la relation⁴ :

$$G_P(\omega) = 10 \log[A_P(\omega)], \text{ avec } A_P \text{ amplification en puissance.}$$

L'utilisation du gain en puissance nécessite des calculs parfois longs des courants et des tensions.

• Gain en tension

La puissance moyenne P , dans un circuit, est proportionnelle au carré de la tension U à ses bornes⁵ :

$$P = k|U|^2, \text{ d'où : } G_P = 20 \log \left| \frac{U_s}{U_e} \right| + c^{te}.$$

Afin de simplifier les calculs, on exprime alors le gain en tension.

Définition 4

Le gain en tension G du quadripôle, exprimé en décibel (dB), représente la dépendance énergétique du filtre :

$$G(\omega) = 20 \log \left| \frac{U_s}{U_e} \right| = 20 \log |H(\omega)|, \text{ avec } H(\omega) \text{ amplification en tension.}$$

Le gain en tension est aussi noté $H_{dB}(\omega)$ pour rappeler le module de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ et la fonction logarithme liée à l'unité décibel.

Application 2 Gain en tension du filtre RC

Déterminer le gain en tension du filtre RC étudié à l'application 1.

Solution

La fonction de transfert du montage est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}, \text{ d'où : } H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}.$$

Le gain en tension vaut donc :

$$G(\omega) = 20 \log(H(\omega)) = -10 \log(1 + R^2 C^2 \omega^2).$$

A.4.3 - Diagramme de Bode

Définition 5

Le diagramme de Bode est constitué par deux courbes (fig. 4) :

- le **gain** G de la fonction de transfert (en dB) en fonction du logarithme¹ de la fréquence f (en Hz) (ou de la pulsation ω en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) ;
- la **phase** ϕ de la fonction de transfert (en rad) en fonction du logarithme de la fréquence f (en Hz) (ou de la pulsation ω en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$).

1. On utilise alors du papier semi-logarithmique, gradué en abscisses dans une échelle logarithmique.

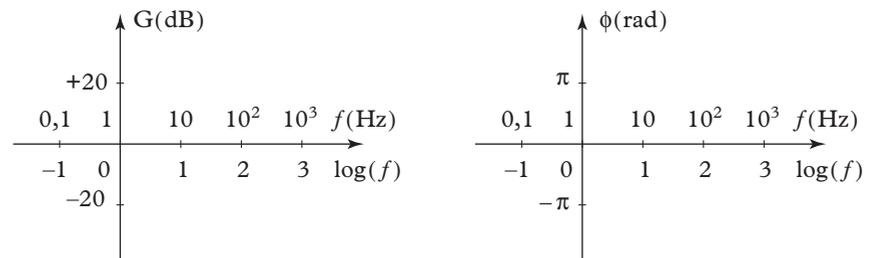


Fig. 4 - Sur les graphes, figurent en ordonnées le gain G et la phase ϕ du montage, et en abscisses la fréquence f en échelle logarithmique (en haut) et $\log(f)$ en échelle linéaire (en bas).

• Fréquence et pulsation

Comme $\omega = 2\pi f$, on a : $\log(\omega) = \log(f) + \log(2\pi)$. L'utilisation de l'échelle en pulsation donne le même graphe, mais subissant une translation de $\log(2\pi)$ suivant l'axe des abscisses².

• Graduation de l'échelle logarithmique

Dans une échelle logarithmique, les graduations ne sont pas équidistantes. En revanche, on retrouve la position d'une graduation grâce à la fonction logarithme. Par exemple, l'intervalle permettant de passer de la fréquence 100 Hz à la fréquence 1 kHz est le même que celui permettant de passer de la fréquence 1 kHz à la fréquence 10 kHz.

2. Dorénavant, nous utiliserons indifféremment l'une ou l'autre échelle pour tracer le diagramme de Bode.

• Décade et octave

– La décade correspond à l'intervalle de fréquences pour passer de la fréquence f à la fréquence $10f$. Dans le diagramme de Bode, cet intervalle est l'intervalle de longueur 1 (intervalle unité¹).

1. En effet, on a en abscisses :
 $\log(10f) - \log(f) = \log(10) = 1$.

– L'octave correspond à l'intervalle de fréquences pour passer de la fréquence f à la fréquence double $2f$. Dans le diagramme de Bode, cet intervalle a pour longueur $\log(2)$ ².

2. En effet, on a :
 $\log(2f) - \log(f) = \log(2)$.

• Pente d'une droite

Dans la représentation du gain en tension G en fonction de $\log(f)$, la pente d'une droite est calculée en dB/décade.

A.5. Ordre d'un filtre

La fonction de transfert complexe peut toujours s'écrire comme le rapport de deux polynômes en $j(\omega)$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)}$$

Pour des raisons de stabilité du filtre, le degré du polynôme $\underline{N}(j\omega)$ au numérateur de la fonction de transfert est inférieur ou égal au degré du polynôme $\underline{D}(j\omega)$ au dénominateur.

Définition 6

On appelle **ordre du filtre** le degré du polynôme $\underline{D}(j\omega)$ situé au dénominateur de la fonction de transfert complexe \underline{H} .

Application 3 Ordre du filtre RC

Déterminer l'ordre du filtre RC étudié à l'application 1.

Solution

La fonction de transfert du filtre RC est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert est donc :

$$\underline{D}(j\omega) = 1 + jRC\omega$$

C'est un polynôme du premier ordre en $j\omega$: le filtre est donc un **filtre du premier ordre**.

A.6. Bande passante d'un filtre

Pour caractériser les propriétés d'un quadripôle, on définit le domaine de fréquences sur lequel le signal d'entrée se retrouve en sortie avec une amplification suffisante et le domaine de fréquences sur lequel le signal de sortie se retrouve atténué.

A.6.1 - Pulsations de coupure

Soit f_{\max} la fréquence (ou ω_{\max} la pulsation) associée à un maximum d'amplification (ou de gain). On note alors $H(\omega_{\max}) = H_{\max}$ la valeur maximale de $H(\omega)$ correspondant à la pulsation $\omega = \omega_{\max}$.

1. Il existe parfois deux pulsations de coupure ω_{c_1} et ω_{c_2} .

2. On a en effet :
 $-10 \log 2 \approx -3$.

3. En effet, on peut aussi écrire :
 $G_p(\omega_c) = G_{p_{\max}} - 3\text{dB}$,

d'où : $P_s = \frac{P_{\max}}{2}$.

Définition 7

On appelle pulsation de coupure ω_c la pulsation telle que¹ :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}, \text{ soit}^2 : G(\omega_c) = G_{\max} - 3\text{dB} \text{ avec } G_{\max} = 20 \log(H_{\max}).$$

(À cette pulsation de coupure ω_c correspond une fréquence de coupure f_c telle que $\omega_c = 2\pi f_c$.)

Cette définition signifie que la puissance fournie par le dipôle est divisée par 2 en passant de la fréquence f_{\max} à la fréquence f_c si la charge du quadripôle est une résistance³.

A.6.2 - Bande passante

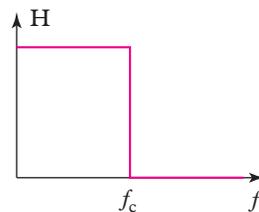
Définition 8

On appelle bande passante d'un filtre l'intervalle de pulsations $\Delta\omega$ donnant une amplification (ou un gain) supérieur à la valeur de coupure :

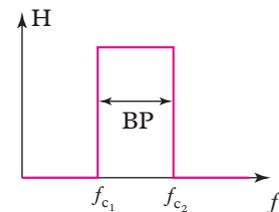
$$H(\omega) > H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \text{ ou } G(\omega) > G(\omega_c) = G_{\max} - 3\text{dB}.$$

(À cet intervalle de pulsations $\Delta\omega$ correspond un intervalle de fréquences Δf tel que $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$.)

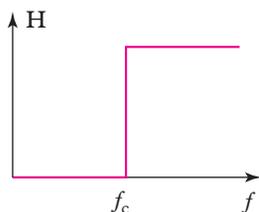
- On suppose que le filtre possède une seule fréquence de coupure f_c (fig. 5).
 - Si l'amplification est maximum pour une fréquence nulle ou pour une fréquence $f_0 < f_c$, le filtre ne laisse passer que les fréquences inférieures à f_c (**filtre passe-bas**). La bande passante est alors : $BP(f) = f_c$.
 - Si l'amplification est maximum pour une fréquence tendant vers l'infini ou pour une fréquence $f_0 > f_c$, seules les fréquences supérieures à f_c ne sont pas atténuées (**filtre passe-haut**). On précise alors la fréquence de coupure.
- On suppose que le filtre possède deux fréquences de coupure f_{c_1} et f_{c_2} (fig. 5).
 - Si l'amplification est maximum pour une fréquence f_0 comprise entre les fréquences de coupures ($f_{c_1} < f_0 < f_{c_2}$), le quadripôle est un filtre passe-bande de bande passante : $BP(f) = f_{c_2} - f_{c_1}$.
 - Si l'amplification est maximum en dehors de la bande de fréquence $f_{c_2} - f_{c_1}$, le quadripôle est un filtre réjecteur de fréquences.



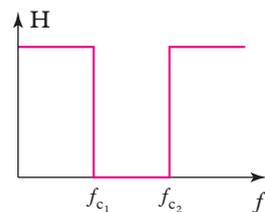
a. filtre passe-bas



b. filtre passe-bande



c. filtre passe-haut



d. filtre réjecteur de fréquences

Fig. 5 - Les différents types de filtres : passe-bas, passe-bande, passe-haut, réjecteur de fréquences.

Remarques

- Un filtre du premier ordre possède au plus une fréquence de coupure (filtre passe-bas du premier ordre ou filtre passe-haut du premier ordre).
- Un filtre du second ordre peut avoir deux fréquences de coupure. Tous les cas de la figure 5 sont alors possibles.

Application 4 Bande passante du filtre RC

Déterminer la (les) fréquence(s) de coupure et la bande passante du filtre RC étudié à l'application 1. Quelle est la nature de ce filtre ?

Solution

La fonction de transfert du filtre RC est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}, \text{ d'où : } H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}.$$

L'amplification $H(\omega)$ est une fonction décroissante de la pulsation ω . Elle est donc maximale pour $\omega = 0$, et alors $H_{\max} = 1$. La pulsation de coupure ω_c correspond donc à :

$$H(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega_c^2}}, \text{ d'où : } RC\omega_c = 1.$$

La pulsation et la fréquence de coupure valent donc :

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \text{ et } f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}.$$

Comme la fonction $H(\omega)$ est une fonction décroissante de la pulsation ω , le filtre étudié est un filtre passe-bas du premier ordre de bande passante :

$$\text{BP}(f) = f_c = \frac{1}{2\pi RC}.$$

B. Filtres passifs – Filtres actifs

B.1. Définition

Dans un quadripôle, il y a toujours un transfert de puissance entre l'entrée (puissance P_e fournie par la source au quadripôle) et la sortie (puissance P_s reçue par la charge du quadripôle).

B.1.1 - Quadripôle actif

Un **quadripôle actif** est un quadripôle comportant des sources « internes » d'énergie (c'est-à-dire des sources indépendantes du signal d'entrée), obtenues grâce à l'alimentation du quadripôle¹.

B.1.2 - Quadripôle amplificateur

Si la puissance d'entrée P_e est inférieure à la puissance de sortie P_s , le quadripôle est **actif et amplificateur**. Des sources internes fournissent l'énergie permettant d'amplifier la puissance. Un quadripôle actif comporte au moins un dipôle actif (c'est-à-dire un dipôle comportant une source interne). Il est évident qu'il peut aussi posséder des dipôles passifs.

¹ L'amplificateur d'une chaîne hi-fi est un quadripôle actif. La source est le tuner ou le lecteur CD et la charge est le haut-parleur restituant le signal sonore. L'amplificateur est alimenté par une source (par exemple, le secteur) fournissant l'énergie nécessaire pour amplifier le son.

B.1.3 - Quadripôle atténuateur

Si la puissance d'entrée P_e est supérieure à la puissance de sortie P_s , le quadripôle est **atténuateur**. Deux cas se présentent :

- si le quadripôle ne comporte que des composants passifs (conducteurs ohmiques, condensateur, bobines), il est passif ;
- si le quadripôle possède des sources internes, l'apport d'énergie correspondant est insuffisant pour amplifier la puissance. Le quadripôle est actif et atténuateur.

B.2. Amplificateur opérationnel (A.O.)

B.2.1 - Présentation de l'A.O.

À l'origine, le terme « amplificateur » désignait les composants électroniques destinés à effectuer diverses « opérations mathématiques ». Or, on découvrit qu'un amplificateur de gain élevé auquel on applique une contre-réaction se comporte comme un circuit de gain précis. En choisissant les éléments de cette réaction, l'amplificateur opérationnel (A.O.) permet alors d'additionner, soustraire, amplifier, comparer...

L'emploi de l'amplificateur opérationnel dans les appareils de mesure s'est généralisé du fait de ses bonnes performances et de sa simplicité. Il est souvent utilisé pour transformer des signaux analogiques en d'autres signaux analogiques¹.

1. Un signal analogique est un signal à variation continue, alors qu'un signal numérique ne peut prendre que deux valeurs bien définies correspondant aux nombres binaires 0 ou 1.

2. Il ne faut jamais oublier d'alimenter l'amplificateur opérationnel, car, dans le cas contraire, il y a risque de destruction du composant. En TP, on utilise une alimentation symétrique $+15\text{ V}$, 0 , -15 V ($V_{cc} = 15\text{ V}$).

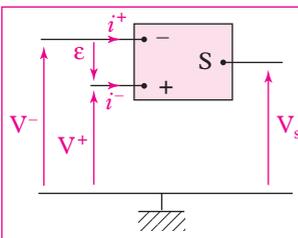


Fig. 6 - Schéma d'un amplificateur opérationnel (l'alimentation n'est pas représentée).

3. On prendra $V_{sat} = 15\text{ V}$ dans les applications numériques.

B.2.2 - Schématisation de l'A.O.

L'amplificateur opérationnel est un composant actif dont l'alimentation² symétrique possède trois bornes de sortie délivrant les tensions $-V_{cc}$, 0 , $+V_{cc}$ (la tension « 0 » correspond à la masse de l'alimentation).

Sur le schéma de l'amplificateur (fig. 6), les deux bornes d'entrée sont indiquées par les symboles « - » et « + ». La charge, branchée à la borne de sortie de l'amplificateur, est alors reliée à la masse.

Le signal d'entrée est la différence de potentiel $\varepsilon = V_+ - V_-$ entre les deux bornes d'entrée « + » (entrée non inverseuse) et « - » (entrée inverseuse). Le signal de sortie est la tension V_s mesurée à la sortie de l'amplificateur. Celui-ci étant alimenté par des tensions symétriques $\pm V_{cc}$, la tension de sortie V_s ne peut dépasser la tension de saturation $\pm V_{sat}$ (avec $V_{sat} \leq V_{cc}$)³.

La fonction de transfert complexe de l'amplificateur opérationnel est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{\varepsilon}, \text{ avec } \varepsilon = V_+ - V_-.$$

B.2.3 - Amplificateur opérationnel idéal

L'**amplificateur opérationnel idéal** possède une amplification en tension infinie, des impédances d'entrée infinies et une impédance de sortie nulle.

Les courants d'entrée i_- et i_+ sont donc nuls et la tension de sortie V_s est indépendante de la charge. En outre, l'amplification est indépendante de la fréquence (bande passante infinie) et le déphasage entre le signal d'entrée ε et le signal de sortie V_s est nul.

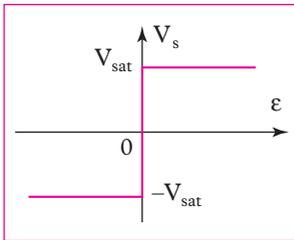


Fig. 7 - Caractéristique d'un amplificateur opérationnel idéal.

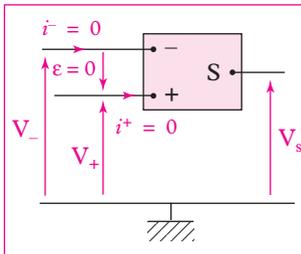


Fig. 8 - Amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire.

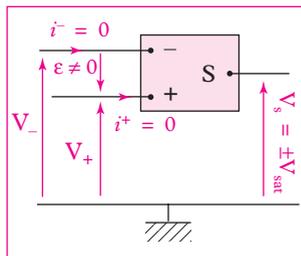


Fig. 9 - Amplificateur opérationnel idéal en régime de saturation.

Régime de saturation	Régime linéaire	Régime de saturation
$\varepsilon < 0 \Rightarrow$ $V_s = -V_{\text{sat}}$	$\varepsilon = 0 \Rightarrow$ $-V_{\text{sat}} < V_s < +V_{\text{sat}}$	$\varepsilon > 0 \Rightarrow$ $V_s = +V_{\text{sat}}$
l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime de saturation basse	le fonctionnement de l'amplificateur opérationnel est linéaire	l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime de saturation haute

La caractéristique liant la tension d'entrée ε à la tension de sortie V_s de l'amplificateur opérationnel idéal est donnée sur la **figure 7**.

B.2.4 - Régimes de fonctionnement de l'A.O. idéal

• Régime linéaire (fig. 8)

Le régime linéaire de l'A.O. idéal est caractérisé par :

$$\varepsilon = V_+ - V_- = 0 \quad \text{et} \quad |V_s| \leq V_{\text{sat}}$$

Pour que le fonctionnement en régime linéaire soit possible, il faut qu'une partie du signal de sortie soit réinjecté sur l'entrée inverseuse « - » de l'amplificateur opérationnel. Les variations du signal de sortie dues à celles du signal d'entrée sont alors amoindries par cette réaction et la tension de sortie V_s reste inférieure en valeur absolue à la tension de saturation V_{sat} .

• Régimes de saturation (fig. 9)

En l'absence d'une réaction efficace, l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime de saturation :

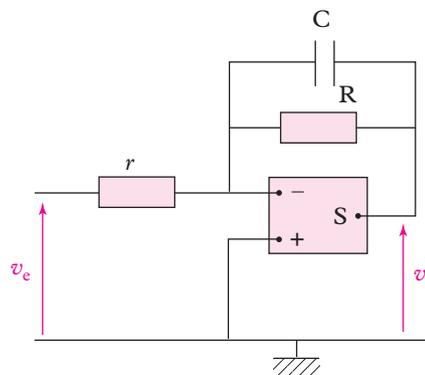
- si $\varepsilon = V_+ - V_- > 0$, alors $V_s = +V_{\text{sat}}$ (saturation haute) ;
- si $\varepsilon = V_+ - V_- < 0$, alors $V_s = -V_{\text{sat}}$ (saturation basse).

• Remarque

Les amplificateurs opérationnels utilisés dans les filtres actifs doivent avoir un fonctionnement linéaire pour une bonne restitution du signal. Dans la suite, on supposera cette condition réalisée.

Application 5 Fonction de transfert d'un filtre actif

Déterminer la fonction de transfert du montage schématisé ci-dessous et préciser l'ordre du filtre. L'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire.



Solution

- L'entrée non-inverseuse « + » est reliée à la masse du montage : le potentiel V_+ est donc nul. Comme l'amplificateur fonctionne en régime linéaire, le potentiel V_- de l'entrée inverseuse « - » est nul aussi. La tension v_e se retrouve alors aux bornes de la résistance r ; de même la tension de sortie v_s se retrouve aux bornes de la résistance R en parallèle avec le condensateur C .
- Comme les courants d'entrée de l'amplificateur opérationnel sont nuls, le courant i traversant la résistance r passe dans la résistance R en parallèle avec le condensateur C .
- On a donc la relation (R et C sont étudiés en convention générateur) :

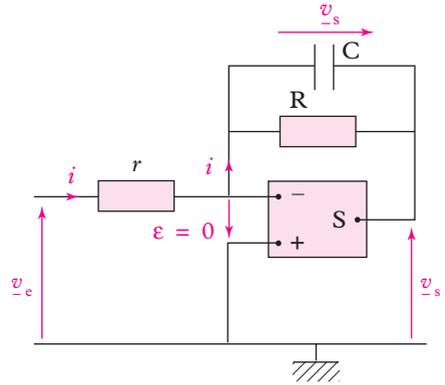
$$\underline{v}_e = r \underline{i} \text{ avec } \underline{i} = -\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right) \underline{v}_s, \text{ d'où :}$$

$$\underline{v}_e = -r\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right) \underline{v}_s.$$

La fonction de transfert complexe du montage s'écrit donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = -\frac{R}{r + jrRC\omega}.$$

Le dénominateur de la fonction de transfert est un polynôme du premier ordre en $j\omega$: le filtre obtenu est donc un **filtre actif du premier ordre**.



C. Filtres du premier ordre

C.1. Expression de la fonction de transfert

Le dénominateur de la fonction de transfert \underline{H} d'un filtre du premier ordre est un polynôme du premier degré en $j\omega$. Pour étudier cette fonction, on pose :

$$x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}, \text{ où } \omega_{\text{réf}} \text{ est la pulsation de référence du circuit.}$$

L'écriture la plus générale de la fonction de transfert \underline{H} d'un filtre du premier ordre en fonction de la variable x est alors :

$$\underline{H}(jx) = \frac{N(jx)}{1 + jx},$$

où $\underline{N}(jx)$ est un polynôme en jx de degré inférieur ou égal à 1.

C.2. Filtre passe-bas

C.2.1 - Fonction de transfert

Propriété 1

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit¹ :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}.$$

1. H_0 peut être positif ou négatif. Dans la suite, on choisira toujours $H_0 > 0$.

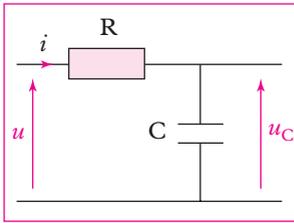


Fig. 10 - Exemple de filtre passe-bas du premier ordre.

Exemple :

La fonction de transfert du filtre RC étudié à l'application 1 est (fig. 10) :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

En posant $\omega_{\text{réf}} = \frac{1}{RC}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$, il vient :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + jx}, \text{ fonction de transfert d'un filtre passe-bas.}$$

C.2.2 - Fréquence de coupure – bande passante

L'amplification en tension H d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit en fonction de x :

$$H(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + x^2}}$$

La fonction $H(x)$ décroît quand x varie de 0 à $+\infty$. Elle est maximum pour $x = 0$ et on a alors $H_{\text{max}} = H_0$. La pulsation de coupure ω_c vérifie donc :

$$H(x_c) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + x_c^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}, \text{ avec } x_c = \frac{\omega_c}{\omega_{\text{réf}}}$$

On en déduit : $x_c = 1$, soit :

$$\omega_c = \omega_{\text{réf}} \quad \text{et} \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{\omega_{\text{réf}}}{2\pi}$$

La bande passante d'un filtre passe-bas du premier ordre vaut :

$$\text{BP}(f) = f_c = \frac{\omega_{\text{réf}}}{2\pi}, \text{ où } \omega_{\text{réf}} \text{ est la pulsation de référence du circuit.}$$

C.2.3 - Étude du gain

Le gain en tension G d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit en fonction de x :

$$G(x) = 20\log(H(x)) = 20\log(H_0) - 10\log(1 + x^2)$$

• La fonction $G(x)$ décroît quand x varie de 0 à $+\infty$. Elle est maximum pour $x = 0$ et on a alors¹ :

$$G_{\text{max}} = G(0) = 20\log(H_0)$$

• Par définition des valeurs de coupure, on sait que :

$$G(1) = G_{\text{max}} - 3\text{dB}$$

• Pour tracer le diagramme de Bode, il faut connaître le comportement asymptotique de G quand $x \rightarrow 0$ et quand $x \rightarrow +\infty$.

– Quand $x \rightarrow 0$, alors $H(x) \rightarrow H_0$ et on a :

$$G(x) \rightarrow 20\log(H_0) = G_{\text{max}}$$

Aux basses fréquences, le gain G tend vers le gain basses fréquences maximum G_{max} . L'asymptote correspondante est une droite horizontale.

– Quand $x \rightarrow +\infty$, alors $H(x) \rightarrow \frac{H_0}{x}$ et on a :

$$G(x) \rightarrow 20\log(H_0) - 20\log(x) = G_{\text{max}} - 20\log(x)$$

1. La fonction \log étant croissante, les variations de $G(x)$ sont les mêmes que celles de $H(x)$.

2. Une décade correspond à une variation de x d'un facteur multiplicatif égal à 10, donc à une variation de $\log(x)$ d'un facteur additif égal à 1.

Aux hautes fréquences, le gain G tend vers la courbe $G_{\max} - 20\log(x)$. En échelle logarithmique, il s'agit d'une droite de pente -20 dB/décade¹. Les deux courbes asymptotes se coupent en $x = 1$.

C.2.4 - Étude de la phase

La phase ϕ d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit en fonction de x :

$$\phi(x) = \arg(\underline{H}(jx)) = -\arg(\underline{D}(jx)) = -\text{Arctan}(x).$$

• Pour $x = 1$, on a : $\phi = -\frac{\pi}{4}$.

• Pour tracer le diagramme de Bode, il faut connaître le comportement asymptotique de ϕ quand $x \rightarrow 0$ et quand $x \rightarrow +\infty$.

– Quand $x \rightarrow 0$, alors $\phi(x) \rightarrow 0$ (par valeur inférieure). Aux basses fréquences, l'asymptote correspondante est une droite horizontale.

– Quand $x \rightarrow +\infty$, alors $\phi(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ (par valeur supérieure). Aux hautes fréquences, l'asymptote correspondante est une droite horizontale.

C.2.5 - Diagramme de Bode

On peut représenter le gain et la phase en fonction de $\log(x)$. On trace sur le même graphe les asymptotes précédemment définies (fig. 11).

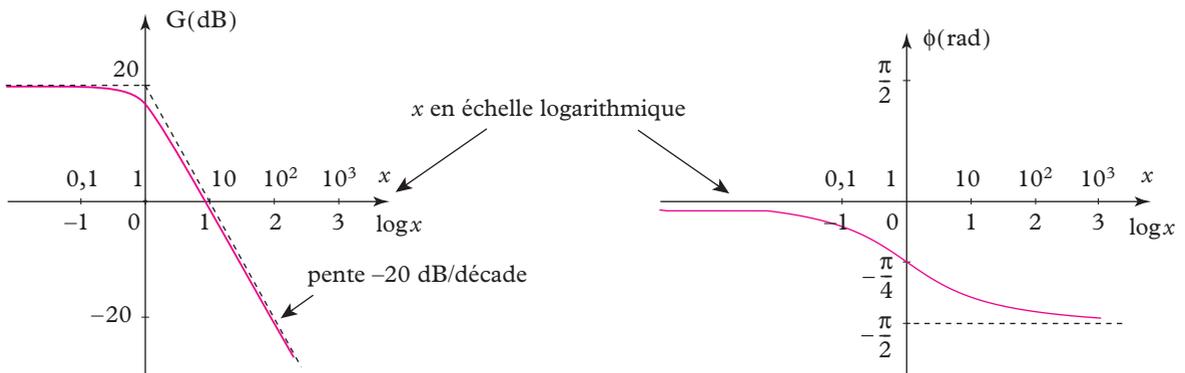


Fig. 11 - Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du premier ordre (cas particulier où $G_{\max} = 20$ dB).

C.2.6 - Interprétation physique du comportement asymptotique

On peut étudier physiquement la nature d'un filtre composé uniquement de composants usuels (résistances, condensateurs, bobines) en analysant leurs comportements aux basses et aux hautes fréquences.

– L'impédance d'un condensateur est : $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$. Quand $\omega \rightarrow 0$, alors on a : $|\underline{Z}| \rightarrow \infty$; quand $\omega \rightarrow +\infty$, alors on a : $|\underline{Z}| \rightarrow 0$.

Un condensateur se comporte aux basses fréquences comme un interrupteur ouvert et aux hautes fréquences comme un court-circuit (fil).

– L'impédance d'une inductance est : $\underline{Z} = jL\omega$. Quand $\omega \rightarrow 0$, alors on a : $|\underline{Z}| \rightarrow 0$; quand $\omega \rightarrow +\infty$, alors on a : $|\underline{Z}| \rightarrow \infty$.

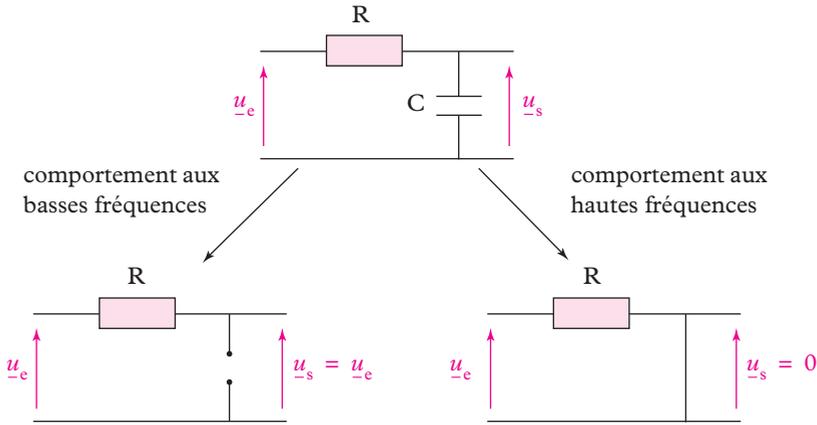
Une bobine se comporte aux basses fréquences comme un court-circuit (fil) et aux hautes fréquences comme un interrupteur ouvert.

Application 6 Comportement asymptotique d'un filtre RC

Retrouver qualitativement que le filtre RC de la figure 11, et déjà étudié à l'application 1, est un filtre passe-bas.

Solution

On remplace le condensateur par un fil aux hautes fréquences et par un interrupteur ouvert aux basses fréquences. On peut donc établir les schémas équivalents suivants pour le circuit :



Le filtre étudié est bien un filtre passe-bas, comme l'étude de la fonction de transfert l'avait déjà montré.

C.3. Filtre passe-haut

C.3.1 - Fonction de transfert

Propriété 2

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit¹ :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0 jx}{1 + jx}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$$

Exemple :

On considère le filtre de la figure 12. La tension d'entrée est la tension sinusoïdale u_e . La tension de sortie u_s est la tension aux bornes de la résistance R. D'après le théorème de division de tension, la fonction de transfert complexe du filtre vaut :

$$u_s = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} u_e, \text{ d'où : } \underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

En posant $\omega_{\text{réf}} = \frac{1}{RC}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$, il vient :

$$\underline{H}(jx) = \frac{jx}{1 + jx}, \text{ fonction de transfert d'un filtre passe-haut.}$$

1. H_0 peut être positif ou négatif. Dans la suite, on choisira toujours $H_0 > 0$.

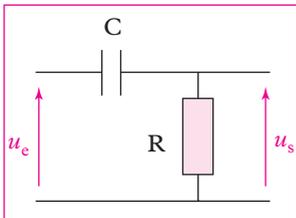


Fig. 12 - Exemple de filtre passe-haut du premier ordre.

C.3.2 - Fréquence de coupure

L'amplification en tension H d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit en fonction de x :

$$H(x) = H_0 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

Comme $\frac{1}{x^2}$ décroît quand x varie de 0 à $+\infty$, la fonction $H(x)$ est croissante. Elle est maximum pour $x \rightarrow +\infty$ et on a alors $H_{\max} = H_0$. La pulsation de coupure ω_c vérifie donc :

$$H(x_c) = \frac{H_0}{\sqrt{1+\frac{1}{x_c^2}}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}, \text{ avec } x_c = \frac{\omega_c}{\omega_{\text{réf}}}$$

On en déduit : $x_c = 1$, soit :

$$\omega_c = \omega_{\text{réf}} \text{ et } f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{\omega_{\text{réf}}}{2\pi}$$

La fréquence de coupure d'un filtre passe-haut du premier ordre vaut :

$$f_c = \frac{\omega_{\text{réf}}}{2\pi}, \text{ où } \omega_{\text{réf}} \text{ est la pulsation de référence du circuit.}$$

C.3.3 - Étude du gain

Le gain en tension G d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit en fonction de x :

$$G(x) = 20\log(H(x)) = 20\log(H_0) + 20\log(x) - 10\log(1+x^2)$$

• La fonction $G(x)$ croît quand x varie de 0 à $+\infty$. Elle est maximum pour $x \rightarrow +\infty$, et on a alors¹ :

$$G_{\max} = 20\log(H_0)$$

• Par définition des valeurs de coupure, on sait que :

$$G(1) = G_{\max} - 3\text{dB}$$

• Pour tracer le diagramme de Bode, il faut connaître le comportement asymptotique de G quand $x \rightarrow 0$ et quand $x \rightarrow +\infty$.

– Quand $x \rightarrow 0$, alors $H(x) \rightarrow H_0 x$ et on a :

$$G(x) \rightarrow 20\log(H_0) + 20\log(x) = G_{\max} + 20\log(x)$$

Aux basses fréquences, le gain G tend vers la courbe $G_{\max} + 20\log(x)$. En échelle logarithmique, il s'agit d'une droite de pente $+20$ dB/décade².

– Quand $x \rightarrow +\infty$, alors $H(x) \rightarrow H_0$ et on a :

$$G(x) \rightarrow G_{\max} = 20\log(H_0)$$

Aux hautes fréquences, le gain G tend vers le gain hautes fréquences maximum G_{\max} . L'asymptote correspondante est une droite horizontale. Les deux courbes asymptotes se coupent en $x = 1$.

C.3.4 - Étude de la phase

La phase ϕ d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit en fonction de x :

$$\phi(x) = \arg(\underline{H}(jx)) = \arg(\underline{N}(jx)) - \arg(\underline{D}(jx)) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)$$

1. La fonction \log étant croissante, les variations de $G(x)$ sont les mêmes que celles de $H(x)$.

2. Une décade correspond à une variation de x d'un facteur multiplicatif égal à 10, donc à une variation de $\log(x)$ d'un facteur additif égal à 1.

- Pour $x = 1$, on a : $\phi(1) = \frac{\pi}{4}$.
- Pour tracer le diagramme de Bode, il faut connaître le comportement asymptotique de ϕ quand $x \rightarrow 0$ et quand $x \rightarrow +\infty$.
 - Quand $x \rightarrow 0$, alors $\phi(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (par valeur inférieure). Aux basses fréquences, l'asymptote correspondante est une droite horizontale.
 - Quand $x \rightarrow +\infty$, alors $\phi(x) \rightarrow 0$ (par valeur supérieure). Aux hautes fréquences, l'asymptote correspondante est une droite horizontale.

C.3.5 - Diagramme de Bode

On peut représenter le gain et la phase en fonction de $\log(x)$. On trace sur le même graphe les asymptotes précédemment définies (fig. 13).

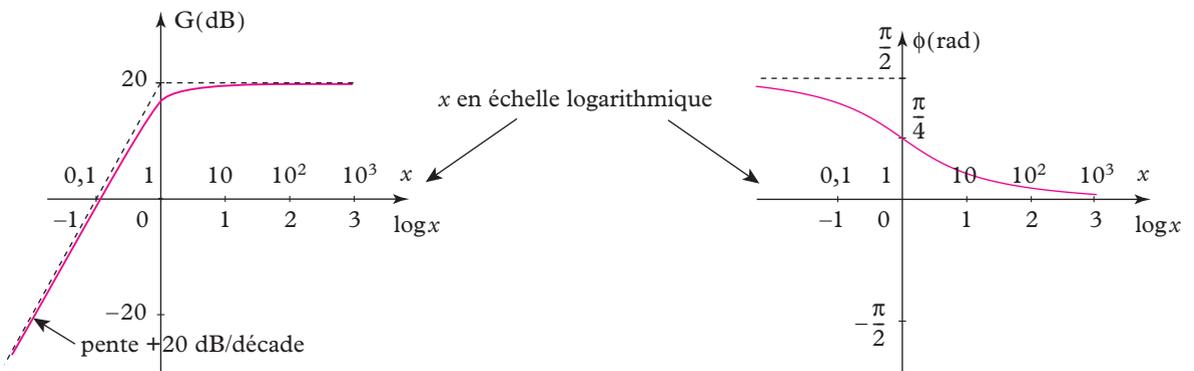


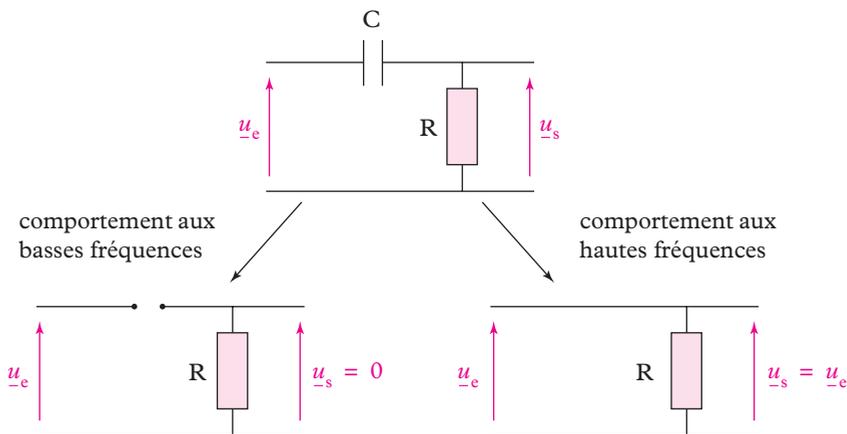
Fig. 13 - Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut du premier ordre (cas particulier où $G_{\max} = 20$ dB).

Application 7 Comportement asymptotique d'un filtre du premier ordre

Retrouver qualitativement que le filtre de la figure 12 est un filtre passe-haut.

Solution

On remplace le condensateur par un fil aux hautes fréquences et par un interrupteur ouvert aux basses fréquences. On peut donc établir les schémas équivalents suivants pour le circuit :



Le filtre étudié est bien un filtre passe-haut, comme l'étude de la fonction de transfert l'avait déjà montré.

C.4. Cas plus général

C.4.1 - Fonction de transfert

• On étudie le filtre du premier ordre dont la fonction de transfert \underline{H} a pour expression en fonction de la variable x :

$$\underline{H}(jx) = H_0 \frac{1 + jax}{1 + jx}, \text{ où } a \text{ est une constante positive.}$$

• On peut alors écrire la fonction de transfert $\underline{H}(jx)$ comme le produit de deux fonctions :

$$\underline{H}(jx) = \underline{H}_1(jx)\underline{H}_2(jx),$$

$$\text{avec } \underline{H}_1(jx) = 1 + jax \text{ et } \underline{H}_2(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}.$$

La fonction \underline{H}_2 a déjà été étudiée au § C.2 (filtre passe-bas).

C.4.2 - Étude des fonctions \underline{H}_1 et \underline{H}_2

Le gain en tension et la phase liés à la fonction \underline{H}_1 valent :

$$\begin{cases} G_1(x) = 20\log(H_1(x)) = 10\log(1 + a^2x^2) \\ \phi_1(x) = \arg(\underline{H}_1(jx)) = \text{Arctan}(ax). \end{cases}$$

$$\phi_1(x) = \arg(\underline{H}_1(jx)) = \text{Arctan}(ax).$$

– Quand $x \rightarrow 0$, alors on a :

$$G_1(x) \rightarrow 0 \text{ et } \phi_1(x) \rightarrow 0.$$

– Quand $x \rightarrow +\infty$, alors on a :

$$G_1(x) \rightarrow 20\log(a) + 20\log(x) \quad \text{et} \quad \phi_1(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Aux hautes fréquences, le gain G_1 tend vers la courbe $20\log(a) + 20\log(x)$. En échelle logarithmique, il s'agit d'une droite de pente $+20$ dB/décade¹ coupant l'axe des abscisses pour $x = \frac{1}{a}$, c'est-à-dire pour $\log(x) = -\log(a)$.

1. Une décade correspond à une variation de x d'un facteur multiplicatif égal à 10, donc à une variation de $\log(x)$ d'un facteur additif égal à 1.

C.4.3 - Étude de la fonction \underline{H}

• La fonction de transfert complexe \underline{H} est le produit des deux fonctions complexes \underline{H}_1 et \underline{H}_2 . On a alors² :

$$G(x) = G_1(x) + G_2(x) \quad \text{et} \quad \phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x),$$

d'où :

$$\begin{cases} G(x) = 20\log(H_0) + 10\log(1 + a^2x^2) - 10\log(1 + x^2). \\ \phi(x) = \text{Arctan}(ax) - \text{Arctan}(x). \end{cases}$$

• Les comportements asymptotiques s'additionnent pour le gain G et pour la phase ϕ .

– Quand $x \rightarrow 0$, alors on a :

$$G(x) \rightarrow 20\log(H_0) \quad \text{et} \quad \phi(x) \rightarrow 0.$$

– Quand $x \rightarrow +\infty$, alors on a :

$$G(x) \rightarrow 20\log(H_0) + 20\log(a) \quad \text{et} \quad \phi(x) \rightarrow 0.$$

2. Pour le gain, le module d'un produit est égal au produit des modules et le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes. Pour la phase, l'argument d'un produit est égal à la somme des arguments.

C.4.4 - Diagramme de Bode

On peut alors tracer le diagramme de Bode correspondant à la fonction de transfert \bar{H} . Sur la figure 14, on choisit $a < 1$ et on limite le tracé du diagramme aux seules asymptotes, souvent suffisantes en pratique pour déterminer le comportement du filtre.

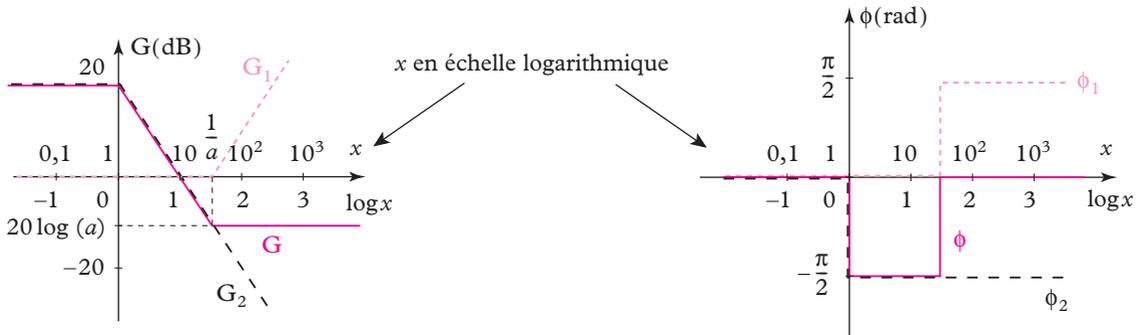
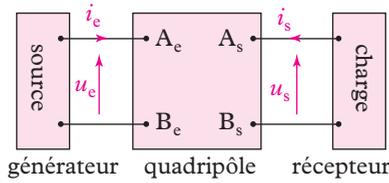


Fig. 14 - Diagramme de Bode d'un filtre du premier ordre quelconque.

L'essentiel

✓ Fonction de transfert d'un quadripôle

- Un **quadripôle** est une portion de réseau possédant deux bornes d'entrée reliées à un générateur (source) et deux bornes de sortie reliées à un récepteur (charge). Un quadripôle constitué de dipôles linéaires est **linéaire**.



- La **fonction de transfert H** d'un quadripôle est le rapport de la valeur d'une grandeur de sortie G_s à la valeur d'une grandeur d'entrée G_e . En régime harmonique (source sinusoïdale de pulsation ω), l'amplification en tension complexe $\underline{H}(j\omega)$ est définie par le rapport sans dimension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{H} \text{ amplification en tension complexe} \\ \underline{U}_e \text{ amplitude complexe de la tension d'entrée} \\ \underline{U}_s \text{ amplitude complexe de la tension de sortie} \end{array} \right.$$

Le module $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ de la fonction de transfert est l'amplification en tension et son argument $\phi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$ est la phase.

L'**ordre du filtre** est le degré du polynôme $\underline{D}(j\omega)$ situé au dénominateur de \underline{H} .

- Le gain en puissance G_p du quadripôle, exprimé en décibel (dB), est défini par la relation :

$$G_p(\omega) = 10 \log \left(\frac{P_s}{P_e} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_p \text{ gain en puissance} \\ P_e \text{ puissance moyenne reçue du générateur} \\ P_s \text{ puissance moyenne fournie à la charge} \end{array} \right.$$

- Le gain en tension G , exprimé en décibel (dB) et plus simple à calculer, représente la dépendance énergétique du filtre :

$$G(\omega) = 20 \log \left| \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} \right| = 20 \log |H(\omega)|, \text{ avec } H(\omega) \text{ amplification en tension.}$$

- Le **diagramme de Bode** d'un quadripôle est constitué par deux courbes :

- le gain G (en dB) en fonction de $\log(f)$ (f fréquence en Hz) ou de $\log(\omega)$ (ω pulsation en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) ;
- la phase ϕ (en rad) en fonction de $\log(f)$ (f fréquence en Hz) ou de $\log(\omega)$ (ω pulsation en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$).

- On appelle **pulsation de coupure** ω_c du filtre la pulsation vérifiant :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}, \text{ soit : } G(\omega_c) = G_{\max} - 3 \text{ dB.}$$

La **bande passante** est alors l'intervalle de pulsations $\Delta\omega$ donnant une amplification H (ou un gain G) supérieur à l'amplification de coupure $H(\omega_c)$ (ou au gain de coupure $G(\omega_c)$).

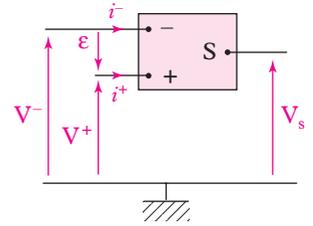
Méthodes

(À la pulsation de coupure ω_c correspond la fréquence de coupure f_c telle que $\omega_c = 2\pi f_c$ et à l'intervalle de pulsations $\Delta\omega$ correspond l'intervalle de fréquences Δf tel que $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$.)

- Un **quadripôle actif** comporte des sources « internes » d'énergie. Si la puissance d'entrée P_e est inférieure à la puissance de sortie P_s , le quadripôle est **amplificateur** (actif). Dans le cas contraire, le quadripôle est **atténuateur** (passif ou actif).

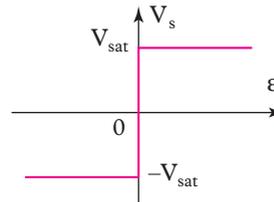
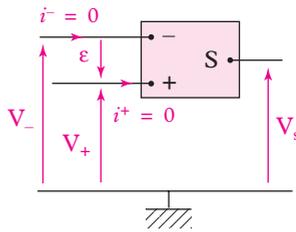
✓ L'amplificateur opérationnel (A.O.)

- L'**amplificateur opérationnel** est un composant actif dont l'alimentation symétrique possède trois bornes de sortie délivrant les tensions $-V_{cc}$, 0 , $+V_{cc}$. Le signal d'entrée est la différence de potentiel $\varepsilon = V_+ - V_-$ entre les deux bornes d'entrée « + » (entrée non inverseuse) et « - » (entrée inverseuse). Le signal de sortie est la tension V_s mesurée à la sortie de l'amplificateur (V_s ne peut dépasser la tension de saturation $\pm V_{sat}$, avec $V_{sat} < V_{cc}$). La fonction de transfert complexe de l'amplificateur opérationnel est :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{\varepsilon}$$

- L'**amplificateur opérationnel idéal** possède une amplification en tension infinie, des impédances d'entrée infinies et une impédance de sortie nulle. Les courants d'entrée i_- et i_+ sont donc nuls et la tension de sortie V_s est indépendante de la charge. En outre, l'amplification est indépendante de la fréquence (bande passante infinie) et le déphasage entre le signal d'entrée ε et le signal de sortie V_s est nul.



Régime de saturation	Régime linéaire	Régime de saturation
$\varepsilon < 0 \Rightarrow V_s = -V_{sat}$	$\varepsilon = 0 \Rightarrow -V_{sat} < V_s < +V_{sat}$	$\varepsilon > 0 \Rightarrow V_s = +V_{sat}$
l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime de saturation basse	le fonctionnement de l'amplificateur opérationnel est linéaire	l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime de saturation haute

✓ Filtres du premier ordre

- Le dénominateur de la fonction de transfert \underline{H} d'un filtre du premier ordre est un polynôme du premier degré en $j\omega$. Pour étudier cette fonction, on pose :

$$x = \frac{\omega}{\omega_{réf}}, \text{ où } \omega_{réf} \text{ est la pulsation de référence du circuit.}$$

- La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit :

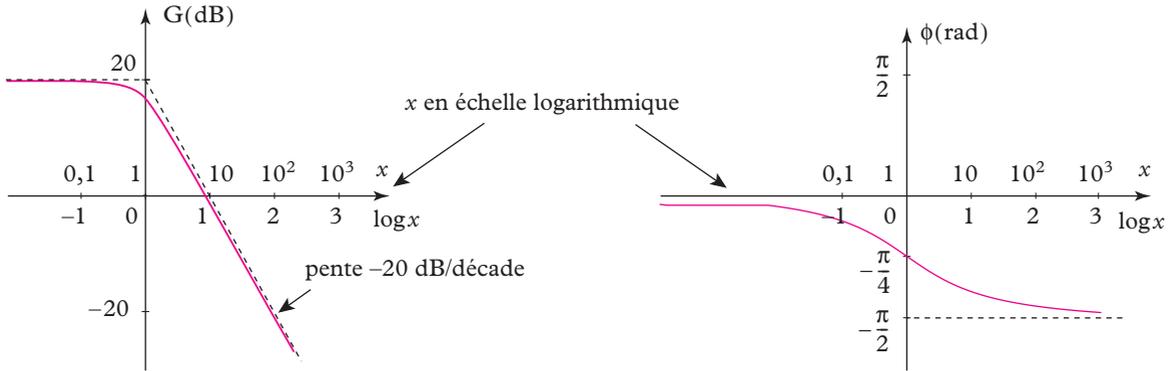
$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_{réf}}$$

La bande passante d'un filtre passe-bas du premier ordre vaut donc :

$$\mathbf{BP}(f) = f_c = \frac{\omega_{réf}}{2\pi}$$

Le gain G et la phase ϕ ont pour expression :

$$G(x) = G_{\max} - 10\log(1 + x^2) \quad \text{et} \quad \phi(x) = -\text{Arctan}(x).$$



- La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit :

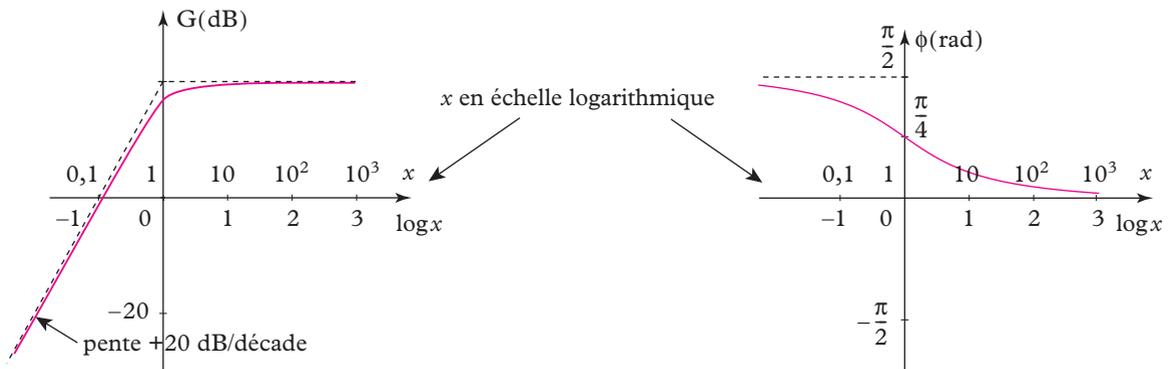
$$\underline{H}(jx) = H_0 \frac{jx}{1 + jx}, \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}.$$

La fréquence de coupure d'un filtre passe-haut du premier ordre vaut :

$$f_c = \frac{\omega_{\text{réf}}}{2\pi}.$$

Le gain G et la phase ϕ ont pour expression :

$$G(x) = G_{\max} + 20\log(x) - 10\log(1 + x^2) \quad \text{et} \quad \phi(x) = \arg(\underline{H}(jx)) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x).$$



- Un condensateur se comporte aux basses fréquences comme un interrupteur ouvert et aux hautes fréquences comme un court-circuit (fil).
Une bobine se comporte aux basses fréquences comme un court-circuit (fil) et aux hautes fréquences comme un interrupteur ouvert.

Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment tracer le diagramme de Bode d'un filtre passif ?

Le diagramme de Bode est la représentation la plus utilisée de la fonction de transfert d'un filtre. On précise ici les étapes pour y aboutir.

→ Savoir faire

- 1 Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ du filtre en appliquant les diviseurs de tension et des associations d'impédances.
- 2 Écrire la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ comme le rapport de deux polynômes $\underline{N}(j\omega)$ et $\underline{D}(j\omega)$. Pour un filtre du premier ordre, faire apparaître la pulsation de référence $\omega_{\text{réf}}$ en mettant le dénominateur sous la forme :

$$\underline{D}(jx) = 1 + jx \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}.$$

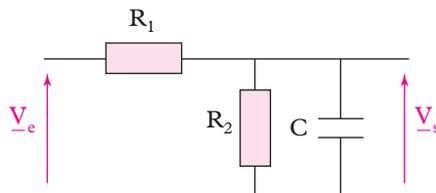


La pulsation de référence $\omega_{\text{réf}}$ est souvent imposée par l'énoncé.

- 3 Exprimer le gain en décibel $G(x) = 20\log|\underline{H}(jx)|$ et la phase $\phi(x) = \arg(\underline{H}(jx))$ associés à la fonction de transfert $\underline{H}(jx)$.
- 4 Déterminer des fonctions vers lesquelles tend le gain en décibel aux basses fréquences ($x \rightarrow 0$), puis aux hautes fréquences ($x \rightarrow \infty$). En déduire les asymptotes correspondantes.
- 5 Déterminer les extrema éventuels du gain en décibel.
- 6 Tracer les asymptotes du diagramme de Bode, puis le gain G en fonction de $\log(x)$ en prenant en compte la présence d'éventuels extrema.
- 7 Déterminer les limites de la phase aux basses fréquences. En déduire les asymptotes correspondantes. Tracer la phase ϕ en fonction de $\log(x)$.

→ Application

Tracer le diagramme de Bode du filtre schématisé ci-dessous :



Solution

- 1 La résistance R_2 et le condensateur C sont en parallèle et se ramènent à une admittance unique :

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{R_2} + jC\omega.$$

Un diviseur de tension donne alors :

$$\underline{V}_s = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{R_1 + \underline{Z}_{\text{eq}}} \underline{V}_e = \frac{1}{1 + R_1 \underline{Y}_{\text{eq}}} \underline{V}_e.$$

La fonction de transfert s'écrit alors :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + R_1 \left(\frac{1}{R_2} + jC\omega \right)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + jR_1 C\omega}.$$

- ② On factorise $1 + \frac{R_1}{R_2}$ au dénominateur. La fonction de transfert devient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \times \frac{1}{1 + j \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \omega}.$$

On pose : $\omega_{\text{réf}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$, d'où :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \times \frac{1}{1 + jx}.$$

- ③ Le gain en décibel G est défini par :

$$G(x) = 20\log(|\underline{H}(jx)|) = -20\log\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) - 10\log(1 + x^2).$$

La phase ϕ est définie par :

$$\phi(x) = -\arg(\underline{H}(jx)) = -\text{Arctan}x.$$

- ④ Aux basses fréquences ($x \rightarrow 0$), le gain G tend vers :

$$G(x) \rightarrow 20\log\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right).$$

(L'asymptote correspondante est une droite horizontale).

Aux hautes fréquences ($x \rightarrow +\infty$), le gain G tend vers :

$$G(x) \rightarrow 20\log\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) - 20\log(x).$$

(L'asymptote correspondante est une droite de pente -20 dB/décade).



Attention à ne pas confondre un équivalent du gain (obtenu en ne conservant que le terme prépondérant) et la limite de l'expression (ici, $-\infty$ pour les hautes fréquences). La limite, à elle seule, ne permet pas de tracer le diagramme.

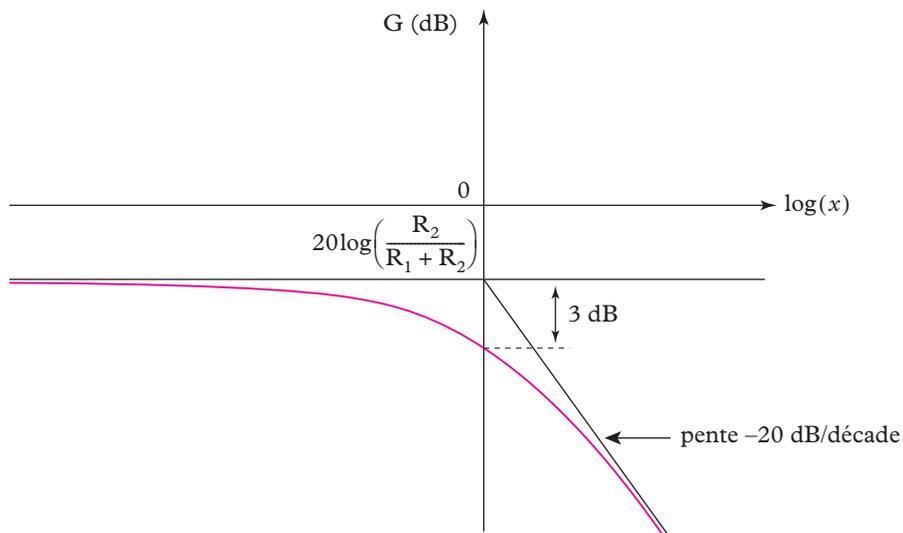
- ⑤ Comme la fonction $f(x) = 1 + x^2$ est strictement croissante, le gain G décroît quand x varie de 0 à $+\infty$. Le gain G n'a pas d'extremum.
- ⑥ Le tracé est simplifié en cherchant l'intersection des asymptotes :

$$\underbrace{20\log\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)}_{\text{basses fréquences}} = \underbrace{20\log\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) - 20\log(x)}_{\text{hautes fréquences}},$$

d'où : $\log(x) = 0$ et $x = 1$.



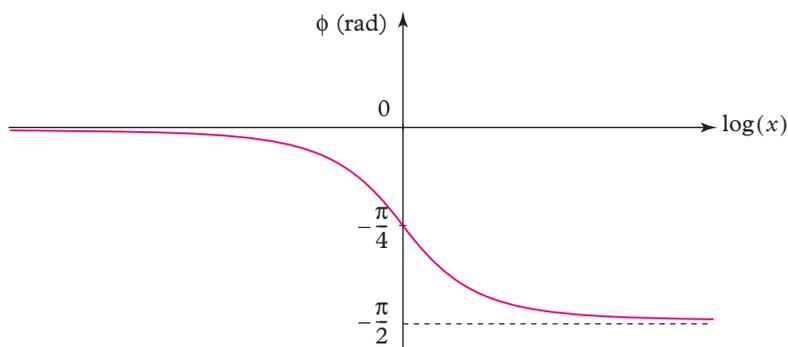
Pour un filtre passe-bas ou passe-haut, l'intersection des asymptotes aux basses fréquences et aux hautes fréquences de la courbe du gain dans le diagramme de Bode correspond à l'abscisse de coupure.



La courbe de gain se place sous ses asymptotes. Pour un filtre du premier ordre, on peut prévoir que la coupure à -3 dB se fait sous l'intersection des asymptotes.

7 Aux basses fréquences ($x \rightarrow 0$), $\phi(x) \rightarrow 0$.

Aux hautes fréquences ($x \rightarrow +\infty$), $\phi(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$.



Le filtre étudié est un filtre passe-bas de premier ordre.

Méthode N° 2

Comment établir le modèle équivalent d'un filtre passif ?

La fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$, qui est calculée à vide, ne suffit pas à caractériser un filtre. On se propose de construire un quadripôle équivalent à un filtre passif.

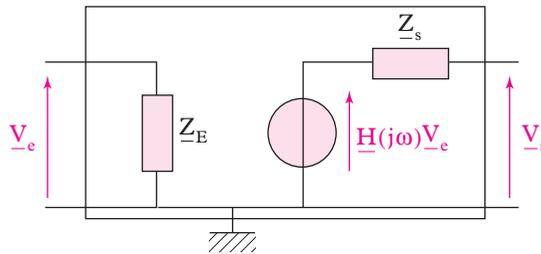
→ Savoir faire

- Calculer l'impédance équivalente au filtre entre la masse et la borne d'entrée. Cette impédance constitue l'impédance d'entrée \underline{Z}_e du filtre.



Aucun composant ne doit être branché en sortie.

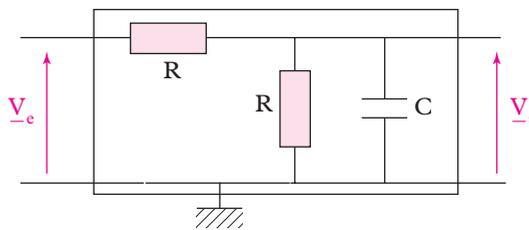
- 2 Relier la borne d'entrée à la masse, puis calculer l'impédance équivalente au circuit entre la masse et la borne de sortie. Il s'agit de l'impédance de sortie \underline{Z}_s du filtre.
- 3 Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ du filtre.
- 4 Donner le quadripôle équivalent au filtre :



Cette modélisation permet de prendre en compte les effets du filtre sur le circuit en amont, et également les effets du circuit en aval sur le filtre.

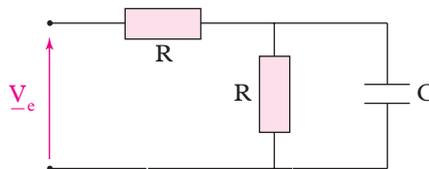
→ Application

Déterminer le quadripôle équivalent au filtre RC schématisé ci-dessous.



Solution

- 1 Lorsque l'impédance est mesurée entre les bornes d'entrée, il n'y a pas de courant en sortie. Le circuit équivaut ainsi à l'association suivante :



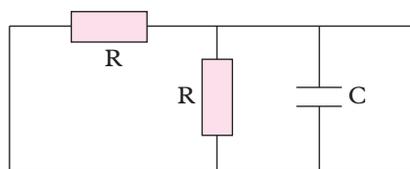
L'impédance d'entrée vaut alors :

$$\underline{Z}_E = R + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$



L'association parallèle RC et la résistance R sont en série au cours de ce calcul. Ceci est dû au fait que la borne de sortie n'est pas utilisée.

- 2 On place l'entrée à la masse, ce qui a pour effet de mettre les deux résistances et le condensateur en parallèle.



L'impédance de sortie est mesurée entre les bornes de sortie et vaut :

$$\underline{Z}_s = \frac{R}{2 + jRC\omega}$$

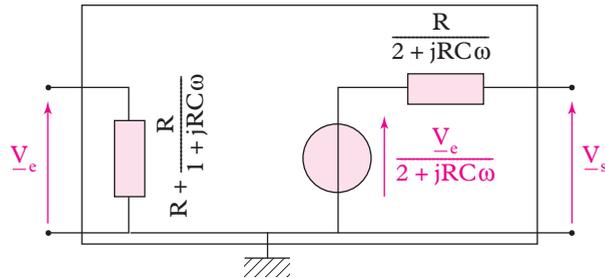


La nature des associations entre les dipôles a changé entre le calcul de \underline{Z}_e et le calcul de \underline{Z}_s . Cela est dû au fait que ces impédances ne sont pas mesurées au même point, et également au fait que le circuit a été modifié entre les deux calculs (la tension d'entrée est annulée pour le calcul de \underline{Z}_s).

- ③ Un diviseur de tension donne la fonction de transfert.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\frac{R}{1 + jRC\omega}}{R + \frac{R}{1 + jRC\omega}}, \text{ soit : } \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{2 + jRC\omega}$$

- ④ Le quadripôle équivalent au filtre est donc :



Pour le circuit amont, être connecté au filtre est équivalent à être connecté à une impédance \underline{Z}_e .

Méthode n° 3

Comment déterminer les impédances d'entrée et de sortie d'un filtre actif ?

Soit un filtre comportant des éléments actifs (sources de tension ou de courant, amplificateur opérationnel). On se propose de déterminer ses impédances d'entrée et de sortie, et ainsi de caractériser ses effets sur les circuits dans lesquels il est inséré.

→ Savoir faire

- ① Éteindre les sources libres (c'est-à-dire celles dont la force électromotrice ou le courant électromoteur est une constante). Cela revient à remplacer :
 - une source de tension par un fil ;
 - une source de courant par un interrupteur ouvert.

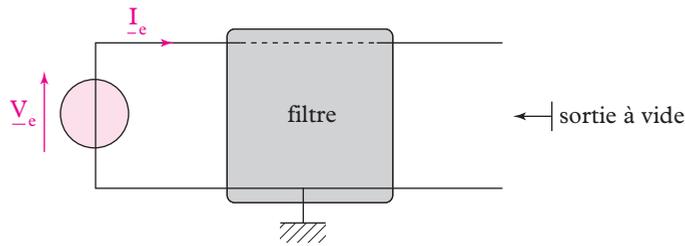


Les sources dont la fém (ou la cém) est proportionnelle à une tension ou un courant dans le circuit sont dites liées. On ne peut pas éteindre de telles sources. Un amplificateur opérationnel ne doit pas non plus être éteint.

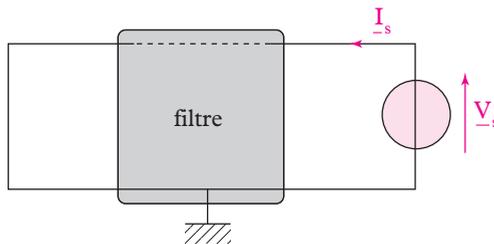
- ② Évaluer le courant \underline{I}_e entrant dans le filtre lorsque celui-ci est utilisé à vide, c'est-à-dire sans brancher de composant entre les bornes de sortie. En déduire l'impédance d'entrée \underline{Z}_e du filtre :

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{V}_e}{\underline{I}_e}$$

Pour cette étape du calcul, le filtre est alimenté par une source de tension \underline{V}_e placée entre les bornes d'entrée



- ③ Alimenter le filtre par une source de tension \underline{V}_s placée entre les bornes de sortie. Relier la borne d'entrée à la masse (ce qui revient à annuler \underline{V}_e).



Déterminer la relation entre le courant de sortie \underline{I}_s et la tension de sortie \underline{V}_s . En déduire l'impédance de sortie :

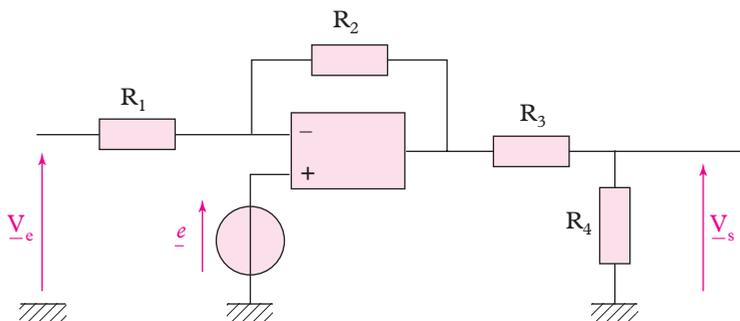
$$\underline{Z}_s = \frac{\underline{V}_s}{\underline{I}_s}$$



La détermination de \underline{Z}_e et celle de \underline{Z}_s ne sont pas des opérations parfaitement symétriques : en effet le calcul de \underline{Z}_e s'effectue en ouvrant la sortie du filtre, tandis que celui de \underline{Z}_s s'effectue en court-circuitant l'entrée.

→ Application

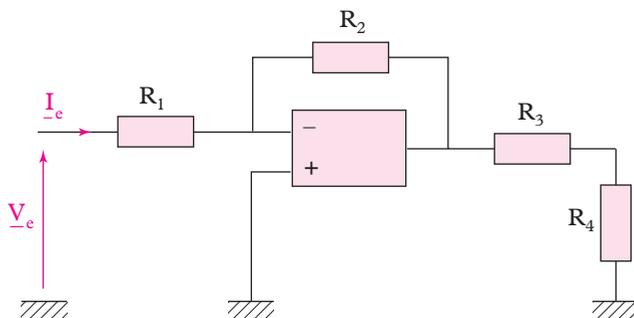
Déterminer les impédances d'entrée et de sortie du circuit schématisé ci-dessous, où l'amplificateur opérationnel idéal fonctionne en régime linéaire.



Solution

- ❶ La source de tension de fém e peut être éteinte. L'amplificateur opérationnel ne le peut pas.

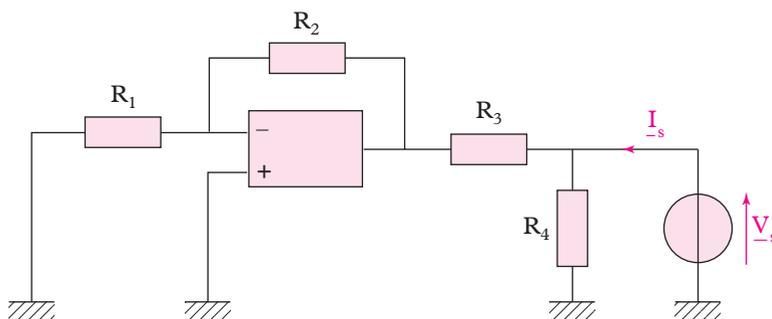
2 On étudie le filtre à vide, et le circuit équivalent est :



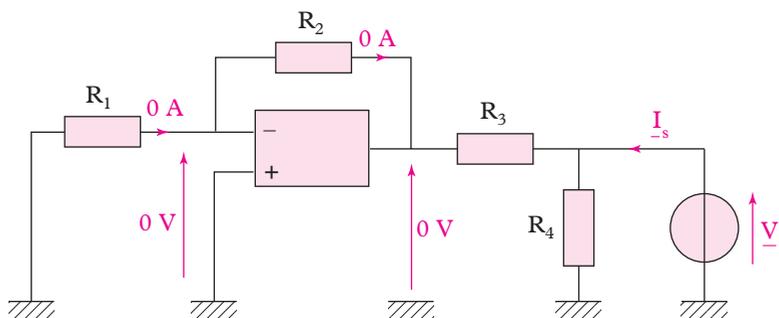
En régime linéaire, on a pour l'A.O. idéal : $V^+ = V^- = 0 \text{ V}$, donc la tension V_e s'applique à la résistance R_1 . Il vient :

$$V_e = R_1 I_e, \text{ d'où : } Z_e = \frac{V_e}{I_e} = R.$$

3 On étudie maintenant le filtre en imposant V_s en sortie :



Là encore, la linéarité de l'amplificateur opérationnel idéal impose : $V^+ = V^- = 0 \text{ V}$. Il s'ensuit que la tension aux bornes de R_1 est nulle, et que le courant traversant R_1 et R_2 l'est également. (Le potentiel en sortie de l'amplificateur opérationnel est nul).



Le courant de sortie circule entre les deux résistances R_3 et R_4 qui peuvent être considérées en parallèle. On a :

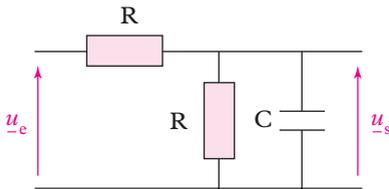
$$Z_s = \frac{V_s}{I_s} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Exercices

Niveau 1

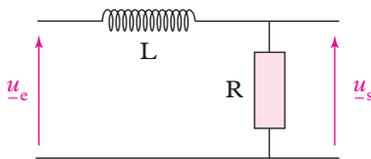
Ex. 1 Filtre passe-bas passif

- Déterminer la fonction de transfert du montage ci-dessous.
- Tracer le diagramme de Bode du gain.
- Déterminer les impédances d'entrée \underline{Z}_e et de sortie \underline{Z}_s du filtre.



Ex. 2 Présence d'une bobine

- Déterminer la fonction de transfert du montage ci-dessous.
Préciser si le filtre est passe-haut ou passe-bas, ainsi que sa pulsation de coupure.



Niveau 2

Ex. 3 Détermination d'une capacité inconnue

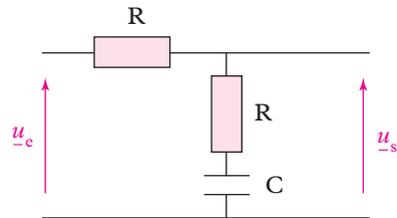
On a réalisé un filtre passe-bas à l'aide d'un condensateur de capacité C et d'une résistance $R = 1 \text{ k}\Omega$. La tension d'entrée a la valeur efficace $U_e = 6 \text{ V}$. On a mesuré la tension de sortie U_s en fonction de la fréquence, d'où le tableau suivant :

$f \text{ (Hz)}$	200	500	$1 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$
$U_s \text{ (V)}$	5,95	5,72	5,08	3,73	1,82
$f \text{ (Hz)}$	$1 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^5$	
$U_s \text{ (V)}$	0,943	0,476	0,191	$95,5 \cdot 10^{-3}$	

- Tracer le diagramme de Bode du gain.
- Déterminer la fréquence de coupure.
- En déduire la capacité C du condensateur.

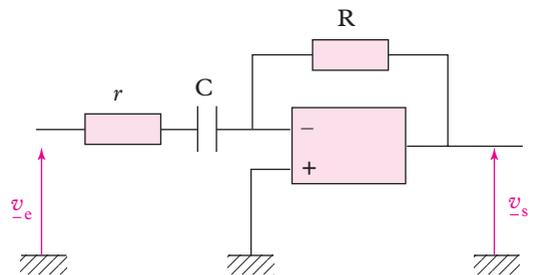
Ex. 4 Cas particulier

- Déterminer la fonction de transfert du montage ci-dessous.
Exprimer cette fonction de transfert en fonction de $x = RC\omega$.
Tracer le diagramme de Bode.



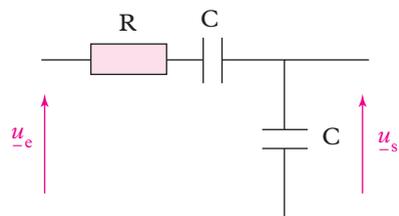
Ex. 5 Filtre passe-haut actif

- L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire.
Déterminer la fonction de transfert et tracer le diagramme de Bode du gain.
- Déterminer les impédances d'entrée \underline{Z}_e et de sortie \underline{Z}_s .



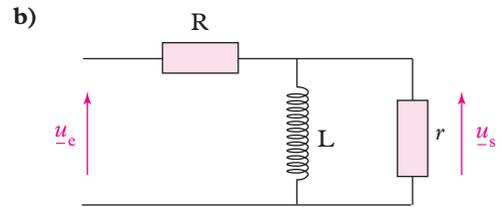
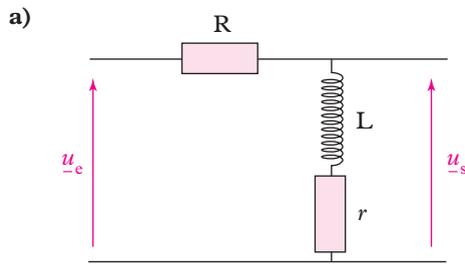
Ex. 6 Présence de deux condensateurs

- Déterminer la fonction de transfert du montage ci-dessous. En déduire la nature du filtre.



Ex. 7 Bobines et résistance

- Déterminer les fonctions de transfert des montages ci-après.
Prévoir qualitativement leur comportement asymptotique.



Indications

Ex. 1 a) Appliquer le théorème de division de tension.

b) Connaître le diagramme de Bode d'un filtre passe-bas d'ordre 1.

Ex. 3 La fréquence de coupure est à l'intersection des deux asymptotes du diagramme de Bode.

Ex. 5 a) Écrire toutes les conditions relatives à l'A.O. (A.O. idéal en régime linéaire).

Connaître le diagramme de Bode d'un filtre passe-haut d'ordre 1.

Ex. 7 Remplacer la bobine par son équivalent aux basses fréquences, puis aux hautes fréquences.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

a)



On applique la méthode n° 1 au circuit étudié.

D'après le théorème de division de tension, la fonction de transfert \underline{H} du montage est :

$$\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_2}, \quad \text{où } \underline{Z}_1 = R \text{ et } \underline{Y}_2 = \frac{1}{R} + jC\omega.$$



Il faut toujours veiller à diviser la tension entre deux dipôles parcourus par le même courant, soit ici la résistance R et l'association $\{R // C\}$.

On obtient donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{2 + jRC\omega} = \frac{0,5}{1 + 0,5jRC\omega}.$$

b) • La fonction de transfert \underline{H} peut s'écrire :

$$\underline{H}(jx) = \frac{0,5}{1 + jx}, \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}} = \frac{RC\omega}{2}.$$



On pose donc ici : $\omega_{\text{réf}} = \frac{2}{RC}$.

Le gain a donc pour expression :

$$G(x) = 20 \log |\underline{H}(jx)| = 20 \log \left(\frac{0,5}{\sqrt{1 + x^2}} \right),$$

soit : $G(x) = -20 \log(2) - 10 \log(1 + x^2)$.

• À basse fréquence, le gain tend vers :

$$G(x) \rightarrow -20 \log(2) = -6 \text{ dB.}$$

L'asymptote correspondante est une droite horizontale.

À haute fréquence, le gain tend vers :

$$G(x) \rightarrow -20 \log(2) - 20 \log(x).$$

L'asymptote correspondante est une droite de pente -20 dB/décade.

• Les deux asymptotes se coupent au point d'abscisse $x = 1$ et d'ordonnée $-20 \log(2) = -6$ dB.

Pour cette abscisse, on a aussi :

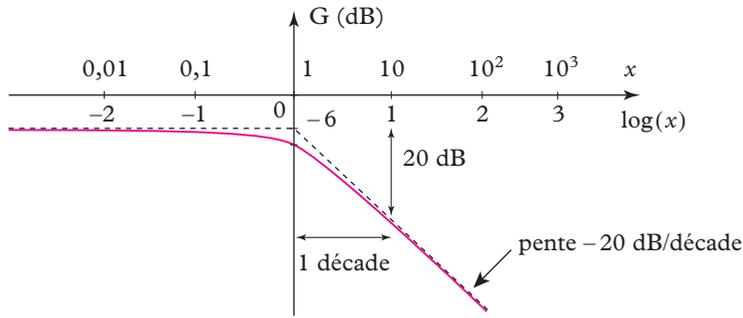
$$G(1) \approx -20 \log(2) - 10 \log(2) = G_{\text{max}} - 3 \text{ dB} = -9 \text{ dB.}$$

La pulsation de coupure du circuit ω_c vaut donc :

$$x_c = \frac{\omega_c}{\omega_{\text{réf}}} = 1, \quad \text{soit : } \omega_c = \omega_{\text{réf}} = \frac{2}{RC}.$$



Pour un filtre du premier ordre, l'abscisse de coupure à -3 dB sur le diagramme de Bode est l'abscisse d'intersection des asymptotes.



Le diagramme de Bode de la phase serait celui obtenu dans le cours pour un filtre passe-bas du premier ordre (cf. figure 11).

c)

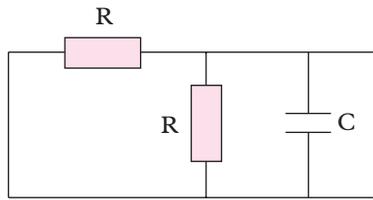


On applique la méthode n° 2 au circuit étudié.

- On détermine l'impédance d'entrée en laissant la sortie à vide. Dans ces conditions, la résistance R et l'association parallèle $\{C // R\}$ sont en série :

$$\underline{Z}_e = R + \frac{R}{1 + jRC\omega} = R \left(\frac{2 + jRC\omega}{1 + jRC\omega} \right).$$

- On mesure l'impédance de sortie en court-circuitant l'entrée. Le circuit est alors :



Les trois dipôles R , R et C sont en parallèle :

$$\frac{1}{\underline{Z}_s} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + jC\omega, \quad \text{soit : } \underline{Z}_s = \frac{R}{2 + jRC\omega}.$$



La nature des associations entre dipôles varie d'un calcul à l'autre. L'association de R et $\{R // C\}$ en série est ainsi valable pour le calcul de \underline{Z}_e mais pas pour celui de \underline{Z}_s . La mesure de \underline{Z}_s suppose en effet qu'un courant circule dans la branche de sortie.

Exercice 2

D'après le théorème de division de tension, la fonction de transfert du montage est :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}, \quad \text{avec } \underline{Z}_1 = jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = R.$$

La fonction de transfert s'écrit donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R + jL\omega}, \quad \text{soit : } \underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + jx}, \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}} = \frac{L\omega}{R}.$$



On pose donc ici : $\omega_{\text{réf}} = \frac{R}{L}$, inverse de la constante de temps τ_{RL} du circuit RL .

On reconnaît la fonction de transfert **d'un filtre passe-bas** de pulsation de coupure :

$$\omega_c = \omega_{\text{réf}} = \frac{R}{L}$$



On pourrait retrouver facilement la nature du filtre par un raisonnement direct. En effet, $H(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, d'où :

$$H(x) \rightarrow 1 \text{ quand } x \rightarrow 0 \text{ et } H(x) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

Exercices de niveau 2

Exercice 3

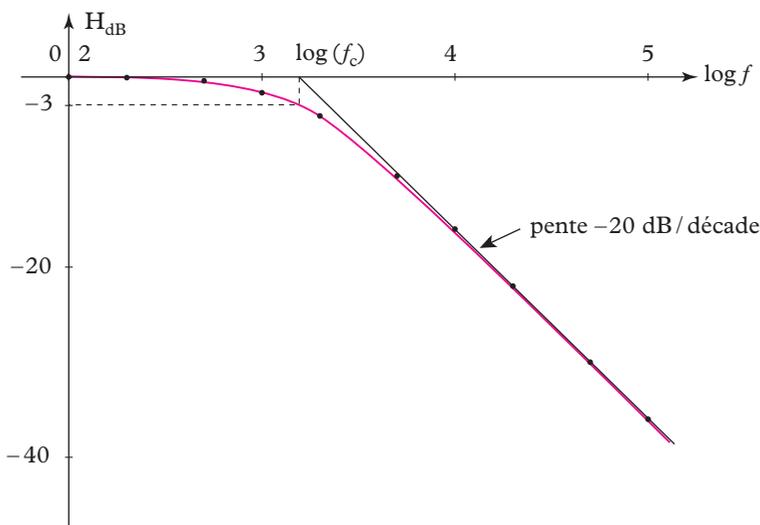
a) Pour tracer le diagramme de Bode, il faut déterminer $\log(f)$ et H_{dB} . Pour cela, on utilise :

$$H_{\text{dB}} = 20\log(H) = 20\log\left|\frac{U_s}{U_e}\right| = 20\log\left(\frac{U_s}{U_e}\right).$$



Le gain se note indifféremment G ou H_{dB} .

f (Hz)	200	500	$1 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^5$
U_s (V)	5,95	5,72	5,08	3,73	1,82	0,943	0,476	0,191	0,0955
H	0,992	0,954	0,847	0,623	0,303	0,157	0,079	0,032	0,016
H_{dB}	-0,07	-0,41	-1,4	-4,1	-10,4	-16	-22	-30	-36
$\log f$	2,3	2,7	3	3,3	3,7	4	4,3	4,7	5

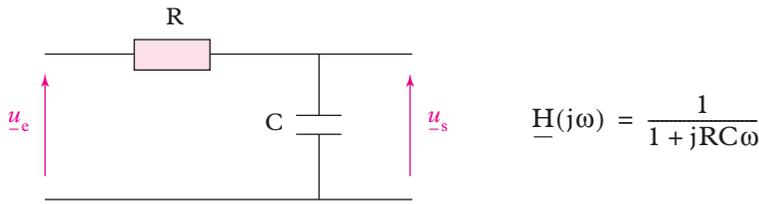


Pour le diagramme de Bode du gain, le choix de l'abscisse ($\log x$, $\log f$ ou $\log \omega$) ne change pas la forme de la courbe obtenue.

b) Graphiquement, on lit pour la fréquence de coupure à -3 dB :

$$\log(f_c) \approx 3,2, \quad \text{soit : } f_c \approx 1,6 \text{ kHz.}$$

c) Le filtre réalisé est un filtre passe-bas constitué d'un condensateur et d'une résistance. Il s'agit donc du montage :



Pour s'en convaincre, se reporter à l'exemple de § C.2.1 du cours. Si on inverse les rôles de R et de C, le filtre est un filtre passe-haut (cf. § C.3.1 du cours).

L'amplification du filtre vaut donc :

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}, \quad \text{d'où : } H_{\max} = 1.$$

La pulsation ω_c de coupure vérifie alors :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}, \quad \text{d'où : } RC\omega_c = 1.$$

On en déduit la capacité C du condensateur :

$$C = \frac{1}{R\omega_c} = \frac{1}{2\pi R f_c}.$$

A.N. $C = \frac{1}{2\pi \times 1 \cdot 10^3 \times 1,6 \cdot 10^3} = 99 \cdot 10^{-8} \text{ F}.$

Exercice 4

• D'après le théorème de division de tension, la fonction de transfert du montage est :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}, \quad \text{avec } \underline{Z}_1 = R \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = R + \frac{1}{jC\omega}.$$

La fonction de transfert s'écrit donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R + \frac{1}{jC\omega}}{R + R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1 + jRC\omega}{1 + 2jRC\omega}, \quad \text{soit : } \underline{H}(x) = \frac{1 + jx}{1 + 2jx}.$$

• Les expressions du gain H_{dB} et de la phase ϕ sont alors en fonction de x :

$$\begin{cases} H_{\text{dB}}(x) = 20 \log |H(jx)| = 10 \log \left(\frac{1 + x^2}{1 + 4x^2} \right) \\ \phi(x) = \arg(H(jx)) = \text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(2x). \end{cases}$$



Le filtre étudié n'est ni un filtre passe-haut ni un filtre passe-bas.

On étudie le comportement asymptotique du filtre :

– Quand $x \rightarrow 0$, alors :

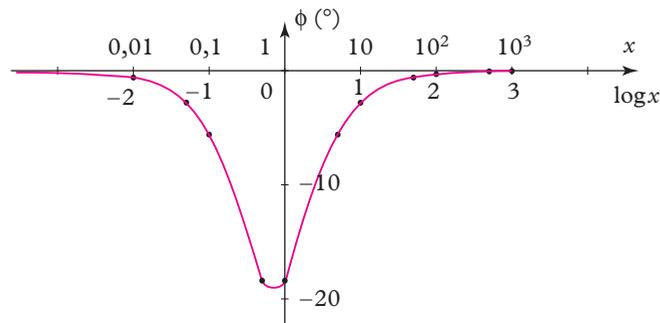
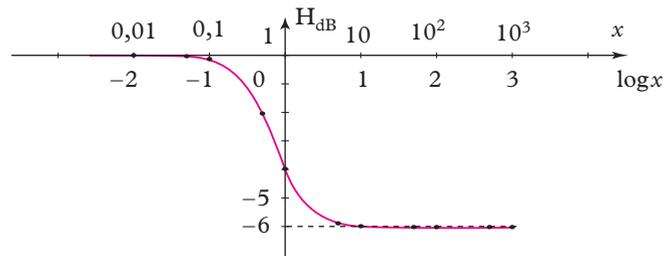
$$H_{\text{dB}}(x) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \phi(x) \rightarrow 0.$$

- Quand $x \rightarrow +\infty$, alors :

$$H_{dB}(x) \rightarrow 10\log\left(\frac{1}{4}\right) = -20\log(2) = -6 \text{ dB} \quad \text{et} \quad \phi(x) \rightarrow 0.$$

Pour tracer le diagramme de Bode du gain et de la phase, on dresse alors un tableau de valeurs.

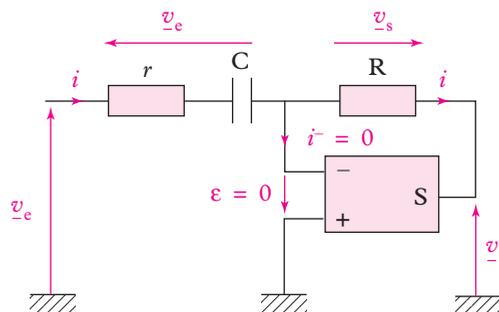
x	$1 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$	1	5	10	50	100	500	$1 \cdot 10^3$
$\log x$	-2	-1,3	-1	-0,3	0	0,7	1	1,7	2	2,7	3
H_{dB}	0	-0,03	-0,13	-2,04	-3,98	-5,89	-5,99	-6,02	-6,02	-6,02	-6,02
ϕ	$-0,6^\circ$	$-2,8^\circ$	$-5,6^\circ$	$-18,4^\circ$	$-18,4^\circ$	$-5,6^\circ$	$-2,8^\circ$	$-0,6^\circ$	$-0,3^\circ$	$-0,06^\circ$	$-0,03^\circ$



Exercice 5

a) L'amplificateur opérationnel idéal étant en régime linéaire, on a :

$$i^- = i^+ = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon = V^+ - V^- = 0.$$



Tout le courant circule donc dans la résistance R et la tension v_s se reporte aux bornes de celle-ci.

La tension v_e se reporte, quant à elle, aux bornes de l'association série $\{r + C\}$.

On a donc :

$$\underline{v}_e = \left(r + \frac{1}{jC\omega} \right) i \quad \text{et} \quad \underline{v}_s = -Ri.$$



La résistance R est étudiée en convention générateur.

On en déduit la fonction de transfert du montage :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = -\frac{R}{r + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{-RjC\omega}{1 + jrC\omega}.$$

Cette fonction peut aussi s'écrire :

$$\underline{H}(x) = H_0 \frac{jx}{1 + jx}, \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}} = rC\omega \quad \text{et} \quad H_0 = -\frac{R}{r}.$$



On pose donc ici : $\omega_{\text{réf}} = \frac{1}{rC}$. On remarque que $H_0 < 0$.

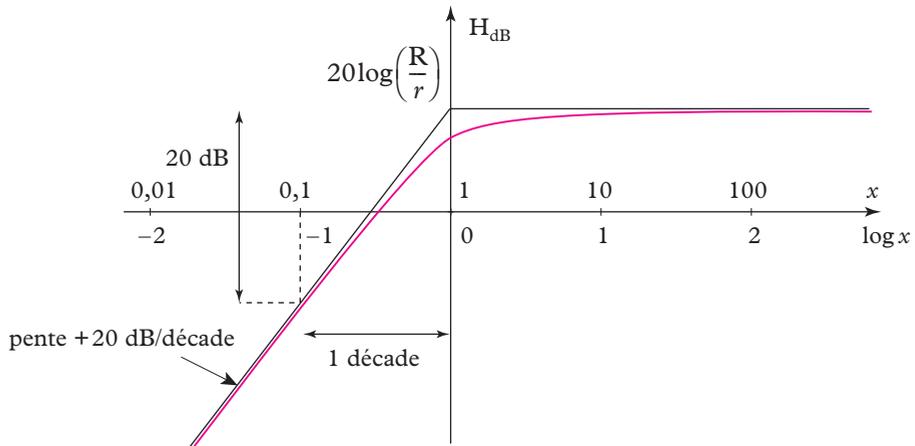
On reconnaît la fonction de transfert d'un **filtre passe-haut** de pulsation de coupure :

$$\omega_c = \omega_{\text{réf}} = \frac{1}{rC}.$$



On pourrait retrouver facilement la nature du filtre par un raisonnement direct. En effet, $H(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, d'où :

$$H(x) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad x \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad H(x) \rightarrow 1 \quad \text{quand} \quad x \rightarrow +\infty.$$



Le diagramme de Bode de la phase serait celui obtenu dans le cours pour un filtre passe-haut du premier ordre (cf. figure 13). Ici, $20 \log |H_0| = 20 \log\left(\frac{R}{r}\right)$.

b)



On applique la méthode n° 3 au circuit étudié.

• L'A.O. ne peut pas être éteint. Il impose donc en régime linéaire $\varepsilon = 0$. La tension \underline{v}_e s'applique aux bornes de l'association série $\{r + C\}$, de sorte que :

$$\underline{Z}_e = r + \frac{1}{jC\omega}.$$

L'impédance de sortie \underline{Z}_s est **infinie**, car la tension \underline{v}_s est prise à la sortie de l'A.O. idéal.

Exercice 6

D'après le théorème de division de tension, la fonction de transfert du montage est :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}, \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_1 = R + \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = \frac{1}{jC\omega}.$$

La fonction de transfert s'écrit donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{2 + RjC\omega},$$

soit :

$$\underline{H}(x) = \frac{0,5}{1 + jx}, \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}} = \frac{RC\omega}{2}.$$



On pose donc ici : $\omega_{\text{réf}} = \frac{2}{RC}$.

On reconnaît la fonction de transfert d'un **filtre passe-bas** de pulsation de coupure :

$$\omega = \omega_{\text{réf}} = \frac{2}{RC} \quad \text{et d'amplification} \quad H_0 = 0,5.$$

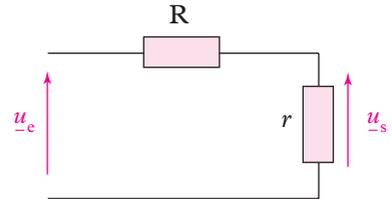
Exercice 7

a) D'après le théorème de division de tension, la fonction de transfert du montage est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{r + jL\omega}{R + r + jL\omega}.$$

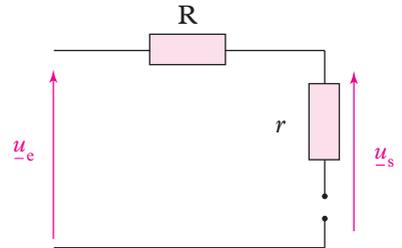
• Aux basses fréquences, l'inductance L est équivalente à un fil.
On a donc (diviseur de tension) :

$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{r}{R + r}.$$



• Aux hautes fréquences, l'inductance L est équivalente à un interrupteur ouvert. On a donc :

$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = 1.$$



On retrouve les mêmes résultats en cherchant la limite de $H(\omega) = |H(j\omega)|$ quand $\omega \rightarrow 0$ et quand $\omega \rightarrow +\infty$.

b) D'après le théorème de division de tension, la fonction de transfert du montage est :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_2}, \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_1 = R \quad \text{et} \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{r}.$$

On peut donc écrire \underline{H} sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + R\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{jL\omega}\right)} = \frac{jL\omega}{\left(1 + \frac{R}{r}\right)jL\omega + R}$$

soit :

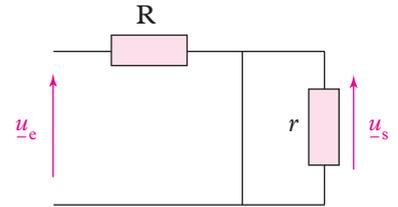
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{r}{r+R} \times \frac{\frac{r+R}{rR}jL\omega}{1 + \frac{r+R}{rR}jL\omega}$$



On reconnaît l'expression d'un filtre passe-haut du premier ordre avec $\omega_{\text{réf}} = \frac{rR}{(r+R)L}$ et $H_0 = \frac{r}{r+R}$.

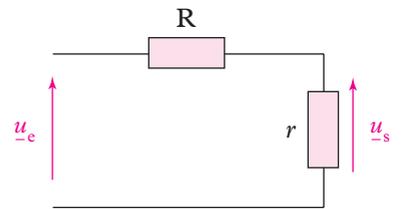
- Aux basses fréquences, l'inductance L est équivalente à un fil :

$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = 0$$



- Aux hautes fréquences, l'inductance L est équivalente à un interrupteur ouvert :

$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{r}{r+R}$$



On retrouve bien que le filtre est un filtre passe-haut.

Index

A

- Adaptation d'impédance, 54
- Admittance complexe, 214
- Amplificateur opérationnel idéal, 253
- Approximation des régimes quasi-stationnaires, 17
- Asymptotique (diagramme), 262
- Associations
 - de résistances, 34
 - de générateurs idéaux, 38

B

- Bande passante, 194
- Bode (diagramme de), 248

C

- Caractéristique d'un dipôle, 32
- Coefficient d'amortissement, 118
- Complexes (grandeurs)
 - admittance, 214
 - impédance, 214
- Condition de continuité
 - dans C, 80
 - dans L, 84
- Conductance, 33
- Conducteur ohmique, 33
- Conservation de la charge, 12
- Constante de temps, 104
- Contre-électromotrice (force), 41
- Coupure (pulsation de), 194
- Courant
 - de conduction, 8
 - électromoteur, 39
 - (générateur idéal de), 37
 - (sens du), 9
- Court-circuit (courant de), 40

D

- dB, 248

d.d.p.

- complexe, 184
- efficace, 221

Décade, 250

Décibel, 248

Densité de courant, 10

Diagramme de Bode asymptotique, 262

Différence de phase, 170

Diode

- (caractéristique d'une), 52
- Zener, 56

Dipôle

- actif, 32
- caractéristique, 32
- électrocinétique, 7
- linéaire, 88
- passif, 32

Diviseur

- de courant, 35
- de tension, 34

E

Échelon de tension, 104

Effet Joule, 34

Électromoteur (courant), 39

Électromotrice (force), 38

Entrée

- inverseuse, 253
- non inverseuse, 253

F

Facteur

- d'amortissement, 118
- de puissance, 222
- de qualité, 118
- de surtension, 189

Filtre

- coupe bande (réjecteur), 251
- passe-bande, 251
- passe-bas, 251
- passe-haut, 251

Filtre de Wien, 94

Fonction de transfert, 246

Force contre-électromotrice, 41
Force électromotrice, 38

G-H

Gain

- en dB, 249
- en puissance, 248
- en tension, 249

Générateur(s)

- (association de), 38
- de courant idéal, 37
- de Norton, 39
- de tension idéal, 37
- de Thévenin, 38

I

Impédance

- adaptation, 54
- complexe, 214

Intensité

- complexe, 184
- de court-circuit, 40
- (définition), 9
- efficace, 221

J-K

Joule (effet), 34

Kirchhoff

- (loi de) relative aux mailles, 14
- (loi de) relative aux nœuds, 12

L

Linéaire

- dipôle, 88
- (association de dipôles), 88
- (régime) d'un amplificateur opérationnel, 254

Loi

- de Kirchhoff relative aux mailles, 14
- de Kirchhoff relative aux nœuds, 12
- d'Ohm, 33
- d'Ohm (généralisation), 215

M

Maille, 8

Mailles (loi de Kirchhoff relative aux), 14

Masse, 253

Millman (théorème de), 36

N-O

Nœud, 8

Nœuds (loi de Kirchhoff relative aux), 12

Norton (générateur de), 39

Ohm

- (loi d'), 18
- (loi d') (généralisation), 215

Opérationnel (amplificateur), 253

Ordre

- (fonction de transfert du 1^{er}), 265
- (fonction de transfert du 2^e), 284

Oscilloscope, 169

P-Q

Point de fonctionnement, 33

Pont de Wheatstone, 57

Porteurs de charge, 8

Premier ordre (fonction de transfert du), 255

Pseudo-période, 120

Pseudo-pulsation, 120

Puissance

- (facteur de), 222
- instantanée, 220
- moyenne, 220

Quadripôle

- actif, 252
- (fonction de transfert d'un), 246

R

Récepteur, 41

Régime

- apériodique, 119
- critique, 119
- forcé, 214
- oscillatoire amorti (pseudo-périodique), 120
- permanent, 10
- quasi-stationnaire, 17
- transitoire, 103
- variable, 10

Résistance

- d'un conducteur ohmique, 33
- interne d'un générateur, 38
- interne d'un récepteur, 41

Résonance intensité, 193

Résonance tension, 187

S

Saturé (régime) d'un amplificateur opérationnel, 254

Semi-conducteur, 24

Siemens, 33

Superposition (théorème de), 55

Surtension (facteur de), 189

Système

- du 1^{er} ordre, 255
- du 2^e ordre, 284

T

Temps (constante de), 104

Théorème

- de Kennely, 56
- de Millman, 36
- de superposition, 55

Transfert (fonction de), 246

V-W-Z

Wheatstone (pont de), 57

Wien (filtre de), 94

Zener (diode), 56