



MÉCANIQUE DE PREMIÈRE ANNÉE MPSI

AMAMI MOHAMED
PROFESSEUR AGRÉGÉ DE PHYSIQUE
IPEST

20 août 2010

Table des matières

5	1	Repérage d'un point - Vitesse et accélération	1
	1.1	Espace et temps - Référentiel d'observation	2
	1.1.1	solide	2
	1.1.2	repère(spatial)	2
10	1.1.3	repérage dans le temps	2
	1.1.4	référentiels	3
	1.1.5	point matériel	3
	1.2	Coordonnées cartésiennes	3
	1.2.1	Vecteur position	3
15	1.2.2	Vecteur vitesse	5
	1.2.3	vecteur accélération	6
	1.3	Coordonnées curvilignes - Base de Frénet	6
	1.3.1	Abscisse curviligne	6
	1.3.2	Vecteur vitesse	7
20	1.3.3	vecteur accélération	7
	1.4	Coordonnées polaires et cylindriques	8
	1.4.1	Repérage d'un point - Vecteur position	8
	1.4.2	Relations entre paramétrage cylindrique ou polaire et paramétrage cartésien	9
25	1.4.3	Vecteur vitesse	10
	1.4.4	vecteur accélération	10
	1.5	Coordonnées sphériques	10
	1.5.1	Repérage d'un point - Vecteur position	10
	1.5.2	Relation entre paramétrage sphérique et paramétrage cartésien	11
30	1.5.3	Vecteur vitesse	11
	1.5.4	vecteur accélération(à titre indicatif)	11
	1.5.5	Coordonnées géographiques	12
	1.6	mouvement à accélération centrale	12
	1.6.1	définition	12
35	1.6.2	propriétés (à retenir)	12
	1.6.3	formules de Binet	14
	1.7	Exemples de mouvement	14
	1.7.1	Vecteur accélération constant	14
	1.7.2	Mouvement rectiligne sinusoïdal	14
40	1.7.3	Mouvement circulaire	15
	1.7.4	exercices	15

2	Changements de référentiels	17
	2.1 Référentiel	17
	2.1.1 Définitions	17
45	2.1.2 Exemple	18
	2.2 Vecteur rotation	18
	2.2.1 Dérivée d'un vecteur par rapport au temps	18
	2.2.2 Cas particuliers	20
	2.2.2.1 Translation pure	20
50	2.2.2.2 Rotation uniforme autour d'un axe fixe	20
	2.2.3 Composition des vecteurs rotation	21
	2.3 Composition des vitesses	21
	2.3.1 Vitesse absolue	21
	2.3.2 Vitesse relative	21
55	2.3.3 Vitesse d'entraînement	21
	2.4 Composition des accélérations	22
	2.4.1 Accélération absolue	22
	2.4.2 Accélération relative	22
	2.4.3 Accélération d'entraînement et de Coriolis	22
60	2.4.4 Cas particuliers	24
	2.4.4.1 Translation pure	24
	2.4.4.2 Rotation uniforme autour d'un axe fixe	24
	2.4.5 Exercices	25
3	Dynamique du point en référentiel galiléen	27
65	3.1 dynamique dans un référentiel galiléen	28
	3.1.1 masse	28
	3.1.2 Quantité de mouvement	28
	3.1.3 interactions, forces	29
	3.1.4 système isolé et pseudo-isolé	29
70	3.1.5 référentiels galiléens	29
	3.2 Loi de Newton	30
	3.2.1 Énoncé	30
	3.2.2 Conservation de la quantité de mouvement	31
	3.3 Puissance, travail et énergie cinétique	31
75	3.3.1 Travail	31
	3.3.2 Puissance	32
	3.4 Théorème de la puissance cinétique	32
	3.4.1 Energie cinétique	32
	3.4.2 Théorème de la puissance	32
80	3.4.3 Théorème de l'énergie cinétique	33
	3.4.4 L'énergie cinétique se conserve-t-elle ?	33
	3.4.5 Exemple d'utilisation	33
	3.5 Forces	35
	3.5.1 Force de pesanteur - Chute libre	35
85	3.5.2 Force de frottement dans un fluide	36
	3.5.2.1 Chute libre avec frottement « en v »	36

	3.5.2.2	Chute libre avec frottement « en v^2 »	38
	3.5.3	Force de rappel élastique	38
	3.5.4	Force de liaison	39
90	3.6	Théorème du moment cinétique	39
	3.6.1	moment cinétique	40
	3.6.2	moment d'une force	40
	3.6.3	Théorème du moment cinétique en un point fixe	40
	3.6.4	Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe	41
95	3.6.4.1	Moment d'une force par rapport à un axe	41
	3.6.4.2	Moment cinétique par rapport à un axe	41
	3.6.4.3	Théorème du moment cinétique par rapport à un axe	42
	3.6.4.4	conservation du moment cinétique	42
	3.6.4.5	exemple	42

100	4	Énergie potentielle - Énergie mécanique - Problèmes à un degré de liberté	47
-----	----------	--	-----------

	4.1	Travail d'une force - Exemples	48
	4.1.1	Force de pesanteur	48
	4.1.2	Force de rappel élastique	48
	4.1.3	Force de frottement	48
105	4.1.4	Exercice	48
	4.2	Énergie potentielle ou force dérivant d'une énergie potentielle	49
	4.2.1	Force conservative...	49
	4.3	Énergie mécanique	50
	4.3.1	Définition	50
110	4.3.2	Conservation	50
	4.4	Problème à un degré de liberté	51
	4.4.1	Positions d'équilibre	51
	4.4.1.1	Équilibre stable - Exemple du ressort	51
	4.4.1.2	Équilibre instable - Exemple du pendule	51
115	4.4.1.3	Généralisation	53
	4.4.2	Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable	54
	4.4.2.1	Exemple du pendule	54
	4.4.2.2	Généralisation	54
	4.4.3	Portrait de phase	55
120	4.4.3.1	Déterminisme mécanique - État d'un système	55
	4.4.3.2	Lecture et interprétation	56

125	5	Dynamique dans un référentiel non galiléen	59
-----	----------	---	-----------

	5.1	Principe de relativité galiléenne	59
	5.1.1	Référentiels galiléens	59
125	5.1.2	Relativité galiléenne	60
	5.2	Lois de la dynamique en référentiel non galiléen	60
	5.2.1	RFD	61
	5.2.1.1	Forces d'inertie	61
	5.2.1.2	condition d'équilibre	61

130	5.2.1.3	Translation pure	61
	5.2.1.4	rotation uniforme autour d'un axe fixe	62
	5.2.2	Théorème du moment cinétique	62
	5.2.3	Théorème de la puissance cinétique	63
	5.2.4	théorème de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique	63

6 **Système formé de deux points matériels** 73

	6.1	Éléments cinétiques	74
	6.1.1	masse, centre de masse, référentiel barycentrique	74
	6.1.1.1	masse	74
	6.1.1.2	Centre de masse	74
140	6.1.2	Référentiel barycentrique	74
	6.1.3	quelques relations importantes	74
	6.1.4	Éléments cinétiques dans \mathcal{R}	75
	6.1.4.1	quantité de mouvement	75
	6.1.4.2	moment cinétique	75
145	6.1.4.3	énergie cinétique	75
	6.1.5	Éléments cinétiques dans \mathcal{R}^*	76
	6.1.5.1	Quantité de mouvement totale	76
	6.1.5.2	Moment cinétique total en G	76
	6.1.5.3	Énergie cinétique totale	76
150	6.2	Dynamique du système	77
	6.2.1	Forces intérieures et forces extérieures	77
	6.2.2	Théorème de la quantité de mouvement (ou du centre de masse ou de la résultante cinétique)	77
	6.2.3	Théorème du moment cinétique	78
155	6.2.4	Étude énergétique	79
	6.2.4.1	puissance des forces intérieurs	79
	6.2.4.2	Théorème de l'énergie cinétique	80
	6.2.4.3	Énergie mécanique	80
	6.3	Système isolé de deux points matériels (problème à deux corps)	80
160	6.3.1	Lois de conservation	81
	6.3.1.1	Conservation de la quantité de mouvement	81
	6.3.1.2	Conservation du moment cinétique	82
	6.3.1.3	Conservation de l'énergie mécanique	82
	6.3.2	Réduction du problème à deux corps à un problème à un corps	83
165	6.3.2.1	Mobile fictif - Masse réduite	83
	6.3.2.2	Éléments cinétiques	83
	6.3.2.3	remarques	84

7 **Mouvement dans un champ de forces centrales conservatives** 90

	7.1	Forces centrales conservatives	90
170	7.1.1	Exemple de la force de gravitation	90
	7.1.2	Exemple de la force électrostatique	91
	7.1.3	Généralisation	91
	7.2	Lois générales de conservation	92

	7.2.1	Conservation du moment cinétique	92
175	7.2.1.1	Planéité du mouvement	92
	7.2.1.2	Intégrale première du mouvement	92
	7.2.1.3	Loi des aires	92
	7.2.2	Conservation de l'énergie mécanique	93
	7.2.2.1	Intégrale première du mouvement	93
180	7.2.2.2	Énergie potentielle effective	93
	7.2.2.3	États de diffusion, états liés	94
	7.3	Mouvement dans un champ de force centrales newtonien	95
	7.3.1	Équation générale de la trajectoire	95
	7.3.2	Interaction répulsive $k < 0$	96
185	7.3.3	Interaction attractive $k > 0$	97
	7.3.3.1	État de diffusion	98
	7.3.3.2	État lié	98
	7.3.4	Étude détaillée de l'interaction attractive	99
	7.3.4.1	énergie	99
190	7.3.4.2	trajectoires circulaires	103
	7.3.4.3	trajectoires paraboliques	103
	7.3.4.4	trajectoires hyperboliques	103
	7.3.4.5	trajectoires elliptiques	104
	7.3.5	Mouvements des planètes - Lois de Képler	105
195	7.3.5.1	Lois de Képler	105
	7.3.5.2	Vitesses cosmiques	105

8**Caractère galiléen approché de quelques référentiels d'utilisation courante****115**

	8.1	définitions	115
	8.1.1	Référentiel de Copernic	115
200	8.1.2	Référentiel héliocentrique ou de Kepler	116
	8.1.3	Référentiel géocentrique	116
	8.2	Référentiel terrestre - Poids	116
	8.2.1	définition	116
	8.2.2	poids d'un corps	117
205	8.2.3	RFD dans le référentiel terrestre	117
	8.2.4	champ de pesanteur terrestre	118
	8.2.5	effet de la force de Coriolis	119

9**mouvement des particules chargées****121**

	9.1	force de Lorentz	121
210	9.1.1	définition	121
	9.1.2	puissance de la force de Lorentz	122
	9.2	particule dans le champ électrique	122
	9.2.1	équation du mouvement	122
	9.2.2	cas où la vitesse initiale est parallèle au champ électrique	123
215	9.2.3	cas où la vitesse initiale est perpendiculaire au champ électrique	123
	9.3	particule dans le champ magnétique	123

9.3.1	équation du mouvement	123
9.3.2	trajectoire	124

10 Oscillateur harmonique - Régime libre et forcé 127

220	10.1	Oscillateur harmonique	128
	10.2	Oscillations libres	128
	10.2.1	Pulsation propre - Isochronisme des oscillations	128
	10.2.2	Étude énergétique	129
	10.3	Oscillations libres amorties	129
225	10.3.1	Temps de relaxation - Facteur de qualité	129
	10.3.2	Régime pseudo-périodique	130
	10.3.3	Régime aperiodique	131
	10.3.4	Régime critique	132
	10.3.5	Étude énergétique	132
230	10.4	Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux et soumis à une excitation sinusoïdale	132
	10.5	Régime transitoire	133
	10.6	Régime sinusoïdal forcé - Utilisation des complexes	134
	10.7	Résonance en élongation	134
235	10.8	Résonance en vitesse	135
	10.9	oscillateur non linéaire	136
	10.9.1	équation pendulaire	136
	10.9.2	role des harmoniques	137

Table des figures

240	1.1 règle de la main droite(tire bouchon)	4
	1.2 coordonnées cartésiennes	4
	1.3 base de frenet	6
	1.4 coordonnées cylindriques	8
	1.5 coordonnées sphériques	10
245	1.6 coordonnées géographiques	12
	1.7 plan polaire	13
	2.1 cas d'une rotation uniforme	24
	3.1 pendule	34
	3.2 chute libre	35
250	3.3 schémas d'un ressort	38
	3.4 réaction d'un support	39
	3.5 moment d'une force par rapport à un axe	41
	3.6 pendule	43
	4.1 équilibre stable	51
255	4.2 équilibre instable	52
	4.3 cas général	53
	4.4 énergie potentielle d'un pendule	54
	4.5 plan de phase	56
	4.6 pendule simple	57
260	4.7 portrait de phase	57
	7.1 loi des aires	93
	7.2 état lié et état de diffusion	94
	7.3 interaction répulsive	97
	7.4 état lié et état de diffusion	98
265	8.1 coordonnées géographiques	117
	10.1 pseudo périodique	130
	10.2 apériodique	131
	10.3 critique	132
	10.4 bilan de forces	133
270	10.5 réponse en amplitude	135
	10.6 réponse en vitesse	136

Liste des tableaux

Chapitre 1

Repérage d'un point - Vitesse et accélération

275

Sommaire

	1.1 Espace et temps - Référentiel d'observation	2
	1.1.1 solide	2
	1.1.2 repère(spatial)	2
280	1.1.3 repérage dans le temps	2
	1.1.4 référentiels	3
	1.1.5 point matériel	3
	1.2 Coordonnées cartésiennes	3
	1.2.1 Vecteur position	3
285	1.2.2 Vecteur vitesse	5
	1.2.3 vecteur accélération	6
	1.3 Coordonnées curvilignes - Base de Frénet	6
	1.3.1 Abscisse curviligne	6
	1.3.2 Vecteur vitesse	7
290	1.3.3 vecteur accélération	7
	1.4 Coordonnées polaires et cylindriques	8
	1.4.1 Repérage d'un point - Vecteur position	8
	1.4.2 Relations entre paramétrage cylindrique ou polaire et paramétrage cartésien	9
295	1.4.3 Vecteur vitesse	10
	1.4.4 vecteur accélération	10
	1.5 Coordonnées sphériques	10
	1.5.1 Repérage d'un point - Vecteur position	10
	1.5.2 Relation entre paramétrage sphérique et paramétrage cartésien	11
300	1.5.3 Vecteur vitesse	11
	1.5.4 vecteur accélération(à titre indicatif)	11
	1.5.5 Coordonnées géographiques	12
	1.6 mouvement à accélération centrale	12
	1.6.1 définition	12
305	1.6.2 propriétés (à retenir)	12

	1.6.3	formules de Binet	14
	1.7	Exemples de mouvement	14
	1.7.1	Vecteur accélération constant	14
	1.7.2	Mouvement rectiligne sinusoïdal	14
310	1.7.3	Mouvement circulaire	15
	1.7.4	exercices	15

315 la mécanique est la science qui étudie les mouvements des systèmes matériels. La cinématique est la branche de la mécanique consacrée à l'étude purement descriptive du mouvement (on ne s'occupe pas des causes des mouvements)

1.1 Espace et temps - Référentiel d'observation

320 D'une manière générale, repérer un point, paramétrer un point, nous servira tout au long du cours de Physique.

Plus particulièrement en Mécanique, repérer un point va nous permettre de calculer vitesse et accélération et de décrire les mouvements.

325 1.1.1 solide

c'est un système dont les distances mutuelles des éléments restent invariables au cours du temps

1.1.2 repère(spatial)

330 pour se repérer dans l'espace on choisit un solide de référence auquel est possible d'attacher des axes de coordonnées l'ensemble de tous les systèmes d'axes de coordonnées liés à un même solide de référence S constitue le repère lié à S un repère lié à la terre est dit repère terrestre.

req : pour un repère donné on peut définir une infinité de bases.

335 1.1.3 repérage dans le temps

dans un repère donné on dispose d'instruments appelés **horloges** qui nous permettent de mesurer des durées ou des intervalles de temps **pour former un repère temporel ou chronologie on a besoin d'une horloge**

et d'un instant origine. l'instant origine peut être n'importe quelle événement physique.

1.1.4 référentiels

un référentiel est l'association d'un repère spatial et d'une chronologie
le référentiel de Copernic est lié à des axes issues du centre de masse du système solaire et dirigés vers des étoiles lointaines (fixes)

le référentiel géocentrique est lié à axes issues du centre de masse de la terre et dirigés vers des étoiles fixes

dans un référentiel \mathcal{R} un événement est repéré par (x,y,z,t) .

En mécanique classique, le temps est le même pour tous les observateurs, l'espace ambiant est euclidien et l'espace et le temps ont un caractère continu

(x,y,z,t sont traités comme des réels)

l'unité de temps, la seconde, étant défini comme 9 192 634 770 périodes de la radiation électromagnétique correspondant à la transition entre 2 niveaux hyperfins de l'état fondamental du césium 133.

le mètre est la longueur du trajet parcouru par la lumière dans le vide en $\frac{1}{299792458}$ s

1.1.5 point matériel

objet dont les dimensions sont petits devant les dimensions de l'espace ou il se trouve. cette hypothèse n'affecte pas la masse.

1.2 Coordonnées cartésiennes

1.2.1 Vecteur position

Pour repérer un point, on utilise un **repère**.

Un repère, c'est une **origine** O et une **base** $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ en général orthonormée et droite.

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base si $\forall \vec{V}, \exists (\alpha, \beta, \gamma)$ réels tel que $\vec{V} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$.

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est orthonormée si

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 \quad (1.1)$$

365

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1 \quad (1.2)$$

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad \odot \quad (1.3)$$

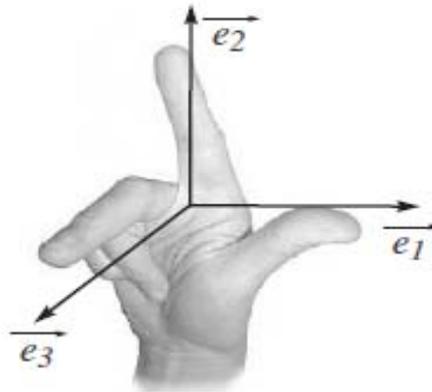


FIGURE 1.1 – règle de la main droite (tire bouchon)

Soit la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

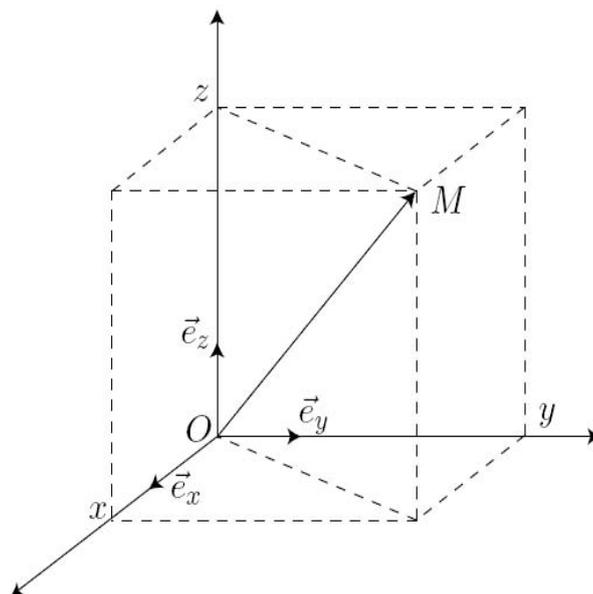


FIGURE 1.2 – coordonnées cartésiennes

370 x, y, z , **coordonnées cartésiennes** de M , définissent de façon unique la position de M extrémité du **vecteur position**

$$\boxed{\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z} \quad (1.4)$$

Remarque : si l'on représente 2 des 3 vecteurs de la base dans un plan, pour déterminer si le 3^e est rentrant ou sortant, on utilise la règle des 3 doigts de la main droite ou la règle du tire bouchon.

375 Lorsque M se déplace, x, y et z varient (peuvent varier de $-\infty$ à $+\infty$); x, y et z sont des fonctions du temps et on devrait écrire $x(t), y(t)$ et $z(t)$.

1.2.2 Vecteur vitesse

Lorsque M se déplace, x varie; on peut associer à M une vitesse suivant l'axe des x, v_x :

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{t + \Delta t - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

380 vitesse instantanée

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (1.5)$$

en $m.s^{-1}$ où $dx = x(t + dt) - x(t) = v_x dt$ est la variation élémentaire de x quand t varie de $dt \rightarrow 0$.

$\frac{dx}{dt}$ n'est pas seulement une écriture voulant dire je dérive la fonction $x(t)$ par rapport au temps t , c'est bien un rapport $\frac{x(t + dt) - x(t)}{t + dt - t}$.

De même $v_y = \frac{dy}{dt}$ est la vitesse suivant l'axe des y et $v_z = \frac{dz}{dt}$ est la vitesse
385 suivant l'axe des z .

v_x, v_y et v_z définissent le **vecteur vitesse** :

$$\boxed{\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z} \quad (1.6)$$

On utilise aussi la notation $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z} \quad (1.7)$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z = \frac{d}{dt}(x\vec{e}_x) + \frac{d}{dt}(y\vec{e}_y) + \frac{d}{dt}(z\vec{e}_z) = \frac{d}{dt}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \quad (1.8)$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}} \quad (1.9)$$

390 Encore une fois $\frac{d\vec{OM}}{dt}$ est bien un rapport :

$$\boxed{d\vec{OM} = \vec{v} dt = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z} \quad (1.10)$$

est le **vecteur déplacement élémentaire** (pendant dt , M se déplace de dx suivant l'axe des x , de dy suivant l'axe des y et de dz suivant l'axe des z).

395

1.2.3 vecteur accélération

On peut aussi associer à M une accélération $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ en $m.s^{-2}$ et construire le **vecteur accélération** :

$$\boxed{\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z} \quad (1.11)$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}} \quad (1.12)$$

400 1.3 Coordonnées curvilignes - Base de Frénet

1.3.1 Abscisse curviligne

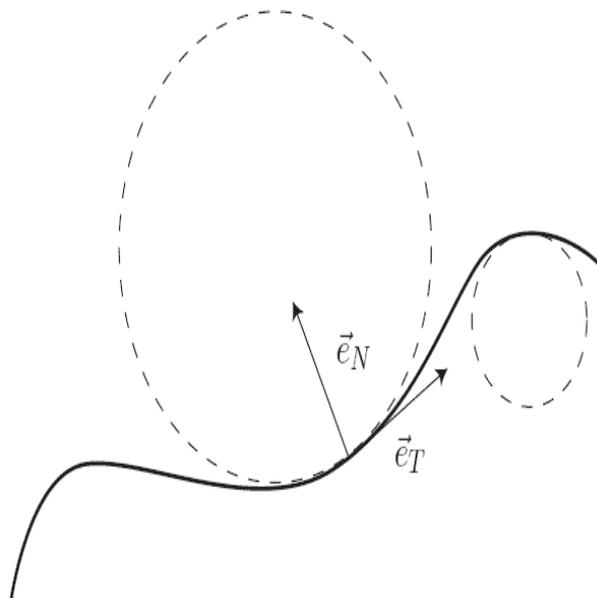


FIGURE 1.3 – base de frenet

On repère le point sur sa trajectoire (courbe orientée) par son **abscisse curviligne** :

$$\boxed{s = \widehat{SM}} \quad (1.13)$$

405 \vec{e}_T et \vec{e}_N forment la **base de Frénet**.

\vec{e}_T est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire orienté selon le sens positif; \vec{e}_N s'obtient en tournant de $\pi/2$ vers l'intérieur de la concavité.

1.3.2 Vecteur vitesse

$$\boxed{\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{e}_T = v \vec{e}_T} \quad \text{avec} \quad v = \frac{ds}{dt} \quad (1.14)$$

410 1.3.3 vecteur accélération

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{e}_T + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{e}_T}{ds} \frac{ds}{dt}} \quad (1.15)$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_T + v^2 \frac{d\vec{e}_T}{ds}} \quad (1.16)$$

avec $\frac{d\vec{e}_T}{ds} = \frac{1}{R_c} \vec{e}_N$, ou R_c est le rayon du courbure de la trajectoire

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_T + \frac{v^2}{R_c} \vec{e}_N} \quad (1.17)$$

$$\boxed{\vec{a} = a_T \vec{e}_T + a_N \vec{e}_N} \quad (1.18)$$

$a_T = \frac{dv}{dt}$ est la composante tangentielle de l'accélération.

415 $a_N = \frac{v^2}{R_c}$ est la composante normale de l'accélération.

Pourquoi $\vec{a} \neq \dot{v} \vec{e}_T$?

Quand on dérive (par rapport au temps), il faut toujours faire le point sur ce qui dépend du temps.

$v(t)$ mais aussi $\vec{e}_T(t)$

420

en identifiant

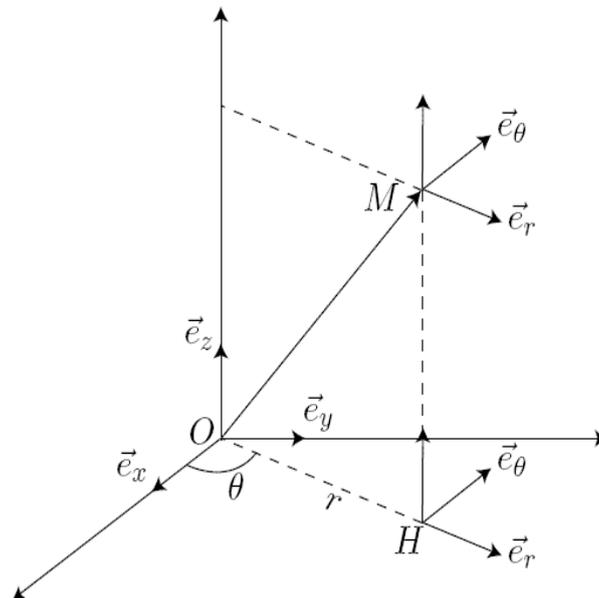
$$\frac{v^2}{R_c} \vec{e}_N = v \frac{d\vec{e}_T}{dt} \quad (1.19)$$

ou encore

$$\vec{e}_N = \frac{R_c}{v} \frac{d\vec{e}_T}{dt} \quad (1.20)$$

1.4 Coordonnées polaires et cylindriques

1.4.1 Repérage d'un point - Vecteur position



425

FIGURE 1.4 – coordonnées cylindriques

De la même manière que $x = \overline{OH}_x$, $y = \overline{OH}_y$ et $z = \overline{OI}$ définissent de façon unique la position de M, les **coordonnées cylindriques**

$r = \|\mathbf{OH}\| = OH > 0$ de 0 à $+\infty$,

$\theta = (\mathbf{e}_x, \mathbf{OH})$ de 0 à 2π et

$z = \overline{OI}$ de $-\infty$ à $+\infty$

définissent aussi de façon unique la position de M.

Si le mouvement est plan c'est à dire se fait dans un plan, on utilise les **coordonnées polaires** (r, θ) de ce plan.

$r = cte$ définit un cylindre de rayon r (un cercle en coordonnées polaires).

$\theta = cte$ définit un demi plan perpendiculaire au plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) (une demi droite en coordonnées polaires).

$z = cte$ définit un plan parallèle au plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) .

\vec{e}_r , \vec{e}_θ et \vec{e}_z forment la **base cylindrique** (\vec{e}_r et \vec{e}_θ la **base polaire**) :

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{OH}}{OH},$$

\vec{e}_θ s'obtient en tournant de $\pi/2$ dans le sens des θ croissant,

\vec{e}_z est le 3^e vecteur de la base cartésienne.

Le **vecteur position** s'écrit dans la base cylindrique

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

et dans la base polaire

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r$$

1.4.2 Relations entre paramétrage cylindrique ou polaire et paramétrage cartésien

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$x = r \cos \theta$
$\tan \theta = \frac{y}{x}$	$y = r \sin \theta$
$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$	$\vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$
$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$	$\vec{e}_y = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta$

On remarque en particulier que $\vec{e}_\theta = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}$ ou encore

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

On pourra vérifier que(en dérivant l'expression dans la base cartésienne)

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

430 On peut retenir la règle suivante : $\dot{\theta} \times$ vecteur obtenu par une rotation de $\pi/2$ dans le sens des θ croissant.

1.4.3 Vecteur vitesse

r, θ, z , mais aussi \vec{e}_r et \vec{e}_θ dépendent du temps.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{z} \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z} \quad (1.21)$$

435 en coordonnées polaires ($z = 0$)

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta} \quad (1.22)$$

1.4.4 vecteur accélération

Calculons le vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + r\dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \ddot{z} \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z} \quad (1.23)$$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ est la **composante radiale** de l'accélération.

440 $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ est la **composante orthoradiale** de l'accélération.

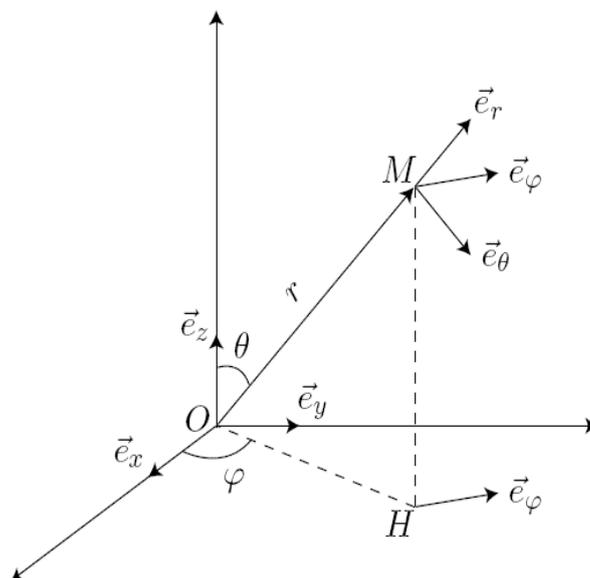
$a_z = \ddot{z}$ est la **composante axiale**.

le vecteur déplacement élémentaire est :

$$\boxed{d\vec{OM} = \vec{v} dt = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z} \quad (1.24)$$

1.5 Coordonnées sphériques

1.5.1 Repérage d'un point - Vecteur position



445

FIGURE 1.5 – coordonnées sphériques

Les **coordonnées sphériques** (r, θ, φ) définissent de manière unique la position du point M :

$r = \|\overrightarrow{OM}\|$ peut varier de 0 à $+\infty$

$\theta = (\overrightarrow{e}_z, \overrightarrow{OM})$ peut varier de 0 à π

450 $\varphi = (\overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{OH})$ peut varier de 0 à 2π

Les vecteurs \overrightarrow{e}_r , $\overrightarrow{e}_\theta$ et $\overrightarrow{e}_\varphi$ constitue la **base sphérique** :

$$\overrightarrow{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

$\overrightarrow{e}_\varphi$ est obtenu en tournant de $\pi/2$ dans le sens des φ croissant à partir du

455 vecteur \overrightarrow{OH}

$$\overrightarrow{e}_\theta = \overrightarrow{e}_\varphi \wedge \overrightarrow{e}_r$$

Le **vecteur position** s'écrit dans la base sphérique :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r \overrightarrow{e}_r} \quad (1.25)$$

1.5.2 Relation entre paramétrage sphérique et paramétrage cartésien

$$\overrightarrow{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \overrightarrow{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \overrightarrow{e}_y + \cos \theta \overrightarrow{e}_z$$

460

$$\overrightarrow{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \overrightarrow{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \overrightarrow{e}_y - \sin \theta \overrightarrow{e}_z \quad (1.26)$$

$$\overrightarrow{e}_\varphi = -\sin \varphi \overrightarrow{e}_x + \cos \varphi \overrightarrow{e}_y$$

1.5.3 Vecteur vitesse

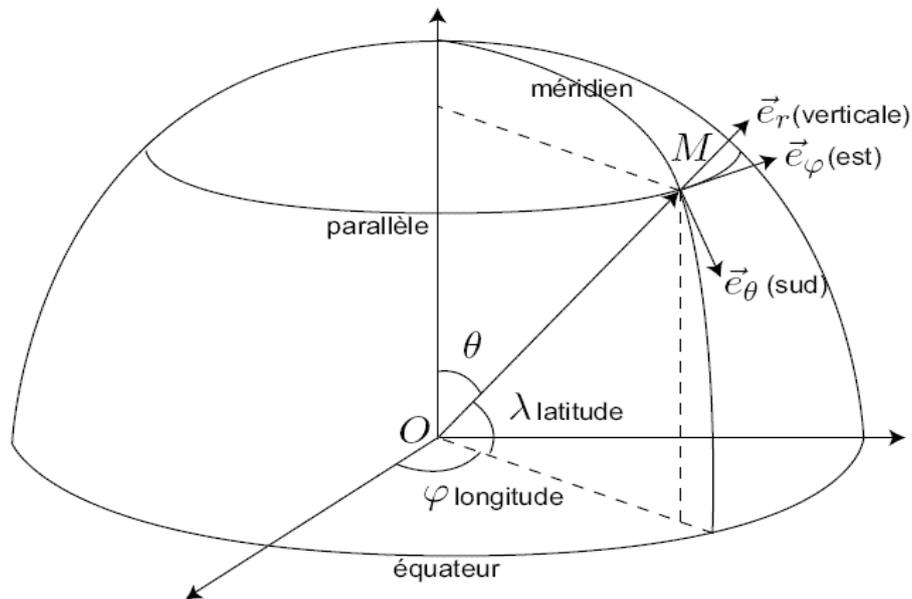
$$\boxed{\vec{v} = \dot{r} \overrightarrow{e}_r + r \dot{\theta} \overrightarrow{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \overrightarrow{e}_\varphi} \quad (1.27)$$

1.5.4 vecteur accélération(à titre indicatif)

$$\vec{a} = [\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)] \overrightarrow{e}_r + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta] \overrightarrow{e}_\theta +$$

$$[2r\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + r\ddot{\varphi} \sin \theta] \overrightarrow{e}_\varphi \quad (1.28)$$

1.5.5 Coordonnées géographiques



465

FIGURE 1.6 – coordonnées géographiques

1.6 mouvement à accélération centrale

1.6.1 définition

on appelle ainsi un mouvement tel qu'à chaque instant l'accélération du point M passe par un point fixe O (pas nécessairement l'origine du repère) ce qui se traduit par :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}(M) = \vec{0} \quad (1.29)$$

1.6.2 propriétés (à retenir)

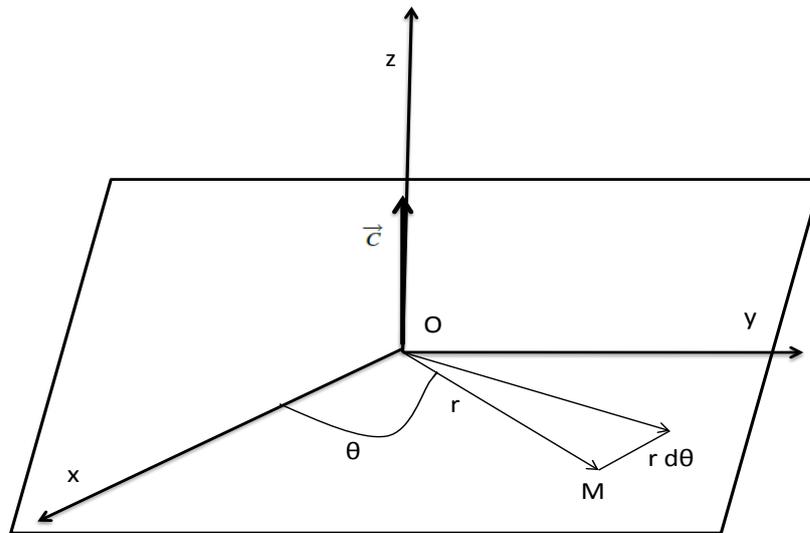
470

soit le vecteur $\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$ montrons qu'il est constant

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.30)$$

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \vec{v} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} = \vec{0} \quad (1.31)$$

\vec{C} est un vecteur constant. le mouvement se fait dans un plan perpendiculaire à \vec{C} , pour étudier ce mouvement on passe dans ce plan et on utilise les coordonnées polaires r, θ



475

FIGURE 1.7 – plan polaire

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{C} = r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \quad (1.32)$$

calculons le vecteur surface balayé par le rayon vecteur \vec{r}

$$d\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge d\vec{r}$$

en divisant par dt et en prenant le module

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \quad (1.33)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} \quad (1.34)$$

loi des aires :
le rayon vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ balaye des aires égales pendant des durées dt égales

480 **1.6.3 formules de Binet**

le but de ces formules est d'éliminer le temps dans les expressions de l'accélération \vec{a} et du module de la vitesse au carré v^2 et de chercher l'équation polaire $r = r(\theta)$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \\ \ddot{r} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \right) = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \\ v^2 &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (1.35)$$

485

$$v^2 = \frac{C^2}{r^2} \left[r^2 \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + 1 \right] \quad (1.36)$$

en posant $u = \frac{1}{r}$ on montre que

$$v^2 = C^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right] \quad (1.37)$$

pour l'accélération

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r$$

on trouve

$$\vec{a} = -C^2 u^2 \left[u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right] \vec{e}_r \quad (1.38)$$

1.7 Exemples de mouvement**1.7.1 Vecteur accélération constant**

$$\begin{aligned} \vec{a} &= cte \\ \vec{v} &= \vec{a}t + \vec{A} \\ \vec{OM} &= \frac{1}{2} \vec{a}t^2 + \vec{A}t + \vec{B} \end{aligned}$$

490 **1.7.2 Mouvement rectiligne sinusoidal**

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= x \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad x = x_m \cos \omega t \\ \vec{v} &= -x_m \omega \sin \omega t \vec{e}_x \\ \vec{a} &= -x_m \omega^2 \cos \omega t \vec{e}_x = -\omega^2 \vec{OM} \end{aligned}$$

1.7.3 Mouvement circulaire

Le paramétrage polaire est le mieux adapté :

$$\overrightarrow{OM} = R \vec{e}_r$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

1.7.4 exercices

1) Mouvement hélicoïdal (*)

Soit l'hélice droite définie en coordonnées cylindriques par les équations : $r = R$ et $z = h\theta$ et orientée dans le sens θ croissant (soit $h > 0$). L'origine de la trajectoire du point M est en $z = 0$.

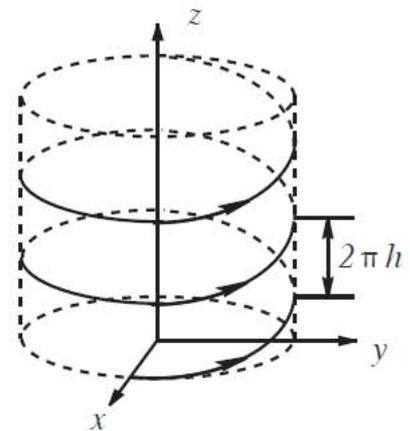
1) Déterminer les équations de l'hélice en coordonnées cartésiennes.

2) Le point M parcourt l'hélice à une vitesse constante v .

a) Déterminer les vecteurs vitesse et accélération en fonction de R , h et v .

b) Montrer que l'angle $\alpha = (\vec{e}_z, \vec{v})$ est constant.

En déduire l'hodographe du mouvement.



2) Mouvement cycloïdal (**)

Une roue de rayon R et de centre C roule sans glisser sur l'axe (Ox) à vitesse angulaire ω constante tout en restant dans le plan (Oxz) . Soit M un point liée à la roue situé sur la circonférence. À l'instant $t = 0$, M se trouve en $M_0(x = 0, z = 2R)$. Les mouvements sont étudiés dans le référentiel R associé au repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

1) Comment exprimer la condition « la roue ne glisse pas » ?

2) Déterminer les coordonnées x_C et z_C de C à l'instant t .

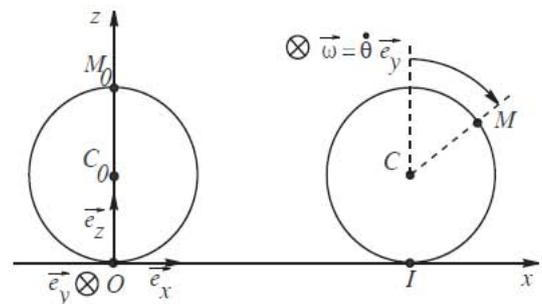
3) Même question pour M.

4) Étudier la trajectoire définie par le système d'équations paramétriques $(x(\theta), z(\theta))$ avec $\theta = \omega t$. La tracer pour $\theta \in [-4\pi; 4\pi]$.

5) Calculer la vitesse $\overrightarrow{v_{M/R}}$ du point M à l'instant t . Exprimer sa norme v en fonction de $\left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$. En déduire l'hodographe du mouvement.

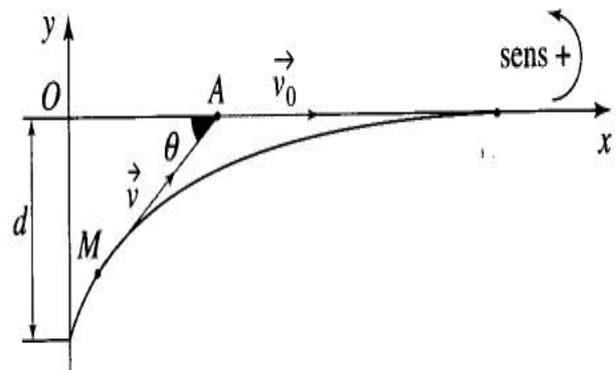
6) Calculer l'accélération $\overrightarrow{a_{M/R}}$ du point M à l'instant t . Exprimer sa norme en fonction de R et v . Calculer numériquement cette norme de l'accélération dans le cas d'un point périphérique d'un pneu de voiture roulant à 130 km.h^{-1} sur une autoroute ($R = 35 \text{ cm}$).

7) Déterminer $\overrightarrow{v_{M/R}}$ et $\overrightarrow{a_{M/R}}$ lorsque M est en contact avec l'axe (Ox) .



495

Un promeneur A suit un chemin rectiligne avec une vitesse constante v_0 . À l'instant initial, son chien M se trouve à une distance d sur la même perpendiculaire au chemin. Puis il court vers son maître à la vitesse v .



On cherche à déterminer la durée de la poursuite.

Soient x et y les coordonnées de M , $r = AM$ et θ défini sur le schéma ci-contre.

1) Exprimer \dot{x} et \dot{y} en fonction de v et θ : pour cela, projeter $\vec{v} = \overrightarrow{v_{M/R}}$ dans la base cartésienne. Exprimer ensuite x et y en fonction de v_0 , r , θ et t : pour cela, remarquer que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$. En déduire deux équations différentielles en $r(t)$ et $\theta(t)$ qui peuvent se combiner pour donner le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{r} = v_0 \cos \theta - v \\ r\dot{\theta} = -v_0 \sin \theta \end{cases}$$

2) En déduire une équation différentielle en $r(\theta)$.

Vérifier que l'expression $r = \frac{d}{\sin \theta} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^{\frac{v}{v_0}}$ est la solution qui tient compte des conditions initiales.

3) Quelle condition v et v_0 doivent-elles vérifier pour que le problème ait une solution ? Dans ce cas, quelle est la valeur finale de θ ?

4) Écrire une équation différentielle de $\theta(t)$.

5) Déterminer alors la durée τ de la poursuite, sachant que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^\lambda d\theta = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}$

Chapitre 2

Changements de référentiels

Sommaire

500	2.1 Référentiel	17
	2.1.1 Définitions	17
	2.1.2 Exemple	18
	2.2 Vecteur rotation	18
505	2.2.1 Dérivée d'un vecteur par rapport au temps	18
	2.2.2 Cas particuliers	20
	2.2.3 Composition des vecteurs rotation	21
	2.3 Composition des vitesses	21
	2.3.1 Vitesse absolue	21
510	2.3.2 Vitesse relative	21
	2.3.3 Vitesse d'entraînement	21
	2.4 Composition des accélérations	22
	2.4.1 Accélération absolue	22
	2.4.2 Accélération relative	22
515	2.4.3 Accélération d'entraînement et de Coriolis	22
	2.4.4 Cas particuliers	24
	2.4.5 Exercices	25

520

2.1 Référentiel

2.1.1 Définitions

La description d'un mouvement est **relative** : elle dépend de celui qui observe le mouvement.

525

Pour décrire un mouvement, il faut donc préciser l'observateur ou encore le référentiel.

2.1.2 Exemple

530 Pour un observateur immobile sur le quai, le solide de référence est le quai, notons le référentiel correspondant \mathcal{R}_1 .

Pour un observateur immobile dans un train, le solide de référence est le train, notons le référentiel correspondant \mathcal{R}_2 .

535 Quelle est la vitesse d'un passager (repéré par M) qui se déplace dans le train ? La réponse sera différente selon l'observateur.

Dans un problème où interviennent plusieurs référentiels, il faudra toujours préciser par rapport à quel référentiel on travaille.

$\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d \overrightarrow{O_1 M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1}$ est la vitesse du passager par rapport au quai.

$\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_2} = \left(\frac{d \overrightarrow{O_2 M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2}$ est la vitesse du passager par rapport au train.

540 Quand on dérive par rapport à \mathcal{R}_1 , O_1 et les vecteurs de la base de \mathcal{R}_1 sont considérés comme indépendants du temps puisque immobiles par rapport à \mathcal{R}_1 par définition.

Quand on dérive par rapport à \mathcal{R}_2 , O_2 et les vecteurs de la base de \mathcal{R}_2 sont considérés comme indépendants du temps puisque immobiles par rapport à \mathcal{R}_2 par définition.

545

2.2 Vecteur rotation

Soit \mathcal{R}_1 un référentiel de base $(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1})$ et \mathcal{R}_2 un référentiel de base $(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2})$ en mouvement quelconque par rapport à \mathcal{R}_1 .

2.2.1 Dérivée d'un vecteur par rapport au temps

Soit $\vec{A}(t)$ un vecteur quelconque.

Exprimons $\vec{A}(t)$ dans la base de \mathcal{R}_2 et dérivons par rapport à \mathcal{R}_1 :

$$\vec{A}(t) = A_{x_2} \vec{e}_{x_2} + A_{y_2} \vec{e}_{y_2} + A_{z_2} \vec{e}_{z_2}$$

$$\left(\frac{d \vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \dot{A}_{x_2} \vec{e}_{x_2} + \dot{A}_{y_2} \vec{e}_{y_2} + \dot{A}_{z_2} \vec{e}_{z_2} + A_{x_2} \dot{\vec{e}}_{x_2} + A_{y_2} \dot{\vec{e}}_{y_2} + A_{z_2} \dot{\vec{e}}_{z_2}$$

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + A_{x_2} \dot{\vec{e}}_{x_2} + A_{y_2} \dot{\vec{e}}_{y_2} + A_{z_2} \dot{\vec{e}}_{z_2}$$

Exprimons les vecteurs $\dot{\vec{e}}_{x_2}$, $\dot{\vec{e}}_{y_2}$, $\dot{\vec{e}}_{z_2}$, qui caractérisent le mouvement de \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_1 , dans la base de \mathcal{R}_2 :

$$\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = a_{11} \vec{e}_{x_2} + a_{12} \vec{e}_{y_2} + a_{13} \vec{e}_{z_2}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = a_{21} \vec{e}_{x_2} + a_{22} \vec{e}_{y_2} + a_{23} \vec{e}_{z_2}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = a_{31} \vec{e}_{x_2} + a_{32} \vec{e}_{y_2} + a_{33} \vec{e}_{z_2}$$

La base étant orthonormée :

$$\vec{e}_{x_2}^2 = \|\vec{e}_{x_2}\|^2 = 1 \Rightarrow 2\vec{e}_{x_2} \cdot \frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt} = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

de même $a_{22} = a_{33} = 0$

$$\vec{e}_{x_2} \cdot \vec{e}_{y_2} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt} \cdot \vec{e}_{y_2} + \vec{e}_{x_2} \cdot \frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt} = 0 \Rightarrow a_{12} + a_{21} = 0 \Rightarrow a_{12} = -a_{21} = r$$

de même $a_{23} = -a_{32} = p$ et $a_{31} = -a_{13} = q$

Finalement, trois paramètres p , q , r suffisent à caractériser le mouvement de \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_1 ; ces trois paramètres définissent le **vecteur rotation** :

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = p \vec{e}_{x_2} + q \vec{e}_{y_2} + r \vec{e}_{z_2}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = r \vec{e}_{y_2} - q \vec{e}_{z_2} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{x_2}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = -r \vec{e}_{x_2} + p \vec{e}_{z_2} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{y_2}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = q \vec{e}_{x_2} - p \vec{e}_{y_2} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{z_2}$$

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{A} \quad (2.1)$$

si on prend $\vec{A} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}$

$$\left(\frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} \quad (2.2)$$

2.2.2 Cas particuliers

2.2.2.1 Translation pure

Si \mathcal{R}_2 est en translation par rapport à \mathcal{R}_1 , les axes de \mathcal{R}_2 gardent une direction fixe par rapport à ceux de \mathcal{R}_1

$$\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \vec{0} \Rightarrow p = q = r = 0 \Rightarrow \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \vec{0}$$

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} = \frac{d\vec{A}}{dt} \quad (2.3)$$

555 la dérivation est la même par rapport aux deux référentiels

2.2.2.2 Rotation uniforme autour d'un axe fixe

Si \mathcal{R}_2 est en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe de \mathcal{R}_1 par exemple $\vec{e}_{z_1} = \vec{e}_{z_2} = \vec{e}_z$

$$\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \omega \vec{e}_{y_2}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = -\omega \vec{e}_{x_2}$$

ce qui implique $r = \omega$ et $p = q = 0$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$$

Dans le cas d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe, le vecteur rotation est porté par l'axe de rotation et a pour norme la vitesse angulaire.

2.2.3 Composition des vecteurs rotation

Soient \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 et \mathcal{R}_3

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} &= \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{A} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_3} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} \wedge \vec{A} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{A} \\ &= \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_3} + (\vec{\omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}) \wedge \vec{A} \\ &\quad \boxed{\vec{\omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

560 remarque : $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} - \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{A}$

$$\boxed{\vec{\omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} = -\vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}} \quad (2.5)$$

2.3 Composition des vitesses

2.3.1 Vitesse absolue

$$\vec{v}_a = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} \quad (2.6)$$

2.3.2 Vitesse relative

$$\vec{v}_r = \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} \quad (2.7)$$

2.3.3 Vitesse d'entraînement

En dérivant $\overrightarrow{O_1M}$ par rapport au repère \mathcal{R}_1 en intercalant le point O_2

$$\begin{aligned} \vec{v}_a(M)_{\mathcal{R}_1} &= \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} + \overbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1}}^1 \\ &= \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} + \overbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2}}^1 + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} \end{aligned}$$

565

$$= \vec{v}(O_2)_{\mathcal{R}_1} + \vec{v}(M)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

$$\boxed{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_1} = \vec{v}(M)_{\mathcal{R}_2} + \vec{v}_e} \quad (2.8)$$

$$\boxed{\vec{v}_a(M)_{\mathcal{R}_1} = \vec{v}_r(M)_{\mathcal{R}_2} + \vec{v}_e} \quad (2.9)$$

avec \vec{v}_e appelé **vitesse d'entraînement**

$$\boxed{\vec{v}_e = \vec{v}(O_2)_{\mathcal{R}_1} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}} \quad (2.10)$$

Pour calculer \vec{v}_e on peut aussi « immobiliser » M dans \mathcal{R}_2 en notant M^* la position correspondante

$$\vec{v}(M^*)_{\mathcal{R}_1} = \vec{v}(M^*)_{\mathcal{R}_2} + \vec{v}_e = \vec{v}_e$$

La vitesse d'entraînement peut aussi se calculer comme la vitesse par rapport à \mathcal{R}_1 de M^* appelé **point coïncident**

2.4 Composition des accélérations

570

2.4.1 Accélération absolue

$$\vec{a}_a(M)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d \vec{v}_a(M)_{\mathcal{R}_1}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} \quad (2.11)$$

2.4.2 Accélération relative

$$\vec{a}_r(M)_{\mathcal{R}_2} = \left(\frac{d \vec{v}_r(M)_{\mathcal{R}_2}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} \quad (2.12)$$

2.4.3 Accélération d'entraînement et de Coriolis

$$\begin{aligned} \vec{a}_a(M)_{\mathcal{R}_1} &= \left(\frac{d \vec{v}_a(M)_{\mathcal{R}_1}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} \\ &= \left(\frac{d \vec{v}(O_2)_{\mathcal{R}_1}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d \vec{v}_r(M)_{\mathcal{R}_2}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} + \frac{d}{dt} \left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} \right)_{\mathcal{R}_1} \end{aligned}$$

Calculons les trois termes séparément

575

$$\begin{aligned}
\blacksquare \left(\frac{d \vec{v}(O_2)_{\mathcal{R}_1}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} &= \vec{a}(O_2)_{\mathcal{R}_1} \\
\blacksquare \left(\frac{d \vec{v}_r(M)_{\mathcal{R}_2}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} &= \left(\frac{d \vec{v}_r(M)_{\mathcal{R}_2}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{v}_r(M)_{\mathcal{R}_2} \\
&= \vec{a}_r(M)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{v}_r(M)_{\mathcal{R}_2} \\
\blacksquare \frac{d}{dt} \left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} \right)_{\mathcal{R}_1} &= \frac{d \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overbrace{\left(\frac{d \overrightarrow{O_2M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1}}^2 \\
&= \frac{d \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overbrace{\left[\left(\frac{d \overrightarrow{O_2M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} \right]}^2 \\
&= \frac{d \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \left[\vec{v}_r(M)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} \right]
\end{aligned}$$

En rassemblant les résultats

$$\begin{aligned}
\vec{a}_a(M)_{\mathcal{R}_1} &= \vec{a}_r(M)_{\mathcal{R}_2} + \vec{a}(O_2)_{\mathcal{R}_1} + \frac{d \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} \\
&\quad + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}) \\
&\quad + 2 \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{v}_r(M)_{\mathcal{R}_2} \tag{2.13}
\end{aligned}$$

L'accélération d'entraînement est définie comme l'accélération par rapport à \mathcal{R}_1 du point coïncident M^*

$$\begin{aligned}
\vec{a}(M^*)_{\mathcal{R}_1} &= \vec{0} + \vec{a}(O_2)_{\mathcal{R}_1} + \frac{d \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} \\
&\quad + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}) + \vec{0} = \vec{a}_e
\end{aligned}$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}(O_2)_{\mathcal{R}_1} + \frac{d \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}) \tag{2.14}$$

580 L'accélération par rapport à \mathcal{R}_1 est donc égale à l'accélération par rapport à \mathcal{R}_2 + l'accélération d'entraînement + un troisième terme appelé **accélération de Coriolis**

$$\vec{a}_a(M)_{\mathcal{R}_1} = \vec{a}_r(M)_{\mathcal{R}_2} + \vec{a}_e + \vec{a}_c \tag{2.15}$$

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{v}_r(M)_{\mathcal{R}_2} \tag{2.16}$$

2.4.4 Cas particuliers

585 2.4.4.1 Translation pure

Si \mathcal{R}_2 est en translation par rapport à \mathcal{R}_1 , les axes de \mathcal{R}_2 gardent une direction fixe par rapport à ceux de \mathcal{R}_1 et

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{v}_e = \vec{v}(O_2)_{\mathcal{R}_1} \quad \vec{a}_e = \vec{a}(O_2)_{\mathcal{R}_1} \quad \vec{a}_c = \vec{0}} \quad (2.17)$$

2.4.4.2 Rotation uniforme autour d'un axe fixe

Si \mathcal{R}_2 est en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ autour d'un axe fixe de \mathcal{R}_1 par exemple $\vec{e}_{z_1} = \vec{e}_{z_2} = \vec{e}_z$ ($O_1 = O_2 = O$)

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$$

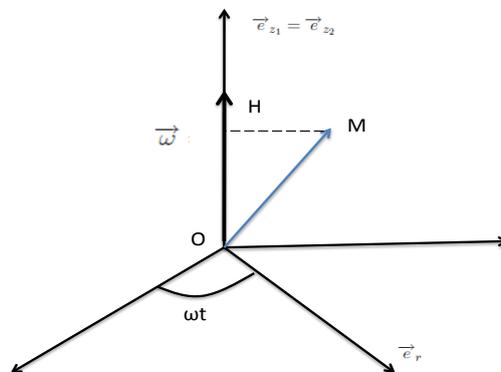


FIGURE 2.1 – cas d'une rotation uniforme

$$\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM} = z \vec{e}_z + r \vec{e}_r$$

590

$$\vec{v}_e = \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{OM} = \omega \vec{e}_z \wedge (r \vec{e}_r + z \vec{e}_z) = r\omega \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{OM}) = \omega \vec{e}_z \wedge (\omega \vec{e}_z \wedge (r \vec{e}_r + z \vec{e}_z)) = -r\omega^2 \vec{e}_r$$

Retenant donc que dans le cas d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe l'accélération d'entraînement vaut

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{HM} \quad (2.18)$$

ou H est la projection de M sur l'axe de rotation donc sur $\vec{\omega}$

595

2.4.5 Exercices

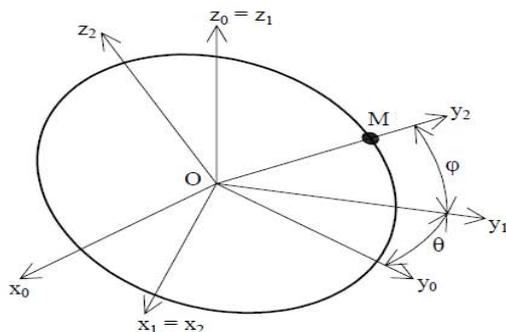
Les calculatrices sont **autorisées**.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Avertissement : Tous les résultats numériques sont demandés dans un format scientifique avec une précision au millième (exemple : $1,623 \cdot 10^{-3}$) et en unité S.I., unité qui est à préciser.

Exercice 1 :



Un cerceau de centre fixe O et de rayon r , tourne autour de son diamètre vertical fixe Oz_0 avec une vitesse angulaire ω constante. Ce cerceau est constitué d'un tube creux de diamètre négligeable à l'intérieur duquel une bille, assimilée à un point matériel M de masse m , peut se déplacer sans frottement.

Le référentiel \mathfrak{R}_0 est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Le référentiel absolu \mathfrak{R}_0 est associé à la terre T .

On note \mathfrak{R}_1 le référentiel relatif rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$. Le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, lié rigidement au cerceau, se déduit à chaque instant de $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ par une rotation d'angle θ autour de l'axe Oz_0 . L'axe Oy_1 est toujours situé dans le plan du cerceau.

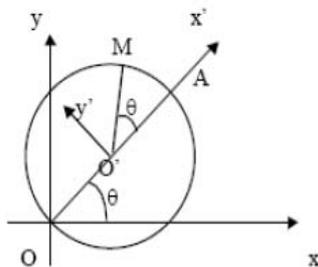
On note \mathcal{R}_2 le référentiel rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ tel que $\vec{OM} = r \vec{y}_2$.

Le repère $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ se déduit à chaque instant de $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par une rotation d'angle φ autour de l'axe $O\vec{x}_1$.

On note g l'accélération de la pesanteur.

- 1.1 Déterminer $\vec{\gamma}_e$ l'accélération d'entraînement du point M et l'exprimer dans \mathcal{R}_1 .
- 1.2 Déterminer $\vec{\gamma}_c$ l'accélération complémentaire du point M et l'exprimer dans \mathcal{R}_1 .
- 1.3 Déterminer $\vec{\gamma}_r$ l'accélération relative du point M dans le repère \mathcal{R}_1 et l'exprimer dans \mathcal{R}_1 .
- 1.4 Déterminer $\vec{\gamma}_a$ l'accélération absolue du point M dans le repère \mathcal{R}_0 et l'exprimer dans \mathcal{R}_1 .
- 1.5 Calculer $\vec{\gamma}_a$ sans utiliser la composition des mouvements et la comparer avec le résultat trouvé à la question 1.4.

600



Dans le plan Oxy , un cercle de rayon R , de diamètre OA , tourne à la vitesse angulaire constante ω autour du point O . On lie à son centre mobile O' deux axes rectangulaires $O'x'y'$ (l'axe $O'x'$ est dirigé suivant OA).

À l'instant $t=0$, A est sur Ox , Ox et $O'x'$ étant alors colinéaires.

Un point M , initialement en A , parcourt la circonférence dans le sens positif avec la même vitesse angulaire ω .

1. Calculer directement les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M dans le repère Oxy (en dérivant les composantes de \vec{OM}).
2. Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération relatives de M dans le repère $O'x'y'$ puis dans Oxy .
- 3.a) Calculer les composantes de la vitesse d'entraînement dans le repère Oxy en utilisant la notion de point coïncident, retrouver le résultat par la loi de composition des vitesses.
- b) Calculer de même les composantes de l'accélération d'entraînement dans le repère Oxy ; en déduire l'accélération complémentaire.
4. Vérifier les expressions des composantes de la vitesse d'entraînement et celle de l'accélération complémentaire en utilisant les expressions faisant intervenir le vecteur rotation $\vec{\omega}$.

Chapitre 3

Dynamique du point en référentiel galiléen

Sommaire

	3.1 dynamique dans un référentiel galiléen	28
	3.1.1 masse	28
	3.1.2 Quantité de mouvement	28
610	3.1.3 interactions,forces	29
	3.1.4 système isolé et pseudo-isolé	29
	3.1.5 référentiels galiléens	29
	3.2 Loi de Newton	30
	3.2.1 Énoncé	30
615	3.2.2 Conservation de la quantité de mouvement	31
	3.3 Puissance, travail et énergie cinétique	31
	3.3.1 Travail	31
	3.3.2 Puissance	32
	3.4 Théorème de la puissance cinétique	32
620	3.4.1 Énergie cinétique	32
	3.4.2 Théorème de la puissance	32
	3.4.3 Théorème de l'énergie cinétique	33
	3.4.4 L'énergie cinétique se conserve-t'elle ?	33
	3.4.5 Exemple d'utilisation	33
625	3.5 Forces	35
	3.5.1 Force de pesanteur - Chute libre	35
	3.5.2 Force de frottement dans un fluide	36
	3.5.3 Force de rappel élastique	38
	3.5.4 Force de liaison	39
630	3.6 Théorème du moment cinétique	39
	3.6.1 moment cinétique	40
	3.6.2 moment d'une force	40
	3.6.3 Théorème du moment cinétique en un point fixe	40
	3.6.4 Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe	41

La théorie de la mécanique classique (= newtonienne) repose sur trois principes fondés sur l'expérience (et donc indémontrables par des principes antérieurs). Ces principes concernent la dynamique et donc, grâce à l'introduction de la notion de force (action d'un corps sur un autre), ils vont permettre de prévoir le mouvement d'un corps dans un environnement donné.

3.1 dynamique dans un référentiel galiléen

3.1.1 masse

la masse est une grandeur scalaire positif qui caractérise l'inertie d'un corps.

L'inertie est la résistance à toute variation de vitesse.

La masse est caractérisée par les cinq propriétés suivantes :

- 1) Tout corps possède une masse. L'unité du S.I. de la masse est le kilogramme [kg].
- 2) On peut comparer la masse de deux corps, avec une balance à deux plateaux. Soit les masses des deux corps sont égales, soit l'une est plus grande que l'autre (une masse est plus "lourde" que l'autre).
- 3) Si on sépare un corps en plusieurs morceaux, la somme des masses des morceaux égale la masse du corps (la masse est additive).
- 4) La masse d'un corps est indépendante de la température, de la pression, du lieu et ne change pas avec le temps.
- 5) La masse d'un corps constituée d'une matière homogène est proportionnelle au volume du corps. $m = \rho.V$ ou m représente la masse, ρ la masse volumique et V le volume.

3.1.2 Quantité de mouvement

La grandeur

$$\boxed{\vec{p}_{\mathcal{R}}(M) = m \vec{v}_{\mathcal{R}}(M)} \quad (3.1)$$

est appelée **quantité de mouvement** du point M où m est la masse de M et \vec{v} son vecteur vitesse.

Req 1 : m dans cette définition est la masse dite masse inertielle.

Req2 : Dimension de la quantité de mouvement : $[p] = M.L.T^{-1}$; unité : $kg.m.s^{-1}$

670 3.1.3 interactions, forces

En physique, la force est une action mécanique capable de créer une accélération, c'est-à-dire une modification de la vitesse d'un objet ou d'une partie d'un objet, ce qui induit un déplacement ou une déformation de l'objet Une force est une grandeur caractérisée par :

- 675 1) Une intensité qui se mesure avec un dynamomètre. Son unité du S.I. est le Newton [N].
- 2) Une direction.
- 3) Un sens.
- 4) Un point d'application.

680 Les forces découlent toutes des quatre interactions fondamentales suivantes :

1. Interactions gravitationnelles
2. Interactions électromagnétiques
3. Interactions nucléaires fortes
4. Interactions nucléaires faibles

685 Nous possédons une connaissance empirique des interactions gravitationnelle et électromagnétique car leur portée est illimitée ce qui leur permet de se manifester à l'échelle macroscopique. En revanche, les interactions faible et forte ont une portée très faible (de l'ordre de la taille des noyaux atomiques) ce qui confine leurs effets au monde des particules exclusivement. Nous

690 n'avons donc aucune expérience de ces interactions autres que celles que nous renvoient les expérimentations réalisées par les physiciens dans les accélérateurs de particules.

Les deux interactions nucléaires n'interviennent donc que pour des phénomènes propres au noyau de l'atome et n'ont pas d'effet direct à plus grande échelle.

695 3.1.4 système isolé et pseudo-isolé

Un système est dit isolé s'il n'est soumis à aucune force de la part de l'extérieur.

Un système est dit pseudo isolé s'il est soumis à un ensemble de force qui se compensent de la part du milieu extérieur.

700 3.1.5 référentiels galiléens

Il existe des référentiels privilégiés, appelés galiléens, dans lesquels la quantité de mouvement d'une particule isolée est constante (cela correspond soit au repos, soit au mouvement rectiligne uniforme).

le meilleur référentiel galiléen connu est celui de copernic.

705 si on néglige les effets de rotation de la terre sur elle même un référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen.

Req : le Principe d'inertie postule l'existence des référentiels galiléens ; et par là même il en donne la définition, donc le moyen de les reconnaître : si on arrive à trouver un référentiel où un point matériel isolé, pseudo-isolé
710 évolue en ligne droite de manière uniforme ou bien reste immobile, alors \mathcal{R} est un référentiel galiléen noté \mathcal{R}_g .

3.2 Loi de Newton

3.2.1 Énoncé

1^{re} loi ou principe d'inertie Dans un référentiel galiléen, un point matériel
715 isolé à un mouvement rectiligne uniforme (c'est à dire le vecteur vitesse est constant $\vec{v} = \vec{cst}$)

2^e loi ou principe fondamental de la dynamique ou théorème de la résultante

Dans un référentiel galiléen

$$\boxed{\sum \vec{F}^{ext} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g}} \quad (3.2)$$

720 pour un système fermé ; c'est-à-dire pour un système de masse m constante.

$$\boxed{\sum \vec{F}^{ext} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = m\vec{a}_{\mathcal{R}_g}} \quad (3.3)$$

Pour les systèmes ouverts, m dépend du temps : $m = m(t)$, et il faut revenir à la formulation (toujours valable) utilisant la Quantité de Mouvement :

$$\boxed{\sum \vec{F}^{ext} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g}} \quad (3.4)$$

avec

$$\vec{p}_{\mathcal{R}}(t) = m(t)\vec{v}_{\mathcal{R}}(t)$$

$$\vec{p}_{\mathcal{R}}(t+dt) = m(t+dt)\vec{v}_{\mathcal{R}}(t+dt)$$

3^e loi ou principe de l'action et de la réaction Les forces d'interaction
725 réciproque qui s'exercent entre deux points matériels sont opposées et ont pour support la droite joignant ces points.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \vec{F}_{1/2} = \vec{0} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

3.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

Si $\sum \vec{F}^{ext} = 0$ (point isolé ou pseudo-isolé) alors

$$\vec{p} = \vec{cte}$$

ou encore $\vec{v} = \vec{cte}$ et l'on retrouve la 1^{re} loi de Newton.

Pour un système quelconque aussi complexe soit-il nous verrons que la 2^e loi peut s'écrire :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}^{ext}$$

où $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ est la quantité de mouvement totale du système

La conservation de la quantité de mouvement permet alors d'expliquer le recul d'un canon :

730

l'ensemble canon-projectile étant immobile la quantité de mouvement totale est nulle ; la résultante des forces extérieures s'exerçant sur l'ensemble canon-projectile étant nulle, la quantité de mouvement se conserve, elle reste nulle ; donc si le projectile part d'un côté, il faut que le canon parte à l'opposé pour que la quantité de mouvement totale reste nulle.

735

Les avions à réaction et les fusées fonctionnent aussi sur ce principe : du gaz est éjecté d'un côté pour propulser l'avion ou la fusée de l'autre côté.

3.3 Puissance, travail et énergie cinétique

3.3.1 Travail

740

un point matériel de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}_{\mathcal{R}}$ subit une force à cet instant \vec{F} . la trajectoire peut être décomposée en une succession de déplacements élémentaires $d\vec{OM}$. Le travail élémentaire accompli par cette force

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (3.6)$$

Le travail totale entre deux instant t_1 et t_2 soit entre deux points M_1 et M_2

745

$$W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{OM} \quad (3.7)$$

$$W(\sum_i \vec{F}_i) = \sum_i W(\vec{F}_i) \quad (3.8)$$

Si la force est constante

$$W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} \quad (3.9)$$

L'unité du travail est le Joule J

Le travail dépend du référentiel et du chemin suivi

3.3.2 Puissance

750 On appelle puissance (instantanée) d'une force fournie à un point M, à l'instant t, de vitesse $\vec{v}_{\mathcal{R}}$ dans le référentiel \mathcal{R} la grandeur :

$$\mathcal{P}(t) = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (3.10)$$

$$\delta W = \mathcal{P}(t) dt \quad (3.11)$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t) dt \quad (3.12)$$

1. si $\mathcal{P} > 0 \Rightarrow$ moteur

755 2. si $\mathcal{P} < 0 \Rightarrow$ receveur

req : $\blacktriangle \mathcal{P}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \mathcal{P}(\vec{F}_1) + \mathcal{P}(\vec{F}_2)$

$\blacktriangle \mathcal{P} = 0$ si $\vec{F} \perp \vec{v}$

\blacktriangle elle dépend du référentiel

\blacktriangle l'unité est le watt W

760 3.4 Théorème de la puissance cinétique

3.4.1 Energie cinétique

On appelle énergie cinétique d'un point matériel de masse m animé de la vitesse $\vec{v}_{\mathcal{R}}$ par rapport à un référentiel \mathcal{R} la quantité

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{\mathcal{R}}^2 \quad (3.13)$$

3.4.2 Théorème de la puissance

En dérivant l'expression de l'énergie cinétique on a

$$\frac{dE_c}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\text{toutes les forces})$$

765 Dans un référentiel galiléen, la puissance de la résultante des forces exercées sur M est égale à la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique.

3.4.3 Théorème de l'énergie cinétique

Toujours d'après ce qui précède, on a

$$dE_c = \delta W \quad (3.14)$$

qui constitue la forme différentielle du théorème de l'énergie cinétique. En intégrant entre deux instants t_1 et t_2

$$\Delta E_c = E_c(t_2) - E_c(t_1) = W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t) dt = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{OM} \quad (3.15)$$

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique de M entre deux instants t_1 et t_2 est égale au travail de la résultante des forces qui s'exercent sur M entre ces deux instants.

Attention : en général $W \neq W(t_2) - W(t_1)$.

3.4.4 L'énergie cinétique se conserve-t-elle ?

Si $\sum \vec{F}^{ext} = 0$ (point isolé ou pseudo-isolé) alors $\mathcal{P} = 0$ et $E_c = cte$.

Contrairement à la conservation de la quantité de mouvement qui reste valable pour les systèmes, la conservation de l'énergie cinétique n'est valable que pour le point ; celle-ci est par

exemple mise en défaut sur l'exemple du système canon-projectile.

Nous verrons que pour un système, le théorème de la puissance cinétique s'écrit

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext}$$

où E_c est l'énergie cinétique totale du système, \mathcal{P}_{ext} la puissance des forces extérieures qui s'exercent sur le système et \mathcal{P}_{int} la puissance des forces intérieures qui s'exercent sur le système. C'est justement la présence de \mathcal{P}_{int} qui est à l'origine de la non conservation de l'énergie cinétique.

3.4.5 Exemple d'utilisation

une masse m est suspendue à un fil inextensible de longueur l déterminer l'équation du mouvement en utilisant le théorème de la puissance cinétique

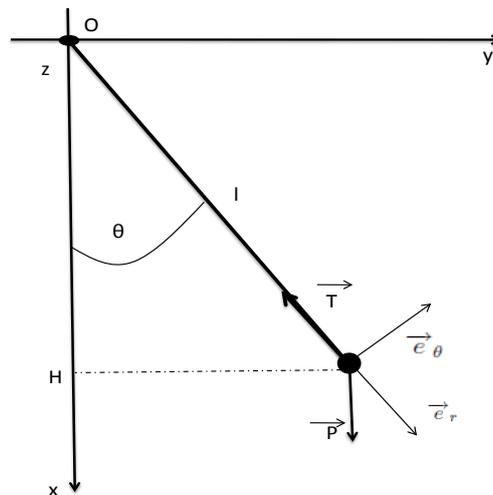


FIGURE 3.1 – pendule

solution

dans le repère $\mathcal{R}_g(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ les expressions des forces sont

$$\vec{P} = mg \vec{e}_x$$

$$\vec{T} = -T \vec{e}_r$$

l'expression de la vitesse est

$$\vec{v} = l\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

les puissances des forces sont

$$\mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\mathcal{P}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{v} = -mgl\dot{\theta} \sin\theta$$

l'énergie cinétique vaut

$$E_c = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$$

Le théorème de la puissance cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{T})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 \right) = -mgl\dot{\theta} \sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

la linéarisation $\sin\theta \simeq \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

3.5 Forces

3.5.1 Force de pesanteur - Chute libre

Soit un projectile de masse m lancé avec une vitesse initiale \vec{v}_0 et soumis
795 uniquement à son poids.

Système étudié : projectile de masse m assimilable à un point.

Référentiel : référentiel d'observation (terrestre) supposé galiléen.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m \vec{g}$

800 **PFD :** $m \vec{a} = m \vec{g}$

Projection : il s'agit de choisir le paramétrage le plus approprié au problème ;
les coordonnées cartésiennes avec un axe colinéaire à \vec{g} sont, pour la
chute libre, les plus appropriées.

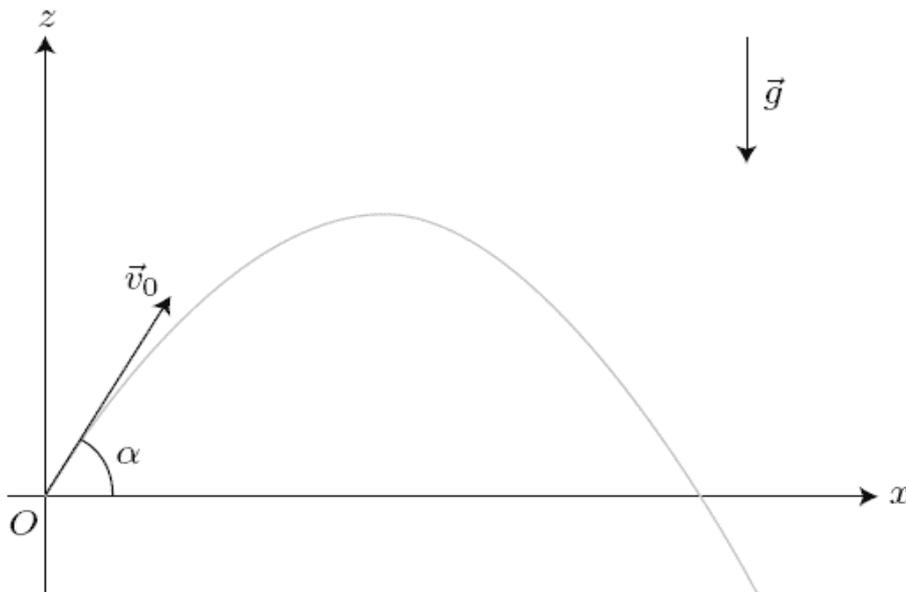


FIGURE 3.2 – chute libre

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = 0 \\ v_z = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

Pour trouver l'équation de la trajectoire, il suffit d'éliminer t :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x$$

Pour trouver la portée, il faut résoudre $z = 0$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \text{ maximum pour } \alpha = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Pour trouver la flèche, il faut résoudre $v_z = 0$:

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad \begin{cases} x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \\ x = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \end{cases}$$

Le point $(x_C, 0, z_C)$ est atteint par le projectile pour une vitesse v_0 donnée si x_C et z_C vérifient

$$z_C = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_C^2 + \tan \alpha x_C$$

ou encore, si α est solution de l'équation

$$-\frac{g x_C^2}{2v_0^2} \tan^2 \alpha + x_C \tan \alpha - \frac{g x_C^2}{2v_0^2} - z_C = 0$$

c'est-à-dire si

$$\Delta = x_C^2 - 4 \frac{g x_C^2}{2v_0^2} \left(\frac{g x_C^2}{2v_0^2} + z_C \right) \geq 0$$

Les points accessibles du plan (Oxz) sont donc situés sous la **parabole de sûreté** d'équation

$$z = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

805 3.5.2 Force de frottement dans un fluide

3.5.2.1 Chute libre avec frottement « en v »

Il faut rajouter la force $-k \vec{v}$

$$\begin{cases} a_x = -\frac{k}{m} v_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_z = -g - \frac{k}{m} v_z = \frac{dv_z}{dt} \end{cases}$$

On pose $\lambda = \frac{k}{m}$ et on intègre (pour v_z changement de variable $u = g + \lambda v_z$)

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{v_x} = -\lambda dt & \left\{ \begin{array}{l} \ln \left(\frac{v_x}{v_0 \cos \alpha} \right) = -\lambda(t-0) \\ \ln \left(\frac{g + \lambda v_z}{g + \lambda v_0 \sin \alpha} \right) = -\lambda(t-0) \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = (v_0 \cos \alpha) \exp(-\lambda t) \\ v_z = \left(\frac{g}{\lambda} + v_0 \sin \alpha\right) \exp(-\lambda t) - \frac{g}{\lambda} \end{cases}$$

Pour v_z on aurait pu résoudre une équation différentielle avec second membre

$$\frac{dv_z}{dt} + \lambda v_z = -g$$

dont la solution est la somme solution générale de l'équation homogène sans second membre + solution particulière de l'équation avec second membre (ne marche que pour les équations différentielles linéaires)

$$v_z = C \exp(-\lambda t) - \frac{g}{\lambda}$$

On utilise les conditions initiales (sur la somme solution générale de l'équation homogène sans second membre + solution particulière de l'équation avec second membre)

$$v_z(t=0) = C - \frac{g}{\lambda} = v_0 \sin \alpha$$

et on retrouve le même résultat.

On intègre une 2^e fois pour x et z

$$\begin{cases} x = -\frac{v_0 \cos \alpha}{\lambda} \exp(-\lambda t) + A \\ z = -\frac{\left(\frac{g}{\lambda} + v_0 \sin \alpha\right)}{\lambda} \exp(-\lambda t) - \frac{g}{\lambda} t + B \end{cases}$$

Avec les conditions initiales $x = 0$ et $z = 0$, on a finalement

$$\begin{cases} x = \frac{v_0 \cos \alpha}{\lambda} (1 - \exp(-\lambda t)) \\ z = \frac{\left(\frac{g}{\lambda} + v_0 \sin \alpha\right)}{\lambda} (1 - \exp(-\lambda t)) - \frac{g}{\lambda} t \end{cases}$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$

$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{v_0 \cos \alpha}{\lambda} & (\text{assymptote}) \\ z \rightarrow -\infty \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_x \rightarrow 0 \\ v_z \rightarrow -\frac{g}{\lambda} = -\frac{mg}{k} = v_{lim} \end{cases}$$

Pour que la vitesse limite soit atteinte, il ne faut pas que le projectile atteigne trop vite le sol.

La vitesse limite est en fait la solution particulière de l'équation

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + k \vec{v} = m \vec{g}$$

En effet lorsque la vitesse limite est atteinte $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ et

$$\vec{v}_{lim} = \frac{m\vec{g}}{k}$$

3.5.2.2 Chute libre avec frottement « en v^2 »

$$m\vec{a} = m\vec{g} - kv\vec{v}$$

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = -k\sqrt{v_x^2 + v_z^2}v_x \\ m \frac{dv_z}{dt} = -mg - k\sqrt{v_x^2 + v_z^2}v_z \end{cases}$$

Ce système d'équations différentielles couplées n'admet pas de solution analytique (résolution numérique) sauf dans le cas particulier du mouvement vertical :

$$m \frac{dv_z}{dt} = -mg - k\sqrt{v_z^2}v_z$$

3.5.3 Force de rappel élastique

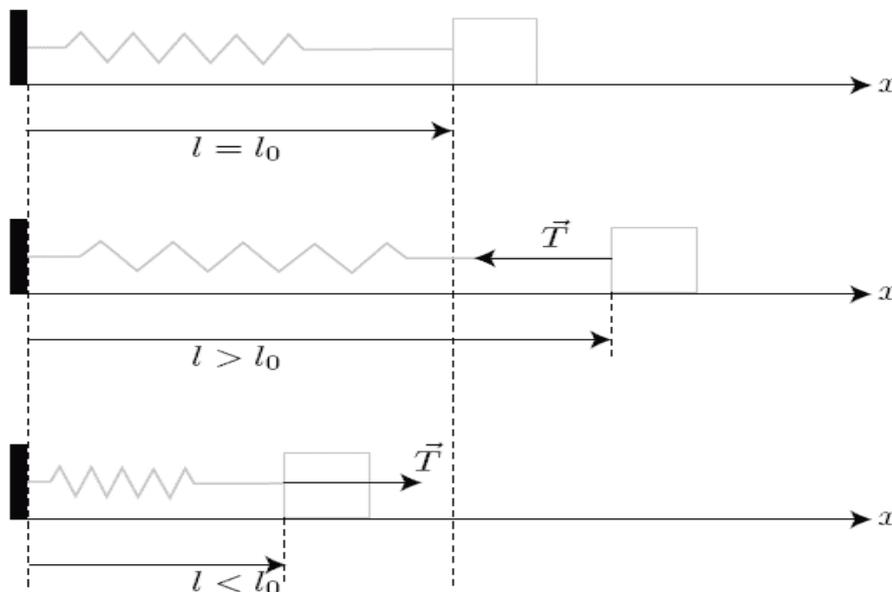


FIGURE 3.3 – schémas d'un ressort

La force exercée par le ressort est proportionnel à l'allongement $x = l - l_0$:

$$\|T\| = k|l - l_0|$$

k est la constante de raideur du ressort ($N.m^{-1}$) et l_0 la longueur à vide.

Si l'allongement est nul, alors $T = 0$.

Si l'allongement est positif (ressort étiré) alors la tension est orientée selon $-\vec{e}_x$.

Si l'allongement est négatif (ressort comprimé) alors la tension est orientée selon \vec{e}_x .

Dans tous les cas, elle peut s'exprimer

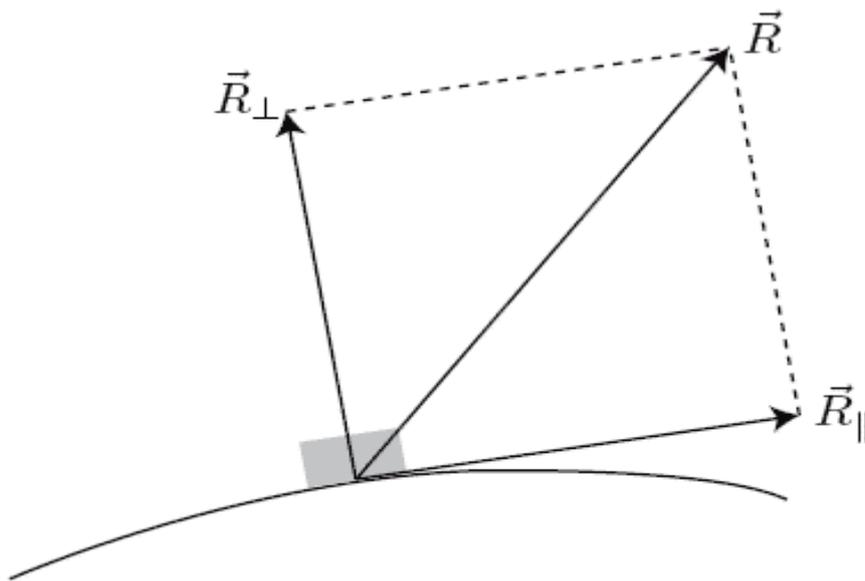
$$\vec{T} = -kx\vec{e}_x$$

810 3.5.4 Force de liaison

La réaction du support est la force sans laquelle le système étudié « s'enfoncerait dans le support » !

Elle est normale au support lorsqu'il n'y a pas de frottement.

Lorsqu'il y a des frottements, il existe une composante tangentielle.



815

FIGURE 3.4 – réaction d'un support

3.6 Théorème du moment cinétique

Soit, dans un référentiel \mathcal{R} , un point matériel M de masse m , de vecteur vitesse \vec{v} et \vec{F} la résultante des forces appliquées en M.

Soit O un autre point de \mathcal{R} .

820 3.6.1 moment cinétique

La grandeur

$$\boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}} \quad (3.16)$$

est appelée **moment cinétique en O** du point M.

dans le cas où $\vec{p} = m \vec{v}$ on a

$$\boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}} \quad (3.17)$$

825 3.6.2 moment d'une force

La grandeur

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}} \quad (3.18)$$

est appelée **moment en O** de la résultante des forces \mathbf{F} appliquée au point M.

3.6.3 Théorème du moment cinétique en un point fixe

Soit O un point **fixe** d'un référentiel **galiléen** \mathcal{R} :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m \vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} + \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{a}$$

830 la 2^e loi de Newton donne :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F} \quad (3.19)$$

d'où le théorème du moment cinétique :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O} \quad (3.20)$$

Dans un référentiel galiléen, la dérivée du moment cinétique en un point fixe O par rapport au temps est égale au moment en O de la résultante des forces qui s'appliquent au point M.

remarque : dans le cas d'un point matériel

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{M}}_O(\sum \vec{F}^{ext})}$$

ce passage n'est pas autorisée dans le cas d'un système de points matériels

835 3.6.4 Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe

Soit Δ un axe passant par O, de vecteur directeur \vec{u} .

3.6.4.1 Moment d'une force par rapport à un axe

La grandeur

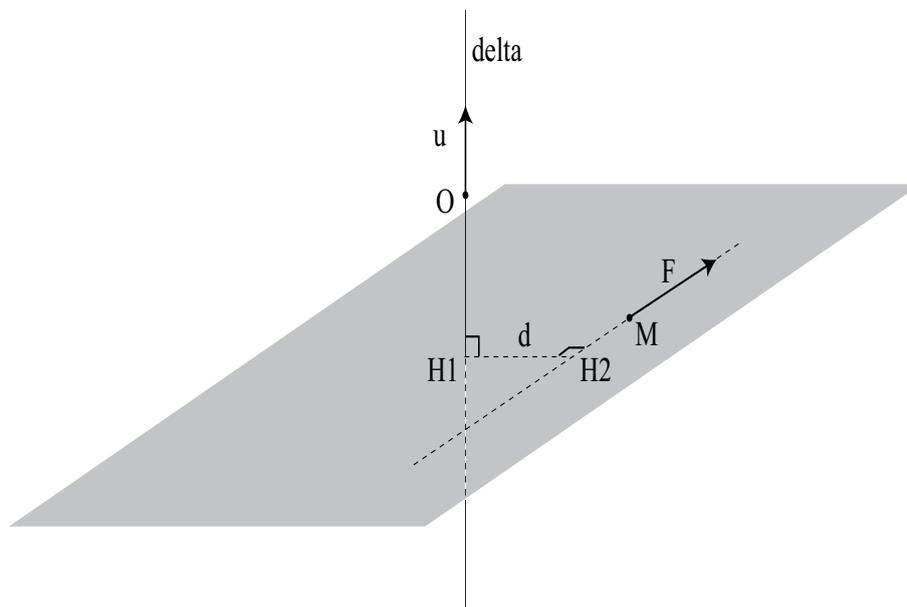
$$\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{u}$$

est appelée moment par rapport à Δ de la résultante des forces \vec{F} appliquée au point M.

840

Si \vec{F} est parallèle à Δ alors $\mathcal{M}_\Delta = (\vec{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} = 0$

Si \vec{F} est perpendiculaire à Δ alors $\mathcal{M}_\Delta = \left[(\vec{OH}_1 + \vec{H}_1\vec{H}_2 + \vec{H}_2\vec{M}) \wedge \vec{F} \right] \cdot \vec{u} = (\vec{H}_1\vec{H}_2 \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} = \pm H_1 H_2 \cdot F = \pm F d$



845

FIGURE 3.5 – moment d'une force par rapport à un axe

3.6.4.2 Moment cinétique par rapport à un axe

La grandeur

$$L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u} \tag{3.21}$$

est appelée moment cinétique par rapport à Δ du point M.

850 **3.6.4.3 Théorème du moment cinétique par rapport à un axe**

Soit Δ un axe **fixe** passant par O, de vecteur directeur \vec{u} . En projetant le théorème du moment cinétique suivant \vec{u} :

$$\boxed{\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\Delta}} \quad (3.22)$$

Dans un référentiel galiléen, la dérivée du moment cinétique par rapport à Δ par rapport au temps est égale au moment par rapport à Δ de la résultante des forces qui s'appliquent au point M.

3.6.4.4 conservation du moment cinétique

à partir de l'expression du théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}^{ext})$$

855 le moment cinétique se conserve dans les cas suivants :

1. système isolé ou pseudo-isolé
2. système soumis à une force centrale $\vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

3.6.4.5 exemple

860 une masse m est suspendue à un fil inextensible de longueur l déterminer l'équation du mouvement en utilisant le théorème de la puissance cinétique

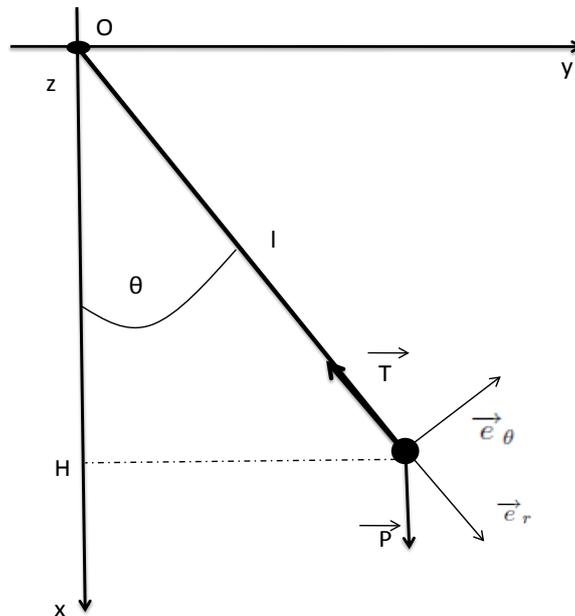


FIGURE 3.6 – pendule

solution

dans le repère $\mathcal{R}_g(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ les expressions des forces sont

$$\vec{P} = mg \vec{e}_x$$

$$\vec{T} = -T \vec{e}_r$$

l'expression de la vitesse est

$$\vec{v} = l\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

les moments des forces sont

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = -mgl \sin\theta \vec{e}_z$$

le moment cinétique vaut

$$\vec{L}_O = ml^2\dot{\theta} \vec{e}_z$$

Le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{P})$$

la linéarisation $\sin\theta \simeq \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

TD de Mécanique

Moment cinétique (1) : Atome de Thomson

→ Cf Cours M6

En 1904, le physicien anglais Joseph John THOMSON (1856-1940) proposa de présenter l'atome d'hydrogène par un nuage sphérique de centre O , de rayon R et de charge $+e$ uniformément répartie. À l'intérieur de cette sphère, fixe dans le référentiel du laboratoire, se déplace librement un électron de masse m ponctuelle et de charge $-e$. Le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_g(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est assimilé un référentiel galiléen.



En l'absence de toute action extérieure, l'électron M est soumis à une unique force d'origine électrostatique qui tend à attirer vers le point

$$O : \vec{F} = -k\vec{OM} \quad \text{avec} \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^3}.$$

Cette force se comporte comme une force de rappel élastique due à un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle, dont l'autre extrémité serait fixée en O .

À l'instant $t = 0$, une perturbation écarte légèrement l'électron de sa position d'équilibre avec les conditions initiales : $\vec{OM}(t = 0) = \vec{OM}_0 = r_0\vec{e}_x$ et $\vec{v}(t = 0) = \vec{v}_0 = v_0\vec{e}_y$.

Données :

$$m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}; \quad e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}; \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ uSI}$$

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

Equation d'une ellipse en coordonnées cartésiennes avec origine en O , d'axes de symétrie Ox et

$$Oy : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1) Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique en O de l'électron et déterminer sa valeur en fonction de r_0 , v_0 et m .

En déduire que son mouvement reste confiné dans le plan (Oxy) .

Rq : La position de M est donc repérée dans les bases (\vec{e}_x, \vec{e}_y) et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ avec comme vecteurs positions respectifs : $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ et $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ (pour $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R$).

2) Exprimer la pulsation ω_0 du mouvement de M en fonction de ϵ_0 , e , m et R . Calculer la valeur de R pour laquelle la pulsation ω_0 correspond à la fréquence ν_0 d'une des raies du spectre de LYMAN de l'atome d'hydrogène ($\lambda_0 = 121,8 \text{ nm}$).

3) Déterminer les expressions de $x(t)$ et $y(t)$. Montrer que la trajectoire du point M est une ellipse (ellipse de HOOKE) dont vous préciserez les longueurs a et b des demi axes.

4) À quelles condition cette trajectoire est-elle circulaire? Que se passe-t-il si $v_0 = 0$?

5) L'électron accéléré perd de l'énergie par rayonnement. Pour tenir compte de ce phénomène, une force supplémentaire de freinage est introduite. Elle a la forme d'une force de frottement de type visqueux : $\vec{f} = -h\vec{v}$, où h , coefficient de freinage, est positif.

Quelle est l'évolution du moment cinétique en O de l'électron au cours du temps?

Dire qualitativement ce que sera le mouvement de l'électron pour de faibles amortissements.

Commenter quant à la stabilité de l'atome.

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE MECANIQUE D'UNE FUSEE ET DE SON SATELLITE

L'objectif d'une fusée ou d'un lanceur est de transporter une masse donnée, généralement un satellite à une altitude fixée (orbite de parking ou géostationnaire).

Pour atteindre de tels objectifs, il faut que le lanceur soit capable de développer une force importante pendant plusieurs minutes. A titre d'exemple, Ariane 5 développe, au décollage, une force d'environ 10^7 N. Dans l'exemple simple que nous allons étudier, cette force est fournie par deux propulseurs (figure 1).

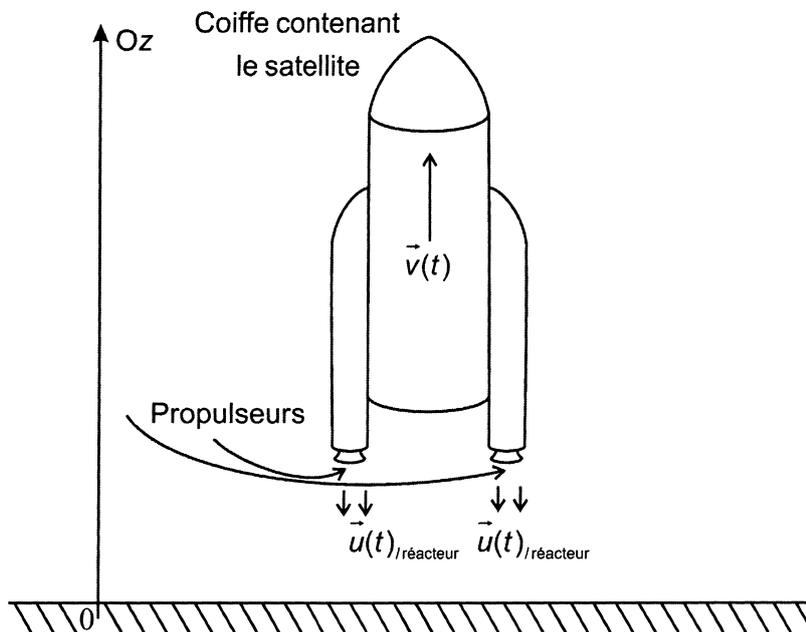


Figure 1

A / DECOLLAGE DE LA FUSEE

Une fusée sans carburant et contenant le satellite qu'elle a pour mission de mettre en orbite possède une masse m_{f0} . La fusée contient, au moment du décollage, une masse de gaz notée m_{gaz0} . Les gaz sont éjectés avec une vitesse verticale par rapport au référentiel terrestre (supposé galiléen) et une vitesse relative \vec{u} par rapport à la fusée. Le débit massique q_m est constant.

L'influence de l'atmosphère est supposée négligeable (absence de frottement), l'accélération de la pesanteur g est considérée comme uniforme.

A1. Le système d'étude est la fusée et tout ce qu'elle contient à l'instant t . En raisonnant sur ce système fermé, effectuer un bilan de quantité de mouvement et en déduire l'expression de l'accélération de la fusée à l'instant t (figure 2). Établir l'expression de la force, due à l'éjection des gaz, subie par la fusée.

A2. Quelle doit être la valeur minimale de cette force pour que la fusée décolle ? Calculer l'accélération à l'instant initial. Est-elle supportable pour un être humain ?

Données : la masse totale de la fusée ($m_0 = m_{r0} + m_{\text{gaz0}}$) vaut 460 tonnes ; l'accélération de la pesanteur au sol est $g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$; le débit total de gaz s'élève à $1,8.10^3 \text{ kg.s}^{-1}$ et la vitesse d'éjection des gaz, par réacteur est évaluée à $2,1.10^3 \text{ m.s}^{-1}$.

- A3.** Établir l'expression approchée de la vitesse $v(t)$ de la fusée au cours du temps pour un décollage vertical. Calculer la vitesse de la fusée au bout de 15 s.

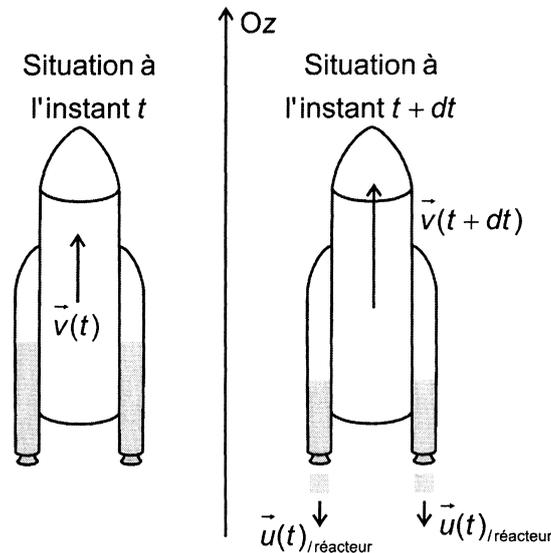


Figure 2

B / ORBITES CIRCULAIRES

La fusée a mis sur orbite le satellite qu'elle transportait et celui-ci décrit maintenant sa première orbite basse circulaire.

- B1.** Déterminer l'expression de la vitesse V_{cT} (dans le référentiel géocentrique) que doit posséder le satellite, considéré comme un point matériel, pour qu'il décrive à l'altitude de 200 kilomètres un cercle autour de la Terre.

Données : la masse de la Terre s'élève à $5,97.10^{24} \text{ kg}$, la constante universelle de la gravitation vaut $6,67.10^{-11} \text{ m}^3.\text{s}^{-2}.\text{kg}^{-1}$; le rayon de la Terre est $R_T = 6400 \text{ km}$.

- B2.** Exprimer puis calculer la durée τ d'une révolution du satellite sur une telle orbite.
- B3.** Qu'est-ce qu'un satellite géostationnaire ?
- B4.** Établir les caractéristiques de la trajectoire d'un tel satellite :
- quelle est la nature de la trajectoire ?
 - dans quel plan s'effectue-t-elle ?
 - la norme de la vitesse est-elle constante ?
 - quelle est l'altitude du satellite ?

Chapitre 4

Énergie potentielle - Énergie mécanique - Problèmes à un degré de liberté

Sommaire

870	4.1 Travail d'une force - Exemples	48
	4.1.1 Force de pesanteur	48
	4.1.2 Force de rappel élastique	48
	4.1.3 Force de frottement	48
875	4.1.4 Exercice	48
	4.2 Énergie potentielle ou force dérivant d'une énergie potentielle . .	49
	4.2.1 Force conservative...	49
	4.3 Énergie mécanique	50
	4.3.1 Définition	50
880	4.3.2 Conservation	50
	4.4 Problème à un degré de liberté	51
	4.4.1 Positions d'équilibre	51
	4.4.2 Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable .	54
885	4.4.3 Portrait de phase	55

Les principes fondamentaux de la dynamique où lois de Newton permettent d'établir les équations différentielles du mouvement, leur résolution fournit l'expression des variables en fonction du temps et ainsi une connaissance complète des mouvements futurs. Toutefois, l'intégration des équations n'est pas toujours possible et dans ce cas, l'utilisation de constantes du mouvement permet tout de même une description partielle de l'évolution du système. Parmi ces constantes, il peut y avoir la quantité de mouvement, le moment cinétique et l'énergie mécanique qui est au coeur de cette leçon. Les raisonnements énergétiques permettront l'étude plus ou moins complète du système, mais en aucun cas ils n'apporteront plus d'information

que le principe fondamental. Les théorèmes établis dans ce chapitre d'écoulent en effet des principes fondamentaux.

900 4.1 Travail d'une force - Exemples

4.1.1 Force de pesanteur

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -mg dz$$

$$W_{12} = -mg(z_2 - z_1) = mgz_1 - mgz_2 = E_{p1} - E_{p2}$$

avec

$$E_p(z) = mgz + cte$$

Attention à l'orientation des axes(axe z ascendant \vec{g} descendant)

4.1.2 Force de rappel élastique

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -kx dx$$

$$W_{12} = -k\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right) = E_{p1} - E_{p2}$$

avec

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + cte$$

4.1.3 Force de frottement

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -kv_x dx$$

905 W_{12} ne peut pas se mettre sous la forme $E_{p1} - E_{p2}$.

4.1.4 Exercice

Soit dans le plan Oxy un point matériel soumis à la force :

$$\vec{F} = (y^2 - x^2)\vec{e}_x + 4xy\vec{e}_y$$

Calculer le travail de $O(0,0)$ à $A(1,1)$

– suivant la droite OA .

– suivant Ox de $x = 0$ à $x = 1$ puis suivant Oy de $y = 0$ à $y = 1$.

910 – suivant Oy de $y = 0$ à $y = 1$ puis suivant Ox de $x = 0$ à $x = 1$.

W dépend du chemin suivi.

4.2 Énergie potentielle ou force dérivant d'une énergie potentielle

4.2.1 Force conservative...

Une force est *conservative* (ou encore dérive d'une énergie potentielle) s'il existe une fonction $E_p(x, y, z, (t))$ appelée *énergie potentielle* telle que $\delta W = -dE_p$.

915

L'énergie potentielle est définie à une constante près.

Le travail ne dépend plus du chemin suivi

$$W = \int \delta W = - \int dE_p = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

en particulier $\oint \delta W = 0$.

$\int \delta W = \int \vec{F} \cdot d\vec{OM}$ est aussi appelée circulation de \vec{F} .

$$dE_p = -\delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{OM} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$E_p(x, y, z) \Rightarrow dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$$

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

920 que l'on peut écrire de manière plus condensée

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)} \quad (4.1)$$

et

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \Leftrightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{OM} = 0} \quad (4.2)$$

Exemple : le poids est opposé au gradient de mgz .

Dans le plan Oxy , \vec{F} dérive d'une énergie potentielle si $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$.

925

Exemple : $\vec{F} = (y^2 - x^2)\vec{e}_x + 4xy\vec{e}_y$ ne dérive pas d'une énergie potentielle.

4.3 Énergie mécanique

4.3.1 Définition

$$dE_c = (\vec{F}^c + \vec{F}^{nc}) \cdot d\vec{OM}$$

$$dE_c = \delta W^c + \delta W^{nc} = -dE_p + \delta W^{nc}$$

$$d(E_c + E_p) = \delta W^{nc}$$

$E_c + E_p = E_m$ appelé *énergie mécanique*

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives :

$$\Delta E_m = W^{nc}$$

ou encore dans un référentiel galiléen, la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est égale à la puissance des forces non conservatives :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}^{nc}$$

4.3.2 Conservation

Si la puissance dissipée par les forces non conservatives est nulle à tout instant alors $E_m = cte$ (équation appelée *intégrale première de l'énergie*).

Exemple du ressort : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = cte$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

Exemple du pendule : $E_m = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl(1 - \cos\theta) = cte$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl \sin\theta\dot{\theta} = 0$$

4.4 Problème à un degré de liberté

4.4.1 Positions d'équilibre

935 4.4.1.1 Équilibre stable - Exemple du ressort

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

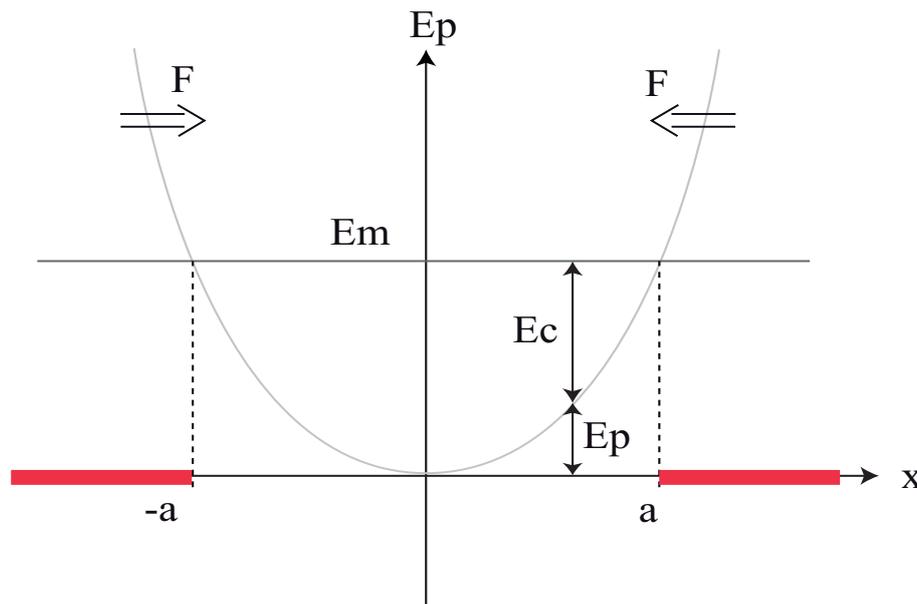


FIGURE 4.1 – équilibre stable

Comme $E_m = cte = E_c + E_p$ et $E_c \geq 0$, E_m est la plus grande valeur que puisse prendre E_p . Le mouvement est donc limité par $x = -a$ et $x = +a$.

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} = -kx$$

Entre 0 et a , $F_x \leq 0$ ramène le système en $x = 0$.

Entre 0 et $-a$, $F_x \geq 0$ ramène aussi le système en $x = 0$.

$x = 0$, le minimum d'énergie potentielle, correspond à une position d'équilibre stable pour le ressort.

940 4.4.1.2 Équilibre instable - Exemple du pendule

$$E_p = mgl(1 - \cos\theta)$$

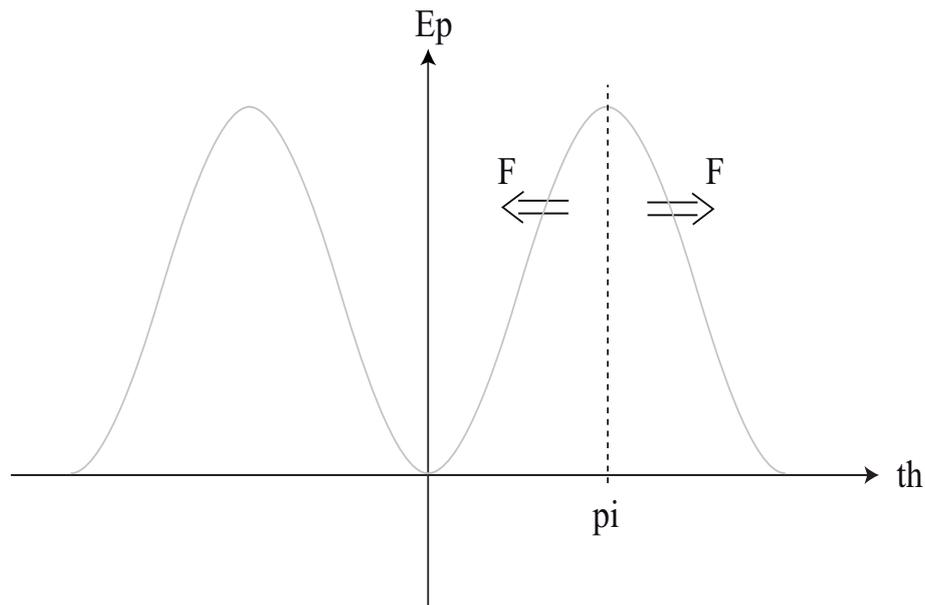


FIGURE 4.2 – équilibre instable

Comme pour le ressort, $\theta = 0$, le minimum d'énergie potentielle, correspond à une position d'équilibre stable pour le pendule.

Regardons maintenant ce qui se passe autour du maximum d'énergie potentielle $\theta = \pi$:

$$\delta W = F_r dr + F_\theta r d\theta = F_\theta l d\theta = -dE_p$$

$$F_\theta = -\frac{1}{l} \frac{dE_p}{d\theta} = -mg \sin \theta$$

Entre 0 et π , $F_\theta \leq 0$ éloigne le système de $\theta = \pi$.

Entre π et 2π , $F_\theta \geq 0$ éloigne aussi le système de $\theta = \pi$.

$\theta = \pi$, le maximum d'énergie potentielle, correspond à une position d'équilibre instable pour le pendule.

4.4.1.3 Généralisation

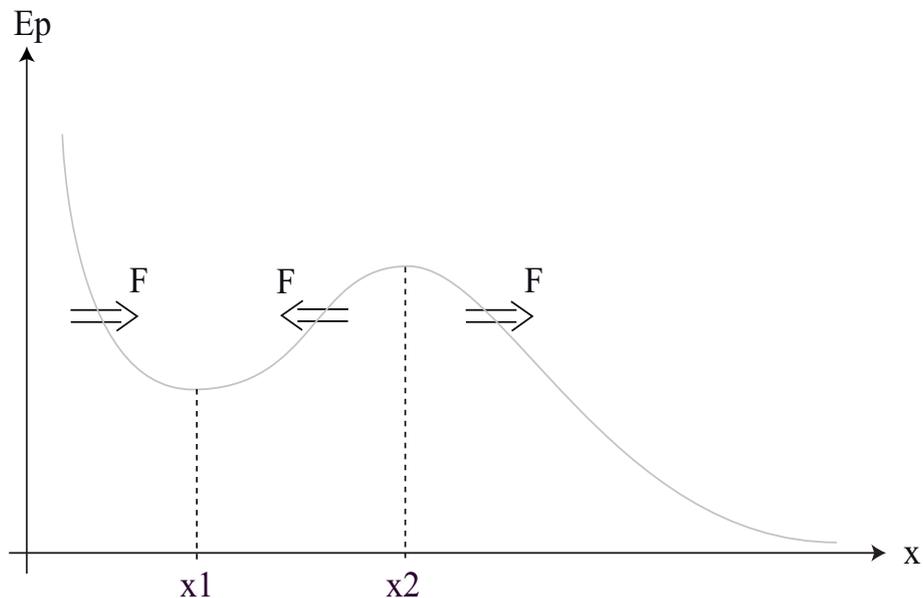


FIGURE 4.3 – cas général

Un minimum d'énergie potentielle x_1 correspond à une position d'**équilibre stable** :

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_1} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_1} > 0$$

Un maximum d'énergie potentielle x_2 correspond à une position d'**équilibre instable** :

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_2} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_2} < 0$$

Si $E_m < E_p(x_1)$, le système peut s'échapper vers les $x > 0$, on a un **état de diffusion**.

⁹⁵⁰ Si $E_p(x_1) < E_m < E_p(x_2)$, le système est confiné entre x_a et x_b , on a un **état lié**.

Si $E_m > E_p(x_2)$, on a encore un état de diffusion.

(Faire 3 schémas différents)

4.4.2 Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable

955

4.4.2.1 Exemple du pendule

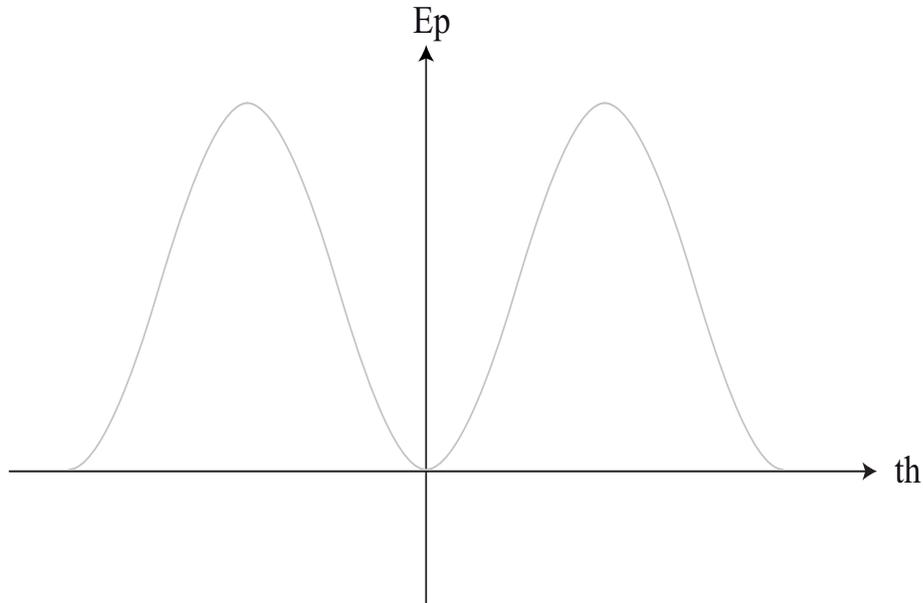


FIGURE 4.4 – énergie potentielle d'un pendule

$$E_p = mgl(1 - \cos \theta)$$

Au voisinage de $\theta = 0$, $\cos \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$E_p \simeq mgl \frac{\theta^2}{2}$$

$$E_m = cte = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow 0 = ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Ce que l'on retrouve aussi en faisant $\sin \theta \simeq \theta$.

4.4.2.2 Généralisation

Une fonction $f(x)$ peut être développée autour de x_0 selon

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

(Développement en série de Taylor)

Exemple : $f(x) = \cos x$ autour de $x = 0$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

960 Développons $E_p(x)$ autour d'une position d'équilibre $x = x_e$

$$\begin{aligned} E_p(x) &= E_p(x_e) + (x - x_e) \left(\frac{dE_p}{dx} \right)_{x_e} + \frac{(x - x_e)^2}{2} \left(\frac{d^2E_p}{dx^2} \right)_{x_e} + \dots \\ &= E_p(x_e) + 0 + \frac{1}{2} k (x - x_e)^2 + \dots \end{aligned}$$

en posant $k = \left(\frac{d^2E_p}{dx^2} \right)_{x_e}$

L'énergie mécanique se conservant

$$E_m = cte = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x_e) + \frac{1}{2} k (x - x_e)^2 \Rightarrow m \ddot{x} + k(x - x_e) = 0$$

ou encore en posant $X = x - x_e$

$$m \ddot{X} + kX = 0$$

Si $k > 0$, on retrouve l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, le système oscille autour de la position d'équilibre qui est donc stable.

Si $k < 0$, $X = A \cosh(\omega t + \varphi)$, le système s'éloigne de la position d'équilibre qui est donc instable.

965 4.4.3 Portrait de phase

4.4.3.1 Déterminisme mécanique - État d'un système

Pour un problème à un degré de liberté x , la 2^e loi de Newton donne

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F \left(x, \frac{dx}{dt}, t \right)$$

équation différentielle du 2^e ordre équivalent à

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ m \frac{dv}{dt} = F(x, v, t) \end{cases}$$

système de deux équations différentielles d'ordre un.

Ce système admet une solution unique si $x(0)$ et $v(0)$ sont donnés.

Les systèmes mécaniques ont une évolution unique pour des conditions initiales déterminées (principe du déterminisme mécanique).

970 **L'état d'un système** à un degré de liberté est représenté à tout instant, par un point $P(t)$ de coordonnées (x, v) dans un plan appelé **plan de phase**.

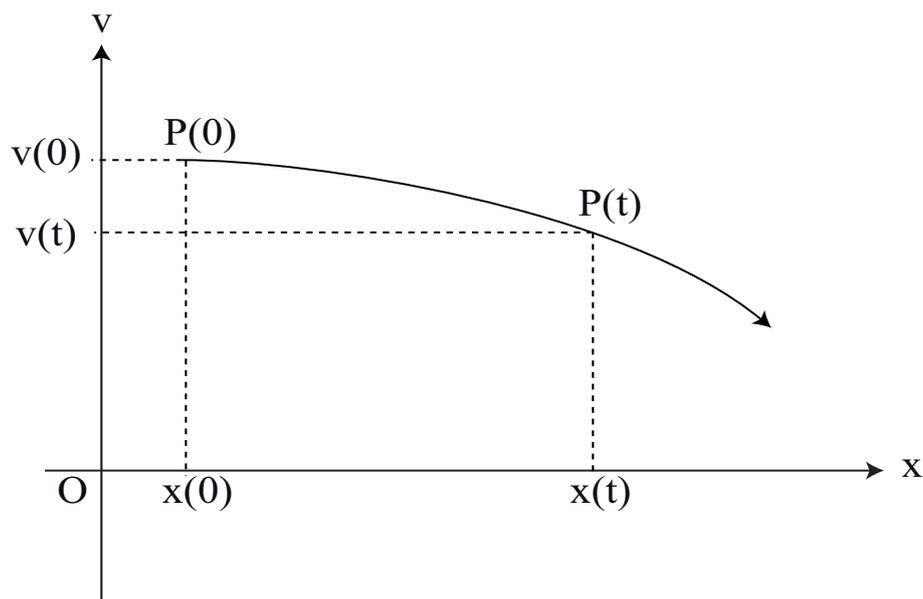


FIGURE 4.5 – plan de phase

Quand le temps s'écoule, le point $P(t)$ décrit une courbe appelée **trajectoire de phase**. Toute trajectoire de phase débute en $P(0)$ de coordonnées $(x(0), v(0))$.

975 **deux trajectoires de phases ne se coupent pas dans le plan de phase**

Le **portrait de phase** d'un système est l'ensemble des trajectoires de phase du système obtenues en considérant l'ensemble des conditions initiales réalisables.

980 4.4.3.2 Lecture et interprétation

soit le système du pendule simple

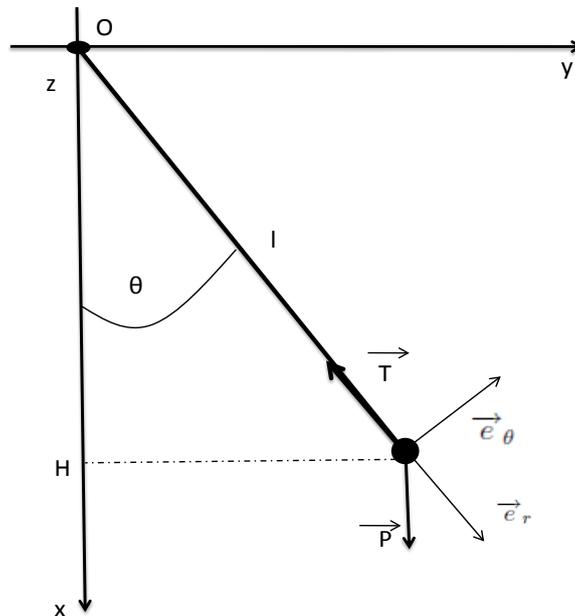


FIGURE 4.6 – pendule simple

son portrait de phase est le suivant

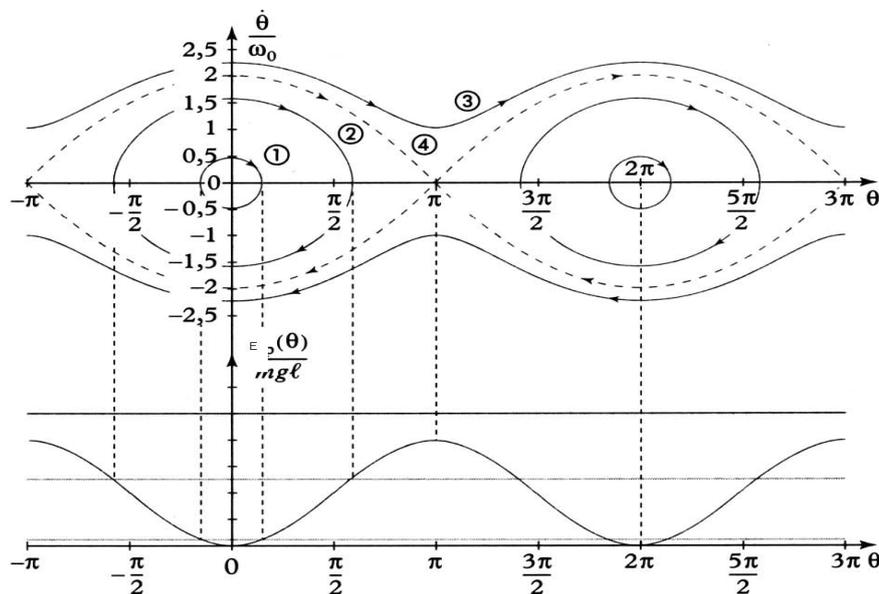


FIGURE 4.7 – portrait de phase

remarquons que si $\dot{\theta} > 0$ alors $\theta > 0$ et si $\dot{\theta} < 0$ alors $\theta < 0$ les trajectoires de phases sont toutes parcourues dans le même sens
l'énergie mécanique s'écrit

$$E = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

avec $E_p = mgl(1 - \cos\theta)$ l'énergie potentielle, sa valeur maximale vaut $2mgl$

Suivant les conditions initiales, le mouvement peut-être :

1. harmonique sinusoidale si $0 < E \ll 2mgl$ alors $\cos\theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ on a une ellipse

$$\frac{\dot{\theta}^2}{l} + \frac{\theta^2}{l} = 1$$

2. périodique mais non harmonique si $0 < E < 2mgl$ on obtient la trajectoire 2 qui n'est pas une ellipse

3. si $E = 2mgl \implies \theta = \pi$ c'est la séparatrice qui relie les points d'équilibres instables

4. révolutif si $E > 2mgl$ alors $\dot{\theta}$ conserve un signe constant

5. si $E \gg 2mgl$ alors $E_c \gg E_p$ on a un mouvement à vitesse angulaire constante

$$\frac{1}{2}mgl\frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2} = E$$

REQ : les trajectoires de phases tournent autour des points d'équilibres stables

les positions d'équilibres stables ou non stables se trouvent sur l'axe horizontal.

En présence de frottement l'énergie totale E diminue les trajectoires de phases se terminent en des points d'équilibres stables (points attracteurs).

Notons la sensibilité du pendule aux conditions initiales.

Retenons :

Si la trajectoire est fermée, le mouvement est périodique ;
 si la trajectoire est en plus elliptique, le mouvement est sinusoidal ; une bosse (vitesse maximale) sur la trajectoire de phase correspond à une position d'équilibre stable ;
 un creux (vitesse minimale) correspond à une position d'équilibre instable.

Chapitre 5

Dynamique dans un référentiel non galiléen

Sommaire

5.1 Principe de relativité galiléenne	59
5.1.1 Référentiels galiléens	59
5.1.2 Relativité galiléenne	60
5.2 Lois de la dynamique en référentiel non galiléen	60
5.2.1 RFD	61
5.2.2 Théorème du moment cinétique	62
5.2.3 Théorème de la puissance cinétique	63
5.2.4 théorème de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique	63

5.1 Principe de relativité galiléenne

5.1.1 Référentiels galiléens

Rappel : un référentiel est galiléen si, dans ce référentiel, un point matériel isolé à un mouvement rectiligne uniforme

Soit M un point matériel isolé dans \mathcal{R} galiléen alors $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{0}$

Soit \mathcal{R}' un autre référentiel ; la composition des accélérations donne

$$\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

\mathcal{R}' est galiléen si $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$ c'est à dire si

$$\vec{a}_e = \vec{a}_c = \vec{0}$$

($\vec{a}_e + \vec{a}_c = \vec{0}$ ne pouvant être qu'exceptionnel)

$$\vec{a}_c = \vec{0} \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_e = \vec{a}(O')_{\mathcal{R}} = \vec{0}$$

\mathcal{R}' est donc en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R}

L'ensemble des référentiels galiléens est constitué par tous les référentiels en translation rectiligne uniforme par rapport à l'un d'entre eux

1020 5.1.2 Relativité galiléenne

Soit \mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} galiléen

De même que pour le temps, la mécanique newtonienne postule également (implicitement) l'invariance de la masse et de la force

$$t' = t \quad m' = m \quad \sum \vec{F}' = \sum \vec{F}$$

En notant $\vec{u} = \vec{v}(O')_{\mathcal{R}} = c\vec{t}\vec{e}$ la vitesse de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} , la composition des vitesses donne

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

Soit \vec{p}' la quantité de mouvement dans \mathcal{R}'

$$\vec{p}' = m'\vec{v}' = m(\vec{v} - \vec{u})$$

\mathcal{R} étant galiléen

$$\frac{d\vec{p}'}{dt'} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F} = \sum \vec{F}'$$

Le RFD a donc même formulation dans tous les référentiels galiléens ; plus généralement :

Dans des référentiels en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres, appelés référentiels galiléens, les lois de la physique sont invariantes. Ou encore : les lois de la physique restent les mêmes dans n'importe quel référentiel galiléen

5.2 Lois de la dynamique en référentiel non galiléen

1025 Soient \mathcal{R}' en mouvement quelconque par rapport à \mathcal{R} galiléen et $\sum \vec{F}^{ext}$ la résultante des forces s'exerçant sur un point matériel M

5.2.1 RFD

5.2.1.1 Forces d'inertie

Dans \mathcal{R} galiléen

$$m \vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \sum \vec{F}^{ext}$$

En utilisant la composition des accélérations

$$m(\vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c) = \sum \vec{F}^{ext}$$

ou encore

$$m \vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} = \sum \vec{F}^{ext} - m \vec{a}_e - m \vec{a}_c$$

Dans \mathcal{R}' non galiléen, on peut appliquer le RFD en rajoutant les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e \quad \vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_c$$

Ces forces n'étant pas liées à la présence d'un autre corps (masse, charge) mais seulement au caractère non galiléen du référentiel sont plutôt appelées **pseudo-forces ou forces d'inerties**

5.2.1.2 condition d'équilibre

dans \mathcal{R}' non galiléen la condition d'équilibre (qui est un équilibre dynamique) se traduit par

$$\vec{v}_r(M) = \vec{0}$$

c'est à dire $\vec{a}_r = \vec{0}$ et $\vec{a}_c = \vec{0}$ donc

$$\boxed{\sum \vec{F}^{ext} - m \vec{a}_e = \vec{0}} \quad (5.1)$$

En particulier dans la cas d'un fluide au repos dans un référentiel non galiléen soumis au champ de pesanteur \vec{g} la condition d'équilibre se traduit par

$$\boxed{\overrightarrow{grad} p = \rho(\vec{g} - \vec{a}_e)} \quad (5.2)$$

5.2.1.3 Translation pure

Si \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} (voir chapitre précédent)

$$\vec{a}_e = \vec{a}(O')_{\mathcal{R}} \quad \vec{a}_c = \vec{0}$$

donc

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e = -m \vec{a}(O')_{\mathcal{R}} \quad \vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_c = \vec{0}$$

\vec{F}_{ie} est par exemple la force qui nous plaque contre le siège d'une voiture qui accélère

1040 5.2.1.4 rotation uniforme autour d'un axe fixe

Si \mathcal{R}' est en rotation uniforme autour d'un axe fixe de \mathcal{R} (voir chapitre précédent)

$$\begin{aligned}\vec{a}_e &= -r\omega^2 \vec{e}_r = -\omega^2 \overrightarrow{HM} \\ a_c &= 2\omega \dot{r} \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

donc

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e = +m r \omega^2 \vec{e}_r = m \omega^2 \overrightarrow{HM}$$

$$\vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_c = -2m \omega \dot{r} \vec{e}_\theta$$

\vec{F}_{ie} est par exemple la force centrifuge qui tend à nous expulser d'un manège

la force d'inertie d'entraînement est en général non conservative, mais dans le cas particulier où \mathcal{R}' est en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans \mathcal{R} c'ad $\vec{\omega} = c \vec{st}$ on peut lui associer une énergie potentielle

$$\vec{F}_{ie} = m \omega^2 \overrightarrow{HM}$$

$$\delta W = \vec{F}_e \cdot d\overrightarrow{OM} = \vec{F}_e \cdot d(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) = m \omega^2 d\left(\frac{1}{2} H M^2\right) = -dE_p$$

donc

$$E_p = -\frac{1}{2} m \omega^2 H M^2 = -\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (5.3)$$

la constante d'intégration est prise égale à zéro pour $r = 0$

5.2.2 Théorème du moment cinétique

Soit O' un point fixe de \mathcal{R}' en mouvement quelconque par rapport à \mathcal{R} galiléen et $\sum \vec{F}$ la résultante des forces s'exerçant sur un point matériel M

Dérivons le moment cinétique en O' du point M dans \mathcal{R}'

$$\vec{L}_{O'}(M)_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{O'M} \wedge m \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O'}(M)_{\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} \wedge m \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{O'M} \wedge m \vec{a}(M)_{\mathcal{R}'}$$

1045 La RFD dans \mathcal{R}' donne

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{L}_{O'}(M)_{\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{O'M} \wedge (\sum \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic})} \quad (5.4)$$

Dans \mathcal{R}' non galiléen, on peut donc appliquer le théorème du moment cinétique en rajoutant les moments des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis

5.2.3 Théorème de la puissance cinétique

Soit \mathcal{R}' en mouvement quelconque par rapport à \mathcal{R} galiléen et $\sum \vec{F}$ la résultante des forces s'exerçant sur un point matériel M

Multiplions scalairement par $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}$ le RFD dans \mathcal{R}'

$$m \left(\frac{d\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} = (\sum \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}) \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}$$

1050 on obtient

$$\boxed{\left(\frac{dE_c(M)_{\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{F}_{ie} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{F}_{ic} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}} \quad (5.5)$$

comme $\vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_c = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}$

$$\boxed{\vec{F}_{ic} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} = 0} \quad (5.6)$$

1055 Finalement, dans \mathcal{R}' non galiléen, on peut appliquer le théorème de la puissance cinétique en rajoutant seulement la puissance de la force d'inertie d'entraînement, la puissance de la force d'inertie de Coriolis étant nulle (la force de coriolis ne travaille pas toujours)

5.2.4 théorème de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique

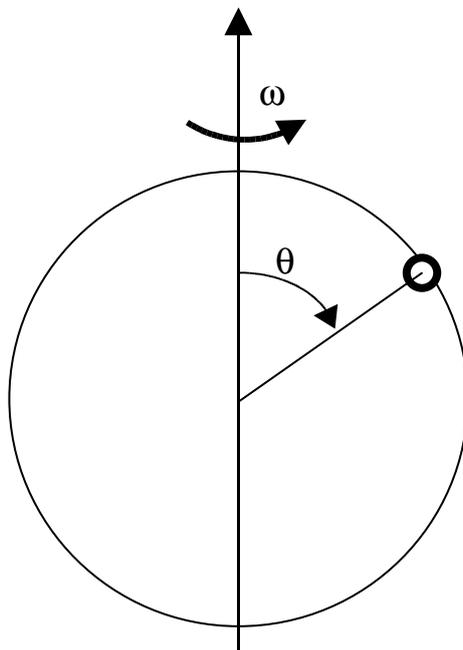
$$\Delta E_{c/\mathcal{R}'} = W(\sum \vec{F}) + W(\vec{F}_{ie}) \quad (5.7)$$

$$\Delta E_{m/\mathcal{R}'} = \sum W(\vec{F}^{nc}) \quad (5.8)$$

MÉCANIQUE DU POINT CHAP 00

Anneau sur cercle en rotation

Un petit anneau de masse m est astreint à se déplacer sans frottement sur la circonférence de rayon a qui tourne autour de l'axe vertical à la vitesse angulaire constante ω .



1. Etude cinématique:

- Exprimer en fonction de θ la vitesse et l'accélération relatives au référentiel tournant pour l'anneau.
- Exprimer la vitesse et l'accélération d'entraînement pour l'anneau.
- Exprimer l'accélération de Coriolis.

2. Etude dynamique:

- Préciser les forces agissant sur l'anneau dans le référentiel tournant.
- Exprimer leur moment par rapport au centre.
- En déduire l'équation différentielle du mouvement dans le référentiel tournant.

3. Equilibre relatif:

G.P.

Sujet colle mécanique du point

- Trouver les positions d'équilibre relatif. On posera $p = \frac{(g/a)}{\omega^2}$.
- Etudier la stabilité (on étudiera le cas $p < 1$ et le cas $p > 1$).
- Déterminer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

4. Déterminer la réaction de la circonférence sur l'anneau.

5. Etudier le cas $p = 1$.

Troisième problème : mécanique en référentiel non galiléen

1060

Rappels concernant les changements de référentiels

Dans un référentiel R en mouvement accéléré par rapport à un référentiel galiléen R_G , un point matériel M de masse m est soumis aux forces d'inertie de Coriolis \vec{F}_{ic} et d'entraînement \vec{F}_{ie} .

Dans le cas où le référentiel R a un mouvement de rotation uniforme de vecteur $\vec{\omega}$ autour d'un axe fixe (Δ) par rapport à R_G on a :

$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$ où \vec{v}_r désigne la vitesse du mouvement relatif de M dans R .

$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M)$ où $\vec{a}_e(M)$ désigne l'accélération d'entraînement du point M donnée par

$\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$, H étant la projection orthogonale du point M sur l'axe (Δ) .

Au cours de ce problème, nous envisagerons deux situations différentes d'un petit anneau M de masse m , considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer sans frottements le long d'une tige OA , de longueur l , effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe fixe vertical (Δ) passant par son extrémité O .

Le référentiel lié au laboratoire sera considéré comme galiléen.

L'espace est rapporté au repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au laboratoire et tel que :

\vec{e}_x : vecteur unitaire de l'axe horizontal Ox .

\vec{e}_y : vecteur unitaire de l'axe horizontal Oy .

\vec{e}_z : vecteur unitaire de l'axe vertical Oz .

On pourra lors des calculs vectoriels utiliser les vecteurs unitaires \vec{e}_r , \vec{e}_θ et \vec{e}_T définis de la manière suivante :

\vec{e}_r : vecteur unitaire du plan (Oxy) dirigé suivant la projection de la tige dans le plan (Oxy) et orienté dans le sens \overrightarrow{OA} de la tige.

\vec{e}_θ : vecteur unitaire du plan (Oxy) , perpendiculaire au vecteur \vec{e}_r et tel que le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ soit un repère direct.

\vec{e}_T : vecteur unitaire de la tige et orienté de O vers A .

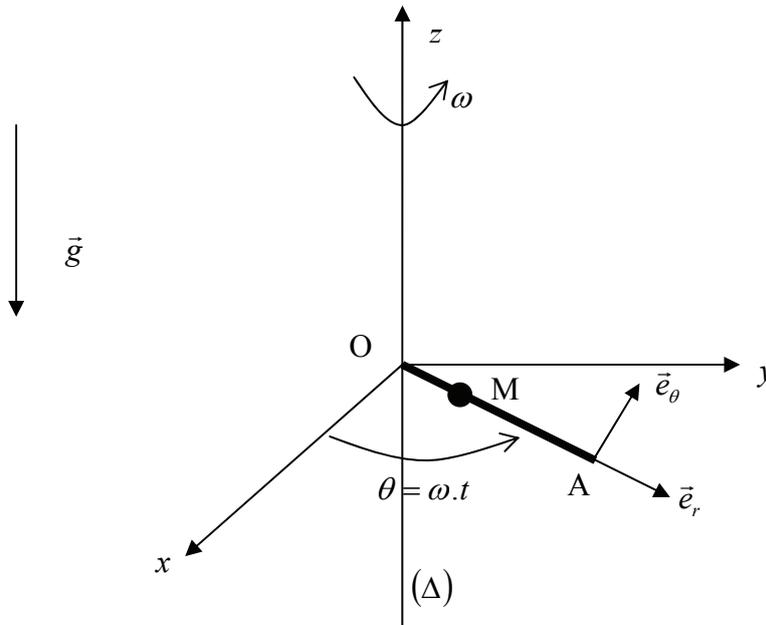
Première partie : la tige OA est dans le plan horizontal

La tige OA se trouve dans le plan horizontal (xOy) et tourne autour de l'axe vertical (Δ) à la vitesse angulaire constante ω . L'axe (Δ) est ainsi confondu avec l'axe Oz .

Dans ce cas on a donc : $\vec{e}_r = \vec{e}_r$.

L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance r_0 du point O ($r_0 < l$).

On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance r entre le point O et l'anneau M ($r = OM$).



L'étude est menée dans le référentiel lié à la tige.

1/ L'anneau est soumis à son poids, aux forces d'inertie et à la réaction de la tige.

Faire un schéma sur lequel apparaissent ces forces.

Ecrire l'expression vectorielle du poids et des forces d'inertie en fonction de m , g , ω , r et des vecteurs unitaires définis précédemment.

Quels sont les vecteurs unitaires qui portent les composantes de la réaction de la tige ?

2/ En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.

3/ Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment et déterminer la solution $r(t)$ en fonction de r_0 , ω et t .

4/ En déduire l'expression du temps τ que va mettre l'anneau pour quitter la tige. On exprimera τ en fonction de r_0 , l et ω .

5/ Déterminer l'expression de la vitesse \vec{v}_f , calculée dans le référentiel lié à la tige, de l'anneau lorsqu'il quitte la tige en fonction de ω , r_0 , l et d'un ou plusieurs des vecteurs unitaires définis précédemment.

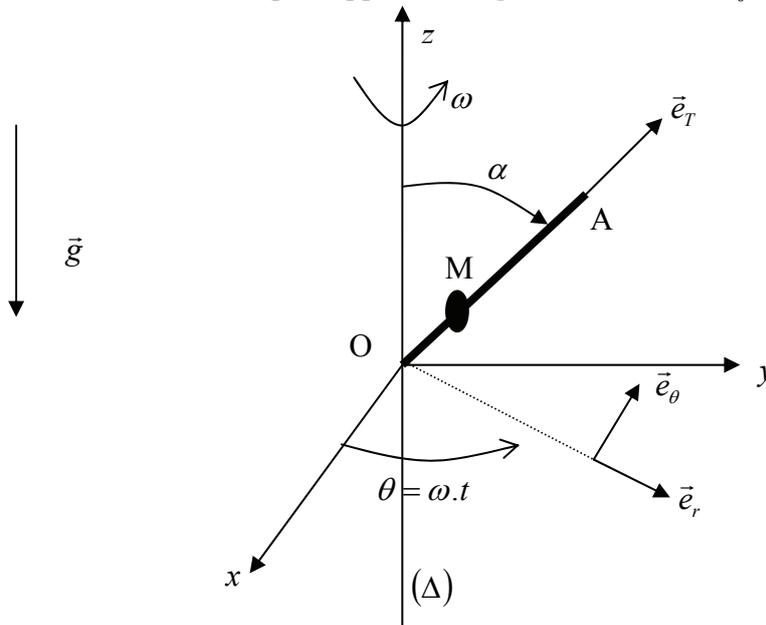
En déduire l'expression de la vitesse \vec{v}'_f , calculée dans le référentiel lié au laboratoire, de l'anneau lorsqu'il quitte la tige en fonction de ω , r_0 , l et d'un ou plusieurs des vecteurs unitaires définis précédemment.

Deuxième partie : la tige fait un angle α quelconque avec l'axe (Δ)

La tige OA fait maintenant un angle α ($\alpha < \frac{\pi}{2}$ rad) avec l'axe (Δ) . La tige tourne autour de (Δ) avec la vitesse angulaire constante ω .

On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance r entre le point O et l'anneau M ($r = OM$).

L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance r_0 du point O ($r_0 < l$).



L'étude est menée dans le référentiel lié à la tige.

6/ L'anneau est soumis à son poids, aux forces d'inertie et à la réaction de la tige. Faire un schéma sur lequel apparaissent ces forces.

Ecrire l'expression vectorielle du poids et des forces d'inertie en fonction de m , g , ω , r , α et des vecteurs unitaires définis précédemment.

7/ En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.

8/ Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment et déterminer la solution $r(t)$ en fonction de r_0 , α , g , ω et t .

9/ Déterminer la position d'équilibre r_{eq} de l'anneau sur la tige. Exprimer r_{eq} en fonction de ω , α et g .

Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre de l'anneau sur la tige OA que si la vitesse angulaire ω est supérieure à une valeur seuil ω_0 que l'on déterminera. Exprimer ω_0 en fonction de α , g et l .

10/ On se place dans le cas où $\omega > \omega_0$, l'anneau étant dans sa position d'équilibre. On écarte légèrement l'anneau de cette position d'équilibre. Déterminer, en la justifiant, l'orientation de la résultante des forces appliquées à l'anneau ? En déduire si l'équilibre est stable ou instable.

Fin de l'énoncé

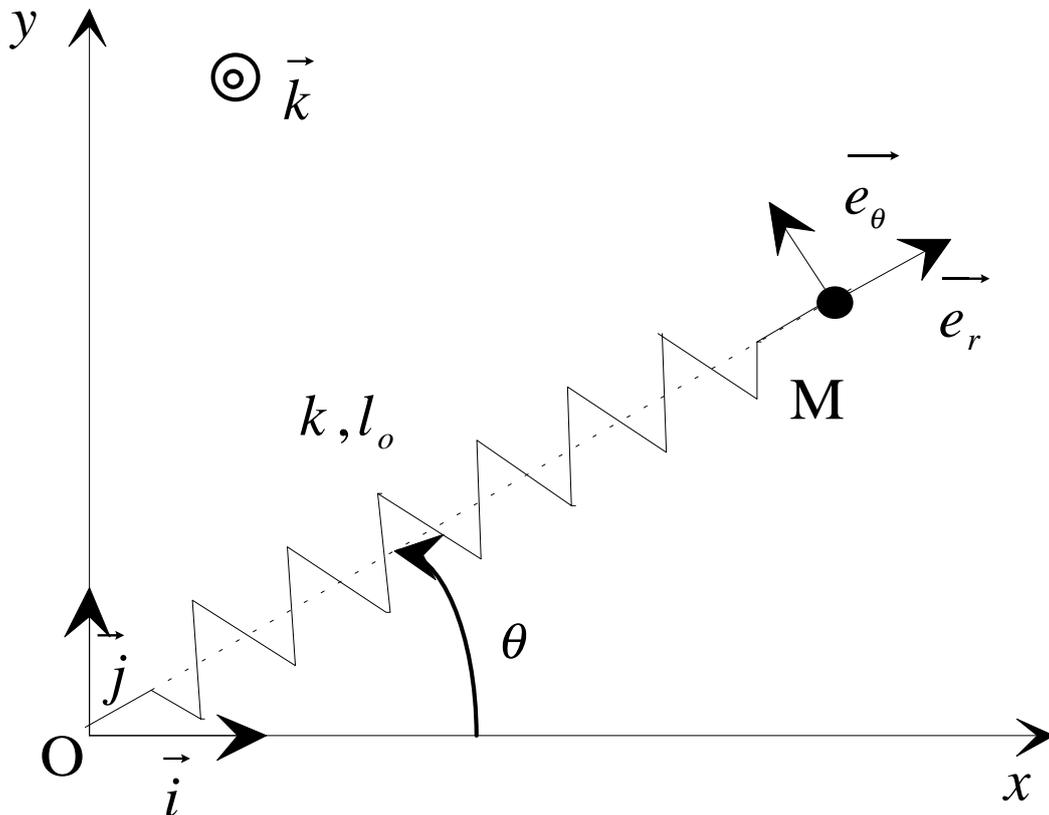
Analogies et différences

Les 3 problèmes de physique sont indépendants. De même, les parties sont indépendantes sauf pour les questions B-6 et F-2-6. Les questions peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Il prendra toutefois soin de bien numéroter les questions.

PHYSIQUE I : Etude d'un ressort dans 2 référentiels

Attention : Ce n'est pas une étude comparée dans les deux référentiels.

A- Etude dans le référentiel R du laboratoire :



Le mouvement est étudié dans le référentiel du laboratoire assimilé à un référentiel galiléen et associé à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un palet M de masse m peut se mouvoir sans frottement dans le plan (O, x, y) horizontal (table à coussin d'air par exemple). Le champ de pesanteur est suivant la verticale Oz : $\vec{g} = -g\vec{k}$.

La masse m est accrochée à l'extrémité d'un ressort (point M) de longueur à vide l_0 , de raideur k , dont l'autre extrémité est fixée en O . La position de M est repérée dans la base (\vec{i}, \vec{j}) par $\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ou dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ par $\overline{OM} = r\vec{e}_r$.

1065

A-1 Faire un bilan des forces. Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique, \overline{L}_o par rapport à O .

A-2

A $t=0$, la masse est lâchée, sans vitesse initiale d'une longueur $1,2l_0$: $\overline{OM}(t=0) = 1,2l_0\vec{i}$.

A-2-1 Calculer \overline{L}_o . Quelle est la nature de la trajectoire ?

A-2-2 Déterminer l'évolution temporelle de la longueur du ressort, $l(t) = OM(t)$. Préciser l'intervalle de variation de l , longueur du ressort.

A-3

On lance la particule d'un point $\overline{OM}_o = \overline{OM}(t=0) = l_1\vec{i}$, avec une vitesse initiale $\vec{v}_o = l_1\omega\vec{j}$, orthogonale à \overline{OM}_o . Dans la suite, on travaillera en coordonnées polaires dans le plan (O, x, y) .

A-3-1 Préciser \overline{L}_o en fonction r et $\frac{d\theta}{dt}$ puis en fonction des conditions initiales et des vecteurs de base. On notera L , le module de \overline{L}_o .

A-3-2 Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique.

Doit-on tenir compte de l'énergie potentielle de pesanteur pour étudier le mouvement ?

Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique, E_m .

Préciser l'expression de E_m :

- en fonction des conditions initiales,
- en fonction de r , $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, m , k et l_0 .

A-3-3 Montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire : $E_m = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_{\text{eff}}(r)$.

Préciser l'expression de $E_{\text{eff}}(r)$. Tracer l'allure de $E_{\text{eff}}(r)$.

A-3-4 La masse peut-elle s'éloigner indéfiniment du pôle d'attraction ?

A-3-5 La vitesse de la particule peut-elle s'annuler au cours de son mouvement ?

A-3-6 La particule peut-elle passer par le centre d'attraction au cours de son mouvement ?

A-4

On cherche à déterminer une condition entre l_1 et ω pour avoir un mouvement circulaire.

A-4-1 Montrer que dans ce cas, le mouvement est uniforme.

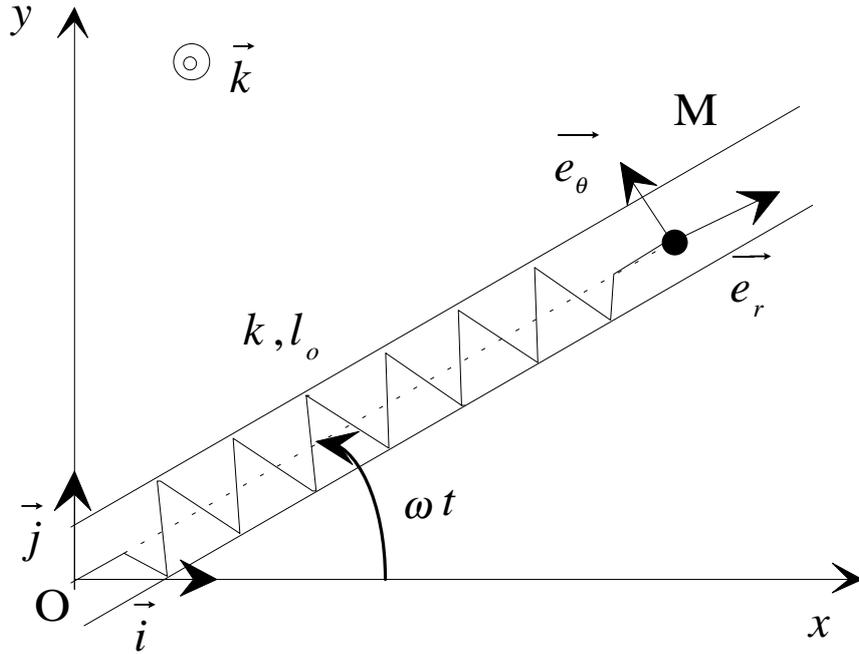
A-4-2 Déterminer l_1 en fonction de k, l_0 et ω . Est-elle valable pour tout ω ?

B - Etude dans un référentiel R' en rotation uniforme autour d'un axe fixe :

Le mouvement est étudié dans le référentiel R' en rotation uniforme autour d'un axe Oz fixe, de vecteur vitesse $\vec{\Omega} = \omega \vec{k}$, et associé au repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

On considère une particule M de masse m pouvant se mouvoir sans frottement le long de l'axe (O, \vec{e}_r) . Le champ de pesanteur est toujours suivant la verticale Oz : $\vec{g} = -g \vec{k}$.

La masse m est accrochée à l'extrémité d'un ressort (point M) de longueur à vide l_0 , de raideur k , dont l'autre extrémité est fixée en O. La position de M est repérée dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ par $\overline{OM} = r \vec{e}_r$.



B-1 Préciser les expressions vectorielles des forces d'inertie dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

B-2 Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle $E_{p_{fie}}$ que l'on précisera.

B-3 En est-il de même pour la force d'inertie de Coriolis ou complémentaire ?

B-4 Déterminer l'énergie potentielle totale. Tracer l'allure de $E_p(r)$. On distinguera les 3 cas possibles selon la valeur de ω .

B-5 Déterminer la longueur l_2 correspondant à la position d'équilibre dans le référentiel R'.

A quelle condition sur ω le résultat est-il possible ? Cet équilibre est-il stable ?

Quel est alors le mouvement dans le référentiel du laboratoire ?

B-6 Comparer l_2 à l_1 du paragraphe précédent. Conclusion.

Chapitre 6

Systeme forme de deux points materiels

Sommaire

1070	6.1 Éléments cinétiques	74
	6.1.1 masse, centre de masse, référentiel barycentrique	74
	6.1.2 Référentiel barycentrique	74
	6.1.3 quelques relations importantes	74
1075	6.1.4 Éléments cinétiques dans \mathcal{R}	75
	6.1.5 Éléments cinétiques dans \mathcal{R}^*	76
	6.2 Dynamique du système	77
	6.2.1 Forces intérieures et forces extérieures	77
1080	6.2.2 Théorème de la quantité de mouvement (ou du centre de masse ou de la résultante cinétique)	77
	6.2.3 Théorème du moment cinétique	78
	6.2.4 Étude énergétique	79
	6.3 Système isolé de deux points matériels (problème à deux corps) . .	80
	6.3.1 Lois de conservation	81
1085	6.3.2 Réduction du problème à deux corps à un problème à un corps . . .	83

1090 Soit le système formé par deux points matériels M_1 de masse m_1 , de vitesse \vec{v}_1 , soumis à des forces de résultante \vec{F}_1 et M_2 de masse m_2 , de vitesse \vec{v}_2 , soumis à des forces de résultante \vec{F}_2 .

Par défaut, les vitesses et les accélérations sont calculées par rapport à un référentiel \mathcal{R} galiléen

1095

6.1 Éléments cinétiques

6.1.1 masse, centre de masse, référentiel barycentrique

6.1.1.1 masse

On notera $M = m_1 + m_2$ la masse totale du système

6.1.1.2 Centre de masse

Le centre de masse du système (ou encore centre d'inertie, centre de gravité, barycentre) est le point G défini par

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2$$

O étant un point quelconque de \mathcal{R} ; si $O = G$

$$m_1\overrightarrow{GM}_1 + m_2\overrightarrow{GM}_2 = \vec{0}$$

Choisissons un point O fixe dans \mathcal{R}

$$\vec{v}_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

1100

est la vitesse du centre de masse G par rapport à \mathcal{R}

6.1.2 Référentiel barycentrique

Le référentiel barycentrique ou référentiel du centre de masse, noté \mathcal{R}^* , est le référentiel en translation par rapport à \mathcal{R} dans lequel le centre de masse G est fixe (souvent pris comme origine de \mathcal{R}^*)

Attention : pour que \mathcal{R}^* soit galiléen, il faut bien sûr que \mathcal{R} soit galiléen mais aussi que $\vec{v}_G = \vec{cte}$

1105

6.1.3 quelques relations importantes

les vecteurs positions s'écrivent :

$$\overrightarrow{OM}_1 = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_1$$

$$\overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_2$$

\mathcal{R}^* étant en translation par rapport à \mathcal{R} , on peut dériver indifféremment par rapport à \mathcal{R} ou \mathcal{R}^* , la composition des vitesses s'écrit :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1^* + \vec{v}_e = \vec{v}_1^* + \vec{v}_G$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2^* + \vec{v}_e = \vec{v}_2^* + \vec{v}_G$$

la composition des accélérations s'écrit :

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_1^* + \mathbf{a}_e = \vec{a}_1^* + \vec{a}_G$$

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_2^* + \mathbf{a}_e = \vec{a}_2^* + \vec{a}_G$$

6.1.4 Éléments cinétiques dans \mathcal{R}

1110 6.1.4.1 quantité de mouvement

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = M \vec{v}_G$$

est la **quantité de mouvement totale** ou **résultante cinétique** du système dans \mathcal{R}

6.1.4.2 moment cinétique

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_{O_i} = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \overrightarrow{OM}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2$$

est le **moment cinétique total** du système en O dans \mathcal{R}
introduisons un point O'

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{O'} + \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{p}$$

1115 6.1.4.3 énergie cinétique

$$E_c = \sum_i E_{c_i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

est l'**énergie cinétique totale** du système dans \mathcal{R}

6.1.5 Éléments cinétiques dans \mathcal{R}^*

6.1.5.1 Quantité de mouvement totale

$$\vec{p}^* = \sum_i \vec{p}_i^* = \sum_i m_i \vec{v}_i^* = m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* = M \vec{v}_G^* = \vec{0}$$

La quantité de mouvement totale du système dans \mathcal{R}^* est nulle $\vec{p}^* = \vec{0}$

1120 6.1.5.2 Moment cinétique total en G

$$\vec{L}_G^* = \sum_i \vec{L}_{Gi}^* = \sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge m_i \vec{v}_i^* = \overrightarrow{GM}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \overrightarrow{GM}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2^*$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_G^* &= (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}_1) \wedge m_1 \vec{v}_1^* + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}_2) \wedge m_2 \vec{v}_2^* \\ &= \overrightarrow{GO} \wedge (m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^*) + \overrightarrow{OM}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \overrightarrow{OM}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2^* \\ &= 0 + \overrightarrow{OM}_1 \wedge m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_G) + \overrightarrow{OM}_2 \wedge m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_G) \\ &= \overrightarrow{OM}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2 - (m_1 \overrightarrow{OM}_1 + m_2 \overrightarrow{OM}_2) \wedge \vec{v}_G \\ &= \vec{L}_O - \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{v}_G \end{aligned}$$

Cette relation, qui sera étudiée en 2^e année, est appelée théorème de Koenig relatif au moment cinétique

$$\vec{L}_O = \vec{L}_G^* + \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{v}_G$$

si on applique cette formule dans \mathcal{R}^*

$$\vec{L}_O^* = \vec{L}_G^* + \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{v}_G^*$$

$$\vec{L}_O^* = \vec{L}_G^*$$

le moment cinétique dans le centre de masse est indépendant du point ou on le calcule on va le noter \vec{L}^*

6.1.5.3 Énergie cinétique totale

$$E_c^* = \sum_i E_{ci}^* = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{*2} = \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2}$$

$$\begin{aligned}
E_c^* &= \frac{1}{2}m_1v_1^{*2} + \frac{1}{2}m_2v_2^{*2} \\
&= \frac{1}{2}m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_G)^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_G)^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 - (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\mathbf{v}_G^2 \\
&= E_c - M\mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2}M\mathbf{v}_G^2 \\
&= E_c - \frac{1}{2}M\mathbf{v}_G^2
\end{aligned}$$

Cette relation, qui sera étudiée en 2^e année, est appelée théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2}M\mathbf{v}_G^2$$

6.2 Dynamique du système

6.2.1 Forces intérieures et forces extérieures

Décomposons \vec{F}_1 en $\vec{F}_{ext \rightarrow 1} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ où $\vec{F}_{ext \rightarrow 1}$ est la force exercée par l'extérieur sur M_1 et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ la force exercée par M_2 sur M_1 .

De même $\vec{F}_2 = \vec{F}_{ext \rightarrow 2} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$

Les forces $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ et $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ s'exerçant entre M_1 et M_2 sont appelées **forces intérieures** au système,

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}$$

les autres forces étant les **forces extérieures** au système

6.2.2 Théorème de la quantité de mouvement (ou du centre de masse ou de la résultante cinétique)

\mathcal{R} étant galiléen, on peut appliquer le principe fondamental de la dynamique à M_1

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{ext \rightarrow 1} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

et à M_2

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{ext \rightarrow 2} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

en ajoutant membre à membre on fait apparaître la quantité de mouvement totale

$$\frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \vec{F}_{ext \rightarrow 1} + \vec{F}_{ext \rightarrow 2} + \underbrace{\vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2}}_{=\vec{0}}$$

en utilisant la 3^e loi de Newton ou principe de l'action et de la réaction

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}}$$

où \vec{p} est la quantité de mouvement totale et \vec{F}_{ext} la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le système

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{p} &= m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = M \vec{v}_G \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = M \vec{a}_G = \vec{F}_{ext} \end{aligned}}$$

Le mouvement de G est identique à celui d'un point matériel de masse $M = m_1 + m_2$ soumis à une force égale à la résultante des forces extérieures

1130

6.2.3 Théorème du moment cinétique

Soit O un point fixe de \mathcal{R} galiléen

Appliquons le théorème du moment cinétique en O à M_1

$$\frac{d\vec{L}_{O1}}{dt} = \overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{F}_{ext \rightarrow 1} + \overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

et à M_2

$$\frac{d\vec{L}_{O2}}{dt} = \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{F}_{ext \rightarrow 2} + \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

en ajoutant membre à membre on fait apparaître le moment cinétique total

$$\frac{d(\vec{L}_{O1} + \vec{L}_{O2})}{dt} = \overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{F}_{ext \rightarrow 1} + \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{F}_{ext \rightarrow 2} + \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$$

en utilisant la 3^e loi de Newton ou principe de l'action et de la réaction

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{O_{ext}}$$

où \vec{L}_O est le moment cinétique total en O et $\vec{\mathcal{M}}_{O_{ext}}$ le moment résultant en O des forces extérieures qui s'exercent sur le système le moment par rapport à un axe $\Delta(O, \vec{u})$

$$\boxed{\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\Delta_{ext}}$$

remarquons que les théorèmes vectorielles ne font intervenir que des forces extérieures

6.2.4 Étude énergétique

1135 6.2.4.1 puissance des forces intérieures

$$\mathcal{P}_{int} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_2$$

$$\mathcal{P}_{int} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\mathcal{P}_{int} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt}$$

si on note $\overrightarrow{M_1 M_2} = r \vec{u}$ et $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = F_{1 \rightarrow 2} \vec{u}$ on a

$$\mathcal{P}_{int} = F_{1 \rightarrow 2} \frac{dr}{dt}$$

$$\delta W_{int} = F_{1 \rightarrow 2} dr$$

comme $F_{1 \rightarrow 2}$ ne dépend pas du référentiel donc **le travail des forces intérieures ne dépend pas du référentiel**

dans le cas d'un solide $M_1 M_2 = r = cste$ donc $\mathcal{P}_{int} = 0$ et $\delta W_{int} = 0$
si les forces intérieures sont conservatives elles dérivent d'une énergie potentielle

$$\delta W_{int} = F_{1 \rightarrow 2} dr = -dE_p$$

$$dE_p = -F_{1 \rightarrow 2} dr$$

6.2.4.2 Théorème de l'énergie cinétique

\mathcal{R} étant galiléen, on peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique à M_1

$$\frac{dE_{c1}}{dt} = \vec{F}_{ext \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_1$$

et à M_2

$$\frac{dE_{c2}}{dt} = \vec{F}_{ext \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_2 + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_2$$

en ajoutant membre à membre on fait apparaître l'énergie cinétique totale

$$\frac{d(E_{c1} + E_{c2})}{dt} = \vec{F}_{ext \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{ext \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_2 + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_2$$

Contrairement aux deux cas précédents, il n'y a, a priori, aucune raison que les termes faisant apparaître les forces intérieures disparaissent

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}}$$

$$\boxed{\Delta E_c = W_{ext} + W_{int}}$$

¹¹⁴⁰ où E_c est l'énergie cinétique totale, \mathcal{P}_{ext} la puissance des forces extérieures et \mathcal{P}_{int} la puissance des forces intérieures

6.2.4.3 Énergie mécanique

$$\boxed{\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{ext}^{nc} + \mathcal{P}_{int}^{nc}}$$

Si toutes les forces sont conservatives ou ne travaillent pas l'énergie mécanique totale $E_m = E_c + E_p$ se conserve

¹¹⁴⁵ 6.3 Système isolé de deux points matériels (problème à deux corps)

on appelle problème à deux corps un système isolé formé de deux particules considérées comme des masse ponctuelles sous l'action de la seule force d'interactions mutuelles

Si le système est isolé, on a

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ext \rightarrow 1} &= \vec{0} \\ \vec{F}_{ext \rightarrow 2} &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{ext} &= \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_{O_{ext}} &= \vec{0} \\ \mathcal{P}_{ext} &= 0\end{aligned}$$

on utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \overrightarrow{OM}_1 \\ \vec{r}_2 &= \overrightarrow{OM}_2 \\ \vec{r}_1^* &= \overrightarrow{GM}_1 \\ \vec{r}_2^* &= \overrightarrow{GM}_2 \\ \vec{r} &= \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1 = \overrightarrow{GM}_2 - \overrightarrow{GM}_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2^* - \vec{r}_1^* \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2^* - \vec{v}_1^* = \vec{v}^* \\ \vec{a} &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{a}_2^* - \vec{a}_1^* = \vec{a}^*\end{aligned}$$

1150 6.3.1 Lois de conservation

6.3.1.1 Conservation de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} &= m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2 \\ M\overrightarrow{OG} &= m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\end{aligned}$$

en dérivant deux fois par rapport au temps

$$M\vec{a}_G = m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$$

or

$$\begin{aligned}m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} &= \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} &= \vec{F}_{1 \rightarrow 2}\end{aligned}$$

donc

$$M\vec{a}_G = \vec{0}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = M\vec{v}_G = cte}$$

Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est donc galiléen

6.3.1.2 Conservation du moment cinétique

il n'y a pas de force extérieures donc :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \text{cte}}$$

\mathcal{R} et \mathcal{R}^* étant en translation l'un par rapport à l'autre, on peut dériver indifféremment ; comme

$$\begin{aligned} \vec{L}_G^* &= \vec{L}_O - \vec{OG} \wedge M\vec{v}_G \\ \frac{d\vec{L}_G^*}{dt} &= \frac{d\vec{L}_O}{dt} - \vec{v}_G \wedge M\vec{v}_G - \vec{OG} \wedge M\frac{d\vec{v}_G}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_G^*}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_G^* = \text{cte}}$$

On aurait pu aussi appliquer le théorème du moment cinétique en G (fixe dans \mathcal{R}^*) dans \mathcal{R}^* galiléen

6.3.1.3 Conservation de l'énergie mécanique

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{int}$$

Dans le cadre du programme les forces intérieures qui s'exercent entre M_1 et M_2 sont conservatives (par exemple interaction gravitationnelle ou électrostatique)

$$\boxed{\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow E_m = \text{cte}}$$

\mathcal{R} et \mathcal{R}^* étant en translation l'un par rapport à l'autre, on peut dériver indifféremment ; comme $E_c^* = E_c - \frac{1}{2}M\mathbf{v}_G^2$

$$\frac{dE_c^*}{dt} = \frac{dE_c}{dt} - M\vec{v}_G \cdot \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{int} = \mathcal{P}_{int}^* = -\frac{dE_p^*}{dt}$$

en notant E^* l'énergie mécanique du système dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^*

$$\boxed{\frac{dE^*}{dt} = 0 \Rightarrow E^* = \text{cte}}$$

6.3.2 Réduction du problème à deux corps à un problème à un corps

1160

6.3.2.1 Mobile fictif - Masse réduite

Reprenons

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \quad m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \frac{d^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{1 \rightarrow 2}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{2 \rightarrow 1}}{m_1} = \frac{\vec{F}_{1 \rightarrow 2}}{m_2} + \frac{\vec{F}_{1 \rightarrow 2}}{m_1} = \frac{\vec{F}_{1 \rightarrow 2}}{\mu}$$

avec $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$, μ appelé **masse réduite** (car plus petite que $\min(m_1, m_2)$)

Soit M appelé **mobile fictif** et défini par

$$\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{r} = r \vec{e}_r$$

La relation $\mu \vec{a} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ peut donc être considérée comme le RFD appliqué dans le référentiel barycentrique ($\vec{a} = \vec{a}^*$ et dérivation indifférente) à un mobile équivalent M de masse μ et soumis à une force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$

En général, La force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ est conservative, portée par $\overrightarrow{M_1 M_2}$ et ne dépend que de la distance relative entre M_1 et M_2

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = F(r) \vec{e}_r$$

Tout se passe donc comme si le mobile équivalent M ressentait la force centrale conservative créée par le centre de force fixe G

1165

6.3.2.2 Éléments cinétiques

les relations entre \vec{r}_1 , \vec{r}_2 et \vec{r}

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{O} \quad (6.1)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (6.2)$$

donc

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

La vitesse du mobile fictif

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_2 - v_1 = \vec{v}_2^* - \vec{v}_1^*$$

d'où

$$\vec{v}_1^* = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}$$

$$\vec{v}_2^* = +\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}$$

La quantité de mouvement totale dans \mathcal{R}^* est nulle par définition de \mathcal{R}^*

$$\vec{p}^* = m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* = \vec{0}$$

$$\vec{p}_1^* = m_1 \vec{v}_1^* = -\mu \vec{v}$$

$$\vec{p}_2^* = m_2 \vec{v}_2^* = \mu \vec{v}$$

calculons alors l'énergie cinétique et le moment cinétique dans \mathcal{R}^*

$$E_c^* = \frac{1}{2} m_1 \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(+\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2$$

$$\boxed{E_c^* = \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2}$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_G^* &= \vec{r}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \vec{r}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2^* \\ &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \wedge m_1 \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \right) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \wedge m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} \\ &= \vec{r} \wedge \mu \vec{v} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{L}^* = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}}$$

6.3.2.3 remarques

$$\boxed{\vec{L}^* = \vec{r} \wedge \mu \vec{v} = \overrightarrow{cste}}$$

le mouvement est plan (le mouvement relatif du mobile fictif M dans \mathcal{R}^* est plan : le plan de la trajectoire est \perp en G à \vec{L}^* avec la notation déjà utilisée

$$\overrightarrow{GM} = \vec{r} = r \vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

on a

$$\vec{L}^* = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

le mouvement se fait suivant la loi des aires

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}$$

le système est soumis à une force centrale $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p(r)$ l'énergie totale dans \mathcal{R}^* est une constante

$$E^* = E_c^* + E_p(r) = \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2 + E_p(r) = \frac{1}{2} \mu [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2] + E_p(r)$$

or $\dot{\theta} = \frac{L^*}{\mu r^2}$ d'où

$$E^* = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^{*2}}{2\mu r^2} + E_p(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + E_{\text{peff}}(r)$$

¹¹⁷⁰ avec $E_{\text{peff}}(r) = \frac{L^{*2}}{2\mu r^2} + E_p(r)$ est l'énergie potentielle effective agissant sur le mobile fictif

Partie A : Etude mécanique

Soit un système de deux points matériels de masse m_1 et m_2 , respectivement situés aux points M_1 et M_2 , et dont le centre d'inertie (ou centre de masse) est en G. On appellera \mathcal{R} le référentiel galiléen associé au repère orthonormé direct $R(0,x,y,z)$ et \mathcal{R}^* le référentiel barycentrique (associé au repère orthonormé direct R^*).

Dans toute la suite, on utilisera les notations suivantes:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \overrightarrow{OM_1} & , & \quad \vec{v}_1 = \left(\frac{d(\overrightarrow{OM_1})}{dt} \right)_{\mathcal{R}} & , & \quad \vec{r}_1^* = \overrightarrow{GM_1} & , & \quad \vec{v}_1^* = \left(\frac{d(\overrightarrow{GM_1})}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} & , \\ \vec{r}_2 &= \overrightarrow{OM_2} & , & \quad \vec{v}_2 = \left(\frac{d(\overrightarrow{OM_2})}{dt} \right)_{\mathcal{R}} & , & \quad \vec{r}_2^* = \overrightarrow{GM_2} & , & \quad \vec{v}_2^* = \left(\frac{d(\overrightarrow{GM_2})}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} & , \\ \vec{v}_G &= \left(\frac{d(\overrightarrow{OG})}{dt} \right)_{\mathcal{R}} & , & \quad \vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2} & , & \quad \vec{v} = \left(\frac{d(\overrightarrow{M_1M_2})}{dt} \right)_{\mathcal{R}} & , & \quad \vec{v}^* = \left(\frac{d(\overrightarrow{M_1M_2})}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} & . \end{aligned}$$

I Etude cinétique d'un système de deux points matériels

1) Sur un même schéma, représenter les repères \mathcal{R} et \mathcal{R}^* après avoir défini ce que sont un référentiel galiléen et le référentiel barycentrique.

2) a) En utilisant le fait que G est le centre d'inertie, trouver \vec{r}_1^* et \vec{r}_2^* en fonction de $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$, m_1 et m_2 .

b) En déduire \vec{v}_1^* et \vec{v}_2^* en fonction de \vec{v} , m_1 et m_2 .

c) Comparer \vec{v}^* et \vec{v} .

d) Que peut-on dire de la quantité de mouvement \vec{P}^* du système dans \mathcal{R}^* ?

3) a) Donner les expressions du moment cinétique, noté $\vec{\sigma}_G$, du système par rapport à O dans le référentiel \mathcal{R} et de celui, noté $\vec{\sigma}_G^*$, du système par rapport à G dans le référentiel \mathcal{R}^* .

b) Indiquer la relation entre $\vec{\sigma}_G$, $\vec{\sigma}_G^*$, \overrightarrow{OG} , $(m_1 + m_2)$ et \vec{v}_G , en précisant le théorème utilisé. Pourquoi pourra-t-on dans la suite écrire $\vec{\sigma}^*$ au lieu de $\vec{\sigma}_G^*$?

c) Calculer littéralement $\vec{\sigma}^*$ en fonction de μ , \vec{r} , \vec{v} où $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, est nommée masse réduite.

4) a) Définir l'énergie cinétique du système dans le référentiel \mathcal{R} , notée E_c , ainsi que celle dans le référentiel \mathcal{R}^* , notée E_c^* .

b) Préciser la relation donnant E_c en fonction de E_c^* , $(m_1 + m_2)$ et v_G^2 .

c) Calculer littéralement E_c^* en fonction de μ et v^* ($v^* = \|\vec{v}^*\| = \|\vec{v}\|$).

II Etude dynamique d'un système de deux points matériels

On suppose, dans cette partie, que chaque point matériel est soumis à deux types de forces:

* une force d'interaction interne au système (M_1, M_2) : \vec{F}_{i1}^* pour le point situé en M_1 (\vec{F}_{i2}^* pour le point situé en M_2)

* une force due au milieu extérieur au système (M_1, M_2) : \vec{F}_{e1}^* pour le point situé en M_1 (\vec{F}_{e2}^* pour le point situé en M_2).

1) Quel est le nom du principe qui donne notamment la relation entre les forces \vec{F}_{i1}^* et \vec{F}_{i2}^* ? Montrer que \vec{F}_{i2}^* est colinéaire à $\overrightarrow{M_1M_2}$.

2) a) Appliquer la Relation Fondamentale de la Dynamique à chaque particule dans le référentiel \mathcal{R} et en déduire les expressions de $\left(\frac{d\vec{v}_G}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$, $\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$, puis $\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*}$ en fonction

de $m_1, m_2, \vec{F}_{i1}, \vec{F}_{e1}, \vec{F}_{i2}$ et \vec{F}_{e2} .

b) Quelle est la condition C1 que doit satisfaire la somme $\vec{F}_{e1} + \vec{F}_{e2}$ pour que le référentiel \mathcal{R}^* soit galiléen ?

c) Quelle est la condition C2 que doit satisfaire $\frac{\vec{F}_{e1}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{e2}}{m_2}$ pour que

$$\mu \left(\frac{d\vec{v}^*}{dt} \right)_{R^*} = \vec{F}_{i2}$$

d) Donner un exemple de force extérieure satisfaisant C2 seulement. Quelle est la seule possibilité satisfaisant C2 et C1 ? Que dira-t-on d'un tel système ?

III Cas d'un système isolé de deux points matériels

On suppose, dans toute la suite, que $\vec{F}_{e1} = \vec{F}_{e2} = \vec{0}$.

1) Quelle est, dans ce cas, la nature du mouvement du point G dans \mathcal{R} ?

2) Montrer que $\vec{\sigma}^*$ est un vecteur constant dans \mathcal{R}^* .

Dans toute la suite, on suppose que $\vec{\sigma}^*$ est non nul, de mêmes sens et direction que le vecteur unitaire \vec{u}_z de l'axe Gz du repère orthonormé direct R^* associé au référentiel barycentrique \mathcal{R}^* . Ainsi $\vec{\sigma}^* = \sigma^* \vec{u}_z$, avec σ^* constant et strictement positif.

3) En s'appuyant sur le résultat de la question I3c, préciser ce qu'implique le fait que la direction de $\vec{\sigma}^*$ soit constante. Qu'implique ensuite le fait que sa valeur algébrique soit constante ? On posera $r = \|\vec{r}\|$ et notera $\theta(t)$ l'angle que fait \vec{r} avec l'axe Gx dans le plan xGy .

4) Montrer que la dérivée de l'énergie cinétique dans le référentiel \mathcal{R} s'écrit, pour ce système isolé :

$$\left(\frac{dE_c}{dt} \right) = \vec{F}_{i2} \cdot \vec{v}$$

5) Montrer que la dérivée de l'énergie cinétique de ce système dans le référentiel \mathcal{R}^* s'écrit :

$$\left(\frac{dE_c^*}{dt} \right) = \vec{F}_{i2} \cdot \vec{v}^*$$

On suppose dans la suite que les forces d'interaction (\vec{F}_{i1} et \vec{F}_{i2}) dérivent d'une énergie potentielle E_p fonction de la distance $r = M_1 M_2$. On note, pour simplifier l'écriture, \vec{F} la force d'interaction \vec{F}_{i2} .

6) Montrer que :

$$\frac{d(E_c^* + E_p)}{dt} = 0$$

Dans toute la suite, on note E^* la somme $E_c^* + E_p$. A quoi correspond E^* ?

7) a) Récapituler, sous forme de tableau, les valeurs de $\mu \left(\frac{d\vec{v}^*}{dt} \right)_{R^*}$, $\left(\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \right)_{R^*}$, $\left(\frac{dE^*}{dt} \right)$.

b) En déduire que l'étude de $\vec{r}(t)$ se ramène à celle du mouvement dans \mathcal{R}^* d'une particule fictive P (également nommée mobile équivalent) de position donnée par $\vec{r}(t) = \vec{GP}$ soumise à une force \vec{F} centrale et conservative. Préciser la valeur de sa masse.

c) Si l'on connaît $\vec{r}(t)$ et $\vec{OG}(t)$, comment peut-on en déduire $\vec{OM}_1(t)$ et $\vec{OM}_2(t)$?

IV Etude qualitative de la trajectoire de la particule fictive dans \mathcal{R}^*

On étudie dans cette partie la trajectoire dans \mathcal{R}^* de la particule fictive P (également nommée mobile équivalent) associée au système isolé étudié dans la partie III.

On pose $\vec{GP} = \vec{r}(t) = r(t)\vec{u}_r(t)$; \vec{u}_r et \vec{u}_θ sont unitaires (voir figure 1 ci-dessous)

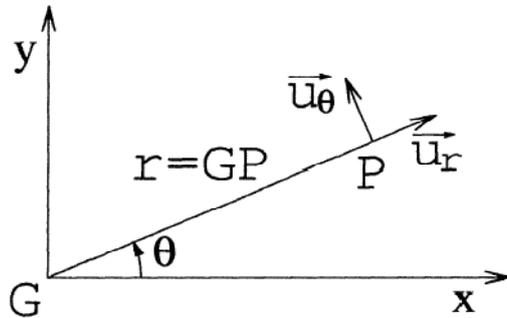


Figure 1: Notations utilisées dans la partie IV

1) Expliquer pourquoi la connaissance des vecteurs \vec{OM}_1 , \vec{OM}_2 , \vec{v}_1 et \vec{v}_2 à l'instant initial suffit pour définir le plan Gxy qui contient à chaque instant la particule fictive P.

2) Montrer que si $\vec{F} = F \vec{u}_r$ est à la fois conservative et centrale, alors E_p et F ne dépendent que de la variable r.

Nous supposons dans toute la suite que \vec{F} dérive de l'énergie potentielle $E_p(r) = \alpha r^n$ où α et n sont des réels.

3) Que vaut alors \vec{F} ? A quelles conditions sur α et n , la force \vec{F} est-elle attractive ? répulsive ?

On rappelle que $\vec{\sigma} = \sigma^* \vec{u}_z$, avec σ^* constant et strictement positif.

4) En utilisant le résultat établi à la question I.3.c, exprimer σ^* en fonction de μ , r et de $(\frac{d\theta}{dt})$, puis exprimer l'énergie mécanique E^* en fonction de μ , $\frac{dr}{dt}$, σ^* , α , n et r .

5) a) Quel est le terme de potentiel efficace (ou énergie potentielle efficace, ou énergie potentielle effective) $E_{\text{eff}}(r)$? On rappelle que:

$$E_{\text{eff}}(r) = E^* - \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

b) Expliquer en quoi le tracé du graphe de $E_{\text{eff}}(r)$ permet de prévoir l'ensemble des valeurs de r accessibles à la particule fictive.

c) Interpréter la relation $E^* = E_{\text{eff}}(r) + \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ à l'aide d'un raisonnement énergétique dans le référentiel lié à $(G, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

6) Montrer que la courbe $E_{\text{eff}}(r)$ ne présente un extremum que si la force \vec{F} est attractive. Déterminer r_e et $E_{\text{eff}}(r_e)$, valeurs respectives de r et de E_{eff} pour cet extremum, en fonction de σ^* , μ , α et n .

On se propose maintenant d'analyser les graphes de $E_{\text{eff}}(r)$ lorsque $\alpha.n > 0$.

7) On commence par étudier le cas où α et n sont tous les deux positifs.

a) Donner un exemple de force dérivant d'une énergie potentielle de ce type (en précisant les valeurs de α et n).

b) Tracer l'allure de $E_{\text{eff}}(r)$ pour $n = 2$. On précisera sur cette courbe les coordonnées de l'extremum $(r_e, E_{\text{eff}}(r_e))$ et on indiquera les limites de $E_{\text{eff}}(r)$ pour $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$.

c) Que peut-on dire des valeurs de r accessibles, en fonction de l'énergie mécanique E^* ?

d) Quel type d'état a-t-on ?

8) On étudie maintenant le cas où α et n sont tous les deux négatifs.

a) Donner quelques exemples de forces.

b) Tracer l'allure de $E_{\text{eff}}(r)$ pour $n = -1$ en indiquant les points et les limites particuliers: trouver la valeur de r notée r_1 pour laquelle la courbe $E_{\text{eff}}(r)$ coupe l'axe des abscisses et indiquer les limites de $E_{\text{eff}}(r)$ pour $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$.

c) Reprendre les questions du IV 7) c et d.

V Etude quantitative de la trajectoire de la particule fictive dans \mathcal{R}^*

Dans toute cette partie, les deux points constituant le système double forment un système isolé où la force d'interaction \vec{F}_{i2} , de nature gravitationnelle, s'écrit $\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{u}_r$, la constante α étant négative.

1) Montrer que

$$\mu \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}^*} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{u}_r$$

2) Indiquer, sans démonstration, à quelle famille de courbes appartient la trajectoire de la particule fictive P dans \mathcal{R}^* . Dans le cas d'une étoile double ou d'un système étoile-planète, quel est le seul type possible de trajectoire de la particule fictive P dans \mathcal{R}^* ?

3) On admet que l'équation de la trajectoire, en coordonnées polaires, s'écrit: $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ et on pose $\sigma^* = \mu C$.

a) Comment appelle-t-on p , e , C ? Préciser leur rôle respectif.

b) Montrer que:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \frac{C e \sin \theta}{p} \\ r \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{C}{p} (1 + e \cos \theta) \end{cases}$$

c) En déduire que:

$$E^* = \left(\frac{\mu C^2 (1 + e^2)}{2p^2} + \frac{\alpha}{p} \right) + \left(\frac{\mu C^2}{p^2} + \frac{\alpha}{p} \right) e \cos \theta$$

d) Montrer alors que l'on a deux relations valables simultanément:

$$\begin{cases} p = \frac{\mu C^2}{(-\alpha)} \\ e^2 - 1 = \frac{2\mu C^2}{\alpha^2} E^* \end{cases}$$

e) En utilisant la constance de la vitesse aréolaire, établir la relation supplémentaire (troisième loi de Képler) entre T , a , μ et α lorsque la trajectoire de la particule fictive P dans \mathcal{R}^* est une ellipse de demi-grand axe a , décrite avec une période T ? On rappelle la relation $b^2 = ap$, b désignant le demi-petit axe de l'ellipse.

Chapitre 7

Mouvement dans un champ de forces centrales conservatives

Sommaire

1180	7.1 Forces centrales conservatives	90
	7.1.1 Exemple de la force de gravitation	90
	7.1.2 Exemple de la force électrostatique	91
	7.1.3 Généralisation	91
	7.2 Lois générales de conservation	92
1185	7.2.1 Conservation du moment cinétique	92
	7.2.2 Conservation de l'énergie mécanique	93
	7.3 Mouvement dans un champ de force centrales newtonien	95
	7.3.1 Équation générale de la trajectoire	95
	7.3.2 Interaction répulsive $k < 0$	96
1190	7.3.3 Interaction attractive $k > 0$	97
	7.3.4 Étude détaillée de l'interaction attractive	99
	7.3.5 Mouvements des planètes - Lois de Képler	105

1195

7.1 Forces centrales conservatives

7.1.1 Exemple de la force de gravitation

Soient M_1 de masse m_1 et M_2 de masse m_2

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{(M_1 M_2)^2} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2}$$

avec $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = -dE_p$$

1200 avec $E_p = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r}$ en prenant $E_p(\infty) = 0$

7.1.2 Exemple de la force électrostatique

Soient M_1 de charge q_1 et M_2 de charge q_2

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(M_1 M_2)^2} \frac{\vec{M}_1 \vec{M}_2}{M_1 M_2}$$

avec $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 \text{ S.I.}$

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -dE_p$$

avec $E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$ en prenant $E_p(\infty) = 0$

remarque : si l'on compare les forces de gravitation et électrostatique qui s'exercent par exemple entre deux électrons

$$\frac{F_e}{F_g} = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 \mathcal{G}}\right) = 4,2.10^{42}$$

1205 D'une manière générale, à l'échelle microscopique, les forces de gravitation sont négligeables devant les forces électrostatique.

7.1.3 Généralisation

Force centrale si

$$\vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{F} = F(r) \vec{e}_r$$

ou \vec{e}_r est le vecteur radiale des coordonnées sphériques conservative si

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p = -\frac{dE_p}{dr} \vec{e}_r$$

$$F(r) = -\frac{dE_p}{dr}$$

$$\delta W = -dE_p$$

$E_p(r)$ ne dépend pas explicitement du temps Pour les forces de gravitation et électrostatique que l'on appelle interactions newtoniennes (en $\frac{1}{r^2}$)

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} \quad \text{et} \quad E_p = -\frac{k}{r} \quad \text{avec} \quad E_p(\infty) = 0$$

$k = \mathcal{G}m_1m_2 > 0$ pour l'interaction gravitationnelle ;

$k = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}q_1q_2$, pour l'interaction électrostatique, positif si q_1 et q_2 de signe différent, négatif si q_1 et q_2 de même signe.

7.2 Lois générales de conservation

Soit M de masse m et de vitesse \vec{v} soumis à un champ de force centrale conservative $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$, créé par un centre de force O.

7.2.1 Conservation du moment cinétique

7.2.1.1 Planéité du mouvement

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = r\vec{e}_r \wedge F(r)\vec{e}_r = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \vec{cte}$$

Comme

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{OM}_0 \wedge m\vec{v}_0$$

\overrightarrow{OM} et \vec{v} restent perpendiculaires à $\vec{L}_O = \vec{cte}$, \overrightarrow{OM} et \vec{v} sont donc contenus dans le plan perpendiculaire à $\vec{L}_O = \vec{cte}$: le mouvement est plan.

7.2.1.2 Intégrale première du mouvement

Dans ce plan, choisissons les coordonnées polaires (r, θ)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r\vec{e}_r & \vec{v} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \vec{L}_O &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = mC\vec{e}_z\end{aligned}$$

comme $\vec{L}_O = \vec{cte}$

$$\boxed{r^2\dot{\theta} = cte = C}$$

appelé intégrale première du mouvement, C **constante des aires**

7.2.1.3 Loi des aires

L'aire balayée pendant dt

$$d\mathcal{S} = \frac{1}{2} \times r \times r d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

La vitesse aéroilaire

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} C = cte$$

Les aires balayées pendant des durées égales sont égales ce qui explique l'accélération de M lorsqu'il se rapproche du centre de force et son ralentissement lorsqu'il s'en éloigne.

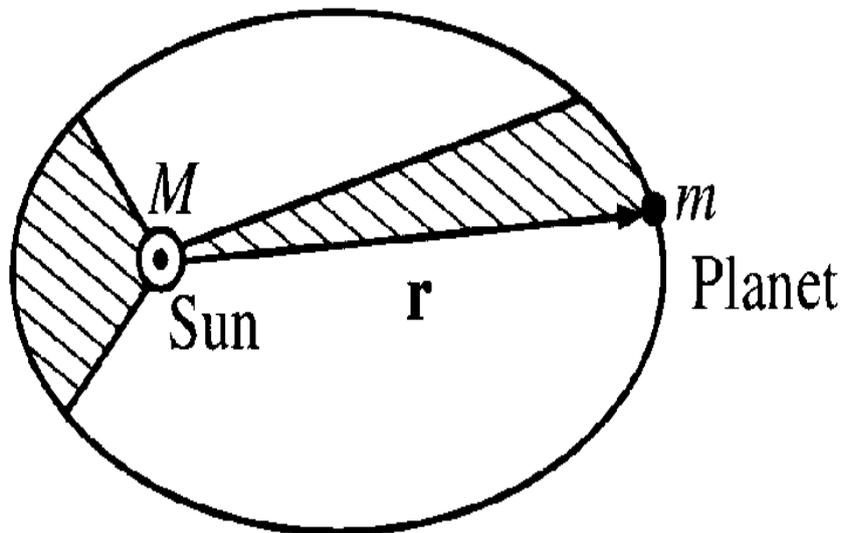


FIGURE 7.1 – loi des aires

REMARQUE : de la relation $r^2\dot{\theta} = cte = C$ avec $r^2 > 0$ donc $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} > 0$ à toujours le même signe donc le mobile tourne toujours dans le même sens si $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 0$ c'est à dire $\theta = cste$ le mouvement est rectiligne

1225

7.2.2 Conservation de l'énergie mécanique

7.2.2.1 Intégrale première du mouvement

$\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ dérivant d'une énergie potentielle $E_p(r)$, l'énergie mécanique se conserve

$$E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r) = cte$$

appelé intégrale première du mouvement

7.2.2.2 Énergie potentielle effective

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_p(r)$$

comme

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{m}{2r^2}(r^2\dot{\theta})^2 = \frac{m}{2r^2}C^2 = \frac{L^2}{2mr^2}$$

on peut écrire

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r)$$

L'énergie mécanique ne dépend plus que de \dot{r} et r :

le terme $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ est appelé énergie cinétique radiale

le terme $\frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r) = E_{p,eff}$ est appelé énergie potentielle effective

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) = cte$$

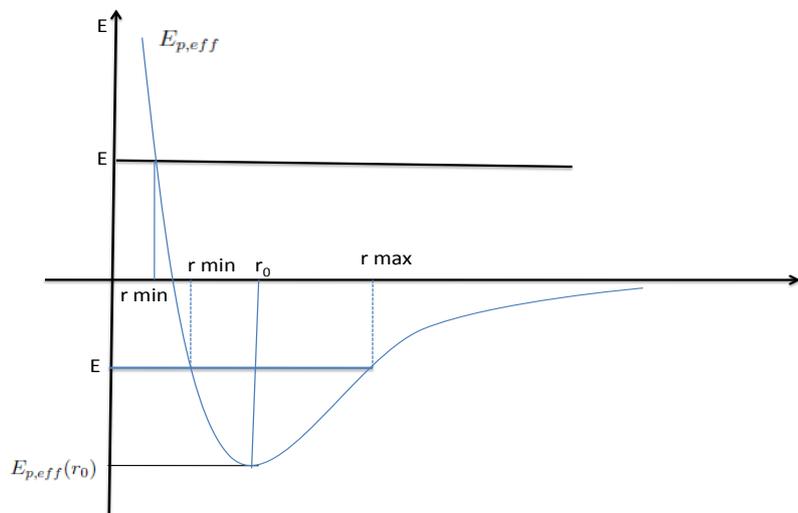
1230 7.2.2.3 États de diffusion, états liés

Le terme cinétique $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ étant positif

$E_m = cte$ est la plus grande valeur que puisse prendre $E_{p,eff}(r)$; on peut étudier pour des conditions initiales données (L et E_m) le domaine de variation de r

1235

les valeurs de r pour lesquelles $E_{p,eff} < E_m$ sont donc accessibles.
les valeurs de r pour lesquelles $E_{p,eff} > E_m$ sont donc inaccessibles



1240

FIGURE 7.2 – état lié et état de diffusion

si $E_m > 0$ alors r varie entre r_{min} et $+\infty$ le mobile provenant de ∞ atteint une distance d'approche minimale r_{min} et repart à ∞ , on parle d'état de diffusion **la trajectoire est une courbe ouverte**

1245 si $E_m < 0$ alors $r_{min} \leq r \leq r_{max}$, on parle d'état lié **la trajectoire est une courbe fermée ou bornée**

si $E_m = E_{peff}(r_0)$ alors r prend une seule valeur **la trajectoire est un cercle de rayon r_0**

1250 7.3 Mouvement dans un champ de force centrales newtonien

Le mouvement vérifie les propriétés générales du mouvement dans un champ de forces centrales conservatives (planéité du mouvement, loi des aires, énergie potentielle effective) avec $F(r) = -\frac{k}{r^2}$ et $E_p = -\frac{k}{r}$

1255 si $k > 0$ on a une attraction c'est le cas de la gravitation et deux charges de signes opposées

si $k < 0$ on a une répulsion c'est le cas de deux charges de memes signes

7.3.1 Équation générale de la trajectoire

avec les deux lois de conservation déjà vu

$$L = mr^2\dot{\theta} = mC$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = cste$$

l'énergie dépend des conditions initiales à travers L

on a montré que la trajectoire est plane. Soit l'axe Oz l'axe polaire de référence

dans le plan de la trajectoire repérons le point matériel par ses coordonnées polaires r, θ

soit $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$, alors l'accélération est donnée par la formule de Binet

$$\vec{a} = -C^2 u^2 \left[u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right] \vec{e}_r$$

avec $u = \frac{1}{r}$

la RFD donne

$$m \vec{a} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r = -k u^2 \vec{e}_r$$

l'équation du mouvement s'écrit

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{mC^2}$$

la résolution de cette équation est

$$u(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{k}{mC^2}$$

ou A et θ_0 sont données par des conditions initiales. On peut toujours choisir \vec{e}_r de tel façon que $\theta_0 = 0$

$$u(\theta) = A \cos \theta + \frac{k}{mC^2}$$

1260 en passant à l'expression de r

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

avec $p = \frac{mC^2}{k}$, $e = \frac{AmC^2}{k} = Ap$

On reconnaît l'équation d'une conique de paramètre p , d'excentricité e dont l'un des foyers est le point O

1265 si $e > 1$, M décrit une hyperbole

si $e = 1$, M décrit une parabole

si $0 < e < 1$, M décrit une ellipse

1270

si $e = 0$, M décrit un cercle

7.3.2 Interaction répulsive $k < 0$

l'énergie potentielle effective est

$$E_{peff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

cette énergie n'admet pas de minimum

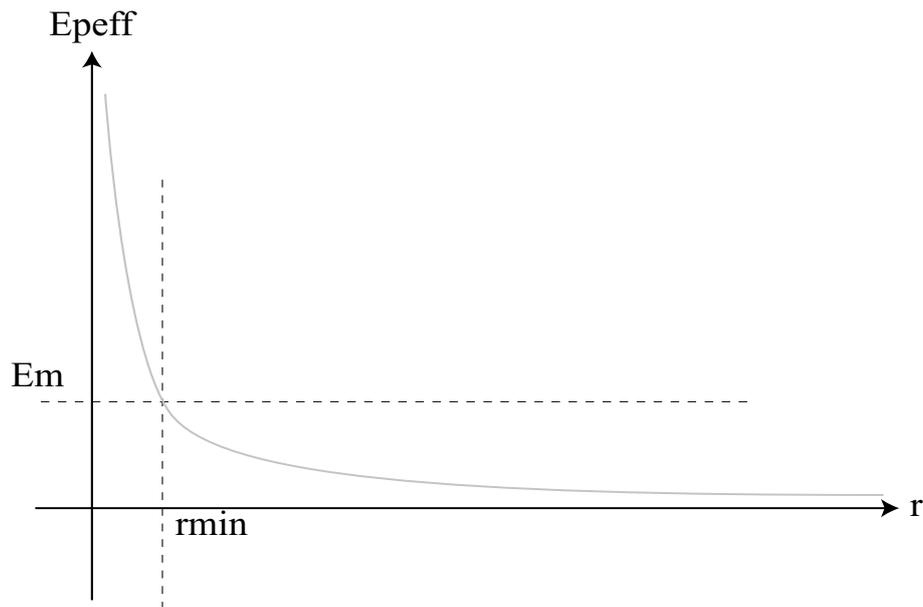


FIGURE 7.3 – interaction répulsive

∀ les conditions initiales on a un mouvement non borné on parle d'états de diffusion

$$r \in [r_{min}, +\infty[$$

r_{min} , est la valeur de r pour $\dot{r} = 0$ solution de l'équation

$$E_m r^2 - kr - \frac{mC^2}{2} = 0$$

$$r_{min} = \frac{1}{2E_m} [k + \sqrt{k^2 + 2mC^2 E_m}]$$

1275

M ne peut pas s'approcher du centre de force à une distance inférieure à r_{min} , cette position extrême s'appelle le **péricentre**.

La trajectoire correspondante correspond à une branche d'hyperbole.

7.3.3 Interaction attractive $k > 0$

1280

l'énergie passe par un minimum

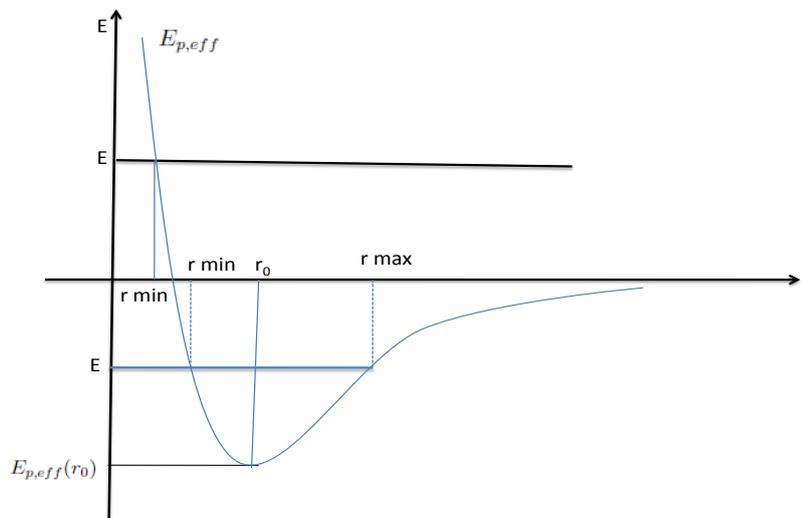


FIGURE 7.4 – état lié et état de diffusion

7.3.3.1 État de diffusion

si $E_m \geq 0$ le mouvement est non borné $r > r_{min}$, on observe encore un état de diffusion.

1285

si $E_m > 0$ La trajectoire est encore une branche d'hyperbole.

si $E_m = 0$ la trajectoire est parabolique.

7.3.3.2 État lié

si

$$E_{p,eff}(r_0) < E_m < 0$$

$r_{min} \leq r \leq r_{max}$, on a un état lié, la position de M correspondant à r_{min} est appelée **péricentre**, celle correspondant à r_{max} **apocentre**.

La trajectoire est elliptique.

Le cas particulier $r_{min} = r_{max} = r_0$ correspond à une trajectoire circulaire. l'équation

$$E_m r^2 + kr - \frac{mC^2}{2} = 0$$

alors

$$r_{min} = \frac{1}{2E_m} [k - \sqrt{k^2 + 2mC^2 E_m}]$$

$$r_{max} = \frac{1}{2E_m} [k + \sqrt{k^2 + 2mC^2E_m}]$$

on constate que

$$r_{max} + r_{min} = -\frac{k}{E_m}$$

1290 7.3.4 Étude détaillée de l'interaction attractive

7.3.4.1 énergie

l'énergie potentielle est

$$E_p = -\frac{k}{r} = -ku$$

l'énergie cinétique est

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mC^2[u^2 + (\frac{du}{d\theta})^2]$$

l'énergie mécanique s'écrit alors

$$E_m = \frac{1}{2}mC^2[u^2 + (\frac{du}{d\theta})^2] - ku$$

en utilisant l'expression de $u = \frac{1+e\cos\theta}{p}$ et ses dérivées on trouve

$$E_m = \frac{k}{2p}(e^2 - 1)$$

avec $\frac{k}{p} = \frac{mC^2}{p^2}$

GEOMETRIE PLANE : LES CONIQUES.

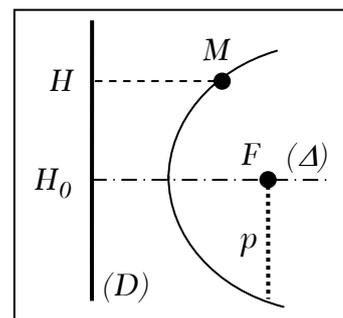
I : Généralités.

1°) Définition géométrique.

- Une conique est l'ensemble des points M d'un plan tels que le rapport des distances à un point F , appelé **foyer** et à une droite

D , appelée **directrice**, soit constant : $\frac{FM}{HM} = e$.

- Le rapport constant e est appelé **l'excentricité de la conique**.
 ➤ Le **paramètre** p d'une conique est par définition la longueur FM lorsque le rayon vecteur \overline{FM} est parallèle à la directrice D .



- Il en résulte que la distance du foyer F à la directrice D est : $FH_0 = \frac{p}{e}$.
 ➤ L'axe de symétrie FH_0 orthogonal à la directrice D , est **l'axe focal** Δ de la conique.

2°) Équation polaire d'une conique.

- Le foyer F est placé à l'origine d'un système de coordonnées polaires (r, θ) , l'axe polaire coïncidant avec l'axe focal orienté de F vers H_0 .

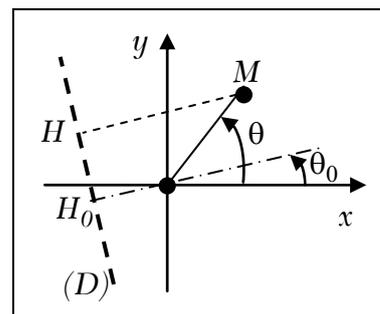
On a : $FM = r$; $\theta = (\overline{Fx}, \overline{FM})$.

De $FM = e.HM$ et $HM = H_0F + r \cos \theta = \frac{p}{e} + e \cos \theta$, on

obtient **l'équation polaire** : $r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$.

- Dans le cas où l'axe focal H_0F fait un angle θ_0 avec l'axe Fx , on obtient la forme polaire la plus générale d'une conique :

$r = \frac{p}{1 - e \cos(\theta - \theta_0)}$; l'angle θ_0 est appelé **azimuth focal**.



3°) Classification des coniques.

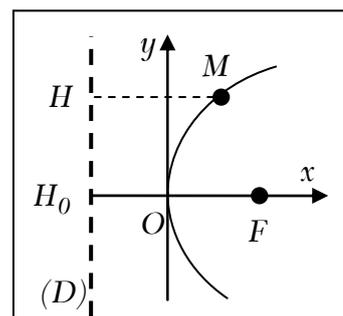
- Si $e = 1$, $r \in [r_{\min}, +\infty[$, avec $r_{\min} = \frac{p}{2}$: la conique est une **parabole**.
 ➤ Si $e < 1$, $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$, avec $r_{\min} = \frac{p}{1+e}$ et $r_{\max} = \frac{p}{1-e}$: la conique est une **ellipse**.
 ➤ Si $e > 1$, $r \in [r_{\min}, +\infty[$, avec $r_{\min} = \frac{p}{1+e}$: la conique est une **hyperbole**.

II : Parabole.

1°) Propriétés géométriques.

- Puisque $e = 1$, on a $FM = HM$: **la parabole est l'ensemble des points situés à égale distance du foyer et de la directrice**.

- Le paramètre de la parabole vérifie : $H_0O = OF = r_{\min} = \frac{p}{2}$



2°) Équation cartésienne.

- En prenant l'origine des coordonnées au sommet O de la parabole (et non plus au foyer), on obtient l'équation cartésienne canonique de la parabole : $y^2 = 2px$.

(Il suffit d'écrire : $FM^2 = HM^2$, soit encore : $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$)

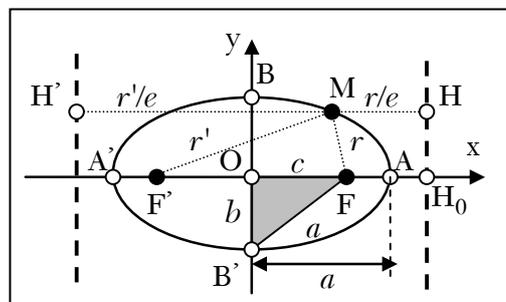
III : Ellipse.

1°) Propriétés géométriques.

➤ **Définitions et relations :**

Une ellipse de centre O et de foyers F et F' est caractérisée par :

- Un demi-grand axe a ($OA = OA' = a$).
- Un demi-petit axe b ($OB = OB' = b$).
- Une excentricité e et un paramètre p.
- La distance c entre le centre O et l'un des foyers ($OF = OF' = c$), telle que $c = ea$.



➤ **Définition bifocale d'une ellipse :**

Une ellipse de foyers F et F', de demi-grand axe a, est le lieu des points M tels que : $MF + MF' = 2a$.

Démonstration : par définition d'une conique, on a pour l'ellipse : $\frac{MF}{MH} = e$ ou $\frac{MF'}{MH'} = e$

$$\text{Par ailleurs, } H'H = \frac{r}{e} + \frac{r'}{e} = \frac{1}{e}(r+r') = 2OH_0 = 2(OA + AH_0) = 2\left(a + \frac{a-c}{e}\right) = 2\frac{a}{e}.$$

D'où la relation cherchée : $r + r' = 2a$.

➤ **Relations à connaître :**

Il découle de la définition géométrique d'une ellipse les relations suivantes :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \quad ; \quad \boxed{e = \frac{c}{a}} \quad ; \quad \boxed{p = \frac{b^2}{a}}.$$

Ainsi, connaissant deux des trois distances a, b, c, on peut en déduire p et e.

Inversement, connaissant p et e, on peut retrouver a, b et c :

En prenant l'origine au foyer F, le point de l'ellipse le plus près de F est appelé **périgée** et le point le plus éloigné l'**apogée**. Au **périgée** : $r_{\min} = \frac{p}{1+e}$ et à l'**apogée** : $r_{\max} = \frac{p}{1-e}$.

$$\text{On en déduit : } \boxed{a = \frac{p}{1-e^2}} \quad ; \quad \boxed{b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}} \quad ; \quad \boxed{c = \frac{pe}{1-e^2}}$$

Surface d'une ellipse : on rappelle que $S = \pi ab$.

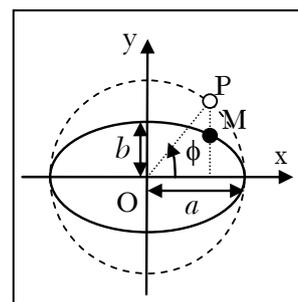
2°) Équation paramétrique et cartésienne.

➤ **Représentation paramétrique d'une ellipse :**

Considérons le cercle de centre O et de rayon $OA = a$.

L'ellipse se déduit de ce cercle par une affinité orthogonale par rapport à son axe focal, de rapport b/a .

En faisant intervenir l'angle $\phi = (\overline{Ox}, \overline{OP})$, **anomalie excentrique**, on



obtient les équations paramétriques de l'ellipse, avec origine au centre O de l'ellipse :

$$\boxed{x = a \cos \phi} \text{ et } \boxed{y = b \sin \phi}.$$

1295 ➤ **Représentation cartésienne d'une ellipse :** elle s'écrit : $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$.

3°) Cas particulier du cercle.

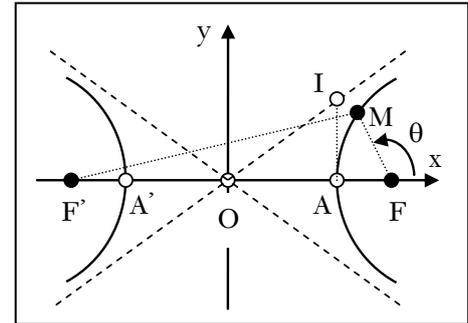
Un cercle est une ellipse d'excentricité nulle. Ainsi, les foyers F et F' sont confondus en O, centre du cercle.

IV : Hyperbole.

1°) Propriétés géométriques.

➤ **Définition bifocale d'une hyperbole :**

Une hyperbole de foyers F et F', de demi-grand axe a, est le lieu des points M tels que : $\boxed{|MF - MF'| = 2a}$ ($AA' = 2a$).



➤ **Relations à connaître :**

On note $\underline{AA' = 2a}$; $\underline{AI = b}$ et $\underline{FF' = 2c}$.

$$\text{On a alors : } \boxed{a^2 + b^2 = c^2} ; \boxed{e = \frac{c}{a}} ; \boxed{p = \frac{b^2}{a}}$$

Comme pour l'ellipse, connaissant p et e, on peut retrouver a, b et c :

En effet : pour $\theta = 0$, $r' = F'A' = c + a = \frac{p}{e-1}$,

Pour $\theta = \pi$, $r = FA = c - a = \frac{p}{e+1}$.

$$\text{Donc, } 2c = \frac{p}{e+1} + \frac{p}{e-1} = \frac{2pe}{e^2-1}. \text{ D'où : } \boxed{a = \frac{p}{e^2-1}} ; \boxed{b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}} ; \boxed{c = \frac{pe}{e^2-1}}$$

2°) Équation cartésienne.

L'équation cartésienne canonique d'une hyperbole, avec l'origine O placée en son centre de symétrie est : $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$.

➤ **Equations des asymptotes :**

Lorsque $x \rightarrow \infty$, on a $\frac{y^2}{b^2} \approx \frac{x^2}{a^2}$, conduisant à **deux droites asymptotes** d'équations :

$$\boxed{y = \pm \frac{b}{a}x}$$
 qui se coupent en O.

7.3.4.2 trajectoires circulaires

on a $e = 0$ donc $E_m = -\frac{k}{2p}$
 le rayon est alors constant et égal à sa valeur initiale $r_0 = p$
 la conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{r_0} = -\frac{k}{2p} = -\frac{k}{2r_0}$$

d'où

$$mv_0^2 r_0 = k$$

donc v_0 est aussi une constante ($\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$)

7.3.4.3 trajectoires paraboliques

on a $e = 1 \Rightarrow E_m = 0$
 la conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{r_0} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = 0$$

d'où

$$v_0 = \sqrt{\frac{2k}{mr_0}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2k}{mr}}$$

la distance minimale d'approche est pour $\theta = 0$ soit $r_{min} = \frac{p}{2}$ donc $r \in [\frac{p}{2}, +\infty[$

1300

le mouvement n'est pas périodique mais décrit suivant la loi des aires

7.3.4.4 trajectoires hyperboliques

on a $e > 1 \Rightarrow E_m > 0$

1305

$$v_0 > \sqrt{\frac{2k}{mr_0}}$$

la distance minimale de O centre de force est

$$r_{min} = \frac{p}{1+e}$$

donc $r \in [\frac{p}{1+e}, +\infty[$

le mouvement n'est pas périodique mais décrit suivant la loi des aires

1310 7.3.4.5 trajectoires elliptiques

$$0 < e < 1 \Rightarrow E_m < 0 \Rightarrow v_0 < \sqrt{\frac{2k}{mr_0}}$$

▲ pour $\theta = \pi$ c'est l'apocentre on a :

$$r_a = r_{max} = \frac{p}{1-e}$$

autour de la terre s'appelle apogée autour du soleil s'appelle aphélie

▲ pour $\theta = 0$ c'est le péricentre on a :

$$r_a = r_{max} = \frac{p}{1+e}$$

autour de la terre s'appelle périogée autour du soleil s'appelle périphélie

① on constate que

$$r_{max} + r_{min} = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} = \frac{2p}{1-e^2} = 2a = -\frac{k}{E_m}$$

$$p = a(1-e^2)$$

donc

$$E_m = -\frac{k}{2a}$$

l'énergie ne dépend que du grand axe de l'ellipse. toutes les ellipses de meme grand axe mais d'excentricités différentes ont meme énergie il y a dégénérescence

1315

② période de révolution T à partir de la loi des aires

$$\frac{dS}{dt} = \frac{S}{T} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{C}{2}$$

d'où

$$T = \frac{2\pi ab}{C}$$

avec $b^2 = pa$ et $p = \frac{mC^2}{k}$ en élevant au carré l'expression de la période

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{C^2} = \frac{4\pi^2 a^3 m}{k}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{k} = cste$$

si $k = \mathcal{G}mM$ alors on a

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M} = \text{cste}$$

c'est le troisième loi de Kepler

7.3.5 Mouvements des planètes - Lois de Képler

7.3.5.1 Lois de Képler

Ces lois historiques concernent les mouvements des planètes autour du Soleil, elles se généralisent à tous les mouvements à force gravitationnelle centrale.

1^{re} loi : les planètes autour du Soleil décrivent des ellipses dont l'un des foyers est occupé par le Soleil.

2^e loi : le mouvement d'une planète obéit à la loi des aires ; pendant des durées égales Δt , le rayon vecteur \overrightarrow{OM} balaye des aires égales $S = \frac{C}{2}\Delta t$ où C est la constante des aires liée à la planète considérée.

3^e loi :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}$$

où T est la période de révolution elliptique de la planète autour du Soleil, a le demi grand-axe de la trajectoire elliptique et $M = M_S$ la masse du Soleil ; la masse de la planète n'intervient pas.

req : ces lois s'appliquent aux satellites artificielles

7.3.5.2 Vitesses cosmiques

■ **La vitesse circulaire ou vitesse de satellisation ou première vitesse cosmique** : concerne la satellisation d'un satellite en orbite basse est la vitesse à communiquer initialement à un corps pour qu'il décrive une orbite circulaire de rayon $r_0 = R_T + h \approx R_T$ autour de la terre de masse M_T :

$$E_m = -\frac{k}{2r_0}$$

$$\frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{k}{r_0} = -\frac{k}{2r_0} \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_0}}$$

si $r_0 = R_T$

$$v_c = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{g_0 R_T} = 7,8 \text{ km s}^{-1}$$

la période de révolution est

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^4 R_T^3}{\mathcal{G}M_T}} \simeq 1 \text{ h } 24 \text{ min}$$

☛ pour un satellite géostationnaire $T = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$

$$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T} \Rightarrow r_0 = 42227 \text{ km}$$

la vitesse

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_0}} \simeq 3 \text{ km s}^{-1}$$

l'altitude vaut

$$h = r_0 - R_T \simeq 36000 \text{ km}$$

■ **La vitesse parabolique ou vitesse de libération ou deuxième vitesse cosmique** : est la vitesse à communiquer initialement à un corps pour qu'il échappe à l'attraction de la terre de masse M_T :

$$\frac{1}{2} m v_l^2 - \frac{k}{R_T} = 0 \Rightarrow v_l = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{2g_0 R_T} = 11,2 \text{ km s}^{-1}$$

4. Influence du frottement sur la trajectoire d'un satellite

1325

Un satellite décrit autour de la Terre une trajectoire circulaire de rayon r .

a) Calculer en fonction de M , masse de la Terre, m , masse du satellite et \mathcal{G} , constante de gravitation :

- l'énergie cinétique,
- l'énergie potentielle,
- l'énergie totale \mathcal{E} du satellite.

b) Le rayon r étant tel que l'altitude du satellite soit de 100 km, il est soumis au frottement des molécules de la haute atmosphère. Son énergie varie de $\Delta\mathcal{E}$ au cours d'une révolution.

- Quel est le signe de $\Delta\mathcal{E}$?
- Trouver une relation entre $\Delta\mathcal{E}$ et la variation du rayon de la trajectoire.

- Calculer la variation relative de vitesse $\frac{\Delta v}{v}$ du satellite.

c) Application numérique

- Calculer la période de révolution du satellite.
- En un jour solaire, l'altitude du satellite diminue de 0,5 km. Calculer l'énergie perdue par tour, et l'intensité de la force de frottement.

On donne :

rayon de Terre : $R = 6\,400$ km ;

masse de la Terre : $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg ;

constante de gravitation : $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I. ;

masse du satellite : $m = 2\,000$ kg ;

1 jour solaire = 86 400 s.

On étudie le mouvement de deux points matériels P_1 et P_2 , de masse m_1 et m_2 , en interaction newtonienne : la force exercée par P_1 sur P_2 s'écrit $\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$. La position de la particule réduite P est repérée par ses coordonnées polaires d'origine G (centre de masse du système). L'axe d'origine des angles est l'axe (Ox) . On se propose, dans cet exercice, de retrouver les résultats du cours au sujet de la trajectoire de P de plusieurs manières différentes.

1) On pose $\vec{A} = \frac{1}{\mu k} \vec{p} \wedge \vec{L} - \vec{e}_r$, où \vec{p} est la quantité de mouvement de P , \vec{L} son moment cinétique en G

et μ la masse réduite du système.

a) Montrer que \vec{A} est une constante du mouvement. On l'appelle « vecteur de Runge-Lenz ».

b) Déterminer les composantes de \vec{A} dans la base polaire ; en déduire l'équation de la trajectoire. On appelle A la norme de \vec{A} et θ_0 l'angle entre \vec{A} et (Ox) . Comment est dirigé \vec{A} par rapport à la trajectoire ?

c) Montrer que $A^2 = 1 + 2\frac{L^2 \mathcal{E}}{\mu k^2}$, où \mathcal{E} est l'énergie du système. En déduire, lorsque L est fixé, une

borne inférieure pour l'énergie \mathcal{E} . Déterminer la relation entre l'énergie \mathcal{E} et l'excentricité e de la trajectoire. Dans le cas d'une trajectoire elliptique, pour une énergie \mathcal{E} fixée, entre quelles limites le moment cinétique L reste-t-il compris ? Calculer sa limite supérieure L_0 en fonction de μ , \mathcal{E} et k . Préciser la nature de la trajectoire pour $L = 0$ et pour $L = L_0$.

2) On rappelle les formules de Binet :

$$\vec{v} = -C \frac{du}{d\theta} \vec{e}_r + Cu \vec{e}_\theta, \text{ soit encore } v^2 = C^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right), \text{ où } u = \frac{1}{r} \text{ et } C = \frac{L}{\mu}. \quad (1)$$

$$\vec{a} = -C^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \vec{e}_r. \quad (2)$$

a) Déterminer l'équation polaire de la trajectoire en utilisant (2).

b) Retrouver la relation entre l'énergie \mathcal{E} et l'excentricité e en utilisant (1).

3) a) Écrire l'équation différentielle reliant la vitesse \vec{v} à \vec{e}_θ . Montrer que l'on peut intégrer cette équation sous la forme (1) : $\vec{v} = K(\vec{e}_\theta + \vec{e})$, où \vec{e} est un vecteur constant, appelé « vecteur excentricité » (on

notera $e = \|\vec{e}\|$ et $(\vec{OX}, \vec{e}) = \theta_0 + \frac{\pi}{2}$) et où K est une constante que l'on déterminera en fonction de μ , k et C .

Montrer que, en multipliant scalairement l'équation précédente par e_θ , on peut en déduire la trajectoire

de M en coordonnées polaires : $r = \frac{p}{1 + q \cos(\theta - \theta_0)}$.

Déterminer le paramètre p en fonction de μ , k et C et l'excentricité e en fonction de e .

b) En élevant le vecteur excentricité au carré, montrer que l'on peut obtenir l'énergie totale \mathcal{E} de M sous la forme (3) : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0(e^2 - 1)$. On déterminera \mathcal{E}_0 en fonction de μ , k et C . Discuter la nature de la trajectoire suivant la valeur de \mathcal{E} .

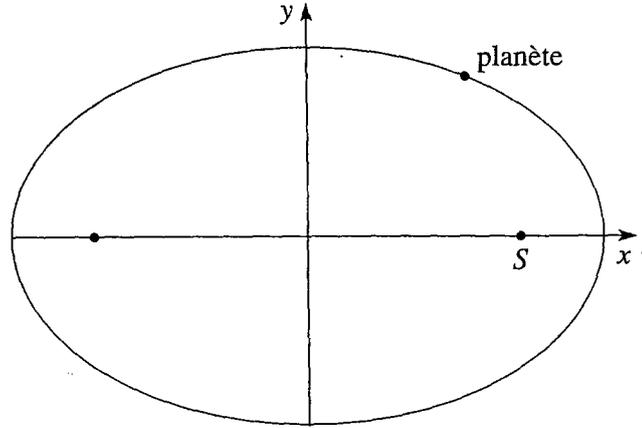
En Relativité Générale, le mouvement d'une planète de masse m autour du Soleil, assimilé à une sphère homogène de masse M_0 et de centre S , doit être décrit comme si au potentiel d'attraction newtonienne

subit par la masse (de la forme $V(r) = -G \frac{M_0 m}{r}$) se superposait un potentiel perturbateur

$$V_P(r) = -\frac{GM_0}{c^2} \frac{L^2}{m r^3} = \frac{\varepsilon}{3r^3}, \text{ où } c \text{ désigne la vitesse de la lumière } (c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}). \text{ On prendra}$$

$M_0 = 2.10^{30} \text{ kg}$ (on suppose que $M_0 \gg m$ de telle sorte que l'on peut considérer le Soleil comme immobile). On traitera V_P comme une perturbation par rapport au potentiel newtonien V .

1) Quelle condition doit satisfaire le mouvement de la planète pour qu'il en soit ainsi ? Vérifier rapidement si l'on peut appliquer cette approximation à la Terre et à Mercure (dont la période de révolution autour du soleil est de 88 jours). On rappelle que la distance Terre-Soleil est $R_T = 1,5.10^{11} \text{ m}$. On admet alors qu'en première approximation la trajectoire de la planète reste sensiblement elliptique. On appelle (Ox) l'axe focal et (Oy) l'axe perpendiculaire à (Ox) .



2) Exprimer $\frac{d\vec{A}}{dt}$ où \vec{A} est le vecteur de Runge-Lenz, en fonction de ε, G, M_0 , de θ et de $\frac{d\theta}{dt}$, ainsi que de l'excentricité e et du paramètre p de l'ellipse (cf. exercice 5, dont on utilisera les résultats).

Ce vecteur sera exprimé dans la base polaire puis dans la base cartésienne (\vec{e}_x, \vec{e}_y) . En déduire que la variation $\Delta\vec{A}$ du vecteur \vec{A} pendant une période de révolution de la planète sur sa trajectoire elliptique est égale à $\Delta\vec{A} = 2e\pi \frac{\varepsilon}{GM_0 p^2} \vec{e}_y$.

$$\text{Données : } \int_0^{2\pi} (1 + e\cos\theta)^2 \cos\theta d\theta = 2e\pi \text{ et } \int_0^{2\pi} (1 + e\cos\theta)^2 \sin\theta d\theta = 0.$$

En déduire que le potentiel perturbateur V_P d'origine relativiste entraîne une déformation de la trajectoire correspondant à une rotation lente du grand axe de l'ellipse, dans son plan, autour du Soleil.

3) Calculer l'angle $\Delta\phi$ dont tourne la trajectoire de la planète pendant une période de révolution en fonction de G, M_0, c et de p , puis en fonction de G, M_0, c et des distances maximale et minimale, r_A et r_p , de la planète au Soleil.

4) En déduire « l'avance séculaire » $\delta\Omega$ pour une planète dont la période de révolution, exprimée en jours sidéraux, est T , c'est-à-dire l'angle dont a tourné le grand axe de sa trajectoire au bout d'un siècle (on rappelle qu'un an correspond à $T_0 = 365,25$ jours sidéraux).

Calculer $\delta\Omega$ en secondes d'arc (1 seconde d'arc est égale à $\frac{1}{3600}$ degré) pour Mercure, dont l'aphélie

se trouve à $7,0.10^{10} \text{ m}$ du Soleil et le périhélie à $4,6.10^{10} \text{ m}$. Expérimentalement, on trouve $\delta\Omega = 42,6 \pm 0,9$ secondes d'arc. La théorie relativiste rend-elle effectivement compte de cette valeur ?

Mouvement à force centrale et potentiel newtonien

Exercices

Applications directes du cours

1. Mouvement d'une planète

On considère le mouvement d'une planète, assimilée à un point matériel P de masse m_P , dans le champ gravitationnel du Soleil, de centre O et de masse m_S .

On pose $K = Gm_S$ et on utilise la variable $u = \frac{1}{r}$ avec $r = OP$.

On rappelle la première formule de Binet donnant la vitesse $v : v = C \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ où

C est la constante des aires.

On note L la norme du moment cinétique de P par rapport au point O .

- Exprimer l'énergie mécanique E_m du point matériel P . Montrer que le mouvement de P satisfait à l'équation différentielle $\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 - \alpha u = \beta$, où α et β sont des constantes que l'on exprimera en fonction de K , m , L et E_m .
- Résoudre l'équation différentielle. Montrer que la trajectoire de P est une conique dont on calculera l'excentricité e d'abord en fonction de α et β , puis en fonction de K , L , m et E_m . En déduire la nature de la conique suivant le signe de E_m .

2. Vecteur excentricité

Soit un point matériel M (de masse m) qui subit la force gravitationnelle d'un astre A (de centre O et de masse m_1), de type $\vec{f} = -k \frac{\vec{e}_r}{r^2}$ avec $k > 0$.

La position du point M , dans le référentiel galiléen d'étude \mathcal{R} est repérée par les coordonnées polaires $OM = r$ et $(Ox, OM) = \theta$.

- Le vecteur excentricité est défini par $\vec{e} = \frac{mC}{k} \vec{v} - \vec{e}_\theta$, où \vec{v} est la vitesse du point M et C la constante des aires.
Montrer que le vecteur \vec{e} est une constante du mouvement.
- L'axe de symétrie de la trajectoire de M est pris comme axe polaire Ox . Justifier que le vecteur excentricité est colinéaire à l'axe Oy , orthogonal à Ox .
En utilisant le vecteur excentricité, établir l'équation polaire de la trajectoire de M . En déduire que l'on obtient un conique d'excentricité $e = \|\vec{e}\|$ et de paramètre $p = \frac{mC^2}{k}$.
- Montrer que e est liée à l'énergie mécanique E_m par la relation $e^2 = 1 + \frac{2mC^2}{k^2} E_m$.
En déduire la nature de la conique suivant le signe de E_m .

4. Demi-ellipse de transfert

On désire transférer un satellite terrestre d'une orbite circulaire basse de rayon r_1 à une orbite circulaire haute de rayon $r_2 > r_1$. Pour cela, en un point P de l'orbite basse, on communique à l'aide de fusées pendant un temps très court, une vitesse supplémentaire faisant décrire au satellite une demi-ellipse se raccordant tangentiellement en A à l'orbite haute. Arrivé en A , on communique à nouveau au satellite le supplément de vitesse lui permettant de décrire l'orbite circulaire haute. On note g_0 l'accélération de la pesanteur au niveau du sol et R_T le rayon de la Terre.

- Calculer la vitesse v_1 du satellite circulaire sur son orbite basse et la nouvelle vitesse v'_1 après l'allumage des fusées, sachant que \vec{v}_1 et \vec{v}'_1 sont colinéaires.
- À quelle vitesse v'_2 le satellite atteint-il le point A ? Quelle est la vitesse finale v_2 du satellite sur son orbite haute?

III – Mouvement dans un champ newtonien

On considère un satellite de masse m se trouvant à une distance r du centre O de la terre. On note G la constante de gravitation, M_t la masse de la terre et r la distance entre O et le satellite.

1. a) Comment s'écrit la force subie par le satellite ?
- b) Déterminer l'énergie potentielle Ep du satellite (avec la convention $Ep = 0$ à l'infini).
- c) Comment s'exprime ici le théorème du viriel ? Quelle propriété de l'énergie retrouve-t-on pour un état lié ?
- d) Dans le cas où la trajectoire du satellite est circulaire de rayon r_o , déterminer sa vitesse v_o .

Pour la suite, le satellite est lancé à une distance r_o , avec une vitesse orthoradiale (orthogonale au rayon vecteur) de module

$$v_o = \alpha \sqrt{\frac{GM_t}{r_o}} \text{ avec } 1 < \alpha < \sqrt{2}$$

2. a) Montrer que le mouvement est plan. Celui-ci est repéré en coordonnées polaires (r, θ) dans son plan ; montrer que la quantité $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est constante. Déterminer la valeur de cette constante que l'on notera C .
 - b) Montrer que la trajectoire est bornée.
 - c) Montrer que l'équation polaire de la trajectoire peut s'écrire $r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$ avec $p = \frac{C'}{GM_t}$ où C' est une constante que l'on déterminera.
En outre, il est rappelé que dans le cas d'une trajectoire elliptique l'énergie mécanique vaut $E = \frac{-GM_t m}{2a}$ avec a le demi grand axe.
 - d) Déterminer le paramètre p de la trajectoire du satellite en fonction de r_o .
 - e) Déterminer l'excentricité de la trajectoire en fonction de α seulement.
 - f) Calculer les rayons au périhélie et à l'apogée. Représenter la trajectoire en précisant le point de départ, l'axe polaire, les foyers.
3. a) Exprimer l'énergie cinétique du satellite en fonction de G , M_t , p , e et θ .
 - b) Exprimer de même l'énergie potentielle Ep en fonction de G , M_t , p , e et θ .
 - c) Dédire du théorème du viriel que $\langle \cos(\theta) \rangle = -e$. Ce résultat vous surprend-t-il ?
Que pensez-vous de $\langle \sin(\theta) \rangle$?

4. Pour mieux cerner le résultat précédent on cherche à évaluer les durées de passage du satellite Δt_1 pour un angle θ passant de $-\pi/2$ à $\pi/2$ et Δt_2 pour un angle θ passant de $\pi/2$ à $3\pi/2$.

a) On rappelle la troisième loi de Kepler $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_t}$; exprimer la période T en fonction de p , C et e .

b) Exprimer la durée Δt que met le satellite pour passer d'un angle polaire θ_1 à θ_2 ; on donnera le résultat en fonction de la période et d'une intégrale sans dimension.

si $e = 0,5$ le calcul numérique donne le résultat suivant :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + e \cos(\theta))^2} = 0,195$$

Ce résultat est-il en accord avec celui obtenu au 3c) ?

5. On considère maintenant le mouvement d'un électron dans un atome d'hydrogène en supposant le noyau fixe en O.

L'électron a une masse $m = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ et une charge $-q$ avec $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

a) Pourquoi la trajectoire de l'électron est-elle, en général, une ellipse ?

b) On se place dans un cas où l'excentricité de la trajectoire est faible ($e \ll 1$).

Comment s'écrit le moment dipolaire instantané de l'atome d'hydrogène ?

Proposer une expression approchée du moment dipolaire moyen en fonction du paramètre de la trajectoire p_o et de l'excentricité e .

Quelle valeur obtient-on pour $p_o = 0,05 \text{ nm}$ et $e = 0,05$? Le résultat sera donné en Debye :

$$1D = 1/3 \cdot 10^{-29} \text{ Cm}.$$

c) Que vaut réellement le moment dipolaire d'un atome d'hydrogène ? Que pensez-vous du modèle précédent ?

PHYSIQUE

Durée : 3 h 30

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les problèmes I et II sont indépendants.

I. Cosmologie : Orbitogramme de la Vilette

A. Étude cinématique :

On considère un référentiel galiléen associé au repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, l'axe Oz est vertical ascendant. La position d'un point matériel M sera définie par ses coordonnées cylindriques, r ($r > 0$), θ et z .

On notera respectivement \vec{e}_r et \vec{e}_θ les vecteurs unitaires déduits de \vec{e}_x et \vec{e}_y par rotation d'angle θ autour de Oz .

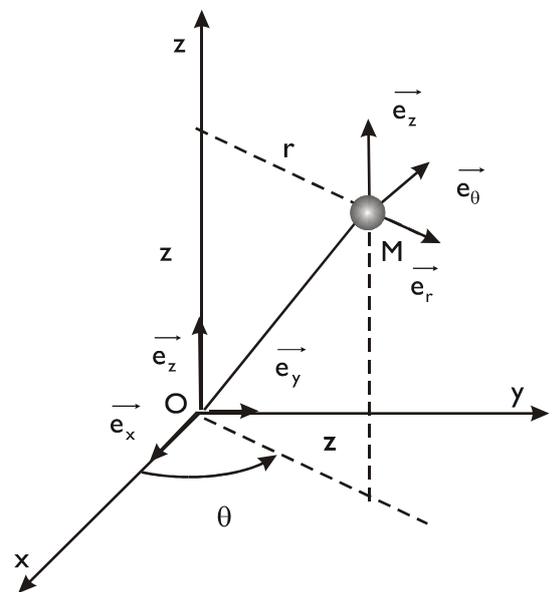
I.A.1 Exprimer \vec{OM} dans la base cylindrique.

I.A.2. En déduire la vitesse $\vec{v}(M)$ dans cette même base.

I.A.3. Montrer que l'accélération peut se mettre sous la forme :

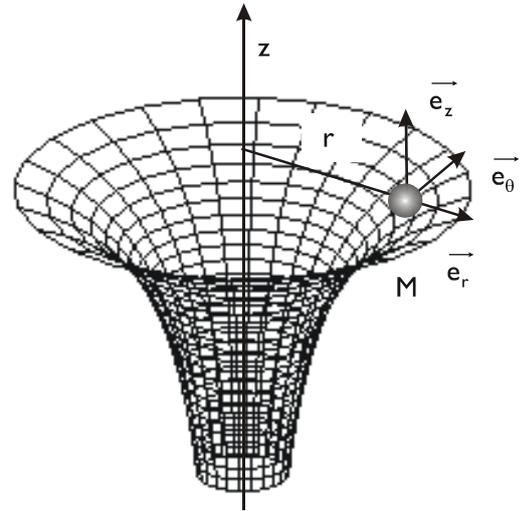
$$\vec{a}(M) = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \vec{e}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z$$

I.A.4. Montrer que $\vec{a} \cdot \vec{e}_\theta$ peut s'écrire aussi : $\vec{a} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right)$



B. Étude dynamique et énergétique :

On étudie le mouvement d'une bille d'acier M , de masse m assimilée à un point matériel sur une surface de révolution. La surface sur laquelle roule la bille est engendrée par la révolution d'une portion d'hyperbole, $z = \frac{-k}{r}, k > 0$. La bille se comporte sur cette surface comme un corps céleste soumis à une force de gravitation.



I.B.1 Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par un point M_1 de masse m_1 sur un point M_2 de masse m_2 . On notera $r = M_1M_2$ la distance entre les points et $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{r}$ le vecteur unitaire orienté de M_1 vers M_2 .

I.B.2. Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle dont on établira l'expression. On choisira l'origine de l'énergie potentielle lorsque r tend vers l'infini.

On revient à l'étude de la bille.

On néglige les frottements. La réaction normale du support sera notée : $\vec{R}_N = R_r \vec{e}_r + R_\theta \vec{e}_\theta + R_z \vec{e}_z$.

I.B.3 Justifier sans calcul que $R_\theta = 0$.

I.B.4 Faire un bilan des forces s'exerçant sur la bille. Préciser si ces forces dérivent d'une énergie potentielle. Dans l'affirmative, préciser l'expression de l'énergie potentielle associée en fonction de la variable r uniquement. On choisira l'origine de l'énergie potentielle lorsque r tend vers l'infini.

I.B.5 Ecrire le principe fondamental de la dynamique et faire la projection dans la base cylindrique. En déduire que la quantité $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est une constante notée C .

I.B.6 Exprimer l'énergie mécanique sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2} m \alpha(r) \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r}. \text{ Préciser } \alpha(r) \text{ en fonction de } k \text{ et } r.$$

Que peut-on dire de l'énergie mécanique ?

I.B.7 On peut donc définir une énergie potentielle effective $E_{peff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r}$. Tracer l'allure de la courbe $E_{peff}(r)$.

En fonction de la valeur de l'énergie mécanique initiale du système E_0 , discuter le caractère lié ou libre du mouvement.

I.B.8 Pour quelle valeur de r a-t-on un mouvement circulaire ?

On exprimera le rayon du mouvement circulaire r_c en fonction de C , g et k .

I.B.9 On lance la bille d'une distance r_0 avec une vitesse \vec{v}_0 .

Préciser la direction et le module de \vec{v}_0 pour avoir un mouvement circulaire.

Chapitre 8

Caractère galiléen approché de quelques référentiels d'utilisation courante

1335

Sommaire

1340

1345

8.1 définitions	115
8.1.1 Référentiel de Copernic	115
8.1.2 Référentiel héliocentrique ou de kepler	116
8.1.3 Référentiel géocentrique	116
8.2 Référentiel terrestre - Poids	116
8.2.1 définition	116
8.2.2 poids d'un corps	117
8.2.3 RFD dans le référentiel terrestre	117
8.2.4 champ de pesanteur terrestre	118
8.2.5 effet de la force de coriolis	119

1350

8.1 définitions

8.1.1 Référentiel de Copernic

Le référentiel de Copernic a pour origine le centre de masse du système solaire (presque confondu avec le centre du Soleil) et ses axes sont dirigés vers trois étoiles suffisamment éloignées pour pouvoir être considérées comme fixes

1355

si on considère ce référentiel comme galiléen si le terme de marée crée par la galaxie est négligeable devant le champs d'attraction du soleil. Il est galiléen avec une excellente approximation

8.1.2 Référentiel héliocentrique ou de kepler

1360 Idem avec comme origine le centre du Soleil
Il est galiléen avec une excellente approximation
la terre fait un mouvement de translation elliptique dans le référentiel de copernic (pratiquement circulaire car $e = 0,01673$)

8.1.3 Référentiel géocentrique

1365 Le référentiel géocentrique a pour origine le centre de masse la Terre T et ses axes gardent une direction fixe par rapport à ceux du référentiel de Copernic ; le référentiel géocentrique est donc en translation elliptique par rapport au référentiel de Copernic

1370 L'accélération de la Terre dû à sa trajectoire elliptique autour du Soleil est faible, si on la néglige, on peut alors considérer que le référentiel géocentrique est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic et qu'il est donc lui-même galiléen

8.2 Référentiel terrestre - Poids

1375 8.2.1 définition

Le référentiel terrestre a pour origine un point S à la surface de la Terre de latitude λ et ses axes
 Ox suivant un méridien dans la direction Nord-Sud
 Oy suivant un parallèle dans la direction Ouest-Est
 Oz suivant la verticale ascendante du lieu
tournent autour de l'axe pôle Sud-pôle Nord. On supposera

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}_{\text{terrestre}}/\mathcal{R}_{\text{géocentrique}}} = \vec{c}te$$

ce qui revient à considérer que le référentiel terrestre est en rotation uniforme autour d'un axe fixe du référentiel géocentrique que l'on considérera galiléen ; le référentiel terrestre n'est donc pas galiléen.

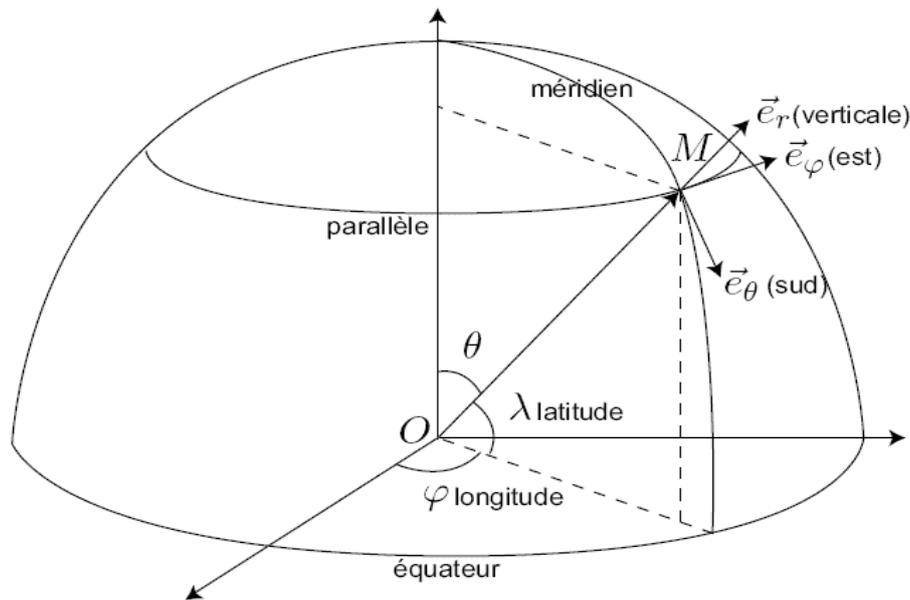


FIGURE 8.1 – coordonnées géographiques

1380

8.2.2 poids d'un corps

le poids est défini expérimentalement comme la force opposée à celle qui maintient le corps en équilibre dans le référentiel terrestre.

8.2.3 RFD dans le référentiel terrestre

Appliquons le PFD dans le référentiel terrestre à un point matériel M de masse m soumis en plus de l'attraction terrestre à une résultante des forces \vec{f}

$$m \vec{a}_r(M) = m \vec{G}_T(M) + m \vec{G}_a(M) + \vec{f} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

$$m \vec{a}_r(M) = m \vec{G}_T(M) + m \vec{G}_a(M) + \vec{f} - m \vec{a} e - 2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r(M)$$

à l'équilibre dans le référentiel terrestre $\vec{v}_r = \vec{0}$, $\vec{a}_r = \vec{0}$, $\vec{a}_c = \vec{0}$ d'où

$$m \vec{G}_T(M) + m \vec{G}_a(M) + \vec{f} - m \vec{a} e = \vec{0}$$

le poids est

$$\vec{P} = -\vec{f} = m \vec{G}_T(M) + m \vec{G}_a(M) - m \vec{a} e$$

or $\vec{P} = m \vec{g}$ ou \vec{g} est le champ de pesanteur donc

$$\vec{g}(M) = \vec{G}_T(M) + \vec{G}_a(M) - \vec{a} e$$

c'est la relation qui relie le champ de pesanteur au champ de gravitation et l'inertie

1385

finalement la RFD dans le référentiel terrestre s'écrit

$$\boxed{m \vec{a}_r(M) = \vec{P} + \vec{f} - 2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r(M)} \quad (8.1)$$

Le poids prend donc en compte une partie du caractère non galiléen du référentiel terrestre .Lorsque l'on considérait le référentiel terrestre galiléen, on négligeait la force d'inertie de Coriolis mais on prenait quand même en compte le force d'inertie d'entraînement par l'intermédiaire du poids

8.2.4 champ de pesanteur terrestre

de l'équation

$$\vec{g}(M) = \vec{G}_T(M) + \vec{G}_a(M) - \vec{a}_e(M)$$

avec $\vec{a}_e(M)$ est l'accélération d'entraînement par rapport au référentiel de copernic

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}(T) - \Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

si on suppose que la terre est un point matériel dans le référentiel de copernic elle soumise à la force de gravitation des autres astres

$$M_T \vec{a}(T) = M_T \vec{G}_a(T) \Rightarrow \vec{a}(T) = \vec{G}_a(T)$$

donc

$$\vec{a}_e(M) = \vec{G}_a(T) - \Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

est par conséquent

$$\begin{aligned} \vec{g}(M) &= \vec{G}_T(M) + \vec{G}_a(M) - \vec{G}_a(T) + \Omega^2 \overrightarrow{HM} \\ \vec{g}(M) &= \underbrace{\vec{G}_T(M) + \Omega^2 \overrightarrow{HM}}_{\text{terme preponderant}} + \underbrace{\vec{G}_a(M) - \vec{G}_a(T)}_{\text{terme des mares}} \end{aligned}$$

si on néglige le terme des marées

$$\vec{g}(M) = \vec{G}_T(M) + \Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

si on suppose que la terre est sphérique alors

$$\begin{aligned} \vec{G}_T(M) &= -\frac{\mathcal{G}M_T}{r^2} \vec{e}_r \\ \vec{g}(M) &= -\frac{\mathcal{G}M_T}{r^2} \vec{e}_r + \Omega^2 \overrightarrow{HM} \end{aligned}$$

avec $HM = r \sin \theta$ et $\overrightarrow{HM} = r \sin \theta (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta)$

$$\begin{cases} g_r = -\frac{gM_T}{r^2} + \Omega^2 r \sin^2 \theta \\ g_\theta = \Omega^2 r \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_r = -\frac{gM_T}{r^2} + \Omega^2 r \cos^2 \lambda \\ g_\theta = \Omega^2 r \sin \lambda \cos \lambda \end{cases}$$

8.2.5 effet de la force de coriolis

1395

Soit un point matériel M de masse m en chute libre dans R_T non galiléen. Par application du P.F.D, et sachant que, pour une chute libre, dans un référentiel galiléen, nous avons :

$$m \vec{a}_r(M) = \vec{P} - 2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r(M)$$

$$\vec{v}_r = \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases}$$

$$\vec{a}_r = \begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{cases}$$

$$\vec{\Omega} = \begin{cases} -\Omega \cos \lambda \\ 0 \\ \Omega \sin \lambda \end{cases}$$

les conditions initiales sont à $t = 0$ on a $z = h$ et $\vec{v}_r(0) = \vec{0}$

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega \dot{y} \sin \lambda \\ \ddot{y} = -2\Omega \dot{x} \sin \lambda - 2\Omega \dot{z} \cos \lambda \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega \dot{y} \cos \lambda \end{cases}$$

on a

$$\dot{y} \simeq -2\Omega \dot{z} \cos \lambda$$

$$\dot{y} \simeq -2\Omega z \cos \lambda$$

or

$$\ddot{z} = -g + 2\Omega \dot{y} \cos \lambda \simeq -g$$

$$z \simeq -\frac{gt^2}{2}$$

donc

$$\dot{y} \simeq \Omega gt^2 \cos \lambda$$

en intégrant

$$y \simeq \frac{1}{3} \Omega g t^3 \cos \lambda > 0 \forall \lambda$$

or $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ donc

$$y \simeq \frac{1}{3} \Omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} \cos \lambda$$

Expérience de Reich $\Omega = 7,310^{-5} \text{rads}^{-1}$, $h = 158\text{m}$, $\lambda = 51^\circ$ donc $y = 2,7\text{cm}$

1400 on vérifie que \dot{y} reste effectivement négligeable devant gt ce qui justifie l'approximation

Chapitre 9

mouvement des particules chargées

Sommaire

1405	9.1 force de Lorentz	121
	9.1.1 définition	121
	9.1.2 puissance de la force de Lorentz	122
	9.2 particule dans le champ électrique	122
1410	9.2.1 équation du mouvement	122
	9.2.2 cas où la vitesse initiale est parallèle au champ électrique	123
	9.2.3 cas où la vitesse initiale est perpendiculaire au champ électrique	123
	9.3 particule dans le champ magnétique	123
	9.3.1 équation du mouvement	123
1415	9.3.2 trajectoire	124

on va faire l'étude du mouvement d'une particule chargée de charge q animée d'une vitesse \vec{v} est placé soit dans un champ \vec{E} uniforme soit dans un champ magnétique \vec{B} uniforme et indépendant du temps

9.1 force de Lorentz

9.1.1 définition

l'étude se fait dans un référentiel galiléen

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}^{ext}$$

la force de Lorentz est défini par :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

on néglige le poids devant la force de Lorentz

1425 **9.1.2 puissance de la force de Lorentz**

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v} + q \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v}$$

$$\boxed{\mathcal{P} = q \vec{E} \cdot \vec{v}}$$

la force magnétique ne travaille pas

9.2 particule dans le champ électrique

9.2.1 équation du mouvement

soit un champ \vec{E} suivant \vec{e}_x

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} = q \vec{E}$$

la particule rentre dans la région où règne \vec{E} en $\vec{r}_0 = \vec{0}$

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_0 \cos \alpha_0 \\ v_0 \sin \alpha_0 \\ 0 \end{cases}$$

l'équation du mouvement s'écrit

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{qE}{m} \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

en intégrant une première fois

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{qEt}{m} + v_0 \cos \alpha_0 \\ \dot{y} = v_0 \sin \alpha_0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

1430 puis une deuxième fois

$$\begin{cases} x = \frac{qEt^2}{2m} + v_0 t \cos \alpha_0 \\ y = v_0 t \sin \alpha_0 \\ z = 0 \end{cases}$$

en éliminant le temps on trouve l'équation de la trajectoire

$$x = \frac{qE y^2}{2m v_0^2 \sin^2 \alpha_0} + \frac{y}{\tan \alpha_0}$$

c'est une parabole passant par le point O

9.2.2 cas ou la vitesse initiale est parallèle au champ électrique

$$\alpha_0 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{qEt^2}{2m} + v_0 t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

9.2.3 cas ou la vitesse initiale est perpendiculaire au champ électrique

$$\alpha_0 = +\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{qEt^2}{2m} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

1435

si la zone d'action du champ est comprise $0 < y < L$
à la sortie

$$\begin{cases} x_s = \frac{qEL^2}{2mv_0^2} \\ y_s = L \end{cases}$$

d'où

$$\tan \theta = -\frac{\dot{x}_s}{\dot{y}_s} = -\frac{qEL}{mv_0^2}$$

9.3 particule dans le champ magnétique

9.3.1 équation du mouvement

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

multiplions scalairement par \vec{v}

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow E_c = cste$$

un champ magnétique ne modifie pas l'énergie cinétique de la particule mais il change sa trajectoire

si $\vec{B} = B \vec{e}_z$ alors

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{qB}{m} \vec{v} \wedge \vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}_c \wedge \vec{v}$$

avec $\vec{\omega}_c = -\frac{q\vec{B}}{m} \Rightarrow \omega_c = \frac{qB}{m}$ est appelé **pulsation cyclotron**

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

on a des équations couplées

$$\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = v_0 \cos \alpha_0 \Rightarrow z = v_0 t \cos \alpha_0$$

1440 d'où $\dot{y} = -\omega_c x$ et $\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0$ et $x = A \cos(\omega_c t + \varphi)$

les conditions initiales sont $x(0) = 0$ et $\dot{x} = v_0 \sin \alpha_0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ et } A = -\frac{v_0 \sin \alpha_0}{\omega_c}$

donc

$$x = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$$

$$\dot{y} = -v_0 \sin \alpha_0 \sin(\omega_c t) \Rightarrow y = -\frac{v_0 \sin \alpha_0}{\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t))$$

1445 pour z on a $z = v_0 t \cos \alpha_0$

le mouvement est un mouvement hélicoïdal sa projection dans le plan est un cercle

9.3.2 trajectoire

$$x^2 + (y + R)^2 = R^2$$

$$\text{avec } R = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{\omega_c} = \frac{m v_0 \sin \alpha_0}{qB} = \frac{p_{\perp}}{qB}$$

1450

le mouvement est circulaire uniforme dans le plan normal à \vec{B} et un mouvement rectiligne uniforme suivant \vec{B} donc c'est un mouvement hélicoïdal de pas

$$h = 2\pi \frac{m v_0 \cos \alpha_0}{qB} = 2\pi \frac{p_{\parallel}}{qB}$$

Exercice 1 : cyclotron de Lawrence.

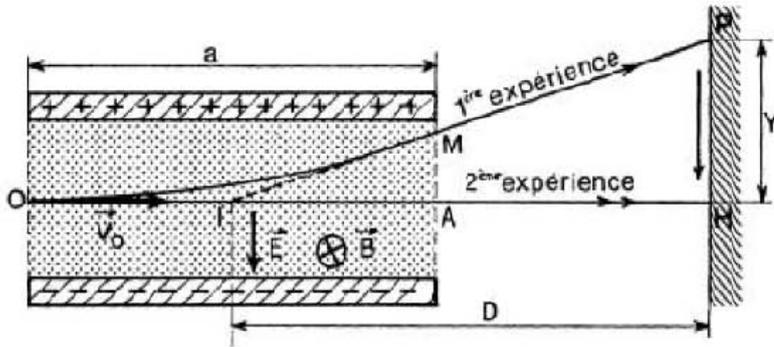
Le premier cyclotron fut construit en 1932 par Lawrence à Berkeley (Californie). L'appareil avait un rayon de 14 cm et communiquait à des protons une énergie cinétique de 1,2 MeV. La différence de potentiel était de 4000 V au moment du passage du faisceau entre les dés.

Quelles étaient : - La vitesse maximum des protons ? - La tension accélératrice qu'il aurait fallu utiliser pour leur communiquer cette vitesse ? - La fréquence du champ accélérateur ? - Le nombre de tours décrits par les protons ? - Le champ magnétique ?

Données : charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C ; masse d'un proton : $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg .

Exercice 2 : mesure de la charge massique de l'électron. expérience de J.J.Thomson (1897).

- On réalise la déviation d'un faisceau d'électrons à l'aide d'un champ électrique \vec{E} , uniforme et indépendant du temps, et on mesure la déviation Y du spot sur l'écran (voir la figure).
- On établit alors, dans la région où règne le champ \vec{E} , un champ magnétique \vec{B} , uniforme et indépendant du temps, perpendiculaire à \vec{E} . On règle la valeur de \vec{B} de manière à ce que le spot soit ramené en H.



Etablir l'expression de la charge massique e/m de l'électron en fonction des grandeurs intervenant dans l'expérience.

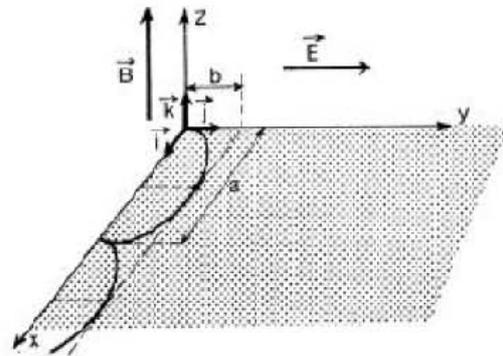
Les mesures les plus récentes réalisées à partir de perfectionnements de cette méthode ou par des méthodes différentes fournissent la valeur : $e/m = 1,7588 \cdot 10^{11}$ Ckg⁻¹.

Exercice 3 : champs électrique et magnétique orthogonaux.

Dans le référentiel (R) de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une particule M, de masse m et de charge q , se trouve à la date $t = 0$ en O, animée d'une vitesse nulle, dans une région où règnent les champs uniformes et indépendants du temps :

$$\vec{E} = E \vec{j} \text{ et } \vec{B} = B \vec{k} .$$

1. Etudier le mouvement de M.
2. Calculer la vitesse moyenne de la particule suivant Ox, appelée vitesse de dérive \vec{v}_D .
3. Interpréter la trajectoire dans Oxyz en écrivant la relation fondamentale de la dynamique du point matériel dans le référentiel (R') en translation rectiligne et uniforme de vitesse \vec{v}_D par rapport à (R).



Exercice 4 : champs électrique et magnétique parallèles.

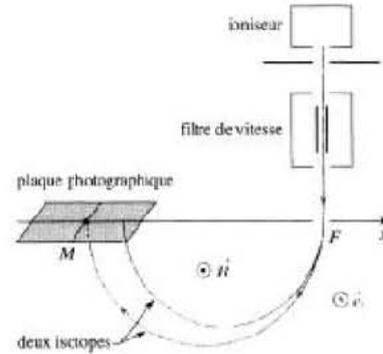
Dans le référentiel (R) de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une particule M, de masse m et de charge q , se trouve à la date $t = 0$ en O animée d'une vitesse \vec{v}_0 suivant Oy, dans une région où règnent les champs uniformes et indépendants du temps \vec{E} et \vec{B} tous deux dirigés suivant Oz.

1. Etablir les équations différentielles du mouvement de la particule chargée.
2. A la distance l du point O et perpendiculairement à Oy, on place une plaque P. Y a-t-il toujours un point d'impact de la particule sur la plaque P ?

Exercice 5 : spectrographie de Datirbridge.

Dans un tel spectrographe, les ions (supposés ici positifs) sortant d'un ioniseur où ils ont été préalablement accélérés sous une tension de valeur absolue U , traversent d'abord un filtre de vitesse, pénètrent alors dans un champ magnétique

transversal uniforme et indépendant du temps $\vec{B} = B \vec{e}_z$, puis décrivent un demi-cercle et viennent impressionner la plaque photographique. La fente F étant supposée très fine, déterminer la distance séparant les traces rectilignes associées à deux isotopes. Calculer la distance séparant les isotopes $^{39}\text{K}^+$ et $^{41}\text{K}^+$ sur la plaque. Données : $B = 0,1 \text{ T}$; $U = 10 \text{ kV}$.



Conduction électrique.

Exercice 6 : modèle de la conduction électrique.

On considère un conducteur électrique cylindrique d'axe Oz dont les charges mobiles sont des électrons animés d'une vitesse \vec{v} sous l'action d'un champ électrique uniforme et indépendant du temps \vec{E} , colinéaire et de même sens que Oz , que l'on applique à partir de l'instant $t = 0$. Les électrons sont soumis d'autre part à une force de « frottement » $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$, τ étant une constante physique et m la masse de l'électron.

- Donner la signification physique de la force de frottement ainsi que la dimension de τ .
- La vitesse étant colinéaire à Oz , exprimer son module v en fonction du temps t . En déduire que v tend vers une valeur limite v_1 qui dépend de e , m , τ et de E (E étant le module du champ \vec{E}).
- A.N. : $E = 1,0 \cdot 10^1 \text{ V.m}^{-1}$; $\tau = 2,8 \cdot 10^{-14} \text{ s}$. Calculer le temps au bout duquel v est voisin de v_1 au millième près. Qu'en déduisez-vous sur l'établissement du régime permanent ?
- Le nombre d'électrons mobiles par unité de volume est n . Lorsque le régime permanent est établi, montrer que le vecteur densité de courant \vec{j} peut se mettre sous la forme : $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$. Calculer σ_0 littéralement en fonction de n , e , τ et m , puis numériquement en prenant $n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ (masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$).

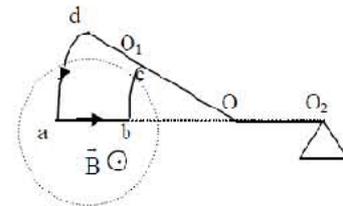
Exercice 7 : effet Hall.

Soit un long ruban conducteur métallique d'épaisseur e , de largeur l , parcouru par un courant continu I et placé dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps \vec{B} , normal au plan du ruban.

- Montrer qu'il existe une d.d.p. U entre les bords du ruban et donc un champ électrique \vec{E} (effet Hall).
- Une plaquette de cuivre d'épaisseur $e = 0,1 \text{ mm}$, de section $e l$ est traversée par un courant d'intensité $I = 10 \text{ A}$. Le champ magnétique perpendiculaire à la plaquette vaut 1 T . On mesure une tension de Hall de $5,5 \cdot 10^{-4} \text{ V}$. En déduire le nombre d'électrons de conduction par unité de volume, comparer ce nombre au nombre d'atomes par unité de volume. On donne la masse atomique du cuivre $M = 63 \text{ g.mo}^{-1}$ et sa densité $d = 9$ (charge élémentaire $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$).

Exercice 8 : forces de Laplace.

Un appareil de mesure, appelé balance de Cotton, comporte un cadre plat, isolant, supportant un circuit $a b c d$: $a d$ et $b c$ sont des arcs de cercle de centre O . Le fléau de la balance $O_1 O_2$ est mobile autour d'un couteau O . En O_2 un plateau permet d'équilibrer la balance. En l'absence de courant, les points $a b O_2$ sont alignés sur une droite horizontale. Un champ magnétique \vec{B} uniforme et indépendant du temps, normal au plan de la figure, qui contient $a b$, agit dans la zone indiquée, il est supposé négligeable ailleurs.



- Le circuit étant traversé par un courant I , étudier les conditions d'équilibre de la balance et la possibilité de mesurer l'intensité B du champ magnétique. On donne $ab = l$; $OO_2 = d$; R est la distance de O au milieu de ab .
- Quelle masse m faut-il placer dans le plateau pour équilibrer la balance quand $B = 0,5 \text{ T}$; $I = 10 \text{ A}$; $l = 1,5 \text{ cm}$; $d = R = 25 \text{ cm}$? (on prendra $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$)
- En supposant que la sensibilité de la balance est $\Delta m = 1 \text{ cg}$, trouver l'incertitude qui résulte de ce fait sur la mesure de B . On négligera le poids du cadre.

Chapitre 10

Oscillateur harmonique - Régime libre et forcé

1455

Sommaire

	10.1 Oscillateur harmonique	128
	10.2 Oscillations libres	128
	10.2.1 Pulsation propre - Isochronisme des oscillations	128
1460	10.2.2 Étude énergétique	129
	10.3 Oscillations libres amorties	129
	10.3.1 Temps de relaxation - Facteur de qualité	129
	10.3.2 Régime pseudo-périodique	130
	10.3.3 Régime apériodique	131
1465	10.3.4 Régime critique	132
	10.3.5 Étude énergétique	132
	10.4 Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux et soumis à une excitation sinusoïdale	132
	10.5 Régime transitoire	133
1470	10.6 Régime sinusoïdal forcé - Utilisation des complexes	134
	10.7 Résonance en élongation	134
	10.8 Résonance en vitesse	135
	10.9 oscillateur non linéaire	136
	10.9.1 équation pendulaire	136
1475	10.9.2 role des harmoniques	137

1480 L'importance de l'oscillateur harmonique à un degré de liberté en physique justifie qu'on lui consacre un chapitre.

10.1 Oscillateur harmonique

On appelle oscillateur harmonique tout système à un degré de liberté dont l'évolution au cours du temps (en l'absence d'amortissement et d'excitation) est régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

quelle que soit la nature physique de la variable x .

L'oscillateur harmonique évolue dans un puit de potentiel de type parabolique :
soit

$$E_p(x) = E_p(0) + \frac{1}{2} k x^2$$

soit

$$E_p(x) \simeq E_p(0) + \frac{1}{2} k x^2$$

au voisinage d'une position d'équilibre stable (voir cours précédent).

L'oscillateur harmonique est soumis à une force de rappel proportionnelle à x :

$$F = -\frac{dE_p}{dx} = -kx$$

10.2 Oscillations libres

10.2.1 Pulsation propre - Isochronisme des oscillations

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = v(t)$$

x_m et φ sont déterminés par les conditions initiales.

Si $x(0) = x_0$ et $v(0) = v_0$ alors

$$\begin{cases} x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \\ \tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \end{cases}$$

1485 La période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ est indépendante des conditions initiales ; c'est une propriété importante de l'oscillateur harmonique appelée *isochronisme* des oscillations.

10.2.2 Étude énergétique

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m x_m^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} k x_m^2$$

Calculons la valeur moyenne de E_p

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_p(t) dt = \frac{k x_m^2}{2} \langle \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \rangle = \frac{k x_m^2}{4}$$

de même

$$\langle E_c \rangle = \frac{k x_m^2}{4}$$

Pendant le mouvement, il y a équipartition, en moyenne, des formes cinétique et potentielle de l'énergie.

$$\langle E_p \rangle = \langle E_c \rangle = \frac{E_m}{2}$$

10.3 Oscillations libres amorties

1490

10.3.1 Temps de relaxation - Facteur de qualité

Avec amortissement, l'équation différentielle devient

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}$$

que l'on met sous la forme

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec $2\alpha = \frac{h}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, ou encore

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = 0$$

où τ est une constante ayant la dimension d'un temps qui est appelée **temps de relaxation** de l'oscillateur, ω_0 étant sa **pulsation propre**.

Pour décrire l'oscillateur amorti, on peut préférer au couple (ω_0, τ) le couple (ω_0, Q) , Q étant un paramètre sans dimension appelé **facteur de qualité** défini par

$$Q = \omega_0 \tau = 2\pi \frac{\tau}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{m\omega_0}{h}$$

Une solution en $\exp(rt)$ existe si

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0$$

Suivant le signe du discriminant réduit, plusieurs régimes sont possibles

$$\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2$$

10.3.2 Régime pseudo-périodique

Si les frottements sont faibles alors $\alpha < \omega_0$, $Q > \frac{1}{2}$ et $\Delta' < 0$

$$x(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$$

en introduisant la pseudo-pulsation Ω telle que $\Omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$ ($\Delta' = -\Omega^2 = (i\Omega)^2$ et $r = -\alpha \pm i\Omega$).

$$\dot{x} = -\alpha e^{-\alpha t}(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) + e^{-\alpha t}\Omega(-A \sin \Omega t + B \cos \Omega t)$$

$$\begin{cases} x(0) = A = x_0 \\ \dot{x}(0) = -\alpha A + \Omega B = v_0 \end{cases}$$

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left(x_0 \cos \Omega t + \frac{v_0 + \alpha x_0}{\Omega} \sin \Omega t\right)$$

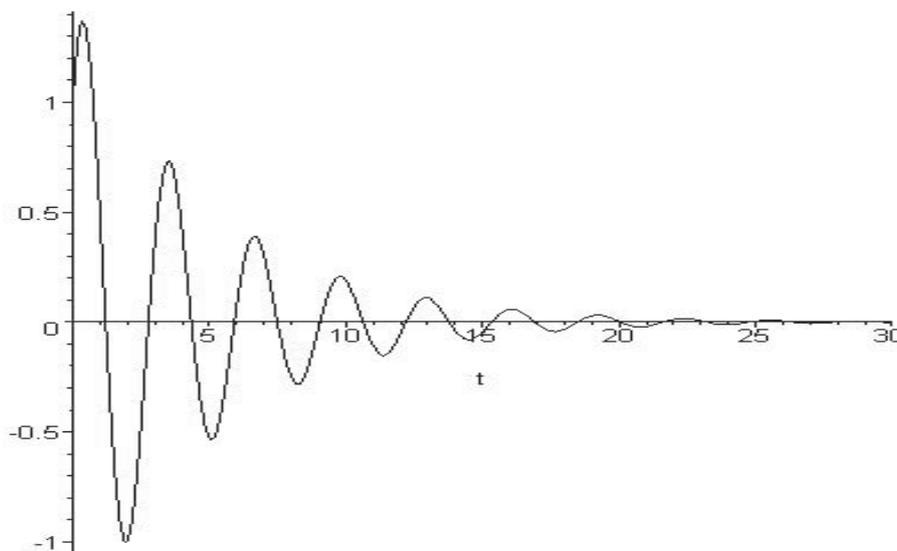


FIGURE 10.1 – pseudo périodique

Une telle évolution de retour vers un état permanent est qualifiée de relaxation ; ce retour se fait au bout de quelques τ .

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \text{ est la } \mathbf{pseudo-période}.$$

La détermination expérimentale de $\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)$ appelé **décroissement logarithmique** permet de calculer le facteur de qualité

$$\delta = \alpha T = \frac{\omega_0 T}{2Q} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}}$$

10.3.3 Régime apériodique

Si les frottements sont importants alors $\alpha > \omega_0$, $Q < \frac{1}{2}$ et $\Delta' > 0$

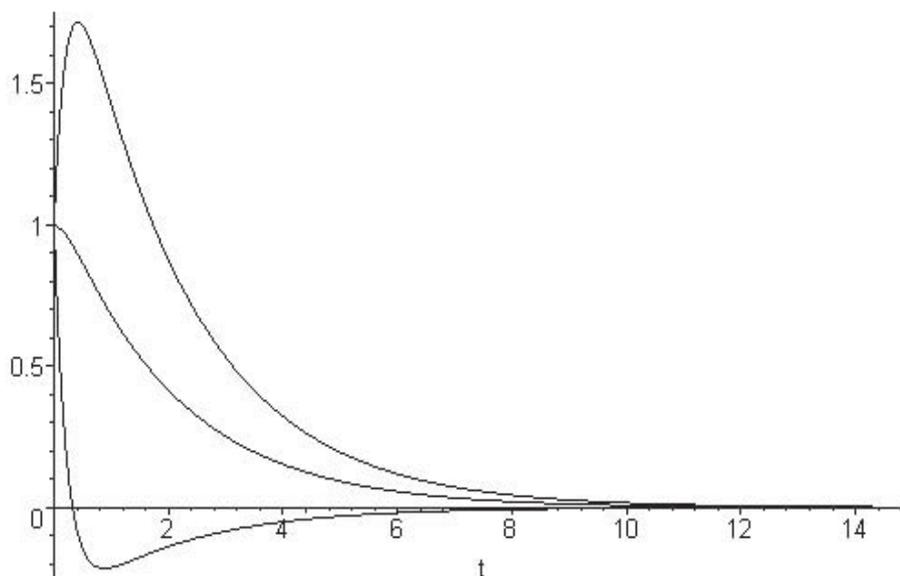
$$x(t) = e^{-\alpha t}(A \cosh \Omega' t + B \sinh \Omega' t)$$

avec $\Omega'^2 = \alpha^2 - \omega_0^2$ ($r = -\alpha \pm \Omega'$).

$$\dot{x} = -\alpha e^{-\alpha t}(A \cosh \Omega' t + B \sinh \Omega' t) + e^{-\alpha t} \Omega'(A \sinh \Omega' t + B \cosh \Omega' t)$$

$$\begin{cases} x(0) = A = x_0 \\ \dot{x}(0) = -\alpha A + \Omega' B = v_0 \end{cases}$$

$$x(t) = e^{-\alpha t} \left(x_0 \cosh \Omega' t + \frac{v_0 + \alpha x_0}{\Omega'} \sinh \Omega' t \right)$$



1495

FIGURE 10.2 – apériodique

10.3.4 Régime critique

Si $\alpha = \omega_0$, $Q = \frac{1}{2}$ et $\Delta' = 0$

$$x(t) = e^{-\alpha t}(At + B)$$

($r = -\alpha$).

$$\dot{x} = -\alpha e^{-\alpha t}(At + B) + e^{-\alpha t}A$$

$$\begin{cases} x(0) = B = x_0 \\ \dot{x}(0) = -\alpha B + A = v_0 \end{cases}$$

$$x(t) = e^{-\alpha t}((v_0 + \alpha x_0)t + x_0)$$

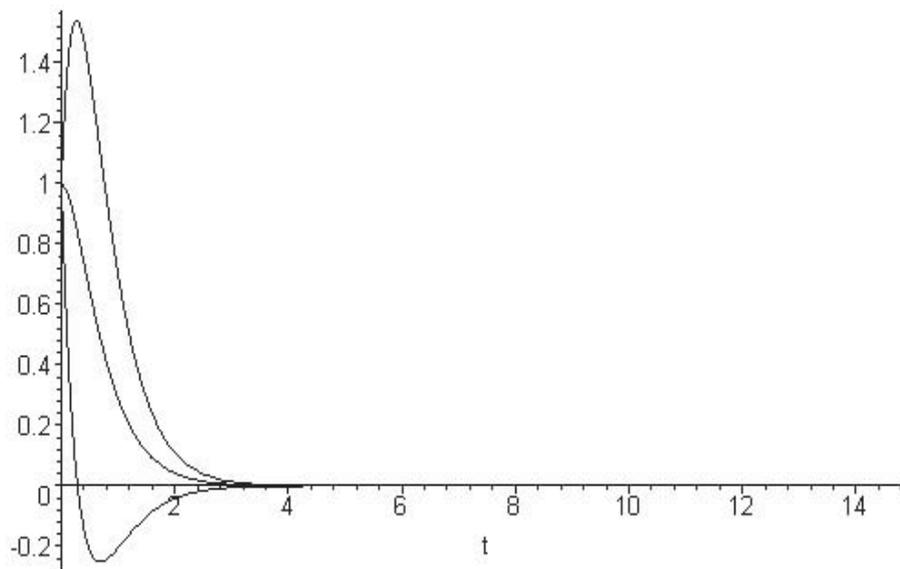


FIGURE 10.3 – critique

Le régime critique n'est jamais réalisé physiquement exactement.

10.3.5 Étude énergétique

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}^{nc} = -\gamma v^2 < 0$$

10.4 Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux et soumis à une excitation sinusoïdale

C'est la suite du cours « Oscillateur harmonique - Régime libre ».

On se limitera à une excitation sinusoïdale.

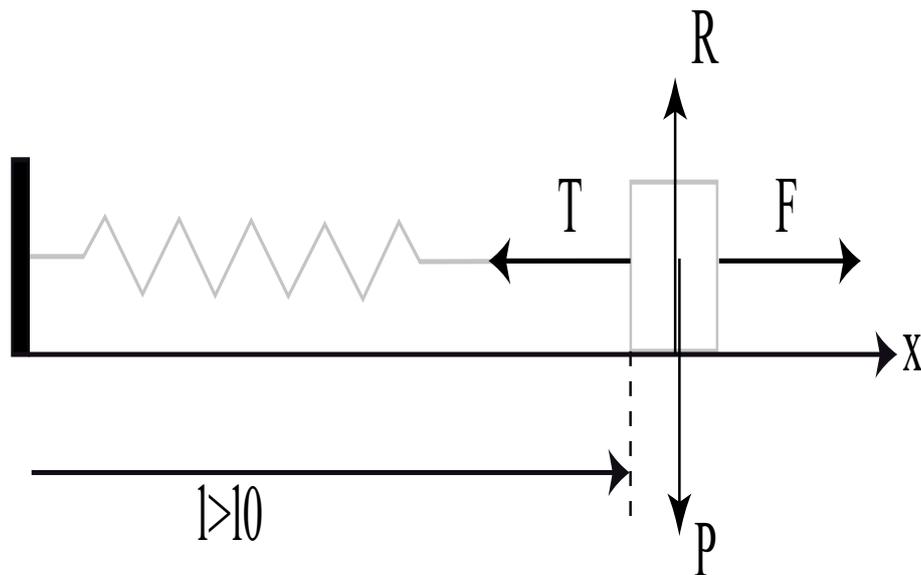


FIGURE 10.4 – bilan de forces

Nous retrouvons les forces du régime libre (force de rappel, amortissement) qui constituent la partie homogène de l'équation différentielle plus la force excitatrice qui constitue le second membre :

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

1505 avec $2\alpha = \frac{h}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

10.5 Régime transitoire

La solution est la somme :

$$x = x^{(h)} + x^{(p)}$$

$x^{(h)}$, solution homogène, est solution de

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La solution de cette équation différentielle tend vers 0 au bout de quelques $\tau = \frac{1}{2\alpha}$ (voir cours « Oscillateur harmonique - Régime libre »).

$x^{(p)}$, solution particulière, est de la forme

$$x^{(p)} = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

La solution particulière oscille avec la même pulsation que l'excitation.

On parle de **régime transitoire** tant que $x^{(h)}$ n'est pas négligeable.

10.6 Régime sinusoïdal forcé - Utilisation des complexes

On parle de **régime sinusoïdal forcé** lorsque $x^{(h)}$ devient négligeable

$$x = x^{(h)} + x^{(p)} \simeq x^{(p)}$$

On travaille alors avec les complexes

$$\underline{x} = X_m \exp j(\omega t + \varphi) = \underline{X}_m \exp j\omega t$$

avec $\underline{X}_m = X_m \exp j\varphi$

\underline{x} est solution de

$$\ddot{\underline{x}} + 2\alpha\dot{\underline{x}} + \omega_0^2\underline{x} = \frac{F_0}{m} \exp j\omega t$$

qui devient

$$(-\omega^2 + 2\alpha j\omega + \omega_0^2)\underline{X}_m = \frac{F_0}{m}$$

$$\underline{X}_m = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega}$$

10.7 Résonance en élongation

L'amplitude X_m est égale au module de \underline{X}_m

$$X_m = |\underline{X}_m| = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}$$

que l'on peut aussi écrire en introduisant le facteur de qualité Q et le rapport $\frac{\omega}{\omega_0} = x$

$$X_m = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

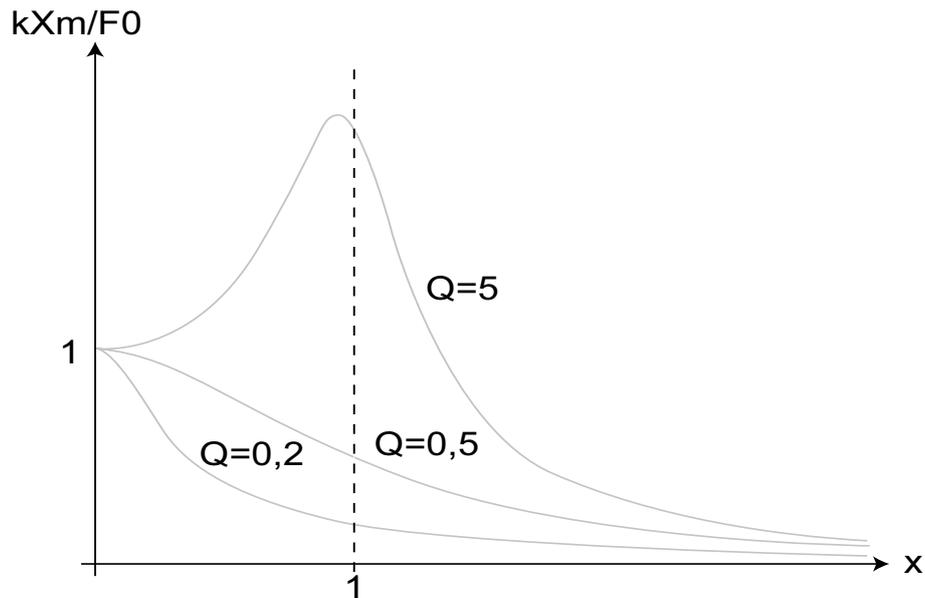


FIGURE 10.5 – réponse en amplitude

Il y a résonance en élongation seulement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (voir le cours d'électrocinétique «Régime sinusoïdal forcé»).

Le déphasage φ est égale à l'argument de \underline{X}_m

$$\varphi = \arg \underline{X}_m = -\arctan \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\arctan \frac{x}{Q(1-x^2)}$$

10.8 Résonance en vitesse

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega \underline{x} = j\omega \underline{X}_m \exp j\omega t = \underline{V}_m \exp j\omega t$$

$$\underline{V}_m = j\omega \underline{X}_m = j\omega \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega}$$

L'amplitude V_m est égale au module de \underline{V}_m

$$V_m = |\underline{V}_m| = \omega \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}$$

que l'on peut aussi écrire en introduisant le facteur de qualité Q et le rapport $\frac{\omega}{\omega_0} = x$

$$V_m = \frac{\frac{F_0}{h}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

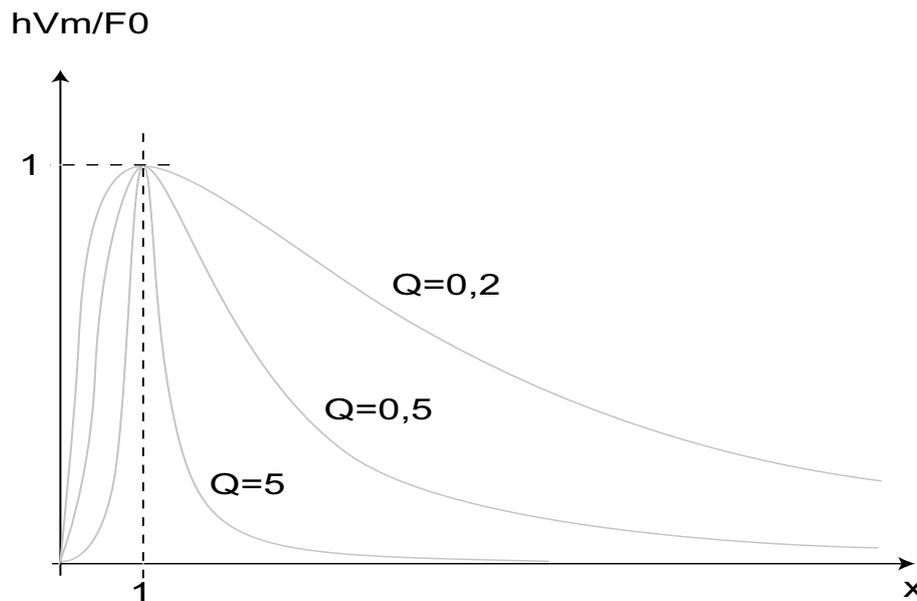


FIGURE 10.6 – réponse en vitesse

Il y a toujours résonance en vitesse.

Le déphasage φ_v est égale à l'argument de \underline{V}_m

$$\varphi_v = \arg \underline{V}_m = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

10.9 oscillateur non linéaire

10.9.1 équation pendulaire

$$E_m = E_c + E_p = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl(1 - \cos\theta) = cste$$

l'équation du système est

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

si $E_m \ll 2mgl \Rightarrow \theta_m \ll \pi$ on peut linéariser cette équation $\sin\theta \approx \theta$ est la solution s'écrit

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

10.9.2 rôle des harmoniques

si $\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$ l'équation différentielle devient

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta - \frac{\omega_0^2}{6}\theta^3 = 0$$

1520 c'est une équation non linéaire voyons l'influence du terme non linéaire sur la solution

si dans le terme θ^3 on remplace θ par une solution sinusoidale de pulsation ω

$$\sin^3(\omega t) = \frac{3}{4}\sin(\omega t) - \frac{1}{4}\sin(3\omega t)$$

on voit apparaitre un terme sinusoidale de fréquence 3ω d'où l'idée de chercher des solutions de la forme

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t) + \sum_i \epsilon_i \theta_0 \sin(3n_i \omega_0 t)$$

on va se limiter dans notre cas à un seul terme

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t) + \epsilon \theta_0 \sin(3\omega_0 t)$$

avec $|\theta_0| \ll \pi$ et $|\epsilon| \ll 1$ on introduit cette solution dans l'équation différentielle non linéaire et on garde que les termes en ϵ

$$-\omega_0^2[\sin(\omega t) + 9\epsilon \sin(3\omega t)] + \omega_0^2\theta_0[\sin(\omega t) + \epsilon \sin(3\omega t)] - \omega_0^2\frac{\theta_0^3}{6}\sin^3(\omega t) = 0$$

on développe $\sin^3(\omega t)$ et on rassemble les termes en $\sin(\omega t)$ ensemble et les termes en $\sin(3\omega t)$ ensemble on obtient

$$\sin(\omega t)[\omega_0^2 - \omega^2 - \omega_0^2\frac{\theta_0^2}{8}] + \sin(3\omega t)[\epsilon(\omega_0^2 - 9\omega^2) + \omega_0^2\frac{\theta_0^2}{24}] = 0$$

comme ces deux fonctions sont orthogonales le premier terme donne

$$\omega^2 = \omega_0^2(1 - \frac{\theta_0^2}{8})$$

soit

$$\omega \simeq \omega_0(1 - \frac{\theta_0^2}{16})$$

$$T \simeq T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

le second terme donne

$$\epsilon \simeq \frac{\theta_0^2}{192}$$

**la non linéarité augmente la période T
la période dépend de l'amplitude initiale
il y a apparition des harmoniques**

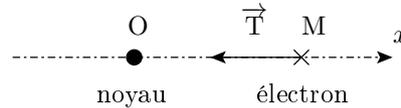
Pourquoi le ciel est-il bleu ?

La couleur bleue du ciel a longtemps constitué une source d'interrogation. Dans ce problème, on l'interprète comme étant due à la diffusion sélective des ondes issues du Soleil par les atomes présents dans l'atmosphère.

On adopte le modèle de THOMSON de l'atome, dans lequel le noyau est modélisé par une charge ponctuelle placée en O et l'électron situé en M, de masse m et de charge $-e$, est lié élastiquement au noyau par une force du type

$$\vec{T} = -k \overrightarrow{OM}$$

où k s'interprète comme une constante de raideur.



On suppose que le noyau placé en O est fixe dans le référentiel d'étude \mathcal{R} , supposé galiléen.

Dans ce modèle, l'électron est de plus soumis à une force de frottement du type

$$\vec{f} = -h \vec{v}$$

où h est une constante positive et \vec{v} la vitesse instantanée de l'électron.

On considère une radiation monochromatique issue du Soleil, produisant au niveau de l'atome un champ électrique

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$$

On rappelle que l'électron est alors soumis à une force électrique du type $\vec{F}_e = (-e) \vec{E}$.

Le poids de l'électron et la force d'origine magnétique sont négligées devant les autres forces. On suppose que le mouvement de l'électron est unidimensionnel suivant l'axe (Ox) et on pose $x(t)$ son abscisse mesurée par rapport au noyau.

$$\text{Données : } m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg, } e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C, } k = 100 \text{ N.m}^{-1}, h = 10^{-20} \text{ kg.s}^{-1}$$

I. Montrer que l'abscisse x de l'électron vérifie une équation différentielle de la forme

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x(t) = F(t)$$

où ω_0 , Q et $F(t)$ sont à exprimer en fonction des données.

Calculer ω_0 et Q .

On suppose que $x(t)$ s'écrit sous la forme $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$.

II. Exprimer l'amplitude X des oscillations de l'électron en fonction de ω_0 , Q , e , E_0 et m .

III. Le rayonnement visible provenant du Soleil est compris dans la gamme de longueurs d'onde allant de $\lambda_b = 400 \text{ nm}$ – couleur bleue – à $\lambda_r = 800 \text{ nm}$ – couleur rouge. Calculer les pulsation ω_b et ω_r correspondant aux radiations respectivement bleue et rouge. Donnée : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ célérité de la lumière.

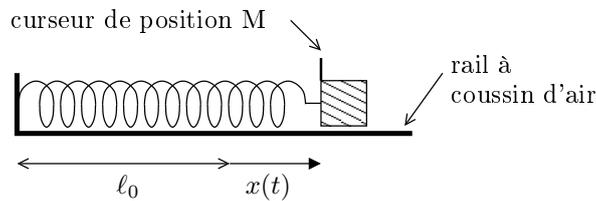
IV. Montrer que le vecteur position \overrightarrow{OM} de l'électron s'écrit approximativement

$$\overrightarrow{OM}(t) \simeq \frac{-e}{m\omega_0^2} E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$$

V. Sachant que l'électron diffuse un rayonnement dont la puissance \mathcal{P} est proportionnelle à la valeur moyenne du carré de son accélération, exprimer en fonction des longueurs d'onde λ_b et λ_r le rapport $\frac{\mathcal{P}_b}{\mathcal{P}_r}$ des puissances diffusées dans le bleu et le rouge. Faire l'application numérique et conclure.

Étude expérimentale d'oscillations mécaniques

On réalise expérimentalement le dispositif suivant : un objet de masse m est attaché à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , et posé sur un rail horizontal. Un dispositif permet de relever la position M de l'objet au cours du temps.



On note $x(t)$ le déplacement algébrique de M par rapport à l'équilibre.

Le référentiel terrestre est le référentiel d'étude, il est supposé galiléen.

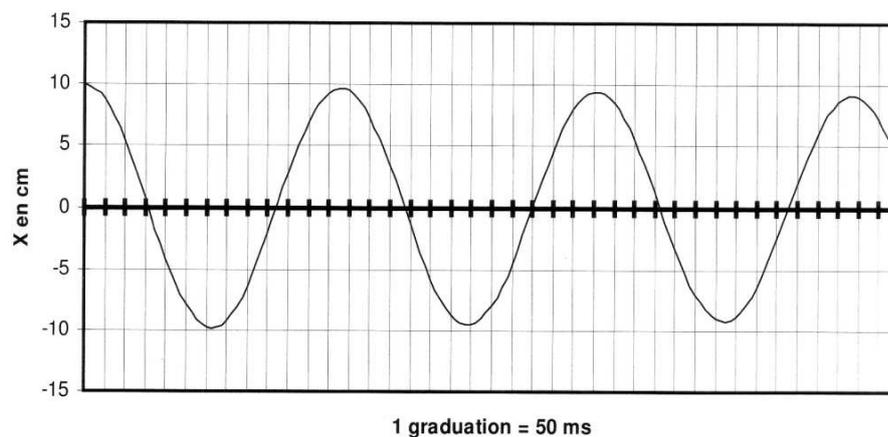
Données : $m = 100 \text{ g}$, $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$, $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

I. Oscillations idéales (sans frottement)

La masse est posée sur un rail à coussin d'air horizontal. On suppose donc qu'il n'y a pas de frottement entre le rail et l'objet (les frottements avec l'air étant négligés).

À l'aide du dispositif expérimental et d'un tableur, on trace la courbe n° 1 suivante :

Oscillations $x(t)$ – courbe n° 1

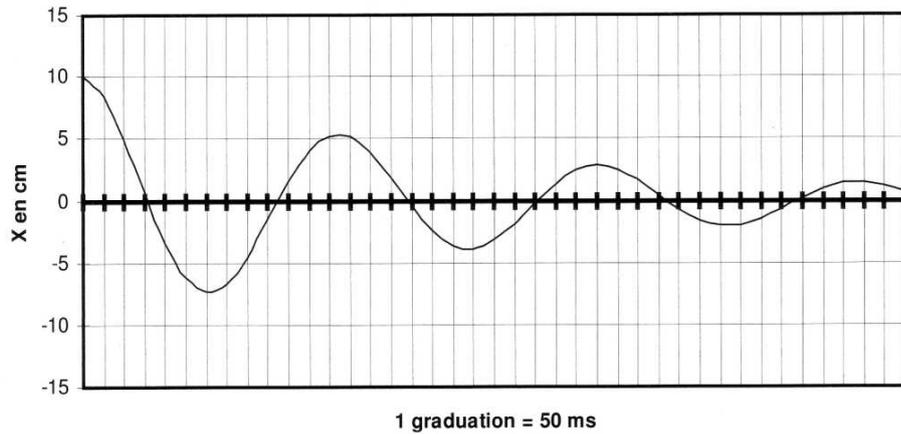


- I.1 Quelles ont été les conditions initiales ? Mesurer la période T_{exp} du mouvement.
- I.2 Déterminer l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $x(t)$. Identifier la pulsation propre ω_0 du système en fonction des données.
- I.3 Exprimer puis calculer la période propre T_0 .
- I.4 Exprimer puis calculer l'énergie mécanique \mathcal{E}_m de l'oscillateur, l'énergie potentielle de pesanteur étant prise égale à zéro.

II. Oscillations amorties

L'objet de masse m est toujours posé sur le rail à coussin d'air. On fixe une voile sur l'objet. On obtient un enregistrement correspondant à la courbe n° 2 suivante :

Oscillations $x(t)$ – courbe n° 2



- II.1 Que peut-on dire de la pseudo-période T ? Calculer le décrement logarithmique δ .
- II.2 Évaluer numériquement l'énergie qui a été dissipée au cours de la première oscillation. On modélise la force due à la voile par une force de frottement fluide du type

$$\vec{f} = -h\vec{v}$$

avec h une constante positive.

- II.3 Établir l'équation différentielle vérifiée par x , en la mettant sous la forme

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

ξ et ω_0 étant à exprimer en fonction des données. Quelle est l'inégalité vérifiée par ξ dans le cas présent?

- II.4 Déterminer la forme générale de la solution $x(t)$, en exprimant la pseudo-pulsation Ω en fonction de ω_0 et ξ .
- II.5 Démontrer la relation

$$\delta = \xi\omega_0 T$$

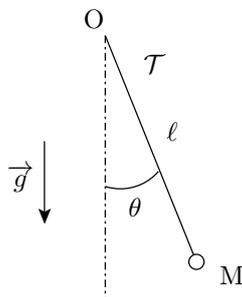
- II.6 En déduire la valeur numérique de la constante ξ , puis la valeur du coefficient de frottement h . On veut évaluer le coefficient de frottement h en utilisant le travail de la force de frottement. On suppose que pendant la première pseudo-période, on a

$$x(t) \simeq X_0 \cos(\omega_0 t)$$

- II.7 Exprimer alors le travail W_{frot} de la force de frottement entre les dates $t = 0$ et $t = T$.
- II.8 En utilisant le résultat de la question II.2, retrouver la valeur de h .

Étude du pendule simple rigide

On considère une masse m , assimilée à un point matériel M, accrochée à une tige rigide \mathcal{T} de masse négligeable par rapport à celle de M et de longueur ℓ . La tige peut tourner sans frottement autour du point fixe O, tout en restant contenue dans un plan vertical fixe.



La position de la masse m est repérée par l'angle θ formé par la tige avec la verticale descendante. Le champ de pesanteur est \vec{g} . Le référentiel d'étude est supposé galiléen.

Données : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, $m = 470 \text{ g}$, $\ell = 1 \text{ m}$.

I. Mouvement sans frottement

On suppose que les frottements sont négligeables. À l'instant $t = 0$, on écarte la tige d'un angle θ_0 et on la lâche sans vitesse.

I.1 Montrer que l'équation différentielle vérifiée par θ s'écrit

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

I.2 Quelle est l'expression de la période T_0 des oscillations de faible amplitude? Calculer T_0 .

I.3 Exprimer l'énergie mécanique \mathcal{E}_m de la masse m en fonction de m , ℓ , g , $\dot{\theta}$ et θ . On fixera l'énergie potentielle de pesanteur nulle à l'altitude du point O.

I.4 Justifier que l'énergie mécanique se conserve au cours du temps. En déduire l'expression de $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ , θ_0 , g et ℓ .

I.5 Montrer que la période T des oscillations s'écrit

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

À partir de la relation précédente, on peut tracer le graphe donnant la période T des oscillations du pendule en fonction de leur amplitude θ_0 , ce graphe n° 1 est représenté en annexe.

I.6 Commenter cette courbe, en dix lignes maximum.

II. Oscillations amorties

On tient compte de l'amortissement dû aux forces de frottement exercées par l'air ambiant sur la masse m . Les forces de frottement sont modélisées par une force $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$, où α est une constante positive et \vec{v} le vecteur vitesse instantané de la masse m . On constate que l'amplitude des oscillations diminue lentement au cours du temps.

II.1 Par dérivation de l'intégrale première du mouvement, montrer que l'équation différentielle vérifiée par θ , pour des oscillations de faible amplitude, se met alors sous la forme

$$\ddot{\theta} + \frac{142}{\tau} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

et donner l'expression de τ et ω_0 en fonction de m , α et g .

II.2 À quelle condition sur τ la masse m oscille-t-elle? Exprimer alors la pseudo-pulsation ω en fonction de ω_0 et τ .

La solution de l'équation différentielle vérifiée par θ s'écrit alors

$$\theta(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cos(\omega t + \varphi)$$

où A et φ représente les constantes d'intégration, qu'on ne cherchera pas à exprimer. On définit le *décroissement logarithmique* δ par la relation

$$\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t + T)}\right)$$

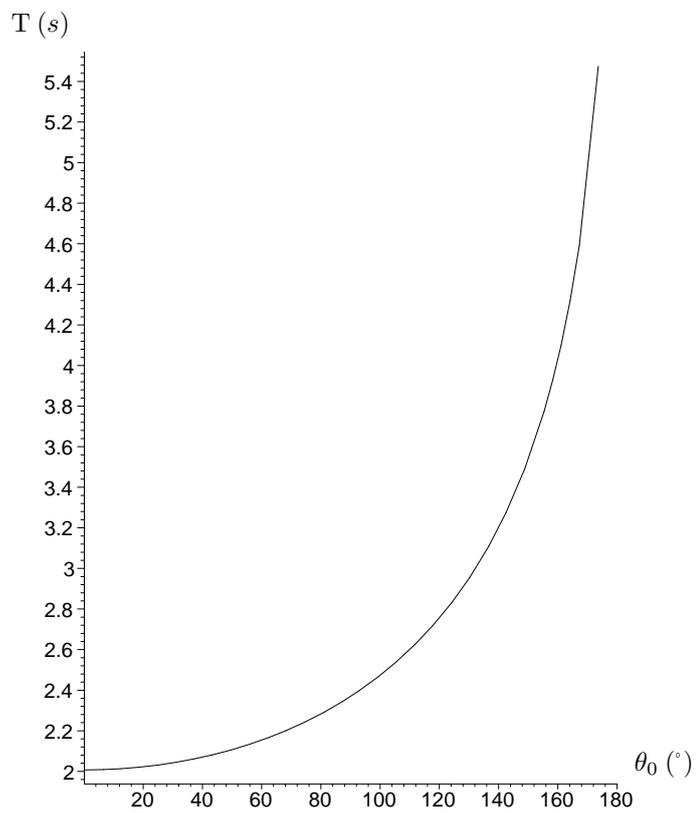
où T est la pseudo-période des oscillations.

II.3 Montrer que le décroissement δ s'écrit de manière très simple en fonction de T et τ .

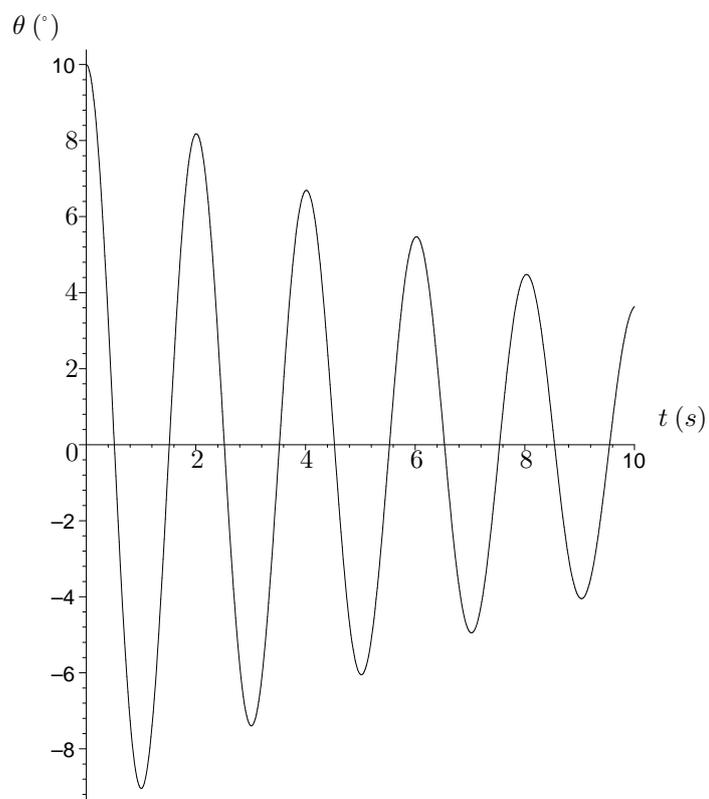
La courbe représentative de $\theta(t)$ est dessinée en annexe sur le graphe n° 2.

II.4 À partir de lectures graphiques à préciser, calculer numériquement

- le décroissement logarithmique δ ,
- la pseudo-période T ,
- la constante τ ,
- la constante α .



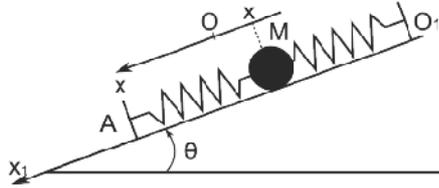
Graphe n° 1

144
Graphe n° 2

Exercice 1 Oscillateur sur plan incliné

1. Oscillations autour d'une position d'équilibre

Un point matériel M (masse m) est attaché à deux ressorts identiques (raideur k , longueur l_0 au repos) dont les extrémités sont fixés au point O_1 et A ($O_1A = 2l_0$) d'un plan incliné d'angle θ . Le point M glisse sans frottement le long du plan incliné d'axe O_1x_1 .



- Déterminer l'abscisse $x_{1e} = \overline{O_1M_e}$ du point matériel à l'équilibre.
- On place l'origine O en M_e , et l'on pose : $x_1 - x_{1e} = x$, x étant l'abscisse de M par rapport à l'équilibre. Déterminer l'équation différentielle du second ordre satisfaite par $x(t)$ (on fera intervenir une pulsation propre ω_0) puis résoudre cette équation sachant qu'au communiqué au point matériel initialement à l'équilibre une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$.

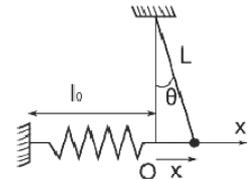
2. Oscillateur harmonique amorti

On ne néglige plus le frottement fluide, exercé sur le point matériel M élastiquement lié, qui se traduit par une force $\vec{f}_d = -\alpha \vec{v}$ ($\alpha > 0$).

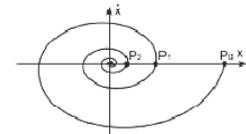
- Montrer que l'équation du mouvement se met sous la forme : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, x étant l'abscisse de M par rapport à l'équilibre, et Q un facteur que l'on précisera.
- On considère les mêmes conditions initiales qu'en 1.b). Dans le cas d'un faible amortissement caractérisé par $Q \gg 1$, déterminer l'expression de $x(t)$.
- Quelle est alors la relation entre le facteur Q et le décrétement logarithmique δ ?
- On pose $X = \frac{\omega_0}{v_0} x$ et $u = \frac{t}{T_0}$, T_0 étant la période propre du mouvement. Tracer l'allure du graphe de $X(u)$, lorsque $Q = 10$, pour $0 \leq u \leq 5$. Retrouver graphiquement la valeur de δ

Exercice 3 Oscillateur harmonique amorti

Un point matériel M (masse m), attaché à un ressort horizontal (raideur k , longueur l_0 au repos), est suspendu à un fil inextensible de longueur L . On considère des petits mouvements quasi horizontaux du point M , repéré par son abscisse x telle que $x \ll L$. En outre le point matériel M , de vitesse $\vec{v} = v \vec{u}_x$, est soumis à l'action d'une force de frottement fluide $\vec{f}_d = -\alpha \vec{v}$ ($\alpha > 0$).



- Montrer que l'équation différentielle du mouvement de M peut se mettre sous la forme suivante : $\ddot{x} + 2\lambda\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0$. Identifier les paramètres λ , ω_0 et préciser la dimension de λ .
- La trajectoire de phase de cet oscillateur est représentée ci-contre. On note P_0 le point initial de phase (à $t = 0$) et $OP_0 = x_0$. Quelle est la nature du régime de variation de $x(t)$?
- Déterminer l'expression de $x(t)$, en tenant compte des conditions initiales.
- Trouver la valeur du paramètre λ à partir de la trajectoire de phase de la figure ci-contre en comparant $x_0 = OP_0$ et $x_2 = OP_2$.



PHYSIQUE I

De l'oscillateur harmonique

Le problème analyse une expérience classique de travaux pratiques destinée à mettre en évidence un phénomène de résonance en mécanique. On considère un ressort vertical à spires non jointives dans son domaine de linéarité. Il est caractérisé par une masse linéique μ , une constante de raideur k , et un corps M , de masse m , est accroché à son extrémité inférieure. L'étude mécanique est faite dans le référentiel (R) du laboratoire supposé galiléen et les déplacements envisagés sont verticaux. On utilise les notations suivantes :

- \vec{e}_x , vecteur unitaire définissant la direction de l'axe x et le sens de la verticale descendante,
- $\vec{g} = g\vec{e}_x$, champ de pesanteur uniforme,
- $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Partie I - Oscillations sans frottement

I.A - Oscillations libres (on prend $\mu = 0$). L'extrémité supérieure du ressort est fixe.

I.A.1) Faire un bilan des forces appliquées à M .

I.A.2) Déterminer l'équation différentielle (E_1) vérifiée par x , déplacement de M par rapport à la position d'équilibre, et sa solution pour les conditions initiales suivantes : $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$.

I.A.3) Proposer deux méthodes indépendantes permettant d'accéder à la valeur de k .

I.A.4) Définir les deux énergies potentielles à considérer, en fonction de k , m , g et x en prenant comme référence la position d'équilibre $x = 0$.

I.A.5) En déduire l'énergie potentielle totale E_p , en fonction de k et de x , et l'énergie mécanique E en prenant les conditions initiales du I.A.2.

I.A.6) Tracer sur un même diagramme les courbes représentant les variations de E_p et de E en fonction de x et montrer comment on peut y lire la valeur de l'énergie cinétique E_c .

Filière TSI

I.A.7) Montrer qu'en valeur moyenne il y a équipartition de l'énergie entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

I.B - Oscillations forcées (on prend $\mu = 0$)

Grâce à un système bielle-manivelle on impose à l'extrémité supérieure du ressort le déplacement $X(t)\vec{e}_x = a\cos\omega t\vec{e}_x$, a et ω étant des constantes.

I.B.1) Déterminer l'équation différentielle (E_2) du mouvement de M et montrer que l'existence de la sollicitation extérieure revient à introduire dans le bilan établi au I.A.2 un terme supplémentaire F_{sup} que l'on exprimera en fonction de k et de X .

I.B.2) On s'intéresse au cas $\omega \neq \omega_0$.

a) Donner la solution de (E_2) avec les conditions initiales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Mettre le résultat sous la forme du produit de deux fonctions trigonométriques dont on exprimera les pulsations ω_1 et ω_2 , ($\omega_1 > \omega_2$) en fonction de ω et de ω_0 .

b) Tracer l'allure de la courbe représentant les variations de x en fonction du temps t pour $\omega = 1,2 \cdot \omega_0$, définir et déterminer la période des battements en fonction de ω_2 .

c) Proposer une expérience de battements en optique (8 lignes maximum) en précisant son intérêt pratique.

d) Exprimer la variation d'énergie mécanique par unité de temps $\frac{dE}{dt}$. L'énergie se conserve-t-elle ? Augmente-t-elle ? Diminue-t-elle ? Varie-t-elle en moyenne ?

I.B.3) On s'intéresse au cas $\omega = \omega_0$.

a) Déterminer la solution de (E_2) avec les conditions initiales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ par passage à la limite $\omega \rightarrow \omega_0$ de la solution obtenue au I.B.2-a).

b) Tracer la courbe représentant les variations de x en fonction du temps t . Donner l'équation des deux demi-droites enveloppes de la courbe.

c) Quel est le phénomène mis ainsi en évidence ? Qu'est-ce qui en limite l'acuité dans la réalité ? Donner un exemple d'un tel phénomène dans les domaines de l'acoustique, de l'électrocinétique, de l'optique.

d) Déterminer $E(t)$ et sa variation par unité de temps sur l'intervalle $[t, t + T_0]$ tel que $\sin\omega_0 t = 1$ et $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Conclure quant à la signification énergétique du phénomène.

Partie II - Oscillations forcées avec amortissement fluide

Grâce à un dispositif approprié (partie IV) on soumet M à une force de frottement fluide \vec{F}_f de la forme $\vec{F}_f = -h\vec{v}$, h étant une constante positive et \vec{v} représentant la vitesse de M . On impose toujours le déplacement $X(t) = a\cos\omega t$ à l'extrémité supérieure du ressort. On note

$$Q = \frac{m\omega_0}{h}$$

le facteur de qualité et on prend toujours $\mu = 0$.

II.A - Déterminer l'équation différentielle (E_3) du mouvement de M .

II.B - On s'intéresse à la solution en régime forcé. Quel est, en fonction de ω_0 et Q , l'ordre de grandeur du temps τ nécessaire pour considérer seulement cette solution ?

II.C - Montrer que l'amplitude A du déplacement de M s'exprime sous la forme :

$$A = \frac{a}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}}$$

II.D - Donner une interprétation physique du mouvement de M aux hautes et basses fréquences.

II.E - Montrer que, si Q est supérieur à une valeur minimale Q_{min} à déterminer, A prend une valeur maximale pour une pulsation ω_r à exprimer en fonction de ω_0 et Q .

II.F - Déterminer l'expression V de l'amplitude de la vitesse de M en fonction de a , ω , ω_0 et Q .

II.G - Donner une interprétation physique de la variation de V aux hautes et basses fréquences.

II.H - Montrer que V prend une valeur maximale pour une pulsation indépendante de Q .

II.I - Grâce à un capteur de position de M , on mesure une tension V_{pp} proportionnelle à l'amplitude A . À partir des valeurs expérimentales suivantes tracer les courbes représentant les variations de $V_{pp}(mV)$ et de $f \cdot V_{pp}(V \cdot Hz)$ en fonction de la fréquence $f(mHz)$.

Échelles : $1 V \leftrightarrow 2 \text{ cm}$, $1 V \cdot s^{-1} \leftrightarrow 1 \text{ cm}$, $1 Hz \leftrightarrow 4 \text{ cm}$.

V_{pp} <small>1535</small>	1844	1844	1844	1844	1906	2063	2281	2500	2906
f	156,3	213,9	287,8	412,4	615,4	869,6	1026	1250	1429
$f \cdot V_{pp}$	0,228	0,394	0,531	0,760	1,173	1,794	2,340	3,125	4,153
V_{pp}	3438	4094	4531	4938	5750	5906	5531	4188	3281
f	1613	1786	1887	1923	2128	2198	2299	2500	2597
$f \cdot V_{pp}$	5,545	7,312	8,550	9,496	12,24	12,98	12,71	10,47	8,521
V_{pp}	3250	2813	2344	1812	1469	1094	1062		
f	2632	2778	2857	3077	3361	3636	3704		
$f \cdot V_{pp}$	8,554	7,814	6,697	5,575	4,937	3,978	3,934		

II.J - À l'évolution de quelle grandeur physique accède-t-on en traçant la courbe représentant les variations de $f \cdot V_{pp}$ en fonction de f ?

II.K - Définir la bande passante Δf . Déterminer graphiquement Δf et la fréquence propre f_0 associées à la fonction de transfert $H_v: f \rightarrow f \cdot V_{pp}$. En déduire le facteur de qualité Q . Comparer ces valeurs aux résultats donnés par un logiciel de modélisation : $V_{pp}(0) = 1811 \pm 59$ mV, $f_0 = 2228 \pm 12$ mHz, $Q = 3,183 \pm 0,140$. Que penser du modèle proposé pour interpréter l'expérience ? Sachant que $m = 0,275$ kg, calculer h .

II.L - Déterminer le schéma électrique équivalent, c'est-à-dire décrit par une équation différentielle du même type que (E_3), association d'une résistance R , d'une inductance L , d'une capacité C , alimentée par une source de courant idéale $I \cos \omega t$. Dresser un tableau d'analogies électromécaniques.

Index

position, [16](#)

vitesse, [16](#), [26](#), [47](#), [58](#), [73](#), [90](#), [115](#), [150](#)