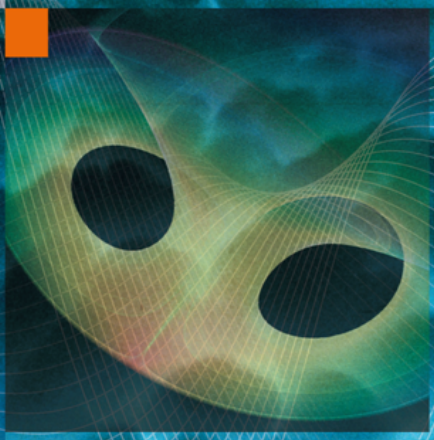
DYNAMIQUES COMPLEXES ET MORPHOGENÈSE

Introduction aux sciences non linéaires

Chaouqi Misbah



Springer

Dynamiques complexes et morphogenèse

Springer

Paris
Berlin
Heidelberg
New York
Hong Kong
Londres
Milan
Tokyo

Chaouqi Misbah

Dynamiques complexes et morphogenèse

Introduction aux sciences non linéaires

Springer

Chaouqi Misbah
LIPhy (laboratoire interdisciplinaire de physique)
CNRS et université Joseph-Fourier Grenoble I
140, rue de la Physique
38402 Saint-Martin-d'Hères

ISBN : 978-2-8178-0193-3 Springer Paris Berlin Heidelberg New York

© Springer-Verlag France, 2011

Imprimé en France

Springer-Verlag est membre du groupe Springer Science + Business Media

Cet ouvrage est soumis au copyright. Tous droits réservés, notamment la reproduction et la représentation, la traduction, la réimpression, l'exposé, la reproduction des illustrations et des tableaux, la transmission par voie d'enregistrement sonore ou visuel, la reproduction par microfilm ou tout autre moyen ainsi que la conservation des banques de données. La loi française sur le copyright du 9 septembre 1965 dans la version en vigueur n'autorise une reproduction intégrale ou partielle que dans certains cas, et en principe moyennant le paiement des droits. Toute représentation, reproduction, contrefaçon ou conservation dans une banque de données par quelque procédé que ce soit est sanctionnée par la loi pénale sur le copyright.
L'utilisation dans cet ouvrage de désignations, dénominations commerciales, marques de fabrique, etc. même sans spécification ne signifie pas que ces termes soient libres de la législation sur les marques de fabrique et la protection des marques et qu'ils puissent être utilisés par chacun.
La maison d'édition décline toute responsabilité quant à l'exactitude des indications de dosage et des modes d'emploi. Dans chaque cas il incombe à l'usager de vérifier les informations données par comparaison à la littérature existante.

Maquette de couverture: Nadia Ouddane
Imprimé par : XL Print - 42-Saint-Etienne - V007689/00
Dépot légal : Mai 2011

À Florence, Hisham et Sammy
À mes parents et frères et soeurs

Avant-propos

La nature regorge d'illustrations de phénomènes non linéaires ouvrant la porte à une complexité que la science du XX^{e} siècle n'a fait qu'entrouvrir et que le XXI^{e} siècle se doit d'explorer. À partir d'exemples simples et communs puisés dans différentes disciplines (mécanique, hydrodynamique, chimie, dynamique de populations, etc.), cet ouvrage introduit le langage et les notions propres aux sciences non linéaires permettant d'analyser, de comprendre et de décrire tous ces phénomènes en adoptant progressivement une approche formelle à portée universelle. La théorie du chaos est abordée simplement avec une perspective statistique pour comparer et discriminer les phénomènes chaotiques des phénomènes aléatoires. La théorie des catastrophes est exposée avec le même souci de simplicité ; les sept catastrophes élémentaires sont extraites de manière qualitative avec un minium de formalisme mathématique. Une des forces de cette théorie est en effet la faculté d'établir une classification des catastrophes sans avoir besoin de connaître le type d'équations décrivant le système ; celles-ci peuvent être arbitrairement complexes, ou même impossibles à écrire. La théorie de la morphogenèse (émergence des formes) est introduite également à partir d'exemples visualisables aisément, telle la convection ou les systèmes de réaction-diffusion chimique, la relation entre la morphogenèse chimique et celle des êtres vivants, comme le pelage de certains animaux, est alors évoquée. L'étude de l'instabilité des structures spatiales à une et deux dimensions est traitée ainsi que le changement d'états du système le faisant évoluer de solutions stables à des solutions instables ou métastables, et inversement, avec un souci pédagogique poussé. Le dilemme de la sélection d'une vitesse unique d'invasion (parmi un ensemble infini de solutions) d'une solution instable par une solution stable est présenté et résolu à l'aide de considérations élémentaires. Ainsi, ces phénomènes dits complexes sont abordés simplement dans cet ouvrage par des exemples concrets dont l'analyse et la compréhension permettent d'en extraire toute la substance universelle à l'aide d'un formalisme mathématique accessible. De par sa relative simplicité, la majeure partie de cet ouvrage est accessible aux élèves de classes préparatoires, aux étudiants de licence (L1, L2, L3), et très adaptée aux étudiants de maîtrise (M1, M2) et en doctorat, aux ingénieurs. Il s'adresse également à tout ingénieur, tout chercheur et tout enseignant-chercheur souhaitant être au fait des connaissances actuelles en sciences non linéaires.

Table des matières

Table des illustrations **xvii**

1 Présentation des grandes lignes **1**

2 Introduction élémentaire aux bifurcations à une dimension **15**
2.1 Un exemple mécanique simple 15
2.1.1 Énergie potentielle et position d'équilibre 15
2.1.2 Une explication intuitive de l'existence d'une bifurcation 18
2.1.3 Analyse de la bifurcation 19
2.1.4 Universalité au voisinage d'un point de bifurcation . . . 19
2.2 Analogie entre une bifurcation fourche et une transition de phase du deuxième ordre 21
2.3 Considérations dynamiques 22
2.3.1 Analyse de stabilité linéaire 23
2.3.2 Ralentissement critique 24
2.3.3 Élimination adiabatique des modes rapides – réduction du nombre de degrés de liberté 25
2.3.4 Équation d'amplitude 27
2.3.5 Forme canonique de l'équation d'amplitude 28
2.3.6 Attracteurs de la dynamique 29
2.3.7 Fonction de Lyapunov 30
2.3.8 Brisure de symétries 30
2.4 Systèmes dynamiques et importance de la bifurcation fourche 31

3 Les autres bifurcations génériques **33**
3.1 Bifurcation imparfaite ; brisure extrinsèque de symétrie 33
3.1.1 Un avant-goût de la théorie des catastrophes 38
3.2 Bifurcation sous-critique et multistabilité 40
3.2.1 Métastabilité et rôle des fluctuations 45
3.2.2 Cycle d'hystérésis 46
3.3 Bifurcation transcritique 47

3.3.1 Stabilité linéaire des points fixes 49
3.4 Bifurcation col-nœud 51
3.4.1 Rappel du pendule simple 51
3.4.2 Pendule simple en présence d'une nouvelle force extérieure 52
3.4.3 Stabilité linéaire 53
3.4.4 Forme universelle de la bifurcation col-nœud 55
3.4.5 Origine de la dénomination col-nœud 55
3.4.6 Mouvement de bascule ou de ***tumbling*** 58
3.4.7 Digressions vers la biologie 62
3.5 Définition d'une bifurcation 63
3.6 Théorie des catastrophes et stabilité structurelle 64
3.6.1 Quelle différence entre stabilité structurelle et stabilité dynamique ? 65
3.6.2 Stabilité structurelle et subjectivité 65
3.7 En quoi consiste la théorie des catastrophes ? 66
3.7.1 Illustration de la théorie des catastrophes 67
3.8 Stabilité structurelle avec un nombre infini d'exceptions : les lieux des catastrophes ! 71
3.9 Problèmes 72
3.9.1 Problème : le plateau de Maxwell 72
3.9.2 Problème : exemple d'une bifurcation sous-critique . . . 73
3.9.3 Problème : bifurcation sous-critique imparfaite 77
3.9.4 Problème : Euler et le film de savon 77
3.9.5 Problème : une bifurcation sous-critique possède une branche col-nœud 84

4 Classification des sept catastrophes élémentaires 87
4.1 Catastrophe pli ou point tournant 88
4.1.1 Déploiement des singularités en des termes simples . . . 89
4.1.2 Comment le nombre de paramètres indépendants affecte-t-il la puissance de la singularité ? 91
4.1.3 Notion de codimension 93
4.2 La catastrophe ***cusp*** 94
4.3 La catastrophe queue d'aronde 97
4.4 La catastrophe papillon 98
4.5 Qu'en est-il des problèmes à plusieurs degrés de liberté ? . . . 99
4.6 La catastrophe ombilic hyperbolique 101
4.7 La catastrophe ombilic elliptique 102
4.8 La catastrophe ombilic parabolique 104
4.9 Résumé des sept catastrophes élémentaires 104
4.10 Remarques générales 104
4.11 Problèmes 106

4.11.1 Problème : plus de détail sur la catastrophe ombilic hyperbolique 106

5 Bifurcation de Hopf 109
5.1 L'oscillateur de van der Pol 109
5.1.1 Discussion qualitative 112
5.1.2 Étude de la dynamique non linéaire 113
5.1.3 Bifurcation de Hopf 114
5.1.4 Espace des phases et cycle limite 115
5.2 Le modèle proie-prédateur, un exemple de dynamique de population 118
5.2.1 Résultats essentiels issus du modèle Lotka-Voltera (LV) 118
5.2.2 Un modèle plus réaliste de la dynamique de populations conduisant à un cycle limite 121
5.3 Réactions chimiques 124
5.3.1 La loi d'action et de masse 124
5.3.2 Cinétique de réaction 125
5.3.3 Équations d'évolution non linéaires 126
5.3.4 Le Bruxellateur 127

6 Équation d'amplitude pour une bifurcation de Hopf 129
6.1 Dérivation de l'équation d'amplitude complexe 129
6.1.1 Analyse multi-échelle 130
6.1.2 Condition de solubilité ou de solvabilité 134
6.1.3 Quelques précisions utiles sur l'équation d'amplitude 137
6.1.4 Dérivation de l'équation d'amplitude à partir des symétries 138
6.1.5 Propriétés de l'équation d'amplitude complexe 138
6.2 Cycle limite instable 140
6.3 Précisons davantage la notion de cycle limite 142
6.4 Problèmes 142
6.4.1 Problème : solution dépendante du temps de l'équation d'amplitude complexe 142
6.4.2 Problème : dérivation de l'équation d'amplitude complexe pour le modèle « Bruxellateur » 144

7 Instabilité paramétrique et autres instabilités 149
7.1 Exemple simple d'une excitation paramétrique 149
7.2 Instabilité sous-harmonique 150
7.3 Image intuitive de la résonance paramétrique 152

7.4 Équation d'amplitude universelle au voisinage d'une résonance sous-harmonique 154
7.4.1 Détermination de l'équation non linéaire à partir des propriétés de symétrie 156
7.5 Instabilité non linéaire 157
7.6 Accrochage de la phase 158
7.6.1 Forçage non résonant 159
7.6.2 Forçage résonant 160
7.6.3 Forme de l'équation et symétrie 161
7.6.4 Accrochage d'ordre supérieur : équation générale obtenue par les symétries 161
7.7 Problèmes 164
7.8 Problème : instabilités des harmoniques supérieures, et effet du frottement 164

8 Introduction au chaos **169**
8.1 Un exemple typique 169
8.2 Où l'avenir d'une population dépend d'un seul individu ! . . . 170
8.2.1 D'un point fixe simple au chaos 172
8.3 Origine et signification de l'application $f(x) = 4ax(1-x)$ 173
8.4 Quelle différence entre hasard et chaos ? 176
8.5 Quelques commentaires sur la dynamique de populations et courbe logistique 178
8.5.1 Temps continu et temps discret, application retour et section de Poincaré 179
8.6 Approche géométrique de la section de Poincaré 179
8.7 Attracteurs étranges 180
8.8 Les trois scénarios de transition vers le chaos 180
8.9 Transition vers le chaos par cascade sous-harmonique 184
8.10 Transition vers le chaos par un scénario de quasi-périodicité 184
8.11 Transition vers le chaos par intermittence 186
8.12 Étude détaillée du chaos par cascade sous-harmonique 188
8.12.1 Point fixe de l'application logistique $x_{n+1} = f(x_n) = 4ax_n(1-x_n)$ 188
8.12.2 Stabilité des points fixes 188
8.12.3 Point d'accumulation de la cascade 191
8.12.4 Diagramme de bifurcation et notion d'autosimilarité 193
8.13 Dimension critique pour obtenir du chaos 193
8.14 Exposants de Lyapunov 196

8.14.1 Définition 196
8.14.2 Propriétés des exposants de Lyapunov 197
8.15 Autosimilarité et fractales 198
8.16 Crises 202
8.17 Hasard et déterminisme 205
8.17.1 L'application tente 205
8.17.2 Sensibilité de l'application tente aux conditions initiales 207
8.17.3 Jouer à la roulette ou au chaos ? 208
8.17.4 Mesure invariante 209
8.18 Le contrôle du chaos 211

9 Naissance de l'ordre spatial unidimensionnel 213
9.1 Introduction 213
9.2 Le système de Turing 215
9.2.1 Image qualitative de l'instabilité de Turing 216
9.3 Analyse de stabilité linéaire du système de Turing 218
9.4 Définition d'une instabilité de Turing 219
9.4.1 Naissance de l'ordre 220
9.4.2 Condition de Turing pour la naissance de l'ordre 221
9.5 Introduction de quelques modèles donnant lieu aux structures de Turing 223
9.5.1 Le modèle de Schnackenberg 224
9.5.2 Le modèle de Lengyel-Epstein 225
9.6 Quelles conditions pour obtenir un inhibiteur qui diffuse suffisamment rapidement par rapport à l'activateur ? 226
9.7 Au-delà de l'instabilité linéaire de Turing 228
9.8 Diverses formes de l'instabilité de Turing rencontrées dans la nature 229
9.9 Quel est l'impact des structures de Turing sur la morphogenèse dans la nature ? 231
9.10 Convection de Rayleigh-Bénard 232
9.10.1 Argument heuristique pour la détermination du seuil de la convection de Rayleigh-Bénard 235
9.11 Relation de dispersion pour la convection Rayleigh-Bénard 239
9.11.1 Analyse de stabilité linéaire 242
9.11.2 Rouleaux de convection 248

10 Universalité au voisinage du seuil 251
10.1 Équation d'amplitude universelle 252
10.1.1 Introduction des échelles multiples 254
10.1.2 Dérivation de l'équation d'amplitude 257

10.2 Quelques propriétés de l'équation d'amplitude 259
10.2.1 La forme de l'équation d'amplitude obtenue à partir des symétries 259
10.2.2 Les coefficients sont réels : conséquence de la symétrie d'inversion 260
10.2.3 Forme canonique et autres formes équivalentes de l'équation d'amplitude 260
10.2.4 Dynamique variationnelle de l'équation d'amplitude . . 261
10.3 Instabilité d'Eckhaus 263
10.3.1 L'instabilité d'Eckhaus : une instabilité de la phase . . . 265
10.4 Instabilité d'Eckhaus : mort et création de cellules 267
10.5 Quelques remarques sur les instabilités des structures unidimensionnelles 268

11 Fronts entre domaines **271**
11.1 Invasion d'une solution métastable par une solution stable 273
11.1.1 Notion de front 273
11.1.2 Analogie avec la mécanique de Newton 275
11.1.3 Détermination de la vitesse d'invasion d'une solution métastable par une solution stable 277
11.2 Invasion de la solution instable par une solution stable 279
11.3 L'approximation du front précurseur 281
11.3.1 Instabilité de la solution correspondant à $v < v^*$ 283
11.3.2 Stabilité marginale 287
11.4 Conclusion 288
11.5 Problèmes 289
11.5.1 Problème : détermination explicite de la vitesse d'invasion d'une solution métastable par une solution stable 289

12 Ordre et désordre spatial et temporel **291**
12.1 Équation d'amplitude à coefficients complexes 292
12.1.1 Quelques préliminaires 292
12.1.2 Dérivation de l'équation d'amplitude à partir des symétries 295
12.2 Dynamique non variationnelle 297
12.3 Quelques propriétés de l'équation d'amplitude complexe 298
12.3.1 Ondes planes et stabilité 298
12.3.2 Instabilité de Benjamin-Feir 300

12.4 Illustration de la dynamique pour certains cas typiques : analyse numérique . . . 301
12.4.1 Ondes planes . . . 301
12.4.2 Turbulence de phase et turbulence médiée par des défauts topologiques . . . 302
12.4.3 Intermittence spatio-temporelle . . . 305
12.4.4 Les trous de Bekki-Nozaki . . . 305
12.5 Problèmes . . . 306
12.5.1 Problème : équation de Kuramoto-Sivashinsky au voisinage de l'instabilité de Benjamin-Feir . . . 306

13 Structures bidimensionnelles 309
13.1 Ordre à deux dimensions . . . 309
13.1.1 Les différents types d'ordre spatial à deux dimensions . . . 311
13.2 Raison de l'abondance des structures hexagonales dans la nature . . . 313
13.2.1 émergence des structures hexagonales : non-linéarité quadratique et phénomène de résonance . . . 315
13.2.2 Inhibition des structures hexagonales : cas de la convection de Rayleigh-Bénard . . . 318
13.3 Forme générale de l'équation d'amplitude à deux dimensions spatiales . . . 320
13.3.1 Symétrie hexagonale . . . 320
13.3.2 Symétrie carrée . . . 322
13.4 Stabilité des structures en bandes, carrées et hexagonales . . . 323
13.4.1 Stabilité des bandes . . . 326
13.4.2 Stabilité des hexagones . . . 327
13.4.3 Stabilité des structures carrées . . . 330
13.5 Équation d'amplitude de structures bidimensionnelles à symétrie hexagonale . . . 331
13.6 Problèmes . . . 332
13.6.1 Problème : dérivation formelle de l'équation d'amplitude . . . 332
13.6.2 Problème : dérivation de l'équation d'amplitude à partir de considérations des harmoniques . . . 333

14 Conclusion 335
14.1 Instabilités secondaires . . . 336
14.2 Structures à deux dimensions et bifurcation de Hopf . . . 337
14.3 Systèmes non réductibles à une équation d'amplitude . . . 338
14.4 Mûrissement des structures hors équilibre . . . 339

14.5 Branches et formes variées en matière inerte et vivante 340
14.6 Vers une science des systèmes complexes 345

Remerciements **347**

Bibliographie **348**

Sources des illustrations **355**

Index **356**

Table des illustrations

1.1 Catastrophe papillon 5
1.2 Image mécanique de stabilité et de métastabilité. 6
1.3 Bifurcation col-nœud 7
1.4 Rides éoliennes 9
1.5 Cellules de Bénard-Marangoni. 10
1.6 Une structure organisée de type Bénard-Marangoni à la surface de la terre 11

2.1 Schéma d'un ressort donnant lieu à une bifurcation fourche. . . 16
2.2 Comportement qualitatif de l'énergie potentielle 18
2.3 Une vue schématique des positions d'équilibre 20
2.4 Un diagramme de bifurcation fourche. 26
2.5 L'amplitude en fonction du temps pour différentes conditions initiales pour une bifurcation fourche. 30

3.1 Schéma d'un ressort présentant une bifurcation imparfaite. . . 34
3.2 Comportement typique de la fonction P pour $\epsilon < 0$. 37
3.3 Comportement typique de la fonction P pour $\epsilon > 0$. 37
3.4 Le comportement typique de $V(A)$ pour différentes valeurs de ϵ. 39
3.5 Le diagramme d'une bifurcation imparfaite 39
3.6 Le diagramme d'une bifurcation imparfaite après changement du signe de l'imperfection. 39
3.7 Bifurcation imparfaite duale. 42
3.8 Potentiel pour une bifurcation sous-critique. 43
3.9 Le diagramme d'une bifurcation sous-critique. 43
3.10 Schéma expliquant la notion de stabilité et de métastabilité. . . 47
3.11 Diagramme de bifurcation montrant le cycle d'hystérésis 48
3.12 Diagramme de bifurcation transcritique obtenue à partir d'une équation d'amplitude quadratique. 49
3.13 Diagramme de bifurcation transcritique obtenue à partir d'une équation d'amplitude cubique. 50
3.14 Schéma du système pendulaire. 52
3.15 Le pendule en présence d'une force $\vec{f}$ tangente à la trajectoire. 53

3.16 Courbe de points fixes (courbe de bifurcation) du pendule en présence de la force $\vec{f}$. 54
3.17 Évolution du potentiel pour une bifurcation col-nœud. 56
3.18 Schéma montrant deux positions d'équilibre possibles, **t** est le vecteur unité tangent à la trajectoire. 58
3.19 Schéma montrant la stabilité du point fixe. 59
3.20 Schéma montrant la stabilité du point fixe. 59
3.21 Schéma montrant l'instabilité du point fixe. 60
3.22 Schéma montrant l'instabilité du point fixe. 60
3.23 Comportement de l'angle $\theta(t)$ dans le régime *tumbling*. 61
3.24 Photos de *tumbling* de globules rouges. 63
3.25 Branche de point fixe de l'équation (3.34). 64
3.26 (a) Bifurcation fourche. (b) Bifurcation imparfaite. (c) Représentation schématique de résultats expérimentaux entachés d'incertitude. 66
3.27 Potentiels $V = \epsilon A^2 + A^4$, et $V = \nu A + \epsilon A^2 + A^4$. 69
3.28 La catastrophe *cusp* et la forme du potentiel dans chacune des régions. 70
3.29 Construction de Maxwell. 73
3.30 Schéma d'un système de ressort donnant lieu à une bifurcation sous-critique. 74
3.31 Énergie potentielle d'un système de ressort donnant lieu à une bifurcation sous-critique. 76
3.32 Diagramme de la bifurcation sous-critique imparfaite pour un signe donné de l'imperfection. 78
3.33 Film de savon : problème d'Euler 79
3.34 Représentation graphique de l'existence d'une bifurcation col-nœud 81
3.35 Images des deux solutions stables et instables du film de savon. 82
3.36 L'énergie relaxée de la solution stable. 83
3.37 La bifurcation sous-critique a la forme d'une bifurcation col-nœud au voisinage du point tournant. 84

4.1 La catastrophe pli et la forme du potentiel 90
4.2 (a)$V = A^3$. (b) $V = A^3 + \epsilon A$, avec $\epsilon < 0$. 90
4.3 Catastrophe pli en convection. 93
4.4 Représentation qualitative de la catastrophe *cusp*. 96
4.5 Surface de bifurcation dans le cas d'une catastrophe *cusp*. . . . 96
4.6 Catastrophe queue d'aronde et ses projections 98
4.7 Catastrophe papillon en projection. 99
4.8 Catastrophe ombilic hyperbolique en projection et dans l'espace. 101
4.9 La catastrophe ombilic elliptique en projection et dans l'espace. 103
4.10 La catastrophe ombilic parabolique en projection et dans l'espace.103

5.1 Un circuit RLC classique. 110

5.2 Courbe de tension-courant pour un circuit comprenant une diode tunnel. 111
5.3 Diagramme qualitatif de bifurcation pour l'instabilité de Hopf. 115
5.4 Cycle limite. 117
5.5 Cycle limite de l'oscillateur de van der Pol. 117
5.6 Le portrait dans l'espace des phases du modèle de Lotka-Voltera 121

6.1 Représentation d'un cycle limite. 141
6.2 Diagramme de bifurcation pour l'amplitude ρ pour une bifurcation de Hopf. 141
6.3 Orbites dans le cas hamiltonien 143

7.1 Diagramme de l'instabilité paramétrique sans frottement. . . . 153
7.2 Image intuitive de la résonance sous-harmonique 154
7.3 Diagramme de l'instabilité paramétrique obtenu à partir de l'équation d'amplitude 157
7.4 Diagramme de bifurcation issue de l'équation d'amplitude . . . 158
7.5 Diagramme de bifurcation de l'oscillateur non linéaire 160
7.6 Diagramme des solutions possibles, QP : quasi périodique, AC : état accroché, et F : état forcé. 164
7.7 Diagramme de l'instabilité paramétrique en présence de frottement 168

8.1 Illustration de l'évolution de la cascade sous-harmonique à partir de la courbe logistique. 174
8.2 Dynamique de Rösseler et introduction à la section de Poincaré. 175
8.3 Courbe logistique issue du système de Rössler. 176
8.4 Signal issu d'une loi gaussienne et une section de Poincaré . . . 177
8.5 Quelques illustrations de la section de Poincaré pour certaines trajectoires dans l'espace de phase. 181
8.6 Un attracteur étrange et sa section. 182
8.7 Trajectoire dans l'espace de phase du système de Rössler. . . . 182
8.8 Représentation schmatique d'une trajectoire dans l'espace de phase montrant une auto-similarité. 183
8.9 Un tore idéal et un tore réel obtenus par simulation numérique d'un problème de croissance cristalline. 185
8.10 Section de Poincaré d'une dynamique chaotique d'un problème de croissance cristalline. 186
8.11 Une dynamique chaotique typique par intermittence. 187
8.12 Points fixes de la courbe logistique et ses différentes compositions d'ordre élévé. 192
8.13 Le diagramme de bifurcation montrant l'accumulation de la cascade sous-harmonique et la structure self-similaire 194
8.14 Une condition initiale telle que (x_0, y_0) peut appartenir à l'une ou l'autre branche de la trajectoire. Ceci est en contradiction avec la dynamique deterministe. 196

8.15 Illustration de la contraction des aires dans l'espace de phases pour un système dissipatif. 198
8.16 Fractale de Mandelbrot. 199
8.17 Figure exliquant la notion de dimension fractale. 200
8.18 La fractale flocon de neige. 201
8.19 Fractale de Sierpinski. 203
8.20 Une figure auto-similaire mais non fractale. 203
8.21 Explication intuitive de la dimension fractale. 204
8.22 Le signal $\dot{x}(t)$ montrant l'emergence d'une crise. 206
8.23 L'application tente. 207
8.24 L'application tente composée deux fois, $f^2(x_n)$, et l'application tente composée m fois, $f^m(x_n)$ (m assez grand). 208
8.25 Densité invariante $\rho(x)$ associée à la courbe logistique. 211

9.1 Une structure assez organisée de cumulonimbus. 214
9.2 Explication qualitative de l'instabilité de Turing. 217
9.3 Illustration de la relation de disperssion 219
9.4 Relation de dispersion générique dans le cas de la naissance de l'ordre. 221
9.5 Un motif chimique typique observé expérimentalement. 228
9.6 Des motifs chimiques de léopard et de jaguar reproduits par des variantes du modèle de Turing. 230
9.7 Vue schématique de la cellule de Rayleigh-Bénard. 235
9.8 Explication qualitative de la convection de Rayleigh-Bénard. . 236
9.9 Courbe neutre de la convection de Rayleigh-Bénard 248
9.10 Vue schématique de la structure en rouleaux du champ de vitesse. 249

10.1 Relation de dispersion générique. 254
10.2 Diagramme d'une bifurcation fourche. 261
10.3 Le potentiel $V(A)$ en fonction de A. Pour $\epsilon > 0$, la solution $A = 0$ devient instable. 262
10.4 Courbe neutre et la courbe délimitant l'instabilité d'Eckhaus. . 267
10.5 Illustration schématique de l'instabilité d'Eckhaus. 268

11.1 Schéma de l'invasion d'une solution par une autre. 272
11.2 Solution à front obtenu de (11.5) pour $\epsilon = 1$. 274
11.3 Analogie mécanique du problème à front unique et à fronts multiples. 276
11.4 Analogie mécanique de l'invasion d'une solution métastable par une solution stable. 278
11.5 Explication mécanique de l'existence d'un nombre infini de solutions dans le problème d'invasion d'une solution instable par une solution stable. 280
11.6 La solution stationnaire pour différentes valeurs de la vitesse. . 281

11.7 Représentation des solutions possibles dans l'approximation du front précurseur. 282
11.8 Explication schématique de la compétition entres solutions. . . 283
11.9 Analogie avec la croissance d'un cristal facetté. 284

12.1 Portrait spatio-temporel dans le cas stable vis-à-vis de l'instabilité Benjamin-Feir. 302
12.2 Diagramme de phase des solutions de l'équation de Landau-Ginzburg à coefficients complexes. 303
12.3 Portrait spatio-temporel dans la région instable de Benjamin-Feir : cas de la turbulence initiée par les défauts. 304
12.4 Portrait spatio-temporel et module de A dans le cas de la turbulence de phase. 305
12.5 Portrait spatio-temporel, et module de A dans le cas d'une intermittence spatio-temporelle. 306
12.6 Portrait spatio-temporel, et module de A en présence de trous de Bekki-Nozaki 307

13.1 Schéma montrant l'existence de 5 résaux périodiques à deux dimensions. 312
13.2 Modes instables et exemples de l'ordre à deux dimensions. . . . 312
13.3 Les cinq types de réseaux possibles à deux dimensions. 313
13.4 Des exemples de motifs périodiques : carré, rectangulaire, rectangulaire centré, hexagonal et oblique. 314
13.5 Motifs hexagonaux rencontrés dans la nature : des colonnes de basalte et sol d'argile 316
13.6 Schémas montrant la présence ou l'absence de résonance. . . . 318
13.7 Diagramme de bifurcation des structures hexagonales et des structures en bandes et leur stabilité. 324
13.8 Représentation des bifurcation par un potentiel. 329
13.9 Le diagramme de bifurcation pour les hexagones. 329

14.1 Un cristal de neige, une figure obtenue par croissance limitée par la diffusion, et un doigt de Saffmann-Taylor. 342
14.2 Une population de bactéries (connue sous le nom *Bacillus subtilus*).343
14.3 Organisation de protéines en astres. Ces protéines sont impliquées dans le processus de division cellulaire. 344

Chapitre 1

Présentation des grandes lignes

Le XXI^{e} siècle voit avec son avènement l'émergence d'un nouveau champ de recherche : celui des phénomènes non linéaires. Loin d'être un effet de mode, la non-linéarité est, bien au contraire, une problématique défiant la communauté scientifique dans son ensemble puisqu'elle est au cœur aujourd'hui de toutes les disciplines : la physique, la chimie, les mathématiques, la biologie, la géologie, l'économie, les sciences sociales, etc.

La théorie des phénomènes linéaires avec son principe de superposition[1] permet de décrire de nombreux phénomènes naturels, tels le mouvement des planètes, la propagation des ondes électromagnétiques... Toutefois, le principe de superposition ne s'applique pas dans la majorité des phénomènes rencontrés dans la nature et dans la vie courante, et ce à cause de la prédominance des effets non linéaires. Par exemple, la dynamique des mondes économique et financier observée à travers l'évolution du cours de la Bourse est une incarnation typique et quotidienne de ces comportements non linéaires. En effet, l'état de la Bourse dépend de l'ensemble de décisions effectuées par les agents boursiers ; or, chaque agent boursier fonde sa décision d'acheter ou de vendre des titres sur un ensemble de facteurs, telles la situation économique globale du moment, les rumeurs courant sur la santé financière de tel ou tel autre groupe d'actionnaires, ou encore l'anticipation personnelle qu'il effectue sur la décision à venir des autres agents... Ainsi, l'agent boursier n'agit pas du tout comme s'il était seul : le principe de superposition atteint ses limites pour laisser place à un formidable problème d'interaction et d'interdépendance entre phénomènes.

Les manifestations de la non-linéarité, que recouvre en partie la notion de complexité, sont innombrables. Par exemple : la présence d'oscillations tem-

[1] Le principe de superposition présuppose que deux effets coexistants n'interfèrent pas l'un avec l'autre ; chacun agit comme s'il était seul. La résultante des effets est alors égale à la somme des deux effets.

porelles des phénomènes (solutions oscillantes) ; l'apparition d'états chaotiques caractérisés par l'incapacité de prédire précisément l'évolution du système, même si le système est parfaitement déterministe et ne comporte en principe aucun effet aléatoire ; la naissance de structures spatiales désordonnées ou bien ordonnées (morphogenèse), à l'instar des bandes ou des taches sur le pelage de certains animaux comme le zèbre ou le léopard.

Le point remarquable, et probablement un des plus fascinants pour le scientifique qui étudie ces phénomènes, réside dans le fait que cette complexité peut se manifester même au sein de systèmes relativement simples. La physique et la chimie – pour ne citer que ces deux domaines scientifiques – regorgent de systèmes assez simples, dans le sens où leur mise en équations est relativement élémentaire ; ces systèmes révèlent néanmoins une complexité insoupçonnée précisément grâce aux effets non linéaires qu'ils recèlent intrinsèquement. L'étude de la complexité de ces systèmes permet de défricher ce nouveau territoire en établissant quelques enseignements utiles à l'étude ultérieure de systèmes plus complexes.

Le problème de l'état et de l'évolution du cours de la Bourse évoqué plus haut est par lui-même un problème complexe et il est difficilement réductible en un système d'équations ; ainsi, extraire une complexité d'un système déjà complexe au départ peut ne pas être discriminant. Mais il faut souligner que le domaine des phénomènes non linéaires développe, pour l'étude des sytèmes trop complexes, des approches alternatives à la mise en équations, telle la théorie des catastrophes (voir les trois dernières sections du chapitre 3 et le chapitre 4) qui permet d'énoncer des conclusions générales sur le comportement et l'état de ces systèmes.

Sans que le terme non linéaire y soit explicitement associé, il est pourtant un phénomène non linéaire que nous connaissons tous : les réactions chimiques. Ici, le terme « réaction » porte déjà en lui-même la notion d'« interaction », « d'effets non additifs » et donc de « phénomènes non linéaires ». Considérons, à titre d'exemple, le cas de deux substances désignées par S_A et S_B qui réagissent pour donner naissance à une substance S_C, réaction symbolisée par l'équation suivante :

$$S_A + S_B \rightarrow S_C \ . \tag{1.1}$$

La vitesse de réaction de production de la substance S_C dépend dans les cas simples du produit des deux concentrations, $A \times B$ des substances S_A, S_B. Ainsi, par exemple, si les concentrations A et B sont modifiées par des quantités δA et δB, la vitesse de réaction devient proportionnelle à $(A + \delta A)(B + \delta B)$. La variation de la vitesse est donnée par $(A + \delta A)(B + \delta B) - AB = A\delta B + B\delta A + \delta A\delta B$, et non par $\delta A + \delta B$, comme pourrait le dicter le principe de superposition.

À la fois dans le monde inerte et dans le monde vivant, les réactions chimiques offrent un terrain très riche donnant lieu à des comportements fascinants. Elles président à de nombreuses régulations et évolutions biologiques. Nous ver-

rons plusieurs conséquences issues de réactions chimiques, avec des dynamiques riches (voir chapitres 5 et 9).

Les modèles de type « réaction » ne se limitent pas uniquement aux espèces chimiques, mais peuvent avoir une portée bien plus grande. Ainsi, les problèmes de dynamique de populations, comme la dynamique de proie-prédateur (section 5.2), en biologie ou en sciences sociales et économiques... peuvent être décrits par ce type de modèle. Il est donc probable que ces systèmes obéissent à des comportements similaires, même si *a priori* aucun lien de parenté n'apparaît clairement entre ces systèmes.

Un système non linéaire est en général décrit par un système d'équations couplées, telles les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles. La présence de termes non linéaires (tels les produits de dérivées partielles ou totales d'ordre n, $n = 1, 2, ...$) induit, pour un même système et pour les mêmes valeurs de paramètres, l'existence d'un grand nombre, voire d'un nombre infini, de solutions possibles. Cela contraste foncièrement avec les systèmes linéaires pour lesquels la solution est unique[2]. Ainsi, un système non linéaire « choisit » une certaine solution parmi les multiples solutions possibles ; une question se pose alors naturellement : existe-t-il un principe, un critère, une loi qui permette au système de choisir une solution ? C'est le dilemme de la sélection de solution, propre aux systèmes hors équilibre thermodynamique[3] : à la différence des systèmes à l'équilibre pour lesquels le second principe de la thermodynamique[4] constitue un principe de sélection de solution, les systèmes ouverts, qui sont donc hors équilibre, n'en disposent pas. C'est donc là une caractéristique nouvelle : l'absence de principe de type thermodynamique ouvre la voie à la complexité des systèmes hors équilibre.

Par ailleurs, même si le système non linéaire « choisit » initialement une solution parmi l'ensemble des solutions possibles, il n'est pas dit que cette solution soit réalisable pour toutes les valeurs des paramètres de contrôle[5]. En effet, lorsque les paramètres varient, le système peut « sauter » brusquement d'une solution vers une autre, par exemple d'une solution statique vers une solution qui oscille dans le temps. La nouvelle solution est qualitativement différente de l'ancienne. Ce changement de comportement peut arriver soudainement, c'est-

[2] On écarte ici les situations dégénérées (en principe non physiques) telles le système linéaire de la forme $x + y = 1$ et $2x + 2y = 2$, qui admet une infinité de solutions, car les deux équations ne sont pas indépendantes (système dégénéré). En termes plus formels, une solution d'un système linéaire est unique si le système satisfait au théorème de l'alternative de Fredholm (voir chapitre 6 pour une telle notion).

[3] Un système hors équilibre thermodynamique est un système ouvert qui échange de l'énergie et de la matière avec l'extérieur. Cette notion est souvent associée à des exemples physiques et chimiques, mais elle est plus générale ; ainsi, un système économique ou social, est en constante évolution et peut être vu comme un système ouvert hors équilibre.

[4] Le second principe de la thermodynamique, également dénommé seconde loi de la thermodynamique, décrit l'irréversibilité de l'évolution des systèmes isolés notamment après un échange de chaleur. Ce principe stipule que toute évolution spontanée d'un système isolé s'effectue avec une création d'entropie.

[5] Un paramètre est dit de contrôle lorsque c'est une quantité sur laquelle peut agir un expérimentateur.

à-dire sans élément précurseur d'avertissement, lorsqu'un paramètre atteint une valeur critique. Par exemple, une zone climatique relativement stable peut, suite à une dépression atmosphérique, vivre une grande tempête. Ce changement qualitatif est appelé *bifurcation*. En général, une bifurcation survient soit parce que l'ancienne solution (dans l'exemple hydrodynamique ci-dessus, un « temps calme ») est devenue instable, soit que tout simplement la solution d'équilibre cesse d'exister (exemple mécanique : une poutre atteint la limite de rupture – il n'y a plus de solution d'équilibre possible – ce qui peut entraîner l'effondrement de la structure). Dans cet ouvrage, nous explorons la richesse des divers scénarios possibles de bifurcations (voir chapitres 2, 5 et 6, 3).

En observant le comportement de nombreux systèmes naturels, en biologie notamment, le mathématicien René Thom[6] a suggéré de nommer *catastrophe* le changement qualitatif de comportement d'un système. Il bâtit dans les années 1970 une nouvelle approche de l'analyse des systèmes fondée sur la représentation des solutions qualitativement différentes dans l'espace des paramètres de contrôle (voir référence [75]). Représentées dans un espace à deux dimensions pour un système disposant de deux paramètres de contrôle, les solutions qualitativement différentes définissent différentes régions bordées par des lignes représentant des frontières (comme sur une carte géographique où les lignes séparent les pays). L'ensemble des lignes frontières forme une certaine figure géométrique, par exemple un papillon (voir figure 1.1, dite aussi portrait de la catastrophe). Dans cet espace, la traversée d'une ligne correspond à un changement qualitatif de solution ; ces frontières sont dites lignes de catastrophes. Chaque type de catastrophe correspond à un portrait unique, ou empreinte unique de cette figure géométrique dans l'espace de paramètres de contrôle. En connaissant le nombre de paramètres de contrôle indépendants au sein d'un système, il est donc possible de déterminer à l'avance le nombre et la nature de catastrophes possibles sans avoir besoin de connaître les équations d'évolution qui régissent le système ; en particulier, cet énoncé reste vrai même si ces équations sont impossibles à imaginer.

Relativement au nombre de paramètres de contrôle du système (et non en fonction de ses degrés de liberté), nous verrons qu'il existe sept catastrophes élémentaires distinctes. Nous les décrirons dans cet ouvrage selon une perspective relativement élémentaire et intuitive (voir chapitre 4).

L'étude des phénomènes non linéaires comporte un volet spécifique et important consacré à l'étude des solutions permanentes (i.e solutions dont la durée de vie est suffisamment grande, voire infinie), ce qui intègre également les solutions oscillantes dans le temps et les solutions chaotiques. Ainsi, le soleil se lève et se couche régulièrement, et même si la durée du jour et de la nuit change au cours des saisons, le mouvement a un caractère permanent puisqu'il se répète chaque année. Même un signal chaotique se répète dans un certain sens, pas au sens de la valeur du signal, mais dans un sens un peu plus abstrait (disons pour

[6] René Frédéric Thom (1923-2002), mathématicien français, connu pour avoir développé la théorie des catastrophes en 1968, a reçu pour ses travaux sur la topologie différentielle (théorie de cobordisme) la médaille Fields en 1958.

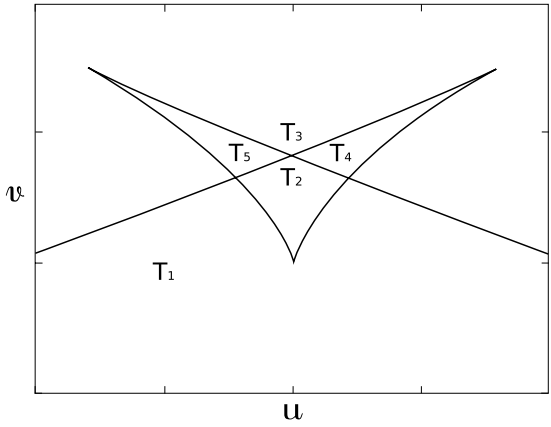


Figure 1.1 – Une figure géométrique de type « papillon » délimitant les régions correspondant aux différents types ($T_1 - T_5$) de solutions. u et v sont les paramètres de contrôle.

le moment au sens statistique) que nous aurons l'occasion d'évoquer brièvement (voir chapitre 8). En bref, tout ce qui n'est pas un phénomène transitoire (i.e. qui dure un petit laps de temps par rapport aux temps caractéristiques du système) sera appelé permanent, quelle que soit la complexité du mouvement.

Parmi l'ensemble des solutions possibles, seules les solutions stables ont une chance de survivre, mais cela n'exclut pas la possibilité d'observer, temporairement, les solutions instables[7]. Un exemple de situation instable mais qui peut durer un certain temps : une balle posée au sommet d'une bosse (figure 1.2) ; cette situation peut en effet perdurer jusqu'à ce que, suite à une petite perturbation, la balle ne dégringole. Ainsi une solution est dite instable lorsqu'elle est sensible aux perturbations même très faibles ; l'état final peut alors être foncièrement différent de celui avant perturbation. Le système est dit *linéairement instable*[8]. Par opposition aux solutions instables, les solutions stables restent indifférentes à une perturbation intrinsèque (disons une fluctuation non contrôlée) ou extérieure (petite perturbation causée par un agent externe), en ce sens qu'après réaction à la perturbation, le système retrouve l'état initial avant la perturbation (c'est le cas d'une balle posée au fond d'une vallée).

Lorsqu'un système résiste aux faibles perturbations mais se soumet à des perturbations plus fortes, le système est alors dit linéairement stable (i.e. stable vis-à-vis d'une petite perturbation ; image du haut sur la figure 1.2), mais il

[7] L'étude des solutions instables peut même parfois être très intéressante voire essentielle dans certains contextes, comme par exemple, celui du chaos pour accéder à une compréhension fine des phénomènes.

[8] Le terme « linéaire » qualifie ici un procédé d'analyse quant à l'étude de la stabilité d'une solution : la perturbation est suffisamment faible pour que les équations non linéaires associées au système puissent être linéarisées autour de la solution étudiée.

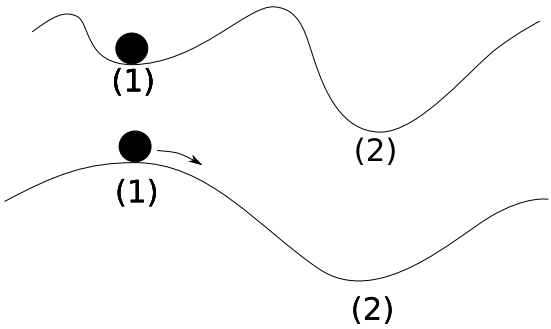


Figure 1.2 – En haut, une balle au point (1) n'a aucune chance de se trouver au point (2) suite à des fluctuations naturelles. On dit que la position de la balle est linéairement stable. Pour passer de la position (1) à (2) une perturbation extérieure assez forte est nécessaire. Dans ca cas la position (1) est nonlinéairement instable. En bas la balle se trouve en position instable. Dans ce cas une faible fluctuation suffit à la faire transiter de (1) vers (2). On dit que la position (1) est linéairement instable.

est également dit non-linéairement instable (ce qui signifie que la perturbation minimale pour la perte de stabilité doit avoir un seuil en amplitude ; il faut donner un grand coup de pied pour déloger une balle, qui se trouve au fond d'une vallée, vers une vallée voisine).

L'étude des phénomènes non linéaires s'incarne différemment selon le cadre adopté ; ainsi, outre l'étude des catastrophes, définies comme les figures géométriques que tracent les frontières des solutions qualitativement différentes représentées dans l'espace des paramètres de contrôle (voir la figure 1.1), l'analyse des bifurcations, définies par l'évolution d'une variable associée à la dynamique du système (par exemple la position d'équilibre d'une masse dans un problème de mécanique) en fonction d'un des paramètres de contrôle du système (voir la figure 1.3, dite diagramme de bifurcation). Les deux représentations, catastrophe et bifurcation, ne sont bien sûr pas sans lien, puisque toutes deux décrivent une même réalité ; elles ont notamment en commun la recherche de comportements universels indépendamment de la spécificité du modèle étudié (système chimique, biologique, économique...). Ainsi, à l'image du nombre limité de catastrophes que peut adopter un système à un nombre donné de paramètres de contrôle, la théorie des bifurcations recherche le nombre de diagrammes qualitativement différents associés au système ; ce nombre est nécessairement limité et précisément défini car il est dépendant des symétries du système et du nombre de paramètres. Si les deux descriptions – théorie des catastrophes et théorie des bifurcations – contiennent les mêmes éléments d'information bien qu'exprimés différemment, la théorie des catastrophes est particulièrement adaptée à l'étude de la *stabilité structurelle* des modèles adoptés pour décrire un système. En effet, la théorie des catastrophes ne retient que les formes de catastrophes qui

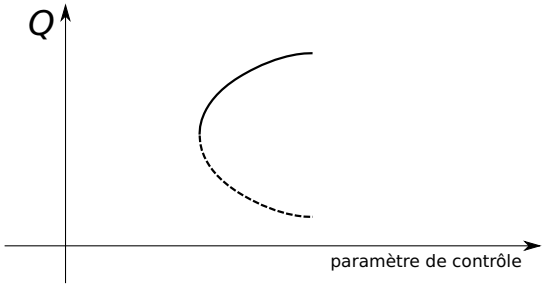


Figure 1.3 – Un diagramme de bifurcation, représentant une quantité Q typique du système non linéaire étudié en fonction d'un paramètre de contrôle. La ligne brisée représente une branche instable, tandis que la ligne continue se réfère à une branche stable.

résistent à un changement faible du modèle. Par exemple, supposons que nous adoptions un modèle mathématique à partir d'hypothèses effectuées *a priori*. Lorsqu'en étudiant la *robustesse* du modèle en lui infligeant un effet mineur, le diagramme de bifurcation change de manière qualitative, nous sommes alors confrontés à un modèle dit *structurellement instable* : ce modèle ne peut donc être retenu comme un modèle adapté à la description du système.

Il convient de préciser que la théorie des catastrophes suppose que la dynamique des systèmes dérive d'un potentiel. Plus précisément, en appellant $x(t)$ une variable dynamique (par exemple, la position en mécanique en fonction du temps t), la dynamique est dite potentielle si nous pouvons écrire l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dV(x)}{dx} \tag{1.2}$$

où $V(x)$ est le potentiel. Nous verrons au cours de cet ouvrage que, dans bien des cas, la dynamique d'un système hors équilibre peut se ramener à une telle description. Dans le cas contraire, la portée de la théorie des bifurcations est plus grande, car elle peut permettre de décrire la forme des équations sur la base des symétries dont jouissent les systèmes sans faire référence à un potentiel.

Nous avons évoqué précédemment l'aspect important et étonnant de l'universalité d'une approche, caractérisée par sa capacité à pouvoir classer et énumérer les différents types de modes (bifurcations et catastrophes), sans faire référence à un modèle spécifique. Il convient d'insister à ce point qu'en se référant à la notion d'universalité, il n'entre pas dans nos intentions de minimiser l'importance de l'étude de phénomènes spécifiques. Au contraire, cette tâche est impérative pour obtenir une information quantitative, par exemple pour déterminer le moment auquel une bifurcation va se produire dans une expérience donnée, soit pour l'éviter, soit en tirer profit, soit encore pour simplement l'étudier et la répertorier en tant que telle. En outre, lors de l'étude d'un système particulier, une contradiction entre la théorie et l'expérience peut

être indicatrice d'une déficience dans le modèle utilisé, et donc une telle démarche joue un rôle essentiel dans l'établissement des équations d'évolution, dans l'identification de la pertinence de telle ou telle autre hypothèse pour le phénomène observé, etc. L'universalité, quant à elle – en plus d'une certaine satisfaction intellectuelle – permet d'éviter des résultats erronés, car toute bifurcation doit appartenir à une grande classe bien définie. En somme, pour assurer un progrès scientifique solide, les deux approches, à savoir l'étude précise d'un système et la classification des catastrophes et des bifurcations possibles, sont nécessaires. Lorsqu'une mise en équations d'un système spćifique s'avère impossible à formuler, la classification universelle permet de dégager les grandes lignes de comportement sans, pour autant, être capable de dire quand telle ou telle catastrophe risque de se produire.

Nous commencerons par étudier des exemples simples avant d'aborder des aspects un peu plus formels (les notions mathématiques resteront néanmoins élémentaires). Les questions sont abordées avec une difficulté croissante ; des exemples et des problèmes résolus sont proposés régulièrement pour compléter, illustrer et alimenter les propos généraux. Les exemples servent, en outre, à introduire de manière progressive les notions et langage des sciences non linéaires. Ces notions vont, peu à peu, revêtir un statut plus général.

Nous discutons d'abord des solutions stationnaires, avant d'aborder celles qui oscillent dans le temps. Ces solutions peuvent perdre leur stabilité en faveur de solutions plus complexes, telles les solutions apériodiques d'apparence erratique (ou chaotique) ; nous ne développerons pas en profondeur cette classe de solutions chaotiques car de nombreux ouvrages sur le chaos traitent de ce sujet (voir en particulier [9, 59, 55, 70]). Nous avons ainsi préféré parcourir assez rapidement ce thème, en présentant seulement les notions essentielles.

L'évolution purement temporelle n'est cependant pas la seule partie importante dans l'étude des phénomènes non linéaires. Les systèmes rencontrés dans la nature ont souvent une dimension spatiale, ce qui leur confère une autre richesse. Il s'agit du problème fascinant de la naissance des formes dans la nature, ou encore de la *morphogenèse*. La nature nous offre d'innombrables exemples d'organisation spatiale, dans divers domaines allant de la matière inerte à la matière vivante, en passant par les sciences sociales et économiques. L'ordre spatial est facilement perceptible à l'œil nu. Les exemples abondent autour de nous (voir référence [5] pour une série très variée d'exemples et d'images) ; qui d'entre nous n'a pas admiré la forme attrayante et plus ou moins régulière des nuages dits cumulonimbus (voir figure 9.1 au chapitre 9), ou encore celle des rides sur le sable dans le désert ou au bord de la mer lors de la marée descendante, structures qui s'ordonnent sur de longues distances (voir figure 1.4). En y réfléchissant un peu, cet ordre paraît assez troublant lorsque nous identifions que l'élément à l'origine des rides dans le désert, le vent, est dans un état désordonné (vent turbulent). Un système naturellement ordonné ne doit pas, pour autant, faire oublier qu'il peut basculer dans un état désordonné, dans un

Figure 1.4 – Rides éoliennes. Sand dunes©Greg Pickens #631279–Fotolia

chaos spatio-temporel[9]. L'hydrodynamique (dite aussi mécanique des fluides) est un autre champ qui révèle une abondance d'états ordonnés (voir le livre très accessible au grand public par Guyon *et al.* [30]). Ainsi, la surface libre d'un liquide chauffé à sa base, développe une structure ordonnée connue sous le nom de cellules de Bénard-Marangoni (voir figure 1.5). De même, en géophysique, les colonnes de basalte s'organisent spontanément lors de la cristallisation de la lave (voir chapitre 13).

L'exemple d'organisation spatiale le plus célèbre est probablement celui de la réaction-diffusion chimique initialement étudiée sur le plan théorique en 1952 par le mathématicien anglais Alan Turing (1912-1954) (voir référence [77]). Il a montré qu'au sein d'un système où siègent deux substances chimiques, l'une activatrice (qui assure son auto-croissance), notée S_A, et l'autre inhibitrice, notée S_B (qui modère la croissance de son antagoniste A), une solution homogène, pour laquelle les deux espèces sont parfaitement mélangées, peut devenir instable au profit de la naissance de l'ordre spatial. Une telle instabilité se produit lorsque la substance S_B diffuse suffisamment rapidement par rapport à la substance S_A. L'ordre spatial peut naître sous forme de bandes, hexagones (nids

[9]Le chaos spatio-temporel est associé à un désordre dans l'espace et une perte de la mémoire dans le temps.

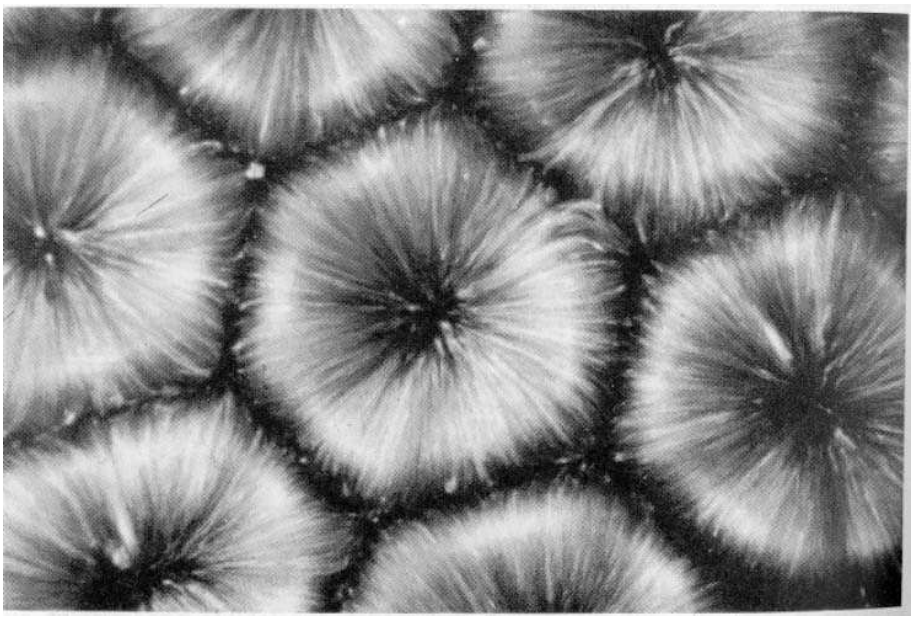


Figure 1.5 – Une structure organisée de type Bénard-Marangoni sur une surface libre obtenue en chauffant le liquide par le bas. Cette structure est induite par la tension de surface, laquelle est sensible à la température. Cette expérience peut être reproduite chez soi. Il suffit de chauffer de l'huilde de cuisine dans une poêle. On parsème ensuite l'huile d'une poignée de poudre d'aluminium. La poudre sert juste à visualiser les cellules de convection. Le liquide monte au centre des cellules (comme une fontaine) et descend au niveau des bords des cellules, mais ce mouvement de fluide garde intacte la structure hexagonale des cellules de convection. Sechseckige Strömungszellen in erhitztem Öl / ©M.G. Velarde

Figure 1.6 – Une structure organisée de type Marangoni-Bénard à la surface de la terre. Il s'agit de colonnes de basalte. Zeitlos schöne pflasterung ©Michael Stüning #876669–Fotolia

d'abeilles), etc. Le milieu présente une alternance entre les régions fortement concentrées en S_A et les régions riches en S_B (voir chapitre 9 pour des figures expérimentales). Alan Turing a en outre suggéré qu'un tel ordre, et toute structure spatiale organisée en général, pouvait apporter une certaine compréhension à la morphogenèse des êtres vivants. La résolution sur ordinateur d'équations simples de type réaction-diffusion d'un système à deux substances peut engendrer des motifs qui ressemblent étrangement à ceux rencontrés dans la nature (comme les coquillages [11]).

Au regard des concepts modernes de la biologie du développement, la quantité d'informations contenues au sein d'un être vivant est trop importante pour qu'elle soit entièrement codée dans le génome. Des processus purement phénotypiques, sans lien apparent avec la génétique, pourraient contribuer de manière importante à la naissance des formes dans la nature. Même si l'implication réelle d'un mécanisme de type Turing reste à démontrer, plusieurs progrès récents semblent confirmer, dans certains cas, l'idée de Turing quand à son impact sur le vivant. Nous discuterons ces aspects au chapitre 9.

Une propriété commune aux systèmes non linéaires évoqués ci-dessus (et à bien d'autres !) tient en leur faculté à donner spontanément naissance à une structure ordonnée dans l'espace dès lors qu'un paramètre de contrôle dépasse

une valeur critique.

La naissance de l'ordre à partir d'un état initialement homogène constitue souvent un préalable commun. Cette bifurcation résulte génériquement soit de la perte de stabilité de la solution homogène ou de la cessation d'existence de la solution précédente. La plupart des systèmes dont il est question ici sont dans un état dit hors équilibre ; un apport constant d'énergie (ou son analogue) est fourni aux systèmes (l'énergie du vent sur le sable, l'apport de réactifs pour les réactions chimiques, les nutriments en biologie etc.). Le passage de l'état homogène vers l'état ordonné est appelé *bifurcation primaire* ; car, en fait, de nouvelles bifurcations peuvent survenir pour modifier l'état ordonné lorsque le système continue à recevoir de l'énergie. L'étape ultime de l'évolution est le chaos spatio-temporel. On effectuera un survol rapide de cette question au chapitre 12.

Les bifurcations s'accompagnent souvent de la perte de symétries ; nous sommes alors confrontés aux *brisures de symétries*.

Ainsi, avant que les rides ne sculptent le sable, le lit de sable est plat, et les topographies en deux points quelconques du lit ne pouvent être distinguées. Lorsque les rides se forment, les topographies entre la crête de la ride et le fond de celle-ci se distinguent nettement. Il faut parcourir maintenant une distance égale à la répétition du motif (la longueur d'onde associées aux rides) pour retrouver le même paysage (la crête par exemple). Nous sommes en présence d'une brisure de la symétrie continue de translation ; la symétrie, après la formation de rides, est devenue discrète, c'est-à-dire qu'il faut se déplacer d'un nombre entier de longueurs d'onde pour retrouver la même topographie.

Au voisinage d'un point de bifurcation de l'ordre spatial, tous les systèmes sont décrits par une équation universelle dite *équation d'amplitude*. Lorsque les systèmes sont très loin de l'équilibre thermodynamique (en injectant par exemple davantage d'énergie), l'état ordonné peut à son tour devenir instable ; il subit alors une nouvelle bifurcation dite secondaire. Chaque nouvelle bifurcation fait, en général, perdre des symétries. L'aboutissement ultime de chaque système est le désordre spatial et temporel, soit le chaos spatio-temporel (ou turbulence) : le système perd alors toute corrélation spatiale et temporelle.

Un physicien peut être tenté de dresser un parallèle entre les bifurcations primaires (naissance de l'ordre) et la théorie de transition de phases (exemple : transition liquide-solide en dessous d'une certaine température). Cette analogie est légitime lorsque le système est étudié au voisinage du seuil de l'instabilité, et que celle-ci est stationnaire (pas d'oscillation dans le temps). Cette analogie atteint vite ses limites, et les processus hors équilibre s'avancent au premier plan, conférant ainsi aux systèmes étudiés une nouvelle profondeur. La dynamique devient alors complexe, sans commune mesure avec une transition de phase. Le caractère hors équilibre prend toute son amplitude conduisant les systèmes vers une grande variété de comportements dynamiques, interdite par la thermodynamique des systèmes globalement à l'équilibre (voir chapitre 12).

Les systèmes globalement à l'équilibre[10] sont régis par des principes généraux bien établis : caractérisés, par exemple, par un minimum d'énergie, ou par un maximum d'entropie, selon la configuration précise considérée (par exemple en thermodynamique, des processus à température ou pression constante sont évoqués, etc.). Ces principes conduisent à des modèles dit variationnels[11]. Les systèmes hors équilibre sont non variationnels, en vertu du fait que leur état, ou leur dynamique, ne s'obtient pas à partir de la recherche d'un extremum, comme le minimum de l'énergie. À l'heure actuelle, nous ne disposons pas encore de critère, comme pour les systèmes thermodynamiques (ou globalement à l'équilibre), qui puisse nous dicter comment, et par quel principe, deux (ou une infinité de) solutions possibles peuvent être discriminées. Pourquoi la nature « préfère »-t-elle une forme par rapport à une autre ? Existe-t-il un critère de sélection ? Le caractère non variationnel offre un large panel de comportements dynamiques, et nous sommes souvent inaptes à prédire la solution qui va être en fin de compte adoptée. Une autre caractéristique des systèmes étudiés dans cet ouvrage tient à l'aspect dissipatif : par exemple, les réactifs chimiques se combinent et se consument, l'énergie est consommée par les systèmes, ou par les organismes. Il s'agit de processus hors équilibre dissipatifs. Ces processus sont également irréversibles. Par exemple, en parcourant à vélo un certain chemin, le contact de la roue avec le sol induit des frottements qui dissipent de l'énergie. En effectuant le chemin inverse, l'énergie dissipée précédemment n'est pas récupérée : le phénomène est irréversible. Les processus hors équilibre, dissipatifs et irréversibles dominent la réalité des processus naturels.

Les trois premiers chapitres suivants sont essentiels à la compréhension de l'ensemble de l'ouvrage. Ils introduisent la terminologie et les concepts de base. Ces trois chapitres sont accessibles aux étudiants de 1^{er} cycle, et probablement aussi à certains lycéens des classes scientifiques. Le niveau des mathématiques invoquées est en effet très élémentaire (fonction d'une variable, dérivation, tracé d'une fonction, et équations différentielles du premier et second ordre). La difficulté des problèmes abordés augmente progressivement au cours de la lecture de l'ouvrage. Nous estimons que la plupart de ces autres chapitres sont à la portée des étudiants de Master (sans être exhaustif) de physique, chimie, mathématiques, biomathématiques, biophysique, mécaniques, géophysique, et sciences économiques et sociales. Cet ouvrage s'adresse également aux chercheurs confirmés qui souhaitent s'initier à ce fabuleux champ d'expérience et de découverte que constituent les sciences non linéaires.

[10] En physique, il peut s'agir d'équilibre thermodynamique, mais la notion hors équilibre est plus générale, comme nous l'avons précisé auparavant.

[11] Cette dénomination fait référence au fait que l'état sélectionné correspond au minimum (ou maximum) d'une certaine quantité, comme l'énergie. L'extremum est obtenu en annulant la dérivée (ou la variation) de la fonction « énergie » (ou d'une fonctionnelle, fonction d'une fonction).

Chapitre 2

Introduction élémentaire aux bifurcations à une dimension

La théorie des bifurcations recouvre l'étude des changements qualitatifs de solutions d'un système non linéaire en fonction de ses paramètres de contrôle. Un changement de solution est dit qualitatif lorsque pour une valeur critique d'un paramètre de contrôle, le système passe brutalement d'un type de solution à un autre type de solution, par exemple d'une solution statique à une solution oscillante.

Ce chapitre et le suivant abordent la théorie des bifurcations au travers d'exemples élémentaires de la mécanique du point pour introduire le cadre conceptuel et le vocabulaire propres aux sciences non linéaires tout en bénéficiant de visualisations simples et intuitives des mécanismes à l'œuvre, ce qui permet d'aborder par la suite des situations plus complexes.

2.1 Un exemple mécanique simple

2.1.1 Énergie potentielle et position d'équilibre

Notre première étude porte sur un système simple de mécanique constitué d'une masse suspendue à un ressort de raideur k et de longueur au repos ℓ_0 ; le ressort est fixé en un point A et la masse en forme d'anneau coulisse le long d'une tige horizontale (voir figure 2.1).

On écarte la masse le long de cet axe horizontal d'une distance x du point origine O ($x = 0$) situé à l'aplomb du point A, puis on la relâche. En admettant que le mouvement ne soit pas dépourvu de frottements, le système évolue naturellement vers une position d'équilibre ; quelle est-elle ? Instinctivement, on serait tenté de dire que la masse M regagne sa position initiale au point O. Mais cette solution en O n'est qu'une solution particulière et en toute généralité, plusieurs solutions d'équilibre du système coexistent. La solution adoptée

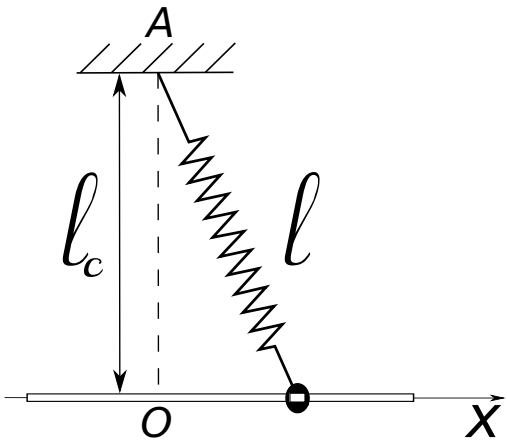


Figure 2.1 – Vue schématique du système. La longueur au repos du ressort est ℓ_0 (non représentée sur la figure). ℓ_0 peut être aussi bien plus petite que ℓ_c (ressort étiré quand il est à la verticale) que plus grande que ℓ_c (ressort comprimé quand il est à la verticale).

par le système dépend en fait du paramètre de contrôle ℓ_c et plus particulièrement de la valeur de ℓ_c comparée à celle de la longueur au repos ℓ_0 du ressort. Ainsi, ce problème de mécanique, apparemment aussi simple qu'un oscillateur harmonique standard, révèle une richesse sous-jacente de solutions dans laquelle nous allons découvrir une des bifurcations les plus courantes : la bifurcation fourche, représentation de l'une des premières catastrophes dans la théorie du même nom élaborée dans les années 1970 par le célèbre mathématicien René Thom. Cette non-unicité des solutions des systèmes non linéaires est une des caractéristiques discriminantes des systèmes linéaires pour lesquels un principe d'unicité des solutions s'applique toujours.

Afin d'étudier quantitativement les solutions du système, nous allons évaluer son énergie potentielle notée $E_p(x)$ dont la valeur dépend de la raideur du ressort et également de son allongement $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ où ℓ est la longueur instantanée du ressort, soit $E_p = k\Delta\ell^2/2$ (voir figure 2.1). À partir du théorème de Pythagore, la position x de la masse le long de la tige –le degré de liberté qui nous intéresse– est reliée aux longueurs ℓ_c et ℓ par $\ell = \sqrt{x^2 + \ell_c^2}$. L'énergie potentielle s'écrit alors comme :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k[\sqrt{x^2 + \ell_c^2} - \ell_0]^2 \ . \tag{2.1}$$

Pour x petit, nous pouvons procéder à un développement de Taylor au second ordre afin d'obtenir une expression approchée de l'énergie potentielle :

$$E_p(x) = C + k\frac{\ell_c - \ell_0}{2\ell_c}x^2 \tag{2.2}$$

où $C \equiv k(\ell_c - \ell_0)^2/2$ est une constante de peu d'intérêt ; elle sera donc ignorée par la suite.

L'expression ci-dessus de l'énergie potentielle E_p est similaire dans la forme à l'expression de l'énergie potentielle d'un ressort classique. Pourtant, la réalité physique sous-jacente du système étudié ici (voir figure 2.1) est fondamentalement différente : la position $x = 0$ n'est ainsi pas toujours la solution stable. En effet, en fixant à notre guise la distance ℓ_c telle que $(\ell_c > \ell_0)$, le préfacteur $(\ell_c - \ell_0)$ de x^2 est positif et $E_p(x)$ a un minimum en $x = 0$ définissant une position stable[1]. Dans le cas contraire $(\ell_c < \ell_0)$, E_p possède un maximum en $x = 0$, correspondant à une position instable[2]. L'égalité $\ell_c = \ell_0$ correspond donc à la condition critique de perte de stabilité de la solution $x = 0$ (voir figure 2.2).

Lorsque la solution du système $x = 0$ est instable ($E_p(x = 0)$ a une valeur maximale), la masse s'éloigne de cette position. Or, lorsque l'écart x de la masse devient trop important, l'approximation à l'ordre 2 de l'énergie potentielle (équation 2.2) cesse d'être valide. Il est alors nécessaire de développer à l'ordre suivant l'énergie potentielle $E_p(x)$ (équation 2.1) :

$$E_p = \frac{k}{2}\left[\frac{\ell_c - \ell_0}{\ell_c}x^2 + \ell_0\ell_c\frac{x^4}{4\ell_c^4}\right] . \tag{2.3}$$

En se plaçant près du seuil de l'instabilité $\ell_c \simeq \ell_0$, nous obtenons :

$$E_p = \frac{k}{2}\left[\frac{\ell_c - \ell_0}{\ell_c}x^2 + \frac{x^4}{4\ell_0^2}\right] \tag{2.4}$$

où nous avons remplacé ℓ_c par ℓ_0 dans le coefficient de x^4. La nouvelle contribution de l'énergie potentielle en x^4 est toujours positive.

On vérifie facilement que si la longueur imposée entre les deux extrémités du ressort à la verticale ℓ_c est inférieure à la longueur au repos du ressort ($\ell_c < \ell_0$, $x = 0$ instable), l'énergie potentielle $E_p(x)$ a un maximum local en $x = 0$, et possède deux minimas de part et d'autre de $x = 0$ (voir figure 2.2). Il s'ensuit donc que la masse, en quittant la position initiale instable $x = 0$, se logera à la position x qui correspond à l'un des deux minimas de $E_p(x)$. En principe, la masse a autant de chance d'aller vers l'un ou l'autre des deux minimas (x positif ou x négatif) ; cependant, dans les systèmes réels, il existe toujours une petite imperfection qui favorise l'une des deux directions.

En fait, la forme générale de l'énergie potentielle (équation 2.1) est simple et peut être analysée sans avoir recours au développement limité. On peut facilement vérifier que cette forme générale a le même comportement que celui obtenu par développement limité (équation 2.4) à l'ordre 4. Le développement

[1] Par analogie, une balle dans le fond d'une vallée reste "coincée" dans cette position grâce à la gravité (puits de potentiel gravitationnel), même en la soumettant à une petite perturbation ; elle occupe ainsi au fond de la vallée une position stable.

[2] Par analogie, une balle au sommet d'une bosse est en position instable, puisqu'elle abandonne cette position à la moindre perturbation, même faible.

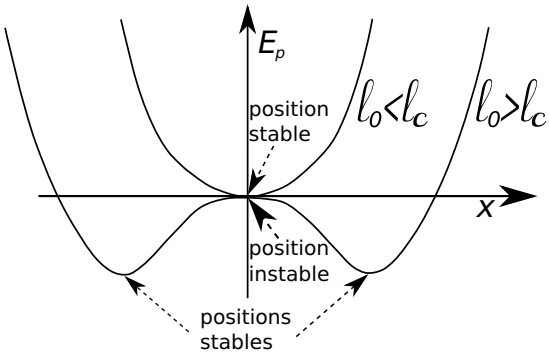


Figure 2.2 – Comportement qualitatif de l'énergie potentielle.

limité n'a donc rien enlevé à la structure générale du problème. Retenons dès à présent que c'est le comportement qualitatif au voisinage du point critique (ici $\ell_c \simeq \ell_0$ et $x \simeq 0$) qui nous importe dans la théorie générale des bifurcations et des catastrophes. On se réfèrera donc par la suite à l'énergie développée (équation 2.4).

2.1.2 Une explication intuitive de l'existence d'une bifurcation

Sans avoir recours au calcul, il est intéressant de comprendre intuitivement l'origine de la perte de stabilité de la position verticale. Lorsque la longueur imposée entre les deux extrémités du ressort à la verticale ℓ_c est supérieure à la longueur au repos du ressort ($\ell_c > \ell_0$, voir figure 2.1), le ressort est étiré par rapport à sa longueur au repos. Tout écart x par rapport à la position d'équilibre initiale $x = 0$ est pénalisé, puisqu'il entraîne davantage d'étirement et donc un coût plus élevé en énergie potentielle. Dans ce cas de figure, la position d'équilibre $x = 0$ est donc bien un équilibre stable.

En revanche, lorsque la longueur imposée entre les deux extrémités du ressort à la verticale ℓ_c est inférieure à la longueur au repos du ressort ($\ell_c < \ell_0$), le ressort est comprimé quand la masse est en $x = 0$. Tout écart par rapport à la verticale contribue au relâchement du ressort, et donc à une réduction de l'énergie potentielle. La nouvelle position d'équilibre stable est atteinte lorsque la compression initiale du ressort est optimalement relâchée, c'est-à-dire lorsque la masse se situe sur l'une des deux positions qui minimise l'énergie potentielle $E_p(x)$ (voir figure 2.2).

2.1.3 Analyse de la bifurcation

Ainsi, le système étudié dans ce chapitre (voir figure 2.1) devient instable en $x = 0$ lorsque la longueur imposée entre les deux extrémités du ressort à la verticale ℓ_c est inférieure à la longueur au repos du ressort $\ell_c < \ell_0$. Déterminons la nouvelle position d'équilibre au voisinage du seuil d'instabilité[3] i.e. $\ell_c \simeq \ell_0$. Une fois le seuil $\ell_c = \ell_0$ atteint, la masse s'écarte de la position verticale $x = 0$ et les effets non linéaires d'ordre supérieur en x^4 interviennent et assurent une saturation.

La détermination des solutions d'équilibre s'obtient à partir de la condition $dE_p/dx = 0$ définissant les extremas de l'énergie potentielle et le caractère de leur stabilité en fonction de la forme de l'énergie potentielle ; lorsque (i) $\ell_c > \ell_0$, la solution $x = 0$ est stable, et lorsque (ii) $\ell_c < \ell_0$, $x = 0$ est instable (voir figure 2.2). Le développement limité en x^4 de l'énergie potentielle (équation 2.4) conduit aux solutions d'équilibre suivantes (l'indice zéro ci-dessous se réfère à une solution d'équilibre) :

$$x_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_0 = \pm\ell_0\sqrt{2\frac{(\ell_0 - \ell_c)}{\ell_c}}\ . \tag{2.5}$$

La première solution $x_0 = 0$ existe toujours, tandis que l'existence de la seconde est soumise à la satisfaction de la condition $\ell_c < \ell_0$. Lorsque la solution $x_0 = 0$ perd sa stabilité ($\ell_c < \ell_0$), une nouvelle solution double $x_0 = \pm\ell_0\sqrt{2(\ell_0 - \ell_c)/\ell_c}$ prend le relais. On dit qu'il y a bifurcation de la solution stationnaire $x_0 = 0$ vers une paire de solutions stationnaires $x_0 = \pm\ell_0\sqrt{2(\ell_0 - \ell_c)/\ell_c}$. En traçant l'évolution de la valeur de x_0 en fonction de la longueur du ressort à la verticale ℓ_c, jouant ici le rôle d'un paramètre de contrôle, nous obtenons un diagramme dit de bifurcation (voir figure 2.4) qui n'est autre que le portrait des solutions stationnaires (équation (2.5)). La courbe brisée sur la figure 2.4 représente une branche instable tandis que la courbe en trait continu correspond à une branche stable. Cette convention est usuelle dans la théorie des bifurcations. Il est utile de mentionner que la bifurcation en question, nommée bifurcation fourche en raison de sa forme dans ce diagramme, est quelquefois qualifiée de *bifurcation sur-critique* (voir paragraphe 3.2) ; elle appartient par ailleurs à la famille des catastrophes « *cusp* » qui seront développées dans le chapitre 4 de cet ouvrage.

2.1.4 Universalité au voisinage d'un point de bifurcation

Dans l'étude des systèmes non linéaires, la recherche des points de bifurcations et des développements limités dans leur voisinage constitue souvent la

[3]Même si le système étudié dans ce chapitre se prête entièrement à un calcul analytique, la plupart des systèmes non linéaires y échappent. Il est alors nécessaire d'adopter des développements limités pour analyser le système. Par ailleurs, se placer au voisinage du seuil d'instabilité, outre le fait qu'il justifie les développements de Taylor des fonctions liées au système, confère au problème un caractère universel, indépendant de la nature du système et donc des mécanismes spécifiques qui le régissent.

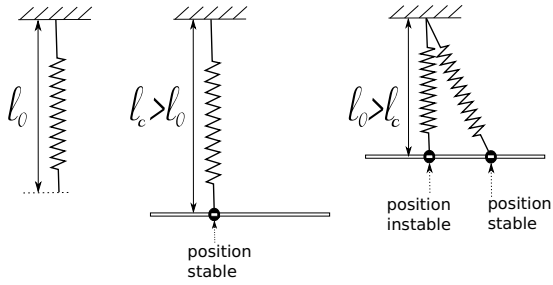


Figure 2.3 – Une vue schématique des positions d'équilibre.

première étape importante.

Même dans le système étudié dans ce chapitre, pour lequel l'énergie potentielle $E_p(x)$ (équation 2.1) est, dans ce cas de figure, tellement simple que le problème peut se résoudre directement sans avoir recours au développement limité, il est apparu que le comportement qualitatif obtenu à l'aide d'un développement limité de l'énergie potentielle $E_p(x)$ (équation 2.4) à l'ordre x^4 (voir figure 2.2) est similaire à celui obtenu à partir de l'analyse de la fonction complète (équation 2.1).

Cette similarité des comportements qualitatifs de l'énergie potentielle exacte et dans sa forme approchée traduit le fait que le changement qualitatif des solutions ne se produit que près de la solution $x = 0$, lorsque la longueur du ressort à la verticale est du même ordre que la longueur au repos du ressort ($\ell_c \simeq \ell_0$). Ainsi, l'étude du comportement de l'énergie potentielle autour du point $x = 0$ revêt un intérêt particulier ; et même plus généralement, la démarche qui consiste à analyser les équations au voisinage de points remarquables permet d'extraire des comportements qualitatifs génériques et d'atteindre ainsi une forme d'universalité autour de ces points de bifurcation.

La démarche qui consiste à analyser les équations au voisinage de points remarquables permet d'extraire des comportements qualitatifs génériques. Cette tâche est entreprise en introduisant un petit paramètre qui mesurera la distance par rapport au seuil de la bifurcation.

Reprenons notre exemple mécanique de ce chapitre pour illustrer l'importance de ces points de bifurcation et de leur voisinage en introduisant un petit paramètre ϵ relié à la distance au seuil de bifurcation de la manière suivante :

$$\epsilon = -\frac{\ell_c - \ell_0}{\ell_c} \,. \tag{2.6}$$

L'expression de l'énergie potentielle à l'ordre 4 (2.4) peut être réécrite comme suit :

$$E_p = \frac{k}{2}\left[-\epsilon x^2 + \frac{x^4}{4\ell_0^2}\right] \,. \tag{2.7}$$

Étant donné que x^2 est multiplié par ϵ, le terme en x^4, qui est *a priori* plus faible si x est petit, devient du même ordre de grandeur que le terme quadratique. En effet, d'après l'expression des solutions stationnaires lorsque la longueur du ressort à la verticale est inférieure à la longueur au repos du ressort (équation 2.5), on obtient que $x_0 \sim \sqrt{\epsilon}$; ainsi, les deux termes retenus dans l'expression de l'énergie potentielle ci-dessus (équation 2.7) sont tous deux du même ordre ϵ^2.

L'expression de l'énergie potentielle en fonction du paramètre mesurant la distance au seuil de bifurcation (équation 2.7) constitue une forme générique de tout système au sein duquel une solution d'équilibre perd sa stabilité au profit d'une autre solution d'équilibre. Notons que d'autres formes génériques de bifurcations vont être introduites au fur et à mesure. On parlera plus généralement de *solution stationnaire* au lieu d'équilibre, pour mettre l'accent sur le fait que les systèmes de ce type ne sont pas tous décrits par une énergie mécanique. Ainsi, la variable x, qui désigne ici une position en mécanique, peut représenter d'autres quantités physiques dans d'autres systèmes. Dans les systèmes de réaction-diffusion chimiques, x se réfère à l'amplitude d'une concentration d'une espèce, ou dans d'autres systèmes, x est associé à la vitesse d'un fluide en convection, etc. Le système change, les mécanismes physiques également, mais la forme de l'équation d'évolution au voisinage du point de bifurcation, également nommée équation d'amplitude (voir paragraphe 2.3.4), reste identique : c'est cette généricité des équations d'amplitude qui définit l'universalité au voisinage des points de bifurcation.

2.2 Analogie entre une bifurcation fourche et une transition de phase du deuxième ordre

L'expression de l'énergie potentielle (équation 2.7) en fonction du paramètre ϵ (distance au seuil de bifurcation) est en fait similaire à une énergie libre de type Landau associée à une transition de phase du second ordre. La transition ferromagnétique est un exemple classique d'une transition de second ordre. De nombreux corps solides sont potentiellement magnétiques : ils possèdent en général une aimantation nulle à haute température, mais celle-ci acquiert une valeur finie en dessous d'une certaine température. Ces corps ont la propriété d'avoir en leur sein de petits « aimants » (ou moments magnétiques) portés par les atomes. À haute température, l'agitation thermique induit un désordre des moments magnétiques, ce qui résulte en une aimantation globale nulle. À basse température, l'interaction entre ces petits aimants devient forte vis-à-vis de l'agitation thermique. Les aimants s'alignent alors dans une même direction, alignement qui confère au système une aimantation macroscopique. Il s'agit d'une transition de phase appelée « ferromagnétique ». L'aimantation M, le "paramètre d'ordre" de la transition, est nulle à haute température ($M = 0$) et non nulle à basse température ($M \neq 0$). Le terme « paramètre d'ordre » se

réfère à l'alignement ordonné des moments magnétiques. La transition[4] entre la phase haute température (phase désordonnée) et la phase basse température (phase ordonnée) s'effectue à une température critique $T = T_c$. Pour $T < T_c$ (et T assez proche de T_c), l'aimantation $M \sim \pm\sqrt{T_c - T}$. Ainsi, la variable x dans le problème mécanique joue le rôle du paramètre d'ordre M. Le paramètre ϵ est l'analogue de $T - T_c$. L'énergie de Landau associée à la transition est donnée par $E \sim \epsilon M^2 + M^4$.

2.3 Considérations dynamiques

Jusqu'a présent nous n'avons considéré que les états stationnaires des systèmes dynamiques. Cependant, les systèmes évoluent dans le temps et, même si un état stationnaire final est atteint, l'évolution vers cet état a requis un certain temps qui dépend des différents mécanismes mis en jeu (par exemple la friction en mécanique, la viscosité en hydrodynamique, etc.). En outre, au-delà du comportement stationnaire, les systèmes dynamiques présentent parfois des oscillations permanentes plus ou moins complexes, débouchant même éventuellement sur des comportements chaotiques.

La simplicité du système étudié dans ce chapitre nous permet d'introduire aisément les notions associées à l'aspect temporel des systèmes dynamiques et donc à leur évolution dynamique.

L'équation dynamique du système de ressort étudiée dans ce chapitre est obtenue à partir de la loi de Newton :

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + \frac{\partial E_p(x)}{\partial x} = 0 \,, \tag{2.8}$$

où m et μ représentent respectivement la masse suspendue au ressort et le coefficient de frottement associé au mouvement de coulissage de la masse le long de la tige horizontale. Le dernier terme $\frac{\partial E_p(x)}{\partial x}$ de l'équation ci-dessus (équation 2.8) n'est autre que la force F qui dérive du potentiel anharmonique[5] $E_p(x)$, $F = -\partial E_p(x)/\partial x$. Les états stationnaires que nous avons étudiés sont plus généralement appelés des points fixes de la dynamique. Ces points fixes sont obtenus à partir des équations dynamiques (équation 2.8) en posant $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$, ce qui implique que $\partial E_p/\partial x = 0$.

À partir de l'expression de l'énergie potentielle à l'ordre 4 en fonction du paramètre ϵ (équation 2.7), on obtient les points fixes suivants :

$$x_0 = 0 \quad x_0 = \pm\ell_0\sqrt{2\epsilon} \tag{2.9}$$

[4] Ce résultat est issu de la théorie de Landau. La théorie de Landau résulte d'une approximation dite de champ moyen, où chaque « aimant » est supposé ne voir que la moyenne des autres aimants. Cette approximation néglige ainsi les corrélations entre les fluctuations de ces aimants, ce qui est justifié dans un certain nombre de systèmes, mais devient invalide dans les systèmes où les corrélations sont prépondérantes.

[5] La forme quadratique (polynôme homogène de degré 2) de l'énergie est souvent appelée un potentiel harmonique. Dans notre cas, $E_p(x)$ n'est pas quadratique en x, ainsi ce potentiel est dit anharmonique.

qui ne sont rien d'autre que ceux déjà déterminés dans ce chapitre (équation 2.5).

2.3.1 Analyse de stabilité linéaire

Une fois déterminés les points fixes de la dynamique, autrement dit les états stationnaires du système, l'étape suivante consiste à étudier leur stabilité. Est-ce que le système soumis à de petites perturbations $x_1(t)$ revient à son état initial stationnaire x_0, ou bien s'en éloigne-t-il ? Pour répondre à cette question, superposons à l'état stationnaire x_0 une perturbation $x_1(t)$:

$$x(t) = x_0 + x_1(t), \tag{2.10}$$

et déterminons l'évolution de la perturbation $x_1(t)$ au cours du temps. Si $x_1(t)$ décroît au cours du temps t, l'état stationnaire x_0 est dit stable, et si, au contraire, $x_1(t)$ croît au cours du temps t, l'état stationnaire x_0 est dit instable.

Nous allons, de plus, supposer que la perturbation $x_1(t)$ est très faible devant x_0 ($x_1(t) \ll x_0$), pour procéder à une linéarisation des équations (équation 2.8) de la dynamique du système à ressort étudié et limiter *a priori* le développement de Taylor du terme dérivant du potentiel $\partial E_p(x)/\partial x$ au premier ordre en x_1. Nous obtenons alors l'approximation suivante pour l'équation linéarisée de la dynamique :

$$m\ddot{x}_1 + \mu\dot{x}_1 + x_1 E_p''(x_0) = 0\ , \tag{2.11}$$

où $E_p''(x_0) \equiv (\partial^2 E_p/\partial x^2)_{x=x_0}$ (par la suite nous allons omettre l'argument de E_p, tant que cette abréviation n'est pas source d'ambiguïté). L'hypothèse de linéarité des équations au premier ordre limite ainsi cette étude de stabilité à celle de la *stabilité linéaire*.

Pour résoudre l'équation linéarisée au premier ordre de la dynamique du système à ressort (équation 2.11), cherchons maintenant des solutions $x_1(t)$ de la forme $x_1(t) \sim e^{\omega t}$, pour obtenir une équation du second degré en ω, soit :

$$m\omega^2 + \mu\omega + E_p'' = 0\ . \tag{2.12}$$

On admettra que le discriminant $\mu^2 - 4mE_p''$ de cette équation est positif, condition satisfaite lorsque le coefficient de frottement μ est assez fort[6].

Les solutions de l'équation 2.12 sont alors données par :

$$\omega_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2m}\left[-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4mE_p''}\right] \tag{2.13}$$

et la solution de l'équation linéarisée de la dynamique (équation 2.11) s'écrit ainsi en toute généralité :

$$x_1(t) = ae^{\omega_1 t} + be^{\omega_2 t}, \tag{2.14}$$

[6]Cette hypothèse a pour but d'éviter les solutions donnant lieu à des oscillations temporelles sans importance pour nos objectifs.

où a et b sont des constantes d'intégration.

L'évolution de la perturbation $x_1(t)$ au cours du temps dépend ainsi du signe de l'argument $\omega_{\frac{1}{2}}$ des exponentielles. Or, le signe de l'argument ω_2 est toujours négatif (voir équation 2.13), ce qui donne lieu à une décroissance exponentielle ; la stabilité linéaire du système en x_0 dépend ainsi exclusivement de la valeur de l'argument ω_1 et donc, en dernière instance, du signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle E_p'' en x_0 (autrement dit, de la courbure de l'énergie potentielle en x_0). Deux alternatives sont alors à considérer :

- (i) soit $E_p'' > 0$ et donc $\omega_1 < 0$: $x_1(t)$ décroît exponentiellement au cours du temps et x_0 est donc une solution stable ;
- (ii) soit $E_p'' < 0$ et donc $\omega_1 > 0$: $x_1(t)$ croît exponentiellement comme $e^{\omega_1 t}$ au cours du temps et la solution x_0 est donc instable.

Les résultats ci-dessus, issus de l'analyse dynamique du système, corroborent ainsi parfaitement les résultats fondés sur l'analyse précédente de la concavité de E_p (voir section 2.1.1). Ainsi, lorsque la formulation d'un problème en termes d'une énergie est impossible, un recours à l'analyse de stabilité linéaire du système dynamique s'impose.

2.3.2 Ralentissement critique

L'évolution au cours du temps de la perturbation appliquée au système dynamique à ressort étudié dans ce chapitre dépend en dernière instance de la dérivée seconde de l'énergie potentielle (équation 2.13) en x_0 ; en dérivant deux fois par rapport à x l'énergie potentielle exprimée en fonction de la distance ϵ au seuil de la bifurcation (équation 2.7), nous obtenons :

$$E_p'' = \frac{k}{2}\left[-2\epsilon + 3\frac{x_0^2}{l_c^2}\right] \tag{2.15}$$

soit, pour la solution stationnaire en $x_0 = 0$:

$$E_p'' = -k\epsilon. \tag{2.16}$$

En reportant l'expression ci-dessus de la dérivée seconde de l'énergie potentielle en $x_0 = 0$ dans les arguments $w_{\frac{1}{2}}$ (équation 2.13) des termes exponentiels de la perturbation $x_1(t)$, et en se plaçant toujours dans des conditions de frottement fort ($\mu^2 + 4mk\epsilon > 0$), nous obtenons $w_{\frac{1}{2}} = \mu/2m\left[-1 \pm \sqrt{1 + 4mk\epsilon/\mu^2}\right]$. Au voisinage de la condition critique de la bifurcation fourche ($\epsilon \to 0$), nous pouvons effectuer un développement de Taylor au premier ordre en ϵ pour obtenir l'expression suivante des arguments $w_{\frac{1}{2}}$:

$$\omega_1 \simeq \frac{k}{\mu}\epsilon \quad \text{et} \quad \omega_2 \simeq -\frac{\mu}{m}. \tag{2.17}$$

L'argument ω_2 est une constante négative, indiquant que le terme $e^{\omega_2 t}$ décroît exponentiellement au cours du temps ; le temps caractéristique de la

décroissance associé à ce terme de la perturbation est de l'ordre de $|1/\omega_2| = m/\mu$.

L'argument ω_1 est, quant à lui, proportionnel à la distance algébrique ϵ au seuil de la bifurcation ; il est donc également négatif (décroissance exponentielle du terme $e^{\omega_1 t}$), lorsque ϵ est négatif ($\epsilon = -\frac{\ell_c - \ell_0}{\ell_c}$, la longueur ℓ_c du ressort est supérieure à sa longueur au repos ℓ_0).

En revanche, lorsque la longueur du ressort est inférieure à sa longueur au repos $\ell_c < \ell_0$, l'argument ω_1 est positif, et la perturbation subit une croissance exponentielle ; le temps de croissance de la perturbation $e^{\omega_1 t}$ est alors de l'ordre de $1/\omega_1 \sim 1/\epsilon$; ce temps caractéristique devient donc de plus en plus lent lorsque le système approche de la condition critique de la bifurcation ($\epsilon \to 0$). Ce phénomène définit le ralentissement critique : au voisinage de la bifurcation fourche, la dynamique du système « ralentit » : elle devient d'autant plus lente que le système s'approche du seuil critique.

2.3.3 Élimination adiabatique des modes rapides – réduction du nombre de degrés de liberté

L'étude de la dynamique du système au voisinage des points fixes nous a permis d'une part, de déterminer la stabilité de ces états stationnaires et d'autre part, d'identifier les différents modes de réponse du système à des petites perturbations. Ainsi, le mode ω_2 correspond à un mode stable et rapide (décroissance exponentielle de la perturbation) alors que le mode ω_1 (avec $\epsilon > 0$) correspond à un mode instable dont la croissance exponentielle subit un ralentissement critique au voisinage du point critique.

Ainsi, au cours du temps, le mode stable, dont l'évolution est rapide, s'évanouit, tandis que le mode lent persiste : la dynamique est donc gouvernée, au voisinage du point critique, par les modes lents. Cette situation est souvent rencontrée dans l'étude des systèmes dynamiques, ce qui facilite grandement leur analyse. En effet, même lorsque les systèmes étudiés comportent un nombre élevé de modes (ou de degrés de liberté), seuls les quelques modes lents persistent au voisinage de la bifurcation ; les autres modes rapides sont ainsi *adiabatiquement* [7] asservis aux modes lents. Un nombre restreint de degrés de liberté décrit la dynamique effective. L'élimination des modes rapides au profit des modes lent est dénommée *élimination adiabatique* ; les modes rapides s'adaptent « adiabatiquement » à la dynamique des modes lents.

[7] Le terme adiabatique, utilisé en thermodynamique, est issu du terme grec *adiabatos*, qui signifie infranchissable. Un système subit une transformation adiabatique lorsque, au cours de cette transformation, il est thermiquement isolé du milieu extérieur. Il peut ainsi échanger de l'énergie mécanique avec l'extérieur mais tout échange de chaleur est proscrit (parois isolantes dites adiabatiques). Lorsque les parois sont conductrices de chaleur, une transformation peut encore être considérée comme adiabatique si elle s'effectue très rapidement, c'est-à-dire lorsqu'aucun échange de chaleur n'a eu le temps de se réaliser au cours de la transformation considérée. C'est dans cet esprit qu'il est fait usage ici de la notion d'adiabaticité : le mode associé à ω_2 s'adapte très rapidement (on dit adiabatiquement) au mode lent.

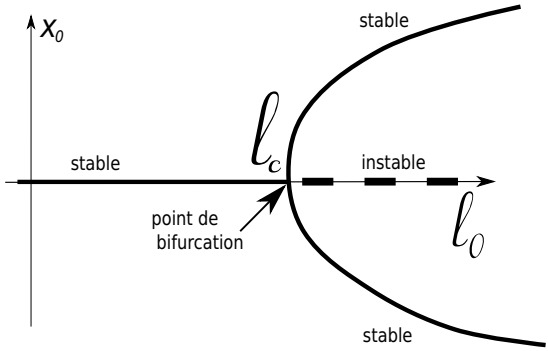


Figure 2.4 – Un diagramme de bifurcation fourche. Les lignes continues correspondent aux branches stables, et les lignes discontinues aux branches instables.

En procédant à une élimination adiabatique de la dynamique du système étudié, nous obtenons à partir de la forme générale de l'évolution de la perturbation $x_1(t)$ (équation 2.14) dans laquelle nous conservons uniquement le mode croissant lentement (l'autre mode s'amortit rapidement) :

$$x_1(t) \simeq ae^{\omega_2 t} = ae^{(k/\mu)\epsilon t}. \tag{2.18}$$

Remarquons que t apparaît uniquement en produit avec la distance algébrique ϵ au seuil de la bifurcation. Il est d'usage d'introduire une nouvelle variable T, dénommée variable lente et définie comme :

$$T = \epsilon t \tag{2.19}$$

avec pour dérivée temporelle :

$$\frac{d}{dt} = \epsilon \frac{d}{dT}. \tag{2.20}$$

Ainsi, la perturbation $x_1(t)$ évolue sur une échelle temporelle de l'ordre de $1/\epsilon$, tandis qu'en termes de la nouvelle variable T, la perturbation évolue sur une échelle d'ordre unité.

Bien au-delà d'un banal changement de variable, l'introduction des variables lentes est en fait cruciale pour simplifier l'analyse des systèmes dynamiques soumis à des mécanismes d'évolution se réalisant sur des échelles de temps très différentes. Cela permet ainsi d'établir une classification systématique des évolutions lentes et rapides (ou dominantes et sous-dominantes) et de procéder ainsi à des analyses dites en échelles multiples.

En introduisant cette nouvelle variable T dans l'équation 2.18, l'évolution de la perturbation au cours du temps s'écrit comme :

$$x_1(T) = ae^{(k/\mu)T}, \tag{2.21}$$

cette expression illustre ainsi que la perturbation x_1 ne dépend pas séparément du temps t et de la distance au seuil critique ϵ mais uniquement de leur produit T.

Rappelons ici que les expressions de la perturbation $x_1(t)$ (équations 2.14 et 2.21) ne sont solutions de l'équation dynamique que dans une approximation linéaire (équation 2.11). Dans le régime linéaire, la constante a ne peut être déterminée : une multiplication de a par une constante arbitraire est également solution de l'équation 2.21. De plus, pour $\epsilon > 0$, la solution croît exponentiellement dans le temps, et l'approximation linéaire atteint ses limites pour des temps relativement longs : x_1 devient tellement grand qu'il ne sera plus légitime d'ignorer les termes non linéaires de l'équation générique de la dynamique (équation 2.8). Néanmoins, la solution linéaire constitue une bonne approximation pour les temps courts ; les effets non linéaires auront ainsi pour unique rôle de déterminer l'amplitude $a(T)$.

2.3.4 Équation d'amplitude

Nous nous proposons de chercher maintenant une solution de l'équation de la dynamique non linéarisée du système (équation 2.8), tout en se restreignant à l'étude des solutions au voisinage de la condition critique $\epsilon = 0$. En effet, la stratégie générale consiste toujours à développer les équations de départ en puissance d'un petit paramètre (ici ϵ) et de déduire ordre par ordre les contributions. Souvent, une bonne approximation suppose une solution en série d'une certaine puissance positive du petit paramètre ϵ. Étant donné que l'amplitude de la solution stationnaire (équation 2.9) se comporte comme $\epsilon^{1/2}$, il est naturel de chercher une solution de l'équation non linéaire complète de la dynamique (équation 2.8) en séries de $\epsilon^{1/2}$, soit :

$$x(t) = \epsilon^{1/2} A_0(T) + \epsilon A_1(T) + ... \tag{2.22}$$

où les fonctions $A_0(T)$, $A_1(T)$, ... doivent être déterminées comme solution de l'équation générale de la dynamique (équation 2.8).

Compte tenu de la dérivée temporelle de x en fonction de la variable lente T (équation 2.20), la contribution de la dérivée seconde de x, proportionnelle à $\epsilon^{5/2}$ ($\ddot{x} = \epsilon^{5/2} dx/dT$), est négligeable dans l'équation générale de la dynamique (équation 2.8) par rapport à la contribution de la dérivée première de x simplement proportionnelle à $\epsilon^{3/2}$ ($\dot{x} = \epsilon^{3/2} dx/dT$). Par ailleurs, l'ordre dominant de l'énergie potentielle E_p est donné par l'expression de l'énergie potentielle en fonction du paramètre de seuil ϵ développée à l'ordre x^4 (équation 2.7).

En injectant le développement en série de $\epsilon^{1/2}$ (équation 2.22) dans l'équation générale de la dynamique (équation non linéaire) (équation 2.8), nous obtenons à l'ordre $\epsilon^{3/2}$ l'*équation d'amplitude* suivante :

$$\frac{dA_0}{dT} = \frac{k}{\mu} A_0 - \frac{k}{2\mu \ell_c^2} A_0^3. \tag{2.23}$$

Cette équation d'amplitude ne contient plus le petit paramètre ϵ ; ce qui démontre la cohérence (ou l'uniformité) du développement de la solution en série du paramètre $\epsilon^{1/2}$.

Par ailleurs, la forme de cette équation d'amplitude, également dénommée *forme normale* d'une bifurcation fourche, ne dépend pas de la forme initiale de E_p, pourvu qu'elle soit paire par rapport à x.

Notons, en outre, que le problème initial formulé à l'aide de l'équation générale de la dynamique (2.8) dispose de deux degrés de liberté (équation différentielle du second ordre à coefficients constants), tandis que l'équation d'amplitude est du premier ordre. Nous avons ainsi réduit le nombre de degrés de liberté de deux variables à une seule, grâce à l'élimination adiabatique fondée ici sur l'élimination de la dérivée temporelle seconde $\ddot{x}$ d'ordre inférieur à celui de la dérivée temporelle première $\dot{x}$.

Par ailleurs, en éliminant le terme non linéaire $-\frac{k}{2\mu\ell_c^2}A_0^3$ de l'équation d'amplitude (équation 2.23), nous obtenons une solution $A_0(T)$ donnée par $A_0(T) = ae^{(k/\mu)T}$ (où a est un facteur d'intégration), ce qui est très exactement la solution du problème linéaire (équation 2.18) obtenue lorsque seul le mode lent est conservé. L'action du terme non linéaire dans l'équation d'amplitude (équation 2.23) a pour effet de s'opposer à la croissance de l'amplitude $A_0(t)$ au cours du temps (signe négatif) et conduit, à terme, à une saturation de la solution[8].

2.3.5 Forme canonique de l'équation d'amplitude

L'universalité de l'équation d'amplitude (équation 2.23) prend tout son sens en procédant à de nouveaux changements de variable. En posant $A_0 = A\ell_0\sqrt{2}$ et $\tau = kT/\mu$, nous obtenons une nouvelle forme de l'équation d'amplitude, dite *canonique* :

$$\frac{dA}{d\tau} = A - A^3 \tag{2.24}$$

car indépendante de tous les paramètres physiques du système étudié.

Cette équation d'amplitude dérive d'un potentiel $V(A) = -A^2/2 + A^4/4$, ce qui permet de reformuler l'équation canonique d'amplitude (équation 2.24) comme :

$$\frac{dA}{d\tau} = -\frac{\partial V(A)}{\partial A}. \tag{2.25}$$

Dans le jeu des écritures multiples et pour faire apparaître explicitement le petit paramètre important ϵ de la distance au seuil critique d'instabilité, substituons A par $A/\sqrt{\epsilon}$ et τ par $\tau\epsilon$. Nous obtenons ainsi une nouvelle expression

[8] Le fait que le premier terme non linéaire agisse contre l'amplification linéaire n'est pas une règle générale. Il peut arriver que ce soit le terme suivant (ou un autre terme d'ordre plus élevé) de l'équation d'amplitude – comme A^5 – qui conduise à la saturation non linéaire. Dans certains modèles, les termes non linéaires agissent dans le même sens que le terme linéaire. Ces modèles sont souvent amenés à créer des singularités en temps fini.

du potentiel $V(A) = -\epsilon A^2/2 + A^4/4$ et une forme alternative de l'équation d'amplitude :

$$\frac{dA}{d\tau} = \epsilon A - A^3. \tag{2.26}$$

Cette forme de l'équation d'amplitude contient le paramètre de contrôle ϵ sous forme adimensionnée et permet ainsi de se référer directement à la distance au seuil de l'instabilité.

Par ailleurs, nous pouvons reformuler les états stationnaires de la dynamique (équation 2.9) par les trois solutions suivantes $A = 0$ et $A = \pm\sqrt{\epsilon}$, tandis que la solution dépendante du temps obtenue dans le régime linéaire (équation 2.18) prend la forme $A = ae^{\epsilon\tau}$.

Ainsi, la nouvelle solution stationnaire vers laquelle bifurque le système à partir de $A = 0$ varie comme $\sqrt{\epsilon}$, tandis que le temps caractéristique de la solution dépendante du temps varie comme ϵ^{-1}. En outre, nous pouvons directement conclure de ces expressions que $A = 0$ est stable pour $\epsilon < 0$ et instable pour $\epsilon > 0$: la perte de stabilité est accompagnée par la naissance de deux solutions, $A = \pm\sqrt{\epsilon}$, sous forme d'une bifurcation fourche.

2.3.6 Attracteurs de la dynamique

L'équation d'amplitude (équation 2.24), bien que non linéaire, possède une solution exacte. Cette solution est obtenue en remarquant que l'équation canonique d'amplitude (équation 2.24) peut être réécrite comme :

$$\frac{dA}{A(1-A^2)} = \frac{dA}{A} + \frac{1}{2}\frac{dA}{(1-A)} - \frac{1}{2}\frac{dA}{(1+A)} = d\tau. \tag{2.27}$$

Cette équation s'intègre immédiatement pour fournir :

$$\frac{A}{\sqrt{|1-A^2|}} = \frac{A_i}{\sqrt{|1-A_i^2|}}e^{\tau} \tag{2.28}$$

où A_i est une constante d'intégration correspondant à l'amplitude initiale (à $\tau = 0$).

Cette solution est représentée sur la figure 2.5 pour illustrer le comportement temporel transitoire avant d'atteindre l'état final stationnaire $A = +1$ ou $A = -1$. L'état final dépend de la condition initiale : si celle-ci est positive la solution finale est $A = 1$, et tend vers $A = -1$ dans le cas contraire (voir figure 2.5).

Les deux solutions $A = 1$ et $A = -1$ constituent deux *attracteurs* possibles de la dynamique. Le premier attracteur possède l'intervalle $[0, \infty]$ comme bassin d'attraction, défini comme l'ensemble des conditions initiales aboutissant à la solution $A = 1$, tandis que le bassin du deuxième attracteur est donné par l'intervalle $[-\infty, 0]$ des conditions initiales.

Notons enfin que les deux solutions $A = \pm 1$ sont équivalentes, équivalence qui reflète simplement la symétrie $A \to -A$ de l'équation canonique d'évolution (équation 2.24).

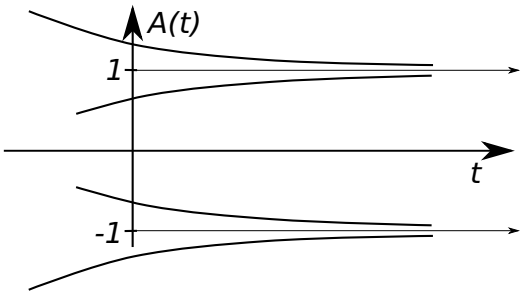


Figure 2.5 – L'amplitude en fonction du temps pour différentes conditions initiales. Les lignes horizontales en trait fin correspondent aux point fixes ± 1.

2.3.7 Fonction de Lyapunov

L'équation d'amplitude (équation 2.25) dérivant du potentiel $V(A)$ a une propriété particulière. En effet, on peut écrire :

$$\frac{\partial V(A)}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial \tau} = -\left[\frac{\partial V}{\partial A}\right]^2 \leq 0. \tag{2.29}$$

En d'autres termes, le potentiel $V(A)$ est une fonction monotone et décroissante au cours du temps, jusqu'à ce que le nouvel état stationnaire soit atteint (soit $\partial V(A)/\partial \tau = 0$, soit encore $\partial A/\partial t = 0$). Le potentiel $V(A)$ est appelé *fonction de Lyapunov*.

Ceci n'est pas sans rappeler les propriétés d'évolution monotone des systèmes globalement à l'équilibre thermodynamique, propriétés qui ne sont en général pas respectées pour des systèmes hors équilibre.

2.3.8 Brisure de symétries

Les bifurcations sont souvent accompagnées de *brisures de symétries*.

Le système étudié a une position d'équilibre $A = 0$ qui devient instable quand $\ell_c < \ell_0$ et le force à évoluer vers un des deux autres états stationnaires possibles : $A \sim \pm\sqrt{\ell_0 - \ell_c} \sim \pm\sqrt{\epsilon}$.

Ainsi, d'un point de vue intuitif, avant la bifurcation, lorsque le système est dans l'état stationnaire $A = 0$, cette solution « centrale » ne privilégie en rien la droite de la gauche. Après bifurcation, la masse a évolué vers un état stationnaire situé soit à droite ou soit à gauche de la solution stationnaire initiale $A = 0$. La symétrie de départ a été ainsi réduite : il y a eu *brisure de symétrie*.

Du point de vue mathématique, l'équation dynamique formulée au voisinage de la bifurcation sous une forme canonique (2.24) possède la symétrie $A \to -A$, et il en est de même de la solution $A = 0$, mais pas de chacune des deux solutions

obtenues après la bifurcation, $A = \sqrt{\epsilon}$ et $A = -\sqrt{\epsilon}$. Chaque solution prise à part n'est pas invariante par l'opération $A \to -A$. Sous cet angle, il s'agit bien d'une brisure de symétrie.

Néanmoins, notons bien que l'ensemble de toutes les solutions $\{A = \sqrt{\epsilon}, A = -\sqrt{\epsilon}\}$ est invariant sous l'opération de symétrie $A \to -A$ (les deux solutions sont ainsi permutées, et par conséquent l'ensemble des solutions est préservé). Autrement dit, en considérant l'ensemble des solutions, l'invariance est préservée, ce qui est une conséquence de l'invariance par symétrie de l'équation canonique d'amplitude (équation 2.24).

2.4 Systèmes dynamiques et importance de la bifurcation fourche

Dans ce chapitre, nous avons étudié la bifurcation fourche à l'aide d'un exemple mécanique simple, mais pourtant essentiel à la compréhension de nombreux autres systèmes dynamiques observés par exemple en Chimie (réaction et diffusion de concentrations des éléments chimiques), en Physique (champ de vitesse dans des systèmes hydrodynamiques tels que les rouleaux convectifs de Bénard), ou encore plus généralement dans tous les systèmes naturels où se pose le problème de la morphogenèse (émergence d'un ordre spatial).

Au-delà de ces exemples concrets, tout système subissant une instabilité stationnaire à une dimension – pour laquelle le système perturbé part d'une solution stationnaire (indépendante du temps) pour évoluer vers une autre solution stationnaire –, on peut montrer que l'amplitude du champ (ou des champs) représentant la dynamique obéit à une équation du même type que l'équation canonique (2.24) caractéristique de la bifurcation fourche, appartenant à la famille de catastrophe *cusp*.

Chapitre 3

Les autres bifurcations génériques

Le chapitre précédent traite exclusivement de la bifurcation fourche, caractéristique des systèmes dynamiques soumis à une instabilité stationnaire[1]. Nous nous proposons maintenant d'introduire les autres types de bifurcations, usuellement observés dans les systèmes non linéaires.

3.1 Bifurcation imparfaite ; brisure extrinsèque de symétrie

Tout d'abord, rappelons brièvement le dispositif mécanique étudié au chapitre précédent : une masse en forme d'anneau est suspendue verticalement à un ressort de raideur k et de longueur initiale ℓ_c, qui peut être inférieure ou supérieure à sa longueur au repos ℓ_0 ; cette masse est écartée d'une quantité x le long d'une tige horizontale (voir figure 2.1). Soulignons ici que l'équation d'amplitude (voir équation 2.24), associée à l'évolution dynamique de ce système mécanique, est invariante lors du changement de variable $A \to -A$; ainsi, pour toute solution A de l'équation d'amplitude, $-A$ est également solution.

Cette propriété de symétrie des solutions résulte de l'existence supposée d'une symétrie parfaite droite/gauche du système mécanique ; nous avons effectivement considéré que le côté droit du système à ressort était parfaitement équivalent à son côté gauche (voir figure 2.1). Or, les systèmes réels possèdent toujours un degré d'imperfection induisant une légère asymétrie. L'effet de cette asymétrie s'illustre concrètement de la façon suivante : en réitérant un grand nombre de fois l'expérience qui consiste à écarter la masse du système à ressort de sa position initiale $x = 0$ le long de l'axe horizontal, et en comptabilisant

[1] Pour rappel, une instabilité est dite stationnaire lorsque les états du système, avant et après l'instabilité, sont indépendants du temps.

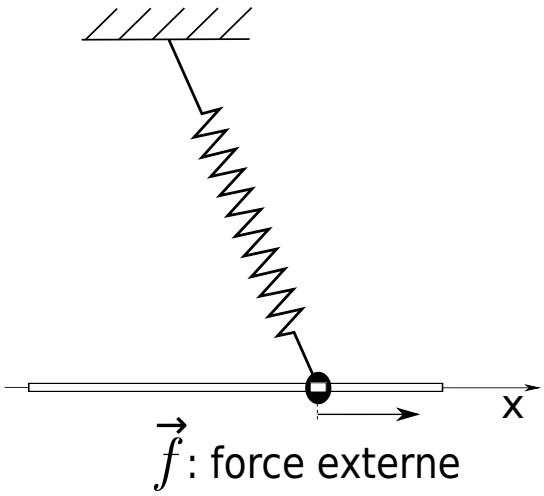


Figure 3.1 – Schéma de principe en présence d'un biais représenté par la force $\vec{f}$.

les nombres de fois à laquelle la masse finit sa course à droite et à gauche de sa position initiale, nous pourrions constater qu'il est très rare d'obtenir un nombre identique de solutions finales « droite » et « gauche » sur l'ensemble des essais. Ainsi, il existe toujours un biais, même très faible, au sein du système qui tendra à favoriser au final l'une des deux solutions d'équilibre. Ce biais peut être représenté, au sein du système mécanique à ressort développé jusqu'alors, par l'adjonction d'une force notée f s'appliquant à la masse du système, avec $f > 0$, lorsque la force s'oriente du côté des x positifs (voir figure 3.1) ; cette configuration tend à favoriser les solutions « droite » du système.

Pour décrire la dynamique du système « imparfait », l'équation d'évolution doit ainsi intégrer la force f. Elle s'écrit donc sous la forme $m\ddot{x}+\mu\dot{x}+\partial E_p/\partial x-f=0$, avec m la masse coulissante, μ le coefficient de friction et E_p l'énergie potentielle du système. En définissant l'énergie potentielle du système « imparfait » $\tilde{E}_p$ comme la somme de l'énergie potentielle E_p du système « parfait » et du travail $-fx$ de la force f ($\tilde{E}_p = E_p - fx$), cette équation d'évolution retrouve une forme généralisée similaire à celle qui a été obtenue pour le système parfait : $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + \partial\tilde{E}_p/\partial x = 0$ (voir équation 2.8). De plus, en développant à l'ordre 4 l'énergie potentielle, nous obtenons :

$$\tilde{E}_p = \frac{k}{2}\left[-\epsilon x^2 + \frac{x^4}{4\ell_c^2}\right] - fx, \tag{3.1}$$

à comparer à l'expression de l'énergie potentielle obtenue pour le système « parfait » (équation 2.7), où ϵ la distance au seuil de bifurcation est définie, comme dans le chapitre précédent, par : $\epsilon = -(\ell_c - \ell_0)/\ell_c$.

En reprenant, pas à pas, la démarche développée au chapitre précédent

(recherche de points fixes, analyse de la stabilité linéaire autour des points fixes, changements de variables et recherche des solutions – développées en série de ϵ – de l'équation non linéaire complète pour obtenir l'équation d'amplitude du système parfait, équation 2.26), nous obtenons l'équation d'amplitude du système « imparfait » suivante :

$$\frac{dA}{d\tau} = \epsilon A - A^3 + \nu \tag{3.2}$$

où $\tau = k(\epsilon t)/\nu$ et $\nu = \bar{f}/(\ell_c k)$, avec $\bar{f} = f/\epsilon^{3/2}$.

Notons que, pour obtenir ce résultat, nous avons implicitement supposé que la force f était suffisamment significative pour intervenir à l'ordre dominant dans l'évolution dynamique du système, ce qui impose que f soit de l'ordre de[2] $\epsilon^{3/2}$. Cette hypothèse $f \sim \epsilon^{3/2}$, d'une part, justifie la cohérence de l'arrêt du développement de l'énergie potentielle du système « imparfait » à l'ordre 4 (équation 3.1), puisque tous les termes considérés sont ainsi du même ordre, et, d'autre part, assure que le nouveau terme ν, dû à l'imperfection du système, intervient dans l'équation d'amplitude (équation 3.1) au même ordre en ϵ comparativement aux autres termes[3]. Il existe un potentiel $V(A)$ tel que $dA/d\tau = -\partial V/\partial A$, duquel dérive l'équation d'amplitude A du système réel (équation 3.5), nous obtenons l'expression suivante :

$$V(A) = -\frac{\epsilon A^2}{2} + \frac{A^4}{4} - \nu A. \tag{3.3}$$

Cette formulation permet l'identification des états d'équilibre du système en recherchant les *extrema* P du potentiel V satisfaisant à l'équation cubique suivante :

$$P(A) \equiv \epsilon A - A^3 + \nu = -\frac{\partial V}{\partial A} = 0, \tag{3.4}$$

pour laquelle un maximum du potentiel V correspond à un état d'équilibre instable, tandis qu'un minimum du potentiel V représente un état d'équilibre stable. De façon générale, une équation cubique possède deux types de solution : soit les 3 racines sont des nombres réels, soit une seule racine est un nombre réel et les deux autres sont des nombres complexes ; i.e. avec une partie imaginaire non nulle.

Sans résoudre explicitement cette équation cubique, adoptons un raisonnement simple fondé sur des arguments physiques et sur l'analyse des propriétés et du comportement asymptotique de la courbe des extrema $P(A)$ en fonction

[2] Pour obtenir ce résultat, nous rappelons ici que la solution $x(t)$ au voisinage du seuil de bifurcation ($\epsilon = 0$) est recherchée sous la forme d'une série d'une puissance en $\epsilon^{1/2}$, voir équation 2.22.

[3] Dans l'hypothèse où l'ordre de la force f est inférieur à $\epsilon^{3/2}$, le terme d'imperfection ν apparaît naturellement à un ordre plus élevé dans le développement de Taylor de l'énergie potentielle ; mais nous verrons, par la suite, que le comportement qualitatif des solutions du système « imparfait » ne dépend pas, en fin de compte, de l'amplitude du terme d'imperfection ν.

de l'amplitude A. Tout d'abord, notons qu'à partir de l'expression des extrema P (équation 3.4) et pour une amplitude nulle ($A = 0$), nous obtenons une valeur de l'extremum égale au terme d'imperfection du système ν ($P(0) = \nu$) ; cette valeur $P(0)$ est de plus positive puisque ν est directement proportionnel à la force f orientée vers les x positifs. Regardons maintenant le comportement des extrema $P(A)$ au voisinage de ce point $A = 0$. Toujours en référence à l'équation 3.4 ci-dessus, nous obtenons, pour une amplitude A petite, une expression approchée des extrema dominée par le terme de plus faible puissance en A, soit $P(A) \sim \epsilon A$; la dérivée de $P(A)$ en ce point est donc de l'ordre de ϵ, ce qui implique que $P(A)$ est une fonction croissante au voisinage de ce point pour $\epsilon > 0$ et une fonction décroissante lorsque $\epsilon < 0$. Enfin, le comportement asymptotique de $P(A)$ vers les grandes amplitudes est indiqué par l'expression approchée des extrema dominée par le terme de plus forte puissance en A, soit telle que $P(A) \sim -A^3$, qui tend vers $-\infty$ pour $A \to +\infty$ et vers $+\infty$ pour $A \to -\infty$.

L'objectif étant de dénombrer et d'identifier les extrema du potentiel $V(A)$ du système, poursuivons notre analyse en distinguant deux cas, selon le signe du paramètre $\epsilon = -(\ell_c - \ell_0)/\ell_c$.

- (i) $\epsilon < 0$, soit la longueur du ressort à la verticale est supérieure à la longueur du ressort au repos ($\ell_c > \ell_0$). Compte tenu de l'équation 3.4, $P(A)$ est alors une fonction toujours décroissante, puisque la dérivée de P par rapport à A est toujours négative ($dP/dA = \epsilon - 3A^2 < 0$). Compte tenu des éléments évoqués ci-avant sur le comportement général de la courbe $P(A)$, il en découle que l'équation $P = 0$ possède une seule solution réelle pour les $A > 0$ (voir figure 3.2).
- (ii) $\epsilon > 0$, soit la longueur du ressort à la verticale est inférieure à la longueur du ressort au repos ($\ell_c < \ell_0$). Dans ce cas, la dérivée des extrema, donnée par $dP/dA = \epsilon - 3A^2$, s'annule en deux points de part et d'autre de l'origine $A = 0$, précisément en $A = \pm\sqrt{\epsilon/3}$, ce qui ce traduit par la présence d'un minimum local pour $P(A)$ en $A = -\sqrt{\epsilon/3}$ et un maximum local pour $P(A)$ en $A = +\sqrt{\epsilon/3}$ (voir figure 3.3).
- (ii.1) $A > 0$. Compte tenu des éléments obtenus sur le comportement général de la courbe $P(A)$, il découle de la présence du maximum local que l'équation $P = 0$ possède une seule solution réelle pour les amplitudes positives $A > 0$, et ceci quelle que soit la hauteur du maximum local.
- (ii.2) $A < 0$. Par contre, pour les amplitudes négatives $A < 0$, l'équation $P = 0$ peut avoir zéro ou deux solutions, selon la profondeur du minimum local. En effet, si la valeur du minimum local est positive, la courbe $P(A)$ ne coupe pas l'axe d'origine des amplitudes, et donc $P(A)$ ne s'annule pas (voir figure 3.3a). En revanche, si la valeur du minimum local est négative, la courbe $P(A)$ coupe en deux points l'axe des amplitudes, ce qui correspond aux deux solutions possibles pour annuler P. Le seuil critique de passage d'un type de solution à l'autre se produit lorsque le minimum local, caractérisé par une dérivée nulle, s'annule lui aussi en ce

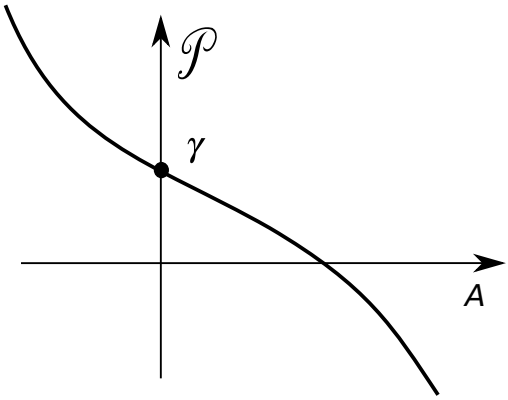


Figure 3.2 – Comportement typique de la fonction P pour $\epsilon < 0$.

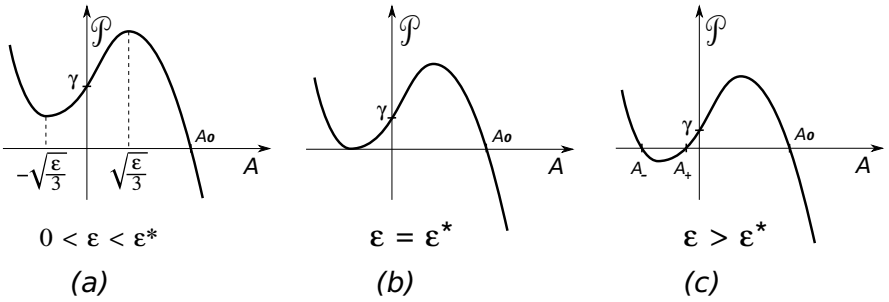


Figure 3.3 – Comportement typique de la fonction P pour $\epsilon > 0$.

point : $P(-\sqrt{\epsilon/3}) = 0$; ces conditions définissent une valeur critique du paramètre ϵ, notée ϵ^* telle que $\epsilon^* = (3\sqrt{3}\nu/2)^{2/3}$.

Ainsi, cette analyse conduit à définir une nouvelle valeur ϵ^* du paramètre ϵ, pour déterminer la forme du potentiel du système, ce qui permet de projeter les différents cas de figure obtenus ci-avant uniquement selon la valeur de ce paramètre (voir figure 3.3) :

– $\epsilon < \epsilon^*$

V n'a qu'un seul extremum ($P = dV/dA = 0$ possède une solution unique). Notons que, pour des grandes amplitudes, le potentiel est indépendant de la valeur et du signe de ϵ puisqu'il est alors dominé par le terme de plus haute puissance en amplitude, soit $V \sim +\frac{A^4}{4}$ (voir équation 3.3). Donc, lorsque les amplitudes tendent vers l'infini ($A \to \pm\infty$), le potentiel tend toujours vers l'infini positif ($V \to +\infty$) : l'extremum du potentiel est donc en fait un minimum, d'abscisse A_0 (voir figure 3.4).

- $\epsilon > \epsilon^*$
  Le potentiel V a trois extrema (voir figure 3.4), en trois points notés A_0 ($A_0 > 0$) correspondant à un minimum, A_- et A_+ (avec $A_- < A_+ < 0$) ; A_- correspond à un minimum de V, et donc à une solution stable, alors que A_+ correspond à un maximum, et donc à une solution instable.
- $\epsilon = \epsilon^*$
  Le potentiel V a deux extrema, un minimum en A_0 et un autre extremum en $A_+ = A_-$, correspondant à la fusion des deux extrema du potentiel en un point d'inflexion (voir figure 3.4).

Nous pouvons maintenant dresser le portrait des solutions d'équilibre, dénommé également diagramme de bifurcation, et représenter l'évolution en fonction du paramètre ϵ des amplitudes A_0 et A_-, d'équilibre stable (représentées en trait continu sur la figure 3.5) ainsi que A_+, d'équilibre instable (représentée en ligne brisée sur la figure 3.5). Ce portrait des solutions d'équilibre illustre la différence de comportement pour des amplitudes positives par rapport à des amplitudes négatives : les deux solutions $A > 0$ et $A < 0$ ne sont pas équivalentes, le système est caractérisé par une brisure extrinsèque de la symétrie $A \to -A$: cette bifurcation fourche est alors dite *imparfaite*.

Notons enfin que la présence d'une force positive ($f > 0$, i.e. force orientée vers l'axe des amplitudes – des x – positives) favorise pour le système la solution d'équilibre A_+ ; en optant pour une force négative ($f < 0$, i.e. force orientée vers l'axe des amplitudes – des x – négatives), le diagramme de bifurcation est obtenu par un simple changement de variable de l'amplitude, de A en $-A$ (voir figure 3.6).

3.1.1 Un avant-goût de la théorie des catastrophes

Insistons sur le fait que, dans les systèmes réels, la symétrie $A \to -A$ est un idéal jamais atteint. Il est important de remarquer aussi que, quelle que soit l'amplitude du terme d'imperfection ν, même arbitrairement petite, la bifurcation fourche a subi un changement qualitatif important (comparer les figures 2.4 et 3.5). La bifurcation fourche est donc très sensible à une perturbation extérieure. En quelque sorte, la bifurcation fourche peut être considérée comme une représentation « fragile » du modèle ; elle n'est en effet pas robuste, puisqu'une infime perturbation du modèle implique un changement qualitatif important. Nous approchons ainsi la notion de stabilité structurelle développée dans le cadre de la théorie des catastrophes. La bifurcation fourche est ainsi dite structurellement instable : sa forme ne résiste pas aux perturbations, même infimes, du « modèle ». En revanche, il s'avère que la bifurcation imparfaite est structurellement stable au sens des catastrophes. Cette bifurcation fourche, aussi bien parfaite qu'imparfaite, appartient à la première famille des sept catastrophes élémentaires, dite « catastrophe *cusp* » (ou fronce). Ces considérations sont développées plus en détail dans le prochain chapitre.

Exercice : montrer que $A \sim \nu^{1/3}$ pour ϵ petit. Préciser la validité de cette relation, c'est-à-dire l'amplitude de ϵ pour que cette relation soit valable.

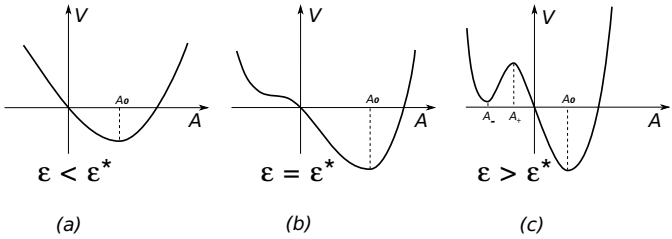


Figure 3.4 – Le comportement typique de $V(A)$ pour différentes valeurs de ϵ.

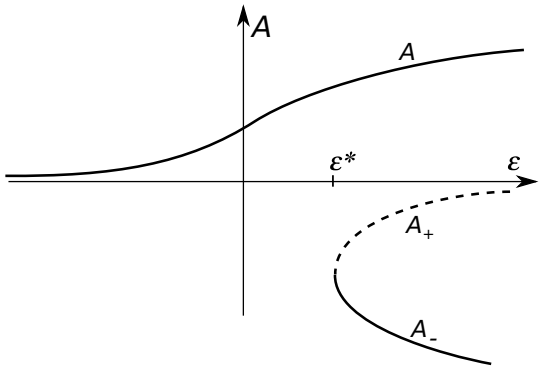


Figure 3.5 – Le diagramme d'une bifurcation imparfaite.

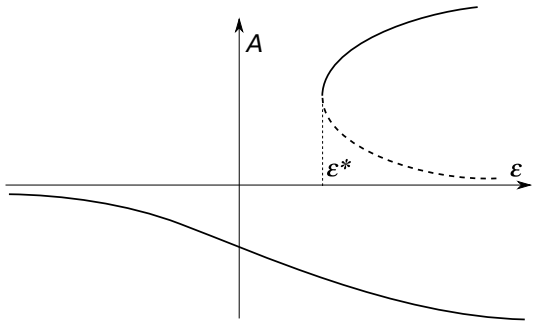


Figure 3.6 – Le diagramme d'une bifurcation imparfaite après changement du signe de l'imperfection.

3.2 Bifurcation sous-critique et multistabilité

Revenons dans cette section à des modèles de systèmes respectant parfaitement la symétrie droite-gauche[4] (équivalence entre A et $-A$ dans l'équation d'amplitude), pour ne considérer dans l'équation d'amplitude que des termes en puissance impaire de l'amplitude A.

Pour une bifurcation fourche, le signe du terme linéaire de l'équation d'amplitude (terme en A de l'équation d'amplitude 2.26) est donné par la distance au seuil d'instabilité ϵ : en dessous du seuil de bifurcation, le signe de ϵ est négatif, et au-dessus du seuil de bifurcation, le signe de ϵ est positif. Le changement de signe du paramètre ϵ marque la frontière de l'instabilité de la solution d'équilibre, ici la solution à amplitude nulle ($A = 0$). Ces résultats sont issus, en toute généralité, de l'étude de la stabilité linéaire du système : en dessous du seuil, la solution $A = 0$ est stable ; au-dessus du seuil, la solution $A = 0$ est instable et le système évolue vers un nouvel état dont le statut (obtention d'un nouvel état stationnaire ou non) est déterminé par la saturation ou la croissance des termes non linéaires de l'équation d'amplitude.

Pour le système mécanique traité au chapitre précédent, le coefficient du terme non linéaire (terme en A^3) de l'équation d'amplitude (2.26) est négatif : ce qui implique une saturation, dite non linéaire, de l'instabilité pour atteindre un nouvel état stationnaire.

D'autres systèmes sont au contraire caractérisés par un coefficient positif du terme cubique de l'équation d'amplitude (voir, par exemple, le problème 3.9.2 ci-après) ; or, au-delà du seuil de bifurcation ($\epsilon > 0$), un terme cubique positif ($+A^3 > 0$) dans l'équation d'amplitude implique une amplification dite non linéaire de l'instabilité : l'amplitude A croît ainsi indéfiniment (absence de saturation non linéaire). Notons que l'équation d'amplitude cubique associée ($dA/d\tau = \epsilon A + A^3$) possède comme points fixes $A = 0$ et $A = \pm\sqrt{-\epsilon}$; les deux dernières solutions n'existent que pour $\epsilon < 0$. Il est simple de voir[5] que $A = 0$ est stable pour $\epsilon < 0$ et instable pour $\epsilon > 0$, tandis que $A = \pm\sqrt{-\epsilon}$ est toujours instable pour les systèmes caractérisés par un coefficient positif du terme cubique (voir le diagramme de bifurcation représenté figure 3.7). Il n'existe ainsi aucune branche stable correspondant à une amplitude $A \neq 0$; ainsi, à l'ordre cubique, le système ne trouve pas de nouvel état stationnaire. Pour étudier l'évolution du système, il est alors nécessaire d'analyser le problème à un ordre supérieur et donc de poursuivre le développement non linéaire en puissance de l'amplitude A aux ordres suivants pour espérer trouver des termes d'ordre supérieur agissant contre l'amplification linéaire et cubique[6].

[4] Même si la bifurcation parfaite est structurellement instable, considérons, en première instance et par souci de simplicité, les modèles dits parfaits, quitte à introduire par la suite le terme d'imperfection, à l'exemple de la section précédente.

[5] Il suffit d'analyser le potentiel associé, $V(A) = -\epsilon A^2/2 - A^4/4$; rappelons que le maximum (respectivement, minimum) du potentiel $V(A)$ correspond à un état instable (respectivement, stable).

[6] De nombreux systèmes dynamiques sont en effet caractérisés par l'existence de termes non linéaires (A^3, A^5, ...) dans l'équation d'amplitude qui ralentissent la croissance exponentielle

Puisque le système est supposé parfait (équivalence entre A et $-A$), le terme non linéaire d'ordre supérieur (i.e. suivant le terme cubique) dans l'équation d'amplitude est d'ordre cinq (en A^5) ; supposons de plus qu'il agisse dans le sens d'un ralentissement de la croissance de l'instabilité (saturation non linéaire, voir l'exemple du système mécanique parfait développé dans la sous-section 3.9.2[7]), le terme non linéaire d'ordre 5 est négatif et l'équation d'amplitude s'écrit comme[8]

$$\frac{dA}{d\tau} = \epsilon A + A^3 - A^5 = -\frac{dV}{dA}. \tag{3.5}$$

Une fois l'intégration effectuée, nous obtenons le potentiel $V(A)$ suivant :

$$V(A) = -\frac{\epsilon A^2}{2} - \frac{A^4}{4} + \frac{A^6}{6}. \tag{3.6}$$

Les solutions stationnaires du système correspondent aux extremas du potentiel V. La solution d'amplitude nulle $A_0 = 0$ existe toujours, les autres points fixes satisfont à l'équation :

$$A^4 - A^2 - \epsilon = 0 \tag{3.7}$$

ayant pour solution :

$$A^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\epsilon}}{2}\ . \tag{3.8}$$

Comme le carré de l'amplitude (A^2) est réel, le paramètre ϵ doit vérifier la condition suivante : $\epsilon > -1/4$. De plus, la condition $A^2 > 0$ impose que la solution avec le signe $-$ devant la racine ne peut exister que pour $\epsilon < 0$. Puisqu'une équation d'ordre cinq possède toujours une, trois, ou cinq solutions réelles, nous obtenons les solutions stationnaires de l'équation d'amplitude et leurs domaines d'existence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon < -\frac{1}{4}, \quad A_0 = 0 \\ -\frac{1}{4} < \epsilon < 0, \quad A_0 = 0, \quad A_{1\pm} = \pm \left(\frac{1-\sqrt{1+4\epsilon}}{2} \right)^{1/2}, \\ \text{et} \quad A_{2\pm} = \pm \left(\frac{1+\sqrt{1+4\epsilon}}{2} \right)^{1/2}, \\ \epsilon > 0, \quad A_0 = 0, \quad A_{2\pm} = \pm \left(\frac{1+\sqrt{1+4\epsilon}}{2} \right)^{1/2}. \end{array} \right\} \tag{3.9}$$

des instabilités. Il existe cependant plusieurs modèles de systèmes pour lesquels tous les termes non linéaires conduisent à une amplification de l'instabilité et non pas pas à leur saturation [37] ; ces modèles sont alors symptomatiques d'une *singularité en temps fini*.

[7] L'exercice proposé dans la sous-section 3.9.3 vous invite à étudier le même système mécanique en introduisant un terme d'imperfection.

[8] En toute généralité nous aurions pu écrire $\frac{dA}{d\tau} = \epsilon_1 A + \epsilon_2 A^3 - \epsilon_3 A^5$. En divisant par ϵ_3 les deux membres de l'équation, nous obtenons : $\frac{dA}{d\tau'} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} A + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} A^3 - A^5$, avec $\tau' = \tau\epsilon_3$. En définissant $A = A'(\epsilon_2/\epsilon_3)^{1/2}$, nous pouvons écrire finalement $\frac{dA}{d\tau''} = \epsilon A' + A'^3 - A'^5$, avec $\epsilon = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3}(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_3})^{-2}$, et $\tau'' = \tau'(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_3})^2$. En d'autres termes, nous pouvons restreindre l'étude à un paramètre unique (pourvu que les signes de ϵ_2 et ϵ_3 soient fixés, comme nous l'avons supposé).

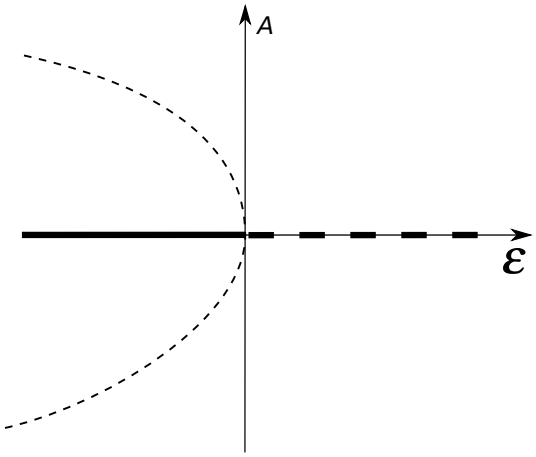


Figure 3.7 – Le diagramme de bifurcation d'une bifurcation fourche inversée. Notons qu'en comparaison avec la situation de la figure 2.4, les branches qui émergent de la solution $A = 0$ sont instables. On se réfère parfois à cette bifurcation comme le dual de celle représentée sur la figure 2.4.

Pour $\epsilon = -1/4$, les solutions sont doubles $A_1 = A_2$.

Le comportement du potentiel $V(A)$ en fonction de l'amplitude A donné par l'équation 3.6 dépend des différentes plages de valeur du paramètre ϵ (voir figure 3.8) ; la stabilité des solutions peut être déduite de la nature des extrema du potentiel $V(A)$ (des minimas pour des solutions stables et des maxima pour des solutions instables, voir figure 3.8) ; cela permet de tracer le diagramme de bifurcation en fonction du paramètre ϵ (voir figure 3.9, pour visualiser les branches stables en trait continu et les branches instables en trait discontinu). Ce diagramme de bifurcation représente un exemple de la famille de « catastrophe papillon », dite *bifurcation sous-critique*, caractéristique de l'existence de deux nouvelles solutions stables, A_{2+} et A_{2-}, alors que le paramètre ϵ est encore négatif ($\epsilon < 0$), donc avant la perte de stabilité de la solution d'amplitude nulle ($A = 0$), qui survient lorsque le paramère ϵ s'annule ($\epsilon = 0$). Le diagramme de bifurcation (voir figure 3.9) indique ainsi que le système peut, en principe, « sauter » de la solution $A = 0$, stable pour $\epsilon < 0$, à la solution A_2[9] et ceci même avant d'atteindre la valeur critique $\epsilon = 0$, c'est-à-dire avant que la solution $A = 0$ devienne instable ($\epsilon > 0$). Ainsi, la bifurcation fourche est parfois qualifiée de bifurcation sur-critique pour illustrer la naissance des branches de solutions d'amplitude non nulle ($A \neq 0$) pour des valeurs positives du paramètre ϵ, donc au-delà de la valeur critique $\epsilon = 0$ du paramètre ϵ.

[9] Notons que $A_{2+} = -A_{2-}$; ainsi, ces deux solutions sont équivalentes et pour ne pas avoir à les distinguer, nous ferons globalement référence à ces solutions en les notant A_2.

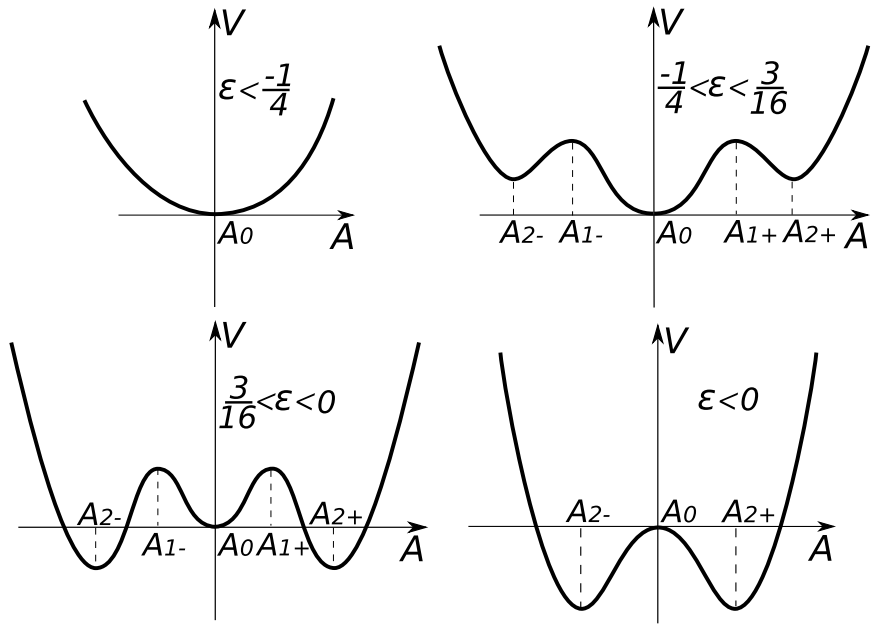


Figure 3.8 – Allure du potentiel pour une bifurcation sous-critique pour différentes valeurs de ϵ. La valeur $\epsilon = -3/16$ correspond à la situation où les deux solutions, A_0 et A_2, ont la même stabilité (voir texte).

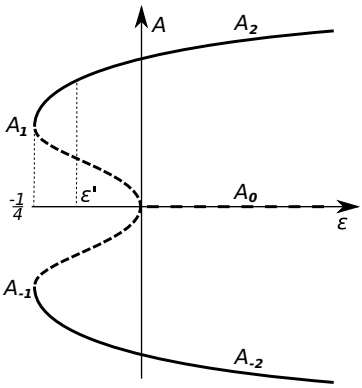


Figure 3.9 – Le diagramme d'une bifurcation sous-critique.

Étudions maintenant l'évolution des solutions stationnaires du système en fonction du paramètre ϵ et voyons si le sens de variation de ce paramètre influe. Partons d'une valeur initiale du paramètre tel que : $-1/4 < \epsilon < -3/16$. Dans cette plage de valeurs, la solution d'amplitude nulle $A = 0$ est plus stable, i.e. son potentiel est plus profond, que la solution d'amplitude $A = A_2$. Or, la situation s'inverse pour la plage de valeurs définie par $-3/16 < \epsilon < 0$, puisque le potentiel $V(A_2)$ est maintenant plus profond que $V(0)$ (voir figure 3.8). Lorsque la valeur du paramètre ϵ augmente et atteint puis excède $-3/16$, le système transite de la solution $A = 0$ stable vers la solution $A = A_2$ de plus grande stabilité. Or, imaginons une balle logée initialement en $A = 0$ et augmentons la valeur du paramètre jusqu'à la valeur $-3/16$, celle-ci en fait ne quittera pas spontanément la position $A = 0$, qui correspond à un minimum relatif, pour aller vers A_2, correspondant au minimum absolu, même en présence de petites fluctuations naturelles, telles que, par exemple, celles suscitées par un petit souffle de vent. Il est en effet très probable que la balle reste en $A = 0$, jusqu'à ce que le potentiel en $A = 0$ devienne un maximum, ce qui se réalise lorsque le paramètre ϵ devient positif ; alors, en effet pour ces valeurs, la solution en $A = 0$ devient instable, et la balle tombe vers l'un des deux minimas du potentiel en $A = A_{2+}$ ou A_{2-} où elle demeure pour toute valeur de $\epsilon > 0$. Maintenant, à partir d'une valeur positive du paramètre ϵ, diminuons progressivement sa valeur pour étudier l'évolution des solutions stationnaires ; la balle reste en $A = A_2$ jusqu'à ce que le paramètre ϵ atteigne la valeur $-3/16$, valeur au-delà de laquelle la balle retombe en $A = 0$; ainsi, lors de la diminution du paramètre ϵ, le changement de solutions de $A = A_2$ vers $A = 0$ se produit pour $\epsilon = -3/16$ alors que, pour l'expérience précédente correspondant à l'augmentation du paramètre ϵ à partir d'une valeur négative, le changement de solutions (de $A = 0$ vers $A = A_2$) s'était réalisé pour $\epsilon = 0$. L'évolution des solutions en fonction du paramètre ϵ n'est ainsi pas réversible.

Par ailleurs, la coexistence de plusieurs solutions stables $A = A_2$ et $A = 0$ pour des valeurs du paramètre telles que $-1/4 < \epsilon < 0$ (voir figure 3.8), définit pour le paramètre ϵ un *domaine de métastabilité*. La solution dont le potentiel est le plus profond est dite *stable*, tandis que celle correspondant à l'autre minimum est dite *métastable*. Lorsque $-1/4 < \epsilon < -3/16$, la solution $A = 0$ est stable et A_2 est métastable ; la qualification s'inverse dans l'intervalle $-3/16 < \epsilon < 0$, puisque la solution $A = 0$ devient métastable alors que la solution A_2 devient stable. Lorsque les deux solutions ont la même profondeur de potentiel, elles sont qualifiées de *bistables*. Insistons sur le fait que par stabilité nous entendons *stabilité linéaire*, c'est-à-dire que les solutions sont stables en regard de petites perturbations. En effet, en présence d'une perturbation assez forte telle un coup de pied dans la balle pour poursuivre l'analogie précédente, la balle peut être aisément délogée de l'état métastable vers l'état stable. Pour effectuer l'opération l'inverse, c'est-à-dire projeter la balle de l'état stable vers l'état métastable, il est en revanche nécessaire de fournir une plus grande énergie, c'est-à-dire un coup de pied beaucoup plus fort (faites l'expérience de pensée en se référant à la figure 3.8). L'état stable est ainsi plus résistant que l'état

métastable.

Déterminons à présent la condition de bistabilité des deux solutions $A = 0$ et $A = A_2$; les deux solutions ont donc la même stabilité si :

$$V(A = A_2) = V(A = A_0 = 0). \tag{3.10}$$

Compte tenu de l'expression du potentiel (voir équation 3.6), le potentiel en A_0 s'annule de même donc que le potentiel en $A = A_2$ ($V(0) = 0 = V(A_2)$), ce qui permet d'exprimer le terme d'ordre 4 A_2^4 en fonction des termes d'ordre inférieur ($A_2^4 = 3\epsilon + 3/2A_2^2$) et en reprenant la contrainte de solutions stationnaires (voir équation 3.7), nous obtenons la condition de bistabilité suivante :

$$A_2^2 = -4\epsilon > 0. \tag{3.11}$$

En utilisant l'expression des solutions stationnaires A_2 du système en fonction du paramètre ϵ (voir équation 3.9), nous obtenons que les solutions A_0 et A_2 sont bistables pour une valeur critique du paramètre ϵ, notée ici $\epsilon' = -3/16$. Pour le domaine $-1/4 < \epsilon < \epsilon'$, la solution A_0 est stable et la solution A_2 est métastable ; la conclusion s'inverse pour le domaine de paramètre tel que $\epsilon' < \epsilon < 0$. Nous allons développer dans la sous-section suivante 3.9.1, l'interprétation géométrique sous-tendue par la droite $\epsilon = \epsilon'$ tracée dans le diagramme de bifurcation et dénommée « plateau de Maxwell » (voir figure 3.29), par analogie avec la construction effectuée par le scientifique écossais James Clerk Maxwell (1831-1879) dans le cas de certaines transitions de phase (telle la transition liquide-gaz, par exemple).

3.2.1 Métastabilité et rôle des fluctuations

Les transitions de phase d'un système thermodynamique (fusion, ébullition, sublimation), dites transitions du premier ordre, sont l'analogue de bifurcations sous-critiques : l'existence de fluctuations thermiques ou la présence d'impuretés au sein de la matière sont les facteurs déclenchant la transition de phase ; sans ces éléments perturbateurs, le système aurait quelque difficulté à transiter spontanément d'un état métastable vers un état stable.

Par exemple, une eau liquide pure placée dans un congélateur porté à une température de plusieurs degrés en dessous de 0 ° C se transforme difficilement en glace[10]. En d'autres termes, dans des conditions idéales de pureté et sans aucune fluctuation d'aucune sorte, l'eau liquide exposée à des températures négatives (en deçà du 0 ° C) reste à l'état liquide même si le potentiel thermodynamique[11] de la glace d'eau est inférieur au potentiel thermodynamique

[10] Mais, même le très faible degré d'impureté admis dans l'eau potable suffit à former des glaçons dans le bac à glaçons d'un réfrigérateur !

[11] Il existe différents potentiels thermodynamiques, telles l'énergie interne, l'énergie libre, l'enthalpie ou l'enthalpie libre de Gibbs ; ils ont pour dimension celle d'une énergie et sont analogues à l'énergie potentielle en mécanique puisqu'ils représentent l'énergie potentielle du système et sont minimaux à l'équilibre.

de l'eau liquide ; le système thermodynamique demeure ainsi dans un état métastable. Or, et c'est là une différence fondamentale avec les systèmes mécaniques macroscopiques, les fluctuations en thermodynamique jouent un rôle central dans le problème de transitions de phase, puisqu'elles mettent en jeu des phénomènes opérant à l'échelle atomique ou moléculaire, par le biais de mouvements collectifs microscopiques[12]. À ces échelles microscopiques, toutes fluctuations, en particulier les fluctuations thermiques, jouent nécessairement un rôle majeur. Ce scénario valable en thermodynamique diffère foncièrement de celui qui se joue pour les bifurcations macroscopiques analysées dans cet ouvrage. Par exemple, au sein du système à ressort étudié au début du chapitre 2, les fluctuations microscopiques, thermiques par exemple, ne jouent aucun rôle dans le processus de transition – ou de bifurcation – d'un état vers un autre. Dans le même esprit, considérons une balle posée au fond d'un puits de potentiel assez profond situé à proximité de dépressions plus profondes. La balle, soumise aux seules fluctuations naturelles (les fluctuations thermiques, le vent, une porte qui claque, etc.), n'a aucune chance de se trouver subitement dans le puits voisin, même si celui-ci est plus profond (voir figure 3.10). Afin d'induire une transition de l'état métastable vers l'état stable, il est nécessaire d'introduire une fluctuation importante, telle que dans l'exemple donné ci-dessus un coup de pied assez fort, mouvement qui sort du cadre des fluctuations naturelles faibles. Ainsi, en l'absence d'une telle perturbation extérieure d'amplitude assez grande, le système a peu de chance de transiter d'un état métastable vers l'état stable. Il faut attendre que l'état métastable devienne instable – le minimum du potentiel devient alors un maximum – pour assister à la trajectoire de la balle vers le puits voisin (voir figure 3.10).

3.2.2 Cycle d'hystérésis

Revenons à présent sur l'aspect irréversible de l'évolution des solutions stationnaires en fonction du paramètre ϵ évoqué dans le cas de la bifurcation sous-critique (voir paragraphe 3.2). Intéressons-nous au domaine des amplitudes positives et du paramètre ϵ négatif dans le diagramme de bifurcation (voir figure 3.9) pour étudier l'évolution[13] des solutions (voir la figure 3.11).

À partir de la solution d'amplitude nulle ($A_0 = 0$) lorsque $\epsilon = -1/4$ au point A, l'augmentation du paramètre ϵ ne change rien à la solution adoptée par le système jusqu'à ce que ϵ s'annule au point B, point à partir duquel le système évolue de la solution A_0 vers la solution A_2 pour atteindre le point B' ; l'évolution du système a donc suivi le chemin ABB' dans le diagramme de bifurcation (voir figure 3.11). Inversement, à partir du point B', diminuons le paramètre ϵ ; le système demeure dans la solution A_2 jusqu'à ce que le paramètre ϵ atteigne la valeur $-1/4$, point critique en C où la solution A_2 cesse d'exister. En deçà de cette valeur, le système n'a d'autre choix que de « sauter » de la branche A_2

[12] Un mouvement Brownien affecte un grain de pollen, ou une molécule, mais pas une balle de tennis plongée dans l'eau.

[13] Nous excluons dans ce qui suit l'existence de perturbations fortes.

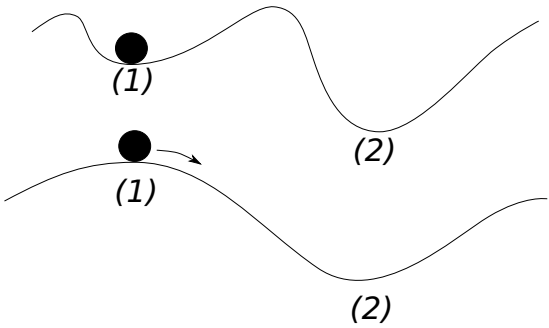


Figure 3.10 – Au-dessus, une balle macroscopique au point (1) n'a aucune chance de se trouver au point (2) suite à des fluctuations naturelles. Pour réaliser une telle transition, une perturbation extérieure assez forte est nécessaire. En faisant varier un paramètre de contrôle, le paysage du potentiel peut transformer le puits en (1) en un sommet (figure en dessous), et la balle se trouve alors en position instable. Dans ce cas, une faible fluctuation suffit à la faire transiter de (1) vers (2).

vers la branche $A_0 = 0$ pour retomber en A. Le système a donc évolué selon le chemin de retour $B'CA$, différent du chemin aller ABB' dans le diagramme de bifurcation (figure 3.11). Il existe donc une asymétrie entre les chemins aller et retour illustrant l'évolution du système qui décrit ainsi un cycle (ou une boucle), appelé *cycle d'hystérésis, ou d'hystérèse*[14] dans le diagramme de bifurcation.

3.3 Bifurcation transcritique

Certains systèmes non linéaires sont caractérisés, indépendamment d'une brisure de symétrie extrinsèque telle qu'évoquée jusqu'alors, par une absence de symétrie « droite/gauche » ; l'équation d'évolution n'est donc pas invariante lors du changement de variable $A \to -A$. En conséquence, une non-linéarité quadratique (terme en A^2) s'introduit dans l'équation d'évolution de l'amplitude A. Si le terme quadratique suffit à saturer la croissance linéaire (c'est-à-dire, s'il est précédé d'un signe négatif), le développement quadratique suffit. L'équation d'amplitude s'écrit alors comme :

$$\frac{dA}{d\tau} = \epsilon A - A^2. \tag{3.12}$$

[14] Il convient de mentionner que le cycle d'hystérésis est également observé dans certaines transitions de phase de systèmes thermodynamiques, en dépit de l'action des fluctuations microscopiques, par exemple thermiques, qui n'arrivent pas toujours à vaincre facilement la barrière de métastabilité. Il n'en reste pas moins vrai alors que l'intervalle en ϵ (i.e. l'extension de la boucle) de l'hystérésis d'un système thermodynamique subissant une transition de phase est souvent plus réduit que celui des systèmes macroscopiques étudiés ici, pour lesquels le domaine de l'hystérésis recouvre pratiquement celui de métastabilité.

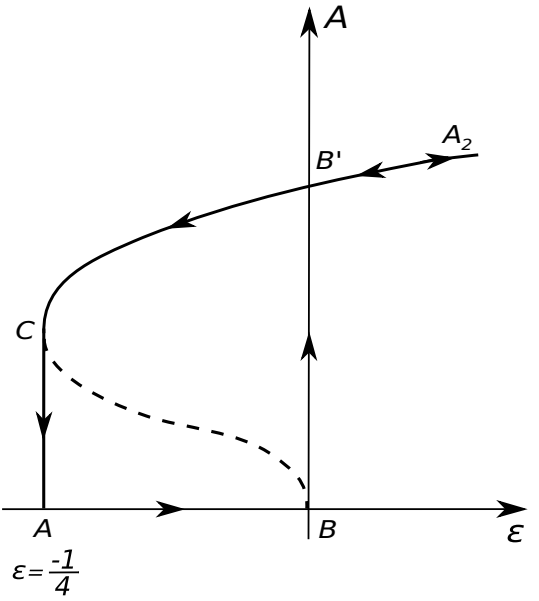


Figure 3.11 – Diagramme de bifurcation montrant le cycle d'hystérésis.

Cette équation possède deux points fixes $A = 0$ et $A = \epsilon$ qui existent sans aucune restriction paramétrique. Le premier point fixe $A = 0$ est stable pour $\epsilon < 0$ et instable pour $\epsilon > 0$. La condition de stabilité du second point fixe $A = \epsilon$ est inversée par rapport à celle du premier point fixe ($A = \epsilon$ est instable pour $\epsilon < 0$ et stable pour $\epsilon > 0$, voir diagramme de bifurcation, figure 3.12).

Si, en revanche, le terme quadratique ne peut pas assurer la saturation non linéaire de l'instabilité (c'est-à-dire, s'il est précédé d'un signe positif), le terme d'ordre supérieur en A^3 dans le développement de Taylor de l'équation d'évolution doit être pris en compte dans l'équation d'évolution. L'équation d'amplitude a ainsi la forme suivante[15] :

$$\frac{dA}{d\tau} = \epsilon A + A^2 - A^3. \tag{3.13}$$

Sans redéployer explicitement toutes les étapes de calcul déjà traitées en détail dans les exemples de bifurcation précédents, nous obtenons finalement que l'équation d'évolution (équation 3.13) a un point fixe $A_0 = 0$ pour $\epsilon < -1/4$, et trois points fixes pour $\epsilon > -1/4$, donnés par $A_0 = 0$ et $A_\pm = [1 \pm \sqrt{1 + 4\epsilon}]/2$ (voir diagramme de bifurcation, figure 3.13). Nous sommes en présence d'une

[15] Remarquons qu'en présence du terme cubique, le signe de A^2 devient sans intérêt. En effet, par substitution $A \to -A$ dans l'équation d'amplitude et en multipliant l'équation résultante par -1, seul le signe devant A^2 change, les autres restent intacts suite à ces deux opérations.

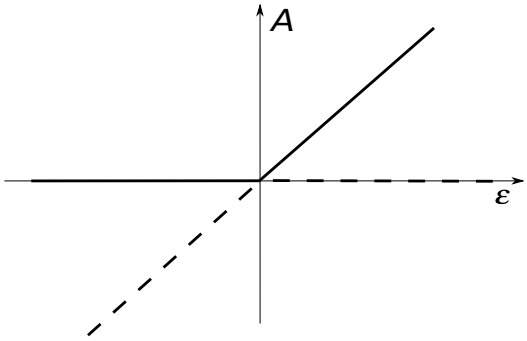


Figure 3.12 – Diagramme de bifurcation transcritique obtenue à partir d'une équation d'amplitude quadratique.

bifurcation transcritique caractérisée par l'existence de part et d'autre du point de bifurcation de deux branches de solutions ($A = 0$) et ($A \neq 0$). À l'instar des bifurcations fourche et imparfaite, cette bifurcation transcritique appartient également à la famille des catastrophes de type « fronce » (*cusp catastrophe* en langue anglo-saxonne). La stabilité des points fixes peut être facilement déduite à partir du potentiel $V(A)$ associé à l'équation d'amplitude (équation 3.13, puisque $dA/d\tau = -\partial V/\partial A$).

3.3.1 Stabilité linéaire des points fixes

Jusqu'alors, nous avons étudié des systèmes dont l'équation d'évolution dérivait d'un potentiel ($dA/d\tau = -\partial V/\partial A$). Nous avions notamment utilisé cette propriété pour étudier la stabilité linéaire de la bifurcation fourche (voir chapitre 2). Mais en toute généralité, les équations d'évolution non linéaires ne découlent pas nécessairement d'un potentiel ; l'étude de la stabilité linéaire des solutions stationnaires doit alors reposer sur une démarche alternative, que nous allons développer ici dans le cas de la bifurcation transcritique dont l'équation d'évolution est développée à l'ordre 3. À cet effet, on part d'une solution stationnaire (point fixe de la dynamique) A_0, à laquelle on superpose une perturbation A_1 :

$$A = A_0 + A_1(t), \tag{3.14}$$

où $A_1(t)$ est supposé suffisamment petite par rapport à A_0. A_0 est stable si A_1 décroît au cours du temps, et instable dans le cas contraire. Reportons la solution stationnaire perturbée (éuqation 3.14) dans l'équation cubique d'évolution de la bifurcation transcritique (équation 3.13), pour obtenir :

$$\dot{A}_1 = \epsilon(A_0 + A_1) + (A_0 + A_1)^2 - (A_0 + A_1)^3. \tag{3.15}$$

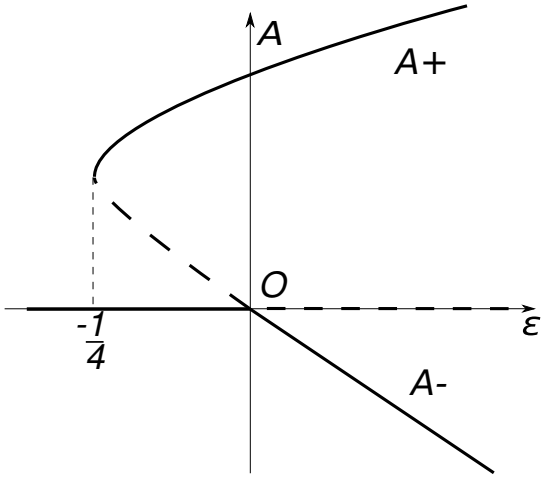


Figure 3.13 – Diagramme de bifurcation transcritique obtenue à partir d'une équation d'amplitude cubique.

L'étude de stabilité linéaire consiste à développer l'équation en ne retenant que les termes linéaires en A_1 (les termes d'ordre supérieur en A_1^2, A_1^3 sont négligés). Nous obtenons

$$\dot{A}_1 = \epsilon A_1 + 2A_0A_1 - 3A_0^2A_1, \tag{3.16}$$

où nous avons utilisé la condition que la solution A_0 satisfait à la condition de stationnarité $dA/d\tau = \epsilon A_0 + A_0^2 - A_0^3 = 0$. Considérons séparément la stabilité de chacun des points fixes. Pour $A_0 = 0$, l'équation linéarisée d'évolution temporelle de la perturbation (équation 3.16) s'écrit simplement : $\dot{A}_1 = \epsilon A_1$; la solution est simplement donnée par $A_1 = ae^{\epsilon t}$ (a est un facteur d'intégration). Ainsi, pour $\epsilon > 0$, la perturbation A_1 croît exponentiellement au cours du temps et la solution stationnaire A_0 est instable ; pour $\epsilon < 0$, la perturbation A_1 décroît exponentiellement au cours du temps et la solution A_0 est stable.

Considérons maintenant les deux autres points fixes. En utilisant une seconde fois la condition de stationnarité de la solution A_0, l'équation linéarisée d'évolution de la perturbation (équation 3.16) peut être réécrite comme

$$\dot{A}_1 = -(2\epsilon + A_0)A_1. \tag{3.17}$$

La stabilité de la solution A_0 dépend du signe du facteur du terme en A_1 (soit $-(2\epsilon + A_0)$). Pour la solution $A_0 = A_+$, nous avons $-(2\epsilon + A_+) = -[1 + 4\epsilon + \sqrt{1 + 4\epsilon}]/2 < 0$. Il résulte de l'équation d'évolution de la perturbation (équation 3.17) que la solution A_+ est toujours stable. Pour la solution $A_0 = A_-$, nous avons $-(2\epsilon + A_-) = [-(1+4\epsilon) + \sqrt{1 + 4\epsilon}]/2$. Cette quantité est positive (solution

instable) pour $-1/4 < \epsilon < 0$ et négative (solution stable) pour $\epsilon > 0$ (voir les différentes branches stationnaires dans le diagramme de bifurcation, figure 3.13).

3.4 Bifurcation col-nœud

Nous allons dans ce paragraphe étudier un autre type de bifurcation dit « col-noeud » à l'aide d'un exemple de système mécanique simple : le pendule.

3.4.1 Rappel du pendule simple

Rappelons d'abord le problème classique du pendule simple : une masse m est suspendue par un fil de longueur l attaché en un point 0 (voir figure 3.14). L'équation d'évolution de la masse résulte du théorème du moment cinétique, ou, de manière équivalente, de la loi fondamentale de la dynamique. Soit I le moment d'inertie, et θ l'angle que fait l'axe du pendule avec la verticale, le théorème du moment cinétique s'exprime de la manière suivante :

$$I\ddot{\theta} = J, \tag{3.18}$$

où J est le moment des forces. En représentation vectorielle, le moment des forces s'exprime comme le produit vectoriel du vecteur position $\mathbf{r}$, ayant ici comme origine le point de suspension O et de la somme des forces $\vec{f}$ appliquées à la masse ($\vec{J} = \vec{r} \times \vec{F}$). Dans le cas du pendule simple, la seule force appliquée à la masse est son poids $\vec{F} = \vec{p}$=m$\mathbf{g}$, où $\vec{g}$ est le vecteur gravité. Par ailleurs, le moment d'inertie est donné par le produit de la masse m et du carré de la longueur du fil l ($I = m\ell^2$), et compte tenu du fait que la gravité $\mathbf{g}$ se trouve dans le plan du mouvement, le moment des forces J est donné par l'expression suivante $J = -mg\ell\sin(\theta)$. L'équation du mouvement prend alors la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0. \tag{3.19}$$

Cette équation peut être également obtenue en utilisant la forme originelle de la loi de Newton, la loi fondamentale de la dynamique, le produit de la masse par l'accélération est égale à la somme des forces. Il suffit alors de projeter cette loi le long de la tangente à la trajectoire (la masse décrit une portion de cercle alors qu'il oscille autour du point de suspension) ; en égalant la projection du poids $mg\sin(\theta)$ à l'accélération $ml\ddot{\theta}$, nous obtenons bien la même équation[16]. Les points fixes vérifient $\sin(\theta_0) = 0$ (dans cet ouvrage, l'indice '0' est utilisé pour

[16] L'équation du mouvement peut être également obtenue plus simplement en utilisant la condition de la conservation de l'énergie. L'énergie totale est composée de la somme de l'énergie cinétique $E_c = m(\ell\dot{\theta})^2/2$ et de l'énergie potentielle gravitationnelle $E_p = mg\ell[1 - \cos(\theta)]$, où on a pris le zéro de E_p quand la masse est dans la position $\theta = 0$. En l'absence de frottement, l'énergie totale est conservée au cours du temps, soit $\frac{d(E_c+E_p)}{dt} = 0$, ce qui conduit à l'équation du mouvement 3.19.

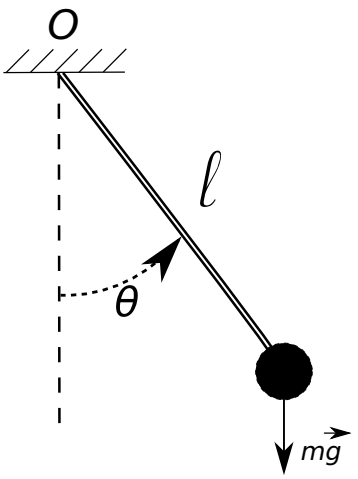


Figure 3.14 – Schéma du système pendulaire.

se référer au point fixe). Deux solutions sont possibles : $\theta_0 = 0$ et $\theta_0 = \pi$. Le premier point fixe correspond à la situation où la masse est en bas, tandis que le second se rapporte à la position où la masse pointe vers le haut. Intuitivement, le premier point fixe est stable, tandis que le second est instable. La dynamique d'un tel système est triviale en présence de dissipation : quel que soit l'état initial, l'état final est le point fixe $\theta_0 = 0$.

3.4.2 Pendule simple en présence d'une nouvelle force extérieure

Nous rajoutons maintenant à ce pendule une force $\vec{f}$ additionnelle s'appliquant sur la masse (la force totale est maintenant $\vec{F} = \vec{p} + \vec{f}$). Cette force est d'amplitude donnée (constante) ; elle est de plus dirigée le long de la trajectoire décrite par la masse, c'est-à-dire, tangente au cercle décrit par la masse (voir figure 3.15) ; le moment de cette force est donc donné par $f\ell$. Incluons par ailleurs, une force de frottement de coefficient noté 2λ. Ce modèle de système peut être concrètement réalisé par un pendule auquel un petit moteur fournit un couple égal à $f\ell$ au niveau du point de suspension O. En prenant en compte ces nouveaux termes, l'équation du pendule devient :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) - \frac{f}{m\ell} = 0. \tag{3.20}$$

Une telle équation peut se déduire également de la loi de Newton. En effectuant le changement de variable suivant $t \to t\sqrt{\frac{g}{\ell}}$, et en posant $\mu = \lambda(\ell/g)^{1/2}$ et

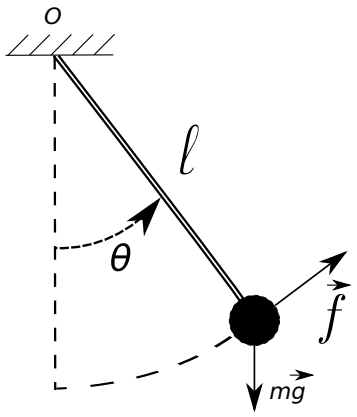


Figure 3.15 – Le pendule en présence d'une force $\vec{f}$ fournissant un couple.

$\nu = f/(mg)$, l'équation d'évolution[17] prend la forme :

$$\ddot{\theta} + 2\mu\dot{\theta} + \sin(\theta) - \nu = 0. \tag{3.21}$$

Les points fixes de l'équation d'évolution ainsi obtenue vérifient la relation $\sin(\theta_0) = \nu < 1$. Les valeurs de θ_0 sont données par :

$$\theta_0 = \arcsin(\nu) \equiv \Omega, \quad \theta_0 = \pi - \Omega. \tag{3.22}$$

Une vue schématique des solutions est représentée sur la figure 3.16. Le cas particulier où $\nu = 0$ correspond au pendule simple, et les deux solutions sont données par $\theta_0 = 0$ et $\theta_0 = \pi$. Le cas extrême est celui où $\nu = 1$: les deux solutions se confondent en $\theta_0 = \pi/2$. Puisque $0 < \nu < 1$, l'étude peut être restreinte au domaine $0 < \Omega < \pi/2$.

3.4.3 Stabilité linéaire

étudions à présent la stabilité linéaire des points fixes. À cet effet, ajoutons à l'état stationnaire θ_0, une petite perturbation θ_1 ($\theta = \theta_0 + \theta_1(t)$), et reportons cette expression de θ dans l'équation d'évolution du pendule (équation 3.21), en ne conservant que les termes linéaires en θ_1. En cherchant une solution de forme exponentielle $\theta_1 \sim e^{\omega t}$, nous obtenons l'équation suivante :

$$\omega^2 + 2\mu\omega \pm \cos(\Omega) = 0. \tag{3.23}$$

[17] Notons que l'opération $\theta \to -\theta$ équivaut à un changement de signe devant ν. C'est pourquoi il suffit de considérer le cas $\nu > 0$, celui où $\nu < 0$ s'en déduit en changeant θ en -θ dans les résultats finaux.

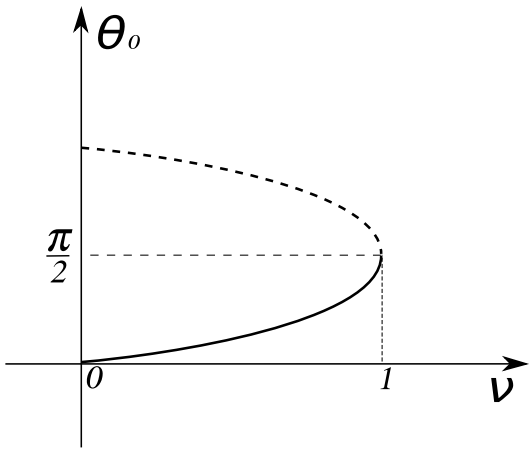


Figure 3.16 – Courbe de points fixes (courbe de bifurcation) du pendule en présence de la force $\vec{f}$.

Le signe « + » correspond au cas où $\theta_0 = \Omega$, et le signe « − » au cas où $\theta_0 = \pi - \Omega$. Les valeurs propres associées au premier point fixe sont données par

$$\omega_\pm = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \cos(\Omega)}. \tag{3.24}$$

Si la friction est assez forte[18], de telle sorte que $\mu^2 \gg \cos(\Omega)$, nous trouvons $\omega_+ \simeq -\cos(\Omega)/(2\mu^2) < 0$ et $\omega_- \simeq -2\mu < 0$. Autrement dit, les deux valeurs propres sont négatives, impliquant une décroissance exponentielle de θ_1 en fonction du temps ; ce point fixe est stable.

Un calcul similaire pour l'autre point fixe $\theta_0 = \pi - \Omega$ conduit à $\omega_+ = \cos(\Omega)/(2\mu^2) > 0$, et $\omega_- = -2\mu < 0$. Puisque $\omega_+ > 0$, θ_1 croît exponentiellement avec le temps t ; ce point fixe est instable. En comparant les diagrammes de bifurcation de ce système (voir figure 3.16) avec celui de la bifurcation fourche (voir figure 2.4), nous pouvons convenir d'une nette différence.

Pour la bifurcation fourche, les deux branches sont stables, bifurquant toutes les deux de l'état $A_0 = 0$ lorsqu'il devient instable pour $\epsilon > 0$. Pour cette nouvelle bifurcation, l'une des deux branches de solutions est stable et l'autre est instable, et elles cessent toutes les deux d'exister pour $\nu > 1$: les deux branches (stable et instable) s'annihilent lorsque $\nu = 1$. Il s'agit là d'un comportement qualitativement nouveau. Cette bifurcation est connue sous le nom de bifurcation *col-nœud*. Cette bifurcation fait partie de la famille « pli » des catastrophes.

[18] Cette hypothèse n'affecte pas la généralité des résultats, mais simplifie quelque peu l'algèbre.

3.4.4 Forme universelle de la bifurcation col-nœud

Au voisinage d'un point critique, la bifurcation acquiert un caractère universel. C'est pourquoi nous souhaitons analyser les équations dans ce voisinage.

Par convention, il est souvent indiqué d'effectuer un changement de variable préalable dont le but est simplement de ramener le point critique à la valeur usuelle de référence $\theta_0 = 0$ (et non $\pi/2$), pour se conformer à l'usage courant qui prévaut dans les sciences non linéaires. Nous posons donc $\theta = \pi/2 + \psi$, et l'équation d'évolution du pendule (équation 3.21) devient :

$$2\mu\dot{\psi} + \cos(\psi) - \nu = 0, \tag{3.25}$$

où nous avons anticipé que, proche du point critique, $\ddot{\psi}$ devient petit[19] par rapport à $\dot{\psi}$. En outre, l'angle ψ est petit près du point de bifurcation, ce qui autorise un développement limité de l'équation du pendule (équation 3.25).À l'ordre dominant, nous obtenons l'équation d'évolution :

$$\dot{\psi} = \psi^2 - \epsilon, \tag{3.26}$$

où $\epsilon = 2(1-\nu) > 0$[20]. L'équation d'évolution 3.26 représente la forme générique d'une bifurcation col-nœud ; c'est l'équation d'amplitude.

Les deux points fixes sont $\psi = \pm\sqrt{\epsilon}$ et existent pour $\epsilon > 0$. On peut facilement vérifier que $\sqrt{\epsilon}$ est instable, tandis que $-\sqrt{\epsilon}$ est stable. Il suffit de réécrire l'équation sous forme potentielle :

$$\dot{\psi} = -\frac{dV}{d\psi}, \quad V = \epsilon\psi - \frac{\psi^3}{3}. \tag{3.27}$$

Pour $\epsilon > 0$, le potentiel $V(\psi)$ possède un minimum (solution stable), et un maximum (solution instable) (voir figure 3.17) ; pour $\epsilon = 0$ le minimum s'annihile avec le maximum pour donner lieu à un point d'inflexion horizontal. Pour $\epsilon < 0$, V ne possède aucun extremum indiquant la cessation d'existence de point fixe. Ces considérations retraduisent dans un autre langage les mêmes résultats obtenus dans le paragraphe précédent.

3.4.5 Origine de la dénomination col-nœud

Pour $\epsilon > 0$, nous avons vu ci-dessus que le potentiel $V(\psi)$ de la bifurcation col-nœud possède un minimum (voir figure 3.17) ; pour ce domaine de valeurs du paramère ϵ, le système dispose ainsi d'une solution stationnaire stable, vers lequel il tend au cours du temps t ($t \to \infty$), quelles que soient les conditions initiales du système. Ainsi, une reformulation imagée consiste à énoncer que cette solution stationnaire « attire » toutes les trajectoires d'où, dans ce contexte, la dénomination « nœud » pour le minimum du potentiel $V(\psi)$.

[19] Voir le raisonnement justifiant cette approximation dans le chapitre 2, lorsque l'élimination adiabatique a été traitée.

[20] Rappelons que la bifurcation correspond à $\nu = 1$ et donc ϵ est petit dans ce voisinage.

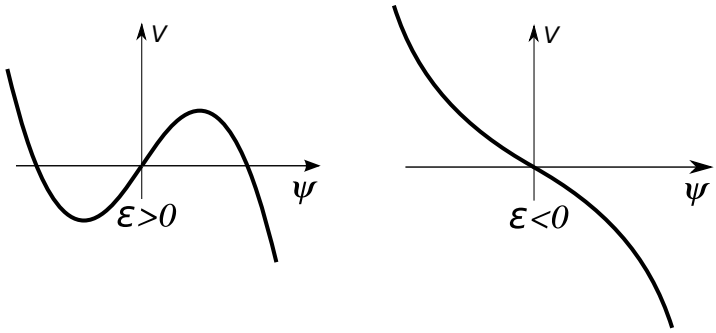


Figure 3.17 – Évolution du potentiel pour une bifurcation col-nœud.

Dans cette même plage de paramètre ($\epsilon > 0$) et lorsque le système est dans une configuration correspondant au maximum du potentiel (voir figure 3.17), la solution stationnaire correspondante est instable, et toute condition initiale proche de ce point projette le système dans le puits de potentiel voisin pour une convergence vers l'état stable. L'usage du terme « col » s'associe en fait à la présence implicite d'un *point selle* du potentiel, point selle caractérisé par la présence d'un maximum dans la direction ψ de l'espace de phase et d'un minimum dans l'autre direction à laquelle nous accédons explicitement lorsque nous étudions la stabilité du système au second ordre.

En effet dans cette étude, en nous limitant à l'étude temporelle linéaire (étude au premier ordre), nous nous sommes focalisés sur la variable dynamique ψ donnant lieu à une bifurcation. La variable ψ définit ainsi le premier degré de liberté du système et décrit un espace des phases à une dimension. Mais cette limitation au premier ordre occulte la présence du mode toujours stable[21] obtenu en poursuivant l'étude de la stabilité au seconde ordre. En conservant la dérivée temporelle seconde dans le problème (étude au second ordre), le mode stable apparaît explicitement et introduit la seconde variable dynamique du système (espace des phases de dimension 2) ; comme le système est toujours stable vis-à-vis de cette variable, le potentiel est toujours minimal vis-à-vis de cette variable.

Étudions maintenant explicitement, l'évolution temporelle du système en incluant les deux variables dynamiques. Développée à l'ordre le plus bas, l'équation d'évolution du mode stable, noté ψ_s, est du type : $\dot{\psi}_s = -\psi_s$, correspondant à une solution de relaxation (exponentielle décroissante au cours de temps). Nous pouvons ainsi étendre l'étude de la dynamique à deux degrés de liberté,

[21] Voir la discussion sur la notion d'élimination adiabatique de modes stables dans le paragraphe 2.3.3.

pour obtenir le système à deux équations suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_s &= -\psi_s \\ \dot{\psi} &= \psi^2 - \epsilon. \end{aligned} \tag{3.28}$$

En introduisant le vecteur d'amplitude $\mathbf{A} = (\psi_\mathbf{s}, \psi)$, l'équation d'évolution du système s'écrit sous une forme condensée (amplitude vecteur dérivant d'un potentiel scalaire) :

$$\dot{\mathbf{A}} = -\nabla V(\psi_s, \psi) \tag{3.29}$$

avec le potentiel défini comme :

$$V = \frac{\psi_s^2}{2} + \epsilon\psi - \frac{\psi^3}{3}. \tag{3.30}$$

L'opérateur gradient ∇ a pour composantes ∂_{ψ_s} et ∂_ψ. L'analyse du potentiel V montre que lorsque le paramètre tend vers 0 ($\epsilon \to 0$), il existe un minimum dans les deux directions (ψ et ψ_s) autour du point fixe stable, et un point col (ou selle) autour du point fixe instable. Lorsque $\epsilon = 0$, les deux points, col et nœud, fusionnent.

Image simple de la bifurcation col-nœud du pendule forcé

Sans avoir recours aux équations, nous nous proposons maintenant d'analyser la stabilité et l'instabilité des points fixes de la dynamique du pendule forcé en se fondant sur un raisonnement de type géométrique.

La dynamique du système atteint un point fixe lorsque les deux forces en présence s'équilibrent l'une l'autre ; c'est-à-dire, lorsque la projection du poids $\mathbf{p} = m\mathbf{g}$ le long de la trajectoire et la force constante $\mathbf{f}$, par définition tangente au mouvement, sont d'égale amplitude mais de signe contraire (soit, $p_t = -\mathbf{f}$, avec p_t la projection du poids $\mathbf{p}$). Cette situation se réalise pour deux points d'équilibre, l'un stable et l'autre instable (voir figure 3.18) ; le premier point fixe est défini par l'angle du pendule avec l'axe vertical $\theta = \theta_0$ et le second par l'angle $\theta = \pi - \theta_0$. En déplaçant la masse en θ_0' au-delà de la valeur θ_0 (voir figure de droite 3.19), la projection du poids p_t excède la force $\mathbf{f}$ fixée ($|\mathbf{p}_t| > |\mathbf{f}|$) ; ce qui suscite un effet de rappel de la masse vers sa position d'équilibre initiale stable θ_0. Nous obtenons la même solution d'équilibre stable en θ_0, lorsque la masse est déplacée en $\theta_0' < \theta_0$ (voir figure 3.20) ; dans ce cas de figure, la force $\mathbf{f}$ l'emporte sur la projection du poids ($|\mathbf{f}| > |\mathbf{p}_t|$) et exerce ainsi une force de rappel vers la position initiale d'équilibre stable θ_0.

Le second point fixe, situé en $\theta = \pi - \theta_0$, est instable : une déviation vers le haut de la masse en $\theta = \theta'$ (voir figure 3.21), conduit cette fois-ci à une plus faible valeur du poids projeté p_t ($|\mathbf{f}| > |\mathbf{p}_t|$) : la force $\mathbf{f}$ excède toujours en module le poids projeté, ce qui a pour conséquence d'éloigner toujours plus loin la masse de sa position initiale. La masse effectue une trajectoire dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et rejoint la position stable (après

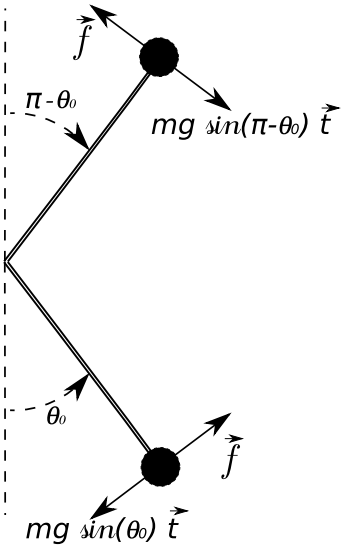


Figure 3.18 – Schéma montrant deux positions d'équilibre possibles, $\mathbf{t}$ est le vecteur unité tangent à la trajectoire.

dissipation de son énergie par friction[22]). Une déviation de la masse vers le bas en θ'' inverse la situation : le poids projeté $\mathbf{p}_t$ excède la force $\mathbf{f}$ ($|\mathbf{p}_t| > |\mathbf{f}|$), et entraîne la masse dans un mouvement allant dans le sens des aiguilles d'une montre vers le point d'équilibre stable (voir figure 3.22).

3.4.6 Mouvement de bascule ou de *tumbling*

Lorsque le module du poids est égal à celui de la force $\mathbf{f}$, le paramètre $\nu = f/mg$ est égal à l'unité ($\nu = 1$ et $f = mg$) ; les deux solutions, stable et instable, coïncident ; la dynamique du système converge en un point fixe tel que $\theta = \pi/2$. Si la force f augmente, alors le paramètre ν excède l'unité ($\nu > 1$) ; les deux points fixes cessent d'exister, le système n'a plus aucune solution d'équilibre possible. La force $\vec{f}$ l'emporte maintenant devant le poids, et fera tourner en permanence la masse m dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Ce mouvement est appelé *mouvement de bascule* ou *tumbling* en anglais.

Nous pouvons résoudre exactement l'équation d'évolution du pendule au voisinage du point critique (équation 3.26) pour obtenir la solution :

[22]Sans friction aucune et en vertu du principe d'inertie, le mouvement continuerait perpétuellement.

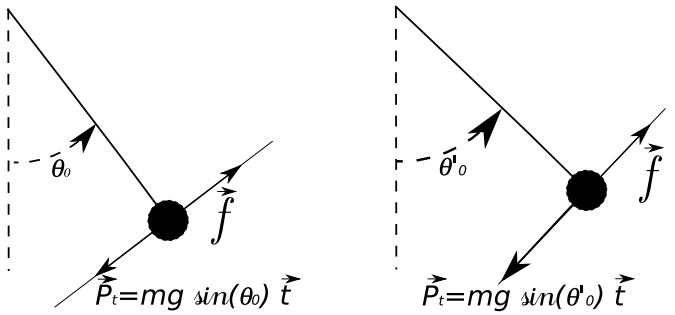


Figure 3.19 – Schéma montrant la stabilité du point fixe. Si la masse remonte, l'angle θ_0 devient θ'_0 (à droite), le poids rappelle la masse vers la position initiale.

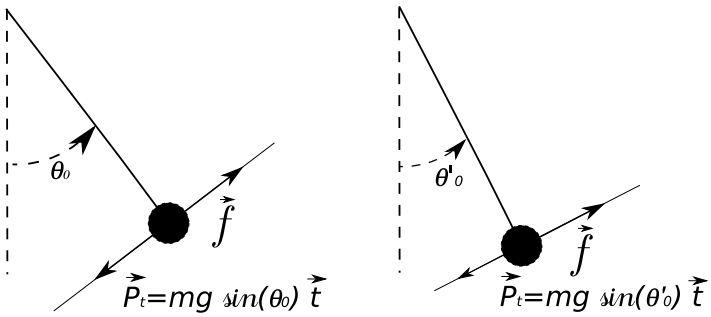


Figure 3.20 – Schéma montrant la stabilité du point fixe. Si l'angle initial θ_0 diminue et devient θ'_0, la force f rappelle la masse vers la position initiale.

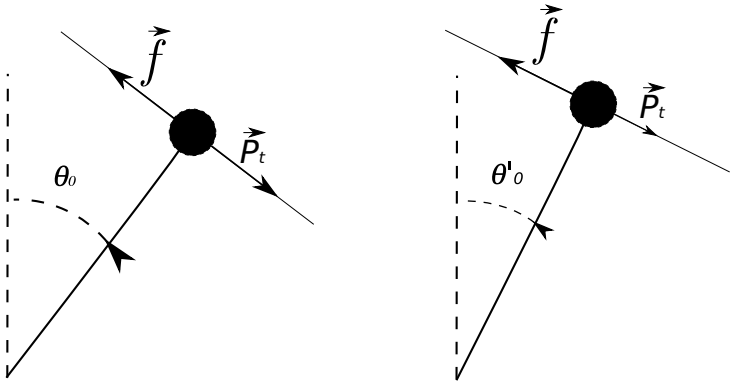


Figure 3.21 – Schéma montrant l'instabilité du point fixe. Si la masse remonte (θ_0 devient θ'_0), la force f l'emporte, et la masse s'éloigne. Elle fera le tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

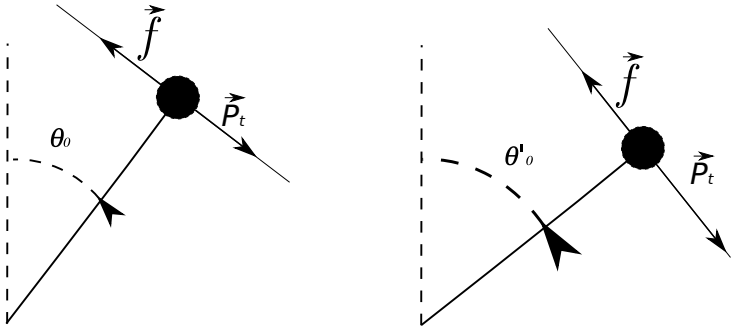


Figure 3.22 – Schéma montrant l'instabilité du point fixe. Si la masse descend (θ_0 devient θ'_0), le poids l'emporte, et la masse s'éloigne en descendant dans le sens des aiguilles d'une montre.

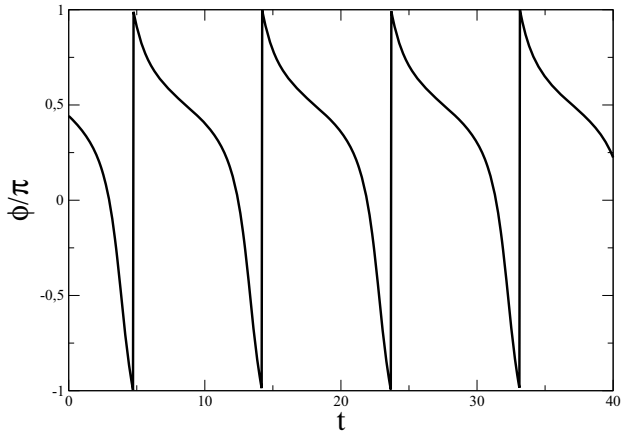


Figure 3.23 – Comportement de l'angle $\theta(t)$ dans le régime *tumbling*.

$$\psi\,(t) = -\sqrt{\epsilon}\tanh\left[\sqrt{\epsilon}(t + C_1)\right] \tag{3.31}$$

où C_1 est une constante d'intégration fixée par la condition initiale. Cette solution tend à l'infini ($t \to \infty$) vers la solution stable $\psi = -\sqrt{\epsilon}$. Cette équation, valide au voisinage du point critique, ne permet pas de mettre en évidence le mouvement de bascule. Il nous faut recourir à l'équation complète non développée (équation 3.21). En supposant que le terme de friction est suffisamment important pour s'affranchir de l'inertie du système, nous pouvons négliger la dérivée seconde temporelle de la variable angulaire ψ ($\ddot{\psi} \to 0$). Après avoir effectué un changement de variable t pour s'affranchir d'un facteur constant 2μ, nous obtenons une équation d'évolution du pendule :

$$\dot{\theta} + \sin(\theta) - \nu = 0\,. \tag{3.32}$$

La solution de cette équation :

$$\theta\,(t) = -2\,\arctan\left(\frac{\tan\left[1/2\,t\sqrt{\nu^2-1} + 1/2\;C_1\,\sqrt{\nu^2-1}\right]\sqrt{\nu^2-1} - 1}{\nu}\right)\,. \tag{3.33}$$

correspond à un mouvement certes périodique mais qui est loin de ressembler au mouvement sinuosïdal du pendule simple (voir figure 3.23).

3.4.7 Digressions vers la biologie

Bascule du globule rouge Le modèle mécanique simple du pendule forcé est, par ailleurs, tout à fait pertinent pour décrire également certains comportements dynamiques en biologie, notamment celui des globules rouges, les composants cellulaires majoritaires de notre sang. Lors de la circulation du sang au sein d'un vaisseau sanguin (artère, veine...[23]), les globules rouges sont soumis à un écoulement de cisaillement. En effet, la vitesse de l'écoulement varie, à l'échelle du globule, quasi-linéairement avec la distance à la paroi du vaisseau sanguin. Ainsi, les deux extrémités d'un globule rouge sont soumises à des vitesses d'amplitude différente ce qui induit l'existence d'un couple hydrodynamique tendant à le faire tourner, ou basculer[24], sur lui-même. Ainsi l'énergie de l'écoulement est en partie transmise aux globules, ce qui va à l'encontre de la circulation du globule avec le flot. Or, ces derniers évitent le basculement s'ils transmettent cette énergie à la membrane liquide qui les entourent et qui a la propriété de pouvoir coulisser comme un chenille de char (ou une chaîne de vélo). Un globule échappe ainsi au retournement sur lui-même, s'il arrive à transférer suffisamment d'énergie à sa membrane. Dans cette hypothèse, le globule s'oriente dans le flot en gardant un angle fixe (un point fixe) comme dans le cas du pendule forcé à l'équilibre ; ce résultat découle de l'équilibre entre le flot qui tend à le faire tourner et le mouvement de chenille de la membrane qui s'y oppose.

Cependant, le mouvement de chenille de la membrane entraîne avec lui le liquide interne du globule rouge, l'hémoglobine, dont la fonction est de fixer l'oxygène. Si la viscosité interne du globule augmente, comme cela se produit *in vivo* pour les personnes atteintes d'une pathologie connue sous le nom d'anémie falciforme par exemple, le mouvement de chenille de la membrane tend à se réduire, car la membrane du globule doit entraîner un liquide interne devenu trop visqueux. Il existe une viscosité interne critique au-delà de laquelle le mouvement de la membrane de type chenille de char devient trop coûteux sur le plan énergétique, et le globule exécute alors un mouvement de bascule en bloc.

Des expériences menées en laboratoire permettent de visualiser le comportement dynamique de tels objets (voir figure 3.24) et de montrer en effet que l'angle d'orientation adoptée par les globules est similaire à celui adopté par le pendule forcé (figure 3.23 ; voir la référence [49].)

Ainsi, dans des conditions standard biologiques, et même si les mécanismes biophysiques mis en jeu dans l'évolution d'un globule sont plus complexes que la mécanique d'un pendule, la dynamique du globule rouge obéit à la même équation d'évolution d'un pendule forcé (équation 3.21 ; pour un développement

[23] Dans les gros vaisseaux l'écoulement est assez agité – dit non laminaire –. Dans les petites veines les écoulements sont laminaires et la notion de cisaillement simple est facile à imaginer.

[24] La bascule du globule est davantage favorisée si celui-ci est moins gonflé qu'un globule normal. En effet, un globule moins gonflé s'allonge davantage sous l'effet du cisaillement, ce qui entraîne un couple de force plus important et donc une disposition plus grande au retournement.

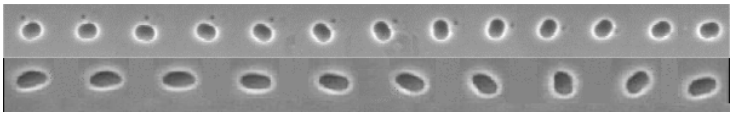


Figure 3.24 – Photos montrant le comportement à différents instants successifs d'un système de deux globules modèles (deux liposomes géants fabriqués au laboratoire) effectuant chacun un mouvement de *tumbling*. Un globule rouge présente le même type de mouvement. Image extraite de la référence [49]

plus détaillé, voir la référence [66].).

3.5 Définition d'une bifurcation

Quelle est la définition d'une bifurcation ? Sur un plan historique, ce terme est certainement ancien et, dans un sens commun, signifie une croisée de chemins et donc un changement de trajectoire par rapport à la trajectoire initiale. Sur un plan mathématique, le scientifique français Henri Poincaré (1854-1912) a, le premier semble-t-il, caractérisé les propriétés d'une bifurcation. Dans ce contexte, le terme « bifurcation » se réfère à un changement qualitatif du comportement d'un système ; ce changement qualitatif, par définition, doit modifier le nombre et la nature, stable ou instable, de solutions suite à une variation d'un paramètre, noté ϵ dans les exemples rencontrés ici. Au point de bifurcation, les branches de solutions s'annihilent, naissent, perdent leur stabilité ou au contraire la gagnent.

Insistons sur le fait que tous les changements de comportement d'un système ne fournissent pas nécessairement des points de bifurcation, le changement doit être « qualitatif » au sens défini plus haut pour introduire des bifurcations de solutions. Illustrons maintenant, par un exemple, un système soumis à un changement « non qualitatif » du comportement de ses solutions et pour lequel l'existence d'un point fixe n'introduit pas un point de bifurcation. Le système satisfaisant à l'équation d'évolution :

$$\dot{A} = \epsilon - A^5 \tag{3.34}$$

présente un tel exemple, bien que sa forme paraisse symptomatique d'une bifurcation. À première vue, l'équation d'évolution du système (équation 3.34) présente, en effet, de fortes similarités, avec les équations d'évolution de la bifurcation imparfaite (voir équation 3.34 et de la bifurcation col-nœud (voir équation 3.26). Or, si l'équation d'évolution 3.34 présente bel et bien un point fixe, la solution $A_0 = \epsilon^{1/5}$, une rapide analyse permet de mettre en évidence que ce point fixe est unique, et qu'il existe toujours ! Ainsi, la variation du paramètre ϵ ne change ni le nombre de solutions ni la stabilité et donc ne modifie pas le changement qualitatif du comportement du système (voir figure 3.25) : ce système ne présente pas de bifurcation.

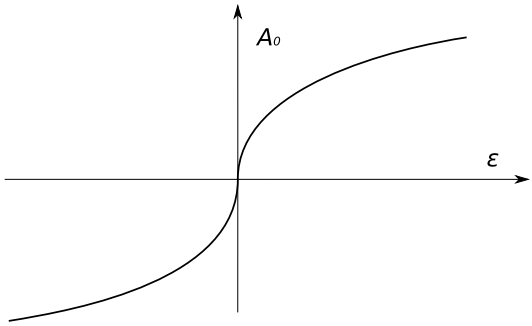


Figure 3.25 – Branche de point fixe de l'équation (3.34).

À l'aide de cet exemple, nous percevons que le sens de « changement qualitatif de solutions » que recouvre le terme « bifurcation » est en fait très précis. Un cadre formel de la théorie des bifurcations a d'ailleurs été développé : la théorie des catastrophes (voir section suivante).

3.6 Théorie des catastrophes et stabilité structurelle

En 1972, le mathématicien français René Fréderic Thom (1923-2002), fondateur de la théorie des catastrophes, publie un ouvrage destiné au grand public averti. Ce traité, intitulé *Stabilité structurelle et morphogenèse. Essai d'une théorie générale des modèles* (voir référence [75]), est devenu désormais un classique des bibliothèques notamment scientifiques ; il présente, de manière très intuitive, un cadre mathématique permettant d'associer à toute apparence morphologique, un système dynamique qui l'engendre. Le théorème fondamental de cette théorie énonce l'existence de sept catastrophes élémentaires ; à chacune d'elle est associé un ensemble de catastrophes, représenté morphologiquement par une surface. Ainsi, les formes « naturelles » peuvent être en général reconstituées par combinaison de ces catastrophes élémentaires ; la théorie des catastrophes constitue ainsi la première tentative pour formaliser, dans le domaine de la topologie différentielle, les problèmes de stabilité structurelle de toute morphologie ; elle a pour but de construire le modèle dynamique continu le plus simple pouvant engendrer une morphologie ou un ensemble de phénomènes discontinus.

Lors de l'élaboration d'un modèle scientifique, si la *stabilité structurelle* du modèle est implicitement un élément naturellement important de l'étude, il est bien rare d'y penser dans un cadre mathématique précis pour évaluer quantitativement cette notion. Les modèles proposés par les scientifiques ont pour objectif de reproduire un aspect des systèmes réels en négligeant certains

effets supposés ne pas être pertinents dans le cadre d'une étude de phénomènes spécifiques. La complexité de la réalité est ainsi réduite afin de pouvoir décrire les phénomènes étudiés à l'aide d'un nombre réduit de paramètres. Toute la légétimité de cette approche repose sur l'hypothèse que les effets négligés ne portent pas préjudices aux conclusions qualitatives du modèle.

Ainsi, dans un contexte théorique, si notre objectif est d'étudier le mouvement d'une planète, la Terre par exemple, nous pouvons raisonnablement en première approximation considérer le problème à deux corps, la Terre et le Soleil, en négligeant la présence de tous les autres corps du système solaire pour obtenir une trajectoire elliptique de la Terre autour du Soleil. La prise en compte de l'interaction de la Terre avec un autre corps du système solaire modifie éventuellement à court terme (échelle géologique) la trajectoire de la Terre sur un plan quantitatif, mais pas sur un plan qualitatif : le modèle est alors qualifié de *structurellement stable*.

La stabilité structurelle des modèles est une exigence analogue à celle qui est requise lors d'une expérimentation : l'expérimentateur s'attend à obtenir des résultats similaires lorsque les conditions expérimentales sont à peu près semblables. Sans cette stabilité des résultats expérimentaux, aucune étude expérimentale ne pourrait être significative.

3.6.1 Quelle différence entre stabilité structurelle et stabilité dynamique ?

L'étude de la stabilité structurelle d'un modèle est d'une nature fondamentalement différente de l'étude de la stabilité dynamique (stabilité temporelle) des solutions d'un système.

Le premier cas porte sur l'étude de la stabilité du modèle en lui-même et consiste à répondre à la question suivante : est-ce qu'une modification légère des ingrédients du modèle conserve les mêmes résultats qualitatifs, c'est-à-dire est-ce que le modèle modifié possède les mêmes types de solutions (si elles existent) ? Dans l'affirmative, le modèle est dit structurellement stable.

Le second cas consiste à déterminer l'influence d'une petite perturbation sur la stabilité d'une solution du modèle. Si la solution se maintient au cours du temps, la perturbation décroît dans le temps, et la solution est dite linéairement stable. En revanche, si la solution s'éloigne de l'état initial non perturbé, la perturbation croît avec le temps et la solution est instable.

3.6.2 Stabilité structurelle et subjectivité

En sciences non linéaires, l'étude d'un système s'illustre à l'aide d'un diagramme de bifurcation représentant les solutions A d'une équation d'amplitude d'un système dynamique en fonction d'un paramètre ϵ (voir par exemple le diagramme de la bifurcation fourche représentée sur la figure 2.4). L'étude de la stabilité structurelle d'une bifurcation consiste à évaluer les conséquences

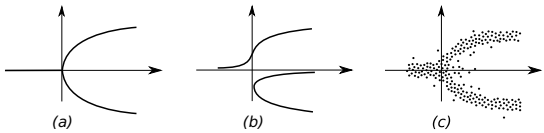


Figure 3.26 – (a) Bifurcation fourche. (b) Bifurcation imparfaite. (c) Représentation schématique de résultats expérimentaux entachés d'incertitude.

d'une perturbation infinitésimale du modèle, donc une perturbation de l'équation d'amplitude, sur la forme du diagramme de bifurcation. Ainsi, lorsque nous étudions la bifurcation imparfaite dans la section 3.1, nous testons la stabilité structurelle de la bifurcation fourche. En effet, la bifurcation imparfaite, voir diagramme de bifurcation 3.5, représente l'ensemble des solutions de l'équation d'amplitude (équation 3.5) issue de l'introduction d'un terme d'imperfection ν (avec ν arbitrairement petit) dans l'équation d'amplitude de la bifurcation fourche (équation 2.26). Or, les diagrammes des bifurcations fourche et imparfaite (figures 2.4 et 3.5) sont qualitativement différents. Le modèle du système dynamique (ici, un ressort) conduisant à la bifurcation fourche est structurellement instable. Sur le plan mathématique, cette assertion ne fait aucun doute, car le changement qualitatif est décrit de manière précise.

Si la notion de stabilité structurelle est parfaitement définie et non ambiguë dans un plan mathématique formel, elle appelle certaines remarques lorsqu'elle est évoquée dans une approche de type expérimental. Par exemple, le diagramme de bifurcation d'un modèle expérimental (voir figure 3.26c) est typique d'une expérience réelle inévitablement entachée d'erreurs de mesure ou de faibles biais. Les modèles théoriques de bifurcation fourche ou de bifurcation imparfaite (voir figures 3.26a et 3.26b) seraient *a priori* de bons candidats pour représenter le résultat expérimental, sans que nous disposions pour autant de critères pour départager les deux modèles. Ainsi, le choix d'un modèle pour décrire la bifurcation obtenue expérimentalement paraît quelque peu subjectif. Cette indétermination obtenue dans un contexte expérimental est irréductible à la démarche expérimentale ; elle ne doit pas pour autant occulter la nécessité d'une classification rigoureuse des bifurcations et c'est cette classification qui est obtenue dans le cadre approprié de la théorie des catastrophes.

3.7 En quoi consiste la théorie des catastrophes ?

Avant d'aborder plus en détail cette notion au chapitre suivant, nous allons d'abord l'introduire brièvement, puis l'illustrer à l'aide d'un exemple qui nous est déjà familier.À la différence de l'étude des bifurcations en termes d'évolution des solutions représentées dans un diagramme de bifurcation (voir par exemple, la bifurcation imparfaite dans le diagramme de bifurcation 3.5 représentant

l'évolution de la variable interne d'amplitude A en fonction du paramètre externe de contrôle ϵ), la théorie des catastrophes étudie le changement qualitatif de comportement des solutions dans le seul espace des paramètres de contrôle. La théorie des catastrophes s'appuie sur la notion de stabilité structurelle pour déterminer les formes génériques des différents types de changement de comportement.

Il faut préciser, cependant, que cette théorie utilise un postulat de base qui peut paraître, à première vue, restrictif : elle suppose que la dynamique du système est de nature potentielle, autrement dit, que l'évolution temporelle de la variable étudiée dérive d'un potentiel ; cette condition se formule par une équation d'évolution spécifique de type : $\dot{A} = -\partial V(A)/\partial A$, où V est le potentiel. Cette condition est en fait moins restrictive qu'il n'y paraît ; car, même si la dynamique d'un système ne dérive pas complètement d'un potentiel, il est possible que la variable qui présente le plus d'intérêt dans la description du système, souscrive pour sa part à une dynamique qui dérive d'un potentiel. Nous allons en découvrir plusieurs exemples dans les pages qui suivent.

3.7.1 Illustration de la théorie des catastrophes

Illustrons maintenant avec l'approche de la théorie des catastrophes un exemple déjà traité précédemment à l'aide du diagramme de bifurcation.

Nous avons vu dans l'étude de la bifurcation de la section 2.3.5, que l'équation d'évolution associée (équation 2.26) dérive d'un potentiel $V = -\epsilon A^2/2 + A^4/4$. En effectuant des changements de variables adéquats pour s'affranchir des facteurs constants ($A \to \sqrt{2}A$ et $\epsilon \to -\epsilon$), nous pouvons réécrire ce potentiel sous la forme conventionnelle de la théorie des catastrophes comme :

$$V(A) = \epsilon A^2 + A^4. \tag{3.35}$$

Adoptons, par la suite, les notations suivantes $\partial V/\partial A \equiv V'$ et $\partial^2 V/\partial A^2 \equiv V''$. Les points fixes de la dynamique sont par définition obtenus lorsque la solution n'évolue plus dans le temps ; lorsque l'équation d'amplitude dérive d'un potentiel, les points fixes correspondent aux maxima du potentiel $V(A)$, soit lorsque $V' = 0$. À partir de l'équation d'amplitude précédente (équation 3.35), nous obtenons les solutions stationnaires suivantes : $A_0 = 0$ et $A_\pm = \pm\sqrt{\epsilon/2}$ si $\epsilon > 0$; lorsque le paramètre ϵ est nul, les trois points fixes de la dynamique sont identiques, il y a donc dégénérescence des solutions ($A = 0$ est une solution triple). Un point fixe de la dynamique définit de plus un point de bifurcation, lorsque le potentiel change de concavité, donc lorsque la dérivée seconde du potentiel $V'' = \Delta$ change de signe, ce qui se produit lorsque Δ s'annule, soit lorsque : $V'' = \Delta = 12A^2 + 2\epsilon = 12A^2 + 2\epsilon = 0$.

Ajoutons maintenant à ce potentiel (équation 3.35) le terme νA, avec ν le paramètre d'imperfection :

$$V = \nu A + \epsilon A^2 + A^4. \tag{3.36}$$

Les points fixes satisfont donc à la condition suivante :

$$V' = \nu + 2A\epsilon + 4A^3 = 0. \tag{3.37}$$

Ce potentiel (équation 3.36), introduit lors de l'étude de la bifurcation imparfaite (voir chapitre 3), est manifestement très semblable au potentiel de la bifurcation fourche (équation 3.35) ; d'autant plus semblable d'ailleurs, que le paramètre d'imperfection ν est petit. Et pourtant, comme il a été déjà souligné, ces deux potentiels sont qualitativement différents (voir figure 3.27, la représentation graphique de ces deux potentiels). Au point critique ($V' = 0$), nous pouvons en effet visualiser sur la figure 3.27 que, d'une façon générale, la concavité du potentiel modifié (V'') ne s'annule pas, au contraire de celle du potentiel initial. Le potentiel modifié, incluant donc le terme d'imperfection νA (avec $\nu \neq 0$), est donc plus robuste, car il ne subit pas de changement qualitatif suite à une petite perturbation ; en effet, la concavité du potentiel modifié définie par

$$V'' = \Delta = 2\epsilon + 12A^2 \tag{3.38}$$

ne s'annule pas nécessairement lorsque le paramètre ϵ s'annule ($\epsilon = 0$).

Ainsi, en admettant que nous soyons confronté à un potentiel $V(A)$ (par exemple, le potentiel 3.35) dont la dérivée seconde s'annule ($\Delta = 0$) en un point fixe donné $V' = 0$, nous pouvons toujours rendre ce potentiel arbitrairement robuste, c'est-à-dire trouver des fonctions arbitrairement proches de ce potentiel (i.e. voir le potentiel modifié décrit par l'équation 3.36 dans l'exemple ci-avant) et tel que pourtant, la valeur de la dérivée seconde du potentiel soit non nulle ($\Delta \neq 0$ pour $\epsilon = 0$) au point fixe $V' = 0$. Autrement dit, à un potentiel « fragile » $V(A)$ (par exemple, le potentiel 3.35) dont la dérivée seconde s'annule ($\Delta = 0$) en un point fixe donné $V' = 0$, nous pouvons toujours lui associer un potentiel robuste (i.e., le potentiel modifié équation 3.36 dans l'exemple ci-avant) en lui adjoignant un terme arbitraitement petit (terme d'imperfection νA dans l'exemple ci-avant).

Mais, et c'est le point crucial de cette étude, même si ce potentiel semble robuste (par définition d'un potentiel robuste : $\Delta \neq 0$ pour $\epsilon = 0$), il n'est pas infaillible pour autant ! Il existe toujours un jeu de paramètres (ici ϵ et ν), pour lequel les deux conditions $V'' = 0$ et $V' = 0$ sont satisfaites[25]. L'une des deux équations détermine la valeur du point fixe $V' = 0$, et l'autre équation $V'' = 0$ fixe une relation entre les paramètres ϵ et ν. Cette relation définit une frontière, ici une ligne, délimitant deux domaines dans l'espace des paramètres (ϵ, ν). Dans chacun des domaines, les solutions sont qualitativement différentes ; la traversée de cette frontière correspond à une *catastrophe*. Autrement dit, traverser cette frontière équivaut à changer brusquement le nombre ou la nature des solutions. À chaque catastrophe est donc associée une figure géométrique associée aux frontières délimitant les différents domaines de

[25] Notons que plus le problème inclut de paramètres, et plus il est facile d'obtenir un tel jeu de paramètres. Notons tout de même que le nombre de paramètres de contrôle peut toujours être réduit en adoptant un adimensionnement approprié des équations du problème.

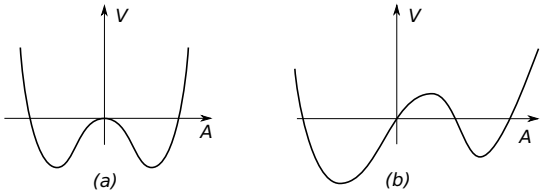


Figure 3.27 – (a) Potentiel $V = \epsilon A^2 + A^4$. (b) Potentiel $V = \nu A + \epsilon A^2 + A^4$. Ici on a pris $\epsilon < 0$ et $\nu > 0$. Au voisinage de $A = 0$, les deux potentiels sont qualitativement différents.

l'espace des paramètres ; cette figure géométrique définit la « signature », ou « portait », de la catastrophe.

Le portrait d'une catastrophe dans l'espace des paramètres fixe donc les frontières délimitant les régions de changement qualitatif des solutions d'un modèle de système. Or, et c'est le second point important de cette étude, le « nombre de paramètres de contrôle indépendants » (variables externes) pour un système donné détermine *in fine* le nombre de catastrophes possibles ; et ce résultat est indépendant du nombre de variables internes (degrés de liberté du sytème), lequel peut même être infini. Par exemple, lorsque le nombre de paramètres de contrôle indépendants d'un système est inférieur où égal à quatre, seules sept catastrophes distinctes peuvent se produire : il s'agit des *sept catastrophes élémentaires* ; au-delà de 4 paramètres de contrôle, le problème se complexifie et son traitement se situe en dehors du cadre de cet ouvrage. À l'inverse, l'existence d'un seul paramètre de contrôle peut être à l'origine d'une série riche en catastrophes ; par exemple, l'étude des écoulements fluides permet d'introduire le nombre adimensionnel de Reynolds, représentant le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses ; ce seul paramètre permet pourtant de caractériser la nature du régime dans lequel cet écoulement se situe : soit laminaire, transitoire ou turbulent.

Précisons maintenant la forme mathématique de la frontière de la catastrophe associée, par exemple, au potentiel modifié (équation 3.36) traité précédemment. Les deux conditions $V' = 0$ (équation 3.37) et $V'' = 0$ (équation 3.37) permettent d'obtenir la relation suivante :

$$\Delta \equiv 8\epsilon^3 + 27\nu^2 = 0. \tag{3.39}$$

L'équation cubique 3.37 possède une ou trois solutions réelles en fonction du signe de la concavité du potentiel $V'' = \Delta$. Si la concavité est négative ($\Delta \leq 0$), il existe trois solutions réelles ; en revanche, il n'existe qu'une seule solution réelle, si la concavité est positive ($\Delta > 0$), alors que lorsque la concavité s'annule ($\Delta = 0$), deux parmi les trois solutions se confondent[26]. La condition

[26] Dans le cas particulier où les deux paramètres de contrôle sont nuls $\epsilon = \nu = 0$, la solution

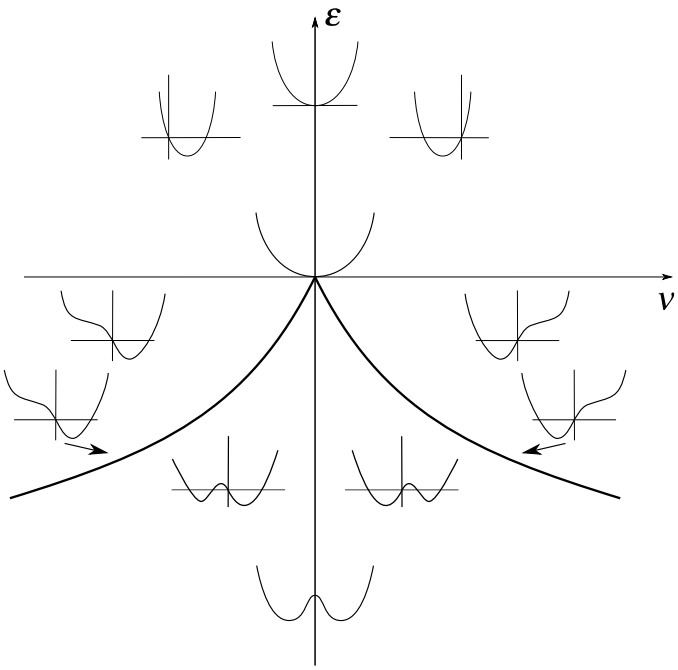


Figure 3.28 – La catastrophe *cusp* et la forme du potentiel dans chacune des régions.

de concavité nulle $\Delta = 0$ définit la frontière de la catastrophe dans l'espace des paramètres (voir figure 3.28) ; cette frontière délimite différents domaines associés à des formes différentes du potentiel.

Cette ligne de catastrophe, tracée dans l'espace des paramètres (voir figure 3.28) et associée au potentiel modifié (équation 3.36), présente un point remarquable : un point de rebroussement (point anguleux) en ($\nu = 0$, $\epsilon = 0$) et dénommé *cusp* en anglais. C'est pourquoi cette catastrophe porte le nom de catastrophe *cusp* (soit catastrophe fronce), terminologie anglo-saxonne utilisée même dans un contexte francophone (notamment dans cet ouvrage). Le portrait de la catastrophe *cusp* délimite deux zones (voir figure 3.28) ; la première située au-dessus de la ligne traçant la frontière de cette catastrophe, le potentiel V possède un extremum (un minimum), et à l'intérieur il en possède 3 (2 minima, et un maximum). Au point *cusp* ($\nu = 0$ et $\epsilon = 0$), les 3 extremas du potentiel se confondent. En effet, en ce point, le potentiel est de la forme : $V = A^4$ (voir équation 3.36), la solution d'amplitude nulle $A = 0$ est donc triplement dégénérée puisque la dérivée du potentiel est simplement $V' = 4A^3$. Nous pouvons noter que, de plus, le potentiel définit un point d'inflexion pour

devient triplement dégénérée.

la solution $A = 0$ ($V'' = 12A^2 = 0$) et que la dérivée troisième est également nulle en ce point $V''' = 24A = 0$. Autrement dit, c'est au niveau du point *cusp*, que le potentiel est le plus « fragile », donc le plus structurellement instable. Ainsi, retenons que les catastrophes dans l'espace des paramètres définissent précisément les lieux où le potentiel perd sa stabilité structurelle. La catastrophe *cusp* est susceptible d'intervenir dans de nombreux modèles de systèmes non linéaires. En effet, quel que que soit le potentiel associé, le modèle est potentiellement candidat à la catastrophe de type *cusp*, dès que celui-ci dispose d'au moins deux paramètres de contrôle.

3.8 Stabilité structurelle avec un nombre infini d'exceptions : les lieux des catastrophes !

En achevant la lecture de ce chapitre, nous pourrions avoir le sentiment d'être parvenu à un certain paradoxe. En effet, nous étions précédemment parvenus à la conclusion que la description pertinente d'un phénomène repose sur la nécessité d'élaborer un modèle structurellement stable. Pour un phénomène qui peut être abordé par un modèle dérivant d'un potentiel, cette nécessité s'incarne par l'exigence d'un potentiel échappant aux changements de courbure ($V'' \neq 0$)[27].

Or, dans la section précédente, nous avons vu qu'il est, en fait, impossible d'échapper à de telles situations (i.e. d'éviter $V'' = 0$), dès lors que le modèle introduit des paramètres de contrôle, puisque nous avons établi que leur existence permet éventuellement d'annuler les dérivées première et seconde du potentiel par un jeu de valeurs particulières ; le seul fait que des paramètres de contrôle interviennent induit donc des situations de perte de stabilité structurelle du potentiel. Cette conclusion tendrait donc à conclure – un peu hâtivement – qu'il n'existe ainsi aucun modèle pertinent pour des phénomènes non linéaires.

Pour s'abstraire de ce paradoxe apparent, il suffit de nuancer le propos pour un modèle non linéaire, en renonçant à l'exigence d'une stabilité structurelle au sens absolu. Ainsi le modèle du potentiel modifié (équation 3.36) est structurellement stable sauf pour les points situés le long de la ligne traçant la catastrophe *cusp* (voir figure 3.28) ; le modèle est ainsi « presque » structurellement stable. La qualification « presque stable » pour un modèle non linéaire signifie dans ce contexte « avec éventuellement un nombre infini d'exceptions », qui se répartissent justement au niveau des points (ou des courbes ou des surfaces) de catastrophe, lieux caractérisés par une courbure nulle du potentiel $V'' = 0$. Autrement dit, nous admettons qu'il peut exister un nombre infini d'exceptions au regard de la stabilité structurelle d'un modèle sans complètement remettre en question la stabilité structurelle du modèle[28]. La présence de

[27] Rappelons que lorsque la dérivée seconde du potentiel s'annule ($V'' = 0$), le modèle n'est pas structurellement stable puisque toute fonction arbitrairement proche du potentiel V induit un comportement qualitatif différent des solutions.

[28] Pour se sensibiliser à la portée du terme « presque », procédons à une analogie et con-

catastrophes est en fait indissociable des systèmes décrits par des équations non linéaires comportant des paramètres de contrôle. Une stratégie pour tenter d'y échapper, et de garantir ainsi au mieux la stabilité structurelle du modèle, est de réduire les domaines de variation des paramètres, autant que possible. Mais naturellement, une pauvre connaissance du système, et même une absence de modèle quantitatif (comme, par exemple, la plupart des systèmes biologiques) sont autant de difficultés qui rendent la stratégie difficile à adopter !

Il n'en reste pas moins que l'irruption de changements brusques, dans le contexte de modèles décrits par un potentiel ne présentant *a priori* aucun accident (voir équations 3.35 et 3.36 qui décrivent un potentiel sous la forme d'une fonction analytique, ici un polynôme, donc sans singularité), demeure un phénomène remarquable, voire mystérieux pour celui ou celle qui l'aborde pour la première fois. Ces changement brusques de comportements obtenus par la variation des paramètres ont lieu à travers la ligne (ou surface) des catastrophes. Ayant étudié l'exemple de la catastrophe *cusp* en détail, nous sommes maintenant en mesure de présenter une classification systématique des catastrophes élémentaires : c'est l'objet du prochain chapitre.

3.9 Problèmes

3.9.1 Problème : le plateau de Maxwell

Montrer que la ligne $\epsilon = \epsilon^*$ dans le diagramme de bifurcation (voir figure 3.29) correspond au Plateau de Maxwell connu dans les problèmes de transition de phases.

Solution : La coexistence des solutions stables et métastables (solutions bistables) correspond à $V(A_2) = V(A_0)$, où A_0 et A_2 représentent les amplitudes des deux solutions stable et métastable en coexistence. Nous pouvons également réécrire cette égalité comme $V(A_2) - V(A_0) = 0$ et l'interpréter comme le résultat d'une intégration de la différentielle totale du potentiel dV entre les deux états 0 et 2 correspondant aux solutions stationnaires A_0 et A_2, soit :

$$\int_{(0)}^{(2)} dV = 0. \tag{3.40}$$

Compte tenu de son développement (voir équation 3.6), le potentiel $V(A, \epsilon)$ est une fonction de deux variables. Nous pouvons ainsi exprimer la différentielle du potentiel dV en fonction de ses dérivées partielles, soit : $dV = (\partial V/\partial A)dA + (\partial V/\partial \epsilon)d\epsilon$. Comme dV est une différentielle totale, nous pouvons choisir le chemin d'intégration ; nous optons ici pour le chemin décomposé en quatre tronçons (a, b), (b, c), (c, d) et (d, e), tous situés sur la courbe des points fixes (voir figure 3.29), le long de laquelle,

sidérons les points du plan (O, x, y). Ils sont en nombre infini ; de même que l'axe Ox contient un nombre infini de points ; mais le rapport entre le nombre de points sur l'axe et ceux du plan est très petit ! Admettons qu'une variable, par exemple la température, associée à chaque point du plan soit égale à 100 degrés Celsius à l'exception des points situés le long de l'axe (Ox) où la température est nulle, nous pourrions énoncer que le plan est globalement « chaud », sans se tromper vraiment. Le seul axe horizontal, même comprenant une infinité de points n'est pas représentatif de l'état du plan (O, x, y).

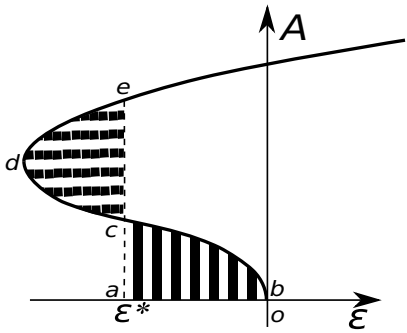


Figure 3.29 – Construction de Maxwell : la droite $\epsilon = \epsilon^*$ coupe la courbe des amplitudes des solutions stationnaires en deux régions ayant la même aire (l'aire hachurée verticalement est égale à l'aire hachurée horizontalement).

par définition, la dérivée partielle du potentiel par rapport à l'amplitude est nulle ($\partial V/\partial A = 0$). Par ailleurs, le potentiel est linéaire en ϵ, compte tenu de son expression (voir équation 3.6), la dérivée partielle du potentielle par rapport à ϵ est égale à l'amplitude A ($\partial V/\partial \epsilon = A$). En outre, le long du tronçon (a, b), l'amplitude A est partout nulle ($A = 0$). Ces résultats nous conduisent à décomposer l'intégrale de la différentielle du potentiel (voir équation 3.40) pour obtenir la relation suivante :

$$-\int_b^c A d\epsilon = \int_c^d A d\epsilon + \int_d^e A d\epsilon \tag{3.41}$$

qui correspond, pour le terme situé à gauche de l'égalité, à l'aire délimitée par la droite $\epsilon = \epsilon^*$, l'axe des amplitudes nulles et la courbe de l'amplitude A_1 (aire hachuré verticalement sur la figure 3.29) et, pour le terme situé à droite de l'égalité, à l'aire délimitée par la courbe d'amplitude A_1 et la droite $\epsilon = \epsilon'$ (aire hachurée sur la figure 3.29). Nous retrouvons ici la règle de construction de J. C. Maxwell, connue pour les problèmes de transition de phases (exemple : transition liquide-gaz).

3.9.2 Problème : exemple d'une bifurcation sous-critique

Nous allons maintenant décrire un exemple de système mécanique à l'origine d'une bifurcation sous-critique[29] ; considérons une masse solidaire d'une articulation à l'interface de deux ressorts identiques horizontaux fixés aux extrémités externes ; l'articulation entre les deux ressorts autorise la masse à se déplacer verticalement (voir figure 3.30) ; soit k la constante de raideur, ℓ_0 la longueur au repos des ressorts, ℓ la longueur imposée des ressorts à l'horizontal (la situation $\ell > \ell_0$ correspond à un étirement des ressorts, la situation $\ell < \ell_0$ correspond à une compression des ressorts) et ℓ' est la longueur des ressorts dans une configuration quelconque du système lorsque

[29] Je remercie ici chaleureusement Olivier Pierre-Louis pour la suggestion de ce système dont l'exemplarité est remarquable.

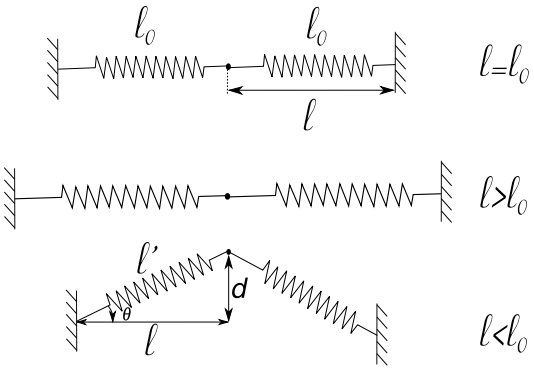


Figure 3.30 – Schéma du système considéré. (a) Ressort au repos. (b) Ressort étiré imposant à la masse de rester sur la ligne horizontale. (c) Ressort comprimé, et la masse peut s'écarter de l'horizontale relâchant ainsi une partie de la compression.

la position de la masse se démarque de l'axe horizontal ($\ell' = \ell$, lorsque la masse est située sur l'axe horizontal). L'énergie potentielle du système est donnée par la somme de l'énergie potentielle élastique des deux ressorts ($2k/2(\ell' - \ell_0)^2$) et de l'énergie de courbure de l'articulation entre les deux ressorts ($K \sin^2(\theta)/2$, où K représente [30] est la rigidité de courbure de l'articulation et θ l'angle entre l'axe horizontal et l'axe des ressorts dans une configuration quelconque (voir figure 3.30) ; cette énergie est nulle en $\theta = 0$. L'énergie totale E_T du système s'écrit donc :

$$E_T = \frac{K}{2}\sin^2(\theta) + k(\ell' - \ell_0)^2. \tag{3.42}$$

maximale en $\theta = \pi/2$.

En posant $x = d/\ell$, où d est la distance par rapport à l'axe horizontal (voir figure 3.30), l'énergie totale s'exprime comme :

$$E_T = \frac{K}{2}\frac{x^2}{1+x^2} + k[\ell\sqrt{1+x^2} - \ell_0]^2 \ . \tag{3.43}$$

Étudions maintenant cette fonction au voisinage de la bifurcation : en anticipant que $x = 0$ est un point fixe du système, effectuons un développement de Taylor autour de ce point $x = 0$. En développant cette énergie totale à l'ordre 4, nous obtenons :

$$E_T = [K + 2k\ell(\ell - \ell_0)]\frac{x^2}{2} + [k\ell\ell_0 - 2K]\frac{x^4}{4} \tag{3.44}$$

où nous avons omis la constante $k(\ell - \ell_0)^2$, indépendante de x puisque ℓ et ℓ_0 sont deux paramètres du système. En $x = 0$, le signe de la courbure de l'énergie totale est donné par $d^2E_T/dx^2 = K + 2k\ell(\ell - \ell_0) = 2k[K/2k + \ell(\ell - \ell_0)] = 2k\Delta$, avec

$$\Delta = \alpha + \ell^2 - \ell\ell_0, \quad \alpha = \frac{K}{2k} \tag{3.45}$$

[30] N.B. Attention à la dimension de la constante de rigidité K : $[K] = L^2.M.T^{-2}$ différente de celle de la constante de raideur k, $[k] = M.T^{-2}$.

où le paramètre α mesure le rapport entre énergie de courbure et énergie de raideur du ressort.

Si le facteur Δ est positif, l'énergie totale E_T possède un minium en $x = 0$, ce qui correspond à un point fixe stable. Ce point fixe devient instable pour Δ négatif. La condition $\Delta = 0$ est satisfaite pour une valeur critique l_c de la longueur horizontale l du ressort telle que :

$$\ell_c = \frac{\ell_0 + \sqrt{\ell_0^2 - 4\alpha}}{2}. \tag{3.46}$$

Il existe une deuxième valeur critique ℓ'_c : $\ell'_c = [\ell_0 - \sqrt{\ell_0^2 - 4\alpha}]/2 < \ell_c$.

Supposons dans un premier temps que le ressort soit étiré ($\ell > \ell_0$) et étudions l'évolution de l'énergie totale E_T du système en fonction de la décroissance du paramètre ℓ jusqu'à ce que ce paramètre atteigne la valeur critique $\ell = \ell_c$ correspondant au premier changement de courbure de l'énergie.

Pour assurer que la longueur ℓ_c demeure une quantité réelle, il est nécessaire d'imposer la condition suivante : $\alpha < \ell_0^2/4$, ce qui signifie physiquement que le coût en énergie de courbure ne doit pas être trop important pour que le point fixe $x = 0$ puisse, de fait, devenir instable ; cette condition se comprend intuitivement : si le coût en énergie de flexion est trop important, la masse ne dévie pas de l'horizontale.

La courbure de l'énergie est négative, $\Delta < 0$, lorsque la longueur du ressort projetée à l'horizontale ℓ est inférieure à la valeur critique ℓ_c ($\ell < \ell_c$) ; dans ce cas, l'énergie change de courbure (le minimum devient le maximum) : la masse dévie de l'horizontale. Pour déterminer la nouvelle position d'équilibre de la masse, il faut étudier l'effet du terme en x^4. Au voisinage du point critique ($\ell \simeq \ell_c$), le coefficient noté C_4 du terme en x^4 est donné par :

$$C_4 = \frac{k\ell_0^2}{2}[1 + \sqrt{1 - \bar{\alpha}} - 2\bar{\alpha}], \tag{3.47}$$

avec $\bar{\alpha} \equiv 4\alpha/\ell_0^2$. L'étude du signe du coefficient C_4 définit différents domaines pour le paramètre $\bar{\alpha}$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_4 > 0, & 0 < \bar{\alpha} < \frac{3}{4} \\ C_4 < 0, & \frac{3}{4} < \bar{\alpha} < 1 \end{array} \right\}. \tag{3.48}$$

Lorsque le coefficient C_4 est positif, le terme en x^4, obtenu lors du développement de Taylor de l'énergie totale au voisinage de la bifurcation $x = 0$ (voir équation 3.44), conduit à la saturation de l'instabilité : la masse évolue vers une nouvelle position d'équilibre, ce qui définit le cas d'une bifurcation fourche (ou sur-critique). Notons qu'il existe une valeur de $\bar{\alpha}$ qui annule le coefficient C_4 ($\bar{\alpha} = 3/4$) ; ce point particulier est parfois appelé *point de Lifschitz*.

Lorsque le coefficient C_4 est négatif, le terme en x^4 renforce l'instabilité, ce qui définit une situation d'une bifurcation sous-critique. Pour déterminer le statut du système, il est alors nécessaire de poursuivre le développement de l'énergie totale E_T à l'ordre suivant, c'est-à-dire à l'ordre 6, pour obtenir le coefficient C_6 du terme en x^6. En se plaçant à proximité du paramètre critique $\ell \simeq \ell_c$, nous obtenons :

$$C_6 = \frac{k\ell_0^2}{8}\left[2\bar{\alpha} - \frac{1 + \sqrt{1 - \bar{\alpha}}}{2}\right], \tag{3.49}$$

où ℓ a été remplacé par ℓ_c. L'analyse du signe du coefficient C_6 permet d'établir :

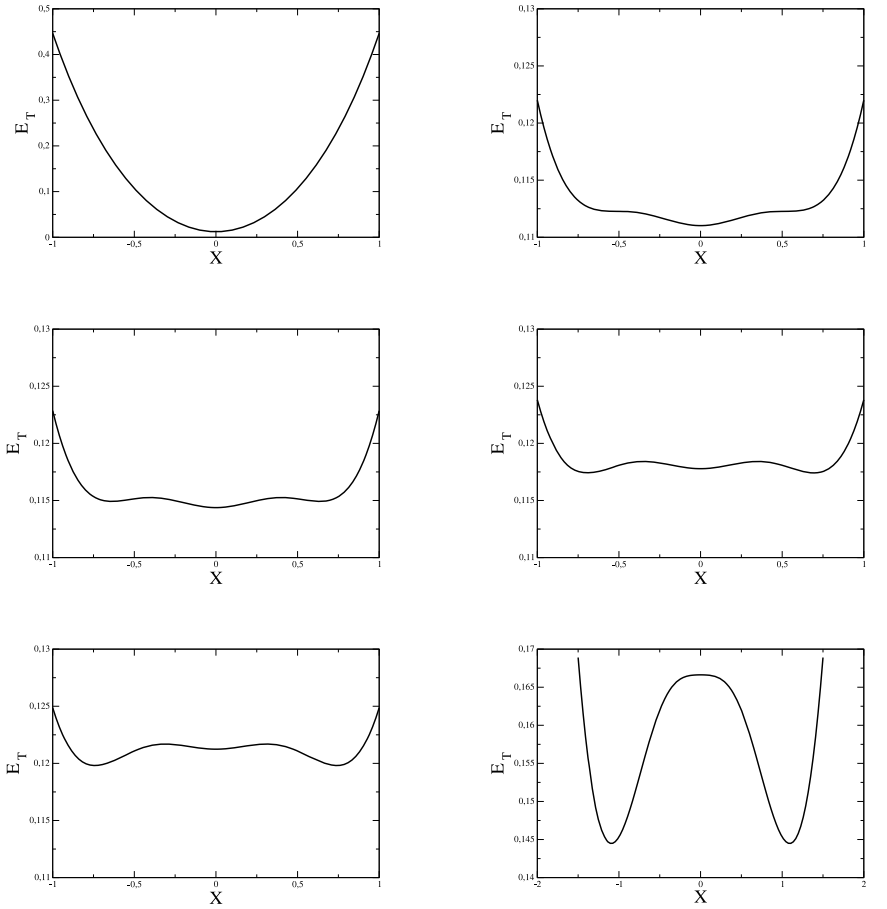


Figure 3.31 – L'énergie totale (Eq. 3.43) en fonction de x pour différentes valeurs de $\ell - \ell_c$ (qui est proportionnelle à ϵ, mesurant l'écart par rapport au seuil de l'instabilité linéaire). De gauche à droite, on a choisi les valeurs suivantes pour $\ell - \ell_c$: 0,5 ; 0,055 ; 0,05 ; 0,045 ; 0,04 ; -0,02. On a fixé $\ell_0 = 1$, et $\bar{\alpha} = 0,95$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_6 < 0, & 0 < \bar{\alpha} < \frac{7}{16} \\ C_6 > 0, & \frac{7}{16} < \bar{\alpha} < 1 \end{array} \right\}. \tag{3.50}$$

Ainsi, les conditions sur le paramètre $\bar{\alpha}$ induisant un coefficient C_4 négatif garantissent en revanche un coefficient C_6 positif ($C_4 < 0$ et $C_6 > 0$), ainsi l'effet du terme en x^6 s'oppose aux effets des termes en x^2 et en x^4 pour assurer une saturation de l'instabilité (voir la figure 3.31 illustrant l'allure de l'énergie potentielle du système contraint à une bifurcation sous-critique (c'est-à-dire que $C_4 < 0$) pour différentes valeurs de ℓ).

En poursuivant la diminution du paramètre ℓ, on finit par croiser la valeur critique ℓ'_c ; la quantité Δ change alors de signe, et la solution en $x = 0$ redevient stable. Physiquement, ce résultat s'interprète de la façon suivante : lorsque ℓ devient petit, et pour un même écart vertical fixé de la masse par rapport à $x = 0$, l'angle de flexion correspondant est plus grand ; il faut donc dépenser davantage d'énergie pour mouvoir la masse hors de l'axe horizontal. Éventuellement, lorsque ℓ devient trop petit, le coût en énergie de flexion devient trop excessif et la masse reste sur l'axe horizontal (stabilité de $x = 0$).

3.9.3 Problème : bifurcation sous-critique imparfaite

Considérons l'équation d'amplitude suivante qui introduit un terme d'imperfection ν qui brise la symétrie droite/gauche du système :

$$\frac{dA}{d\tau} = \epsilon A + A^3 - A^5 + \nu. \tag{3.51}$$

Discutez la forme du diagramme de bifurcation en fonction du paramètre ϵ. Considérez les deux signes possibles du terme d'imperfection $\nu > 0$ et $\nu < 0$ (voir la figure 3.32, qui comporte des résultats partiels afin de guider l'analyse).

3.9.4 Problème : Euler et le film de savon

Considérons un film de savon tendu par deux anneaux (voir figure 3.33). Nous nous proposons, dans cette section, d'obtenir la forme d'équilibre adoptée par le film de savon. Cette dernière est contrainte par la présence des deux anneaux aux extrémités et se déploie tout en minimisant l'énergie de surface $F = \int \gamma dS$, où γ est la densité d'énergie de surface (énergie par unité de surface) et dS est la surface élémentaire. En supposant que la densité d'énergie de surface est constante, nous obtenons une expression pour l'énergie F :

$$F = \gamma \int dS. \tag{3.52}$$

Minimiser l'énergie de surface F revient ainsi à minimiser l'aire $S = \int dS$ du film de savon.

Or, l'aire de la surface élémentaire dS (en hachuré sur la figure 3.33) est donnée par $dS = 2\pi r ds$, dans le système de coordonnées curvilignes, où r est le rayon du cercle à la hauteur z et ds est l'abscisse curviligne telle qu'indiquée sur la figure 3.33 ; en adoptant le système de coordonnées cylindriques, nous pouvons également exprimer l'aire dS comme : $dS = 2\pi r\sqrt{dr^2 + dz^2}$, avec dz la hauteur élémentaire.

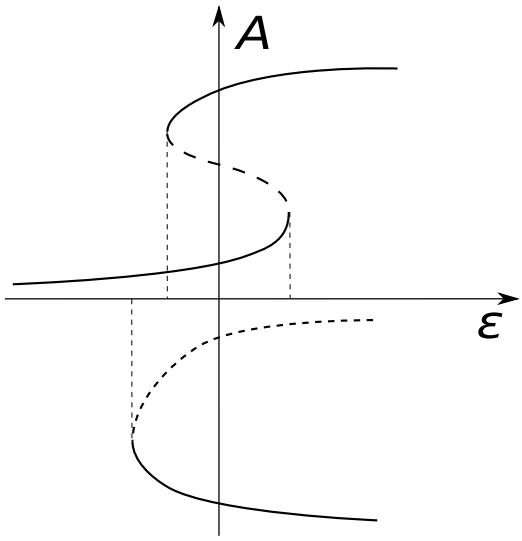


Figure 3.32 – Diagramme de la bifurcation sous-critique imparfaite pour un signe donné de ν (à determiner).

L'aire totale est donc donnée par une intégrale :

$$S = \int dS = 2\pi \int_h^h r\sqrt{r'^2+1}\, dz \equiv \int_{-h}^h f(r,r')dz, \tag{3.53}$$

où nous avons opté pour une notation allégée, en posant $r' = dr/dz$ et $f(r,r') = 2\pi r\sqrt{r'^2+1}$. Ainsi, minimiser la surface du film de savon S revient à rechercher les fonctions $r(z)$ qui définissent les extrema de la surface S.

L'aire du film de savon S est une fonctionnelle, puiqu'elle est fonction de la fonction $r(z)$. La recherche d'un minimum de l'aire S, ou plus généralement de l'énergie de surface F, est un problème analogue à la recherche du minimum de l'action en mécanique lagrangienne [31].

D'une façon générale, la condition d'obtention d'un extremum de l'énergie $F = \int f(r,r',z)dz$, pour une fonctionnelle quelconque $f(r,r',z)$, se formule selon l'équation dite d'Euler-Lagrange[32] :

[31] Le lagrangien $L = T - V$ d'un système dynamique, où T est l'énergie cinétique du système et V son énergie potentielle, est une fonction des variables dynamiques ; il permet de décrire de manière concise les équations du mouvement du système (mécanique lagrangienne) à partir de la condition de moindre action, l'action étant une fonctionnelle définie comme l'intégrale du lagrangien sur l'ensemble des variables. Son nom vient du scientifique italien Joseph Louis Lagrange (1736-1813), qui a établi les principes du procédé.

[32] Cette note mathématique décrit les principales étapes pour obtenir l'équation d'Euler-Lagrange à partir de la recherche d'un extremum d'une fonctionnelle (problème variationnel).

Soit $I = \int F(x, y(x), y'(x))$, une fonctionnelle de la fonction $y(x)$, avec $y'(x) \equiv dy/dx$. Recherchons l'extremum de la fonctionnelle I, autrement dit, recherchons la fonction $y(x)$

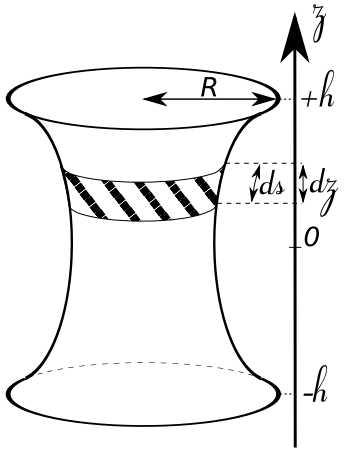


Figure 3.33 – Schéma de principe : un film de savon est coincé entre deux anneaux de rayon R.

$$\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{d}{dz}\frac{\partial f}{\partial r'} = 0. \tag{3.54}$$

La fonction f est une fonction de deux variables indépendantes entre elles r, r' ; par exemple, si $r(z) = z^2$, r' est indépendant de r, puisque $r' = dr/dz = 2z$. Par ailleurs, si la fonction f est une composition linéaire des deux variables $f = ar + br'$, avec a et b deux paramètres quelconques, annuler f quel que soit z, impose que les deux paramètres sont nuls $a = b = 0$, confirmant en ceci que les variables r et r' sont bien deux quantités indépendantes.

Comme la fonction f ne dépend pas explicitement de la variable z dans notre exemple, nous pouvons réécrire l'équation d'Euler-Lagrange[33] (équation 3.54) comme

qui rend extremum la fonctionnelle I, avec des conditions aux limites fixées au bord du domaine de définition de la fonction $y(x)$.

La variation de I vis-à-vis d'une variation de la fonction $y(x)$, s'écrit $\delta I = \int dx[(\partial F/\partial y)\delta y + (\partial F/\partial y')\delta y']$, avec $\delta y' = \delta(dy/dx)$. Attention à ne pas confondre l'action de la différentielle d/dx par rapport à la variable x et l'action de δ, laquelle se réfère à la variation par rapport à la fonction $y(x)$ (i.e. d/d(y(x)). Sous l'action de δ, x est simplement un paramètre fixe de la courbe. Nous pouvons donc intervertir les deux opérations, et écrire $\delta dy/dx = d(\delta y)/dx$.

Reportons cela dans l'expression de δI, et intégrons par parties, pour obtenir $\delta I = \int dx[\partial F/\partial y - (d/dx)(\partial F/\partial y')]\delta y$, où nous avons utilisé la condition : $\delta y = 0$ au bord de l'intervalle de l'intégration puisque nous avons supposé que $y(x)$ était fixée aux bords du domaine.

La recherche de l'extremum de I revient à annuler la variation première δI pour une variation δy petite mais arbitraire. Il s'ensuit que la fonction $y(x)$ vérifie l'équation suivante : $[\partial F/\partial y - (d/dx)(\partial F/\partial y')] = 0$, équation variationnelle dénommée équation d'Euler-Lagrange, ou encore équation d'Euler, du nom du scientifique suisse Leonhard Euler (1707-1783). Dans cette équation d'Euler, la quantité de gauche est appelée dérivée d'Euler-Lagrange, ou dérivée fonctionnelle, ou encore dérivée de Fréchet, du nom du mathématicien français Maurice René Fréchet (1873-1978). Il est d'usage d'utiliser pour cette dérivée la notation symbolique $\delta I/\delta y$.

[33] Puisque f ne dépend pas explicitement de z ($f = f(r, r')$), la différentielle de f s'écrit

suit :

$$f - r' \frac{\partial f}{\partial r'} = C, \tag{3.55}$$

où C est une constante d'intégration. En utilisant explicitement l'expression de la fonction $f(r, r')$ (voir équation 3.53, $f = 2\pi r\sqrt{1 + r'^2}$), nous obtenons :

$$r = a\sqrt{1 + r'^2}, \tag{3.56}$$

où on a posé $a = C/(2\pi)$. Puisque $r' = dr/dz$, nous avons :

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1}} = dz, \tag{3.57}$$

où nous reconnaissons la dérivée de la fonction cosinus hyperbolique. Ce qui permet d'obtenir finalement l'expression de la fonction $r(z)$ pour laquelle l'aire S est extremum :

$$r = a\cosh(\frac{z - b}{a}), \tag{3.58}$$

où b est une constante d'intégration et a une constante définie par : $a = 2\pi C$. Cette équation décrit la forme, dite caténaire, en forme de cosinus hyperbolique que prend un fil suspendu par ses extrémités et soumis à son propre poids. La forme de la surface obtenue par révolution de cette courbe caténaire $r(z)$ autour de l'axe de Oz est dite cathénoïde (voir la forme shématique représentée sur la figure 3.33).

En choisissant l'origine du système de coordonnées au centre de la cathénoïde se déployant entre $z = -h$ et $z = h$, nous nous affranchissons de la constante b ($b = 0$). Par ailleurs, la constante a est potentiellement déterminée à partir de l'équation de la caténaire (équation 3.58) en satisfaisant la condition limite fixée par l'anneau situé aux deux extrémités du film de savon : le rayon r du film à la hauteur h est égale au rayon R de l'anneau. En utilisant cette condition limite (soit $r(z = h) = R$) que nous injectons dans l'équation de la caténaire (équation 3.58), nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{R}{a} = \cosh(\frac{h}{a}) \, . \tag{3.59}$$

Mais, une telle équation en a n'a pas toujours de solution. Pour une hauteur h donnée, la solution à l'équation 3.59 n'existe qu'à la condition que le rayon R des anneaux soit compris dans un intervalle spécifique de valeurs. Ainsi, la variation du paramètre R contrôle l'existence d'une solution ou bien l'inexistence de solution. Ceci n'est pas sans nous rappeller le scénario de la bifurcation col-nœud.

En effectuant le changement de variable $a \to 1/\lambda$, nous obtenons à partir de la relation précédente (équation 3.59), l'équation suivante :

$$\lambda R = \cosh(h\lambda). \tag{3.60}$$

dont la solution n'existe que lorsque la droite $D(\lambda) = R\lambda$ de pente égale à R et la fonction hyperbolique $g(\lambda) = \cosh(h\lambda)$ s'intersectent (voir la figure 3.34, pour une résolution graphique). Qualitativement, il ne fait aucun doute que les deux courbes

comme : $df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial r'} dr'$, de telle sorte que $df/dz = \frac{\partial f}{\partial r} r' + \frac{\partial f}{\partial r'} r''$. Multiplions l'équation d'Euler-Lagrange (équation 3.54) par r', et utilisons l'expression ci-dessus de df/dz, pour aboutir à l'équation suivante : $d/dz[f - r' \frac{\partial f}{\partial r'}] = 0$. Une simple intégration de cette équation donne l'équation simplifiée d'Euler-Lagrange au cas où la fonctionnelle f est indépendante de z : $f - r' \frac{\partial f}{\partial r'} = C$, avec C une constante.

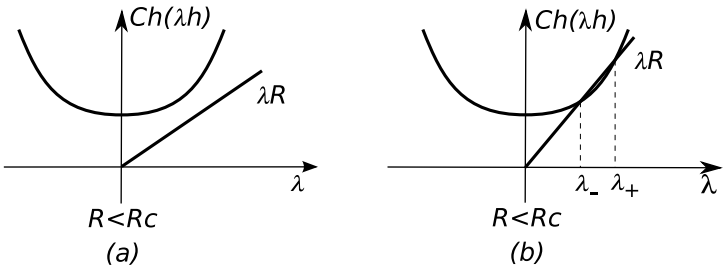


Figure 3.34 – Résolution qualitative de l'équation $\lambda R = cosh(h\lambda)$. (a) Cas où R est assez petit et il n'y a pas d'intersection. (b) Cas où R est assez grand. Il existe deux intersections, typiques de la bifurcation col-nœud.

ne peuvent se croiser lorsque R est trop petit (voir figure 3.34a). Lorsque R croît, il apparaît une valeur critique, R_c, où $R\lambda$ devient tangent à la fonction hyperbolique $\cosh(h\lambda)$; notons λ_c, l'abscisse du point tangent. Lorsque le rayon R est supérieur au rayon critique ($R > R_c$), nous obtenons deux points d'intersection et donc deux solutions (voir figure 3.34b) ; notons leurs abscisses λ_- et λ_+. Lorsque le rayon R est inférieur au rayon critique ($R < R_c$), les deux courbes ne s'intersectent pas, et le nombre de solutions passe ainsi brusquement de deux à zéro solutions.

Le point critique de coordonnées (R_c, λ_c) est défini par deux conditions analytiques, la première traduit la nécessité d'une intersection entre la droite $R\lambda$ et la fonction hyperbolique $\cosh(h\lambda)$, soit :

$$R_c\lambda_c = \cosh(h\lambda_c). \tag{3.61}$$

La seconde condition analytique est associée au fait qu'en ce point critique, la droite $R\lambda$ est de plus exactement tangente à la courbe hyperbolique $\cosh(h\lambda)$, autrement dit, la dérivée de la droite $dR\lambda/d\lambda = R$ est égale à la dérivée de la fonction hyperbolique $d\cosh(h\lambda)/d\lambda = h\sinh(h\lambda]$, d'où :

$$R_c = h\sinh(h\lambda_c)\ . \tag{3.62}$$

Effectuons un développement de Taylor au voisinage du point critique, au point de coordonnées $(R - R_c, \lambda - \lambda_c)$, pour obtenir à partir de l'équation (3.60) l'expression :

$$R - R_c = \frac{h^2 R_c}{2}(\lambda - \lambda_c)^2. \tag{3.63}$$

Cette équation n'a aucune solution, lorsque le rayon de l'anneau R est inférieur au rayon critique R_c ($R < R_c$). En revanche, lorsque le rayon de l'anneau R est supérieur au rayon critique R_c ($R > R_c$), nous obtenons deux solutions :

$$\lambda - \lambda_c = \pm\frac{\sqrt{2}}{h}\sqrt{\frac{R - R_c}{R_c}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a_c}\ . \tag{3.64}$$

En $R = R_c$, les deux solutions se confondent. Nous pouvons d'ores et déjà pressentir

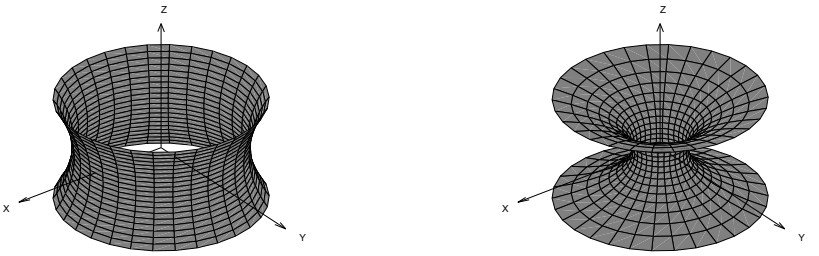


Figure 3.35 – La forme des deux solutions d'Euler. La forme de gauche (forme stable) a une plus faible aire que celle de droite (forme instable). Ici $\bar{R} = 1,9$, $\bar{\lambda} \simeq 0,636$ (à gauche) et $\bar{\lambda} \simeq 2,023$ (à droite).

qu'une des deux solutions est stable et l'autre est instable[34]. Pour s'en convaincre, procédons à une étude détaillée de la stabilité des solutions.

Pour étudier la stabilité des solutions et donc évaluer la valeur de l'énergie extrémale F_0, reprenons les expressions de l'énergie F (équation 3.52) et de l'aire totale S du film de savon (équation 3.53) dans laquelle nous avons explicitement introduit la fonction cathénaire $r(z)$ qui minimise l'énergie (équation 3.58), soit :

$$F_0 = 2\pi\gamma h^2 \left[\frac{\sinh(2\bar{\lambda})}{2\bar{\lambda}^2} + \frac{1}{\bar{\lambda}}\right], \tag{3.65}$$

où la variable a est normalisée par rapport à la hauteur h pour définir les variables $\bar{a}$ et $\bar{\lambda}$ ($\bar{a} = a/h$ et $\bar{\lambda} = \lambda h = h/a = 1/\bar{a}$).

À partir des deux conditions satisfaites au point critique (R_c, λ_c) (voir équations 3.61 et 3.62), nous obtenons l'expression de la variable $\bar{\lambda}_c$ évaluée au point critique :

$$\bar{\lambda}_c \tanh(\bar{\lambda}_c) = 1. \tag{3.66}$$

En résolvant cette équation numériquement, nous obtenons $\lambda_c \simeq 1,199$; en reportant cette valeur dans l'expression analytique traduisant la condition de l'existence d'un point tangent au point critique (équation 3.62), nous obtenons la valeur du rayon critique normalisé $\bar{R}_c$: $\bar{R}_c = R/h \simeq \sinh(1,199) \simeq 1,507$.

Les solutions n'existent que lorsque le rayon R est supérieur ou égal à cette valeur critique (voir équation 3.64). Ainsi, pour $R \simeq 1,6$, nous obtenons à partir de la condition d'existence d'une solution (équation 3.60), deux valeurs pour la variable $\bar{\lambda}$: $\bar{\lambda}_1 \simeq 1,577$ et $\bar{\lambda}_2 \simeq 0,887$. Reportons ces valeurs dans l'expression de l'énergie au point extremum (équation 3.65), nous obtenons

$$\frac{F_0(\bar{\lambda}_1)}{2\pi\gamma h^2} \simeq 2,985, \qquad \frac{F_0(\bar{\lambda}_2)}{2\pi\gamma h^2} \simeq 2,945, \tag{3.67}$$

[34] En effet, ce problème de la recherche de la forme optimale du film de savon fait intervenir, dans une première étape, des équations qui dérivent d'une énergie (d'un potentiel) et plus précisément, dans une seconde étape, la recherche des extremas de cette énergie. Au point critique, les deux extremas se confondent en un point unique, pour devenir un point d'inflexion qui correspond ainsi à la « rencontre » d'un maximum, associé à une solution instable, et d'un minimum, associé à une solution stable.

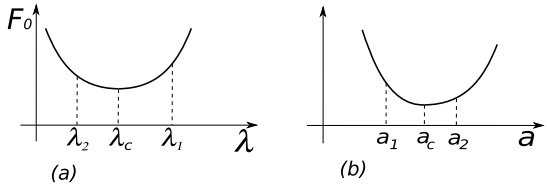


Figure 3.36 – L'énergie relaxée en fonction de $\bar{\lambda}$ (a) et en fonction de $\bar{a}$ (b).

La solution d'énergie minimale, donc la solution stable, est obtenue avec la plus petite valeur de $\bar{\lambda}$, soit $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_2$; la seconde solution, obtenue pour $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1$, correspond à une solution instable, puique F_0 est maximum. Nous pouvons constater que ce résultat correspond bien à la compréhension physique que nous pouvons avoir du problème : le profil stable pour le film de savon est associé à la forme d'aire minimale, et donc à un coût moindre en énergie de surface (voir figure 3.35, montrant les profils stable et instable du film de savon).

Étudions qualitativement la forme de l'énergie extrémale [35], F_0 (équation 3.65) en fonction de la variable $\bar{\lambda}$ (et $\bar{a}$, voir figure 3.36). Le minimum de l'énergie relaxée est obtenu au point de dégénérescence, c'est-à-dire lorsque le rayon normalisé $\bar{R}$ de l'anneau est égal au rayon normalisé critique ($\bar{R}_c$) ($\bar{R} = \bar{R}_c$) et pour la valeur critique de la variable $\bar{\lambda}$ ($\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_c$). Au point critique ($\lambda_c, R = R_c$), l'énergie vaut : $F_{0c} = 2\pi\gamma(R_c^2 + h^2)/(h\lambda_c)$. Pour $R < R_c$, il n'existe pas de forme minimale, donc pas de solution pour $R > R_c$, il existe deux solutions représentées par λ_1 et λ_2 (voir figure 3.36) ; et nous avons vu que λ_2 correspond à une plus faible énergie par rapport à λ_1.

Nous pouvons par ailleurs retrouver les résultats obtenus sur la stabilité des solutions, en procédant à une analyse un peu plus formelle ; il suffit pour cela de développer au troisième ordre l'énergie F_0 (équation (3.65) autour de la valeur critique $\delta\bar{a} = \bar{a} - \bar{a}_c$:

$$\frac{F_0}{2\pi\gamma h^2} = \frac{\bar{R}_c^2 + 1}{\bar{\lambda}_c} + \frac{\bar{R}_c^2}{\bar{a}_c^3}\delta\bar{a}^2 - \frac{2}{3}\frac{5\bar{R}_c^2 + 1}{\bar{a}_c^4}\delta\bar{a}^3, \tag{3.68}$$

où nous avons utilisé les deux conditions satisfaites au point critique (R_c, λ_c) (voir équations 3.61 et 3.62).

Compte tenu de l'expression de l'énergie au voisinage du point critique (équation 3.68), seul le terme au troisième ordre en $\delta\bar{a}$ permet de trancher sur la stabilité des solutions ; et puisque le signe préfacteur du terme en $\delta\bar{a}^3$ est négatif, le minimum de l'énergie correspond à $\delta\bar{a} > 0$ ($\bar{a} > bar_c$). L'énergie F est asymétrique : pour une variable $\bar{a}$ donnée telle que $\delta\bar{a} > 0$, la branche des solutions possède une énergie moindre par rapport à l'énergie en $-\bar{a}$ (voir figure 3.36).

Nous attirons l'attention sur le point suivant : nous aurions obtenu un résultat erroné en procédant à cette même analyse du développement de l'énergie relaxée au troisième ordre au voisinage du point critique, en utilisant la variable $\bar{\lambda}$ à la place

[35] Pour rappel, l'énergie extrémale F_0, dite énergie relaxée, est obtenue lorsque la fonction caténaire $r(z)$ qui minimise l'énergie (équation 3.58) est introduite dans l'expression de l'aire totale S du film de savon (équation 3.53) intervenant dans l'expression de l'énergie (équation 3.52).

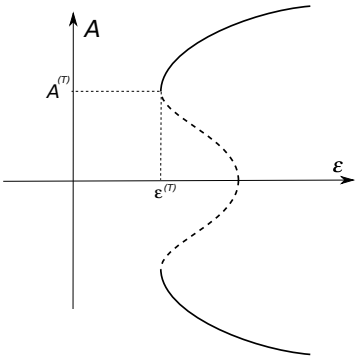


Figure 3.37 – La bifurcation sous-critique a la forme d'une bifurcation col-nœud au voisinage du point tournant de coordonnées $(\epsilon^{(T)}, A^{(T)})$.

de la variable $\bar{a}$. En effet, l'asymétrie de l'énergie relaxée F_0 ne se révèle qu'à l'ordre suivant lorsqu'elle est développée en $\bar{\lambda}$: la déviation par rapport à la parabole en termes de la variable $\bar{a}$ est notable même pour une variation $\delta\bar{a}$ faible ; alors que, une plus grande déviation $\delta\bar{\lambda}$ est nécessaire pour une même proportion d'asymétrie de F_0. Typiquement, $\delta\bar{\lambda}/\bar{\lambda}_c \sim 30$ % engendre une asymétrie de l'énergie relaxée F_0 de l'ordre de quelques pourcents. C'est pourquoi, le choix de la variable d'analyse est essentiel dans le choix de l'ordre du développement limité ; il est, par ailleurs, souvent important de vérifier si l'ordre suivant affecte ou non le résultat.

Finalement, insistons sur le fait que, en principe, la forme normale de la bifurcation col-nœud donnée par l'énergie relaxée développée au troisième ordre au voisinage du point critique (équation 3.68) n'est précisément valable que près du point critique ; néanmoins, en s'éloignant du point critique, le résultat qualitatif général est inchangé. Pour voir cela, il suffit de tracer la solution complète (équation 3.60), donnée par $\bar{R} = \cosh(\bar{\lambda})/\lambda$. En dehors de l'asymétrie entre les deux branches, qui peut s'amorcer même assez près du point critique, le comportement qualitatif global est inchangé, tant du point de vue du nombre de solutions, que de leur stabilité respective.

3.9.5 Problème : une bifurcation sous-critique possède une branche col-nœud

Montrer qu'au voisinage d'un point tournant T d'une bifurcation sous-critique (voir figure 3.37), l'équation d'amplitude est caractéristique d'une bifurcation col-nœud.

Solution : Appelons $A^{(T)}$ et $\epsilon^{(T)}$ les coordonnées du point tournant (voir figure 3.37). Posons $A = A^{(T)} + B$ et $\epsilon = \epsilon^{(T)} + \mu$. Développons l'équation d'amplitude sous-critique (équation 3.5) autour du point tournant à l'ordre dominant en B et μ ; nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{B} = \quad & \mu A^{(T)} + \epsilon^{(T)} A^{(T)} + A^{(T)3} - A^{(T)5} \\ & + B[\epsilon^{(T)} + 3A^{(T)2} - 5A^{(T)4}] + B^2[3A^{(T)} - 10A^{(T)3}]. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Comme le point tournant appartient à la branche des points fixes, nous avons $\epsilon^{(T)} A^{(T)} + A^{(T)3} - A^{(T)5} = 0$. Pour la valeur particulière de ϵ au point tournant, nous avons $\epsilon^{(T)} = -1/4$, ce qui fixe l'amplitude A en ce point : $A^{(T)} = 1/\sqrt{2}$ (voir équation 3.9 de la section 3.2) ; le préfacteur du terme linéaire en B s'annule donc, et l'équation pour l'amplitude B autour de A^T s'écrit finalement

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{B} = \frac{\mu}{2} - B^2. \tag{3.70}$$

Avec quelques redéfinitions mineures des variables, cette expression n'est autre que la forme normale de la bifurcation col-nœud (équation 3.26).

Chapitre 4

Classification des sept catastrophes élémentaires

Dans les chapitres précédents[1], plusieurs bifurcations ont été étudiées et nous les avons associées, mais sans développer, à une famille particulière de catastrophes ; ainsi les bifurcations fourches – aussi bien parfaites qu'imparfaites (chapitre 2 et section 3.1) – et les bifurcations transcritiques (section 3.3) appartiennent à la famille des bifurcations *cusp* de type « fronce », les bifurcations sous-critiques à la famille « papillon » (section 3.2) et les bifurcations col-nœud (section 3.4) à la famille « pli ». Combien de familles de catastrophes de différente nature, existe-t-il ? La réponse à cette question générale semble, de prime abord, ne pouvoir qu'être relative à un système spécifique. En fait, et c'est ce que nous allons voir dans ce chapitre, la réponse n'est que relative au nombre de paramètres de contrôle indépendants du système, quel qu'il soit, et non pas au nombre de degrés de liberté[2] du système. Ainsi, si le nombre de paramètres de contrôle est inférieur ou égal à quatre, il existe sept catastrophes élémentaires. Ce résultat est important ; d'autant plus que, pour l'énoncer, il n'est pas nécessaire de connaître les équations décrivant le système ; celles-ci peuvent être arbitrairement complexes, voire même, irréductibles à une expression mathématique.

Débutons notre étude des différentes familles de catastrophe, à l'aide d'un système disposant d'un seul degré de liberté – par exemple, le système mécanique à ressort étudié au chapitre 2 – correspondant à la variable dynamique A (dans l'exemple du système à ressort cité, A correspond à la position de la masse suspendue au ressort). Soit la dynamique du système décrite par une équation du type :

$$\dot{A} = F(A, \{\mu\}) = -\partial V/\partial A \tag{4.1}$$

[1] Leur lecture est d'ailleurs vivement conseillée avant d'aborder ce chapitre.
[2] Autrement dit, le nombre de variables dynamiques décrivant le système.

où V est le potentiel, F est une fonction analytique[3]. de la variable dynamique A et de $\{\mu\}$ l'ensemble de paramètres de contrôle. Supposons que le système admette un point de bifurcation en[4] $A = 0$, point de bifurcation caractérisé, par définition, par un changement qualitatif de la solution stationnaire[5] en réponse à une variation d'un paramètre de contrôle. L'hypothèse d'analyticité de la fonction F se justifie par le choix d'écarter *a priori* toutes fonctions singulières éventuellement sources de catastrophes indépendamment du modèle de système. En adoptant une fonction F analytique, le modèle initial ne contient aucune singularité apparente, et pourtant, de ce choix régulier, vont naître des singularités.

Pour évaluer l'existence éventuelle d'un changement qualitatif des solutions, développons la fonction F à l'ordre deux en A ; cette non-linéarité de l'équation d'évolution implique la présence d'un terme cubique (en A^3) pour le potentiel.

4.1 Catastrophe pli ou point tournant

En développant l'équation dynamique du système (équation 4.1) à l'ordre deux, nous obtenons : $F = \epsilon + \alpha A + \beta A^2 = \beta(\epsilon/\beta + (\alpha/\beta)A + A^2)$, soit encore : $F\beta = (\epsilon/\beta + (\alpha/\beta)A + A^2)$.

En redéfinissant la fonction F telle que : $F/\beta \to F$ ainsi que les paramètres ϵ et α : $\epsilon/\beta \to \epsilon$ et $\alpha/\beta \to \alpha$, nous obtenons :

$$F = (\epsilon + \alpha A + A^2), \tag{4.2}$$

où les paramètres ϵ et α sont donc les deux seuls paramètres indépendants du problème. Cette expression de F est associée à une forme structurellement stable du potentiel. En effet, superposons à la fonction F ci-dessus (équation 4.2), un polynôme[6] du même ordre en A, avec des coefficients, notés ν_i, arbitrairement petits, nous obtenons simplement :

$$F = \epsilon + \alpha A + A^2 + \nu_0 + \nu_1 A + \nu_2 A^2 = (\epsilon + \nu_0) + (\alpha + \nu_1)A + (1 + \nu_2)A^2. \tag{4.3}$$

Cette opération est équivalente à un changement arbitrairement petit des coefficients, sans changer la forme qualitative du potentiel ($F = -\partial V/\partial A$). Par ailleurs, notons aussi que le terme linéaire en A dans l'expression de la fonction F (équation 4.2) est sans importance puisqu'il peut être éliminé moyennant

[3] C'est-à-dire développable en puissance de A.

[4] Nous avons supposé ici que la bifurcation se produit en $A = 0$ pour simplifier et compacter l'écriture des développements ultérieurs de F en puissance de A, sans affecter pour autant les résultats ; nous aurions pu tout aussi bien adopter l'hypothèse d'une valeur quelconque finie A_0 au point de bifurcation, nous aurions alors effectué les développements limités autour de cette valeur A_0.

[5] Indifféremment dénommée solution d'équilibre ou point fixe.

[6] Superposer à F un polynôme d'ordre élevé ne changerait rien au résultat, voir le paragraphe 4.1.2.

la translation $A \to A - \alpha/2$. Ainsi, la forme générique à l'ordre 2 de l'équation dynamique (équation 4.2) est donnée par :

$$\dot{A} = \epsilon + A^2 \tag{4.4}$$

Les points fixes de la dynamique, solutions de l'équation stationnaire $\dot{A} = 0 = \epsilon + A^2$, sont donnés par

$$A = \pm\sqrt{-\epsilon} \tag{4.5}$$

lorsque le paramètre ϵ est négatif ($\epsilon < 0$) ; il n'existe aucun point fixe, lorsque le paramètre ϵ est positif ; le point $\epsilon = 0$ est donc un point critique marquant un changement qualitatif des solutions (voir diagramme de bifurcation, figure 4.1). L'équation dynamique précédente (équation 4.4) est typique de la bifurcation col-nœud (voir section 3.4).

Ainsi, en présence d'un paramètre unique ϵ, la frontière de la catastrophe est un point critique ($\epsilon = 0$) ; représenter ce point critique dans l'espace des paramètres, donc représenter l'unique point $\epsilon = 0$ sur l'axe du paramètre ϵ, est une représentation géométrique assez pauvre ; et donc, il est préférable de la représenter dans un diagramme de bifurcation ; c'est d'ailleurs la figure géométrique tracée dans cet espace (A, ϵ) qui a inspiré le nom attribué à cette catastrophe : catastrophe « pli » (également, parfois dénommée, la catastrophe *point tournant*).

4.1.1 Déploiement des singularités en des termes simples

Avant d'aller plus loin, introduisons quelques notions utiles à la classification des catastrophes. Le premier concept est celui du « déploiement » (dit *unfolding* en anglais) des singularités.

Remarquons tout d'abord que la fonction $F = A^2$ est une forme structurellement instable ; en effet, il suffit de lui rajouter un terme linéaire νA pour induire un changement qualitatif des solutions en $A = 0$. Le potentiel[7] $V = A^3$, possédant un extremum en $A = 0$, présente avec l'ajout du terme linéaire, une pente unité en $A = 0$. Il existe un point fixe unique $A = 0$, solution de $F = V' = dV/dA = 0$. En fait, il est plus précis de dire qu'il existe deux points fixes $A = 0$, car il s'agit d'une solution double. Exprimée en termes du potentiel $V(A)$, cette dégénérescence signifie que non seulement la dérivée première du potentiel s'annule en $A = 0$ ($V' = 0$) mais également sa dérivée seconde ($V'' = 0$). Le potentiel est dit « singulier »[8]. Rappelons que, lorsque les dérivées première et seconde du potentiel sont nulles quelle que soit la valeur

[7] Dans ce chapitre, nous faisons abstraction des préfacteurs numériques et de leurs signes pour se concentrer sur les ordres.

[8] Pour une fonction à deux ou plusieurs variables, c'est le déterminant de la matrice Hessienne qui joue le rôle de la dérivée seconde V'' ; à titre d'exemple pour deux variables, la matrice Hessienne est la matrice dont les élément sont obtenus à partir des quatre dérivées secondes. Une matrice dont le déterminant est nul (l'analogue de $V'' = 0$ pour un seul paramètre) est non inversible ; la matrice est alors dite singulière. Le point A satisfaisant à une telle condition (déterminant de la matrice Hessienne nul) est dénommé « point singulier ».

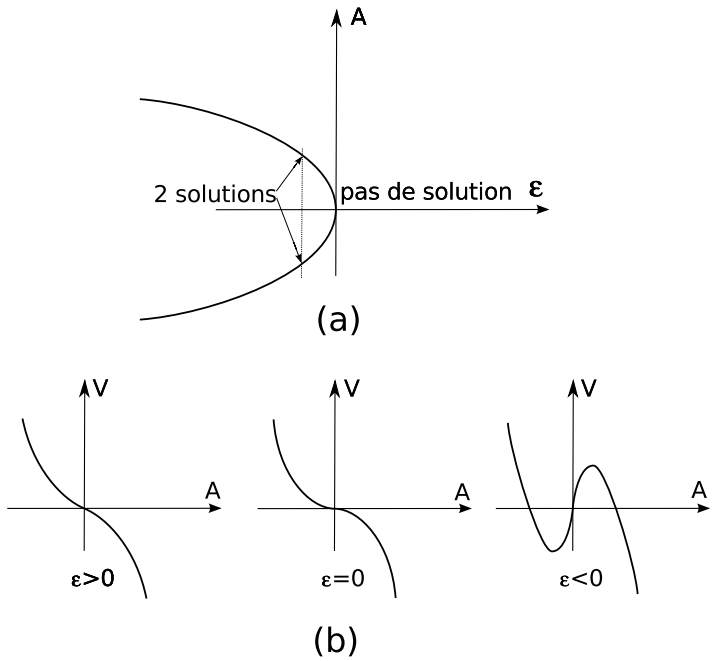


Figure 4.1 – (a) La catastrophe pli. (b) Les différentes formes du potentiel pour différent ϵ.

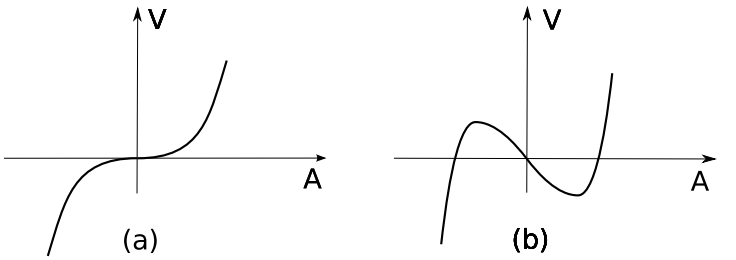


Figure 4.2 – (a)$V = A^3$. (b) $V = A^3 + \epsilon A$, avec $\epsilon < 0$.

du paramètre de contrôle, le potentiel est structurellement instable (voir la sous-section 3.7.1).

Le potentiel $V = A^3$ a un point d'inflexion en $A = 0$ (voir figure 4.2a). En lui rajoutant un terme linéaire de type ϵA (choisissons ϵ arbitrairement petit et négatif), nous obtenons un nouveau potentiel qualitativement différent (voir figure 4.2b) qui possède deux extrema : un maximum et un minimum. En revanche, ajouter de plus un terme quadratique νA^2 (avec ν un petit paramètre) au potentiel V n'induit pas de changement qualitatif des solutions. En effet, si le potentiel a la forme

$$V = A^3 + \nu A^2 + \epsilon A, \tag{4.6}$$

le terme quadratique peut être éliminé grâce au changement de variable $\tilde{A} = B - \nu/3$. En termes de la nouvelle variable B, le potentiel V contient des termes en B^3, B et une constante (sans intérêt). Donc, c'est bien l'addition du terme linéaire $-\epsilon A$ qui a révélé une structure cachée au sein du potentiel singulier $V(A) \sim A^3$: nous sommes en présence d'un *déploiement de la singularité* A^3. C'est comme si l'ajout d'une infime perturbation linéaire avait déployé la structure (les deux extrema) cachée au sein du potentiel A^3 : *it is like the unfolding of a bud to reveal a flower*[9] disait Timothy Saunders (voir référence [68]) dans son livre dédié à la théorie des catastrophes (comparer pour une illustration du déploiement, les deux figures 4.2a et 4.2b). Le potentiel $A^3 + \epsilon A$ représente le *déploiement universel* de la singularité A^3. Le mot universel se réfère au fait que pour un polynôme d'ordre 3, c'est l'expression générique la plus concise (après élimination de A^2 à l'aide du changement de variable introduit ci-dessus) et la plus générale.

4.1.2 Comment le nombre de paramètres indépendants affecte-t-il la puissance de la singularité ?

En s'intéressant toujours au même modèle d'un système disposant d'un paramètre de contrôle unique, ajoutons au potentiel $V(A) = \epsilon A + A^3$ un terme en A^4 ; le nouveau potentiel $V(A) = \epsilon A + A^3 + A^4$ n'affecte pas le comportement qualitatif des solutions.

Tout d'abord, notons que les préfacteurs des termes en A^3 et A^4 du potentiel n'incluent pas de paramètre ; ceci est la conséquence de l'hypothèse de l'existence d'un paramètre unique[10].

Avant de poursuivre, posons-nous la question de la cohérence d'ajouter un terme en A^4, *a priori* considéré comme un terme perturbatif, au potentiel obtenu à partir de l'équation développée à l'ordre deux (équation 4.4) pour effectuer un raisonnement autour des points fixes afin de déterminer un éventuel changement qualitatif des solutions. En effet, au voisinage de $A = 0$, le terme

[9] C'est comme le déploiement d'un bourgeon qui nous révèle la fleur.

[10] Même en émettant l'hypothèse que le terme en A^3 a pour préfacteur une fonction quelconque de ϵ, $g(\epsilon)$, le potentiel V est défini par $V = \epsilon A + gA^3 = g((\epsilon/g)A + A^3)$. À l'aide d'une simple redéfinition du paramètre $\epsilon \to \epsilon/g$ et du potentiel $V \to V/g$, le potentiel retrouve la même forme initiale : $V(A) = \epsilon A + A^3$.

A^4 est petit par rapport aux autres termes ; néanmoins, au voisinage de points fixes dont les valeurs diffèrent de $A = 0$, son effet pourrait devenir sensible, voire dominant. Or, les solutions de l'équation dynamique d'ordre deux (équation 4.4) sont données par les points fixes suivants : $A = \pm\sqrt{-\epsilon}$ (pour $\epsilon < 0$, voir équation 4.5). Et au voisinage de ces points fixes, les deux premiers termes du potentiel $V = \epsilon A + A^3 + A^4$ sont d'ordre $\epsilon^{3/2}$, tandis que le terme A^4 est d'ordre ϵ^2 ; il est donc négligeable devant les deux premiers termes, ce qui justifie l'hypothèse du terme en A^4 considéré ici comme juste perturbatif.

Par ailleurs, l'équation des points fixes du modèle perturbé vérifie

$$\epsilon + 3A^2 + 4A^3 = 0 \, ; \tag{4.7}$$

la présence de A^3 peut donc induire un nouveau point fixe ($V' = 0$), autre que le point de catastrophe $A = \pm\sqrt{-\epsilon}$, pour lequel $V' = 0$ (point fixe) et $V'' = 0$ (point singulier). Mais, et c'est là un élément essentiel du raisonnement, cet éventuel nouveau point fixe, vérifiant donc $V' = 0$ ne peut être un point de catastrophe (caractérisé par les deux conditions $V' = 0$ et $V'' = 0$). En effet, à l'aide d'un seul paramètre, le potentiel V ne peut pas être ajusté pour satisfaire simultanément les deux conditions $V' = V'' = 0$ en deux points différents. Supposons que l'emplacement du nouveau point fixe induit par la présence de A^3 soit très éloigné du point fixe $A = \sqrt{\epsilon}$ proche de l'origine ($A = 0$) obtenu pour la dynamique non perturbée. En développant le potentiel V autour de ce nouveau point fixe et à l'aide d'un changement de variable adéquat, le nouveau point fixe peut toujours être ramené au voisinage de l'origine ; ainsi, nous obtenons à nouveau un point de catastrophe au voisinage de l'origine comme pour le potentiel non perturbé. Nous arrivons donc à la conclusion suivante : en disposant d'un paramètre unique, le potentiel

$$V = \epsilon A + A^3 \tag{4.8}$$

représente la catastrophe générique.

Citons un exemple de la vie courante : l'écoulement de l'eau dans un tuyau d'arrosage aux parois relativement rigides. Le mouvement du liquide incompressible est décrit par l'équation de Navier-Stokes[11] (voir référence [31] et le chapitre 9 de cet ouvrage proposant la résolution d'un problème hydrodynamique). Le mouvement d'un tel fluide est caractérisé par un paramètre de contrôle unique, appelé le nombre de Reynolds représentant le rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses :

$$R_e = \frac{RV_0}{\rho\eta} \tag{4.9}$$

[11] L'équation de Navier-Stokes, dont la dénomination est issue des noms du physicien-ingénieur français Claude-Louis Navier (1785-1836) et du scientifique britannique (1819-1903) Sir Claude-Louis Stokes, s'écrit comme : $\partial\vec{v}/\partial t + (\vec{v}.\nabla)\vec{v} = -\nabla P/\rho + \eta/\rho\nabla^2\vec{v}$, avec $\vec{v}$ la vitesse d'écoulement d'une parcelle de fluide de densité ρ, de pression P et de viscosité dynamique η, ∇ est le vecteur gradient ; en présence de forces extérieures, telles que le poids, on rajoute au membre de droite de l'équation la contribution correspondante.

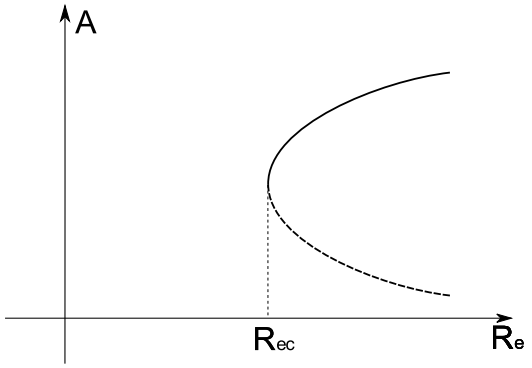


Figure 4.3 – A représente l'amplitude du mouvement perturbé en fonction du nombre Reynolds, R_e. Pour $R_e < R_{ec}$ le mouvement est laminaire. Pour $R_e > R_{ec}$ le mouvement laminaire coexiste avec deux branches de solutions non laminaires, constituant une catastrophe pli.

où R est le rayon du tuyau (plus généralement, la taille caractéristique de la géométrie de l'objet où s'écoule le fluide), V_0 la vitesse caractéristique de l'écoulement, ρ la densité du liquide, et η le coefficient de viscosité dynamique du fluide. Sachant que ce système hydrodynamique est décrit par un seul paramètre. Il est connu que pour un nombre de Reynolds R_e assez petit (condition satisfaite si la vitesse d'écoulement est très faible), il existe une solution unique stable, écoulement dite laminaire (sans tourbillon). Au-delà d'une certaine valeur critique de R_e, cette solution coexiste avec une paire de solutions présentant des tourbillons (régime non laminaire), l'une est stable et l'autre est instable : c'est la situation associée à la catastrophe pli (voir figure 4.3).

4.1.3 Notion de codimension

L'espace usuel est un espace physique de dimension trois ; dans un système de coordonnées cartésiennes, la surface d'une sphère de rayon R dans cet espace s'écrit à l'aide d'une seule équation de type : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Plus généralement, la surface d'un objet de dimension trois (ici, la sphère) est déterminée par une seule équation. Et dans le même espace physique, un objet à une dimension (une courbe, une droite...) nécessite deux équations ; en effet une courbe peut être vue comme l'intersection de deux surfaces, chacune d'entre elles étant représentée par une équation. Plus généralement, le nombre d'équations nécessaire pour représenter un objet est égal à la différence entre la dimension de l'espace dans lequel baigne l'objet, et la dimension de l'objet lui-même ; cette quantité est appelée *co-dimension*. Ainsi, dans un espace à 3 dimensions, la codimension d'une surface est égale à 1 et celle d'une courbe est de 2 ; dans un espace à 2 dimensions (par exemple, un plan), la codimension

d'une courbe est de 1. Quelle que soit la dimension de l'espace considéré, seul un objet de codimension 1 peut le diviser en deux régions distinctes ; ainsi, un espace tridimensionnel (respectivement, bidimensionnel) est fractionné en deux parties disjointes par une surface (respectivement, par une courbe) ; et une courbe est subdivisée en deux demi-courbes.

Ces précisions sur la définition de la codimension donnée, revenons à la théorie des catastrophes et déterminons le rôle de la codimension dans ce contexte. La première étape pour identifier les lieux de catastrophe consiste à déterminer les points fixes A_0 de la dynamique (points pour lesquels la dérivée première du potentiel s'annule, $V' = \partial V/\partial A = F(A_0, \mu) = 0$) ; la seconde étape consiste à rechercher dans l'espace des paramètres, parmi les points fixes, les points annulant également les dérivées successives (seconde, troisième...) du potentiel ; nous recherchons donc les points de l'espace de paramètre μ tels $V^n(A_0, \mu) = \partial^n V/\partial A^n = 0$, avec $n = 2, 3...$; ainsi, si le potentiel est tel que seule sa dérivée seconde peut s'annuler : $V''(A_0, \mu) = \partial^2 V/\partial A^2 = 0$, nous disposons d'une seule équation qui définit un objet de codimension 1 et qui fixe la valeur d'un paramètre de contrôle ; c'est le cas du potentiel précédemment évoqué $V = \epsilon A + A^3$, forme générique de la catastrophe « pli », dite de codimension 1. Lorsque le potentiel est d'ordre supérieur (i.e. il contient un terme en A^4), nous disposons de deux équations pour annuler les dérivées seconde et troisième ($V''(A_0, \mu) = \partial^2 V/\partial A^2 = 0$ et $V'''(A_0, \mu) = \partial^3 V/\partial A^3 = 0$) ; cela définit la catastrophe de type « fronce » (*cusp*) de codimension 2 (deux paramètres de contrôle sont nécessaires pour satisfaire simultanément aux deux équations). Et nous pouvons poursuivre le raisonnement ; annuler simultanément les n premières dérivées du potentiel revient à déterminer une catastrophe de codimension $n-1$, et il est alors nécessaire de disposer de $n-1$ paramètres indépendants. Ainsi, la codimension est un élément important de la théorie des catastrophes, car elle représente également le nombre de paramètres de contrôle nécessaire pour induire une catastrophe de type donné.

4.2 La catastrophe *cusp*

Supposons que le modèle dispose de deux paramètres de contrôle et poursuivons le développement du potentiel V à l'ordre 4, ou, de manière équivalente, à l'ordre 3 pour la fonction F, soit : $F = \epsilon + \alpha A + \beta A^2 + A^3$, avec ϵ, α et β trois paramètres. La forme de la fonction F est structurellement stable. Le terme quadratique de F (correspondant au terme cubique du potentiel V) peut être éliminé grâce à la transformation $A \rightarrow A = A - \beta/3$. Ainsi, nous pouvons réécrire la fonction F en redéfinissant de nouveaux paramètres ν et ϵ comme : $F = \nu + \epsilon A + A^3$ et obtenir l'équation dynamique suivante :

$$\dot{A} = F = \nu + \epsilon A + A^3. \tag{4.10}$$

Nous reconnaissons la forme normale de la bifurcation imparfaite étudiée au paragraphe 3.1. En adoptant pour les deux paramètres de contrôle indépen-

dants la notation u et v employée usuellement dans la théorie des catastrophes, la forme du potentiel associé est :

$$V = vA + uA^2 + A^4. \tag{4.11}$$

Du point de vue de la théorie des catastrophes, la bifurcation imparfaite appartient à la catastrophe de type « fronce » (catastrophe *cusp*), évoquée à la fin du chapitre précédent.

Étant donné le potentiel de la bifurcation imparfaite (voir équation 4.11), les points fixes de la dynamique sont obtenus à partir de l'équation cubique

$$\dot{A} = -\partial V/\partial A = v + 2uA + 4A^3 = 0. \tag{4.12}$$

L'existence et le nombre de solutions de cette équation dépendent de son discriminant (voir référence [1]) donné par

$$\Delta = 8u^3 + 27v^2. \tag{4.13}$$

Lorsque le discrimant est positif, l'équation associée aux points fixes (équation 4.12) possède une solution réelle ; lorsque le discrimant est négatif, nous obtenons trois solutions réelles (voir référence [1]). Le nombre de solutions passe donc brutalement de un à trois à l'annulation du discriminant ; la condition du discriminant nul constitue ainsi l'équation de la catastrophe *cusp*[12]. Lorsque le discriminant est nul, deux cas de figures se présentent : (1) au moins l'un des deux paramètres de contrôle est non nul ($u \neq 0$ ou $v \neq 0$), alors deux des trois solutions sont identiques ; (2) les paramètres de contrôle sont nuls simultanément ($u = v = 0$), alors les trois solutions coincident (voir figure 4.4). Ce point origine est un point de rebroussement, dessinant dans l'espace des paramètres une sorte de « fronce » (catastrophe *cusp*), qui est à l'origine de la dénomination de cette catastrophe. L'équation des points fixes (équation 4.12) représente le déploiement universel de la singularité A^4 (voir le paragraphe précédent 4.1.1 développant la notion de déploiement d'une singularité). Comme il s'agit d'une double singularité caractérisée par des dérivées seconde et troisièmes nulles du potentiel ($V'' = 0$ et $V''' = 0$), nous disposons de deux équations pour déterminer la catastrophe, par conséquent la co-dimension de cette catastrophe est égale à 2. Par ailleurs, cette équation des points fixes (équation 4.12) permet de fixer l'amplitude de la variable $A(u, v)$ en fonction des paramètres de contrôle u et v (voir figure 4.5 qui donne une représentation schématique de la surface couverte par la variable A dans l'espace (A, u, v)). Une coupe de cette surface avec l'axe $v = v_0$, où v_0 est une constante, permet de reconnaître la coupe d'une bifurcation imparfaite, appartenant ainsi à la famille de la catastrophe « fronce ».

[12] Dans le chapitre précédent, nous avions obtenu cette équation en annulant simultanément les dérivées première et seconde du potentiel et en éliminant la variable A entre les deux équations pour obtenir la relation de dépendance entre les deux paramètres de contrôle (voir équation 3.39).

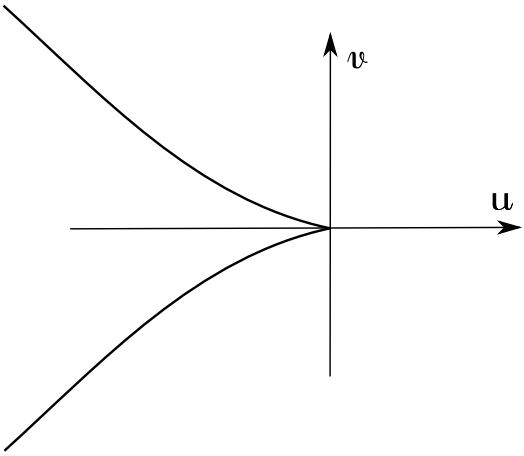


Figure 4.4 – Représentation qualitative de la catastrophe *cusp*.

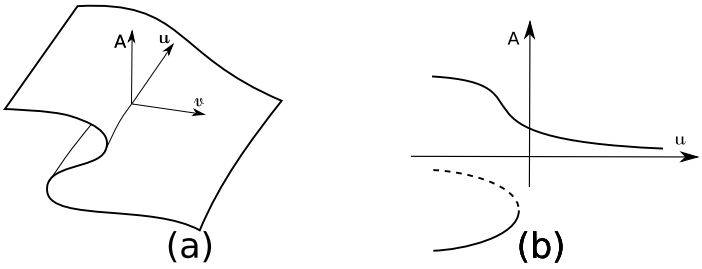


Figure 4.5 – (a) Représentation qualitative du point fixe en fonction des paramètres u et v. (b)Projection sur le plan $v =$ constante négative, où on reconnaît le diagramme d'une bifurcation imparfaite.

4.3 La catastrophe queue d'aronde

En présence de trois paramètres de contrôle, notés (u, v, w), le potentiel V est développé à l'ordre 5 (soit à l'ordre 4 pour la fonction F). Le potentiel générique s'écrit comme :

$$V = A^5 + uA^3 + vA^2 + wA \tag{4.14}$$

par un choix approprié d'une nouvelle variable (démarche analogue à celle adoptée pour la catastrophe « fronce » pour éliminer le terme en A^3, voir paragraphe 4.2 ci-dessus). Les points fixes sont déterminés lorsque la dérivée première du potentiel s'annule $(V' = 0)$; nous obtenons l'équation des points fixes suivante :

$$5A^4 + 3uA^2 + 2vA + w = 0. \tag{4.15}$$

Les points singuliers du potentiel V, s'ils existent, annulent la dérivée seconde du potentiel $(V'' = 0)$; cette condition donne lieu à la relation suivante :

$$20A^3 + 6uA + 2v = 0. \tag{4.16}$$

La variable A peut être éliminée en principe des deux équations $V' = 0$ et $V'' = 0$ (équations 4.15 et 4.16), pour obtenir une relation entre les paramètres (u, v, w). Les expressions analytiques ainsi dérivées sont un peu compliquées, et donc d'un usage pratique limité. C'est pourquoi nous adoptons une autre approche pour construire, de proche en proche, la représentation de la catastrophe ; fixons, tout d'abord, la valeur du paramètre u et l'intervalle de variation $[-a, a]$ (a est une donnée réelle) de la variable A ; puis, déterminons, pour chaque valeur de A, la valeur du deuxième paramètre v à partir de l'équation des points singuliers (équation 4.16), puis reportons le résultat obtenu v dans l'équation des points fixes (équation 4.15) pour déterminer le troisième paramètre w. Pour chaque valeur de u, nous obtenons ainsi un ensemble de couples (v, w) traçant dans le plan des paramètres une forme géométrique de *queue d'aronde*[13] (voir la figure 4.6). L'opération est répétée pour différentes valeurs du paramètre u, et nous pouvons ainsi construire une image tridimensionnelle de la catastrophe dans l'espace (u, v, w) (voir figure 4.6, à droite) ; pour $u > 0$, le paramètre w est univalué, tandis que pour $u < 0$ il est multivalué. La catastrophe queue d'aronde est de codimension 3 ; en effet, la singularité A^5 est triplement dégénérée en $A = 0$, car les dérivées seconde, troisième et quatrième s'annulent en ce point ($V'' = V''' = V'''' = 0$, en $A = 0$). Le déploiement universel de cette singularité requiert l'existence de trois paramètres de contrôle indépendants.

Analysons à présent les extrema du potentiel V. Pour cela, considérons le cas où le paramètre v est nul $(v = 0)$ et le paramètre u négatif $(u < 0)$. La

[13] Le terme « aronde » désigne l'hirondelle ; il est utilisé aujourd'hui surtout dans l'expression « en queue d'aronde » pour qualifier la forme d'un objet semblable à une queue d'hirondelle, c'est-à-dire dont une extrémité est plus large que l'autre.

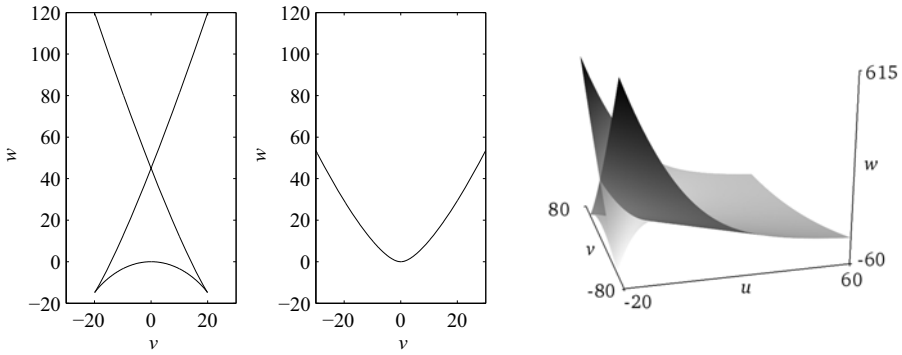


Figure 4.6 – À gauche, une section de la catastrophe queue d'aronde pour $u < 0$ (ici $u = -10$). Au centre, on a fixé $u = 2$. À droite, la catastrophe queue d'aronde à trois dimensions. Il n'existe pas de point fixe dans la région supérieure, un en dessous, et deux à l'intérieur de la queue d'aronde.

solution de l'équation des points fixes (équation 4.15) du second ordre en A^2, est donnée par :

$$A^2 = \frac{1}{10}[-3u \pm \sqrt{9u^2 - 20w}] \tag{4.17}$$

lorsque $w < 9u^2/20$. Pour $w > 0$ (respectivement, $w < 0$), il existe 4 (respectivement, 2) points fixes ; lorsque $w > 9u^2/20$, l'équation des points fixes n'a pas de solution.

Ainsi, pour un modèle disposant de 3 paramètres de contrôle et d'un potentiel développé à l'ordre 5, trois cas sont à distinguer :

- (i) $w - 9u^2/20 > 0$: l'équation des points fixes (4.17) n'a pas de solution, le potentiel V n'a donc aucun extremum ;
- (ii) $0 < w < 9u^2/20$: il existe quatre solutions données par $A = \pm[-3u \pm \sqrt{9u^2 - 20w}]^{1/2}/\sqrt{10}$. Le potentiel V possède donc quatre points critiques, deux maxima et deux minima ;
- (iii) $w < 0$: il existe deux solutions $A = \pm\,[-3u+\sqrt{9u^2 - 20w}]^{1/2}/\sqrt{10} > 0$. Le potentiel V a donc deux extrema, un minimum et un maximum.

4.4 La catastrophe papillon

En présence de quatre paramètres de contrôle, notés (u, v, w, t) et pour un modèle à une dimension (i.e. un seul degré de liberté, soit une variable interne A), le potentiel V est développé à l'ordre 6 pour obtenir le déploiement universel de la dernière catastrophe évoquée dans cet ouvrage, soit :

$$V = A^6 + tA^4 + uA^3 + vA^2 + wA \tag{4.18}$$

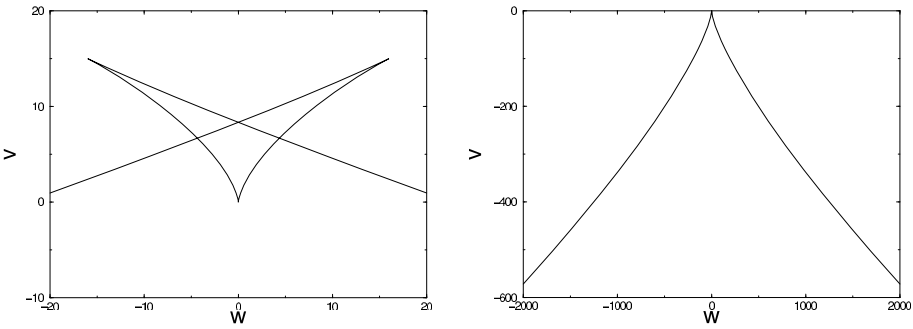


Figure 4.7 – La catastrophe papillon. À gauche : le cas $u = 0$ et $t = -5$. À droite : le cas $u = 0$ et $t = 5$.

où le terme en A^5 a été éliminé à l'aide d'un changement adéquat de la variable A.

Les points fixes sont obtenus à partir de la condition $V' = 0$:

$$6A^5 + 4tA^3 + 3uA^2 + 2vA + w = 0 \tag{4.19}$$

et la frontière de la catastrophe est obtenue en imposant $V'' = 0$:

$$30A^4 + 12tA^2 + 6uA + 2v = 0. \tag{4.20}$$

La démarche adoptée pour obtenir la forme de la catastrophe est identique à celle décrite dans le paragraphe précédent. Pour une valeur fixée du couple de paramètres (t, u), nous faisons varier la valeur de A pour déterminer la valeur du couple de paramètres (v, w) correspondant à la frontière de la catastrophe ; elle est dite « papillon » en raison de la forme obtenue pour des valeurs négatives du paramètre t ; lorsque le paramètre t est positif, nous obtenons une courbe présentant un point de rebroussement (voir figure 4.7, sur la même figure est représenté le potentiel V dans différentes régions des paramètres).

4.5 Qu'en est-il des problèmes à plusieurs degrés de liberté ?

Tout au long de cette classification des catastrophes, nous nous sommes restreints à un seul degré de liberté : le modèle dispose d'une seule variable notée A. Mais en genéral, les systèmes réels font intervenir un grand nombre de degrés de liberté. Par exemple, pour décrire le mouvement d'un lit de sable sous l'effet du vent, il est nécessaire de savoir à chaque instant ce qui se passe en chaque point du lit de sable. Les variables indispensables pour décrire une telle

dynamique, en chaque point du lit de sable, sont au nombre de n, n étant un paramètre très grand (voir infini si la description du lit de sable est continue).

Qu'advient-t-il de la classification des catastrophes dans de pareilles situations, lorsque le degré de liberté est très grand, voire infini ? La réponse peut paraître surprenante : la classification des catastrophes est possible sans faire aucune référence aux équations d'évolution. En fait, seul le nombre de paramètres de contrôle importe. Au-delà de quatre paramètres de contrôle, l'approche de la dynamique des systèmes à l'aide de la théorie des catastrophe devient très complexe. Mais en ne retenant que 4 paramètres de contrôle indépendants, la dynamique pertinente, au sens des catastrophes, ne fait intervenir que deux degrés de liberté au maximum ; et dans ce cas, il n'existe que trois formes indépendantes de potentiel ; autrement dit, seules trois catastrophes distinctes sont possibles. Ajoutées aux quatre catastrophes déjà rencontrées (pli, fronce, queue d'aronde et papillon), nous dénombrons sept catastrophes élémentaires au total.

De façon générale, la frontière d'une catastrophe est donnée par l'annulation de la concavité Δ du potentiel V ; pour un système à un degré de liberté A, la concavité du potentiel est égale à la dérivée seconde du potentiel ($V = V'' = d^2V/dA^2$), pour un système à deux degrés de liberté A et B, la concavité est fonction des dérivées partielles secondes du potentiel, soit : $\Delta = (\partial^2V/\partial A^2)\ (\partial^2V/\partial B^2) - (\partial^2V/\partial A\partial B)^2$. En notant $V_{AA} = \partial^2V/\partial A^2$, $V_{BB} = \partial^2V/\partial B^2$ et $V_{AB} = \partial^2V/\partial A\partial B$, nous obtenons la frontière de la catastrophe par la condition suivante :

$$\Delta = V_{AA}V_{BB} - V_{AB}^2 = 0. \tag{4.21}$$

Une manière simple d'annuler la concavité de V est d'imposer aux trois dérivées secondes de s'annuler simultanément ; dans ce cas, le potentiel V est dégénéré le long des deux axes associés aux variables A et B, puisque $V_{AA} = V_{BB} = 0$; ces deux variables A et B sont dites essentielles au sens des catastrophes. Si seule la condition $V_{AA} = 0$ est vérifiée, seule la variable A est dite essentielle, et nous serions confrontés à un problème à une dimension, déjà traité précédemment. Notons également que, pour avoir simultanément les trois conditions satisfaites ($V_{AA} = V_{BB} = V_{AB} = 0$), trois jeux de paramètres sont nécessaires afin d'ajuster de manière indépendante l'évolution de chacune des dérivées secondes. Ainsi, avec trois (ou plus) degrés de liberté (disons A, B et C), quatre paramètres ne suffisent pas à satisfaire l'annulation des 6 dérivées secondes (V_{AA}, V_{BB}, V_{CC} et les trois dérivées secondes croisées). En conséquence, quel que soit le nombre de degrés de liberté du problème initial, lorsqu'il ne dispose que de quatre paramètres de contrôle, il n'existe pas de catastrophe impliquant plus de deux variables essentielles. Avec ces remarques préliminaires, nous sommes maintenant en mesure de présenter les trois autres catastrophes.

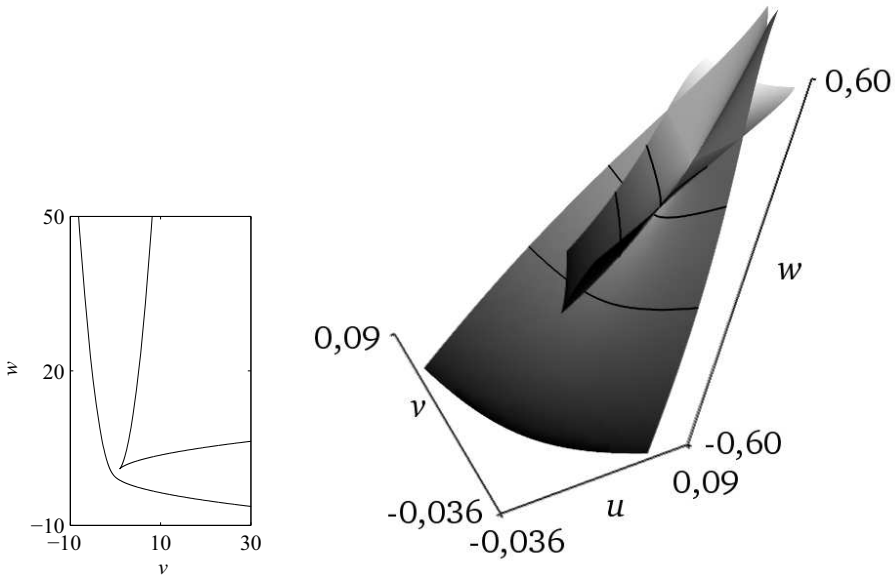


Figure 4.8 – Catastrophe ombilic hyperbolique. À gauche : une section correspondant à $w = 2$. À droite : représentation dans l'espace (u, v, w) de la catastrophe.

4.6 La catastrophe ombilic hyperbolique

Ainsi que nous l'avons souligné pour les systèmes disposant d'un unique degré de liberté, la non-linéarité la plus faible du potentiel V est d'ordre cubique. Par simple généralisation du cas unidimensionnel, écrivons la singularité à deux dimensions comme $A^3 + B^3$. De façon analogue au problème à une dimension, les termes quadratiques A^2 et B^2 peuvent être omis, moyennant un changement de variables ; comme le terme en AB ne peut être simultanément éliminé et que les termes linéaires A et B sont nécessaires comme dans le cas unidimensionnel, la forme générique du potentiel est donc

$$V(A, B) = A^3 + B^3 + wAB - uA - vB. \tag{4.22}$$

Il s'agit bien d'une catastrophe de co-dimension trois, compte tenu du fait qu'il faut trois paramètres pour le déploiement universel de $A^3 + B^3$. Nous avons trois conditions : $V_A = V_B = 0$ et le hessien $\Delta = 0$. Nous avons au total cinq inconnues : A, B, u, v et w. Les deux premières conditions permettent d'éliminer A et B en fonction de (u, v, w), et la troisième condition fournit la relation entre ces trois paramètres permettant de représenter la surface de cette catastrophe dite *Ombilic hyperbolique*[14] (voir figure 4.8 pour des représentations

[14] Le mot ombilic signifie « cicatrice arrondie » ; un point ombilic est un point d'une surface courbe où toutes les sections par un plan normal ont le même rayon de courbure. Cette

tridimensionnelle et dans le plan (u, v)).

4.7 La catastrophe ombilic elliptique

Au paragraphe précédent, nous avons étudié le potentiel contenant la singularité cubique de type $A^3 + B^3$. En incluant maintenant des termes cubiques croisés de type A^2B ou B^2A dans le potentiel, nous obtenons une nouvelle catégorie de catastrophe. Le potentiel générique associé à cette nouvelle catastrophe s'écrit comme :

$$V = A^3 - AB^2 + w(A^2 + B^2) + uA + vB. \tag{4.23}$$

Seul le terme en A^3 est inclu dans l'expression générique du potentiel car à l'aide des deux identités suivantes : $A^3 = A(A^2 - B^2) + B(AB)$ et $B^3 = -B(A^2-B^2)+A(AB)$, le terme en B^3 peut toujours être ré-écrit en fonction des autres combinaisons de termes ($A(A^2-B^2)$ et A^2+B^2) composant le potentiel. Par ailleurs, notons que l'inclusion du terme croisé en AB^2 dans l'expression du potentiel (équation 4.23), implique nécessairement la présence d'un terme quadratique en A^2 ou B^2 (considérer pour cela les identités suivantes : $(A^2 + B^2)+(A^2-B^2) = 2A^2$ et $(A^2+B^2)-(A^2-B^2) = 2B^2$) ; comme il est d'usage de privilégier une symétrie dans l'écriture du potentiel, tant que cela n'affecte pas le comportement qualitatif des solutions, le terme quadratique retenu dans l'expression générique du potentiel s'exprime comme la somme des deux termes quadratiques ($w(A^2 + B^2)$).

Pourquoi le potentiel contenant des termes cubiques en $A^3 + B^3$ (équation 4.22) n'est pas équivalent au potentiel contenant des termes cubiques croisés en A^2B ou B^2A (équation 4.23) ? Une première réponse simple est obtenue en considérant le cas particulier pour lequel les trois paramètres sont nuls ($u = v = w = 0$) ; le premier potentiel (équation 4.22, soit $V = A^3 + B^3$) possède un point d'inflexion en $A = B = 0$ ($\partial^2V/\partial A^2 = \partial^2V/\partial B^2 = 0$) alors que le second potentiel (équation 4.23, soit $V = A^3 - AB^2$), s'il possède également un point d'inflexion en A, présente un comportement parabolique en B ; ce constat suffit pour signifier un changement qualitatif des solutions en passant d'un potentiel à l'autre. Ce changement qualitatif est par ailleurs révélé, et c'est la seconde réponse, en constatant qu'aucun changement de variables ne permet de passer d'une forme de potentiel à l'autre : ces potentiels ne sont donc pas qualitativement équivalents.

En suivant la même démarche précédemment utilisée pour la catastrophe ombilic hyperbolique, nous obtenons la catastrophe tridimensionnelle ou en projection obtenue dans l'espace des paramètres (voir figure 4.9 ; elle est dénommée catastrophe *ombilic elliptique* et parfois surnommée « le poil »).

catastrophe est quelquefois appelée la « vague ».

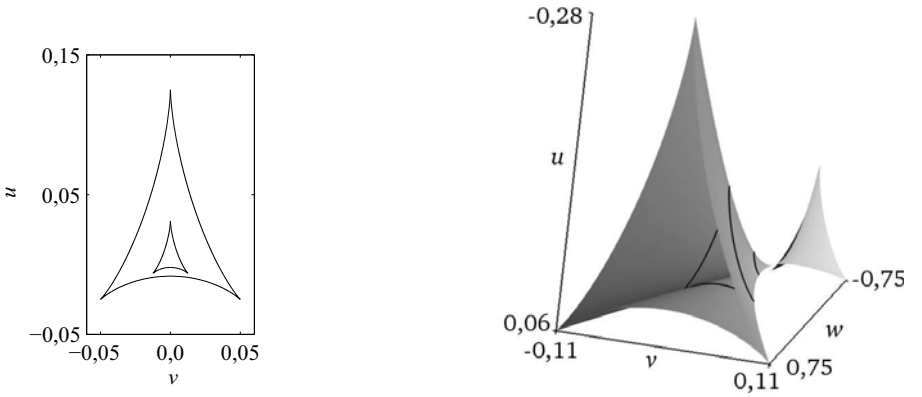


Figure 4.9 – La catastrophe ombilic elliptique. À gauche une coupe dans le plan (u, v), avec $w = 0,5$ (courbe externe) et $w = 0,25$ (courbe interne). À droite la représentation à 3D.

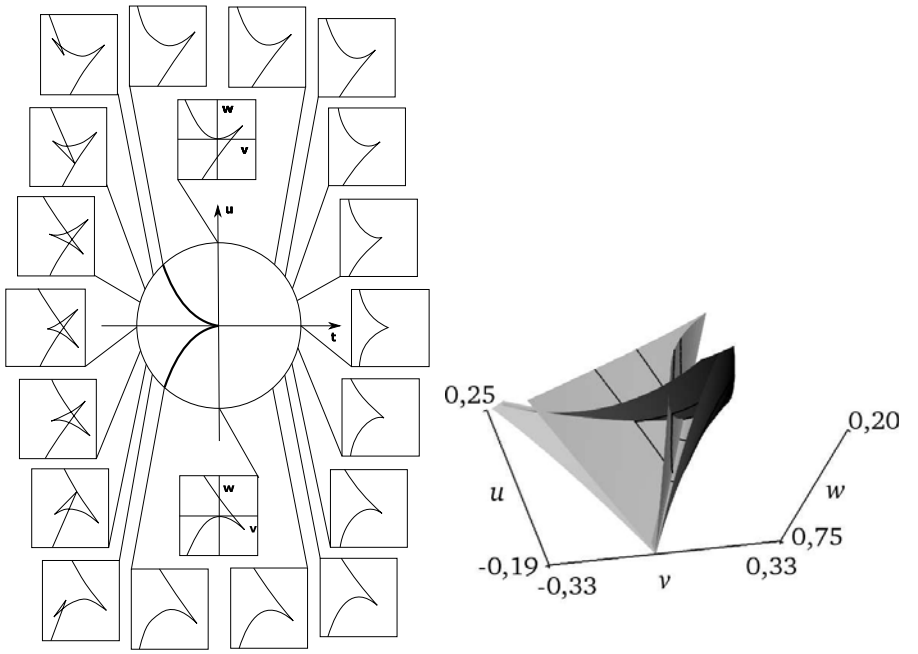


Figure 4.10 – La catastrophe ombilic parabolique. À gauche, une projection pour différentes valeurs de w et t. À droite, une représentation à 3D. On remarque que, contrairement aux autres catastrophes, il n'y a pas de manière simple de représenter cette catastrophe en projection.

4.8 La catastrophe ombilic parabolique

Venons-en enfin à la septième et dernière des catastrophes élémentaires. Considérons un polynôme d'ordre supérieur pour le potentiel V, pour l'une des deux variables A ou B. La présence d'une singularité en A^4 implique, non seulement l'annulation de la dérivée partielle seconde du potentiel en $A = 0$ ($V_{AA}(A = 0)$=0), mais également l'annulation de la dérivée partielle troisième en ce même point ($V_{AAA}(A = 0)$=0). Nous obtenons donc quatre conditions à satisfaire (trois conditions portant sur les dérivées secondes et la quatrième portant sur la dérivée troisième en A), il nous faut donc considérer quatre paramètres de contrôle indépendants pour obtenir le déploiement universel de la singularité. Notons qu'inclure de plus une singularité supplémentaire en B^4 dans le potentiel reviendrait à définir une condition supplémentaire à satisfaire ($V_{BBB}(B = 0)$=0) nécessitant un cinquième paramètre de contrôle ce qui dépasse le nombre limité à 4 de paramètres indépendants que nous considérons dans cet ouvrage. Nous pouvons finalement écrire la forme générique du potentiel associé à la septième catastrophe :

$$V = A^4 + A^2B + wA^2 + tB^2 - uA - vB, \tag{4.24}$$

où le terme cubique en A^3 est éliminé à l'aide d'un changement de variable adapté. Ce potentiel définit la catastrophe ombilic parabolique, parfois surnommée « le champignon » (voir la figure 4.10, pour une représentation en projection et à trois dimensions dans l'espace des paramètres).

4.9 Résumé des sept catastrophes élémentaires

Nous présentons ci-dessous un tableau des sept catastrophes élémentaires, dans lequel les quatre paramètres de contrôle sont notés u, v, w et t, et A et B désignent les variables dynamiques.

Nom de la catastrophe	Forme du potentiel associé
Pli	$A^3 + uA$
Fronce ou *Cusp*	$A^4 + uA^2 + vA$
Queue d'aronde	$A^5 + uA^3 + vA^2 + wA$
Papillon	$A^6 + tA^4 + uA^3 + vA^2 + wA$
Ombilic hyperbolique	$A^3 + B^3 + wAB - uA - vB$
Ombilic elliptique	$A^3 - AB^2 + w(A^2 + B^2) + uA + vB$
Ombilic parabolique	$A^4 + A^2B + wA^2 + tB^2 - uA - vB$

4.10 Remarques générales

Nous avons vu que si le nombre de paramètres de contrôle est égal ou inférieur à quatre, il existe sept catastrophes élémentaires ; on peut montrer

que lorsque ce nombre est égal à cinq, il existe onze catastrophes. Au-delà de cinq paramètres de contrôle, il devient très difficile de suivre la même démarche pour déterminer le nombre et le type de catastrophes (voir référence [68]).

Attention à ne pas assimiler tout paramètre physique du problème à un paramètre de contrôle. Ce dernier est un paramètre adimensionnel correspondant, en général, à une combinaison des paramètres physiques du système étudié. Un problème initial peut ainsi comporter un nombre de paramètres physiques assez grand, mais ceux-ci peuvent éventuellement être combinés en un ensemble plus restreint de nombres sans dimension. Ainsi, par exemple, pour des fluides incompressibles, les équations hydrodynamiques font intervenir quatre paramètres physiques (voir paragraphe 4.1.2). En combinant ces quatres paramètres (soit R, le rayon caractéristique du milieu, V_0 la vitesse typique d'écoulement du fluide, ρ, la densité du fluide et η, la viscosité du fluide), il subsiste un unique paramètre de contrôle sans dimension, le nombre de Reynolds R_e, défini comme $R_e = \rho R V_0/\eta$.

Nous avons classé les catastrophes en se référant uniquement au nombre de paramètres et non au nombre de degrés de liberté du système. En outre, et c'est là un point essentiel, cette classification s'est faite sans avoir à écrire les équations qui régissent les systèmes, et sans même savoir si ces équations sont connues. Autrement dit, la classification est universelle. Comme le faisait remarquer René Thom : *qu'on puisse ainsi créer une théorie de la morphogenèse « in abstracto », purement géométrique, indépendante du substrat des formes et de la nature des forces qui les créent, voilà qui pourra sembler difficile à admettre, surtout de la part d'expérimentateurs habitués à tailler dans le vif et continuellement en lutte avec une réalité qui leur résiste...* (voir référence [75]). Cette idée se trouve déjà dans le traité classique « croissance et formes » (traduction de l'ouvrage *On growth and form*, publié en 1917 pour la première fois) du biologiste-mathématicien Sir D'Arcy Wentworth Thompson (1860-1948) (voir référence [76]).

Réné Thom poursuit sa réflexion et s'interroge : « *un point de vue aussi général soulève une évidente objection ; si, conformément à notre postulat de base, les seules singularités stables de toute morphogenèse sont déterminées par la seule dimension de l'espace ambiant, pourquoi tous les phénomènes de notre monde à trois dimensions n'ont-ils pas la même morphologie ? Pourquoi la forme des nuages n'est-elle pas celle des montagnes, pourquoi la forme des cristaux n'est-elle pas celle des êtres vivants ? À cela, je répondrai que notre modèle vise seulement à classifier les accidents locaux de la morphogenèse, qu'on appellera catastrophes élémentaires. Mais l'apparence macroscopique globale, la forme au sens usuel du terme, provient de l'aggrégation d'un grand nombre de ces accidents locaux ; et la statistique de ces catastrophes locales, les corrélations qui régissent leur apparition au cours d'un processus donné, sont déterminées par la structure topologique de la dynamique interne... C'est par la richesse topologique des dynamiques internes, leur caractère plus au moins intégré, que s'explique finalement la diversité presque infinie des apparences du monde extérieur, et peut-être aussi la distinction fondamentale entre vie et*

non-vie. »

Un postulat de base dans la classification des catastrophes soutient que la dynamique du système est variationnelle ; autrement dit l'équation d'évolution peut s'écrire sous la forme d'un gradient de potentiel V. Avec un seul degré de liberté, il est évident que toute équation d'évolution $\dot{A} = F(A)$ peut s'écrire comme $\dot{A} = -\partial V/\partial A$, où $V(A) = \int F(A)dA$. En dimension supérieure, ceci n'est pas possible en général.

Nous verrons, cependant, sur des exemples concrets, que si la bifurcation se produit de manière stationnaire (non oscillante), l'équation d'évolution peut encore s'écrire sous une forme potentielle, au voisinage de ce point de bifurcation.

Dans le cas où la bifurcation est oscillante (voir chapitre suivant), l'équation d'évolution ne peut plus s'écrire sous une forme potentielle ; nous sommes confrontés à une *catastrophe généralisée*. Le problème devient plus subtil, et nous ne disposons pas d'une classification aussi simple. Néanmoins, en adoptant le cadre formel des bifurcations, nous obtiendrons des éléments d'appréciation et de description fondés sur les symétries existantes du problème.

4.11 Problèmes

4.11.1 Problème : plus de détail sur la catastrophe ombilic hyperbolique

Écrire les trois équations permettant de déterminer la catastrophe ombilic hyperbolique dans l'espace (u, v, w).

Solution

À partir du potentiel $V(A, B)$ (équation 4.22), nous obtenons les équations des points fixes $\partial V/\partial A = \partial V/\partial B = 0$. L'annulation du déterminant de la matrice Hessienne, exprimant l'annulation de la concavité du potentiel V, conduit à : $\Delta = V_{AA}V_{BB} - (V_{AB})^2 = 0$ (voir équation 4.21). Ces conditions donnent les trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} &3A^2 + wB - u = 0, \\ &3B^2 + wA - v = 0, \\ &36AB - w^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Supposons que le paramètre w ne soit pas nul ($w \neq 0$). Les équations écrites ci-dessus conduisent alors à des équations paramétriques pour les deux paramètres u et v

$$\begin{aligned} u &= 3A^2 + \frac{w^3}{36A}, \\ v &= \frac{3w^4}{36^2A^2} + wA. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Fixons la valeur du paramètre w, et faisons varier la variable A (par exemple entre -2 et 2). À l'aide d'une calculette, nous obtenons un ensemble de couples (u, v)

pour chaque valeur de A permettant de tracer une courbe dans le plan (u, v) (voir figure 4.8) ; cette courbe est la projection dans le plan (u, v) de la catastrophe ombilic. Lorsque le paramètre w est nul ($w = 0$), la troisième condition relative à l'annulation de la concavité du potentiel V (équations 4.25) implique que soit la variable A ou soit la variable B s'annule. (i) Si $A = 0$, la première condition du même système (équations 4.25) implique $u = 0$, tandis que la deuxième impose que $v > 0$. (ii) Si $B = 0$, nous obtenons $v = 0$ et $u > 0$. En conclusion, si $w = 0$, la courbe de la catastrophe est l'ensemble des axes u et v. Enfin, notons que pour A petit, v est positif, quel que soit le signe de A, puisque le premier terme en $1/A^2$ dans la relation paramétrique pour v (équation 4.26) domine sur le seconde terme en A, tandis que u change de signe avec A. Il résulte de ces considérations que la courbe dans le plan (u, v) n'est pas continue ; elle est composée de morceaux disjoints.

Chapitre 5

Bifurcation de Hopf

Jusqu'à présent, nous avons étudié des bifurcations stationnaires correspondant à des changements de solutions stationnaires. Ce chapitre décrit quelques exemples de systèmes non linéaires présentant des bifurcations de Hopf, du nom de l'astronome mathématicien autrichien Eberhard Frederich Ferdinand Hopf (1902-1983), caractéristiques d'une transition d'une solution stationnaire vers une solution qui oscille dans le temps (solution oscillante). Nous généraliserons ces résultats dans le chapitre suivant.

5.1 L'oscillateur de van der Pol

Rappelons, en premier lieu, le système linéaire associé au circuit électrique en série composé d'une résistance R, d'une bobine d'induction L et d'un condensateur de capacité C (dit circuit RLC, voir figure 5.1). La seconde loi de Kirchhoff[1] stipule que la somme des différences de potentiel d'un circuit fermé est nulle, nous obtenons donc la relation suivante : $V_L + V_R + V_C = 0$, où $V_L = L\dot{I}$ est la tension aux bornes de la bobine et I le courant électrique, $V_R = RI$ est la tension aux bornes de la résistance, et $V_C = q/C$ est la tension aux bornes du condensateur et q la charge électrique du condensateur. En notant que la dérivée temporelle de la charge q est égale au courant électrique I, nous obtenons, à partir de la dérivée temporelle de la loi de Kirchhoff, l'équation suivante :

$$\ddot{I} + r\dot{I} + \omega_0^2 I = 0 \tag{5.1}$$

où nous avons posé $r = R/L$ et $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$, dite la fréquence propre de l'oscillateur. C'est le problème classique du circuit RLC qui est un exemple

[1] Les lois de Kirchhof, du nom du physicien allemand Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), se décrivent comme suit : (1) la somme des courants entrants dans un circuit est égale à la somme des courants sortants et : (2) la somme des tensions mesurées aux bornes des éléments d'un circuit en série est nulle.

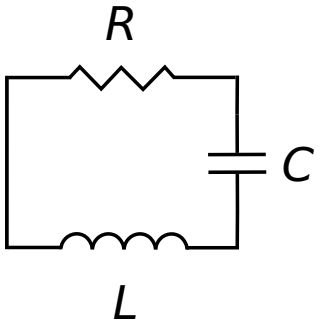


Figure 5.1 – Un circuit RLC classique.

de dispositif à bande-passante utilisée comme un filtre passe-bande ou coupe-bande.

En l'absence de générateur de courant, le système est purement dissipatif : quelles que soient les conditions initiales, le courant final s'annule au cours du temps par dissipation ohmique (phénomène associé à l'effet Joule responsable d'un dégagement de chaleur dans les conducteurs). En présence d'un générateur, le mouvement peut être entretenu : c'est le problème de l'oscillateur forcé. Si le générateur délivre une tension alternative (variation temporelle en $\sin(\omega t)$, avec ω, la pulsation telle que $\omega = 2\pi f$, où f est la fréquence), le courant dans le circuit suit le même comportement sinusoïdal en raison de la linéarité du système.

Or, dans de nombreux dispositifs usuels, il existe des composants dits « non linéaires » aux bornes desquels la tension n'est ni proportionnelle au courant, ni à sa dérivée[2]. Un exemple classique est celui de la « diode tunnel »[3], aux bornes de laquelle la tension varie non-linéairement avec le courant électrique (voir figure 5.2).

La courbe non linéaire reliant le courant à la tension aux bornes de la diode tunnel peut être subdivisée en une somme de petits segments de droite. Pour un intervalle donné de courant, lorsque la pente associée à un segment est positive, le dispositif fonctionne localement comme une résistance R, c'est-à-dire qu'il y a dissipation d'énergie par effet Joule et donc diminution de l'intensité du courant électrique. En revanche, lorsque la pente est négative, la situation

[2]Les bobines de Rogowski sont des tores placés autour d'un conducteur de telle sorte que le champs magnétique produit par le courant engendre aux bornes de la bobine une tension proportionnelle à la dérivée du courant.

[3]Une diode à effet tunnel est un dipôle électrique semi-conducteur, qui remplit la fonction d'une diode – qui ne laisse passer le courant que dans un seul sens – dans les domaines hautes fréquences (fréquences utilisées dans les fours à micro-ondes), avec des temps de réaction très courts grâce à l'utilisation de l'effet tunnel désignant la propriété que possède un objet quantique de franchir une barrière de potentiel, franchissement impossible selon la mécanique classique ; la diode tunnel permet notamment d'améliorer les performances des lasers.

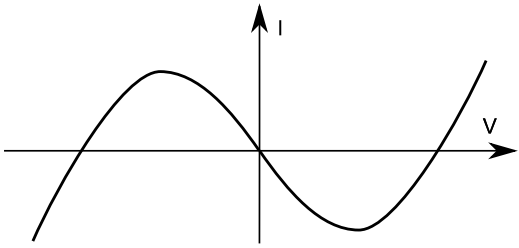


Figure 5.2 – Courbe de tension-courant pour un circuit comprenant une diode tunnel.

s'emballe : tout se passe comme si le dispositif possédait localement une « anti-résistance » (résistance négative), responsable d'une production d'énergie et donc d'une augmentation de l'intensité du courant électrique qui ne fait que s'amplifier jusqu'à ce que le dispositif rejoigne un domaine de pente à nouveau positive ; le système dissipe alors de l'énergie et le comportement initial « d'anti-résistance » s'amortit jusqu'à disparaître : nous sommes en présence du phénomène de saturation non linéaire, déjà évoqué précédemment (voir notamment paragraphes 3.2 et 3.9.2).

Formalisons le comportement d'une diode tunnel. En présence d'une diode tunnel dans un circuit RLC, la dérivée temporelle de la seconde loi de Kirchhoff nous permet d'écrire l'équation d'évolution du courant I telle que :

$$\ddot{I} + \frac{1}{L} dV_d/dt + \omega_0^2 I = 0 \tag{5.2}$$

où V_d est la tension aux bornes de la diode.

Dans un intervalle de courant caractérisé par une pente négative entre la tension et le courant (voir figure 5.2), nous pouvons écrire : $V_d = -RI$, où le paramètre R est positif afin d'expliciter le signe négatif le précédant. Cette même approximation est obtenue à partir du développement de Taylor au premier ordre pour un courant faible ($I \ll 0$), avec $-R = (\partial V_d/\partial I)_{I=0}$. Nous obtenons alors l'approximation suivante pour l'équation d'évolution du courant : $\ddot{I} - \frac{R}{L}\dot{I} + \omega_0^2 I = 0$. Le développement au premier ordre n'est valable que tant que les valeurs du courant demeurent au voisinage de 0 ; lorsqu'elles s'en éloignent, il faut prendre en considération les autres termes du développement de Taylor.

Notons qu'en raison de la symétrie du problème – changer le signe de la tension renverse le sens du courant –, la tension V_d aux bornes de la diode tunnel est une fonction impaire du courant ; ainsi, le développement de Taylor de l'équation à un ordre supérieur est cubique. Nous obtenons :

$$V_d = -RI + \alpha I^3 \ , \tag{5.3}$$

tel que le paramètre α est positif. En reportant cette expression dans l'équation

d'évolution (équation 5.2), nous obtenons :

$$\ddot{I} - R\left(1 - 3\frac{\alpha}{R}I^2\right)\dot{I} + \omega_0^2 I = 0\,, \tag{5.4}$$

Afin de réduire le nombre de paramètres du problème et de définir le seul paramètre de contrôle indépendant, recherchons les unités de temps et de courant caractéristiques du problème, soit $1/\omega_0$ pour l'unité de temps et $\sqrt{\omega_0/3\alpha}$ pour l'unité de courant. Effectuons les changements de variable $I' = I\sqrt{\omega_0/3\alpha}$ et $t' =\!\!\rightarrow t\omega_0$, où I' et t' sont deux variables adimensionnées. L'équation d'évolution du courant développée au troisième ordre (équation 5.4) s'écrit alors comme

$$\ddot{I}' - (\epsilon - I'^2)\dot{I}' + I' = 0\,. \tag{5.5}$$

En reprenant les notations I et t (au lieu de I' et t' afin d'éviter de trop multiplier les notations), nous obtenons l'équation dite de van der Pol[4] :

$$\ddot{I} - (\epsilon - I^2)\dot{I} + I\,, = 0 \tag{5.6}$$

où $\epsilon = R/\omega_0$ est le paramètre de contrôle indépendant. Une valeur positive (respectivement, négative) du paramètre de contrôle ϵ correspond à une résistance négative (respectivement, positive).

5.1.1 Discussion qualitative

Lorsque le paramètre de contrôle ϵ est positif (rappelons que, par convention, $\epsilon > 0$ correspond à une anti-résistance $R < 0$), et limitons-nous au terme linéaire de l'équation d'évolution $-\epsilon\dot{I}$ (voir équation 5.6), en supposant qu'initialement le courant est très faible ; nous avons donc l'équation linéaire suivante : $\ddot{I} - \epsilon\dot{I} + I = 0$ dont la solution temporelle est un courant oscillatoire dont l'amplitude croît exponentiellement. Pour des temps courts, lorsque l'amplitude du courant I est encore faible, le terme non linéaire peut toujours être négligé. Mais pour des temps plus longs, cette hypothèse cesse d'être valable, et nous devons prendre le terme non linéaire en considération $(-(\epsilon - I^2)\dot{I})$. Dans la phase croissante du courant I, lorsque le terme I^2 outrepasse le paramètre ϵ (voir le second terme de l'équation 5.6), le coefficient de la dérivée temporelle du courant $\dot{I}$ devient positif ; ce terme joue donc le rôle d'une résistance positive ce qui entraîne la décroissance de la valeur de I. Lorsque le terme I^2 devient plus faible que le paramètre ϵ, le courant I croît à nouveau, et ainsi de suite. Il y a donc un compromis entre le terme $-\epsilon\dot{I}$ qui tend à faire croître I et le terme antagoniste $+I^2\dot{I}$ qui donne lieu à une oscillation auto-entretenue du courant I, dont l'amplitude est de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$ (résultat pressenti par la condition de changement de signe du facteur $\epsilon I - I^2$ dans l'équation 5.6). Ainsi,

[4] L'équation de van der Pol, du nom de l'ingénieur-électronicien et physicien hollandais Balthasar van der Pol (1889-1959), est donc une équation différentielle du second ordre décrivant un oscillateur dissipatif avec un amortissement non linéaire ; l'expression usuelle est : $\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$, où x est la variable dynamique du système et μ est un paramètre scalaire décrivant l'intensité de l'amortissement non linéaire.

nous retrouvons le comportement cité précédemment du circuit RLC doté d'une diode tunnel, dans lequel le courant croît au cours du temps, jusqu'a atteindre des valeurs placées dans une région où la résistance effective $(I^2 - \epsilon)$ est positive.

5.1.2 Étude de la dynamique non linéaire

Dans l'équation d'évolution développée au troisième ordre (voir équation 5.6), la résistance effective $(I^2 - \epsilon)$ change de signe pour $I = \sqrt{\epsilon}$, ce qui indique que le courant I reste petit, de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$. Nous pouvons donc rechercher la solution sous forme d'une série de puissance de ce paramètre $\sqrt{\epsilon}$. Lorsque le paramètre ϵ est suffisamment petit, la série peut, *a priori*, être tronquée à un certain ordre : le régime de fonctionnement du dispositif est alors dit faiblement non linéaire. Dans ce régime, la solution finale devrait faiblement dévier de la solution oscillante obtenue en régime linéaire ; par continuité, nous pouvons donc tenter l'hypothèse que la solution en régime faiblement linéaire est également de nature oscillante. Nous allons ainsi rechercher une solution quasi sinusoïdale dont l'amplitude, notée ρ, est à déterminer. Si ce choix de solution s'avérait finalement inapproprié, nous en serions averti par la confrontation à une contradiction à une étape ou une autre de la résolution du problème. Ce type de raisonnement, fondé sur une hypothèse préalable effectivement validée si n'apparaît aucune contradiction au cours de la résolution du problème, est relativement courant en physique et constitue un procédé fiable de justification des choix que le physicien est amené à effectuer pour élaborer un modèle. Recherchons donc la solution du courant sous la forme suivante :

$$I \simeq \rho \sin(t) \; . \tag{5.7}$$

Notons que si l'oscillation est auto-entretenue, la puissance dissipée doit être nulle en moyenne sur une période d'oscillation. Comme l'énergie totale E de l'oscillateur[5] est donnée par :

$$E = \frac{1}{2}(\dot{I}^2 + I^2) \; , \tag{5.8}$$

la puissance instantanée dissipée, égale à la dérivée temporelle de l'énergie, s'exprime comme :

$$\dot{E} = \frac{1}{2}(2\dot{I}\ddot{I} + 2I\dot{I}) = (\epsilon - I^2)\dot{I}^2 \; , \tag{5.9}$$

où nous avons utilisé l'équation d'évolution développée au troisième ordre (équation 5.6) pour obtenir la seconde égalité. La moyenne de la puissance sur une période T est donnée par l'intégration pondérée de la puissance instantanée sur cet intervalle de temps, soit : $< \dot{E} > \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \dot{E}dt$.

[5] Notons que, par analogie, nous reconnaissons dans l'expression précédente une forme similaire à l'énergie mécanique égale à la somme des énergies cinétique et potentielle.

À l'aide de la solution oscillante pressentie pour le courant (équation 5.7), nous obtenons la valeur des deux moyennes[6] $< \dot{I}^2 >$ et $< I^2\dot{I}^2 >$:

$$< \dot{I}^2 >= \frac{1}{2}\rho^2 \quad \text{et} \quad < I^2\dot{I}^2 >= \frac{1}{8}\rho^4 \ . \tag{5.10}$$

Reportons ces résultats des moyennes dans l'expression de la puissance moyennée (équation 5.9) et posons $< \dot{E} >= 0$, puisque la puissance dissipée est nulle en moyenne, pour déterminer finalement la valeur de l'amplitude ρ du courant I :

$$\rho \simeq \pm 2\sqrt{\epsilon} \ . \tag{5.11}$$

5.1.3 Bifurcation de Hopf

L'équation d'évolution pour le courant développée au troisième ordre (voir équation 5.6) a donc pour solutions[7] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \epsilon < 0, & I = 0 \\ \epsilon > 0 & I = \pm 2\sqrt{\epsilon}\sin(t) \end{array} \right\} \tag{5.12}$$

puisque lorsque le paramètre de contrôle ϵ est négatif, la résistance effective est positive et le courant I décroît au cours du temps jusqu'à s'annuler ; lorsque le paramètre de contrôle est positif, le courant oscille au cours du temps avec une amplitude égale à $2\sqrt{\epsilon}$.

Ainsi, la valeur seuil $\epsilon = 0$ du paramètre de contrôle marque la frontière d'un changement qualitatif de solution ; elle représente le point de bifurcation, où la solution stationnaire $I = 0$ bifurque en deux branches de solutions symétriques qui oscillent dans le temps. En réalité toute solution en $\sin(t + \theta)$ (avec θ une phase) est également solution. Les solutions $\pm\sin(t)$ ne sont que des cas particuliers obtenus pour $\phi = 0, \pi$. Ainsi, il existe une famille continue de solutions paramétrées par la phase θ. Il s'agit là du premier exemple d'une bifurcation dite *bifurcation de Hopf*, du nom du mathématicien allemand Heinz Hopf (1894-1971).

La solution de courant nul $I = 0$ est stable lorsque le paramètre de contrôle ϵ est négatif ($\epsilon < 0$). En effet, la linéarisation de l'équation d'évolution développée au troisième ordre (équation 5.6) mène à l'équation suivante : $\ddot{I} - \epsilon\dot{I} + I = 0$, dont la solution est une fonction exponentielle de type $e^{\epsilon t}$ (multipliée par une fonction oscillante). Le courant décroît donc vers zéro au cours du temps lorsque le paramètre ϵ est négatif (solution stable), mais tend (sur un plan mathématique) vers l'infini lorsque le paramètre ϵ est positif (solution instable) ; la perte de stabilité de la solution $I = 0$ coïncide avec la naissance de la solution

[6] Notons qu'à proprement parlé, la valeur des moyennes ainsi obtenue n'est pas totalement exacte, puisque la période d'oscillation est modifiée par les effets non linéaires ; la prise en compte de ce déplacement non linéaire de la période revient à inclure des effets d'ordre supérieur dans le calcul des moyennes.

[7] Notons que nous nous intéressons aux solutions valables pour des temps longs pour ignorer les solutions transitoires.

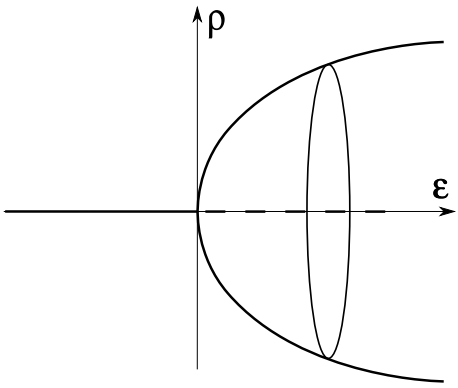


Figure 5.3 – Diagramme qualitatif de bifurcation pour l'instabilité de Hopf. On montre les branches stables et instables. L'amplitude ρ du cycle limite croît comme $\sqrt{\epsilon}$. La phase θ croît dans le temps, du fait que I oscille. Pour insister sur cet aspect (et surtout sur le fait que nous sommes en présence d'un problème à deux degrés de liberté), nous traçons dans la troisième direction un cycle pour indiquer que I est une fonction périodique du temps.

oscillante (voir figure 5.3, le diagramme de bifurcation traçant le comportement de l'amplitude ρ en fonction du paramètre de contrôle ϵ).

5.1.4 Espace des phases et cycle limite

Il est souvent pratique de représenter la dynamique d'un système dans *l'espace des phases*. En mécanique, par exemple, pour une particule ponctuelle à une dimension, seules deux conditions initiales, la vitesse et la position, sont nécessaires pour déterminer entièrement la trajectoire. Pour représenter l'évolution du système, il est possible de choisir de représenter l'évolution de la position $x(t)$ et de la vitesse $\dot{x}(t)$ en fonction du temps t. Mais en éliminant la variable temporelle t entre la position x et la vitesse $\dot{x}$, nous obtenons une relation directe entre la position x et la vitesse $\dot{x}$, ce qui permet de représenter cette relation dans le plan $(x, \dot{x})$, donc d'obtenir la trajectoire du système dans l'espace des phases.

L'équation de Newton (de type $m\ddot{x} - F(x, \dot{x}) = 0$, avec m la masse, x la variable position et F la force, fonction de la position x et de la vitesse $\dot{x}$), comme l'équation de van der Pol (voir équation 5.6), est une équation différentielle du second ordre en temps. L'espace des phases est construit à partir de la fonction x et de sa dérivée, $\dot{x}$. Pour un système dynamique décrit par une équation différentielle d'ordre n, nous avons besoin de n conditions initiales pour déterminer la solution. Autrement dit, la représentation de la trajectoire dans l'espace des phases revient à tracer la trajectoire dans un espace à n dimensions représenté par la variable x, sa premiere dérivée..., et sa $n$ème dérivée. Si la dynamique est donnée directement par n équations du premier

ordre, l'espace des phases est représenté par les n variables de ce système à n équations[8].

Considérons l'oscillateur de van der Pol, et posons $X = I$ et $Y = \dot{I}$. L'équation d'évolution du courant développée au troisième ordre (équation 5.6) peut être réécrite en termes de deux équations du premier ordre en temps pour le couple $(X,\ Y)$:

$$\dot{X} = Y \tag{5.13}$$

$$\dot{Y} = (\epsilon - X^2)Y - X\ . \tag{5.14}$$

L'élimination de la variable temporelle t entre X et Y permet d'obtenir la trajectoire dans l'espace des phases (X, Y). Pour une valeur petite du paramètre de contrôle ϵ, nous avons vu dans ce chapitre (voir équations 5.7 et 5.11) que la solution[9] du système de van der Pol est de la forme :

$$X = I = 2\sqrt{\epsilon}\sin(t)\ , \tag{5.15}$$

ainsi, nous pouvons exprimer la variable Y, égale à la dérivée temporelle de la variable X, comme :

$$Y = \dot{I} = 2\sqrt{\epsilon}\cos(t)\ . \tag{5.16}$$

La combinaison des deux équations précédentes pour s'abstraire de la variable temporelle, permet d'écrire l'équation suivante :

$$I^2 + \dot{I}^2 = X^2 + Y^2 = 4\epsilon \tag{5.17}$$

C'est l'équation d'un cercle (voir figure 5.4) de rayon $2\sqrt{\epsilon}$. Quelle que soit la condition initiale, la trajectoire dans l'espace des phases tend toujours vers ce cercle, lorsque le temps tend vers l'infini. Dans la pratique, le mot « infini » signifie un temps assez grand par rapport à un temps caractéristique du système. Pour l'oscillateur de van der Pol, il existe deux temps caractéristiques. Le premier est associé à l'inverse de la pulsation propre, et le second au taux de croissance de l'instabilité, qui est de l'ordre de $1/\epsilon$. C'est le plus long des deux temps qui importe. Étant donné que ϵ est petit, le taux associé à l'instabilité est le plus long des deux, et c'est bien à lui qu'il convient de se référer quand on parle de la limite des grands temps. La dynamique est comme « attirée » par cette trajectoire : nous sommes en présence d'un *cycle limite*[10] dit attracteur ou qualifié de stable. Lorsqu'une condition initiale correspond à un point à l'intérieur du cercle, l'amplitude X croît jusqu'à atteindre la limite du cercle. Inversement, si la condition initiale correspond à un point à l'extérieur

[8] Bien entendu, toute combinaison de ces variables constitue une nouvelle variable de l'espace des phases, qui peut, dans certains cas, s'avérer plus appropriée à la description du système.

[9] Nous retenons ici la solution avec un signe positif ; l'autre solution conduit exactement à la même conclusion.

[10] Un cycle limite est associé, en toute généralité, à une courbe fermée sur elle-même ; un cercle constitue un cas particulier de cycle limite.

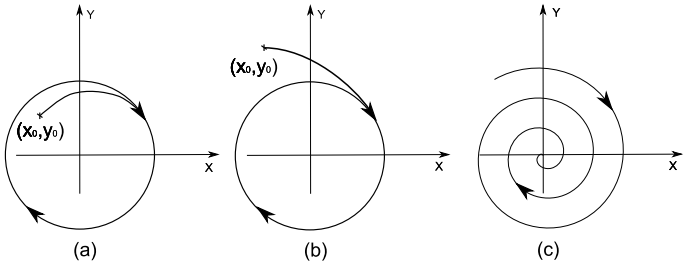


Figure 5.4 – (a) et (b) : $\epsilon > 0$ donnant lieu à un cycle limite stable. Ce cycle limite est issu de deux conditions initiales différentes représentées par $(X_0,\ Y_0)$. (c) : $\epsilon < 0$ il existe juste un point fixe stable en $(0, 0)$.

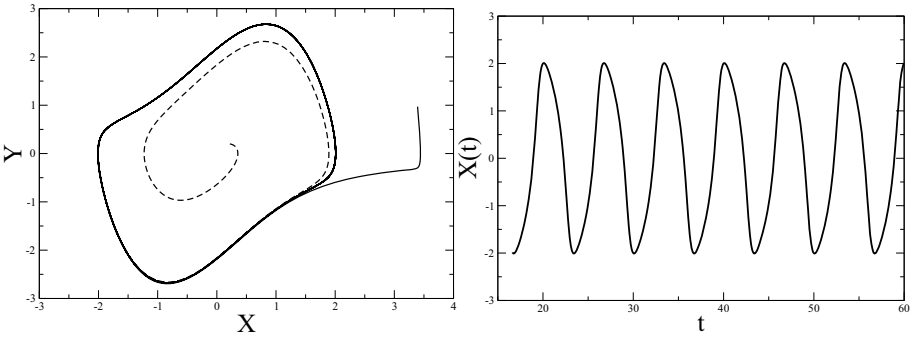


Figure 5.5 – (a) Cycle limite pour $\epsilon = 1$ avec deux conditions initiales différentes. Quelque soit la condition initiale (trait plein ou trait discontinu), on tend vers le cycle limite. (b) Le comportement de $X(t)$ montrant une déviation nette par rapport à une oscillation sinusoïdale.

du cercle, l'amplitude x décroît jusqu'à atteindre le cercle (voir figure 5.4, pour une représentation schématique de la trajectoire dans l'espace des phases).

Lorsque le paramètre de contrôle ϵ est négatif ($\epsilon < 0$), nous avons vu que, quelle que soit l'amplitude initiale, les variables X et Y décroissent au cours du temps jusqu'à atteindre le point origine $(0, 0)$. Le point origine est donc un point fixe attracteur (ou stable).

Que se passe-t-il si ϵ n'est pas assez petit ? Dans ce cas, on doit soit (i) effectuer un développement d'ordre plus élevé en ϵ, ou (ii) avoir recours à un calcul numérique. Les résultats numériques sont représentés sur la figure 5.5. On voit que si ϵ est assez grand, le courant $I(t)$ cesse d'être une fonction de type $\sin(t)$. Les non-linéarités génèrent des harmoniques d'ordre supérieur ($\sin(2t)$...).

5.2 Le modèle proie-prédateur, un exemple de dynamique de population

Le célèbre modèle proie-prédateur de Lotka-Voltera[11] (LV) (voir référence [48, 80]), est un modèle non linéaire décrivant l'interaction entre deux espèces biologiques, dont l'une, la population des prédateurs, croît au détriment de l'autre, l'espèce des proies. Le modèle (LV) est donné par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \dot{N} &= a_1 N(1 - b_1 M) \\ \dot{M} &= -a_2 M(1 - b_2 N) \end{aligned} \tag{5.18}$$

où M et N représentent respectivement le nombre de prédateurs et de proies, à un instant donné (ce sont des variables dépendant du temps : $M(t)$ et $N(t)$) et a_1, a_2, b_1, b_2 sont des constantes positives.

En l'absence de prédateur ($M = 0$), la population des proies (première équation du système ci-dessus) croît avec le temps ; la constante de temps caractéristique de cette évolution est égale à $1/a_1$.

Le premier terme de la première équation (i.e $a_1 N$) décrit l'augmentation du nombre de proies avec une constante de temps $1/a_1$ en l'absence de prédateurs (i.e. $M = 0$) ; le second terme ($-a_1 b_1 NM$) représente la chute de la population de proies en présence de prédateurs. De la même façon, le premier terme de la seconde équation exprime le fait que la population de prédateurs subit un déclin avec une constante de temps $1/a_2$ en l'absence de proies ; le deuxième terme $a_2 b_2 NM$ représente la source de vie (ou de survie) des prédateurs provenant de la présence de proies. Ce modèle, en dépit de sa simplicité, conduit à des comportements intéressants que nous allons développer dans ce qui suit.

5.2.1 Résultats essentiels issus du modèle Lotka-Voltera (LV)

Le système d'équations du modèle proie-prédateur (LV) (voir équations 5.18) admet deux points fixes définis par les conditions de dérivée première nulle $\dot{M} = \dot{N} = 0$. Le premier point fixe est le point trivial ($M = N = 0$), et le second point fixe, noté M_0 and N_0, est donné par :

$$M_0 = \frac{1}{b_1}, \qquad N_0 = \frac{1}{b_2} \ . \tag{5.19}$$

L'étude de stabilité linéaire s'effectue en imposant une petite pertubation M_1 et N_1 autour du point point M_0 et N_0, soit :

$$M(t) = M_0 + M_1(t) \ , \qquad N(t) = N_0 + N_1(t) \ . \tag{5.20}$$

[11] Le modèle de Lotka-Voltera, portant les noms du scientifique américain Alfred James Lotka (1880-1949) et du mathématicien-physicien italien Vito Voltera (1860-1940), est un modèle de dynamique de population mettant en jeu deux espèces de population dépendant l'une de l'autre.

En supposant que les perturbations M_1 et N_1 sont suffisamment petites pour que les termes non linéaires soient légitimement omis, nous ne retenons que les contributions linéaires en M_1 et N_1 des termes issus des équations d'évolution (voir équation 5.18) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \dot{N_1} &= a_1 N_1 - a_1 b_1 M_0 N_1 - a_1 b_1 N_0 M_1 \ , \\ \dot{M_1} &= -a_2 M_1 - a_2 b_2 N_0 M_1 N_1 \ . \end{aligned} \tag{5.21}$$

Nous obtenons donc un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants ; le système est alors dit autonome (sous-entendu au cours du temps). La solution générale de l'équation précédente (équation 5.21) est de la forme :

$$M_1(t) = Ae^{\omega t}, \quad N_1(t) = Be^{\omega t} \tag{5.22}$$

avec A et B des constantes et ω est un paramètre, *a priori* un nombre complexe, à déterminer. Lorsque le paramètre ω a une partie réelle positive, le terme $e^{\omega t}$ croît au cours temps et la solution (équation 5.22) est donc instable.

En reportant la solution générale (équation 5.22) dans le système d'équations du modèle (LV) (équation 5.21), nous obtenons un système homogène de deux équations algébriques et linéaires pour les constantes A et B. Pour que la solution soit non triviale (i.e. $(A, B) \neq (0, 0)$), le déterminant du système doit s'annuler. Cette condition de déterminant nul définit une équation, dite relation de dispersion, reliant le paramètre ω aux paramètres physiques ; appliquée au point fixe non trivial M_0 et N_0 (équation (5.19), la relation de dispersion s'écrit comme :

$$\omega^2 = -a_1 a_2 < 0 \ . \tag{5.23}$$

Puisque les constantes a_1 et a_2 sont positives, le paramètre $\omega = \pm i\sqrt{a_1 a_2}$, est un nombre imaginaire pur. La partie réelle de ω étant nulle, la solution (M_0, N_0) n'est ni stable, ni instable ; elle est dite neutre : la perturbation $e^{\omega t}$ ne croît ni ne décroît au cours du temps temps, la solution oscille simplement au cours du temps tout en gardant intacte son amplitude initiale. Au voisinage des points fixes, nous obtenons les solutions suivantes $M = M_0 + M_1$ et $N = N_0 + N_1$:

$$\begin{aligned} M &= M_0 + Ae^{i\sqrt{a_1 a_2}t} + c.c. \\ N &= N_0 + Be^{i\sqrt{a_1 a_2}t} + c.c. \end{aligned} \tag{5.24}$$

où l'abréviation *c.c.* vaut pour « complexe conjugué » (M et N sont des quantités réelles). En utilisant le système d'équations vérifié par les constantes A et B, le rapport de ces constantes A/B est déterminé par : $A/B = \pm ib_2/(a_1 b_1) \equiv \pm iC$, avec $C = b_2/(a_1 b_1)$.

Ainsi les nombres de proies N et de prédateurs M oscillent en quadrature de phase (i.e. ils évoluent avec un déphasage égal à $\pi/2$). Dans le régime linéaire, les amplitudes A et B ne peuvent être fixées (puisque les équations linéaires sont invariantes lorsque les nombres M et N sont multipliés par des constantes arbitraires).

En posant $B = \nu$ (alors $A = \pm i\nu C$), nous pouvons réécrire les solutions au voisinage du point fixe (voir équation 5.24) comme :

$$\begin{aligned} M &= M_0 \pm 2C\nu \sin(\sqrt{a_1 a_2}t) \ , \\ N &= N_0 + 2\nu \cos(\sqrt{a_1 a_2}t) \ . \end{aligned} \tag{5.25}$$

Nous en déduisons facilement la relation entre M et N : $(M - M_0)^2/C^2 + (N - N_0)^2 = 4\nu^2$. Cette relation décrit l'équation d'une ellipse (qui devient un cercle si $C = 1$, et dans ce cas le rayon du cercle vaut 2ν et son centre se trouve en (M_0, N_0) dans le plan (M, N)).

Si ce résultat rappelle celui du système van der Pol (dont la solution est oscillante), il ne s'agit pas là d'un cycle limite, car, ici, la trajectoire dans l'espace des phases (égal au rayon du cercle, lorsque $C = 1$) dépend des conditions initiales. Ainsi, ce cycle possède dans son voisinage un continuum de cycles issus de conditions initiales voisines. Or, lors de l'étude du système de van der Pol, nous avons vu que le cycle limite est une propriété intrinsèque du système ; il est déterminé par les paramètres physiques caractérisant le système et non par les conditions initiales indépendantes du système. Alors que pour l'oscillateur de van der Pol, une trajectoire issue de n'importe quelle condition initiale évolue vers le cycle limite (voir figure 5.5).

Il convient de préciser également que le modèle proie-prédateur de Lotka-Voltera ne donne pas lieu à une bifurcation. Ce résultat diffère de celui de l'oscillateur van der Pol, système dissipatif amorti, où la solution triviale existe pour tout paramètre de contrôle ϵ et devient instable pour des valeurs positives de ϵ ($\epsilon > 0$).

Le problème décrit par le modèle (LV) ressemble davantage à celui d'un oscillateur sans frottement (système conservatif). Un système conservatif effectue des oscillations non amorties et son amplitude dépend de la condition initiale. À titre d'exemple, le système du pendule sans frottement conserve son énergie, et l'amplitude maximale de l'angle par rapport à la verticale est égale à l'angle initial (en lâchant la masse sans vitesse initiale). Le même type de phénomène se produit pour le modèle (LV), puisque ce modèle possède aussi une loi de conservation. Pour le montrer, réécrivons le système d'équation initial du modèle (LV) (équation 5.18) en faisant abstraction de la variable temporelle, soit :

$$\frac{\dot{M}}{\dot{N}} = \frac{dM}{dN} = -\frac{a_2 M}{a_1 N}\frac{1 - b_2 N}{1 - b_1 M} \tag{5.26}$$

dont la solution est donnée par :

$$a_1 \ln(M) + a_2 \ln(N) - b_1 a_1 M - a_2 b_2 N = K \ , \tag{5.27}$$

où K est un facteur d'intégration (analogue à une constante de mouvement, comme l'énergie pour le pendule parfait).

En effectuant un développement limité autour du point fixe (M_0, N_0), la solution intégrée indépendante du temps (équation 5.27) se réduit à $a_1 b_1^2 (M -$

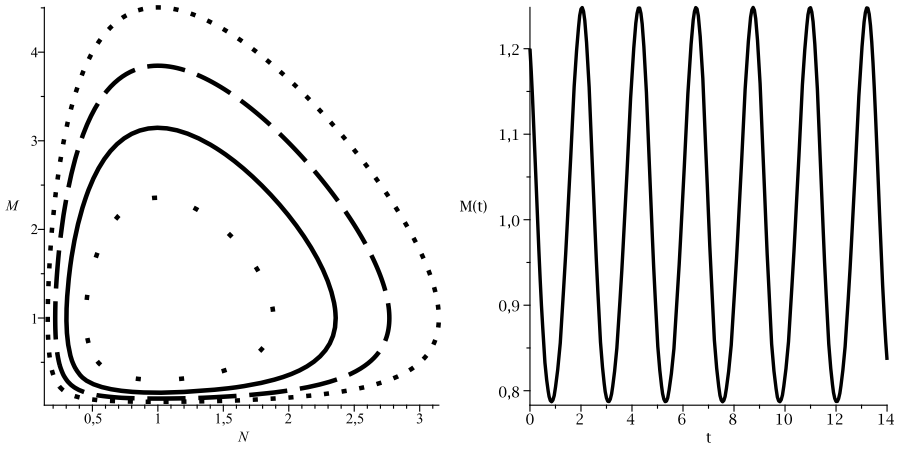


Figure 5.6 – À gauche, le portrait dans l'espace des phases du modèle de LV. De l'extérieur vers l'intérieur des cycles, nous avons fixé $K = -10, -9, -8, -7$. Ici on a choisi les valeurs des paramètres $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $b_1 = b_2 = 1$. À droite $M(t)$ en fonction du temps. $N(t)$ présente le même comportement qualitatif.

$M_0)^2 + a_2 b_2^2 (N - N_0)^2 = Cte$; c'est l'équation d'une ellipse, en accord avec la théorie linéaire présentée plus haut. En représentant le portrait des trajectoires dans l'espace de phases obtenu à partir de la solution indépendante du temps (équation 5.27), nous constatons que le modèle (LV) admet un nombre infini d'orbites fermées correspondant à autant de conditions initiales possibles (voir figure 5.6). Ce comportement contraste fortement avec celui du système de van der Pol pour lequel il existe une orbite unique vers laquelle tendent les trajectoires issues de n'importe quelle condition initiale.

5.2.2 Un modèle plus réaliste de la dynamique de populations conduisant à un cycle limite

Le modèle de Lotka-Voltera (LV) stipule qu'en l'absence de prédateur, la population de proies croît indéfiniment (équation 5.18 pour N, avec $M = 0$) ; cette approximation n'est valide que pour un nombre de proies N petit. Cependant, au-delà d'une certaine taille de population, cette hypothèse n'est plus valable, ne serait-ce qu'en considération de la limitation des ressources dont disposent les proies pour se nourrir.

Le modèle de base de (LV) a donc été amélioré pour engendrer plusieurs modèles plus réalistes. Le plus populaire de ces modèles est le modèle dit « logistique » qui adjoint au terme linéaire de l'équation de base (équation 5.18) un terme non linéaire, pour donner au total une contribution de régulation de type $N(1 - N/\bar{N})$. Ce terme est dit logistique, avec $\bar{N}$ le seuil au-delà duquel la population décroît ; ainsi, pour N petit, tel que $N \ll \bar{N}$, le terme $N/\bar{N}$ est

négligeable devant l'unité et nous retrouvons l'équation de base du modèle (LV) associé à un régime de croissance illimité. Au-delà de la limite $N = \bar{N}$, le terme $(1 - N/\bar{N})$ change de signe et la population décroît et ainsi de suite. Le point caractérisé par $N = \bar{N}$ est un point fixe stable de la dynamique des proies.

Il existe un second raffinement du modèle (LV), selon lequel le terme logistique est remplacé par une contribution dont la forme est inspirée par des observations de terrain (voir référence [32]) soit : $N^2(1 - N/\bar{N})/(N + c)$ avec c une constante (pour $c = 0$, nous retrouvons le modèle logistique). Le système d'équations couplées de ce modèle proie-prédateur s'écrit alors comme :

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \frac{a_1 N^2 (1 - \frac{N}{\bar{N}})}{N + c} - a_1 b_1 N M \ , \\ \dot{M} &= -a_2 M (1 - b_2 N) \ . \end{aligned} \tag{5.28}$$

En introduisant des variables sans dimension, : $N' = N\bar{N}$, $M' = M b_1$, et $t' = a_1 t$, les équations prennent la forme :

$$\dot{N} = \frac{N^2(1 - N)}{N + n} - NM \ , \tag{5.29}$$

$$\dot{M} = -\gamma M (m - N) \ , \tag{5.30}$$

où nous avons posé $n = c/\bar{N}$, $m = 1/(\bar{N} b_2)$ et $\gamma = a_2 b_2 \bar{N}/a_1$; nous avons, par ailleurs, gardé les mêmes notations pour les variables M et N pour éviter une prolifération inutile de notations. Le système d'équations 5.30 admet un point fixe donné par :

$$N_0 = m, \qquad M_0 = \frac{m(1 - m)}{n + m} \ , \tag{5.31}$$

avec la condition $m > 1$ (les variables N et M sont positives).

En notant M_1 et N_1 les déviations par rapport au point M_0 et N_0, étudions la stabilité linéaire autour du point fixe, en recherchant les nouvelles solutions des équations linéarisées sous la forme : $M_1 = Ae^{\omega t}$ et $N_1 = Be^{\omega t}$.

En introduisant ces expressions dans le système d'équations 5.30 couplées précédent, nous obtenons des contraintes sur les variables A et B que nous pouvons noter sous forme matricielle : $\mathcal{M}\mathbf{X} = \omega\mathbf{X}$, où $\mathcal{M}$ est une matrice 2×2 et $\mathbf{X}$ est le vecteur colonne A, B. En imposant que la matrice $\mathcal{M} - \omega\mathcal{I} = 0$ ($\mathcal{I}$ est la matrice identité) ait un déterminant nul (pour éviter la solution triviale $A = B = 0$), nous obtenons ainsi la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2 - Tw + D = 0 \ , \tag{5.32}$$

où T est la trace de la matrice $\mathcal{M}$ et D son déterminant ; en notant $\omega_\pm$, en général des nombres complexes, les deux valeurs propres de la matrice $\mathcal{M}$, nous pouvons expliciter la trace comme $T = \omega_+ + \omega_-$, et le déterminant comme $D = \omega_+ \omega_-$. Afin de simplifier les calculs algébriques sans altérer les principaux

résultats, posons $\gamma = 1$ et exprimons explicitement la trace et le déterminant de la matrice en fonction des paramètres du problème :

$$T = \frac{nm - 2nm - m^3}{(n+m)^2} , \quad D = \frac{m^2(1-m)}{n+m} . \tag{5.33}$$

Comme la condition $m > 1$ doit être respectée pour assurer que le nombre de prédateurs soit bien positif ($M_0 > 0$), le déterminant de la matrice est nécessairement positif ($D > 0$). Par ailleurs, la trace est positive ($T > 0$), pour tout paramètre n tel que

$$n > n_c \equiv \frac{m^2}{1-2m} . \tag{5.34}$$

Lorsque les deux quantités, le déterminant et la trace, sont positives ($D > 0$ et $T > 0$), les deux valeurs propres ont une partie réelle positive, et le point fixe (M_0, N_0) est instable. Inversement, si le paramètre n est tel que $n < n_c$, la partie réelle des deux valeurs propres est négative, et le point fixe est stable. Ainsi, la valeur du paramètre $n = n_c$ correspond au seuil critique de l'apparition de l'instabilité et définit un point de bifurcation. Comme les deux paramètres n et m sont reliés, il s'agit en réalité d'une ligne de bifurcation dans le plan (n, m). Pour $n = n_c$, la trace est nulle ($T = 0$), et la relation de dispersion (équation 5.32) se simplifie et détermine les valeurs propres par :

$$\omega^2 = -D = -\frac{m^2(1-m)}{n+m} \equiv -\omega_0^2 < 0 . \tag{5.35}$$

Ainsi, à la bifurcation, la partie réelle des valeurs propres est nulle, comme nous pouvions nous y attendre, tandis que la partie imaginaire est finie : nous sommes bien en présence d'une bifurcation de Hopf, et le paramètre critique $n = n_c$ correspond au point de bifurcation de Hopf. À la différence du modèle de Lotka-Voltera, où le paramètre ω est un nombre imaginaire pur, ce modèle amélioré fait intervenir un paramètre ω complexe possédant une partie réelle non nulle, sauf au point de bifurcation : c'est bien la caractéristique de toute bifurcation de Hopf.

La représentation des trajectoires dans l'espace des phases discrimine deux comportements selon le positionnement du paramètre n par rapport au point de bifurcation. Lorsque le paramètre n est inférieur au point de bifurcation n_c, le point fixe de la dynamique (M_0, N_0) est stable. Quelle que soit la condition initiale, la trajectoire s'enroule sous forme de spirale autour du point fixe. Le point fixe définit un « puits à spirales ». Lorsque le paramètre n est supérieur à n_c, le point fixe « repousse » la trajectoire : il devient une "source de spirales". La spirale finira-t-elle par saturer autour d'un cycle limite ? Deux cas se présentent en général : (i) la trajectoire finit par s'enrouler autour d'un cycle limite, comme dans le cas de l'oscillateur de van der Pol (voir figure 5.4), (ii) aucune saturation n'intervient au sein du modèle, et la spirale se déroule à l'infini.

En ce qui concerne le modèle de dynamique de population développé ci-dessus, le type de comportement des trajectoires dans l'espace des phases

dépend des valeurs des paramètres n et m. Pour des faibles valeurs des paramètres m et n, c'est le scénario (i) qui prévaut, tandis que le scénario (ii) se réalise pour des paramètres n et m grands. Ces résultats découlent de l'analyse numérique du modèle, mais il est également possible d'utiliser une démarche analytique pour analyser les trajectoires dans l'espace des phases (voir le prochain chapitre).

5.3 Réactions chimiques

Les réactions chimiques, omniprésentes dans la Nature et utilisées dans de nombreux domaines d'applications (industrie pharmaceutique, géologie, biologie, etc.), ont une place essentielle en sciences non linéaires. Outre les instabilités temporelles, introduisant notamment de nombreux exemples de bifurcations de Hopf, les réactions chimiques sont aussi souvent à l'origine de structurations spatiales. Cette naissance de l'ordre spatial, dite morphogenèse, est un des aspects cruciaux de l'étude des phénomènes non linéaires.

Avant de développer plus avant le comportement non linéaire des réactions chimiques, rappelons, au préalable, quelques notions indispensables à leur description.

5.3.1 La loi d'action et de masse

Considérons une réaction chimique au cours de laquelle des espèces chimiques, notées A_i, $(i = 1, ..., n)$, interagissent pour donner naissance à d'autres espèces notées A'_i, $(i = 1, ..., m)$.

Lorsque, au terme d'un temps plus ou moins long, le système comportant les substances A_i, A'_i n'évolue plus, on dit qu'il a atteint un état d'équilibre chimique. Cet équilibre, actualisé seulement si la réaction chimique se produit dans les deux sens à des vitesses comparables (réaction réversible), permet de noter la réaction chimique comme :

$$N_1 A_1 + N_2 A_2 + ... \rightleftharpoons N'_1 A'_1 + N'_2 A'_2 + ... \tag{5.36}$$

où les paramètres N_i et N'_i, dits coefficients stœchiométriques, représentent le nombre de moles de chaque espèce A_i et A'_i. Désignons par C_i et C'_i, les concentrations molaires de chaque espèce A_i et A'_i.

À l'équilibre, la loi d'action et de masse, issue de la thermodynamique, s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{C_1'^{N'_1} C_2'^{N'_2} ....}{C_1^{N_1} C_2^{N_2} ....} = K \ , \tag{5.37}$$

où K est une fonction de la température appelée *constante d'équilibre*. Par exemple, la synthèse de l'amoniaque est décrite par la réaction suivante

$$N_2 + 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3 \ . \tag{5.38}$$

La loi d'action de masse associée s'écrit donc comme :

$$\frac{(NH_3)^2}{(N_2)(H_2)^3} = K \ , \tag{5.39}$$

où la notation $'(A)'$ se réfère à la concentration de l'espèce A.

5.3.2 Cinétique de réaction

Lorsque la réaction précédente est irréversible, c'est-à-dire lorsqu'un sens de la réaction est privilégié par rapport à l'autre, le symbole $\rightleftharpoons$ est remplacé par $\rightarrow$ dans la notation de la réaction :

$$N_1A_1 + N_2A_2 + ... \rightarrow N_1'A_1' + N_2'A_2' + ... \tag{5.40}$$

À la différence des réactions à l'équilibre, caractérisées par un échange permanent entre espèces dans les deux sens à des vitesses comparables, les réactions irréversibles s'illustrent par des vitesses de réaction très différentes dans un sens et dans l'autre. Nous voyons ainsi que la cinétique chimique, c'est-à-dire l'étude de la vitesse de réaction de passage des réactifs initiaux A_i aux nouveaux produits A_i', joue un rôle essentiel dans l'analyse des réactions chimiques.

Notons n_i et n_i' les nombres de moles des espèces A_i et A_i' à un instant donné. Au cours de la réaction pendant un laps de temps dt, le nombre de moles n_i diminue d'une quantité $-dn_i$, tandis que le nombre de moles n_i' s'enrichit de dn_i'. La condition de conservation de la masse impose

$$-\frac{dn_1}{N_1} = -\frac{dn_2}{N_2} = ... = \frac{dn_1'}{N_1'} = \frac{dn_2'}{N_2'} = ... \equiv d\lambda \ , \tag{5.41}$$

où λ est un paramètre dit « d'avancement de la réaction ».

En notant v_i, la vitesse de réaction de déclin de l'espèce A_i, et v_i', la vitesse de réaction de croissance de l'espèce A_i' (l'unité des vitesses est en mole par seconde[12]), nous avons :

$$v_i = -\frac{dn_i}{dt} = N_i\frac{d\lambda}{dt}, \qquad v_i' = \frac{dn_i'}{dt} = N_i'\frac{d\lambda}{dt}, ... \tag{5.42}$$

Ces différentes vitesses sont reliées entre elles par les relations

$$\frac{v_1}{N_1} = \frac{v_2}{N_2} = ... = \frac{v_i}{N_i} = ... = \frac{v_1'}{N_1'} = \frac{v_2'}{N_2'} = ... = \frac{v_i'}{N_i'} = ... \tag{5.43}$$

Puisque tous ces rapports sont égaux, il est donc possible de définir la vitesse de réaction v indépendamment du choix d'une substance particulière (ceci est

[12] Il est fréquent que la vitesse soit définie par rapport à la variation de la concentration volumique et non par rapport au nombre de moles. Dans ce cas $v \sim dC_i/dt$ et par conséquent, comme la concentration est exprimée en mole par volume, l'unité de vitesse est exprimé (en système international) en $Mole\, m^{-3}s^{-1}$

assez intuitif, car la réaction n'a de sens que lorsque toutes les différentes espèces prenant part à la réaction réagissent ensemble). Nous obtenons donc la relation suivante

$$v = -\frac{1}{N_1}\frac{dn_1}{dt} = -\frac{1}{N_2}\frac{dn_2}{dt} = ...\frac{1}{N_1'}\frac{dn_1'}{dt} = \frac{1}{N_2'}\frac{dn_2'}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} , \tag{5.44}$$

où v est donc égale à la dérivée temporelle de la quantité d'avancement de la réaction λ définie plus haut.

Comme la concentration C_i de la substance A_i s'écrit comme $C_i = n_i/V$, où V est le volume où a lieu la réaction, nous avons :

$$\frac{dC_i}{dt} = -\frac{v_i}{V} . \tag{5.45}$$

Munis de ces préliminaires, nous pouvons maintenant écrire les équations de réactions chimiques faisant intervenir des termes non linéaires couplés pour les concentrations C_i et C_i'.

5.3.3 Équations d'évolution non linéaires

Commençons d'abord par un exemple simple dans le but de clarifier certains points. Considérons le cas de l'hydrogénation de l'oxyde d'azote[13]. :

$$2NO + 2H_2 \rightarrow N_2 + 2H_2O \tag{5.46}$$

L'expérience montre que, si la pression partielle du monoxyde d'azote NO est fixée, en variant la pression partielle de l'hydrogène moléculaire H_2, disons successivement de p_0, $2p_0$, $3p_0$, alors la vitesse de réaction varie dans les mêmes proportions : elle varie respectivement de v, à $2v$, et $3v$. Autrement dit, la vitesse de réaction augmente avec la pression partielle. Comme il existe une relation linéaire entre la pression et la concentration (loi des gaz parfaits)[14] , ceci revient à dire que la vitesse de réaction croît linéairement avec la concentration de l'hydrogène moléculaire H_2.

Si, au contraire, la pression partielle de l'hydrogène moléculaire H_2 est maintenue fixe, en variant la pression partielle du monoxyde d'azote NO de la même manière, nous observons que la vitesse de réaction passe par les valeurs successives de v, à $4v$ et $9v$. Ceci implique que la vitesse de réaction croit quadratiquement avec la concentration de N_2.

Ces observations nous permettent d'écrire l'expression de la vitesse de réaction suivante :

$$v = k[H_2][NO]^2 , \tag{5.47}$$

[13] Cette réaction requiert, en l'absence de catalyseur, une forte température, de l'ordre de 800 °C

[14] Au sein d'un volume V de réaction, la concentration est souvent telle qu'on puisse considérer, avec une bonne approximation et dans bon nombre de cas, que l'équation d'état du gaz suit la loi des gaz parfaits, soit $P = nRT/V$ où P est la pression, T la température, et R la constante des gaz parfaits.

où k est une constante de réaction (notons que la vitesse n'est donc pas égale à la quantité $k[H_2]^2[NO]^2$ comme le laisserait à penser l'équation d'équilibre chimique). k dépend notamment de la température. Ce type de réaction est dit complexe puisque les exposants dans l'expression de la vitesse ne sont pas égaux au coefficient stœchiométrique pondérant l'espèce chimique dans l'équation de réaction. Une réaction est qualifiée de simple si :

$$v = kC_1^{N_1}C_2^{N_2}..... \tag{5.48}$$

où k est la constante de réaction.

Notons également que la plupart des réactions chimiques se réalisent en plusieurs étapes. Mais si l'étude de chaque réaction nécessitait la prise en compte de toutes les étapes, nous ferions face à un problème beaucoup trop lourd pour le résoudre simplement. Heureusement, de nombreuses simplifications sont possibles ; la plus importante d'entre elles est l'élimination adiabatique : seules les réactions lentes importent, puique les variables rapides sont adiabatiquement asservies aux variables lentes (i.e. elles s'adaptent rapidement). Ceci n'est pas sans nous rappeler la notion d'élimination adiabatique que nous avons évoquée au paragraphe 2.3.3 du chapitre 2 .

5.3.4 Le Bruxellateur

Nous allons dans cette partie étudier un modèle de réaction chimique simple mais riche de comportements divers ; le Bruxellateur. Cette appellation communément admise, est issue du nom de la capitale belge, Bruxelles, où l'équipe du chimiste russe – naturalisé belge – Ilya Viscount Prigogine (1917-2003) ayant reçu le prix Nobel de Chimie en 1977 pour ses travaux sur les structures dissipatives, a introduit ce modèle.

Désignons par X et Y les concentrations des deux espèces essentielles de la réaction (les variables lentes). La réaction chimique se réalise en 4 étapes notées de la façon suivante :

$$A \to X, \qquad \text{de constante de réaction} \quad k_1 \tag{5.49}$$

$$X \to Produits, \qquad \text{de constante de réaction} \quad k_2 \tag{5.50}$$

$$2X + Y \to 3X, \qquad \text{de constante de réaction} \quad k_3 \tag{5.51}$$

$$B + X \to Y, \qquad \text{de constante de réaction} \quad k_4 \tag{5.52}$$

Le terme *Produits* dans la seconde étape ci-dessus (équation 5.52) se réfère à un produit intermédiaire de la réaction, sans intérêt pour nous alors que les espèces A et B sont des produits intermédiaires jouant un rôle essentiel dans la réaction. L'équation d'évolution pour la variable X est simple à écrire : X est produit par A, dont la vitesse de réaction est $k_1[A]$, où $[A]$ est la concentration de l'espèce A (par la suite, nous omettrons le crochet, pour désigner les concentrations). L'espèce X se consume ensuite avec la constante de réaction k_2 pour donner un produit intermédiaire sans importance. Ceci donne une contribution $-k_2X$ à la

vitesse de réaction. Ensuite, dans la troisème étape, deux moles de l'espèce X réagit avec l'espèce Y pour produire $3X$; ceci conduit à la contribution k_3X^2Y dans la vitesse de réaction. Enfin, l'espèce X produit Y avec une constante de réaction k_4. En conclusion, nous aboutissons à l'équation différentielle suivante pour l'évolution de la concentration de l'espèce X (notée X) :

$$\dot{X} = k_1A - k_2X - k_4BX + k_3X^2Y \ . \tag{5.53}$$

Un raisonnement calqué sur le précédent conduit à l'équation d'évolution de la concentration Y

$$\dot{Y} = k_4BX - k_3X^2Y \ . \tag{5.54}$$

En posant les changements de variables suivants :

$$X = \sqrt{\frac{k_2}{k_3}}\bar{X}, \quad Y = \sqrt{\frac{k_2}{k_3}}\bar{Y}, \quad t = \frac{\bar{t}}{k_2} \ , \tag{5.55}$$

nous obtenons les équations couplées d'évolution de X et de Y :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= a - X - bX + X^2Y \ , \\ \dot{Y} &= bX - X^2Y \ , \end{aligned} \tag{5.56}$$

avec a et b deux paramètres définis par :

$$a = A\sqrt{k_2k_3}, \quad b = \frac{k_4B}{k_2} \ . \tag{5.57}$$

Ces équations admettent un point fixe donné par

$$X_0 = a, \qquad Y_0 = \frac{b}{a} \ . \tag{5.58}$$

L'étude de la stabilité linéaire autour de ce point fixe (voir les exemples précédents d'études de stabilité linéaire), nous conduit à l'équation caractéristique suivante :

$$\omega^2 - \omega T + D = 0 \ , \tag{5.59}$$

où la quantité ω désigne les valeurs propres de la matrice de stabilité, $T = b - (1 + a^2) < 0$ est la trace de la matrice et $D = a^2$ est son déterminant.

Lorsque le paramètre b est égal à la valeur critique $b_c = (1 + a^2)$, la valeur propre $\omega = \pm ia$ est un nombre imaginaire pur, ce qui implique un comportement oscillatoire au cours du temps pour les concentrations X et Y. Pour des valeurs du paramètre b supérieures à la valeur critique b_c, la trace de la matrice de stabilité est positive ($T > 0$), et compte tenu du fait que le déterminant D de la matrice est toujours positif, les deux valeurs propres, complexes conjuguées l'une de l'autre, acquièrent une partie réelle positive et le point fixe perd sa stabilité. Pour des valeurs du paramètre b inférieures à la valeur critique b_c ($b < b_c$), les parties réelles des deux valeurs propres sont négatives, et le point fixe est stable. La valeur critique du paramètre $b = b_c$ marque la frontière d'une bifurcation de Hopf.

Chapitre 6

Équation d'amplitude universelle au voisinage d'une bifurcation de Hopf

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié plusieurs systèmes de différents domaines introduisant une bifurcation de Hopf : électronique (circuit *RLC* incluant une diode tunnel, voir paragraphe 5.1 sur l'oscillateur van der Pol), dynamique de population (modèles proie-prédateur, voir paragraphe 5.2 pour le modèle Lotka-Voltera, le modèle logistique classique et le modèle logistique raffiné), chimie (cinétique chimique, voir paragraphe 5.3 pour le modèle Bruxellateur). Nous souhaitons à présent montrer comment se manifeste la notion d'universalité de l'évolution non linéaire au voisinage du point critique de la bifurcation, puisque, quel que soit le système étudié, la forme de l'équation d'amplitude est générique.

6.1 Dérivation de l'équation d'amplitude complexe

Pour établir l'équation d'amplitude générique de tout système présentant une bifurcation de Hopf, partons d'un modèle explicite[1], par exemple de l'oscillateur van der Pol ; et rappelons pour ce système, l'équation d'évolution $\ddot{I} - (\epsilon - I^2)\dot{I} + I = 0$ (voir équation 5.6), où I est le courant et ϵ le paramètre de contrôle.

La première non-linéarité de l'équation d'amplitude universelle que nous allons établir est cubique. Nous pourrions être tenté de croire, que cette non-linéarité cubique est la conséquence du développement de Taylor effectué au

[1] À la fin de ce chapitre, nous proposons de résoudre le problème du Bruxellateur (voir paragraphe 6.4.2).

troisième ordre pour l'équation d'évolution du courant (voir paragraphe 5.1). Pour se convaincre qu'il n'en est rien, rajoutons à l'équation de départ (équation 5.6) un terme quadratique. Le modèle de van der Pol ainsi modifié prend la forme :

$$\ddot{I} - (\epsilon - I^2)\dot{I} + I + \gamma I^2 = 0 \,, \tag{6.1}$$

où γ est un autre paramètre de contrôle, lorsque ce paramètre est nul, nous retrouvons bien l'équation associée au modèle de van der Pol classique (équation 5.6). L'équation modifiée (équation 6.1) admet un point fixe trivial, $I_0 = 0$. L'étude de sa stabilité linéaire, en cherchant une solution de l'équation linéarisée sous la forme $I = \delta I \sim e^{i\omega t}$ (δI est supposé petit), nous fournit la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2 - \epsilon\omega + 1 = 0 \,. \tag{6.2}$$

La solution de cette équation de dispersion est donnée par :

$$\begin{aligned} \omega_\pm &= \frac{1}{2}[\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4}], \qquad \text{pour } \epsilon > 2 \,, \\ \omega_\pm &= \frac{1}{2}[\epsilon \pm i\sqrt{4 - \epsilon^2}], \qquad \text{pour } \epsilon < 2 \,. \end{aligned} \tag{6.3}$$

La valeur $\epsilon = 0$ correspond à une situation critique ; lorsque ce paramètre est positif $\epsilon > 0$, le point fixe $I = I_0 = 0$ est instable (puisque la partie réelle de ω est positive), tandis que pour des valeurs du paramètre ϵ négatives, le point fixe est stable (puisque la partie réelle de ω est négative). Pour $\epsilon \simeq 0$ (avec $\epsilon > 0$), ω est un nombre imaginaire pur, égal à $\pm i$, ce qui est la signature d'une bifurcation de Hopf.

6.1.1 Analyse multi-échelle

Au voisinage du seuil de la bifurcation de Hopf (ϵ petit), développons au premier ordre en ϵ les valeurs propres du système de van der Pol modifié (voir équation 6.3) pour obtenir :

$$\omega_\pm = \frac{1}{2}\epsilon \pm i \,. \tag{6.4}$$

Dans le régime linéaire, le courant $I(t)$ recherché sous la forme de $I \sim e^{\omega t}$ s'écrit comme :

$$I \simeq a e^{it} e^{(\epsilon/2)t} \,, \tag{6.5}$$

où nous avons utilisé l'expression approchée de la valeur propre ω (équation 6.4) et a est une amplitude quelconque[2]. Comme nous nous restreignons à la région où la valeur du paramètre ϵ est très petite ($\epsilon \ll 1$), *régime dit faiblement non linéaire*, l'expression de I dans le régime linéaire (équation 6.5) devrait constituer une assez bonne approximation.

[2] Toute multiplication d'une équation linéaire par une constante arbitraire laisse l'équation invariante ; par conséquent l'amplitude du courant ne peut être déterminée dans un régime linéaire. Seule une analyse non linéaire du système contraint l'amplitude.

Dans ce régime, le courant $I(t)$ (équation 6.5) est le produit d'une fonction oscillante (de pulsation unité) et d'un terme qui croît exponentiellement au cours du temps (lorsque $\epsilon > 0$) ; mais, cette croissance exponentielle est lente comme l'atteste la présence du paramètre ϵ devant le temps t dans l'argument de la fonction exponentielle. Ainsi, le courant $I(t)$ peut être considéré, selon une perspective multi-échelle[3], comme une fonction de deux variables indépendantes : le temps t (la variable rapide) et la variable T telle que $T = \epsilon t$ (la variable lente), soit :

$$I = I(t, T) \; . \tag{6.6}$$

Comme les variables t et T sont traitées comme deux variables indépendantes du courant I, les différentielles première et seconde de I s'expriment en fonction des dérivées partielles :

$$\begin{aligned} dI &= \frac{\partial I}{\partial t} dt + \frac{\partial I}{\partial T} dT \\ d^2 I &= \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} dt^2 + 2 \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial T} dt dT + \frac{\partial^2 I}{\partial T^2} dT^2 \; . \end{aligned}$$

et la dérivée du courant I par rapport à la variable rapide t s'écrit ainsi comme :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{\partial I}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial I}{\partial T} \\ \frac{d^2 I}{dt^2} &= \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial T} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 I}{\partial T^2} \; . \end{aligned} \tag{6.7}$$

À titre d'exemple, prenons pour le courant I, une fonction f de la forme :

$$I(t) = f(t) = t \sin(\epsilon t) + (\epsilon t)^2 + \epsilon t e^t \; . \tag{6.8}$$

La dérivée de cette fonction f par rapport au temps t s'écrit :

$$\frac{df}{dt} = \sin(\epsilon t) + \epsilon t \cos(\epsilon t) + 2\epsilon^2 t + (\epsilon + \epsilon t) e^t \; . \tag{6.9}$$

Maintenant, selon l'analyse multi-échelle, la fonction $f(t)$ est considérée comme fonction de deux variables indépendantes t et $T = \epsilon t$:

$$f(t, T) = t \sin(T) + T^2 + T e^t \; . \tag{6.10}$$

Le calcul des dérivées partielles donnent : $\partial f / \partial t = \sin(T) + T e^t$ et $\partial f / \partial T = t \cos(T) + 2T + e^t$, de telle sorte qu'à partir de l'expression de la dérivée de f en fonction des dérivées partielles (voir équation 6.7), nous obtenons :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial f}{\partial T} = \sin(T) + T \cos(T) + 2\epsilon T + (\epsilon + T) e^t \; , \tag{6.11}$$

[3] Voir le paragraphe 2.3.3 du chapitre 2, où nous avons introduit l'approche multi-échelle, lorsqu'interviennent des variables évoluant sur des échelles de temps très différentes.

expression bien identique au calcul direct de la dérivée de f (équation 6.9).

L'intérêt de la perspective multi-échelle, et de la séparation associée des variables lentes et rapides, réside dans le fait que le paramètre ϵ apparaît explicitement dans les équations d'évolution, ce qui facilite le classement des différents termes en puissance de ϵ.

Revenons maintenant à l'oscillateur de van der Pol et l'expression du courant dans le régime linéaire (équation 6.5) ; lorsque le paramètre ϵ est négatif[4] ($\epsilon < 0$), le courant I s'annule au bout d'un certain temps ; le point fixe $I = 0$ est donc une solution stable. Lorsque le paramètre ϵ s'annule, le point fixe $I = 0$ devient neutre, puis instable quand $\epsilon > 0$ au profit d'une oscillation d'une certaine amplitude (voir équation 5.12). Nous pouvons nous attendre à ce que le courant I soit proportionnel à une certaine puissance positive de ϵ. Cette puissance ne peut pas être plus petite que $1/2$ ($I \sim \epsilon^{\alpha}$, avec $\alpha < 1/2$) sinon le terme en ϵ serait toujours dominant devant I^2 dans l'équation d'évolution de l'oscillateur modifiée (équation 6.1) ; ce qui annihilerait les effets non linéaires (l'équation d'évolution reviendrait à celle d'un circuit RLC classique, voir équation 5.1 du paragraphe 5.1). Pour développer le courant en série de puissance, le terme de plus petite puissance possible[5] est donc $\epsilon^{1/2}$. Le constat précédent nous incite donc à admettre que la première contribution dominante du courant est de l'ordre de la racine carrée du paramètre ϵ, soit $I(t,T) \sim \epsilon^{1/2}$. En toute généralité, le courant est développé plus complètement en une série analytique en puissance de $\sqrt{\epsilon}$:

$$I(t,T) = \epsilon^{1/2} I_1(t,T) + \epsilon I_2(t,T) + \epsilon^{3/2} I_3(t,T)... \tag{6.12}$$

La méthode consiste ensuite à reporter cette expression pour le courant (équation 6.12) et utiliser l'expression des dérivées du courant obtenues selon la perspective multi-échelle (équation 6.7) dans l'équation d'évolution de l'oscillateur van der Pol modifiée (équation 6.1) afin de déduire les contributions successives en puissance de ϵ.

Analyse multi-échelle : développement à l'ordre $\epsilon^{1/2}$

À cet ordre, l'équation d'évolution de l'oscillateur van der Pol modifié (équation 6.1) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial t^2} + I_1 = 0 \,. \tag{6.13}$$

dont la solution est donnée par :

$$I_1(t,T) = A(T)e^{it} + A^*(T)e^{-it} \,, \tag{6.14}$$

[4] Rappelons que lorsque le paramètre ϵ est négatif, la résistance effective du circuit est positive (voir équations 5.7 et 5.11 dans le paragraphe 5.1).

[5] Il faut noter que quelquefois le choix de la puissance pour développer les termes en série de puissance d'un paramètre relève d'un certain art, et ne peut être définitif qu'après une inspection approfondie des résultats finaux. Cependant, pour de nombreux problèmes rencontrés en sciences non linéaires, la procédure selon laquelle le choix est effectué est bien établie et sa maîtrise s'acquiert vite avec la pratique.

où A, et A^* son complexe conjugué, sont *a priori* des fonctions de la variable lente T puisque cette fonction résulte de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (équation 6.13).

Analyse multi-échelle : développement à l'ordre ϵ

À cet ordre, l'équation d'évolution de l'oscillateur van der Pol modifié (équation 6.1) devient :

$$\frac{\partial^2 I_2}{\partial t^2} + I_2 = -\gamma I_1^2 = -\gamma[A^2 e^{2it} + c.c. + (A^*)^2] \,, \tag{6.15}$$

où l'abréviation *c.c.* vaut pour « complexe conjugué ». La solution de cette équation est formée de la somme d'une solution de l'équation homogène (c'est-à-dire l'équation sans second membre, i.e. $\partial^2 I_2/\partial t^2 + I_2 = 0$), donnée par $B(T)e^{it} + c.c.$ (B étant un facteur d'intégration au même titre que A), et d'une solution particulière de l'équation complète. Étant donné que la forme de la solution du problème homogène est formellement identique à celle obtenue de l'équation développée à l'ordre $\epsilon^{1/2}$ (voir équation 6.14), nous pouvons absorber B dans A, grâce au changement de variable : $A \to A + \sqrt{\epsilon}B$. La solution qui présente un intérêt n'est donc autre que la solution particulière qui a la forme (obtenue par identification au second membre de l'équation 6.15)

$$I_2 = \frac{\gamma}{3} A^2 e^{2it} + c.c. - \gamma A A^* \,. \tag{6.16}$$

Analyse multi-échelle : développement à l'ordre $\epsilon^{3/2}$

À cet ordre, nous pouvons écrire l'équation d'évolution de l'oscillateur van der Pol modifié (équation 6.1) comme :

$$\frac{\partial^2 I_3}{\partial t^2} + I_3 = -2\frac{\partial^2 I_1}{\partial t \partial T} + \frac{\partial I_1}{\partial t} + I_1^2 \frac{\partial I_1}{\partial t} + 2\gamma I_1 I_2 \tag{6.17}$$

Utilisons les résultats obtenus aux ordres qui précèdent, pour réécrire le membre de droite de cette équation sous la forme d'une somme de deux contributions :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_3}{\partial t^2} + I_3 &= \left[2i\frac{\partial A}{\partial T} - iA + iA^2 A^* (1 + i\frac{10\gamma^2}{3}) \right] e^{it} + G(T)e^{3it} \\ &\equiv F(T)e^{it} + G(T)e^{3it} \end{aligned} \tag{6.18}$$

avec $F(T) = 2i\frac{\partial A}{\partial T} - iA + iA^2 A^*(1 + i\frac{10\gamma^2}{3})$ et $G(T)$ est une fonction proportionnelle à A^3, qui s'avère sans importance à cet ordre-ci en regard du rôle que joue la fonction $F(T)$. En effet, la solution de l'équation développée à l'ordre $\epsilon^{3/2}$ (équation 6.18) est donnée par la somme de la solution de l'équation homogène de type $C(T)e^{it} + c.c.$ et d'une solution particulière de l'équation complète. Or le second membre de celle-ci (i.e. $F(T)e^{it} + G(T)e^{3it}$, voir équation

6.18) contient un terme en e^{it}, dit *résonant*. En effet, la pulsation de ce terme, égale à l'unité, est identique à la valeur propre de l'opérateur de l'équation homogène. Cette situation est similaire au phénomène de résonance d'un oscillateur linéaire excité par une force de fréquence égale à sa fréquence propre ; le phénomène de résonance conduit à une divergence (en l'absence de frottement et notre problème est bien l'analogue formel d'un tel problème) de l'amplitude de l'oscillateur. Ainsi, l'unique façon pour éviter une réponse non physique du système, est d'annuler la fonction $F(T)$, le préfacteur de e^{it}, pour en déterminer une certaine condition. Cette condition détermine l'équation d'évolution recherchée que doit satisfaire la variable $A(T)$:

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \frac{1}{2}A - |A|^2 A[\frac{1}{2} + \frac{i10\gamma^2}{3}] \, . \tag{6.19}$$

Notons que la solution particulière qui correspond à la réponse au terme en e^{3it} (harmonique trois) ne présente pas d'intérêt ici car il ne s'agit pas d'un terme résonant[6].

Nous pouvons obtenir également cette équation d'amplitude $F(T) = 0$ (équation 6.19) à l'aide d'un raisonnement alternatif mais équivalent. La solution particulière de l'équation développée à l'ordre $\epsilon^{3/2}$ (équation 6.18) avec $G = 0$ (soit, $\partial^2 I_3/\partial t^2 + I_3 = Fe^{it}$) est donnée par $(a + bt)e^{it}$, avec $b = -iF/2$, tandis que le paramètre a est indéterminé puisque tout terme ae^{it}, quel que soit a, satisfait automatiquement la relation $(\partial^2/\partial t^2 + 1)ae^{it} = 0$. Nous pouvons donc écrire la solution de l'équation comme :

$$I_3 = (a - \frac{iF}{2}t)e^{it} + c.c. \tag{6.20}$$

La présence du terme résonant en e^{it} introduit une contribution linéaire en temps, habituellement qualifiée de *séculaire*[7], qui croît ainsi indéfiniment avec le temps. La seule option pour éliminer ce terme séculaire est alors de contraindre F à s'annuler, ce qui revient à établir l'équation d'amplitude déjà obtenue précédemment (équation 6.19).

6.1.2 Condition de solubilité ou de solvabilité

L'équation d'amplitude[8] (équation 6.19) obtenue dans le paragraphe précédent est un cas particulier d'une condition plus générale, dite *condition de*

[6] Le calcul de la solution particulière en réponse à cette harmonique s'avérerait nécessaire si nous souhaitions poursuivre le développement du courant aux ordres supérieurs en ϵ.

[7] Le fait que la solution particulière contienne un terme séculaire en bte^{it} est une conséquence directe de la présence au second membre de l'équation 6.18 d'un terme en e^{it} (ayant donc la même pulsation que l'oscillateur linéaire). La réponse au terme e^{3it} conduit à une solution particulière en e^{3it} (sans terme séculaire), ce qui explique, une fois de plus, la non-pertinence de l'harmonique trois dans la détermination de l'equation d'amplitude.

[8] Équation obtenue à partir de l'annulation du terme résonant (i.e. $F(T) = 0$) de l'équation de l'oscillateur de van der Pol modifié (équation 6.18)

solubilité ou de solvabilité, associée à la résolution d'une équation de type :

$$\mathcal{L}u(t) = f(t), \quad \text{avec} \quad \mathcal{L} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 \,, \tag{6.21}$$

où $\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire, et $u(t)$ et $f(t)$ deux fonctions de la variable[9] t.

Pour déterminer la condition à laquelle la fonction $f(t)$ doit souscrire en toute généralité pour que l'équation 6.21 ait une solution, multiplions tout d'abord chaque membre de cette équation par une fonction quelconque $v(t)$, et intégrons-la sur une période T :

$$\int_0^T \mathcal{L}u(t)\; v(t)dt = \int_0^T f(t)v(t)dt \,. \tag{6.22}$$

Nous reconnaissons dans l'expression précédente le produit scalaire de deux fonctions $\mathcal{L}\, u(t)$ et $v(t)$, que nous pouvons noter[10] :

$$\int_0^T \mathcal{L}u\; vdt =< \mathcal{L}u, v > \tag{6.23}$$

et dénotons $\mathcal{L}^+$, l'opérateur adjoint de $\mathcal{L}$, qui doit souscrire, par définition, à :

$$< \mathcal{L}u, v >=< u, \mathcal{L}^+ v > \tag{6.24}$$

Nous recherchons maintenant les solutions $u(t)$ de type périodique[11] de période T et choisissons une fonction périodique v, de même période T.

L'intégration de l'équation 6.22 deux fois par partie (vis-à-vis du terme $v\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t)$ conduit à

$$< \mathcal{L}u, v >= \int_0^T dtv(t)[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1]u(t) = \int_0^T u(t)[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1]v(t) =< u, \mathcal{L}v > \,, \tag{6.25}$$

où on a utilisé, en vertu de la périodicité de u et v, le fait que le terme tout intégré est nul. Ainsi, par exemple, dans la première intégration par partie nous obtenons un terme du type $[v\partial u/\partial t]_0^T = v(T)(\partial u/\partial t)_{t=T} - v(T)(\partial u/\partial t)_{t=0}$, qui est nul en vertu de la périodicité des fonctions u et v (et de leurs dérivées).

Ainsi, en se référant à la définition de l'opérateur adjoint (équation 6.24), nous constatons que l'opérateur $\mathcal{L}$ est égal à son opérateur conjugué $\mathcal{L}^+$ ($\mathcal{L} = \mathcal{L}^+$) ; l'opérateur $\mathcal{L}$ est alors dit auto-adjoint (ou hermitique).

[9] Pour établir le lien avec l'analyse de l'oscillateur van der Pol développé en série de puissance (voir paragraphe précédent), il suffit de poser $u(t) \equiv I_3(t)$ et $f(t) \equiv F(T)e^{it}$ (voir équation 6.18), en posant $G = 0$ puisque nous avons montré que ce terme, proportionnel à e^{3it}, était de peu d'importance dans la résolution de l'équation en regard du terme résonant $f(t) \propto e^{it}$).

[10] Cette notation du produit scalaire est usuellement adoptée dans le champs de l'algèbre linéaire ; on la retrouve également en mécanique quantique puisque l'algèbre linéaire y joue un rôle central.

[11] À l'instar de la fonction I_3 de l'exemple développé dans le paragraphe précédent.

Conservons cependant par la suite la distinction entre les deux opérateurs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^+$, pour énoncer en toute généralité (tous les opérateurs ne sont pas nécessairement auto-adjoints !), la condition de solvabilité d'une équation de type $\mathcal{L}u(t) = f(t)$ (équation 6.21). Compte tenu de l'équation 6.22 et de la définition de l'opérateur adjoint (équation 6.24), nous avons :

$$< \mathcal{L}u, v >=< f, v >=< u, \mathcal{L}^+ v > \ . \tag{6.26}$$

Rappelons que v est une fonction quelconque de période T ; nous pouvons donc, en particulier, la choisir comme appartenant au noyau de l'opérateur adjoint $\mathcal{L}^+$; et toute fonction v du noyau de $\mathcal{L}^+$ vérifie, par définition, la relation suivante :

$$\mathcal{L}^+ v = 0 \, . \tag{6.27}$$

Ainsi, compte tenu de l'équation 6.26, nous obtenons la condition de solvabilité recherchée à laquelle doit satisfaire la fonction f :

$$< f, v >= 0, \tag{6.28}$$

pour toute fonction v, élément du noyau de l'opérateur adjoint $\mathcal{L}^+$. Autrement dit, toute équation de la forme $\mathcal{L}u(t) = f(t)$ n'a de solution que si la fonction $f(t)$ du membre de droite de l'équation est orthogonale au noyau de l'opérateur adjoint (c'est-à-dire à toute fonction $v(t) \neq 0$ telle que $\mathcal{L}^+ v(t) = 0$). Ce théorème, dit *théorème de l'alternative de Fredholm*[12], est général et s'applique à toute équation linéaire de la forme $\mathcal{L}u(t) = f(t)$.

Illustrons ce résultat sur l'exemple présenté au début de ce paragraphe où l'opérateur $\mathcal{L}$ est défini comme $\mathcal{L} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1$ et le second membre de l'équation à résoudre $f(t)$ est tel que $f(t) \equiv F(T)e^{it}$. Étant donné que $\mathcal{L} = \mathcal{L}^+$, la fonction v satisfait la relation $\mathcal{L}v(t) = 0$. Nous avons vu dans le paragraphe précédent, que la solution générale de cette équation est donnée par $v = ae^{it} + c.c.$, où a est une constante d'intégration. Reportons cette fonction dans la condition de Fredholm, $< f, v >= 0$, pour obtenir la condition suivante :

$$\int_0^{2\pi} dt F e^{it}[ae^{it} + a^* e^{-it}] = 0 \, , \tag{6.29}$$

où nous avons utilisé le fait que $v(t)$ a une période $T = 2\pi$. En notant que l'intégrale de la fonction e^{2it} sur une période est nulle, nous obtenons finalement la condition à laquelle doit satisfaire la fonction F

$$\int_0^{2\pi} F A^* dt = 2\pi a^* F \, . \tag{6.30}$$

Comme la constante d'intégration a est non nulle ($a \neq 0$), la condition de Fredholm $< f, v >= 0$ impose que la fonction F doit être nécessairement nulle ($F = 0$). Ce résultat nous amène à établir l'équation d'amplitude (équation 6.19) à laquelle souscrit l'amplitude $A(t)$.

[12] Du nom du mathématicien suédois Erik Ivar Fredholm (1866-1927) qui a établi la théorie moderne des équations intégrales ; il est à l'origine de la théorie des opérateurs.

6.1.3 Quelques précisions utiles sur l'équation d'amplitude

En ne retenant que le terme linéaire de l'équation d'amplitude (équation 6.19), la solution est donnée par $A \sim e^{T/2} = e^{t\epsilon/2} = e^{t\omega_r}$, où ω_r est la partie réelle de ω (voir équation 6.4). Plus généralement, tout problème introduisant une bifurcation de Hopf est décrit dans le régime linéaire par l'équation : $\partial A/\partial t = \omega_r A$. Le terme non linéaire de l'équation d'amplitude est en général, de la forme suivante : $(a+ib)|A|^2A$ (où a et b sont des constantes réelles). Ainsi, la forme générique de l'équation d'amplitude pour une bifurcation de Hopf est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \bar{\omega}_r A - (a + ib)|A|^2 A \, . \tag{6.31}$$

Dans l'expression ci-dessus, nous avons redéfini le paramètre ω_r issu de la partie linéaire de l'équation en fonction du paramètre $\bar{\omega}_r$ tel que $\omega_r = \epsilon\bar{\omega}_r$, pour souligner explicitement que pour $\epsilon = 0$, la partie réelle de ω s'annule ($\bar{\omega}_r$ est une quantité d'ordre un). Le signe du terme linéaire est déterminé par celui de ϵ . Le signe du coefficient du terme cubique ne suit pas de règle générale simple ; il peut être aussi bien positif que négatif, et, à l'exception de quelques cas rares où le signe peut être intuité, il doit être calculé pour chaque système. Si la constante a est positive ($a > 0$), le terme non linéaire s'oppose à la croissance linéaire pour aboutir à une saturation de l'amplitude. Si au contraire la constante a est négative ($a < 0$), le terme non linéaire agit en faveur de la croissance linéaire, et par conséquent, le système est confronté à une amplitude divergente à l'infini. Dans une telle situation, pour étudier la dynamique du système, l'équation d'amplitude doit être développée aux ordres supérieurs en ϵ, comme cela a déjà été vu lors de la discussion sur la bifurcation sous-critique développée dans le chapitre 3.

Le nombre de coefficients dans l'équation d'amplitude peut être réduit grâce à un adimensionnement des variables. À cet effet, effectuons la transformation $A \to A/\sqrt{\bar{\omega}_r/a}$ et $T \to T\bar{\omega}_r$, nous obtenons alors une équation à un seul paramètre α :

$$\frac{\partial A}{\partial T} = A - (1 + i\alpha)|A|^2 A \, , \tag{6.32}$$

où $\alpha = b/a$.

Il est, par ailleurs, parfois utile de conserver explicitement le paramètre ϵ devant le terme linéaire de l'équation finale. Pour cela, effectuons les transformations sur l'amplitude $A \to \sqrt{\epsilon}A/\sqrt{\bar{\omega}_r/a}$ puis sur la variable temporelle[13] $T \to t\bar{\omega}_r\epsilon$, et l'équation d'évolution (équation 6.31) acquiert la forme suivante

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \epsilon A - (1 + i\alpha)|A|^2 A \, . \tag{6.33}$$

[13] Rappelons que T est la variable temporelle « lente » et t la variable temporelle rapide, voir paragraphe 6.1.1.

Nous utiliserons par la suite, l'une ou l'autre expression de l'équation d'évolution (équation 6.32 ou équation 6.33) selon les besoins ; sous la forme canonique (équation 6.32), l'équation d'amplitude souligne le fait que les coefficients réels sont d'ordre un, alors que la seconde forme (équation 6.33) fait apparaître explicitement la dépendance en ϵ de l'amplitude et du taux de croissance de l'instabilité : l'amplitude se comporte ainsi comme $\epsilon^{1/2}$, et le taux de croissance comme ϵ.

6.1.4 Dérivation de l'équation d'amplitude à partir des symétries

Ce petit paragraphe présente une explication simple justifiant la forme de l'équation d'amplitude (équation 6.32). Notons tout d'abord que l'équation de van der Pol (équation 6.1) est invariante sous la transformation de translation $t \to t + \theta$, où θ est une constante réelle ; l'équation d'amplitude doit préserver cette invariance. Une telle transformation linéaire sur le temps revient à effectuer l'opération de rotation :

$$A \to Ae^{i\theta} \tag{6.34}$$

sur la solution de l'équation d'amplitude (voir équation 6.14). Tout terme linéaire de l'équation d'amplitude sera affecté du facteur $e^{i\theta}$. Pour préserver l'invariance de l'équation d'amplitude, seuls les termes non linéaires subissant cette même transformation sont autorisés. Écrivons à l'ordre cubique tous les termes non linéaires possibles et étudions leur transformation sous l'opération $t \to t + \theta$

$$\begin{aligned} &A^2 \to A^2 e^{2i\theta}, \quad AA^* \to AA^* \quad , A^{*2} \to A^{*2} e^{-2i\theta} \\ &A^3 \to A^3 e^{3i\theta}, \quad \underline{A^2 A^* \to A^2 A^* e^{i\theta}}, \quad A^{*2} A \to A^{*2} A e^{-i\theta}, \\ &A^{*3} \to A^{*3} e^{-3i\theta} \ . \end{aligned}$$

Seul le terme souligné se transforme comme le terme linéaire et doit être retenu ; tous les autres termes ne satisfont aucunement à cette condition et sont donc éliminés. Cet argument explique clairement l'origine de la forme de l'équation d'amplitude non linéaire et souligne son caractère universel.

6.1.5 Propriétés de l'équation d'amplitude complexe

La première propriété importante de l'équation d'amplitude canonique (équation 6.32) est son caractère non variationnel ; cette équation ne peut plus en effet s'écrire comme dérivant d'un potentiel (i.e. $\partial A/\partial t = -\partial V/\partial A^*$, avec $dV/dt \leq 0$ et V un « potentiel » –une fonction réelle–, ou fonction de Lyapunov (sauf dans le cas particulier où $\alpha = 0$)). Ceci contraste avec les études menées dans les chapitres précédents (voir en particulier l'équation 2.29 du chapitre 2 où nous avons défini une fonction de Lyapunov associée). Ainsi, la présence

d'une bifurcation de Hopf brise le caractère variationnel du système : c'est la première manifestation d'un comportement hors équilibre.

En posant l'amplitude complexe A comme $A = \rho e^{i\theta}$, où ρ est l'amplitude et θ la phase, nous pouvons scinder l'équation d'amplitude (équation 6.32) en deux équations, soit :

$$\dot{\rho} = \rho - \rho^3 \tag{6.35}$$

et

$$\dot{\theta} = \alpha\rho^2 \ . \tag{6.36}$$

La première équation possède trois points fixes $\rho_0 = 0$ et $\rho_\pm = \pm 1$. Le premier point fixe est instable[14] tandis que les deux autres sont stables. Après une évolution transitoire, la partie ρ de l'amplitude tend vers l'un des deux points fixes stables (l'évolution vers l'un des deux points dépend des conditions initiales) $\rho_\pm = \pm 1$. Une fois que ρ atteint le point fixe, la seconde équation d'amplitude (équation 6.36) tend vers l'équation suivante : $\dot{\theta} = \alpha$, dont la solution est donnée par

$$\theta = \theta_0 + \alpha t \tag{6.37}$$

où θ_0 est la phase initiale. Ainsi, l'amplitude complexe s'écrit pour des temps assez longs, comme un cercle de rayon unité centré à l'origine, soit : A

$$A(t \to \infty) = \pm e^{i(\theta_0 + \alpha t)} = e^{i(\theta_0 + \alpha t \pm \pi)} \tag{6.38}$$

les deux solutions diffèrent d'une phase égale à π ($-1 = e^{i\pi}$). Dans l'espace des phases (X, Y) (avec $A = X + iY$), la trajectoire s'enroule autour du cercle de rayon unité (voir figure 6.1). Ce cercle est le cycle limite de la dynamique, autrement dit un attracteur de la dynamique : quelles que soient les conditions initiales, la trajectoire tend vers ce cercle : il s'agit d'un cycle limite stable.

Utilisons maintenant la seconde forme de l'équation d'amplitude (équation 6.33) qui explicite la dépendance des termes en fonction du paramètre ϵ. Les équations d'amplitude en fonction de ρ et θ (équations 6.35 et 6.36) s'écrivent alors comme :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \epsilon\rho - \rho^3 \ , \\ \dot{\theta} &= \alpha\rho^2 \ . \end{aligned} \tag{6.39}$$

Les points fixes sont $\rho_0 = 0$ et $\rho_\pm = \pm\sqrt{\epsilon}$, pour $\epsilon > 0$. Pour $\epsilon < 0$, $\rho = 0$ est l'unique point fixe, et il est stable. Pour $\epsilon > 0$, $\rho_0 = 0$ est instable et $\rho_\pm = \pm\sqrt{\epsilon}$ sont des points fixes stables. Le comportement à grand temps est le cycle limite de rayon $\sqrt{\epsilon}$.

[14] Par analogie mécanique, on écrira l'équation d'amplitude pour la partie réelle de l'amplitude (équation 6.35) comme $\dot{\rho} = -\partial_\rho V$ avec $V = -\rho^2/2 + \rho^4/4$. La fonction V possède un maximum en $\rho = 0$ (point instable) et deux minima en $\rho = \pm 1$ (points instables).

6.2 Cycle limite instable

Nous avons vu que l'équation d'évolution initiale (équation 6.19), obtenue à partir de l'équation de van der Pol modifiée, possède un coefficient cubique à partie réelle positive ; ceci n'est pas garanti en général. Il existe de nombreuses situations dans lesquelles ce coefficient est négatif. Le système constitué des deux équations d'évolution en ρ et θ (équations 6.35 et 6.36) est alors substitué par le nouveau système :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \epsilon\rho + \rho^3 \ , \\ \dot{\theta} &= \alpha\rho^2 \ . \end{aligned} \tag{6.40}$$

Lorsque le paramère ϵ est positif ($\epsilon > 0$), il existe un seul point fixe $\rho_0 = 0$ et il est instable ; lorsqu'il est négatif, le système possède trois points fixes $\rho_0 = 0$ et $\rho_\pm = \pm\sqrt{-\epsilon}$, mais, à la différence de la situation antérieure, le cycle limite est instable ; le point fixe $\rho_0 = 0$ est instable et l'amplitude croît indéfiniment : les termes d'ordre supérieurs en puissance de A dans l'équation d'amplitude doivent être considérés. Ainsi, développée à un ordre supérieur (à partir, par exemple de l'équation 6.1, ou tout autre modèle donnant lieu à une bifurcation de Hopf), l'équation d'amplitude s'écrit :

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \epsilon A + (1 - i\alpha)|A|^2 A - (1 + i\beta)|A|^4 A \ . \tag{6.41}$$

La forme de cette équation quintique, notamment l'absence des termes d'ordre quatre et d'ordre cinq, tel le terme en $A^3 A^{*2}$, résulte de ses propriétés de symétrie (voir paragraphe 6.1.4). Notons que nous avons supposé que la partie réelle du coefficient complexe d'ordre 5 (i.e. $-(1+i\beta)$) est négative, pour assurer la saturation de l'amplitude lorsque le paramètre ϵ est négatif ($\epsilon > 0$). En adoptant à nouveau pour l'amplitude complexe une décomposition de type $A = \rho e^{i\theta}$, les équations d'évolution pour le module ρ et la phase θ de l'amplitude complexe s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \epsilon\rho + \rho^3 - \rho^5 \ , \\ \dot{\theta} &= \alpha\rho^2 + \beta\rho^4 \ . \end{aligned} \tag{6.42}$$

La discussion des points fixes de l'équation pour ρ (équation 6.42) est donnée dans les détails au chapitre 2 ; ainsi, pour $-1/4 < \epsilon < 0$, il existe cinq points fixes ($\rho = 0$ et deux paires de solutions avec $\rho \neq 0$). Dans cet intervalle de ϵ, le point fixe $\rho = 0$ coexiste avec le cycle limite (voir figure 6.2). Pour $\epsilon < \epsilon^* = -3/16$, le point fixe est stable tandis que le cycle limite est métastable. Pour $\epsilon > \epsilon^*$, la conclusion s'inverse. Finalement, pour $\epsilon > 0$, il existe une paire de solutions $\rho \neq 0$ qui correspond à un cycle limite stable, tandis que $\rho = 0$ devient instable. Dans chaque cas où $\rho \neq 0$, la phase est une fonction linéaire du temps.

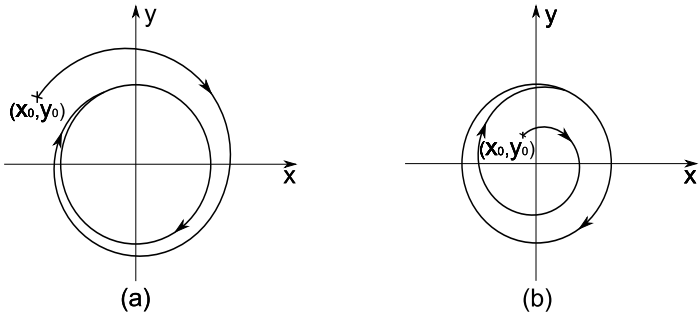


Figure 6.1 – Vue schématique de la trajectoire dans le plan $X-Y$. À gauche, on part d'une condition initiale (X_0, Y_0) loin de l'origine. Au fur et à mesure que le temps s'écoule, la trajectoire approche le cercle, et s'y installe indéfiniment. À droite, la condition initiale est proche de l'origine, et la trajectoire part en spirale vers l'extérieur pour épouser le cercle, cycle limite stable.

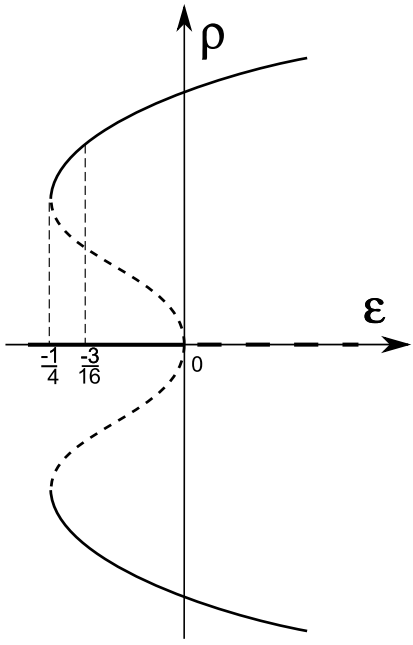


Figure 6.2 – Diagramme de bifurcation pour l'amplitude ρ pour une bifurcation de Hopf. On remarque que ce comportement est identique à celui d'une bifurcation stationnaire (Fig.3.9). La seule différence ici tient au fait que la phase croît avec le temps.

6.3 Précisons davantage la notion de cycle limite

Comme nous l'avions précisé dans le chapitre 5, lors de l'étude du système de Lotka-Voltera, il est très important de bien distinguer le cycle limite d'une trajectoire fermée quelconque dans l'espace de phase. Pour le réaliser pleinement, considérons un exemple simple décrit par l'équation dynamique non linéaire suivante

$$\ddot{x} + x + 2x^3 = 0 \,. \tag{6.43}$$

Cette équation possède une solution périodique. En effet, après multiplication du terme $2\dot{x}$ dans chaque membre de l'équation 6.43, réécrivons cette équation sous la forme :

$$\partial_t[\dot{x}^2 + x^2 + x^4] = 0 \,. \tag{6.44}$$

Nous obtenons après intégration

$$\dot{x}^2 + x^2 + x^4 = H = \dot{x}_0^2 + x_0^2 + x_0^4 \,, \tag{6.45}$$

où H est une constante d'intégration, analogue à l'énergie totale en mécanique, et $x_0 = x(t = 0)$. Cette équation (équation 6.45) peut être représentée par une trajectoire fermée dans l'espace des phases $(\dot{x}, x)$; à chaque condition initiale, associée à une valeur de H spécifique, correspond une trajectoire fermée dans le plan $(\dot{x}, x)$ (voir figure 6.3). Notons que ces orbites ne sont pas isolées ; elles forment un continuum. Autrement dit, le choix d'un ensemble continu de valeurs de H produit un ensemble continu de trajectoires fermées. Un cycle limite, au contraire, est une orbite fermée qui ne possède pas dans son voisinage immédiat une autre orbite fermée. Un cycle limite stable est une orbite isolée vers laquelle tend toute trajectoire issue d'une condition initiale suffisamment près du cycle[15]. Dans l'exemple présent, il n'existe qu'un seul cycle limite et, par conséquent, le bassin d'attraction est constitué de l'ensemble des points du plan.

6.4 Problèmes

6.4.1 Problème : solution dépendante du temps de l'équation d'amplitude complexe

Résoudre le système d'équations (équation 6.39) issu de l'équation d'amplitude complexe cubique.

Solution : La première équation d'évolution pour le module ρ de l'amplitude complexe du système 6.39 peut être résolue en suivant la même procédure utilisée dans le

[15] Il faut préciser cependant qu'il existe des situations pour lesquelles, même si un cycle limite stable existe, certaines conditions initiales ne conduisent pas, à grand temps, vers ce cycle limite. On parle alors de bassin d'attraction, qui n'est autre que l'ensemble des conditions initiales conduisant au cycle limite. Les autres conditions initiales, celles ne convergeant pas vers ce cycle, ne font pas partie du bassin d'attraction.

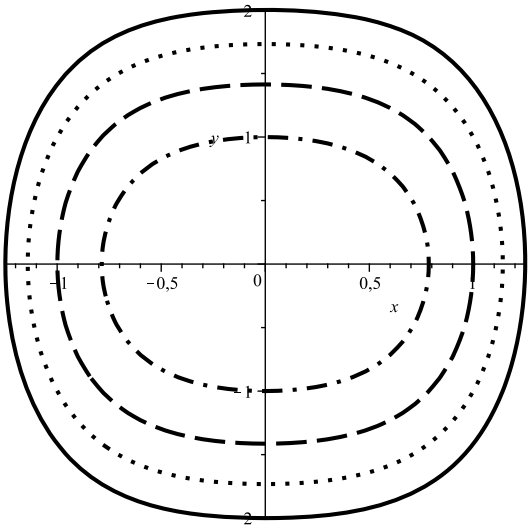


Figure 6.3 – Le portrait des orbites obtenues à partir de (6.45), pour différentes conditions initiales, ou pour différentes valeurs de H. De l'extérieur vers l'intérieur $H = 4, 3, 2$ et 1. Il ne s'agit pas d'un cycle limite étant donné que l'orbite n'est pas isolée, mais possède un continuum d'orbite dans son voisinage.

paragraphe 2.3.5 du chapitre 2. Nous pouvons donc écrire pour $\rho(t)$ (équation 6.42) :

$$\rho = \left[(-\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\rho_i^2})e^{-2\epsilon t} + \frac{1}{\epsilon}\right]^{-1/2} \tag{6.46}$$

Nous ne retenons ici que la solution positive (puisque ρ est le module du nombre complexe A). $\rho_i = \rho(t = 0)$ est la valeur initiale de l'amplitude. En prenant le rapport des deux équations du système 6.36 et en utilisant l'identité $(\dot{\rho^2}) = 2\rho\dot{\rho}$, nous obtenons l'équation suivante

$$\frac{\partial\theta}{\partial\rho^2} = \frac{1}{2\epsilon - 2\rho^2} \tag{6.47}$$

qui s'intègre pour donner

$$\theta = -\frac{1}{2}\ln(2\epsilon - 2\rho^2) + c \tag{6.48}$$

où c est une constante d'intégration. Pour $\epsilon > 0$, nous obtenons à partir de l'équation 6.46, le comportement suivant

$$\rho(t \to \infty) = \sqrt{\epsilon} \tag{6.49}$$

quel que soit $\rho_i \neq 0$.

À partir de l'équation 6.46, nous obtenons, à l'ordre suivant, le comportement asymptotique (limite à grand temps)

$$2\rho^2 \simeq 2\epsilon\left[1 - (-1 + \frac{\epsilon}{\rho_i})e^{-2\epsilon t}\right] \tag{6.50}$$

Reportons ce résultat dans l'équation 6.48 pour obtenir

$$\theta(t \to \infty) = \epsilon t + \theta_0 \tag{6.51}$$

de telle sorte que la solution complète à grand temps prend la forme

$$A(t \to \infty) = \sqrt{\epsilon}e^{i(\epsilon t + \theta_0)} \tag{6.52}$$

où θ_0 est la phase initiale. C'est l'équation d'un cercle de rayon $\sqrt{\epsilon}$ centré à l'origine. Les fonctions X et Y (définies comme la partie réelle et imaginaire de A) oscillent de manière sinusoïdale au cours du temps ; la pulsation de ces oscillations est égale à ϵ.

6.4.2 Problème : dérivation de l'équation d'amplitude complexe pour le modèle « Bruxellateur »

Dérivez l'équation d'amplitude au voisinage du seuil de la bifurcation de Hopf pour le modèle Bruxellateur (système d'équations 5.56, voir paragraphe 5.3.4).

Nous avons vu au chapitre 5, que le modèle de l'oscillateur de van der Pol introduit une bifurcation de Hopf, et que la condition critique est donnée par $b = a^2 + 1$ (voir paragraphe 5.3.4).

Introduisons un petit paramètre ϵ mesurant la distance au seuil de l'instabilité :

$$\epsilon \equiv \frac{b - (1 + a^2)}{2} \,. \tag{6.53}$$

La solution homogène est stable pour $\epsilon < 0$ et devient instable vis-à-vis d'une solution oscillante pour $\epsilon > 0$. Le taux de croissance obéit à l'équation caractéristique obtenue

au chapitre 5 (voir équation 5.59 dans le paragraphe 5.3.4), et prend la forme suivante pour ϵ petit,

$$\omega = \epsilon \pm ia \; . \tag{6.54}$$

Introduisons une variable lente T et adoptons pour l'opérateur de dérivation, la substitution énoncée dans l'équation 6.7. Au préalable, réécrivons le système (équation 5.56) en utilisant les variables dotées d'une barre, définies par

$$X = X_0 + \bar{X}, \quad Y = Y_0 + \bar{Y} \tag{6.55}$$

où (X_0, Y_0) représente la solution homogène (équation 5.58). Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{X}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \bar{X}}{\partial T} = (a^2 + 2\epsilon)\bar{X} + a^2 \bar{Y} + 2a\bar{X}\bar{Y} + \frac{1 + a^2 + 2\epsilon}{a}\bar{X}^2 + \bar{X}^2\bar{Y} \\
&\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \bar{Y}}{\partial T} = -(a^2 + 2\epsilon + 1)\bar{X} - a^2\bar{Y} - 2a\bar{X}\bar{Y} \\
&-\frac{1 + a^2 + 2\epsilon}{a}\bar{X}^2 - \bar{X}^2\bar{Y}
\end{aligned} \tag{6.56}$$

Développons $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ en puissance de $\sqrt{\epsilon}$:

$$\bar{X}(t,T) = \epsilon^{1/2}\bar{X}_1 + \epsilon\bar{X}_2 + ... \tag{6.57}$$

$$\bar{Y}(t,T) = \epsilon^{1/2}\bar{Y}_1 + \epsilon\bar{Y}_2 + ... \tag{6.58}$$

Reportons ce résultat dans l'équation 6.56 pour en déduire une série d'équations à chaque ordre en ϵ.

Ordre $\epsilon^{1/2}$

On obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{X}_1}{\partial t} &= a^2\bar{X}_1 + a^2\bar{Y}_1 \; , \\
\frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial t} &= -(a^2 + 1)\bar{X}_1 - a^2\bar{Y}_1 \; .
\end{aligned} \tag{6.59}$$

Cherchons une solution de la forme $e^{\sigma t}$ pour chacune des variables. En imposant un déterminant nul, nous obtenons $\sigma = \pm ia$. Ceci n'est rien d'autre que l'expression de ω (équation 5.59) pour $\epsilon = 0$ (le point de bifurcation). La solution générale du système d'équations est donnée par

$$\begin{aligned}
\bar{X}_1(t,T) &= A(T)e^{iat} + c.c. \\
\bar{Y}_1(t,T) &= B(T)e^{iat} + c.c.
\end{aligned} \tag{6.60}$$

où A et B sont des facteurs d'intégration qui dépendent de la variable lente T. Étant donné que le déterminant du système (équation 6.59) est nul, les facteurs A et B sont reliés entre eux par la relation

$$B = \frac{ia - a^2}{a^2}A \equiv \gamma A \; . \tag{6.61}$$

Ordre ϵ

À cet ordre, nous avons

$$\frac{\partial \bar{X}_2}{\partial t} = a^2\bar{X}_2 + a^2\bar{Y}_2 + 2a\bar{X}_1\bar{Y}_1 + \frac{1+a^2}{a}\bar{X}_1^2 \tag{6.62}$$

$$\frac{\partial \bar{Y}_2}{\partial t} = -(a^2+1)\bar{X}_2 - a^2\bar{Y}_2 - 2a\bar{X}_1\bar{Y}_1 - \frac{1+a^2}{a}\bar{X}_1^2 \tag{6.63}$$

Substituons X_1 et Y_1 par leurs expressions (équation 6.60), nous obtenons pour X_2 et Y_2, le système inhomogène suivant :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{X}_2}{\partial t} - a^2\bar{X}_2 - a^2\bar{Y}_2 = 2a(\gamma A^2 e^{2it} + AA^*\gamma^* + c.c.) \\
&+\frac{1+a^2}{a}(A^2e^{2it} + AA^*\gamma^* + c.c.)\ , \\
&\frac{\partial \bar{Y}_2}{\partial t} + (a^2+1)\bar{X}_2 + a^2\bar{Y}_2 = -2a(\gamma A^2 e^{2it} + AA^*\gamma^* + c.c.) \\
&-\frac{1+a^2}{a}(A^2e^{2it} + AA^*\gamma^* + c.c.)\ .
\end{aligned} \tag{6.64}$$

La solution consiste en une somme de solution sans second membre, plus une solution particulière. Étant donné que la partie homogène de ce système d'équations est identique à celui du système décrit par l'équation 6.59, il a donc le même type de solution (équation 6.60). En redéfinissant les constantes d'intégration, nous absorbons la solution homogène du système (équation 6.64) dans l'équation 6.60. Compte tenu de la forme des seconds membres du système (équation 6.64), cherchons la solution particulière sous la forme

$$X_2 = \alpha|A|^2 + \beta A^2 e^{2iat}\ , \tag{6.65}$$

$$Y_2 = \alpha'|A|^2 + \beta' A^2 e^{2iat}\ . \tag{6.66}$$

Reportons dans (6.64) et, par identification, nous obtenons quatre équations algébriques à quatre inconnues $(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$. Nous obtenons alors facilement la solution :

$$\alpha = 0, \quad \alpha' = -\frac{1+a^2+a^2(\gamma+\gamma^*)}{a^3}\ , \tag{6.67}$$

$$\beta = \frac{-(2/3)\,i\left(1+a^2+2\,a^2\gamma\right)}{a^2}, \tag{6.68}$$

$$\beta' = 1/3\,\frac{1+a^2+2\,a^2\gamma+2\,ia+2\,ia^3+4\,ia^3\gamma}{a^3}\ . \tag{6.69}$$

Ordre $\epsilon^{3/2}$

À cet ordre, nous avons

$$\frac{\partial \bar{X}_3}{\partial t} - a^2\bar{X}_3 - a^2\bar{Y}_3 = -\frac{\partial \bar{X}_1}{\partial T} + 2\bar{X}_1$$
$$+2a(\bar{X}_1\bar{Y}_2 + \bar{X}_2\bar{Y}_1) + 2\frac{1+a^2}{a}\bar{X}_1\bar{X}_2 + \bar{X}_1^2\bar{Y}_1 \ ,$$
$$\frac{\partial \bar{Y}_3}{\partial t} + (a^2+1)\bar{X}_3 + a^2\bar{Y}_3 = -\frac{\partial \bar{Y}_1}{\partial T} - 2\bar{X}_1 - 2a(\bar{X}_1\bar{Y}_2 + \bar{X}_2\bar{Y}_1)$$
$$-2\frac{1+a^2}{a}\bar{X}_1\bar{X}_2 - \bar{X}_1^2\bar{Y}_1 \ . \tag{6.70}$$

L'usage des résultats des ordres précédents nous permet d'écrire

$$\frac{\partial \bar{X}_3}{\partial t} - a^2\bar{X}_3 - a^2\bar{Y}_3 = f_1(T)e^{iat} + g_1(T)e^{3iat} + c.c.$$
$$\frac{\partial \bar{Y}_3}{\partial t} + (a^2+1)\bar{X}_3 + a^2\bar{Y}_3 = f_2(T)e^{iat} + g_2(T)e^{3iat}$$
$$+c.c. \tag{6.71}$$

où

$$f_1 = -\frac{\partial A}{\partial T} + 2A + \Big[2a(\beta' + 2\alpha' + \gamma^*\beta$$
$$+2\alpha\gamma) + \frac{2(1+a^2)}{a}(\beta + 2\alpha) + \gamma^* + 2\gamma\Big]\,|A|^2A \tag{6.72}$$

et

$$f_2 = -\frac{\partial A}{\partial T}\gamma - 2A - \big[2a(\beta' + 2\alpha' + \gamma^*\beta + 2\alpha\gamma)$$
$$+\frac{2(1+a^2)}{a}(\beta + 2\alpha) + \gamma^* + 2\gamma\Big]\,|A|^2A \ . \tag{6.73}$$

Nous n'avons pas besoin d'écrire explicitement la forme des fonctions g_1 et g_2, car ces derniers ne sont pas reliés aux termes résonants ou à l'évolution séculaire. Comme à l'ordre 2, seule la solution particulière du système (équation 6.71) présente un intérêt. Nous la recherchons sous la forme $H_1e^{iat} + H_2e^{3iat}$ et $G_1e^{iat} + G_2e^{3iat}$. En reportant dans l'équation 6.71 et par identification des termes en e^{iat}, nous arrivons à

$$(ia - a^2)H_1 - a^2G_1 = f_1 \ , \tag{6.74}$$
$$(a^2+1)H_1 + (ia + a^2)G_1 = f_2 \ . \tag{6.75}$$

Le déterminant de ce système associé aux inconnues (H_1, G_1) s'annule ; ceci est clair car l'opérateur (équation 6.71) admet e^{iat} comme vecteur propre de valeur propre nulle (situation identique à celle obtenue à l'ordre $\epsilon^{1/2}$). Par conséquent, le système ci-dessus doit satisfaire la condition de solvabilité (ou de solubilité, ou de compatibilité) suivante

$$(a^2+1)f_1 - (ia - a^2)f_2 = 0 \ . \tag{6.76}$$

En utilisant les expressions de f_1 et f_2, nous obtenons finalement

$$\frac{\partial A}{\partial T} = A + (a_1 + ib_1)|A|^2A \tag{6.77}$$

avec

$$a_1 = -\frac{19a^3 + 8a - a^5}{3a^3(4 + a^2)}, \quad b_1 = -\frac{4(a^6 + a^4 - a^2 + 2)}{3a^3(4 + a^2)} \ . \tag{6.78}$$

On peut vérifier que $a_1 < 0$ pout tout $a > 0$. La bifurcation est une bifurcation fourche super-critique.

Chapitre 7

Instabilité paramétrique et autres dynamiques non linéaires

L'oscillateur paramétrique est un oscillateur harmonique dont les paramètres (facteur d'amortissement, la gravitation apparente dans le cas du pendule...) varient au cours du temps. Ces systèmes introduisent des instabilités dites paramétriques, constituant une famille générique d'instabilités. Se manifestant comme des phénomènes de résonance, leur apparition peut être souvent significative d'une transition vers le chaos. Ces instabilités diffèrent foncièrement de la résonance classique d'un oscillateur forcé. En effet, lorsqu'un oscillateur linéaire de pulsation propre ω_0 est soumis à une excitation extérieure de pulsation ω_e, la réponse du système est optimale pour $\omega_e = \omega_0$. Nous allons étudier dans ce chapitre un système simple caractérisé par une réponse optimale lorsque $\omega_0 = \omega_e/2$, où ω_e est la fréquence de l'*excitation paramétrique* à laquelle il est soumis. Autrement dit, la sensibilité de l'oscillateur est maximale lorsque sa pulsation propre est égale à la moitié de la pulsation excitatrice ; nous sommes en présence d'une *résonance sous-harmonique.*

7.1 Exemple simple d'une excitation paramétrique

Considérons un pendule dont le point de suspension effectue une oscillation verticale à la pulsation ω_e ; nous négligeons, dans ce qui suit, l'existence de forces de frottement. Celles-ci seront introduites plus tard dans ce chapitre. La position instantanée du point de suspension est donnée par : $a(t) = -a_0 \cos(\omega_e t)$ (le signe moins correspond à un choix particulier, et sans importance, de l'origine des temps) et son accélération par $\ddot{a} = a_0 \omega_e^2 \cos(\omega_e t)$.

La masse m suspendue au pendule est ainsi soumise, outre la gravité usuelle g_0, à l'accélération $\ddot{a}$. Nous pouvons alors définir une gravité effective totale subie par la masse donnée par

$$g(t) = g_0 + g_1 \cos(\omega_e t) \, , \tag{7.1}$$

où nous avons posé $g_1 = a_0 \omega_e^2$. Dans le régime à faible amplitude, l'équation du pendule prend la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 [1 + h \cos(\omega_e t)]\theta = 0 \, , \tag{7.2}$$

où h est un paramètre tel que $h = g_1/g_0$ et $\omega_0 = \sqrt{g_0/\ell}$ est la pulsation propre du pendule, avec ℓ la longueur du pendule, plus précisément la distance entre le centre de masse et le point de suspension du pendule. Rappelons que pour l'oscillateur forcé classique, l'équation du mouvement s'écrit comme $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = f_e \cos(\omega_e t)$, où f_e est l'amplitude de la force excitatrice ; la force excitatrice apparaît ainsi au second membre de l'équation. Alors que pour le système étudié ici, l'influence de l'excitation intervient en produit avec la variable θ dans l'équation d'évolution (équation 7.2). Tout se passe comme si le paramètre physique, ici la gravité, caractérisant l'oscillateur dépendait du temps ; c'est là l'origine du terme *paramétrique* qualifiant le type d'excitation étudiée ici.

7.2 Instabilité sous-harmonique

L'équation d'évolution de l'oscillateur paramétrique (équation 7.2) est dite non autonome par rapport au temps, car un de ses coefficients dépend du temps. Lorsque l'équation différentielle d'évolution est autonome (coefficients indépendants du temps) et linéaire, la solution est de type : $e^{\omega t}$. Lorsque l'un des coefficients de l'équation est une fonction périodique du temps, la solution est de type

$$\theta(t) = f(t) e^{\omega t} \, , \tag{7.3}$$

où ω est un nombre complexe dont la valeur se déduit de la solution de l'équation différentielle et $f(t)$ est une fonction périodique du temps, de même période que les coefficients de l'équation différentielle (i.e. $f(t + 2\pi/\omega_e) = f(t)$). Ce résultat découle du théorème de Floquet-Bloch[1] (voir référence [57]).

En toute généralité, la fonction $f(t)$ doit être décomposée en série de Fourier contenant toutes les harmoniques. Nous nous restreignons, cependant, à un calcul perturbatif, pour lequel la prise en compte de la première harmonique

[1] Des noms du mathématicien français Achille Marie Gaston Floquet (1847-1920) et du physicien suisse Félix Bloch (1905-1983), prix Nobel de physique en 1952. Le théorème de Bloch, parfois également dénommé Floquet-Bloch, puisqu'il a été énoncé par F. Bloch en généralisant à 3 dimensions un résultat obtenu à une dimension par le mathématicien G. Floquet, énonce, en substance, que les ondes évoluant dans un milieu périodique à 3 dimensions ne se diffusent pas et qu'elles se propagent comme une onde plane multipliée par une fonction périodique, de période égale à celle du milieu.

suffit. En effet, si $h = 0$, la solution de l'équation d'évolution (équation 7.2) est donnée par

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \ , \tag{7.4}$$

À partir de la solution générale (équation 7.3), recherchons par continuité pour h petit, une solution de type

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\frac{\omega_e}{2}t + \phi)e^{\omega t} \ , \tag{7.5}$$

où nous avons anticipé que, dans cette situation (h petit), la pulsation de la solution est proche de ω_0, c'est-à-dire $\omega_e/2 \simeq \omega_0$. Autrement dit, nous supposons par avance que l'instabilité est sous-harmonique, à charge de déterminer ensuite les conditions sous lesquelles notre hypothèse est valide[2]. Reportons la solution générale (équation 7.5) dans l'équation d'évolution paramétrique (équation 7.2), nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2[1 + h\cos(\omega_e t)]\right\}\cos(\frac{\omega_e}{2}t + \phi)e^{\omega t} = \Big[(\omega_0^2 - \frac{\omega_e^2}{4} + \omega^2)\times \\ \times \cos(\frac{\omega_e}{2}t + \phi) - \omega_e\omega\sin(\frac{\omega_e}{2}t + \phi) + \frac{h}{2}\omega_0^2\cos(\frac{\omega_e}{2}t - \phi) \\ + \frac{h}{2}\omega_0^2\cos(\frac{3\omega_e}{2}t + \phi)\Big]e^{\omega t} \ .\end{aligned} \tag{7.6}$$

Remarquons que le caractère paramétrique de l'excitation engendre des harmoniques supérieures (la troisième harmonique, de pulsation $3\omega_e/2$). Nous montrons au paragraphe 7.8 que l'effet d'une telle harmonique est négligeable par rapport à l'harmonique $\omega_e/2$, et par conséquent, nous le négligeons par la suite.

Développons le second membre de l'équation (équation 7.6) pour faire apparaître séparément les termes en $\cos(\frac{\omega_e}{2}t)e^{\omega t}$ et $\sin(\frac{\omega_e}{2}t)e^{\omega t}$. Comme $\sin(\frac{\omega_e}{2}t)$ et $\cos(\frac{\omega_e}{2}t)$ sont deux fonctions indépendantes, l'équation ci-dessus (équation 7.6) n'est satisfaite que si les deux coefficients multipliant ces fonctions s'annulent simultanément. Cette condition conduit au système suivant

$$\begin{aligned}\left[\omega_0^2 - \frac{\omega_e^2}{4} + \omega^2 + \frac{h}{2}\omega_0^2\right]\cos(\phi) - \omega_e\omega\sin(\phi) = 0 \ , \\ \omega_e\omega\cos(\phi) + \left[\omega_0^2 - \frac{\omega_e^2}{4} + \omega^2 - \frac{h}{2}\omega_0^2\right]\sin(\phi) = 0 \ .\end{aligned} \tag{7.7}$$

Ces deux équations, linéaires en $\cos(\phi)$ et $\sin(\phi)$, n'ont de solution non nulle que si le déterminant est nul, soit

$$\omega^4 + 2(\omega_0^2 + \frac{\omega_e^2}{4})\omega^2 + (\omega_0^2 - \frac{\omega_e^2}{4})^2 - \frac{h^2}{4}\omega_0^4 = 0 \ . \tag{7.8}$$

[2] Rien ne nous oblige à faire ce choix, et il est possible de procéder de manière plus générale. L'anticipation nous permet cependant de simplifier un peu la présentation.

Cette équation de dispersion du système paramétrique est une équation du second degré en $x \equiv \omega^2$ dont la somme des racines (égale à $-2(\omega_0^2 + \omega_e^2/4)$) est toujours négative. En outre le discriminant de cette équation est toujours positif. L'équation possède donc deux racines réelles, dont l'une au moins est négative. Une valeur négative de ω^2 correspond à un nombre imaginaire pur (donc le facteur $e^{\omega t}$ ne croît pas dans le temps, et la solution est stable). Par conséquent, l'apparition d'une instabilité doit correspondre à une valeur positive de ω^2. Étant donné le signe négatif de la somme des deux racines, l'existence d'une racine positive n'est possible que si le produit des deux racines, donné par $(\omega_0^2 - \frac{\omega_e^2}{4})^2 - \frac{h^2}{4}\omega_0^4$, est négatif. La condition d'instabilité s'écrit donc comme

$$h > 2|1 - (\frac{\omega_e}{2\omega_0})^2| \, . \tag{7.9}$$

Cette condition d'instabilité ($\omega^2 > 0$) correspond au premier secteur à partir de la gauche sur la figure 7.1. Pour une amplitude d'excitation h très faible (voire nulle), l'instabilité se produit si $\omega_0/\omega_e \simeq 1/2$, c'est l'instabilité paramétrique, ou encore l'instabilité sous-harmonique. Une excitation dont la pulsation se situe à l'extérieur du domaine hachuré s'amortit avec le temps.

En fait, en sus de cette instabilité, il existe un nombre infini de domaines dans le plan de la figure 7.1 où la condition $\omega^2 > 0$ est vérifiée. Ces domaines sont centrés autour des points caractérisés par un rapport entier des fréquences propres et celle associée à l'excitation (i.e. $\omega_0/\omega_e = n$, avec n entier positif, voir problème 7.8). Par exemple, $n = 1$ correspond à une excitation ayant une pulsation égale à la pulsation propre. Ceci rappelle la résonance habituelle d'un oscillateur forcé.

Pourquoi a-t-on donc accordé un intérêt particulier à la résonance associée à une pulsation propre égale à la moitié de la pulsation extérieure ($\omega_0/\omega_e = 1/2$) ? Bien sûr, le cas de figure est intéressant puisqu'il se démarque de la situation classique de la résonance des oscillateurs forcés, mais surtout, il s'agit de la résonance qui nécessite la plus faible amplitude d'excitation pour un oscillateur paramétrique réaliste, c'est-à-dire si les frottements sont pris en compte, (voir problème 7.8). Remarquons également que la zone d'instabilité associée à la résonance sous-harmonique est plus large que celles associées aux autres résonances (voir figure 7.1).

7.3 Image intuitive de la résonance paramétrique

Pour différencier la résonance classique de la résonance paramétrique, reprenons les conditions sous-tendant la résonance classique.

De façon élémentaire, les oscillateurs sont soumis à une résonance classique, lorsque la force excitatrice (supposée harmonique ; i.e. sinusoïdale) change de signe au terme d'une demi-période propre de l'oscillateur (forçage en $\sin(\omega_0 t)$, ce qui conduit à une réponse de l'oscillateur en $\sin(\omega_0 t)$) ; autrement dit, la période de la force excitatrice doit être égale à la période propre de l'oscillateur.

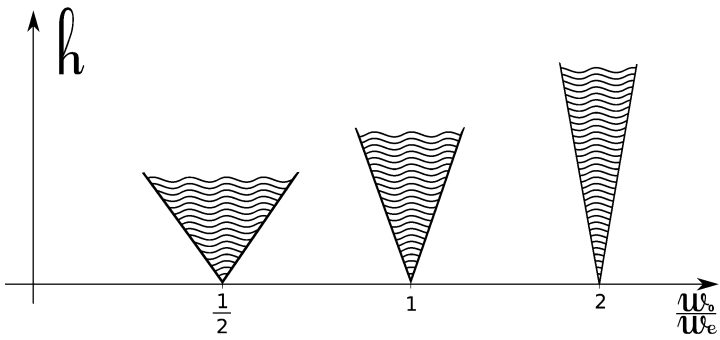


Figure 7.1 – Le secteur hachuré représente le domaine de l'instabilité paramétrique. On montre sur cette figure qualitative le domaine qui correspond à la sous-harmonique, et aux deux harmoniques $\omega_0 = \omega_e$ et $\omega_0 = 2\omega_e$.

C'est l'exemple de la balançoire : si on applique une force harmonique afin de rendre optimal le mouvement, il faut que la force appliquée change de signe au moment où l'angle atteint une amplitude maximale. Autrement dit, il faut que la fréquence de la force soit égale à la fréquence propre de l'oscillateur.

La situation est bien différente pour une excitation paramétrique. Dans le cas vu précédemment du pendule, l'excitation correspond à une modulation de la gravité. Supposons qu'une masse soit lâchée depuis l'amplitude maximale $\theta = \theta_{max}$ à vitesse nulle (voir figure 7.2) ; la masse se dirige vers la position $\theta = 0$ sous l'effet de la force de rappel égale à la projection du poids le long de la trajectoire. Entre $\theta = \theta_{max}$ et $\theta = 0$, cette force est dirigée dans le sens du mouvement : la masse est accélérée. Dans cette phase, correspondant au quart de la période propre, l'excitation paramétrique agit dans le même sens que la force de rappel. Lorsque la masse entame le deuxième quart de sa trajectoire, la phase est comprise entre $\theta = 0$ et $\theta = -\theta_{max}$, la force de rappel due au poids est maintenant dirigée en sens inverse au mouvement (voir figure 7.2), causant ainsi une décélération de la masse. L'excitation paramétrique va avoir tendance à amoindrir cette décélération. En effet, l'accélération du point de suspension intervenant dans la gravité effective change de signe au moment où la masse entame cette deuxième phase. Quand la masse atteint $\theta = -\theta_{max}$ et entame la 3^e phase (comprise entre $\theta = -\theta_{max}$ et $\theta = 0$), la force excitatrice contribue à nouveau à la force de rappel (ce qui correspond à un changement de signe de l'excitation). Ainsi, sur une demi-période, de θ_{max} à $-\theta_{max}$, l'excitation a changé deux fois de signe. Elle a ainsi une période deux fois plus petite que la période propre, ou une pulsation deux fois plus grande que la pulsation propre : $\omega_e = 2\omega_0$: c'est la résonance sous-harmonique.

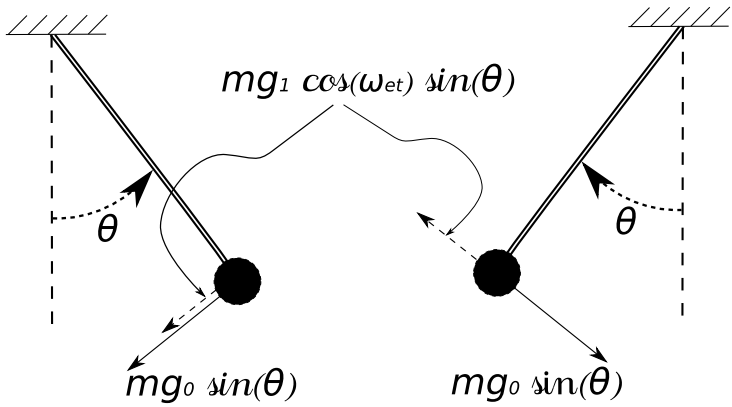


Figure 7.2 – (a) Dans le secteur $0 < \theta < \theta_{max}$ (partie de gauche), l'excitation agit dans le même sens que la gravité. (b) Dans le secteur $-\theta_{max} < \theta < 0$ (partie de droite) l'excitation agit en sens opposé pour atténuer la décélération causée par le poids. Ainsi, l'excitation a une pulsation deux fois plus grande que la pulsation propre (le sens de l'action de l'excitation change deux fois plus souvent que celle de la projection du poids).

7.4 Équation d'amplitude universelle au voisinage d'une résonance sous-harmonique

Déterminons maintenant la forme universelle de l'équation d'amplitude valable au voisinage du seuil de l'instabilité paramétrique (cette question et celles qui suivent dans ce chapitre sont discutées dans un language similaire dans la référence [28]). Dans une étude non linéaire, il devient nécessaire de rétablir l'équation complète du pendule (i.e. sans l'approximation de petits angles, $\sin(\theta) \simeq \theta$). L'équation d'évolution non linéaire du pendule en présence de frottement prend la forme :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2[1 + h\cos(\omega_e t)]\sin(\theta) = 0\,. \tag{7.10}$$

Nous avons vu que cette équation présente une instabilité linéaire sous-harmonique. Afin d'étudier analytiquement les effets non linéaires, plaçons-nous au voisinage d'une résonance paramétrique et posons, à cet effet, $\delta = (\omega_0^2/\omega_e^2) - 1/4$ (notons que cette définition diffère quelque peu de celle qui a été adoptée dans les paragraphes précédents, à savoir : $\epsilon = \omega_e - 2\omega_0$). Cette nouvelle notation introduit un petit paramètre δ qui mesure la distance au seuil de la résonance ; il est utile dans les développements analytiques de reformuler $\delta = \epsilon\Delta$, où Δ est d'ordre unité et ϵ (à ne pas confondre avec le précédent ϵ, même si l'un est proportionnel à l'autre) est un petit paramètre associé à la proximité de la résonance. Les trois paramètres en notre possession sont ainsi λ caractérisant

le frottement, h définissant l'amplitude du forçage et δ la distance au seuil de l'instabilité. Nous sommes intéressés à étudier le système lorsque ces trois effets agissent simultanément, nous choisissons d'étudier l'évolution du système lorsque les paramètres associés au frottement (i.e. λ) et au forçage (i.e. h) sont de l'ordre de ϵ, ce qui amène à poser : $\lambda = \epsilon\Lambda$ et $h = \epsilon H$, où Λ et H sont d'ordre unité. Cherchons ensuite une solution pour θ de la forme[3] :

$$\theta(t) = \sqrt{\epsilon}[\theta_0(t,T) + \epsilon\theta_1(t,T) + ...] \tag{7.11}$$

où T est la variable temporelle lente. Cette dissociation en variables lente et rapide est issue de l'analyse de l'équation de dispersion obtenue en présence de frottements (équation 7.56) ; en effet, puisque la dépendance des paramètres λ et h est en ϵ, le taux de croissance de l'instabilité, noté ω, possède une partie réelle dont la dépendance est également en ϵ : autrement dit, l'instabilité évolue sur une échelle de temps de l'ordre de ϵ^{-1} ; nous pouvons ainsi introduire une variable lente T telle que $T = \epsilon t$. À la bifurcation, la partie imaginaire, quant à elle, peut être finie (cas de la bifurcation de Hopf, voir chapitre 5). C'est pourquoi nous devons avoir, en principe, une échelle lente T et une échelle rapide t. En suivant la méthode présentée au chapitre précédent (voir chapitre 6), nous pouvons écrire la différentielle

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon\frac{\partial}{\partial T} \, . \tag{7.12}$$

La suite consiste à reporter cette relation dans l'équation d'évolution non linéaire du pendule en présence de frottement (équation 7.10), en y adjoignant de plus l'expression des paramètres en fonction de ϵ et la forme de la solution θ recherchée (équation 7.11), afin de déduire les contributions successives en puissance de ϵ. À l'ordre zéro (i.e. en ϵ^0), nous obtenons l'équation suivante :

$$\mathcal{L}\theta_0 \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2\right]\theta_0 = 0 \, , \tag{7.13}$$

dont la solution est donnée par

$$\theta_0 = A(T)e^{i\omega_0 t} + A^*(T)e^{-i\omega_0 t} \, , \tag{7.14}$$

où $A(T)$ est l'amplitude et A^* son conjugué. À l'ordre 1 en ϵ, nous obtenons l'équation :

$$\mathcal{L}\theta_1 = -2\frac{\partial^2\theta_0}{\partial t \partial T} - 2\Lambda\frac{\partial\theta_0}{\partial t} - \omega_0^2 H\theta_0\cos(\omega_e t) + \frac{\omega_0^2}{6}\theta_0^3 \, . \tag{7.15}$$

[3]Cette forme résulte de la condition d'une contribution similaire en ϵ issue des termes linéaire (en θ) et non linéaire (en θ^3) issus du développement de la fonction $\sin(\theta)$; la contribution linéaire est précédée de ϵ, car le taux de croissance de l'instabilité est en ϵ. L'instabilité correspond à $\omega = 0$; au voisinage de l'instabilité ω est petit et on peut négliger ω^4 devant ω^2 dans l'équation de dispersion (équation 7.8). En comparant le terme ω^2 au terme $(\omega_0^2 - \omega_e^2/4)^2 \sim \epsilon^2$, nous en déduisons que $\omega \sim \epsilon$. Au voisinage de l'instabilité et dans le régime linéaire, nous avons $\dot{\theta} = \omega\theta \sim \epsilon\theta$. En comparant ce terme au terme cubique θ^3, nous pouvons anticiper le développement de θ en puissance de ϵ (voir équation 7.11). Nous pouvons vérifier *a posteriori* que ce choix est bien approprié.

Utilisons le résultat suivant $\omega_e = 2\omega_0 - 4\omega_0\epsilon\Delta + O(\epsilon^2)$, et extrayons les termes résonants en $e^{i\omega_0 t}$ du second membre de l'équation d'évolution développée à l'ordre 1 en ϵ (équation 7.15). Nous avons déjà vu au chapitre 6 l'importance des termes résonants dans la détermination de la condition de solvabilité. L'équation homogène $\mathcal{L}\theta_1 = 0$ a pour fonction propre $e^{i\omega_0 t}$. La présence de ce terme au second membre de l'équation d'évolution (équation 7.15) (appelé aussi terme séculaire ou résonant) impose une condition de solvabilité (voir chapitre 6 pour plus de détails). Cette condition consiste simplement à éliminer au second membre de l'équation d'évolution (équation 7.15) les coefficients du terme $e^{i\omega_0 t}$. Cette condition permet d'établir l'équation d'évolution de l'amplitude $A(T)$

$$\frac{\partial A}{\partial T} = -\Lambda A - \frac{i\omega_0}{4}|A|^2 A + \frac{i\omega_0 H}{4} A^* e^{-4i\omega_0 \Delta T} \; . \tag{7.16}$$

En introduisant une variable B par [4] $A = Be^{-2i\omega_0 \Delta T}$, l'équation d'amplitude pour la variable B prend la forme autonome (i.e. dont les coefficients sont indépendants du temps) suivante :

$$\frac{\partial B}{\partial T} = (-\Lambda + i\nu)B + i\beta|B|^2 B + i\mu B^* \; , \tag{7.17}$$

où nous avons posé $\nu = 2\omega_0\Delta$, $\mu = \omega_0 H/4$ et $\beta = -\omega_0/4$.

7.4.1 Détermination de l'équation non linéaire à partir des propriétés de symétrie

L'équation d'amplitude associée à l'instabilité sous-harmonique (équation 7.17) aurait pu être énoncée en considérant les symétries du problème. En effet, l'équation d'évolution non linéaire du pendule en présence de frottement (équation 7.10) est invariante vis-à-vis de l'opération de translation suivante : $t \to t + 2\pi/\omega_e$. En considérant la solution obtenue θ_0 pour l'équation développée à l'ordre 0 en ϵ (équation 7.14), cette opération de symétrie revient simplement à effectuer dans la solution θ_0 exprimée en fonction de la variable B (nous rappelons que $A = Be^{-2i\omega_0 \Delta T}$) la transformation $B \to -B$. Cette transformation d'invariance de l'amplitude $B \to -B$, est la seule contrainte d'invariance à imposer à l'équation d'amplitude recherchée. Il s'ensuit, qu'en plus des termes usuels proportionnels à B, des termes conjugués du type B^* sont ici également autorisés.

Notons que lors de l'étude de l'équation d'amplitude associée à une bifurcation stationnaire ou de Hopf (voir chapitre 5), l'équation devait être invariante vis-à-vis de la transformation $A \to Ae^{i\theta}$, où θ est une phase arbitraire constante. Cette contrainte n'autorisait pas la présence de A^* dans l'équation finale.

L'équation d'amplitude associée à l'instabilité sous-harmonique (équation 7.17) admet une solution triviale $B = 0$. Son analyse de stabilité linéaire (en

[4] Ceci revient à dire que nous nous plaçons dans le repère tournant à la pulsation $\omega_e/2$, à la différence de la situation décrite par l'expression de θ_0 (voir équation 7.14), associée à une pulsation égale à ω_0.

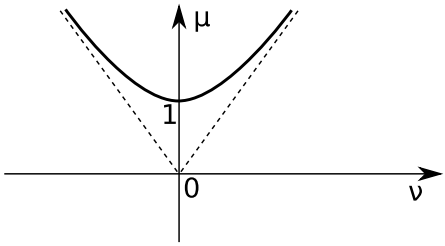


Figure 7.3 – Dans le secteur au-dessus de la courbe, l'état $B = 0$ est instable. Les lignes en pointillets se rapportent au cas sans frottement, tandis que la courbe continue correspond au cas avec frottement.

cherchant une solution sous la forme $B = X + iY$), avec $X, Y \sim e^{\omega t}$ conduit à la relation de dispersion suivante

$$\omega^2 + 2\Lambda\omega + \Lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 = 0 \, . \tag{7.18}$$

La solution triviale est instable si $\omega > 0$, c'est-à-dire si

$$\mu > \mu_c = \sqrt{\Lambda^2 + \nu^2} \, . \tag{7.19}$$

Le diagramme de stabilité obtenu dans le plan $[(\mu, \nu]$ (voir figure 7.3) est similaire aux résultats obtenus lors de l'étude des zones d'instabilités de la résonance sous-harmonique (voir figures 7.1 et 7.7).

7.5 Instabilité non linéaire

L'équation d'amplitude associée à l'instabilité sous-harmonique (équation 7.17) possède d'autres solutions non triviales (i.e. $B \neq 0$). Posons $B = Re^{i\theta}$, nous obtenons pour les parties réelle et imaginaire

$$\partial_t R = -\Lambda R + \mu \sin(2\theta) R \, , \tag{7.20}$$

$$\partial_t \theta = \nu + \beta R^2 + \mu \cos(2\theta) \, . \tag{7.21}$$

Ce système d'équations admet comme point fixe (outre $R_0 = 0$) θ_0 et R_0 vérifiant

$$\sin(2\theta_0) = \frac{\Lambda}{\mu}, \quad |\beta| R_0^2 = -\nu \pm \sqrt{\mu^2 - \Lambda^2} \, , \tag{7.22}$$

avec $\mu > \Lambda$. Les branches de solution pour $\nu > 0$ et $\nu < 0$, tracées dans le plan $[(\mu, \nu]$ (voir figure 7.4), comportent une partie stable lorsque $R_0^2 > 0$ (en trait continu) et des parties instables (trait pointillé). Lorsque $\nu < 0$, la solution $R_0 = 0$ devient instable en $\mu = \mu_c = \sqrt{\nu^2 + \Lambda^2}$, et bifurque de manière continue vers la branche supérieure (branche située au-dessus de l'axe des μ, voir figure

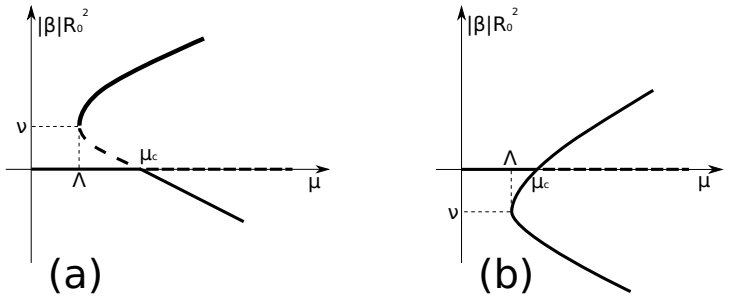


Figure 7.4 – (a) Branches de solutions pour $\nu > 0$, et (b) le cas $\nu < 0$. Les traits épais correspondent aux solutions stables. Les courbes en tirets représentent des branches instables.

7.4) : il s'agit d'une bifurcation sur-critique. Lorsque $\nu > 0$, nous sommes en présence d'une bifurcation sous-critique (ce type de bifurcation a été introduit au chapitre 3) : la solution $R_0 = 0$ peut transiter vers la branche supérieure avant même que le seuil d'instabilité $\mu = \mu_c$ soit atteint. Le point $\nu = 0$ est appelé un point tri-critique, en vertu du fait que la bifurcation est sous-critique pour $\nu \to 0^+$ (on approche la valeur zéro du côté positif) et est sur-critique pour $\nu \to 0^-$. Le point tri-critique possède une propriété particulière ; en effet, posons $\mu = \mu_c + \epsilon$ et $\nu = 0$, nous voyons facilement que $R_0 \sim \epsilon^{1/4}$ (à comparer au résultat d'une bifurcation fourche où $R_0 \sim \epsilon^{1/2}$).

Notons enfin que l'étude de stabilité des solutions peut être menée en suivant la démarche traditionnelle usuelle, c'est-à-dire en posant $\theta = \theta_0 + \theta_1(t)$ et $R = R_0 + R_1$, et en développant les deux équations d'amplitude correspondant aux parties réelle et imaginaire de l'équation d'amplitude associée à l'instabilité sous-harmonique (équations 7.21) à l'ordre un en R_1 et à l'ordre un en θ_1 et en recherchant une solution de type $e^{\omega t}$. Nous obtenons alors aisément l'équation suivante

$$\omega^2 + 2R_0\Lambda\omega + 4\beta R_0^2(\nu + \beta R_0^2) = 0\,. \tag{7.23}$$

La solution est instable lorsque $\nu - |\beta|R_0^2 > 0$, avec $\beta < 0$; cette branche de solution se trouve en dessous du point tournant (voir figure 7.4).

7.6 Accrochage de la phase

La dynamique d'accrochage de la phase intervient également très souvent en science non linéaire. Préparons deux horloges à l'instant t indiquant exactement la même heure, et laissons-les tourner librement indépendamment l'une de l'autre (i.e. sans couplage). En situation réelle, les horloges n'ont jamais exactement la même fréquence ; l'existence d'une différence inévitable de fréquence, même infime, engendre au bout d'un temps suffisamment long un décalage de

l'heure indiquée sur chacune des horloges. Mais, en couplant les deux horloges (plus généralement, deux oscillateurs), même faiblement, un phénomène d'accrochage peut se déclencher pour aboutir à une synchronisation (i.e. les deux oscillateurs oscillent à la même fréquence). Nous allons illustrer ce phénomène sur l'oscillateur de van der Pol (décrivant un oscillateur dissipatif soumis à un amortissement non linéaire) forcé par une tension extérieure de pulsation ω_e. Dans le chapitre décrivant l'oscillateur van der Pol (voir paragraphe 5.1 du chapitre 5), nous avions étudié un circuit RLC doté d'une diode tunnel. L'équation d'évolution du courant I développée au troisième ordre est obtenue à partir de l'équation d'évolution de l'oscillateur van der Pol développée à l'ordre 3 (équation 5.6) et complétée par un terme de forçage au second membre

$$\ddot{I} - (2\mu\epsilon - I^2)\dot{I} + \omega_0^2 I = F\cos(\omega_e t) \ , \tag{7.24}$$

où nous avons remplacé le coefficient de friction (égal à ϵ dans l'équation d'évolution de l'oscillateur de van der Pol initiale, équation 5.6) par $2\mu\epsilon$. Cette différence de notation est adoptée dans le but d'aider la comparaison entre ce problème et l'oscillateur paramétrique.

Au voisinage de $\epsilon \simeq 0$, la dynamique est lente (amortissement critique introduit au chapitre 2) ; l'amplitude se comporte comme une exponentielle de type $e^{\epsilon t}$, multipliée par une partie oscillante dans le temps (i.e. en $sin(t)$). Nous distinguerons la variable lente $T = \epsilon$ de la variable rapide t, et nous suivons la même démarche adoptée précédemment pour l'oscillateur paramétrique dans ce chapitre afin d'extraire l'équation d'amplitude. Nous poserons ensuite[5] $I = I_0 + \epsilon I_1 + ...$

7.6.1 Forçage non résonant

Considérons d'abord le cas non résonant, dit encore le cas sans accrochage ($\omega \neq \omega_0$). À partir de l'équation d'évolution de l'oscillateur van der Pol forcé (équation 7.24), nous obtenons simplement à l'ordre zéro (i.e. en ϵ^0) l'équation suivante :

$$\mathcal{L}I_0 \equiv [\frac{\partial}{\partial t^2} + \omega_0^2]I_0 = F\cos(\omega_e t) \tag{7.25}$$

dont la solution est donnée par

$$I_0 = A(T)e^{i\omega_0 t} + c.c. + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega_e^2}\cos(\omega_e t) \ . \tag{7.26}$$

À l'ordre ϵ on obtient

$$\mathcal{L}I_1 = (2\mu - I_0^2)\frac{\partial I_0}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 I_0}{\partial t \partial T} \ . \tag{7.27}$$

[5]Notons la différence avec l'oscillateur de van der Pol traitée au chapitre 6, le développement de I en puissance de ϵ commence avec I_0 et non I_1. Ceci est dû au fait qu'ici, il existe une solution forcée d'ordre zéro, $F\cos(\omega_e t)$, tandis que dans le cas de l'oscillateur de van der Pol, la solution à l'ordre le plus bas est $I = 0$; ceci entraîne également que le terme suivant est en ϵ.

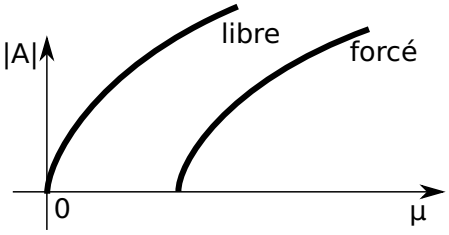


Figure 7.5 – Branches de solutions en l'absence et en présence de forçage.

En utilisant la solution d'ordre zéro et en annulant le facteur devant le terme séculaire en $e^{i\omega_0 t}$, nous obtenons la condition de solubilité, qui n'est autre que l'équation d'amplitude recherchée

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \xi A - \frac{1}{2}|A|^2 A \,, \tag{7.28}$$

où nous avons posé

$$\xi = \mu - \frac{F^2}{4[\omega_e^2 - \omega_0^2]^2} \,. \tag{7.29}$$

Nous obtenons formellement une équation identique à celle de l'oscillateur van der Pol en l'absence de forçage (voir équation 6.18), avec $\gamma = 0$ et $\mu = 1$) ; seul le seuil de l'instabilité est déplacé par le forçage. Ainsi, à cet ordre, le seul effet du forçage est de retarder l'instabilité (voir figure 7.5). Autrement dit, le forçage a tendance à stabiliser le système. Ainsi, l'effet d'une perturbation peut éventuellement avoir pour effet de stabiliser une solution instable. C'est le cas du pendule libre inversé ; la position de la masse dans sa position verticale pointant vers le haut est instable. Au contraire, si le pendule est soumis à une perturbation, cette position peut devenir stable. Une expérience courante est celle d'un bâton posé verticalement au centre de notre main ; au repos, cette position est instable. Notre expérience montre que le bâton peut être stabilisé en faisant vibrer adéquatement la main (pour une étude récente de la stabilité du pendule inversé voir la référence [71]).

7.6.2 Forçage résonant

Nous allons considérer maintenant le cas du forçage résonant. Pour simplifier l'analyse, supposons que le forçage est d'ordre ϵ et posons $f = \epsilon F$, avec F un facteur d'ordre unité. Ce choix implique que la solution I_0 (équation 7.26)) ne contient pas le terme en F, ce qui facilite l'expression analytique sans affecter, pour autant, la conclusion générale. Pour exprimer explicitement que le forçage est résonant, développons la pulsation extérieure à l'ordre 1 en ϵ, soit $\omega_e = \omega_0 + \epsilon\omega_1$, avec ω_1 d'ordre un. À l'ordre dominant, nous obtenons à partir de l'équation d'évolution de l'oscillateur van der Pol forcé (équation 7.24) :

$$I_0 = A(T)e^{i\omega_0 t} + c.c. \tag{7.30}$$

À l'ordre suivant, la condition d'annulation du facteur en $e^{i\omega_0 t}$ permet d'établir l'équation d'amplitude :

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \mu A - \frac{1}{2}|A|^2 A - \frac{iF}{4\omega_0}e^{i\omega_1 T} \ . \tag{7.31}$$

À l'aide du changement de variable suivant : $A = Be^{i\omega_1 T}$, nous obtenons l'équation d'amplitude de l'oscillateur van der Pol forcé pour B :

$$\frac{\partial B}{\partial T} = (\mu - i\omega_1)B - \frac{1}{2}|B|^2 B - \frac{iF}{4\omega_0} \ . \tag{7.32}$$

Réécrivons la solution de l'oscillateur van der Pol forcé obtenue à l'ordre dominant (équation 7.30) en fonction de la variable B, pour obtenir

$$I_0 = B(T)e^{i(\omega_0+\epsilon\omega_1)t} + c.c. = B(T)e^{i(\omega_e)t} + c.c. \tag{7.33}$$

Cette réécriture de la solution de l'oscillateur van der Pol forcé revient à étudier la solution dans le repère tournant à la fréquence de l'excitation ω_e, alors que l'écriture antérieure en fonction de la variable A (équation 7.30) exprime la solution dans le repère tournant à la fréquence propre.

7.6.3 Forme de l'équation et symétrie

L'équation d'évolution de l'oscillateur van der Pol forcé (équation 7.24) est invariante vis-à-vis de la transformation $t \to t+2\pi n/\omega_e$. Par conséquent, l'équation finale doit conserver cette invariance. À l'ordre dominant, nous avons vu que la solution est du type : $I_0 = Be^{i\omega_e t} + c.c.$ (équation 7.33). Or, la transformation $t \to t + 2\pi n/\omega_e$ n'affecte pas le coefficient de B dont la dépendance est en $e^{i\omega_e t}$. Autrement dit, cette transformation sur le temps est associée à l'opération Identité sur la variable B : $B \to B$; il n'y a donc pas de contrainte de symétrie quant à l'équation d'évolution exprimée en fonction de B. Nous pouvons donc nous permettre, par exemple, d'introduire un terme en B^2. Or ce terme peut être éliminé à l'aide d'un changement de variable du type $B \to B+c$, où c est une constante à choisir de telle sorte que B^2 disparaisse de l'équation. Mais à cette opération il y a un prix : l'équation d'amplitude contient un terme constant (au même titre que le terme $-iF/4\omega_0$ dans l'équation 7.32). Nous élaborons davantage ces considérations dans le paragraphe qui suit.

7.6.4 Accrochage d'ordre supérieur : équation générale obtenue par les symétries

Supposons que l'oscillateur de van der Pol soit excité par une force de la forme $F\cos(n\omega_0 t/p)$, avec n et p entiers. En reprenant pas à pas les mêmes

étapes de calcul adoptées précédemment, nous obtenons une solution de type :

$$I_0 = B(T)e^{ip\omega_e t/n} + c.c. \tag{7.34}$$

L'invariance de l'équation de départ vis-à-vis de la transformation $t \to t+2\pi/\omega_e$ impose que l'équation d'amplitude exprimée en fonction de B doit être invariante vis-à-vis de la transformation $B \to Be^{ip\omega_e t/n} + c.c.$ Nous pouvons vérifier que les termes suivants $dB/dT, B, |B|^2B$ se transforment tous de la même manière, soit : $(dB/dT, B, |B|^2B) \to (dB/dT, B, |B|^2B)e^{2ip\pi/n}$. L'invariance de l'équation autorise également des termes de la forme B^{*n-1}. En effet, l'opération $B \to Be^{ip\omega_e t/n} + c.c.$ entraîne la transformation suivante B^{*n-1} en $B^{*n-1}e^{2ip\pi}e^{2ip\pi/n} = B^{*n-1}e^{2ip\pi/n}$, c'est-à-dire identique à celle des termes $(dB/dT, B, |B|^2B)$. Ainsi, la forme générale de l'équation que doit vérifier B est la suivante :

$$\frac{dB}{dT} = (\mu + i\nu)B - \beta|B|^2B - \alpha B^{*n-1} , \tag{7.35}$$

où nous avons choisi $\beta > 0$ (comme dans le cas de l'oscillateur van der Pol) et réel[6]. α, relié au forçage, est choisi réel[7] également. Le cas de figure discuté dans le paragraphe précédent correspond à $n = 1$.

Le paramètre ν mesure le déplacement autour de la fréquence de résonance (au même titre que ω_1 dans le cas $n = 1$). Nous allons nous limiter ici au cas $n = 2$ par souci de simplicité, et nous posons $\beta = 1$.

Les parties réelle et imaginaire de l'équation d'amplitude générale en B obtenue pour l'oscillateur de van der Pol excité par une force ayant la forme $F\cos(n\omega_0 t/p)$ (équation 7.35) donnent :

$$\begin{aligned} \partial_t R &= \mu R - R^3 - \alpha R\cos(2\theta) , \\ \partial_t \theta &= \nu + \alpha\sin(2\theta) . \end{aligned} \tag{7.36}$$

Nous avons éliminé de l'équation associée à la phase la solution triviale $R = 0$ (car, dans ce cas, l'équation de la phase est automatiquement satisfaite quelle que soit la phase !). Il existe un autre point fixe, noté θ_0, donné par la relation : $\sin(2\theta_0) = -\nu/\alpha$. Cette solution n'existe que pour $|\nu/\alpha| < 1$. Les deux points fixes peuvent également s'écrire comme

$$2\theta_0 = -\arcsin\left(\frac{\nu}{\alpha}\right) , \quad 2\theta_0 = \pi + \arcsin\left(\frac{\nu}{\alpha}\right) . \tag{7.37}$$

L'étude de la stabilité linéaire de ces points fixes ne présente aucune difficulté (l'équation de la phase ne contient pas R), et nous obtenons que la première branche est instable et la seconde est stable.

[6] Le fait que β soit réel n'est pas un résultat général, mais cette contrainte a été adoptée ici par souci de simplicité.

[7] Dans l'équation d'évolution 7.32, le terme de forçage est imaginaire pur, il suffit de changer l'origine du temps pour obtenir un forçage en sin au lieu d'un forçage en cos, et ainsi de passer d'un cas à l'autre.

Il reste à examiner la stabilité de la solution $R = 0$. L'équation de $R(t)$ du système (équation 7.40) linéarisée autour du point fixe $R = 0$ conduit à :

$$R_1 = [\mu - \alpha\cos(2\theta_0)]R_1 \tag{7.38}$$

dont la solution est donnée par $R_1 \sim e^{\omega t}$ avec $\omega = \mu - \alpha\cos(2\theta_0) = \mu \pm \sqrt{\alpha^2 - \nu^2}$. La solution n'est stable que si les deux valeurs propres sont négatives. La condition nécessaire pour que la valeur propre $\mu + \sqrt{\alpha^2 - \nu^2}$ soit négative impose $\mu < 0$. Pour assurer que $\omega < 0$, il faut imposer en outre que $\mu < -\sqrt{\alpha^2 - \nu^2}$. Ces contraintes délimitent les domaines de stabilité ; pour $\omega = 0$ (partie imaginaire nulle), la bifurcation est stationnaire ; en deçà de la courbe parabolique tracée dans le plan (ν, μ) (voir figure 7.6), la solution est stable. L'état $R = 0$ en dessous de la parabole est dit *état forcé*. En effet, si $R = 0$ (donc $A = B = 0$), la solution de l'équation d'évolution de l'oscillateur de van der Pol forcé à l'ordre zéro (équation 7.26) montre que l'oscillateur est simplement forcé à la fréquence de la force externe ω_e.

Lorsque $R \neq 0$, l'état est dit « accroché » : l'oscillateur (dont la fréquence propre est légèrement décalée par rapport à la pulsation propre ω_0, à l'instar de l'oscillateur de van der Pol non forcé) s'accroche à la fréquence $\omega_e p/n$ de l'excitation (ici, nous nous restreignons au cas $n = 2$). La différence de phase entre l'excitation et celle de l'oscillateur est « verrouillée » à la valeur θ_0.

La recherche du point fixe pour $R \neq 0$ conduit à

$$R_0^2 = \mu + \sqrt{\alpha^2 - \nu^2}\ , \tag{7.39}$$

avec $\mu + \sqrt{\alpha^2 - \nu^2} > 0$. Autrement dit, cette solution existe au-dessus de la parabole tracée dans le plan (ν, μ) (voir figure 7.6) ; grâce à une étude linéaire, nous pouvons établir que cette solution (adjointe à la phase $\theta_0 = \pi + \arcsin(\frac{\nu}{\alpha})$) est stable.

Les parties réelle et imaginaire de l'équation d'amplitude générale en B obtenue pour l'oscillateur de van der Pol excité par une force de type $F\cos(n\omega_0 t/p)$ (équation 7.35) donnent :

$$\begin{aligned} \partial_t R &= \mu R - R^3 - \alpha R\cos(2\theta)\ , \\ \partial_t \theta &= \nu + \alpha\sin(2\theta)\ . \end{aligned} \tag{7.40}$$

Dans le cas où $|\nu/\alpha| > 1$, la variable θ, solution de l'équation d'amplitude générale de l'oscillateur de van der Pol forcé (équation7.40), devient une fonction oscillante dans le temps (cas de figure analogue au mouvement de bascule (tumbling) du pendule (voir paragraphe 3.4.6) ; comme R est couplé à θ, R oscille également dans le temps. Lorsque $|\nu/\alpha| < 1$, une transition[8] survient qui marque l'évolution de l'état « accroché » vers un état quasipériodique ; le terme « quasi » se réfère au fait que la fréquence de l'oscillateur est intrinsèquement

[8] Il s'agit d'une bifurcation col-nœud.

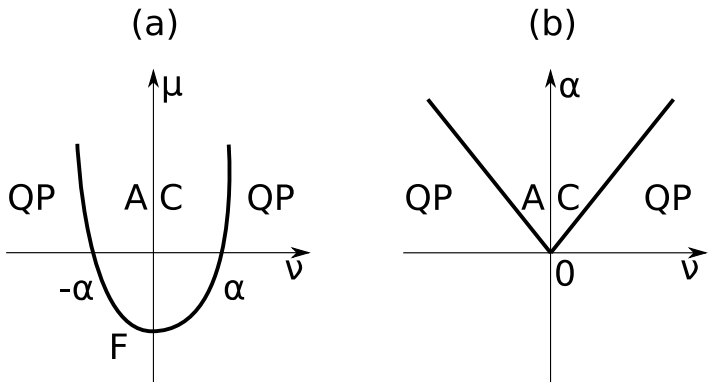


Figure 7.6 – Diagramme des solutions possibles, QP : quasi périodique, AC : état accroché, et F : état forcé

sans rapport simple (rationnel) avec celle de l'excitation (voir figure 7.6, pour la représentation des solutions et des frontières des bifurcations).

Notons enfin que la dynamique quasi périodique, ainsi que la bifurcation sous-harmonique, constituent deux des trois scénarios possibles de transition vers le chaos (voir chapitre 8 dédié à l'étude du chaos).

7.7 Problèmes

7.8 Problème : instabilités des harmoniques supérieures , et effet du frottement

Étudier les instabilités associées aux harmoniques $\omega_0 = \omega_e$ et $\omega_0 = 2\omega_e$, et comparer l'amplitude minimale requise pour induire ces instabilités avec l'amplitude nécessaire au déclenchement de l'instabilité sous-harmonique.

Solution : Afin de simplifier le calcul, nous allons adopter une méthode alternative à l'analyse des instabilités que nous allons appliquer tout d'abord à l'instabilité sous-harmonique pour vérifier l'identité des conclusions. Les deux méthodes sont équivalentes tant que l'analyse est restreinte au voisinage du point d'instabilité.

Plaçons-nous donc au voisinage de l'instabilité sous-harmonique, en posant

$$\omega_e = 2\omega_0 + \epsilon \,, \tag{7.41}$$

où ϵ est un petit paramètre. L'équation d'évolution paramétrique (équation 7.2) s'écrit alors

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2[1 + h\cos(2\omega_0 + \epsilon)t]\theta = 0 \,. \tag{7.42}$$

Cherchons ensuite une solution de la forme

$$\theta(t) = a_0 \cos(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t + b_0 \sin(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t \,, \tag{7.43}$$

où a_0 et b_0 sont, en toute généralité, deux fonctions du temps, telles que $a_0, b_0 \sim e^{\omega t}$ (équation 7.5). Or, la bifurcation est définie par $\omega = 0$ (ω est un nombre réel à la bifurcation). Si nous souhaitons juste déterminer la courbe neutre séparant la région stable de la région instable (à l'instar de la figure 7.1), il suffit de poser d'emblée $\omega = 0$ (l'algèbre se trouve ainsi grandement simplifiée). Ceci équivaut à considérer a_0 et b_0 comme des constantes. Reportons la solution obtenue pour $\theta(t)$ (équation 7.43) dans l'équation d'évolution obtenue au voisinage de la bifurcation (équation 7.42) pour obtenir

$$\left[-a_0(\epsilon\omega_0 + \frac{\epsilon^2}{4}) + \frac{h\omega_0^2 a_0}{2}\right]\cos(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t$$
$$+\left[-b_0(\epsilon\omega_0 + \frac{\epsilon^2}{4}) - \frac{h\omega_0^2 b_0}{2}\right]\sin(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t = 0\ . \tag{7.44}$$

Après annulation des coefficients des fonctions sinusoïdales, nous obtenons la relation suivante

$$\epsilon = \pm\frac{1}{2}h\omega_0\ . \tag{7.45}$$

Le domaine d'instabilité est donné par

$$|\epsilon| < \frac{1}{2}h\omega_0\ . \tag{7.46}$$

où nous avons conservé le terme dominant en ϵ. Notons aussi que, comme h est supposé petit, les termes en $h\epsilon$ sont d'un ordre supérieur. Le résultat obtenu ci-avant (équation 7.46) est analogue à celui qui a été obtenu dans l'analyse précédente de l'instabilité sous-harmonique (équation 7.9) dans lequel, en gardant le terme dominant en ϵ, nous posons $\omega_e = 2\omega_0 + \epsilon$. D'ailleurs, le résultat antérieur (équation 7.9) n'a de sens qu'au voisinage de ω_0, et il est, par conséquent, plus judicieux de se limiter à un développement au plus bas ordre en $\omega_e - 2\omega_0 \equiv \epsilon$.

Effet des harmoniques supérieures sur la résonance sous-harmonique

L'étude des harmoniques d'ordre supérieur requiert un développement de l'équation d'évolution au voisinage de la bifurcation aux ordres suivants. Le produit $h\cos(2\omega_0 + \epsilon)t$ et $a_0\cos(\omega_0 + \epsilon/2)t$ donne lieu à des termes en $\cos 3(\omega_0 + \epsilon/2)t$ qui ont été négligés. Par souci de cohérence, leur prise en compte nous impose également de chercher une solution de la forme

$$\theta(t) = a_0\cos(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t + b_0\sin(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t + a_1\cos 3(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t$$
$$+b_1\sin 3(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t\ . \tag{7.47}$$

L'équation d'évolution devient, en présence des harmoniques d'ordre trois :

$$\left[-a_0(\epsilon\omega_0 + \frac{\epsilon^2}{4}) + \frac{h\omega_0^2 a_0}{2} + \frac{h\omega_0^2 a_1}{2}\right]\cos(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t +$$
$$+\left[-b_0(\epsilon\omega_0 + \frac{\epsilon^2}{4}) - \frac{h\omega_0^2 b_0}{2} + \frac{h\omega_0^2 b_1}{2}\right]\sin(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t +$$
$$+\left[\frac{h\omega_0^2 a_0}{2} - 8\omega_0^2 a_1\right]\cos 3(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t +$$
$$+\left[\frac{h\omega_0^2 b_0}{2} - 8\omega_0^2 b_1\right]\sin 3(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t = 0 \tag{7.48}$$

L'annulation de chacun des quatre coefficients conduit aux résultats recherchés : les deux derniers termes définissent les constantes a_1 et b_1 tels que $a_1 = ha_0/16$, $b_1 = hb_0/16$, et les deux premiers termes induisent la relation suivante $\omega_0\epsilon \pm h\omega_0^2/2 + \epsilon^2/4 - h^2\omega_0^2/32 = 0$. À l'ordre h^2, les nouvelles limites d'instabilité sont données par

$$\epsilon = \pm\frac{1}{2}h\omega_0 - \frac{h^2\omega_0}{32} \,. \tag{7.49}$$

Comparée à la condition d'instabilité sous-harmonique (équation 7.46), la prise en compte de la troisième harmonique dans l'étude de la résonance sous-harmonique ne fait que changer le seuil de la bifurcation d'un terme de l'ordre de h^2, donc produisant un effet sous-dominant par rapport aux termes de l'ordre de h.

Résonance harmonique

étudions à présent la résonance de l'harmonique principale, qui se manifeste lorsque la fréquence extérieure est égale à la fréquence propre de l'oscillateur : $\omega_e = \omega_0$, et plaçons-nous à proximité de cette résonance en posant

$$\omega_e = \omega_0 + \epsilon \tag{7.50}$$

où ϵ est un petit paramètre. L'équation d'évolution paramétrique (équation 7.2) prend alors la forme

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2[1 + h\cos(\omega_0 + \epsilon)t]\theta = 0 \,. \tag{7.51}$$

Cherchons une solution de la forme

$$a_0\cos(\omega_0+\epsilon)t + b_0\sin(\omega_0+\epsilon)t + a_1\cos 2(\omega_0+\epsilon)t + b_1\sin 2(\omega_0+\epsilon)t + c_1 \,, \tag{7.52}$$

où a_0, a_1, b_0, b_1, c_1 sont des constantes à déterminer. À la différence de la résonance sous-harmonique où ϵ est de l'ordre de h (équation 7.46), on va voir qu'au seuil de l'instabilité ϵ est maintenant de l'ordre de h^2 ($\epsilon \simeq h^2$) ; nous devons donc prendre l'harmonique suivante (i.e. $2\omega_e = \omega_0$) en considération, afin de préserver la cohérence du développement. Enfin, nous avons introduit un terme d'harmonique « zéro », puisque le produit de la fonction $h\cos(\omega_0 + \epsilon)t$ avec $a_0\cos(\omega_0 + \epsilon)t$ donne lieu, outre l'harmonique deux, à une constante[9] notée ici c_1. Reportons la forme de solution recherchée (équation 7.52) dans l'équation d'évolution paramétrique développée ci-avant (équation 7.51) pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\left[-2a_0\epsilon\omega_0 + \frac{h\omega_0^2 a_1}{2} + h\omega_0^2 c_1\right]\cos(\omega_0+\epsilon)t + \left[-2b_0\epsilon\omega_0 + \frac{h\omega_0^2 b_1}{2}\right]\sin(\omega_0+\epsilon)t \\
&+ \left[-3a_1\omega_0^2 + \frac{\omega_0^2 a_0 h}{2}\right]\cos 2(\omega_0+\epsilon)t + \left[-3b_1\omega_0^2 + \frac{h\omega_0^2 b_0}{2}\right]\sin 2(\omega_0+\epsilon)t \\
&+ \left[c_1\omega_0^2 + \frac{h}{2}\omega_0^2 a_0\right] = 0
\end{aligned} \tag{7.53}$$

dont la solution détermine (en annulant les termes entre crochets dans l'équation 7.53) les relations entre les différentes constantes : $a_1 = ha_0/6$, $b_1 = hb_0/6$, $c_1 = -ha_0/2$, et les deux limites inférieure et supérieure de la zone d'instabilité sont données par

$$\epsilon_- = -\frac{5h^2\omega_0}{24}, \quad \epsilon_+ = \frac{h^2\omega_0}{24} \,. \tag{7.54}$$

[9] Notons en effet que $\cos^2(x) = [1 + \cos(2x)]/2$.

La comparaison de ces domaines d'instabilité avec celui de l'instabilité sous-harmonique (équation 7.46) nous indique bien que la zone d'instabilité de la résonance harmonique est plus étroite (dépendance en h^2) par rapport à celle de la résonance sous-harmonique (dépendance en h).

Effet du frottement

Le frottement est pris en compte en ajoutant un terme $2\lambda\dot{\theta}$ à l'équation d'évolution (équation 7.2), où λ est un coefficient de frottement. Nous obtenons l'équation suivante

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2[1 + h\cos(\omega_e t)]\theta = 0 \; . \tag{7.55}$$

Le théorème de Floquet-Bloch reste applicable, et en suivant un calcul analogue à celui mené dans le paragraphe précédent, nous obtenons la condition de déterminant nul nécessaire qui permet d'établir la nouvelle équation de dispersion, naturellement plus compliquée que la relation de dispersion obtenue pour l'instabilité sous-harmonique (équation 7.8), soit :

$$\begin{aligned} &\omega^4 + 4\lambda\omega^3 + [\frac{\omega_e^2}{2} + 4\lambda^2 + 2\omega_0^2]\omega^2 + [\omega_e^2\lambda + 4\omega_0^2\lambda]\omega \\ &+[\omega_0^2 - \frac{\omega_e^2}{4}]^2 - \frac{h^2}{4}\omega_0^4 + \lambda^2\omega_e^2 = 0 \; . \end{aligned} \tag{7.56}$$

Pour établir ce résultat, il suffit de remarquer que dans le cas de la résonance sous-harmonique, et en se limitant aux ordres dominants, la première équation du système d'évolution (équation 7.44) acquiert un terme supplémentaire $2\lambda\omega_0 b_0$, tandis que la seconde équation du système est dotée du terme $-2\lambda\omega_0 b_0$. L'annulation du déterminant du système, pour éviter la solution triviale $a_0 = b_0 = 0$, conduit à l'équation de dispersion recherchée (équation 7.56). La limite de stabilité est obtenue en posant $\omega = 0$ dans l'équation de dispersion 7.56. Nous obtenons alors la relation :

$$\epsilon = \pm\sqrt{(\frac{h\omega_0}{2})^2 - 4\lambda^2} \; ; \tag{7.57}$$

l'amplitude minimale de l'instabilité sous-harmonique du système avec frottement est ainsi donnée par

$$h_{min} = \frac{4\lambda}{\omega_0} \; . \tag{7.58}$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que l'instabilité sous-harmonique a le seuil le plus bas comparativement à l'instabilité d'harmonique principale. Déterminons, tout d'abord, le seuil de la résonance de l'harmonique principale avec frottement en reprenant, pour la variable θ, l'expression adoptée lors de l'étude de la résonance harmonique sans frottement (équation 7.52). L'effet du frottement modifie le système d'évolution (équation 7.53) en incluant de nouvelles contributions $2\lambda\omega_0 b_0$, $-2\lambda\omega_0 a_0$, $4\lambda\omega_0 b_0$, $2\lambda\omega_0 a_0$ modulant les coefficients placés devant les fonctions *sinus* et *cosinus*. L'annulation de ces coefficients détermine alors l'expression des constantes a_0, b_0, a_1 et b_1 ; la valeur de la constante c_1 est identique à celle obtenue précédemment (i.e. $c_1 = -ha_0/2$).

La condition de compatibilité détermine les zones d'instabilité. Afin de simplifier la présentation des résultats, effectuons un développement limité au plus bas ordre en h et λ (en négligeant également les termes en $h^2\lambda^2$ devant $h^4\omega_0^2$). Les deux bornes

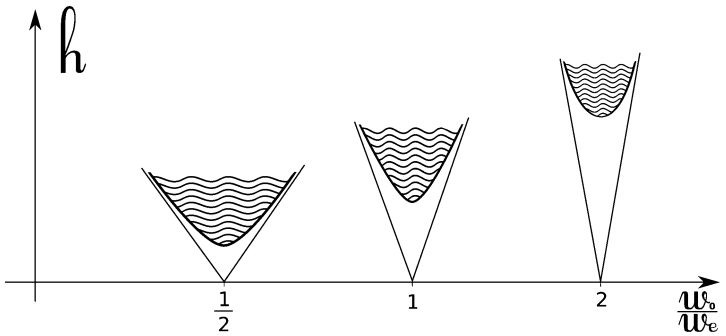


Figure 7.7 – Le secteur hachuré représente le domaine de l'instabilité paramétrique en présence de frottement. On reporte ici également les domaines obtenus sans frottement (les domaines coniques de la figure 7.8). On montre sur cette figure qualitative le domaine qui correspond à la sous harmonique, et aux deux harmoniques $\omega_0 = \omega_e$ et $\omega_0 = 2\omega_e$.

supérieure et inférieure en $\epsilon(h)$ de la zone d'instabilité harmonique avec frottement sont données par

$$\epsilon_+ = \frac{h^4\omega_0^2 - 96\lambda^2}{24h^2\omega_0}, \quad \epsilon_- = \frac{-5h^4\omega_0^2 + 96\lambda^2}{24h^2\omega_0} \ . \tag{7.59}$$

Les deux branches se croisent pour la valeur minimale h'_{min} du seuil d'instabilité h donnée par

$$h'_{min} = 2(2)^{1/4}[\frac{\lambda}{\omega_0}]^{\frac{1}{2}} \ . \tag{7.60}$$

Ainsi l'amplitude minimale requise pour atteindre la résonance harmonique, h'_{min} est en $\lambda^{1/2}$ (λ est supposé petit) ; elle est donc supérieure à l'amplitude h_{min} obtenue pour l'instabilité sous-harmpnique (équation 7.58)).

Ainsi, par rapport à l'harmonique principale, la résonance sous-harmonique requiert une plus faible amplitude de perturbation. De manière générale, l'amplitude minimale requise pour atteindre la résonance d'ordre m (i.e. $2\omega_0 = m\omega_e$, avec m entier) se comporte comme $\lambda^{1/m}$. Traçées dans le plan $[(\omega_0/\omega_e), h]$, les zones d'instabilité correspondant aux différentes harmoniques sont appelées les *langues d'Arnold* (voir les domaines hachurés sur la figure 7.7).

Chapitre 8

Introduction au chaos

8.1 Un exemple typique

Nous souhaitons à présent envisager une question apparemment simple mais riche d'enseignements. Considérons une population animale vivant sur un territoire isolé, par exemple la population de lapins d'une île sauvage dotée de certaines ressources naturelles. Quelle est l'évolution de la taille de cette population au cours du temps ?

Dans ce paragraphe, pour répondre à cette question, nous allons tenter une approche pas à pas pour comprendre la mathématisation du problème. Soit y_n la taille de la population relevée à l'année n. *A priori*, il est naturel de penser que plus la taille initiale est grande, plus conséquente sera la taille relevée ultérieurement. La manière la plus simple de rendre compte d'une telle règle d'évolution est de tenter la loi de proportionnalité, à savoir, la taille à l'année $n+1$ est proportionnelle à celle de l'année n ; soit, la loi notée $y_{n+1} = ky_n$, où k est un coefficient de proportionnalité supérieur à l'unité, dont la valeur dépend de nombreux facteurs, notamment de la quantité de ressources.

Cette loi de proportionnalité implique que la taille de la population devrait croître indéfiniment, et même exponentiellement, au cours des années. Or, étant donné que les ressources ainsi que l'espace accessible à la population sont limités, la population atteint en fin de compte une taille maximale qui optimise l'ensemble des conditions auxquelles la population est soumise ; cette taille critique y_c correspond à un équilibre naturel en quelque sorte de la population, au-delà de laquelle cette dernière subira inéluctablement un déclin. Mais ce déclin n'est pas inéluctable indéfiniment : en deçà de cette valeur critique, la taille de la population peut recommencer à croître et la plus simple expression mathématique de ce phénomène de régulation s'exprime comme le modèle suivant :

$$y_{n+1} = ky_n(y_c - y_n)\ . \tag{8.1}$$

Cette équation est dite *logistique*. Pour une valeur de la population en deçà de la valeur critique, la taille de la population, y_{n+1}, est une fonction croissante de la taille y_n. Au-delà de la valeur critique, le nombre d'individus décroît. La courbe associée à l'équation logistique ci-dessus (équation 8.1) représente une parabole dont le maximum est atteint pour $y_n = y_c/2$, avant de décroître.

Malgré la simplicité déconcertante de l'équation logistique (équation 8.1), elle recouvre cependant une richesse surprenante de comportements, qui intrigue celui ou celle qui découvre pour la première fois ce type d'équations.

Tout d'abord il est d'usage d'effectuer le changement de variable suivant :

$$k = 4a \ , \quad x_n = y_n/y_c \ , \tag{8.2}$$

où a est un nombre réel positif. Avec ces nouvelles variables, l'équation logistique (équation 8.1) adopte l'expression suivante :

$$x_{n+1} = 4ax_n(1 - x_n) \ . \tag{8.3}$$

Pour éviter des nombres négatifs, n'ayant aucun sens dans notre problème de population, nous restreignons l'intervalle de valeurs associé à la variable x_n à l'intervalle $[0, 1]$, ce qui signifie en dernière instance que y_n appartient à l'intervalle $[0, y_c]$; autrement dit, le nombre d'individus composant la population varie entre 0 (disparition de la population) et la taille maximale y_c que la population peut atteindre en fonction des contraintes du milieu.

8.2 Où l'avenir d'une population dépend d'un seul individu !

Cette section est consacrée à l'étude spécifique de l'évolution d'une population au cours du temps. En tout premier lieu, il est raisonnable de considérer les facteurs significatifs jouant de façon élémentaire sur l'évolution de la taille de la population. La reproduction en constitue un élément essentiel ; le temps de gestation pour les lapins étant de 30 jours, le temps caractéristique d'étude de l'évolution de la population est donc de l'ordre du mois. Notons x_N le nombre d'individus composant la population aux termes de N mois ; compte-tenu de l'expression de l'équation logistique associée à l'évolution de la taille de la population (équation 8.3), pour obtenir la taille de la population au bout de chaque mois, nous devons donc effectuer les *itérations* suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= 4ax_0(1-x_0) \\ x_2 &= 4ax_1(1-x_1) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_{n+1} &= 4ax_n(1-x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_N &= 4ax_{N-1}(1-x_{N-1})\ . \end{aligned} \tag{8.4}$$

Rappelons que pour obtenir la taille réelle de la population, il nous faut multiplier la variable x_n par le nombre x_c (voir équation 8.2).

Illustrons notre itération par un exemple. Fixons la variable critique à un million (i.e. $x_c = 10^6$) et adoptons une population initiale de taille $x_0 = 0,3$ (soit une taille réelle de 300 000 individus, après multiplication par x_c) et proposons-nous de calculer la taille de la population au bout de $N = 400$ mois. Notre but principal est d'étudier l'effet du paramètre de contrôle a sur les résultats. Il suffit pour ce faire de programmer ces opérations d'itérations sur un petit calculateur, pour deux valeurs différentes du paramètre de contrôle a, afin d'étudier, pour chacune de ces deux valeurs, la taille de la population au bout de 400 mois en fonction de la taille initiale.

(i) Étude de la taille de la population pour une valeur du paramètre de contrôle telle que a : $a = 0,4$;

Le calcul indique qu'au terme de $N = 400$ mois, nous obtenons une population de taille égale à **374 999** individus environ.

Voyons ce qu'il advient de la population au bout de 400 mois, pour une valeur de la population initiale légèrement différente, soit $x'_0 = 0,300\,001$; ce qui correspond à un nombre d'individus égal à $y_0 = 300\,001$, soit un individu de plus que la valeur adoptée précédemment. Étant donné l'infime modification de la population initiale (différence relative de $1/100\ 000$), nous pourrions penser que la différence de tailles obtenues au terme des 400 mois soit peu significative. Et le calcul nous montre en effet que la taille est sensiblement identique, soit, **374 999** individus.

Si cette conclusion quantitative est conforme au bon sens commun pour la valeur de a choisie ci-dessus, il en va tout autrement pour d'autres valeurs de a. La variation du paramètre de contrôle a introduit une grande complexité.

(ii) Etude de la taille de la population pour une valeur du paramètre de contrôle telle que : $\mathbf{a = 0,91}$

Au terme de 400 mois, la taille de la population obtenue pour une population initiale de de $x_0 = 0,3$, soit en termes de la variable y, 300 000 individus, est égale à $\mathbf{317\,587,6}$ mais pour une population initiale légèrement différente à laquelle nous ajoutons seulement un lapin, soit $x'_0 = 0,300\,001$, nous obtenons une taille de population très différente, d'une valeur plus que doublée, soit une

population composée de **659 491, 8** lapins. Prenons maintenant une population dont la taille initiale comporte un lapin de moins, soit $x_0'' = 0,29999$, soit une population réelle de 299 999 lapins, nous obtenons alors une taille finale de **391 878, 3** lapins.

À partir de cet exemple, nous constatons la disparité étonnante des résultats sur la taille de la population, malgré des variations extrêmement faibles, de l'ordre de un cent-millième (1/100 000) de la population initiale. Nous découvrons un résultat inhabituel pour le sens commun usuel : même si l'expression mathématique banale $4ax(1-x)$ est bien *contrôlée*, dans le sens où elle ne comporte aucun caractère aléatoire, le résultat final est très sensible à une modification insignifiante de la taille initiale de la population.

Cette loi de calcul correspond par ailleurs à une loi d'évolution de plusieurs systèmes physiques pour lesquels nous pouvons prouver avec certitude la loi d'évolution – à la différence de la dynamique de populations qui repose sur plusieurs hypothèses plus au moins justifiées –, où n est une variable temporelle. Ainsi, une incertitude, aussi infime soit-elle, portant sur les conditions initiales du système, incertitudes inévitables dans les systèmes réels, nous rend inapte à déterminer précisément l'état du système dans le temps ; autrement dit, d'infimes erreurs initiales sur les variables initiales engendrent des incertitudes immenses sur les variables calculées à terme, mettant à mal la notion de prédictibilité, malgré la connaissance avec un grand degré de précision, et même une précision absolue dans l'exemple cité ci-dessus, de l'équation d'évolution.

La loi que nous étudions dans ce chapitre, parfaitement déterministe à la différence d'une théorie intrinsèquement probabiliste, introduit ainsi un caractère de franche imprédictibilité dû à la très grande sensibilité aux conditions initiales : il suffit d'une erreur infiniment petite sur la condition initiale pour bouleverser le résultat final. Notons qu'en pratique, il nous est impossible dans tout type d'expérimentation, qu'elle soit de nature mécanique, physique, chimique, biologique et même numérique (i.e. calcul sur ordinateur), de connaître avec une précision infinie les conditions initiales d'un système ; par conséquent, cette infime ignorance de l'état initial nous condamne à l'incapacité de prédire l'avenir. Nous touchons là un domaine des sciences modernes qui a bouleversé les concepts acquis ; à la différence de la mécanique traditionnelle, où l'ignorance des conditions initiales avec une précision infinie n'est pas préjudiciable au calcul de l'évolution du système, nous abordons un monde chaotique dû aux *dynamiques très sensibles aux conditions initiales.*

8.2.1 D'un point fixe simple au chaos

Dans une première approche, pour cerner au mieux le comportement des solutions issues de la loi, dite équation logistique, de type $4ax(1-x)$, procédons à une étude qualitative, fondée sur l'observation du phénomène et faisons varier progressivement le paramètre a. Partant d'une condition initiale x_0, nous obtenons le nombre x_n après n itérations ; collectons la série de couples $(0, x_1), (1, x_2), (2, x_3), (n, x_{n+1})...(N, x_{N+1})$ et représentons la variable x_{n+1} en

fonction de n pour différentes valeur de a (voir figure 8.1). Pour une valeur du paramètre a assez petite (i.e. $a < 3/4$, voir ci-après), nous constatons que, quelle que soit la valeur initiale x_0, la solution converge toujours vers le même état final après N itérations (d'ailleurs quelques itérations suffisent pour la convergence vers l'état final avec une précisions de moins de 1% ; typiquement 100 itérations conduisent à une précision de moins de 10^{-4}). Au fur et à mesure que la valeur de a augmente, nous observons une oscillation, de période égale à l'unité, puis une oscillation de période 2, puis 4, etc. Au-delà d'une valeur seuil de a (voir ci-dessous), nous obtenons un signal irrégulier, où aucune des solutions obtenues au cours des itérations ne semble se répéter ; nous pouvons dire que la périodicité est devenue infinie (c'est-à-dire que le signal ne peut retrouver la même valeur au bout d'un nombre fini, mais arbitrairement grand, d'itérations). Par ailleurs, en répétant la même opération avec une condition initiale x_0 très légèrement différente, la série des nombres x_n, tout aussi irrégulière, diverge rapidement de la série obtenue précédemment. Ces signaux irréguliers sont dits *chaotiques*, et sont le résultat d'une grande sensibilité aux conditions initiales.

8.3 Origine et signification de l'application $f(x) = 4ax(1-x)$

L'application $f(x) = 4ax(1-x)$, toute fascinante qu'elle soit sur un plan purement mathématique, n'est pas qu'un simple jeu d'esprit, mais elle représente aussi la dynamique de certains systèmes réels.

Nous avons vu aux chapitres précédents que de nombreux phénomènes de la nature sont décrits par des modèles non linéaires représentés par un système d'équations différentielles non linéaires, tel le modèle de Rössler du nom du biochimiste allemand Otto E. Rössler (1940-) qui l'a proposé en 1976 (voir référence [9]) ; il constitue maintenant un modèle prototype de phénomènes chaotiques continus dans le temps. Conçu originellement sur une base formelle, le modèle de Rössler a de nombreux points communs avec le modèle de Lorenz inspiré par la physique ; ce dernier a, en effet, été introduit en 1963 par le mathématicien et météorologue américain Edward Norton Lorenz (1917-2008) pour décrire le mouvement simplifié des rouleaux de convection de l'atmosphère[1].

Le modèle de Rössler est décrit par un système d'équations différentielles non linéaires à trois variables, soit trois degrés de liberté : $X(t)$, $Y(t)$ et $Z(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -Y - Z \\ \dot{Y} &= X + \alpha Y \\ \dot{Z} &= \beta + XZ - \gamma Z \end{aligned} \tag{8.5}$$

[1] Le système d'équations associé à l'attracteur de Lorenz s'écrit comme $\dot{X} = \alpha(Y - X)$, $\dot{Y} = -XZ + \beta X - Y$, et $\dot{Z} = XY - \gamma Z$ où X est reliée à la vitesse de l'atmosphère, et Y et Z à la température (voir référence [9]) et α, β et γ sont des paramètres de contrôle.

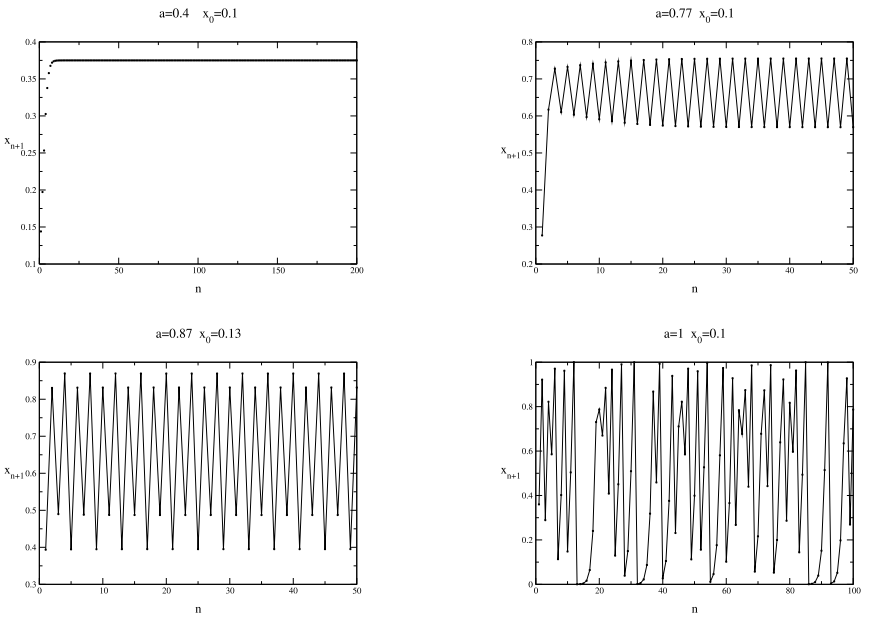


Figure 8.1 – Les différentes solutions x_{n+1} (en partant d'une condition initiale x_0) en fonction de n. Au fur et à mesure que a augmente, on passe d'un régime de point fixe ($a = 0,4$), à une oscillation de période unité, puis période double, etc. (ici on ne montre pas les périodes 4, 8 etc.). Pour $a = 1$, le signal est chaotique. Pour plus de détails sur les choix de a (et donc du type de régime), voir paragraphe 8.12.1.

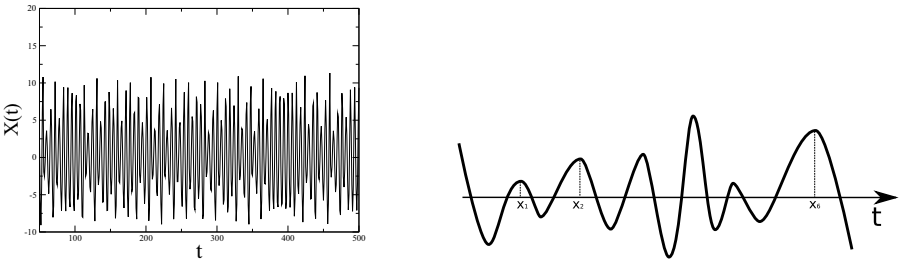


Figure 8.2 – À gauche, on montre $X(t)$ en fonction de t, solution de l'Eq.(8.5). Le comportement s'apparente à un régime chaotique. À droite, on explique le principe qui consiste à relever les maximas n et $n+1$ du signal chaotique pour obtenir le graphe de la figure 8.3.

où les paramètres de contrôle α, β et γ sont des constantes réelles. Pour certaines valeurs de celles-ci, par exemple $\alpha = \beta = 0,2$; $\gamma = 5,7$, l'intégration numérique à l'aide d'un ordinateur montre que les variables $X(t)$, $Y(t)$ et $Z(t)$ ont un comportement chaotique en fonction du temps t, c'est-à-dire que les variables passent par des maxima et des minima de façon irrégulière ; voir le graphe de gauche de la figure 8.2 pour une illustration de l'évolution de la variable X. Désignons par x_n la valeur du $n^{\text{ième}}$ maximum et par t_n l'instant où ce maximum a été obtenu, et par x_{n+1}, le maximum suivant obtenu au temps t_{n+1} (voir le schéma de droite de la figure 8.2). Définissons maintenant la série des couples $[x_n, x_{n+1}]$ pour $n = 1, 2, 3...$, pour les représenter dans un plan (x_n, x_{n+1}) (voir figure 8.3). En première approximation, cette courbe peut être considérée comme une parabole que nous pouvons exprimer à l'aide d'un changement de variable adéquat comme $x_{n+1} = 4ax_n(1 - x_n)$. En fait, l'expression mathématique de la récurrence importe peu ici, à partir du moment où, dans l'intervalle considéré, la courbe associée décrit une portion de parabole. Ainsi, par exemple, nous pourrions considérer la loi de récurrence $x_{n+1} = a\sin(2\pi x_n)$, avec $x_n \in [0, 1]$, dans la mesure où la fonction $a\sin(2\pi x_n)$ est de forme parabolique dans l'intervalle $[0, 1]$[2].

La représentation graphique des couples $[x_n, x_{n+1}]$ dans le plan (x_n, x_{n+1}) (voir figure 8.3) appelle deux remarques : (i) en dépit du fait que $X(t)$ soit erratique, la courbe $x_{n+1} = f(x_n)$ ne l'est pas du tout : elle est même étonnamment régulière ! Nous aboutissons ainsi à un des premiers résultats fascinants : derrière l'apparence du chaos, se cache éventuellement une certaine régularité. En fait, cette régularité traduit le *déterminisme* de l'équation d'évo-

[2]Nous conseillons au lecteur de pratiquer l'exercice suivant : adopter la loi de récurrence en $x_{n+1} = a\sin(2\pi x_n)$ pour refaire toutes les analyses de ce chapitre et ainsi constater que les résultats obtenus avec cette nouvelle expression sont similaires aux résultats issus de l'analyse de la loi en $x_{n+1} = 4ax_n(1 - x_n)$.

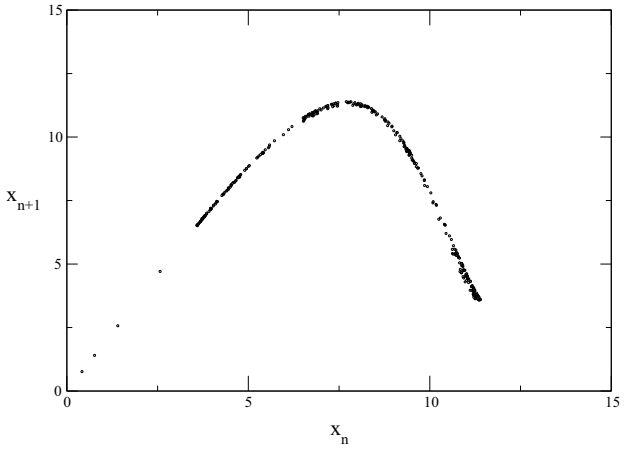


Figure 8.3 – On montre le maximum x_{n+1} en fonction de x_n issu de $x(t)$, solution de (8.5). Cette courbe en cloche peut être approchée par une fonction parabolique.

lution. Mais ce déterminisme est assez fragile : une infime incertitude sur la condition initiale conduit à un résultat complètement différent ; (ii) sans être rigoureusement une parabole, cette courbe a la forme qualitative d'une fonction en cloche ; pour la décrire, la parabole est la plus simple des fonctions que nous pouvons adopter. Un des choix possibles est la loi étudiée plus haut de type : $x_{n+1} = f(x_n) = 4ax_n(1 - x_n)$, maximale pour $x = 1/2$, avec $x \in [0, 1]$ (ce choix est toujours possible par un choix approprié des variables). Modifier un des paramètres de contrôle du système de Rössler (équation 8.5), par exemple γ, change la valeur du maximum de la courbe en cloche (voir figure 8.3) ; le paramètre a de la loi parabolique représente cet effet.

8.4 Quelle différence entre hasard et chaos ?

S'interroger sur la similitude entre des phénomènes aléatoires, un jeu de hasard, telle la roulette[3] et des phénomènes chaotiques est légitime tant il ap-

[3] Dans la vie courante, la roulette est considérée comme un jeu de hasard. Nous pourrions penser, à juste titre, que la roulette est un système dynamique complexe, à l'instar d'ailleurs de tout système échappant à une modélisation relativement simple. Nous insistons ici sur le fait que nous nous intéressons dans ce chapitre uniquement à des systèmes relativement simples en ce sens que leur mise en équations est aisée car, au sein de ces systèmes, un faible nombre de degrés de liberté est à l'œuvre. Quand un système ne se prête pas à une mise en équation simple, nous sommes souvent tentés de les décrire en s'appuyant sur une description statistique, et nous pouvons donc regarder ces systèmes comme appartenant à une catégorie

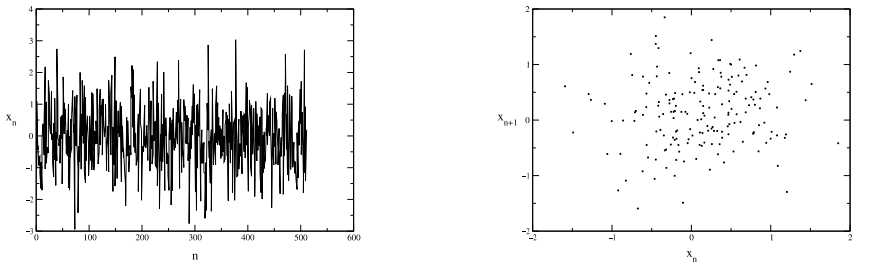


Figure 8.4 – On montre un signal aléatoire x_n en fonction de n issu d'une loi de probabilité gaussienne, et le maximum x_{n+1} en fonction de x_n. On note la différence importante avec le résultat de la figure 8.3 concernant le comportement de x_{n+1} en fonction de x_n.

paraît que les deux phénomènes semblent comparables dans l'aspect irrégulier des signaux obtenus. Mais, la réalité que ces deux phénomènes recouvrent est bien différente ; pour s'en convaincre, comparons les résultats issus d'un jeu de hasard et ceux obtenus dans le cas du système de Rössler.

Analysons ainsi le tirage, à l'aide d'un ordinateur, de nombres aléatoires obéissant à une loi de probabilité, par exemple gaussienne (tout autre loi, telle la loi uniforme, conviendrait également). Chaque nombre x_n tiré au hasard au $n$ième tirage est « rangé » sous forme d'un couple (n, x_n). Représentons à l'aide d'un graphe le nombre x_n en fonction de n, pour tout n (voir figure 8.4) ; la courbe obtenue est très irrégulière. Puis, procédons à la même étude réalisée précédemment pour le signal chaotique de Rössler, en relevant les maxima successifs du tirage aléatoire pour les représenter dans le plan (x_n, x_{n+1}) (voir figure de droite 8.4) ; à la différence du signal chaotique de Rössler, les points ne sont pas distribués sur une courbe régulière (comparer avec la figure 8.3), mais ils sont répartis dans le plan de manière aléatoire. Ce résultat montre la différence fondamentale entre une *dynamique chaotique déterministe* et une *dynamique stochastique, ou aléatoire*. La question qui consiste à comparer hasard et chaos a-t-elle alors un sens ? Si le résultat qui précède semble répondre par la négative, il existe néanmoins de profondes similarités entre les deux phénomènes.

La courbe en cloche régulière issue de la dynamique chaotique du système de Rössler révèle l'évolution déterministe sous-jacente : en connaissant exactement le nombre à l'itération n, le suivant est parfaitement déterminé. Mais, nous ne sommes pas maîtres des conditions initiales : nous ne pouvons connaître celles-ci qu'avec une certaine précision toute relative ; et comme la dynamique chaotique, malgré son déterminisme, est très sensible aux conditions initiales, nous ne

statistique-probabiliste : c'est le cas de la roulette.

pouvons connaître avec exactitude et *a priori* la valeur du signal au bout d'un certain temps. Ainsi, le manque d'information sur les conditions initiales confère un caractère statistique au chaos déterministe, que nous allons appréhender avec les outils de la physique statistique par la suite dans ce chapitre.

Avant de clore ce paragraphe, il convient de rappeler le résultat selon lequel la forme précise de la loi d'itération (par exemple $f(x) = 4ax(1-x)$) n'est pas essentielle ; seule sa forme qualitative importe, et révèle des processus d'une certaine *universalité*.

8.5 Quelques commentaires sur la dynamique de populations et courbe logistique

La fonction itérative $x_{n+1} = 4ax_n(1-x_n)$ est communément utilisée pour décrire la dynamique de populations. Pour une population livrée à elle-même et vivant en vase clos, une première phase de croissance quasi exponentielle est constatée avant de ralentir dès que les problèmes associés à la surpopulation surviennent (manque de nourriture, combats dus à la promiscuité...) jusqu'à ce que l'effectif de la population atteigne un seuil limite maximal. Le mathématicien belge Pierre Verhulst (1804-1849) a introduit en 1838 un modèle simple, dit modèle logistique, expliquant ce phénomène. Si $N(t)$ désigne l'effectif de la population à l'instant t, la fonction N obéit à l'équation

$$\dot{N} = \rho N(1 - N/k) \ , \tag{8.6}$$

où k est la valeur limite atteinte par la population (valeur maximale de N) ; appelée aussi *capacité biotique*, et ρ un certain paramètre. Cette équation nous rappelle également le modèle de proie-prédateur de Lotka-Voltera (voir paragraphe 5.2.2). La version discrétisée de l'équation logistique (équation 8.6) donne :

$$\frac{N\left[(n+1)\Delta\right] - N\left[n\Delta\right])}{\Delta} = \rho N(n\Delta)\left[1 - N(n\Delta)/K\right] \ , \tag{8.7}$$

où Δ est le pas de temps ; la dérivée temporelle a été remplacée par une différence finie (terme de gauche). En posant $4a = 1 + \rho\Delta$, $K = k(\rho\Delta + 1)/\rho\Delta$, et $x_n = N(n\Delta)/K$, nous obtenons le modèle logistique qui nous a servi à introduire la notion du chaos au début de ce chapitre :

$$x_{n+1} = 4ax_n(1 - x_n) \ . \tag{8.8}$$

Ici il faut cependant garder présent à l'esprit que la solution de l'équation continue (équation 8.6) n'est pas chaotique : elle possède une solution simple de la forme $N(t) = k/\left[1 + (k/N_0 - 1)e^{-\rho t}\right]$, avec N_0 la valeur initiale à $t = 0$, tandis que la version discrète (équation 8.7), correspondant à la courbe logistique, engendre du chaos. Si ce constat illustre, par ailleurs, un problème délicat, celui de la validité de la discrétisation d'une équation continue, notre propos est ici de souligner que le système de Rössler (équation 8.5) est bien continu dans le

temps et que la courbe logistique qui en est issue résulte non pas d'une discrétisation du système mais de la relation reliant deux maxima successifs pris à des temps discrets ; dans ce contexte, il n'y a donc pas matière à confusion.

8.5.1 Temps continu et temps discret, application retour et section de Poincaré

Dans le système de Rössler (équation 8.5), les variables $X(t)$, $Y(t)$ et $Z(t)$ sont des signaux temporels réels, et t désigne le temps usuel, un temps continu. L'indice n de la variable x_n, issue du signal temporel $X(t)$, correspond à un échantillonnage du signal, et représente la position du maximum x_n ; l'indice n se réfère donc à un temps discret. L'application de la fonction f à x_n donne lieu à une expression itérative de type : $x_{n+1} = f(x_n)$. Ainsi, la variable $f(x_n)$ fournit l'information sur le devenir du signal à l'instant $n+1$. En appliquant successivement cette application N fois à une valeur initiale x_0, $f(f(.....f(x_0))$, nous obtenons la valeur du signal à l'instant N.

Fort de cette constatation, le scientifique français Henri Poincaré (1854-1912) propose d'aborder l'étude des signaux chaotiques en relevant les valeurs du signal en des instants particuliers au lieu de la réaliser en chaque instant (i.e. continûment). Cette démarche présente plusieurs avantages : (i) la complexité du signal chaotique $X(t)$ est réduite au profit d'une description du phénomène par une fonction régulière et simple comme la courbe en cloche $f(x)$ (correspondant à la description des maxima du signal) ; (ii) l'information issue de l'application $f(x)$ est complète, malgré le passage du temps continu vers un temps discret. L'application $f(x)$ issue de ce procédé est dénommée *application retour*, ou application de Poincaré, ou encore *section de Poincaré*.

8.6 Approche géométrique de la section de Poincaré

Nous avons introduit au chapitre 5 la notion d'espace de phase et la représentation des trajectoires du système dynamique dans cet espace ; la dynamique de l'oscillateur de van der Pol est représentée dans l'espace de phase à deux dimensions ($X = I, Y = \dot{I}$), où I est le courant dans le circuit de van der Pol ; la représentation de la trajectoire dans ce plan correspond à une courbe fermée, dit cycle limite (voir figure 5.4). Pour un espace à deux dimensions, les sections de Poincaré correspondent à l'intersection de la trajectoire dans l'espace des phases avec un segment de droite.

Lorsque l'espace de phase est de dimension 3, cas du système de Rössler (équation 8.5) associé aux trois variables (X, Y, Z), les sections de Poincaré correspondent à l'intersection de la trajectoire dans l'espace de phases par une surface.

L'étude de l'évolution de ces points d'intersection revêt un intérêt particulier, notamment du fait de la réduction de la dimension du problème ; elle

nous informe d'une manière simple de la nature de la dynamique. Ainsi, pour un cycle limite, la section correspond à un ou deux points isolés (voir figure (b) 8.5) ; si par contre le mouvement est un peu plus complexe, l'intersection avec le plan est composée de plusieurs points isolés (voir figure (a) 8.5). En présence d'un régime bi-périodique (soit 2T-périodique, où T est la période), la section est composée de deux points (respectivement quatre, lorsque la section traverse toute l'étendue de l'attracteur), de quatre points dans le cas 4T-périodique (respectivement huit, lorsque la section traverse toute l'étendue de l'attracteur), et ainsi de suite.

En règle générale, dans le cas d'un mouvement multi-périodique (que l'on peut noter nT-péridiodique, où n est un nombre entier), la section de Poincaré rassemble un ensemble discret de points isolés. Lorsque le mouvement est plus complexe, à l'image d'un mouvement quasi périodique[4] (voir figure 8.6), la section de Poincaré est une courbe quasi continue.

8.7 Attracteurs étranges

Au cours des chapitres précédents, nous avons déjà fait connaissance avec quelques attracteurs. Il s'agissait d'attracteurs simples, chacun décrit par un point fixe stable (dit aussi point source) et un cycle limite. Lorsque le mouvement est 2T-périodique, le cycle est dédoublé ; il est quadruplé dans le cas d'un régime 4T-périodique, et ainsi de suite (voir figure 8.5). Ces attracteurs gardent une structure relativement simple. À quoi ressemble un attracteur dans un régime chaotique, tel le système de Rössler, représenté dans l'espace des phases ? À une forme quelque peu étrange (voir figure 8.7) ! Les trajectoires couvrent ici de manière dense l'attracteur. L'attracteur étrange désigne ainsi dans l'espace des phases la structure composée de points et d'espaces inoccupés, induite par l'ensemble des états adoptés par le système dynamique au cours de son évolution. Un ensemble différent de conditions initiales mène à une tout autre suite de points qui pourtant, après un certain temps, dessine la même figure dans l'espace des phases. Quelles que soient les conditions initiales, le système évolue toujours sur le même attracteur mais il est impossible de prédire une position précise sur l'attracteur. Notons, par ailleurs, la nature fractale et auto-similaire de l'attracteur étrange. En effet, en observant l'attracteur à différentes échelles (zooms successifs), une structure identique se révèle à toutes les échelles (voir figure 8.8).

8.8 Les trois scénarios de transition vers le chaos

Le mode d'évolution le plus simple d'un système dynamique – après le point fixe stationnaire – est le mode périodique temporel. La variation d'un

[4] Un mouvement est quasi périodique lorsque sont présentes deux fréquences temporelles et lorsque le rapport de ces fréquences est irrationnel ; voir section 8.10.

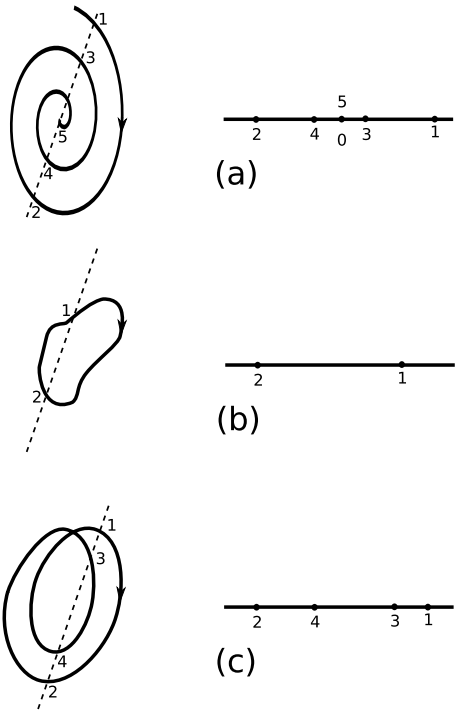


Figure 8.5 – Quelques illustrations de la section de Poincaré pour certaines trajectoires dans l'espace de phase. (a) Un point fixe stable en (0,0) et la section (en pointillés) sont composées de points isolés qui convergent vers le centre au cours du temps. (b) Un cycle limite avec deux points d'intersection avec la droite en pointillés. (c) Mouvement bi-périodique, avec une section composée de quatre points (on peut également envisager une section ne faisant apparaître que deux points).

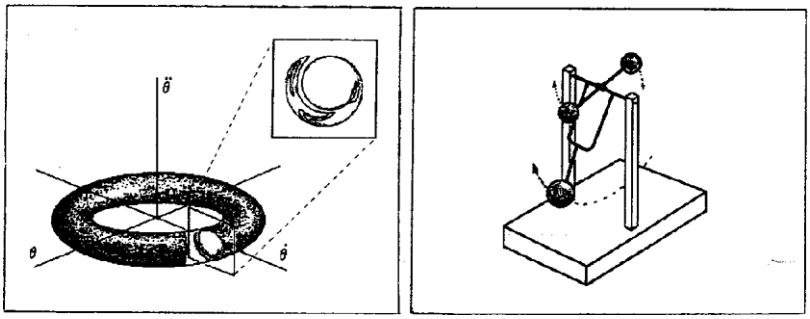


Figure 8.6 – Le cadre de gauche montre un attracteur étrange (à gauche) et sa section de Poincaré (à droite) : sur la figure de gauche la section est schématisée par le carré vertical. La section est complexe ; elle est auto-similaire ; voir plus loin. Le cadre de droite présente un schéma mécanique de pendule pouvant générer une dynamique chaotique. ©Jose Louis Subias. Avec l'aimable autorisation de l'auteur.

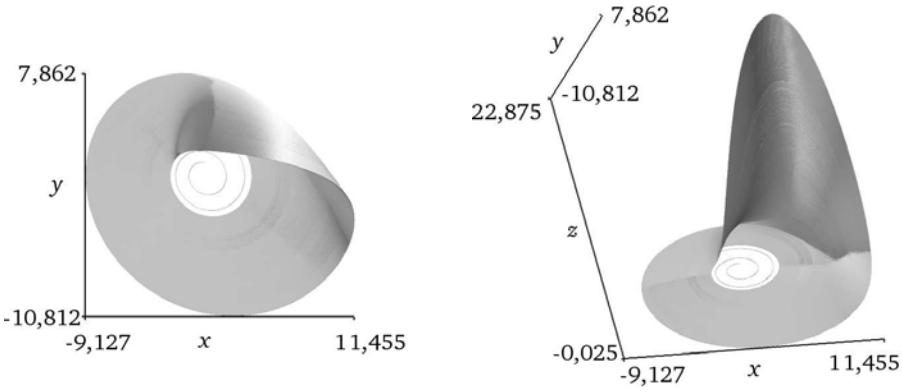


Figure 8.7 – Trajectoire dans l'espace de phase du système de Rössler. 2D (à gauche) où on représente la projection sur le plan (X, Y) 3D (à droite). Il s'agit d'un attracteur étrange.

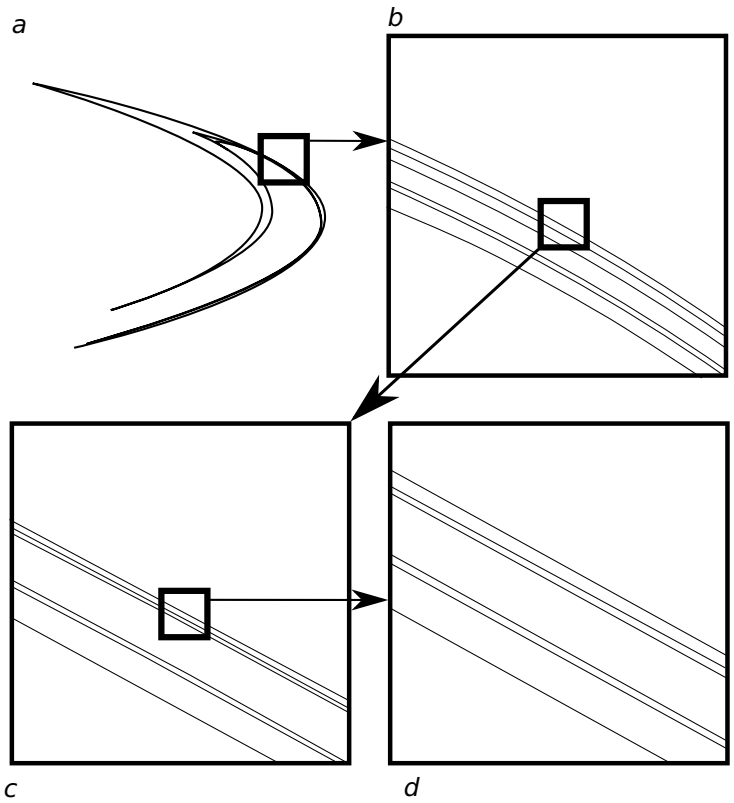


Figure 8.8 – Trajectoire dans l'espace de phase d'un système chaotique. Des zooms successifs montrent la même structure des trajectoires, signature d'une auto-similarité. Image adaptée, ©Christian Ricordeau, à partir d'une image de James P. Crutchfield.

paramètre de contrôle peut conduire le système vers d'autres régimes plus complexes, avant d'atteindre le chaos. Chaque transition vers le chaos suit un chemin particulier, dit scénario ou route, vers le chaos. Quelle que soit la nature du système (physique, biologique, économique...), et sans même connaître les équations qui régissent la dynamique, tout système évoluant vers un état chaotique ne peut emprunter que trois scénarios distincts : (i) le scénario de transition vers le chaos par cascades sous-harmoniques ; (ii) le scénario de transition vers le chaos à partir d'un mode quasi périodique, et (iii) le scénario de transition vers le chaos à partir d'un phénomène d'intermittence.

8.9 Transition vers le chaos par cascade sous-harmonique

Le premier des trois scénarios, les cascades sous-harmoniques, a été proposé en 1978, indépendamment par le mathématicien-physicien américain Mitchell Jay Feingebaum (voir référence [25]) et les mathématiciens français Pierre Coullet et Charles Tresser (voir référence [20]). Soit un signal X périodique de période T (i.e. $X(t+T) = X(t)$). Pour un tel signal, tous les maxima sont identiques ; il n'existe donc qu'un couple unique de maxima $[x_n, x_{n+1}]$; ainsi, la section de Poincaré est associée à un point unique du plan $[x_n, x_{n+1}]$. À titre d'exemple, prenons un signal sinusoïdal $X(t) = \sin(t)$; tous les maxima du signal sont égaux à l'unité et l'ensemble des couples de maxima est donné par $(x_n, x_{n+1}) = (1, 1)$, $\forall n$. Un signal $X(t)$ bi-périodique (par exemple, un signal de type $X(t) = \sin(t) + 1,2\sin(2t)$), possède deux types de maxima, notés x_{max1} et x_{max2}. Dans ce cas, la représentation des couples $[x_n, x_{n+1}]$ dans le plan est associée à deux points distincts de coordonnées (x_{max1}, x_{max2}) et (x_{max2}, x_{max1}) ; un mouvement 4T-périodique donnant lieu à quatre points distincts, etc. Un mouvement chaotique correspond, par définition, à une situation où aucune valeur d'un maximum donné ne se reproduit aux instants ultérieurs. Tel est le cas du système de Rössler dans le régime chaotique, pour lequel nous obtenons au cours du temps un très grand nombre de maxima de valeurs toutes distinctes ; retracés dans le plan $[x_n, x_{n+1}]$, l'ensemble des couples (x_n, x_{n+1}) trace une courbe en cloche (voir figure 8.3). Rappelons que la fonction logistique $f(x) = 4ax(1-x)$ constitue une bonne approximation d'une courbe en cloche. Nous allons étudier en détail comment le chaos peut naître de cette application au paragraphe 8.12.

8.10 Transition vers le chaos par un scénario de quasi-périodicité

Nous avons étudié dans la sous-section 8.8, le premier scénario de transition vers le chaos, celui de la cascade sous-harmonique. Le deuxième scénario est le régime de quasi-périodicité, identifié en 1971 par un travail conjoint du

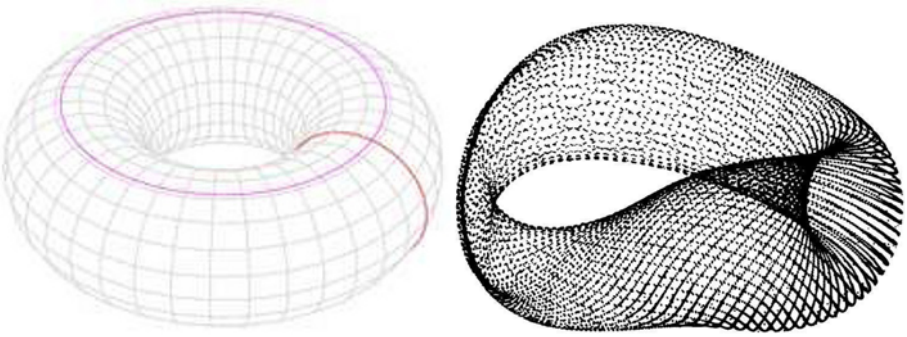


Figure 8.9 – À gauche, un tore idéal. À droite, un tore réel obtenu par simulation numérique [39, 40] d'un problème de croissance cristalline (©American Physical Society).

scientifique français d'origine belge David Ruelle (1935-) et du mathématicien hollandais Floris Takens (1935-) (référence [67]).

Prenons un système initialement périodique, de pulsation ω_1. En variant un paramètre de contrôle, le système acquiert une nouvelle fréquence ω_2. Pour une cascade sous-harmonique, le rapport ω_2/ω_1 est un nombre rationnel (par exemple, $\omega_2 = \omega_1/2$) ; pour un régime quasi périodique, le rapport ω_2/ω_1 est un nombre *irrationnel* (par exemple $\sqrt{5}$).

Si le rapport des deux fréquences est rationnel (exemple $\omega_2/\omega_1 = 3/4$), au bout d'un certain temps (un temps égal à 4 fois la plus petite période commune, soit 12), la trajectoire dans l'espace de phase se referme sur elle même. Par conséquent, la trajectoire ne peut pas couvrir la région de l'espace de phase de manière dense.

Si en revanche le rapport est irrationnel, la trajectoire ne peut jamais se refermer sur elle-même et, par conséquent, la trajectoire couvre de manière dense l'attracteur dans l'espace de phase ; le type d'attracteur dans l'espace des phases pour un régime quasi périodique est un tore (voir figure 8.9). Qualitativement, ce tore représente deux types de mouvement de la trajectoire : un mouvement effectué autour du plus petit cercle (mouvement de pulsation ω_1), et un autre de pulsation ω_2 autour du plus grand cercle (voir figure 8.9). L'attracteur dans un régime quasi périodique d'un système physique est en général un tore de section variable ; le tore présenté à droite de la figure 8.9 montre l'attracteur dans un régime quasi périodique obtenu à partir de résultats numériques d'un problème physique de croissance cristalline (voir références [39, 40]).

étant donné le caractère dense de la trajectoire, la section de Poincaré (voir paragraphe 8.5.1) décrit une courbe continue (ou quasi continue), laquelle peut être fermée sur elle-même en choisissant de manière adéquate la section de Poincaré. En variant un paramètre de contrôle, le tore dans l'espace des

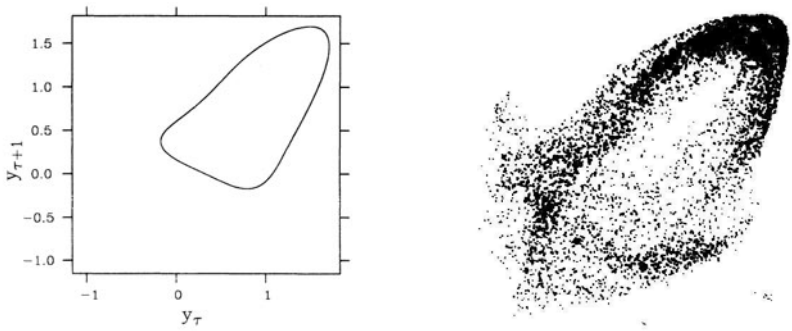


Figure 8.10 – On montre une section de Poincaré (simulation numérique [39] d'un problème de croissance cristalline). À gauche : on trace une variable dynamique (ici la position du front de croissance) obtenue à l'instant $\tau + 1$ en fonction de la position du même front à l'instant τ. Le système est dans le régime quasi périodique, le scénario qui précède le chaos. La section est une courbe dense (elle paraît comme étant continue à cette échelle) exprimant le fait que les deux fréquences temporelles ont un rapport irrationnel (l'attracteur à trois dimensions est un tore). À droite : suite à un changement d'un paramètre de contrôle (ici la vitesse de croissance), le tore est détruit : le système quitte le régime quasi périodique et rentre dans un régime chaotique caractérisé pat un attracteur étrange (et non plus par un tore), dont on montre ici uniquement une section de Poincaré. ©American Physical Society.

phases peut être détruit en faveur d'un attracteur plus complexe : la section de Poincaré n'est plus une simple boucle continue, mais elle dessine une structure fine et complexe de dimension fractale (voir figure 8.10).

8.11 Transition vers le chaos par intermittence

L'intermittence est le dernier des trois scénarios de transition vers le chaos issu de la déstabilisation d'un cercle limite, plus généralement d'un attracteur. Étudié dès 1979 par deux physiciens français Paul Manneville et Yves Pomeau (voir référence [78]), ce scénario décrit l'évolution d'une dynamique périodique vers l'apparition épisodique d'une bouffée chaotique induite lors de la variation d'un paramètre de contrôle. Ces bouffées chaotiques durent un certain laps de temps avant de s'évanouir pour laisser à nouveau place à un régime périodique. Les laps de temps séparant les bouffées chaotiques ne sont pas réguliers ; elles peuvent devenir de plus en plus fréquentes. Quand une valeur critique du paramètre de contrôle est franchie, le signal devient complètement chaotique (voir figure 8.11 pour une illustration typique d'une transition vers le chaos par intermittence).

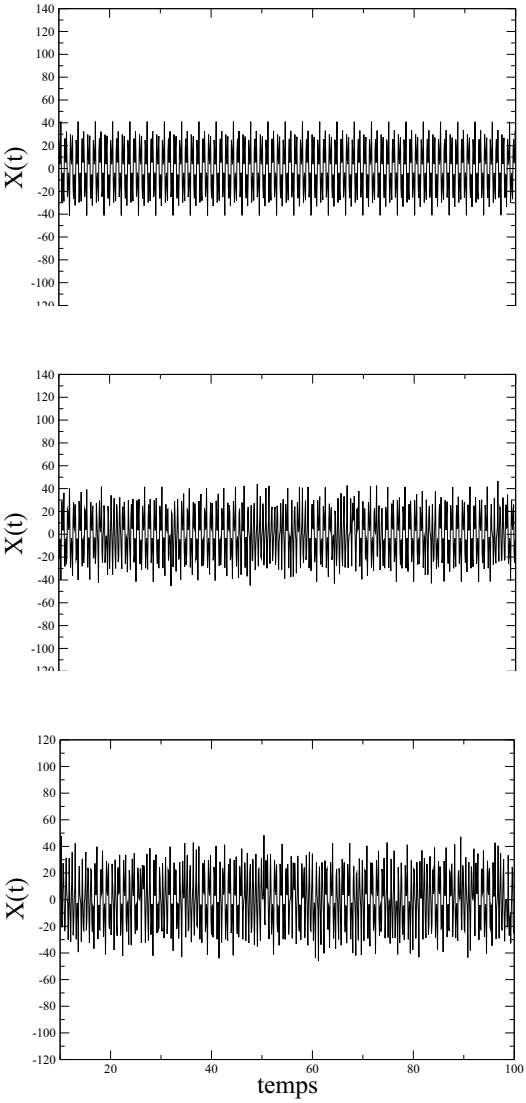


Figure 8.11 – Une dynamique chaotique typique par intermittence obtenue par résolution numérique du système de Lorentz (voir section 8.3). On a posé $\alpha = 10$, $\gamma = 8/3$, et avons varié β. Nous avons d'abord fixé $\beta = 165,8$ et le régime est périodique. Pour $\beta = 166,2$ le régime périodique est interrompu par quelques bouffées chaotiques. Enfin pour $\beta = 166,3$ le régime est devenu complètement chaotique.

8.12 Étude détaillée du chaos par cascade sous-harmonique

Le chaos par cascades sous-harmoniques se prête plus facilement à une étude détaillée en comparaison des deux autres scénarios de transition vers le chaos (quasi-périodicité et intermittence). Nous allons donc présenter dans cette partie les principales propriétés de l'application logistique et, en particulier, préciser les conditions d'émergence de ce type de chaos.

8.12.1 Point fixe de l'application logistique $x_{n+1} = f(x_n) = 4ax_n(1 - x_n)$

Tout point x_n^* de l'application $f(x_n)$ qui vérifie l'égalité suivante : $f(x_n^*) = x_n^*$, avec $x_{n+1}^* \equiv f(x_n^*)$, est appelé point fixe de l'application. Pour alléger l'écriture et tant qu'aucune confusion n'est possible, omettons l'indice n dans les expressions suivantes ; l'équation associée aux points fixes s'écrit alors :

$$f(x^*) = x^* \ . \tag{8.9}$$

Cette équation a une interprétation géométrique simple : tout point fixe appartient à l'intersection de la courbe $f(x)$ avec la première bissectrice $y = x$. Les points fixes de l'application $f(x) = 4ax(1-x)$ sont donc définis par l'équation : $4ax^*(1 - x^*) = x^*$, dont les solutions sont données par

$$x^* = 0, \quad et \quad x^* = 1 - \frac{1}{4a} \quad si \quad a > \frac{1}{4} \ . \tag{8.10}$$

La condition $a > 1/4$ assure que le point fixe est bien positif ($x^* > 0$). En rétablissant la notation indicée, notons qu'un point fixe équivaut à $x_{n+1} = x_n$ (le maximum « n » du signal $X(t)$ est égal au maximum « $n + 1$ » du signal, quel que soit n). Autrement dit, un point fixe de l'application f correspond à un régime périodique en termes de la variable continue t ; désignons par T la période associée.

8.12.2 Stabilité des points fixes

Un point fixe de l'application f, associé au mouvement périodique dans un temps continu, peut être stable ou instable. Pour s'assurer de son état de stabilité, superposons à x^* une petite perturbation δx ; le point fixe x^* est stable si la valeur de δx régresse au cours du temps temps, instable sinon.

Posons

$$x = x^* + \delta x \tag{8.11}$$

et reportons cette expression dans l'application $f(x)$. Puisque la perturbation δx est petite, nous pouvons procéder à un développement de Taylor :

$$f(x^* + \delta x) \simeq f(x^*) + \delta x f'(x^*) \ , \tag{8.12}$$

où f' désigne la dérivée de l'application. Nous souhaitons déterminer le statut du point fixe x^* au bout d'un temps long, ce qui revient à lui appliquer N fois f , avec $N \gg 1$. Effectuons ces opérations par étapes successives, en appliquant d'abord deux fois l'application f au point fixe x^*. Nous obtenons :

$$f[f(x)] \simeq f[f(x^*)] + \delta x f'(x^*) f'[f(x^*)] \tag{8.13}$$

$$= f(x^*) + \delta x f'(x^*) f'(x^*) \, , \tag{8.14}$$

où nous avons exploité la propriété associée au point fixe (i.e. $f(x^*) = x^*$). Effectuons l'opération N fois pour obtenir :

$$f^{(N)} = f(x^*) + \delta x [f'(x^*)]^N \, . \tag{8.15}$$

Dans l'expression précédente, prêtons attention aux notations : le symbole (N) dans le membre de gauche $f^{(N)}$ est une notation abrégée associée à la loi de composition ($f^{(N)}$ signifie que l'application « f est composée N fois »). Dans le membre de droite, la notation $[f'(x^*)]^N$ est usuelle et associée à la fonction puissance (exposant N). Remarquons que la perturbation δx est multipliée à chaque pas de temps par la dérivée de f en x^* (i.e. $f'(x^*)$) (qui appartient à la première bissectrice) ; $|f'(x^*)|$ représente la valeur absolue de la pente au point d'intersection de la courbe f avec la première bissectrice.

Si $|f'(x^*)| < 1$, la perturbation δx se trouve à chaque pas de temps multipliée par un nombre plus petit que l'unité, conduisant à la décroissance de la perturbation : le point fixe est stable. Au contraire, si $|f'(x^*)| > 1$, la perturbation s'amplifie au cours du temps et le point fixe est instable. Ce résultat est général et ne dépend pas de la forme explicite de l'application.

Appliquons à présent ces résultats à l'application $f(x) = 4ax(1-x)$. Il suffit de calculer la pente en x^* pour déduire l'information sur sa stabilité. Les pentes des deux points fixes (équation 8.10) sont données par

$$f'(0) = 4a, \quad f'(1 - 1/4a) = 2(1 - 2a) \, . \tag{8.16}$$

étant donné que $a > 1/4$, la dérivé de f au point fixe $x^* = 0$ est supérieure à l'unité ($f'(0) > 1$), et le point fixe $x^* = 0$ est toujours instable. Examinons maintenant la stabilité de l'autre point fixe. Supposons que $a < 1/2$; nous avons $|2(1 - 2a)| = 2(1 - 2a)$. La condition d'instabilité du point fixe, $2(1 - 2a) > 1$, ne serait possible que pour $a < 1/4$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse. Il en découle que le point fixe est stable pour $a < 1/2$. Pour $a > 1/2$, nous avons $|2(1-2a)| = 2(2a-1)$; le point fixe est instable (i.e. $2(2a-1) > 1$), si $a > 3/4$; il est stable dans le cas contraire. Pour résumer l'étude de la stabilité des points fixes de l'application f, nous avons :

$$\begin{aligned} x^* &= 0 \quad \text{est toujours instable ;} \\ x^* &= 1 - 1/4a \quad \text{est stable pour} \quad a < \frac{3}{4} \, ; \\ &\qquad\qquad \text{est instable pour} \quad a > \frac{3}{4} \, . \end{aligned} \tag{8.17}$$

Ainsi, la valeur critique $a_c = 3/4$ du paramètre a est associée à une perte de stabilité du système. Que se passe-t-il au-delà de l'instabilité ? Pour le déterminer empiriquement, fixons une valeur du paramètre a supérieure à $3/4$, par exemple $0,78$ et calculons numériquement les valeurs de la fonction f à l'aide d'une calculette ; après un nombre suffisant d'itérations, nous obtenons une oscillation de la fonction f entre les deux valeurs suivantes : **0,772** et **0,547** ; notons les respectivement x_1 et x_2 et remarquons que cette oscillation perdure indéfiniment au cours du temps. La description de l'alternance entre ces deux valeurs x_1 et x_2 se formule par les relations suivantes :

$$f(x_1^*) = x_2^* \qquad f(x_2^*) = x_1^* \; . \tag{8.18}$$

Autrement dit, pour retrouver le même point, il faut appliquer la fonction f deux fois, soit :

$$f[f(x^*)] = x^*. \tag{8.19}$$

Les deux points x_1 et x_2 sont donc des points fixes de l'application $f(f)$ (et non de l'application f). En termes de temps continu, ce résultat signifie que le signal temporel $X(t)$ retrouve un même maximum au terme d'un laps de temps égal à deux périodes, soit au terme d'un temps $t + 2T$. Nous sommes donc en présence d'un régime bi-périodique de période $2T$ et donc de pulsation égale à $\omega/2$, ce qui correspond à une pulsation sous-harmonique. À l'approche de la valeur critique $3/4$ du paramètre a, le point fixe $x^* = 1 - 1/4a$ associé à un mouvement périodique perd sa stabilité au profit de deux points fixes stables (régime bi-périodique) : on dit que le système a subi une *bifurcation sous-harmonique*.

Pour étudier l'application composée $f(f(x))$, posons $X = f(x)$, soit $f(X) = 4aX(1-X)$. L'utilisation de la règle de la dérivée composée nous permet d'écrire la dérivée partielle comme :

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} = 16a^2(1-2X)(1-2x) \; . \tag{8.20}$$

Cette dérivée s'annule en deux points : $x = 1/2$ et $X = 1/2$. Utilisons la définition de la variable X en fonction de x, l'équation $X = 1/2$ (i.e. $x^2 - x + \frac{1}{8a} = 0$) possède deux solutions

$$x_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 1/(2a)}}{2} \tag{8.21}$$

avec $x_+ > 1/2$ tandis que $x_- < 1/2$.

Le point $x = 1/2$ correspond au minimum de la fonction composée $f(f(x))$, tandis que les points $x_\pm$ correspondent aux maxima de cette application. Les points fixes de f^2 correspondent géométriquement à l'intersection de f^2 avec la droite $y = x$. La fonction f^2 (voir figure 8.12, pour $a = 0,8$) possède quatre point fixes, dont un trivial (i.e. $x^* = 0 \equiv x_0^*$). La pente de f^2 à l'origine est supérieure à l'unité montrant en ceci l'instabilité du point fixe trivial $x = 0$.

La stabilité des trois autres points fixes (notés x_1^*, x_2^* et x_3^*, avec $x_0 < x_1^* < x_2^* < x_3^*$) requiert le calcul de la pente aux points d'intersection de $y = f^2$ avec $y = x$. Le calcul analytique peut être mené complètement mais il présente l'inconvénient de conduire à des expressions fastidieuses. Aussi, limitons-nous au calcul des pentes à l'aide d'une calculette. À titre d'exemple, posons $a = 0,8$. Le calcul montre que les points fixes x_1^* et x_3^* sont stables, alors que x_0^* et x_2^* sont instables. Nous avons donc une alternance entre points stables et instables. Notons qu'en effectuant les itérations sur une calculette, nous n'observons que les deux points fixes stables, x_1^* et x_3^*.

8.12.3 Point d'accumulation de la cascade

En augmentant maintenant la valeur du paramètre de contrôle a au-delà de la valeur seuil $a_4 = 0,86237$, les deux points fixes x_1^* et x_3^* perdent leur stabilité ; en effet, nous pouvons vérifier que la pente de f^2 excède, en valeur absolue, l'unité. En effectuant les itérations pour des valeurs du paramètre a supérieures à la valeur seuil a_4 ($a > a_4$), nous observons la succession de quatre nombres différents ; appelons-les $\tilde{x}_1^*$, $\tilde{x}_2^*$, $\tilde{x}_3^*$ et $\tilde{x}_4^*$, la notation $\tilde{x}$ étant introduite pour éviter une confusion avec les points fixes de f^2. Ces points obéissent à la relation suivante :

$$f(\tilde{x}_1^*) = \tilde{x}_2^*, \quad f(\tilde{x}_2^*) = \tilde{x}_3^*, \quad f(\tilde{x}_3^*) = \tilde{x}_4^*, \quad f(\tilde{x}_4^*) = \tilde{x}_1^* \, . \tag{8.22}$$

Autrement dit, les points $\tilde{x}_i^*$ sont les points fixes de l'application f^4

$$f^4(\tilde{x}_i^*) = \tilde{x}_i^* \quad i = 1, 2, 3, 4 \, , \tag{8.23}$$

où f^4 est une abréviation de la fonction f quatre fois composée à elle-même : $f(f(f(f(x))))$. Nous sommes en présence d'un régime quadri-périodique (voir figure 8.12) ; et l'intersection de cette fonction avec la première bissectrice (d'équation $y = x$) montre la présence de huit points fixes (dont $x = 0$) : quatre de ces points sont instables (la pente au point d'intersection est supérieure à l'unité), et les quatres autres sont stables (même si, lors de l'itération, nous ne voyons que les points stables).

Ce régime perdure jusqu'à la valeur seuil $0,88602$ du paramètre a, notée a_8, où nous constatons la présence d'une nouvelle bifurcation associée à un dédoublement de la période. Ce schéma de bifurcation associé à un doublement de la période se reproduit pour différentes valeurs seuil du paramètre a ; nous sommes donc confrontés à une cascade sous-harmonique associée à la division par deux de la pulsation (voir table 8.1).

Trois remarques importantes découlent des résultats de cette analyse reportés dans la table 8.1 : (i) le système perd toujours sa stabilité vis-à-vis d'un dédoublement de période ; (ii) il existe un point d'accumulation des seuils de la cascade : la distance entre deux valeurs critiques successives a_i et a_{i+1} du paramètre a diminue très rapidement (ainsi $a_{32} - a_{16} \ll a_{16} - a_8 \ll a_4 - a_2$). Pour un nombre d'itérations tendant vers l'infini ($a = a_\infty$), la distance entre

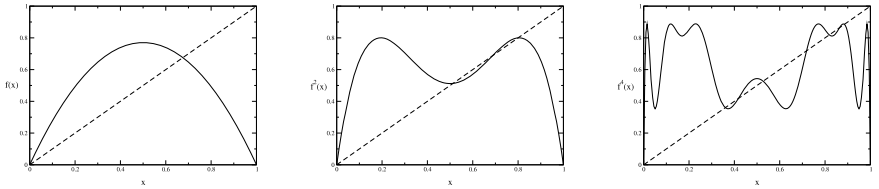


Figure 8.12 – On montre graphiquement les points fixes de $f(x)$ (2 points fixes), $f^2(x)$ (4 points fixes) et $f^4(x)$ (8 points fixes). On a choisi $a = 0,8$ dans le cas de f^2 et $a = 0,888$ dans le cas de f^4. La signification géométrique du point fixe est donnée par l'intersection avec la première bissectrice, montrée en pointillés.

Intervalle du paramètre de contrôle	Nature du régime
$a < a_2 = 0,75$	régime de période $T = 1$
$a_2 < a < a_4 = 0,86237$	régime de période $T = 2$
$a_4 < a < a_8 = 0,88602$	régime de période $T = 4$
$a_8 < a < a_{16} = 0,89218$	régime de période $T = 8$
$a_{16} < a < a_{32} = 0,8924728$	régime de période $T = 16$
$a_{32} < a < a_{64} = 0,8924835$	régime de période $T = 32$
....	....
$a = a_\infty = 0,892486418...$	régime de période $T = \infty$

Table 8.1 – Table récapitulative de la cascade sous-harmonique.

deux valeurs sucessives du paramètre tend vers zéro ; ce régime de période infinie[5] décrit une situation de chaos et enfin (iii) le rapport des différences entre les valeurs de a associées à deux bifurcations successives se trouve à chaque fois réduit d'un facteur presque constant. Une analyse poussée conduit au résultat suivant :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4,669201609... \tag{8.24}$$

Ce facteur d'échelle est en fait un nombre universel, indépendant du détail de la fonction logistique f considérée. Notons que nous pouvons vérifier déjà à partir des résultats de la table 8.1 que, pour les premières itérations $n \leq 32$, le facteur d'échelle est quasiment constant et proche du résultat asymptotique (équation 8.24).

8.12.4 Diagramme de bifurcation et notion d'autosimilarité

Représentons maintenant, dans un diagramme portant en abscisse le paramètre de contrôle a, les points fixes de l'application logistique $x_{n+1} = f(x_n) = 4ax_n(1 - x_n)$ (voir sous-section 8.12.1) obtenus au paragraphe précédent (voir figure 8.13). Lorsque le paramètre a est inférieur à la valeur seuil a_2 ($a < a_2 = 3/4$), l'application $f(x)$ dispose d'un point fixe unique (sans compter l'origine) ; la valeur de ce point fixe $x^*(a)$ est fonction de a. Lorsque la valeur du paramètre de contrôle a augmente ($a > a_2$), la branche associée au point fixe $x^*(a)$ se scinde en deux branches distinctes : c'est la première bifurcation de dédoublement de période. Pour une valeur du paramètre a supérieure à la valeur seuil a_4 ($a > a_4$), la bifurcation se répète pour chacune des deux branches ; et ce scénario se répète pour chaque nouvelle valeur seuil du paramètre...

Le diagramme de bifurcation (figure 8.13) montre également le rétrécissement de la différence entre deux valeurs successives du paramètre de contrôle a jusqu'au point d'accumulation défini au paragraphe précédent $a = a_\infty = 0,892486418.....$ À ce stade, il existe en principe un nombre infini de points fixes (associés donc à la fonction f composée un nombre infini de fois : f^∞). La période tend alors vers l'infini, c'est-à-dire que chaque nouvelle itération ne donne jamais le même point. Constatons de plus qu'un zoom effectué sur une petite région située dans cette zone redonne un diagramme similaire (voir figure 8.13) : le diagramme de bifurcation est dit auto-similaire.

8.13 Dimension critique pour obtenir du chaos

Le chaos se caractérise donc par une très grande sensibilité aux conditions initiales ; cette sensibilité s'illustre par la divergence exponentielle entre deux

[5] Ce résultat ne peut être déduit d'un calcul numérique direct puisque la période est infinie ; la démonstration théorique n'est pas retransposée ici, car elle dépasse le cadre mathématique de cet ouvrage.

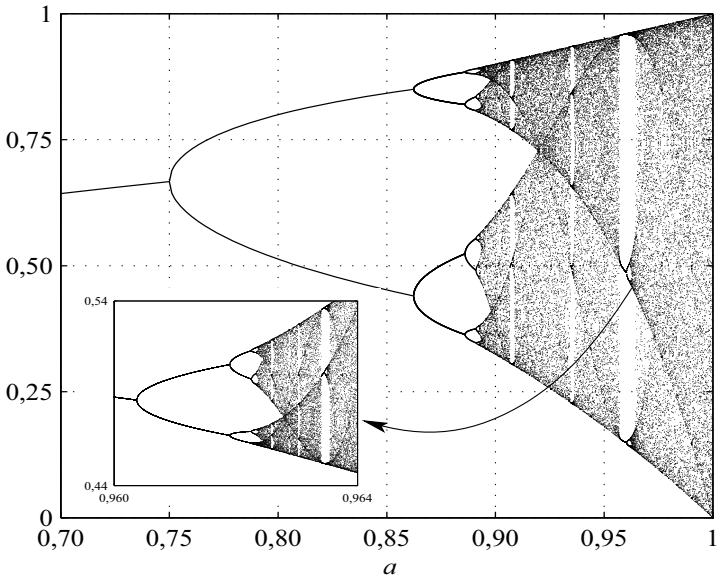


Figure 8.13 – Le diagramme de bifurcation montrant l'accumulation de la cascade et la structure self-similaire (un zoom révèle une structure fine similaire). Ici l'axe horizontal représente $4a$ et non a comme nous l'avons fait précédemment.

trajectoires issues de conditions initiales très proches[6] ; le système perd ainsi très vite la mémoire de la proximité initiale des deux trajectoires.

La dissipation d'énergie du système a pour effet de confiner la trajectoire associée au mouvement chaotique dans une région finie de l'espace de phase ; la trajectoire est astreinte à rester sur un attracteur, dit attracteur étrange (voir la section 8.7). Cette condition semble *a priori* contradictoire avec la première propriété caractéristique du chaos pour laquelle *deux trajectoires issues de conditions initiales voisines divergent dans le temps.*

Dans un espace à deux dimensions (un plan), l'écart exponentiel des trajectoires ne peut pas se produire : il s'agit là d'une conséquence du déterminisme selon lequel deux trajectoires issues de deux conditions initiales différentes ne peuvent pas se croiser. Effectuons un raisonnement par l'absurde : supposons, dans le plan de phase, l'existence d'une trajectoire possédant un point d'intersection avec elle-même et prenons pour condition initiale ce point d'intersection (voir figure 8.14) : il est impossible de déterminer *a priori* à partir de ce point l'évolution ultérieure de la trajectoire (branche droite ou gauche). L'indétermination du futur liée à l'indétermination de la trajectoire est en contradiction avec le principe du déterminisme. Donc pour un système déterministe, même chaotique, nous ne pouvons avoir des trajectoires qui s'écartent trop les unes des autres car cela aboutirait fatalement à leur intersection, situation interdite pour respecter la logique du déterminisme.

En revanche, pour un système à trois degrés de liberté, deux trajectoires dans un espace de phase à 3 dimensions ont toute latitude pour éviter de se croiser ; elle peuvent donc s'écarter indéfiniment l'une de l'autre. La dimension critique de l'espace de phase, à partir de laquelle une dynamique chaotique est possible, est égale trois. À titre d'exemple, le système de Rössler (voir équation 8.5) peut engendrer le chaos, à la différence d'un oscillateur de van der Pol (voir équation 5.4). En effet, l'équation du second degré en temps associée au système de van der Pol est équivalente à deux équations du premier ordre, ce qui confère deux degrés de liberté au système et donc l'impossibilité d'avoir un régime chaotique. Dans ce cas de figure, même le scénario d'une bifurcation sous-harmonique est impossible : tout régime correspondant à un dédoublement de période est prohibé. En effet, la trajectoire dans l'espace de phases associé à ce régime devrait effectuer deux tours avant de se refermer sur elle-même, et ceci n'est possible que si elle se croise avec elle-même, situation proscrite en raison du principe déterministe.

Un pendule simple (régi par une équation du second ordre) associé à deux degrés de liberté est soumis aux mêmes contraintes que le système de van der Pol. Mais si l'un de ces oscillateurs est excité par une force extérieure dépendante du temps, le système acquiert un troisième degré de liberté, incarné par la variable temporelle. Pour l'illustrer, considérons le cas d'une excitation sinusoïdale, où l'équation du pendule prend la forme $\ddot{\theta}+\dot{\theta}+\sin\theta = A\cos(\omega t)$, où A et ω sont respectivement l'amplitude et la pulsation de l'excitation extérieure.

[6] Il convient de préciser que les trajectoires peuvent éventuellement se rapprocher au cours du temps avant de s'écarter à nouveau.

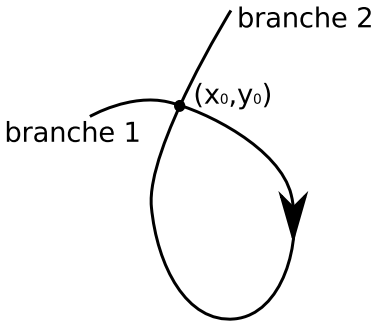


Figure 8.14 – Une condition initiale telle que (x_0, y_0) peut appartenir à l'une ou l'autre branche de la trajectoire. Ceci est en contradiction avec la dynamique deterministe.

Même si la variable temporelle n'est pas un degré de liberté au sens usuel du terme, seul ce qui importe est le nombre d'informations indépendantes pour déterminer de manière unique la trajectoire. Dans ce cas, outre la connaissance de θ et $\dot{\theta}$ à un instant donné, nous devons disposer également de l'information sur la valeur et le signe de la force à cet instant.

Pour montrer explicitement le rôle de degré de liberté que joue la variable temporelle, posons $X = t$, $Y = \theta$ et $Z = \dot{\theta}$ et obtenons le nouveau système à trois équations déterminant l'équation d'évolution du pendule excité, soit :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= 1 \\ \dot{Y} &= Z \\ \dot{Z} &= -Z - \sin(Y) - A\cos(\omega X) \end{aligned} \tag{8.25}$$

Ainsi, pour toute équation non autonome[7], la variable temps joue le rôle d'un degré de liberté au même titre que la variable dynamique X (ou sa dérivée).

8.14 Exposants de Lyapunov

8.14.1 Définition

Nous avons vu que le chaos est synonyme de perte de mémoire des conditions initiales du système au cours du temps. Soit x_0 et $x_0 + dx_0$ deux conditions initiales voisines ; l'étude des systèmes chaotiques conduit au constat suivant : l'écart initial dx_0 s'amplifie en moyenne (pour n assez grand ; ici n est une

[7] Une équation différentielle est dite autonome si la variable indépendante (ici le temps) n'apparaît pas dans l'équation, et si la relation formelle ne dépend pas de cette variable.

variable temporelle discrète) en suivant la loi :

$$dx_n \sim dx_0 e^{\nu n} \tag{8.26}$$

où dx_n représente l'écart entre deux valeurs successives au bout d'un temps n (i.e. après n itérations) et où le paramètre ν positif est appelé *exposant de Lyapunov*, du nom du scientifique russe Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918). Cet exposant exprime la rapidité avec laquelle se fait la séparation de deux trajectoires issues de deux conditions initiales infiniment voisines (autrement dit, comment dx_n s'écarte de dx_0). Plus l'exposant de Lyapunov ν est grand, plus rapidement la mémoire de la condition initiale du système est perdue. En réalité, il existe autant d'exposants de Lyapunov que de degrés de liberté, car nous pouvons toujours décomposer la trajectoire en fonction des différentes directions indépendantes de l'espace de phase ; dans ce cas, nous évaluons l'écart projeté le long d'une direction donnée.

8.14.2 Propriétés des exposants de Lyapunov

Tout d'abord, il convient de préciser que nous nous intéressons ici au chaos des systèmes dissipatifs, tel un circuit en électronique (dissipation d'Ohm) ou tel un système mécanique soumis à de la friction, etc.[8] La présence de dissipation a pour effet de diminuer globalement le volume initial donné dans l'espace de phase au cours du temps. Cela ne signifie pas pour autant que les trois côtés du volume doivent se contracter. En général, l'un des trois côtés se dilate tandis que les deux autres se contractent d'une manière telle que le volume initial décroît au cours du temps ; c'est là un point essentiel de la théorie du chaos. Ainsi, les trajectoires peuvent diverger selon la direction de dilatation (associée à un exposant de Lyapunov positif), et se contracter dans les deux autres, de façon à maintenir la dynamique autour d'un attracteur borné. On peut montrer que le signe de la variation du volume dans l'espace de phase est donné par la somme de tous les exposant de Lyapunov. Comme ce volume décroît du fait de la dissipation, cette somme doit être négative. Ainsi, au moins un des exposants de Lyapunov doit être négatif. La deuxième propriété importante des exposants de Lyapunov impose que l'un des exposants doit être nul, pour exprimer le fait que la trajectoire « reste » localisée au cours du temps sur un attracteur étrange (ensemble-limite). Enfin au sein d'un régime chaotique, nous devons avoir au moins un exposant positif [9], exprimant la sensibilité aux conditions initiales.

[8] Notons à ce niveau qu'il existe toute une branche scientifique qui porte sur le chaos non dissipatif, dit encore chaos hamiltonien, ou chaos conservatif. Un exemple typique est celui de l'étude de la dynamique du système solaire où l'effet de la dissipation n'est pas pris en compte, eu égard à sa faible importance.

[9] Mais ceci n'exclut pas l'existence occasionnelle de deux exposants positifs, auquel cas le système est dit dans un régime de **super-chaos**. Une telle situation ne peut se rencontrer que dans un espace de phase de dimension égale ou supérieure à quatre, puisque, comme nous l'avons précisé ci-avant, un des exposants doit être nul (localisation de la trajectoire sur un attracteur) et au moins un autre doit être négatif (diminution du volume des trajectoires dans l'espace des phases). Si, dans de nombreuses situations, il n'existe qu'un exposant posi-

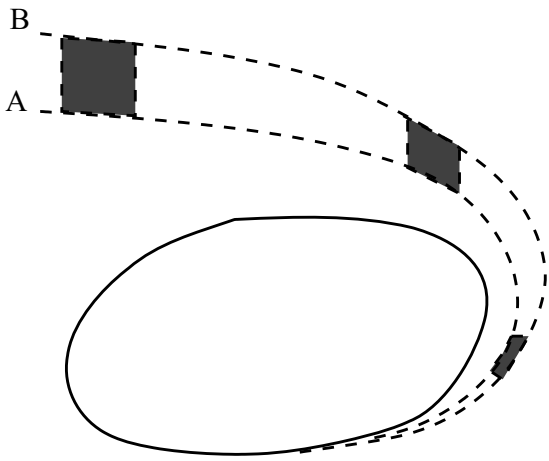


Figure 8.15 – Illustration de la contraction des aires dans l'espace de phases pour un système dissipatif. Deux trajectoires issues de deux conditions initiales A et B sont telles que l'aire entre les deux trajectoires (indiquée en couleur foncée) diminue au cours du temps, et les deux trajectoires s'enroulent autour d'un attracteur, pris ici comme un cycle limite par souci de simplicité.

8.15 Autosimilarité et fractales

Nous avons vu à plusieurs reprises que l'auto similarité se manifeste au sein du chaos ; deux exemples typiques ont été présentés (voir figures 8.8 et 8.13).

La propriété d'auto similarité s'illustre par le fait que la figure géométrique ressemble à elle-même à toutes les échelles : un zoom d'une partie de la figure conduit à la même figure globale. Ce type de structures, en vogue aujourd'hui, est connu sous le nom de fractale, dont la plus célèbre est sans aucun doute la fractale de Mandelbrot du nom du mathématicien franco-américain Benoît Mandelbrot (1924-) (voir figure 8.16). L'auto similarité confère à ces figures géométriques une propriété mathématique particulière, connue sous le nom de dimension fractale, que nous développons dans le paragraphe suivant.

Définition d'une dimension fractale

Pour les objets géométriques usuels, nous définissons traditionnellement une dimension entière ; ainsi, toute ligne (courbe ou droite) a pour dimension l'unité, toute surface est associée à la dimension 2, tout volume a pour dimension 3, etc. Or, la construction d'une figure géométrique satisfaisant la contrainte d'une autosimilarité à toutes les échelles, nous incite à reconsidérer notre façon

tif unique, certains exemples ont révélé l'existence de plusieurs exposants positifs (voir par exemple la référence [40]). On parle dans ce cas de *super-chaos*.

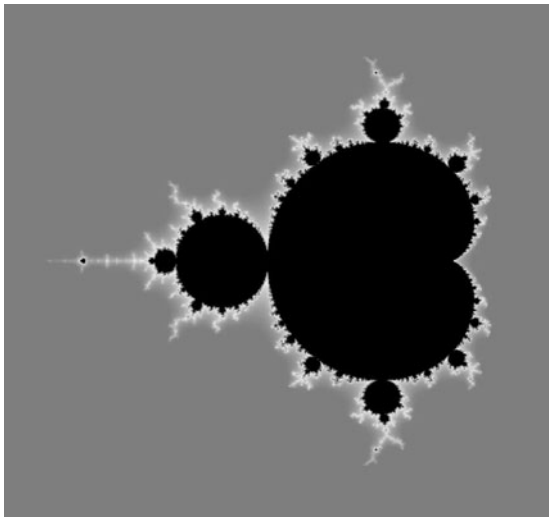


Figure 8.16 – Cette fractale, nommée fractale de Mandelbrot est obtenue de la manière suivante : considérons la suite numérique suivante : $u_{n+1} = u_n^2 + C$, où n est un entier naturel, et C est un nombre complexe (u_n est donc complexe). Cette suite peut être aussi bien convergente que divergente selon la valeur de C. L'ensemble de Mandelbrot correspond à l'ensemble des points du plan – des parties réelles et imaginaires de C – correspondant aux valeurs de C pour lesquelles la suite ne diverge pas. Ces points appartiennent aux domaines représentés en noir sur la figure. Ces domaines sont auto-similaires.

de définir la dimension d'un objet. Considérons, pour fixer les idées, une certaine figure à deux dimensions. Une façon de définir la dimension d'un objet géométrique représenté dans un espace à deux dimensions consiste dans un premier temps à couvrir la figure par un certain nombre de carrés, de dimension latérale ϵ (voir figure 8.17), puis dans un second temps, à compter le nombre de carrés $N(\epsilon)$ nécessaires pour couvrir entièrement la courbe ; ce nombre est bien sûr, fonction de ϵ car il dépend de la taille des carrés. La dimension fractale D est donc définie par l'expression suivante :

$$D = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{ln[N(\epsilon)]}{ln(1/\epsilon)} \, . \tag{8.27}$$

D'autres définitions alternatives auraient également été possibles ; mais ce choix est garant (i) d'une simplicité et (ii) de la compatibilité de la dimension fractale avec la dimension euclidienne d'un objet non fractal. Ainsi, pour une ligne de longueur L, le nombre de segments de taille ϵ nécessaire au recouvrement de la ligne vaut L/ϵ, et nous obtenons une dimension unité ($D = 1$) à partir de la définition de la dimension fractale (équation 8.27). Pour une surface d'aire S, le nombre de carrés pour couvrir la surface vaut S/ϵ^2, et nous

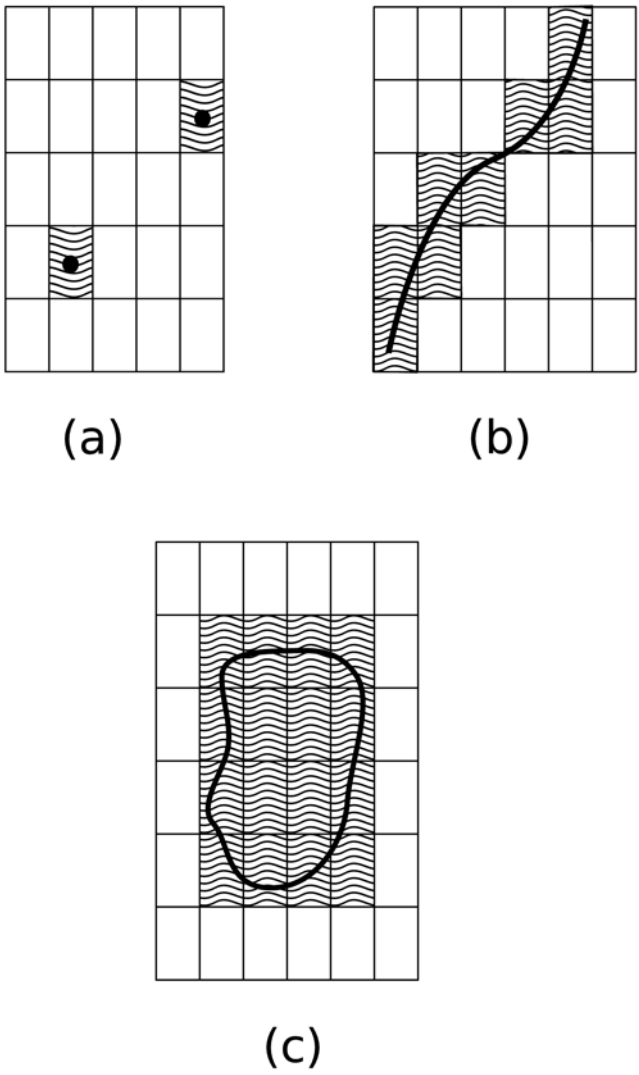


Figure 8.17 – On couvre une figure géométrique à l'aide de cubes (ou carré à deux dimensions) de côté ϵ et on note $N(\epsilon)$ le nombre de cubes nécessaires pour couvrir la ligne. On a choisi 3 exemples : (a) un objet composé de deux points isolés, (b) une ligne dans le plan, et (c) une surface enclose par une courbe fermée. Les carrés hachurés montrent le nombre nécessaire pour couvrir chacun des objets.

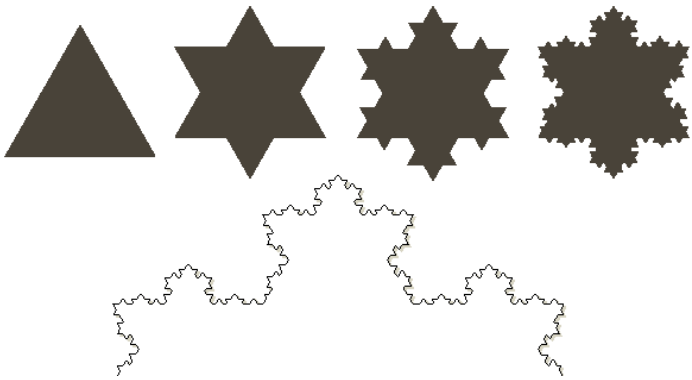


Figure 8.18 – On prend chaque côté du triangle de longueur unité, et on le découpe en trois, de manière à y mettre au centre la base d'un triangle équilatéral de côté 1/3, et ainsi de suite. Cette fractale est parfois appelée *flocon de neige*.

obtenons une dimension fractale de 2 ($D = 2$, équation 8.27).

Venons-en maintenant à l'application de cette définition pour des objets autosimilaires, et prenons le cas de la figure géométrique dite « flocon de von Koch », définie par le mathématicien suédois Helge von Koch (1870-1924) bien avant l'invention du terme fractale (voir figure 8.18). Avant d'obtenir l'image très ramifiée, nous sommes initialement partis d'un triangle équilatéral (représenté à l'extrémité gauche de la figure 8.18) ; puis, chaque côté du triangle est subdivisé en 3 segments égaux, le segment du milieu devient alors la base d'un nouveau triangle équilatéral – donc plus petit que le triangle initial – ayant comme côté le tiers du triangle initial, et le procédé est répété à l'identique pour obtenir finalement une figure géométrique très dentellée (voir figure 8.18). À la première itération, se substituent à chaque côté du triangle initial de longueur 1, quatre segments de taille 1/3 (deuxième image de la figure 8.18). Chacun de ces petits segments donne lieu à quatre segments de taille 1/9 et ainsi de suite. À la m^{ime} itération, la figure est composée de 4^m segments, chacun de taille $(1/3)^m$. La définition de la dimension fractale D (équation 8.27, où nous notons que $\epsilon \to 0$ est équivalent à $m \to \infty$) nous donne :

$$D = \lim_{m \to \infty} \frac{ln(4^m)}{ln(3)^m} = ln(4)/ln(3) \simeq 1,26... \tag{8.28}$$

La dimension de cet objet, même d'apparence linéaire, est égale à une fraction de l'unité ; l'adjectif qualificatif *fractale* que B. Mandelbrot lui attribua est issu de la racine latine *fractus*, qui signifie brisé, irrégulier. Le triangle de Sierpinski du nom du mathématicien polonais Waclaw Franciszek Sierpinski (1882-1969) (voir figure 8.19) montre une autre fractale célèbre dont la dimension vaut environ 1.58.

Avant de clore ce paragraphe, insistons sur le fait qu'une figure auto-similaire n'est pas forcément fractale. En effet, prenons le cas d'un carré (voir figure 8.20) que nous découpons en quatre carrés, eux-mêmes subdivisés en 4 et répétons l'opération un certain nombre de fois. Fixons le périmètre du carré initial à l'unité ; à la première itération, la longueur du côté du petit carré est égale à $(1/2)^2$. À l'itération m, 4^m carrés sont produits, ayant une longueur de $(1/2)^m$ pour le plus petit des carrés. Nous obtenons, d'après la définition de la dimension fractale (équation 8.27), $D = ln(4^m)/ln(2^m) = ln(4)/ln(2) = 2$, dimension égale à la dimension euclidienne.

Une interprétation plus intuitive de la dimension fractale définie par l'équation 8.27 peut être donnée en la considérant comme le rapport des logarithmes du nombre de parties auto-similaires et du facteur d'amplification, soit :

$$D = \frac{ln(\text{nombre total de parties auto-similaires})}{ln(\text{facteur d'amplification})} \tag{8.29}$$

Illustrons cette interprétation à l'aide du carré de la figure 8.20. La subdivision du carré initial en N^2 petits carrés auto-similaires (figure 8.20) correspond à un facteur d'amplification égal à N (en passant de quatre carrés à un carré unique, le facteur d'amplification de chaque petit carré est égal à deux). Nous obtenons, d'après la nouvelle lecture de la dimension fractale (équation 8.29), $D = ln(N^2)/ln(N) = 2$. La même opération peut être réalisée avec un cube, pour trouver une dimension fractale $D = 3$. Que faut-il donc de plus que l'auto-similarité pour obtenir une dimension fractale non entière ? Regardons d'abord ce que donne la nouvelle expression de la dimension fractale (équation 8.29) pour le triangle de Sierpinski (voir figure 8.19). Cette figure géométrique est obtenue est subdivisant le triangle initial en quatre triangles, dont trois sont auto-similaires (les triangles en noir). La longueur des côtés de chaque triangle auto-similaire est deux fois plus inférieure à celle du triangle initial. Ainsi, à l'issue de la première itération, le facteur d'amplification est égal à deux pour les trois triangles auto-similaires. La même opération est réitérée avec ces trois triangles, et ainsi de suite. Par conséquent, la dimension fractale vaut

$$D = \frac{ln(3)}{ln(2)} = 1,58... \tag{8.30}$$

En quelque sorte, la dimension fractale contient des informations d'une part, sur l'auto-similarité et d'autre part, sur la complexité : la figure du triangle de Sierpinski (figure 8.19) est plus complexe que la figure auto-similaire du carré (figure 8.20).

8.16 Crises

L'état chaotique d'un système peut être donc représenté par un attracteur composé d'un ensemble de points dans l'espace des phases associé à une trajectoire caractéristique du chaos ; nous pouvons cependant repérer dans cet

Figure 8.19 – Cette fractale est due à Sierpinski en 1915 et est déjà parue dans l'art italien au XIII^{e} siècle. Il est obtenu en mettant un triangle blanc au centre du triangle noir initial. On répète ensuite l'opération avec chacun des trois triangles noirs périphériques, et ainsi de suite. Soit N_m le nombre de triangles noirs obtenus après m itérations. Nous avons $N_m = 3^m$. On doit couvrir chaque segment de la figure. Le côté du triangle noir à l'itération m a une longueur égale à $(1/2)^m$. La dimension fractale est donc donnée par $ln(3)/ln(2) \simeq 1,58...$

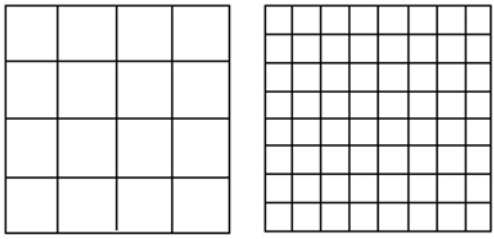


Figure 8.20 – Une figure auto-similaire mais non fractale, voir texte.

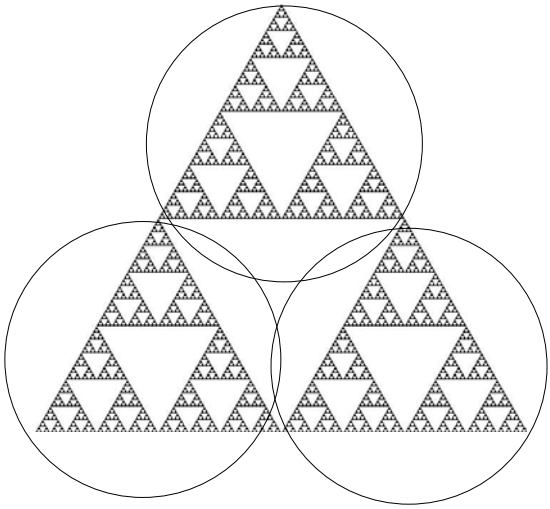


Figure 8.21 – On peut diviser cette figure en trois figures auto-similaires. Si on amplifie (ou on zoome) par un facteur deux chaque côté de ces trois figures, on obtient la surface totale. Le rapport entre le nombre d'images auto-similaires et le facteur d'amplification vaut donc 3/2.

attracteur des orbites périodiques instables, c'est-à-dire des courbes plus ou moins complexes enchevêtrées les unes dans les autres. En faisant varier un paramètre de contrôle, l'attracteur peut changer brutalement de forme ; de tels événements, dénommés crises, se produisent par exemple lors de la collision entre un attracteur étrange et une orbite périodique instable. Trois types de crises ont été identifiés : (i) dans le premier cas, un attracteur étrange est détruit, (ii) dans le second cas, la taille de l'attracteur change subitement quand le paramètre de contrôle atteint une certaine valeur et (iii) dans le troisième cas, deux (ou plus) attracteurs fusionnent pour former un attracteur unique. La manifestation principale d'une crise associée au changement abrupt de l'attracteur s'observe également sur le signal chaotique.

Prenons, à titre d'exemple, l'oscillateur de van der Pol soumis à une excitation extérieure périodique (voir section 5.1) obéissant donc à l'équation d'évolution suivante :

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = a\sin(\omega t)\ , \tag{8.31}$$

où μ est un paramètre positif, et a est l'amplitude de la perturbation, et ω sa pulsation. L'espace de phase d'un tel oscillateur est de dimension 3 (les trois variables sont : t, x et $\dot{x}$; voir également section 8.13). Le système dynamique possédant 3 degrés de liberté, une situation chaotique est tout à fait possible (voir section 8.13), comme nous pouvons le constater en examinant

l'évolution de la variable vitesse $\dot{x}$ au cours du temps pour différentes valeurs du paramètre a (voir figure 8.22) : les phénomènes de crise sont associés aux variations brusques de la dynamique chaotique.

8.17 Hasard et déterminisme

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de discuter le lien entre hasard et déterminisme. Avant d'aborder cette question, nous introduisons d'abord quelques préliminaires nécessaires.

8.17.1 L'application tente

Précédemment, nous avons étudié en détail l'application logistique (voir section 8.12) qui nous a permis d'introduire la première transition vers le chaos par cascade sous-harmonique (voir section 8.12.1). L'application tente, définie par l'équation suivante :

$$x_{n+1} = 1 - 2|x_n - \frac{1}{2}| \equiv f(x_n) \tag{8.32}$$

se prête mieux encore à l'analyse du concept statistique du chaos.

Comme son nom l'indique, cette application a la forme d'une tente (voir figure 8.23). On constate que l'intervalle $[0, 1]$ s'inscrit dans lui même. On se limite dans la suite à cet intervalle.

Pour toute valeur de x_n inférieure à $1/2$ ($x_n < 1/2$), le signe de l'expression entre la valeur absolue est négatif et nous pouvons formuler l'application tente comme $x_{n+1} = 2x_n$. Pour toute valeur de x_n supérieure à $1/2$, ($x_n > 1/2$), nous obtenons cette expression de l'application tente : $x_{n+1} = 2(1 - x_n)$.

Ainsi, en partant d'une condition initiale telle que $x_0 < 1/2$, à la première itération nous obtenons $2x_0$ (autrement dit, on assiste à un « étirement » de x_0 vers $2x_0$). En répétant cette opération n fois, et tant que la valeur de x_n reste en dessous de $1/2$, nous obtenons un étirement de l'intervalle. Au bout d'un certain nombre d'itérations, la valeur x_n dépasse le seuil $1/2$, et dans ce cas, l'expression de l'application change. Supposons, à titre d'exemple, que $x_0 = 0,52$; nous obtenons lors de la première itération $x_1 = 2 \times 0,48 = 0,96$, puis $x_2 = 2 \times (1 - 0,96) = 0,08 < 1/2$. Donc une valeur initiale x_0 supérieure à $0,5$ mène systématiquement au retour de l'application dans l'intervalle $[0, 1/2]$. En résumé, nous pouvons écrire que l'évolution de l'application tente est décrite par deux opérations : (i) un étirement par un facteur deux de l'intervalle $[0, 1/2]$ puis un repliement vers l'intervalle de départ, et ainsi de suite. Il s'agit là d'une propriété générale des applications chaotiques : un étirement, qui correspond à la divergence des trajectoires dans l'espace des phases, et un repliement qui maintient l'attracteur borné.

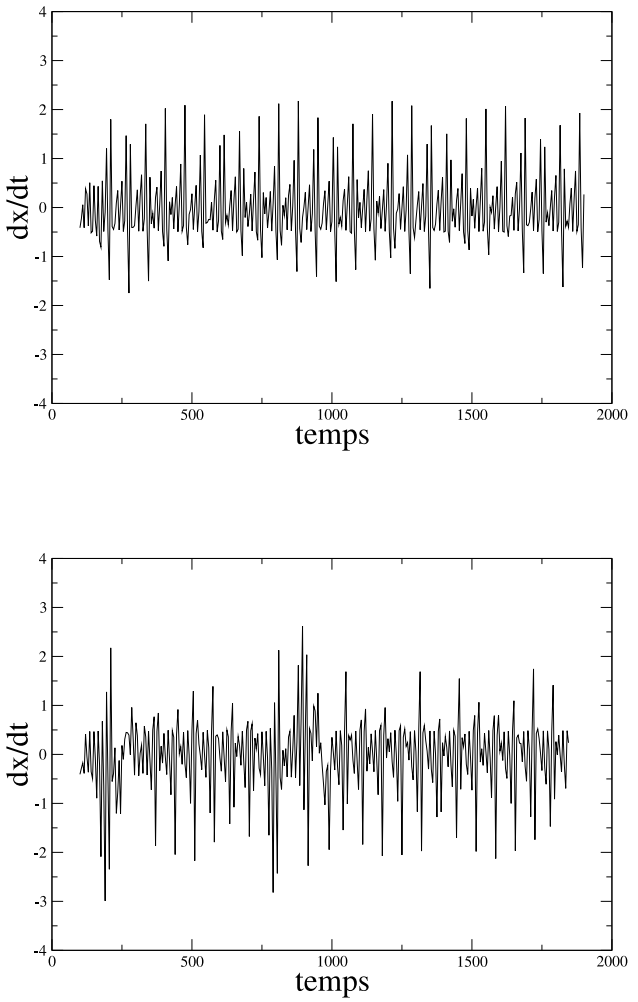


Figure 8.22 – Le signal $\dot{x}(t)$ chaotique (avec $a = 0,98765$) montrant l'émergence d'une crise pour $a \simeq 0,98777$ caractérisée par des bouffées aiguës du signal ; $\omega = 0,45$ et $\mu = 1$.

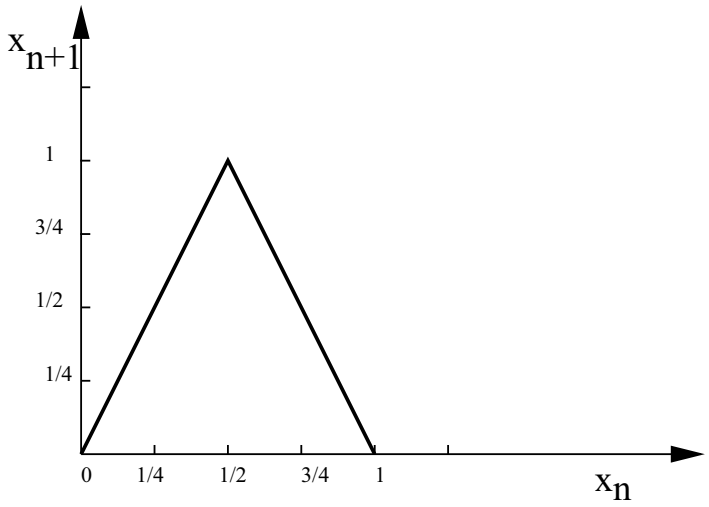


Figure 8.23 – L'application tente.

8.17.2 Sensibilité de l'application tente aux conditions initiales

Considérons l'application composée de la fonction tente f ; le graphe associé à la fonction composée deux fois : $f(f(x_n)) \equiv f^2(x_n)$ a la forme de deux « tentes » juxtaposées l'une à côté de l'autre dans l'intervalle $[0,1]$ (voir schéma à gauche de la figure 8.24). De même, le graphe de l'application composée m fois, soit : $f^m(x_n) = x_{n+m}$, est composé de m « tentes » s'inscrivant dans l'intervalle $[0,1]$ (voir schéma à droite de la figure 8.24). Pour s'en convaincre, il suffit de noter que si la variable x_n adopte comme valeur 0, 1/2 ou 1, nous avons $x_{n+2} = 0$, tandis que si la variable x_n a pour valeur 1/4 ou 3/4, nous obtenons $x_{n+2} = 1$. En réalisant que x_{n+2} est une fonction linéaire de x_n entre ces points remarquables, le graphe de l'application tente composée une fois avec elle-même (i.e. $f^2(x_n)$ en découle naturellement (schéma à droite de la figure 8.24). En suivant le même raisonnement pour la fonction tente composée $m-1$ fois avec elle-même (i.e. $f^m(x_n)$, nous obtenons l'allure du graphe reporté à gauche de la figure 8.24.

Ainsi, en se fixant une condition initiale dont la valeur est connue à $\pm 2^{-m}$ près (cet intervalle d'indétermination est très petit, lorsque m est assez grand), l'application $f^m(x_n)$ adopte n'importe quelle valeur au sein de l'intervalle $[0,1]$. Autrement dit, la connaissance que nous avons au départ de la condition initiale comprise dans l'intervalle $[x_0 - 2^{-m}, x_0 + 2^{-m}]$ ne permet pas de connaître l'état final du système.

Ce résultat peut également être vérifié numériquement à l'aide d'une cal-

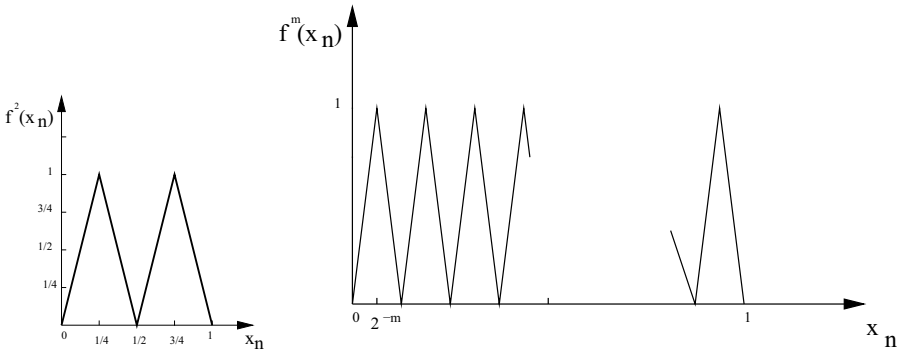


Figure 8.24 – L'application tente composée deux fois, $f^2(x_n)$, et l'application tente composée m fois, $f^m(x_n)$ (m assez grand).

culette, de la même façon que nous l'avons effectué pour l'application logistique[10].

L'application tente est en fait reliée à l'application logistique définie par l'équation $x_{n+1} = 4ax_n(1 - x_n)$ en effectuant un simple changement de variable. En effet, intéressons-nous au cas où le paramètre de contrôle[11] $a = 1$; l'application logistique a donc pour équation : $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$.

Effectuons le changement de la variable x en la variable y définie par :

$$x = \sin^2\left(\frac{\pi y}{2}\right) = \frac{1}{2}[1 - \cos(\pi y)] \tag{8.33}$$

et reportons cette expression dans l'application logistique précédente pour obtenir la relation : $\sin^2(\pi y_n/2) = 1 - \cos^2(\pi y_n) = \sin^2(\pi y_n)$.

Nous pouvons en déduire immédiatement la relation suivante : $\pi y_{n+1}/2 = \pm\, \pi y_n + p\pi$ où p est un entier naturel. Comme la variable y_n est telle que $y_n \in [0, 1]$, lorsque la valeur de la variable y est telle que : $0 \leq y_n < 1/2$, et $y_{n+1} = 2(1 - y_n)$, nous obtenons l'application : $y_{n+1} = 2y_n$ (le signe devant y_n est positif et $p = 0$) ; lorsque la valeur de la variable y est telle que $1/2 \leq y_n \leq 1$, nous obtenons : $y_{n+1} = 2(1 - y_n)$ (le signe devant y_n est négatif et $p = 1$).

8.17.3 Jouer à la roulette ou au chaos ?

Depuis le grand espoir d'une mécanique rationnelle, nous avions commencé à croire au triomphe du déterminisme. Ainsi, les adeptes du jeu de dé et de la roulette nous auraient bien volontiers proposer de venir tester nos théories

[10] Rappelons que nous avons établi de manière générale, au paragraphe 8.12.1, qu'un point fixe est instable si la dérivée de f à l'intersection avec la première bissectrice est supérieure à l'unité en valeur absolue. Il s'ensuit que les points fixes de l'application tente sont instables.

[11] Rappelons que nous avons vu au paragraphe 8.12.1 que le chaos se produit dès que le paramètre de contrôle a est tel que $a > 0,892...$

déterministes à leur table de jeu. Mais cette foi profonde, qui relie trop rapidement la mécanique newtonienne à l'idée d'une prédictibilité et d'un déterminisme absolus, est ébranlée par l'existence au sein même de cette mécanique de systèmes newtoniens imprévisiblement chaotiques, même si leur mise en équation est relativement simple. Et il est maintenant avéré que ces systèmes chaotiques constituent, plutôt que l'exception, la vaste majorité des systèmes mécaniques.

Comme cela a déjà été dit dans cet ouvrage, si nous étions capables de déterminer avec une précision infinie l'état initial du système, nous saurions prédire l'évolution ultérieure. C'est donc notre incapacité à atteindre ce degré de précision sur les conditions initiales qui est à la base de notre faillite à la prédictibilité. Nous pourrions donc attribuer l'origine du chaos à un manque d'information. Mais il ne faut pas croire que cette information manquante est le fait d'une ignorance théorique temporaire, ou d'une incapacité expérimentale contextuelle, que nous serions à même de surpasser un jour grâce à la progression des sciences. Nous sommes ici confrontés à une incertitude fondamentale.

En effet, définir un état initial pour un système mécanique à une particule, c'est se donner, par exemple, la position et la vitesse initiales de cette particule. Or les valeurs de ces conditions initiales sont des nombres réels qui sont définis par une suite infinie de chiffres, par exemple, $1/3 = 0,33333...$, $\sqrt{3} = 1,732...$ Si nous voulions désigner toutes les valeurs possibles d'une condition initiale, il faut pouvoir spécifier toutes les suites infinies de chiffres qui existent : ceci est hors de portée humaine.

Lorsque la dynamique n'est pas chaotique, cette impossibilité à attribuer aux conditions initiales des valeurs infiniment précises est sans importance, car l'état final est insensible à des incertitudes faibles sur les conditions initiales. Dans un régime chaotique, l'incertitude s'amplifie exponentiellement. La notion de hasard, ou d'incertitude, est ainsi encodée dans le manque d'information de l'état initial.

Dès lors, il devient naturel de se demander s'il est quand même possible d'établir une description statistique du chaos, comme on pourrait le faire pour un jeu dé.

8.17.4 Mesure invariante

Pour obtenir un premier élément de réponse à cette question, étudions un système simple défini comme suit ; soit l'intervalle $[0;\ 1]$; subdivisons cet intervalle en un certain nombre de sous-intervalles égaux, par exemple une centaine : $[0;\ 01[, [0,01;\ 0,02[.....[0,99;\ 1]$ et notons ces intervalles $I_1,\ I_2, ...I_{100}$. Tirons ensuite au hasard un nombre réel x_0 dans $[0;\ 1]$; il appartient nécessairement à l'un de ces sous-intervalles. Ce nombre est pris pour condition initiale d'une application logistique ou de l'application tente (ou tout autre type d'application connue pour engendrer le chaos) et effectuons ensuite Nitérations, avec N assez grand, disons $N = 1\ 000$. Le résultat final x_N appartient à un intervalle I_j $(1 < j < 100)$. Recommençons cette opération un certain nombre de

fois, disons 1 000, et construisons l'histogramme des événements, dans lequel en abscisse figure les intervalles I_j et en ordonnée le nombre de fois que ces intervalles I_j sont visités. Si N est assez grand, nous aboutissons à une conclusion très intéressante : cet histogramme est une courbe (qu'on va voir par la suite) robuste (en ce sens qu'elle est indépendante de N dès que N est assez grand, supérieur à quelques centaines), au même titre qu'une loi gaussienne en probabilité.

Considérons maintenant l'application tente (voir équation 8.32) et découpons l'intervalle $[0, 1]$ en N sous-intervalles égaux, notés $[(m-1)N, m/N]$ avec $m = 1, 2, ...N$, le long de l'axe Ox. Comme l'application tente est linéaire, aucun des intervalles ne sera privilégié par rapport à un autre. Par conséquent, le nombre de fois qu'un intervalle est visité approche $1/N$, lorsque le nombre d'itérations devient assez grand. Ainsi, la probabilité pour qu'un intervalle soit visité est égale à $1/N$. Il s'agit d'une loi de distribution uniforme. Étant donné que x est une variable continue, il est utile d'introduire la densité de probabilité $\rho(x)$ telle que $\int_a^b \rho(x)dx$ représente le nombre de fois où l'intervalle $[a, b]$ est visité. Comme nous l'avons dit plus haut, ce nombre est égal à l'intervalle lui-même, c'est-à-dire à $b - a$. Il s'ensuit que la densité ρ est constante :

$$\rho(x) = 1 \tag{8.34}$$

la densité ρ est alors qualifiée de *densité naturelle invariante.* Cette densité est uniforme, au même titre que la densité de probabilité associée aux jeux de hasard, tels que le lancer de dés (chaque face à la même chance 1/6) ou la roulette.

Revenons à nouveau à l'application logistique et notons $\rho(x)$ la densité de probabilité ; donc, le nombre de fois qu'un intervalle dx est visité est égal à ρdx. Nous avons constaté que l'application logistique est reliée à l'application tente par un simple changement de variables (voir équation 8.33) ; notons y la variable de l'application tente et x celle de l'application logistique. Nous avons $\rho(x)dx = \rho(x(y))(dx/dy)dy$. L'uniformité de la distribution en termes de la variable y, nous impose la condition suivante : $\rho(x(y))(dx/dy) = 1$, soit $\rho(x(y)) = dy/dx$. Utilisons le changement de variable adapté (équation 8.33) pour exprimer y en fonction de x. Nous obtenons ainsi $dy/dx = 2/(\pi \sin(\pi y)$. Comme nous disposons également de la relation $sin(\pi y) = 2\sqrt{x(1-x)}$, nous pouvons établir la loi de distribution $\rho(x)$ de l'application logistique :

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \,. \tag{8.35}$$

C'est la densité naturelle invariante du chaos engendrée par l'application logistique (voir figure 8.25). Notons enfin que chaque application a sa propre densité invariante.

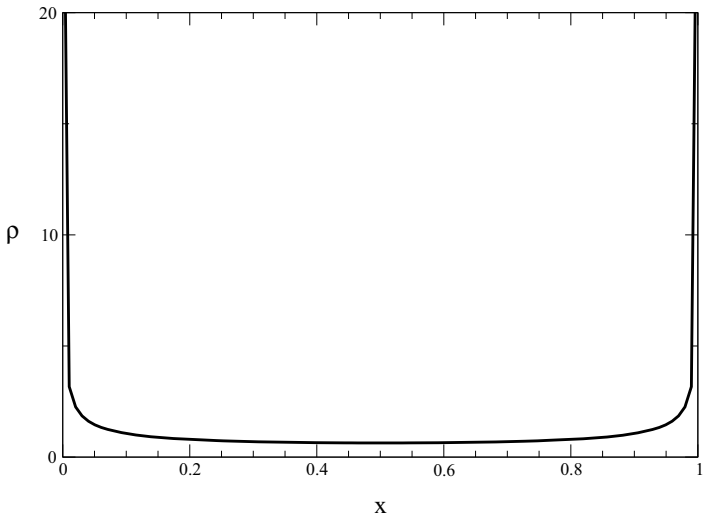


Figure 8.25 – Densité invariante $\rho(x)$ associée à la courbe logistique.

8.18 Le contrôle du chaos

L'étude des modalités et du contrôle du chaos a donné lieu à de nombreuses publications scientifiques. Cet intérêt est justifié par : (i) d'une part, il peut être intéressant, dans certains cas, de savoir l'éviter, ou bien au contraire, en tirer partie en vue d'une application spécifique. Ainsi, dans une chambre à combustion, le régime turbulent des réactifs est intéressant à susciter afin d'augmenter l'efficacité du mélange ; (ii) d'autre part, le contrôle des régimes chaotiques de certains dispositifs électroniques et électromécaniques (et surtout ceux qui peuvent potentiellement manifester des crises) est essentiel pour éviter des situations chaotiques préjudiciables à leur fonctionnement.

Le chaos est caractérisé par la présence d'un attracteur étrange dans l'espace des phases. Lors de l'étude de la cascade sous-harmonique, nous avons souligné qu'un point fixe de l'application $f(x)$ (point correspondant à un cycle limite) peut devenir instable et donner lieu à une bifurcation en deux branches qui correspondent à une oscillation à période double ; et cette bifurcation donne lieu à deux autres points fixes instables (voir figure 8.12). Dans le régime chaotique, l'attracteur étrange baigne au sein d'un nombre considérable de cycles limites instables, ou orbites instables, denses dans l'espace des phases.

Par définition, les orbites instables sont répulsives ; est-il possible de leur conférer une qualité attractive à l'aide d'une action extérieure ? Nous avons déjà

mentionné la possibilité de stabiliser un état instable à l'aide d'une perturbation (voir paragraphe 7.6). En effet, un bâton rigide maintenu à la verticale et reposant sur la paume de la main est instable sous l'effet de la gravité ; mais il peut être rendu stable grâce à une oscillation adéquate de la main. Ainsi, l'orbite initialement instable peut devenir attractive sous l'effet de l'oscillation.

L'idée du contrôle du chaos suit à peu près la même philosophie. Le système chaotique est perturbé par une excitation extérieure relativement faible pour accomplir l'une des tâches suivantes : (i) faire disparaître le chaos au profil d'un régime périodique, grâce à la proximité d'orbites périodiques – dont on sait qu'elles sont denses – initialement instables) ; (ii) éviter les régimes de crise, lorsque le régime chaotique persiste.

Pour illustrer l'intérêt du contrôle du chaos, au-delà d'une problématique de recherche toute passionnante qu'elle soit, prenons un exemple de la vie quotidienne. Un bateau évoluant sur l'eau peut difficilement échapper au chaos lorsqu'il est soumis à certaines conditions atmosphériques défavorables. Cependant, tout commandant de navire cherche à éviter les situations de « crise » ; et pour éviter le naufrage, puisqu'il ne peut agir sur les conditions météorologiques, il introduit des perturbations adaptées pour contrôler la navigation de son engin.

Le contrôle du chaos, en tant qu'objet d'étude et de recherche, a connu un véritable engouement depuis la fin du XX^{e} siècle et plusieurs applications intéressantes ont ainsi pu voir le jour, dans différents domaines, tels les systèmes mécaniques (référence [23]), les lasers (référence [27]) ; les tissus cardiaques (référence [26]), les réactions chimiques (référence [64]), et bien d'autres encore dont il est impossible de faire ici une liste exhaustive.

Chapitre 9

Naissance de l'ordre spatial unidimensionnel

9.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes focalisés sur l'étude de la dynamique temporelle de systèmes ponctuels. Mais, de nombreux systèmes non linéaires possèdent une extension spatiale, dont l'organisation au cours du temps est symptomatique de leur dynamique.

Par exemple, l'atmosphère constitue un exemple courant où l'importance de la dimension spatiale est évidente. Pour établir des modèles météorologiques prédictifs, nous avons en effet besoin de disposer d'informations spatiales, telles la pression, la température, la vitesse du vent... non seulement en fonction du temps, mais également en différents points de l'espace. Outre l'importance de la dimension spatiale locale de l'atmosphère, force est de constater qu'à l'échelle macroscopique, la dimension spatiale est également un élément important pour comprendre les événements météorologiques. Par exemple, certaines structures, tels les nuages cumulonimbus[1], sont révélatrices de phénomènes atmosphériques majeurs (tornade, tempête) ; eux-mêmes sont d'ailleurs structurés en sous-structures tels les mammas[2] (voir figure 9.1). Quelle est l'origine de telles structures et quelle est la dialectique qui se joue entre l'ordre et le désordre lors de cette morphogenèse ?

[1] Nuages de très grande extension verticale de 6 à 13 kilomètres.

[2] Le terme scientifique consacré mamma, dont l'origine latine signifie mamelle ou mamelon, désigne en météorologie des nuages en forme de poches de forme arrondie situées, le plus souvent, à la base de différents types de nuages, tels les cumulonimbus, les cirrus, les altocumulus... ; ces structures sont également observées dans les nuages de cendres éjectés dans l'atmosphère lors des éruptions volcaniques ou encore dans les traînées de condensation (les « contrails » que forme un avion à la traversée de certaines couches atmosphériques). La formation de tels nuages constitue une énigme intrigante de la dynamique des fluides atmosphériques et de la physique des nuages.

Figure 9.1 – Une structure assez organisée de cumulonimbus. ©NOAA Photo Library, NOAA Central Library ; OAR/ERL/National Severe Storms Laboratory (NSSL)

La nature nous offre une surabondance d'exemples de structures spatiales ordonnées dans des domaines variés, telles les rides sur le sable, les bandes et taches sur le pelage des animaux, des figures de sédimentation en géologie, l'organisation de microtubules (voir chapitre 14, section 14.5)[3] dans les cellules biologiques, etc.

Un aspect fascinant de la morphogenèse réside dans l'émergence spontanée d'une organisation spatiale ordonnée de systèmes portés hors équilibre. Cet ordre surgit, en général, lorsque l'écart par rapport à l'équilibre thermodynamique (disons, pour simplifier, que cet écart est fonction de la quantité d'énergie injectée dans le système) atteint une certaine valeur critique. Le passage de l'état initial sans structure, appelé état homogène, vers l'état ordonné correspond en fait à la présence d'une bifurcation.

Pour aborder l'étude de la morphogenèse, nous allons tout d'abord évoquer divers exemples, puis proposer des interprétations qualitatives, ensuite nous développerons des calculs explicites pour établir les conditions nécessaires à l'établissement spontané d'un ordre et enfin nous nous affranchirons des exemples contextuels pour énoncer, autant que faire se peut, des conditions universelles à la la structuration spatiale.

[3]Les microtubles sont de longues molécules présentes au sein du cytoplasme des cellules biologiques. Ces molécules jouent un rôle prépondérant dans le processus de division cellulaire ; dans certaines conditions, ces molécules s'organisent sous forme d'astres.

Commençons dès maintenant par l'étude d'un exemple célèbre : l'instabilité de Turing, du nom du célèbre mathématicien britannique, Alan Mathison Turing (1912-1954) qui est l'origine de la création du premier ordinateur universel programmable et du domaine de l'intelligence artificielle. À la fin de sa vie, il s'est intéressé également à l'étude de modèles de morphogenèse au sein du vivant (les structures de Turing).

9.2 Le système de Turing

Mélangeons deux, ou plusieurs, substances chimiques, toutes solubles dans la solution ; ces substances réagissent les unes avec les autres pour donner d'autres produits. Il est souvent constaté que les substances initiales et leurs produits se mélangent au cours du temps de manière homogène au sein de l'enceinte où la réaction a lieu, à l'image du sirop dans l'eau qui diffuse pour colorer de manière homogène le verre d'eau. Or, une telle solution homogène n'est pas toujours stable ; sous certaines conditions, la distribution des espèces chimiques devient non homogène, et évolue vers une structuration spatiale, parfois très éloignée de l'homogénéité. Cette morphogenèse chimique est sans doute l'exemple le plus célèbre des phénomènes conduisant à la naissance de formes dans la nature. En 1952, deux ans donc avant sa mort provoquée par un empoisonnement (dont on ne sut jamais s'il fut suicide, crime ou accident), Alan Turing publia un article qui fait encore date : « Les bases chimiques de la morphogenèse »[4]. Au-delà des aspects mathématiques relativement simples décrivant le fonctionnement de l'instabilité à l'origine de cette morphogenèse chimique, Alan Turing évoque notamment l'impact que pourrait avoir, plus généralement, cette instabilité sur la morphogenèse dans la nature, et en particulier chez les êtres vivants.

La touche géniale du travail réalisé par Alan Turing réside dans sa simplicité déconcertante, qui débouche, cependant, sur une conclusion générale d'une importance universelle. Pour simplifier les choses, le résultat d'Alan Turing se résume comme suit : soit un réactif chimique u activateur (i.e. assurant sa propre croissance) et un second réactif v inhibiteur (i.e. s'opposant à la croissance de l'activateur) plongés tous deux dans une enceinte. Sans avoir à préciser les détails de la réaction, si le réactif v diffuse suffisamment rapidement par rapport à la substance u, le mélange homogène des deux substances devient instable, et laisse place spontanément à une structuration spatiale ; cet ordre peut apparaître, en particulier, sous forme de bandes alternées, comme les bandes alternativement blanches et noires que forment le pelage d'un zèbre, mais d'autres types d'ordre, tels les nids d'abeilles par exemple, sont également possibles. Il est à noter que toute la généralité du modèle de Turing est une indication que la naissance de l'ordre chimique est un phénomène robuste et inévitable, ce qui assure la généricité du modèle. Il a pourtant fallu attendre

[4]Référence bibliographique complète de l'article : Turing, AM., 1952, *The chemical basis of morphogenesis*, Phil. Trans. R. Soc. London B 237, 37-72.

environ 40 ans après la publication de l'article d'Alan Turing pour que l'expérience en laboratoire confirme la prédiction d'Alan Turing (voir références [15, 60, 12]).

Le modèle de Turing correspond à une réaction chimique auto-catalytique, modèle totalement indépendant du détail de la réaction proprement dite. Le modèle de Turing met en jeu deux phénomènes : (i) un phénomène réactif issu de l'interaction chimique entre les substances en présence et (ii) un phénomène diffusif des substances chimiques au sein de la solution. L'équation d'évolution décrivant le changement de la concentration des substances s'écrit ainsi comme :

$$\partial_t u = f(u,v) + D_u \partial_{x^2} u \tag{9.1}$$

$$\partial_t v = g(v,u) + D_v \partial_{x^2} v \tag{9.2}$$

où $u(x,t)$ (respectivement $v(x,t)$), dépendant de la variable d'espace x et du temps t, dénote la concentration du réactif u (respectivement v), $\partial_t u$ et $\partial_t v$ désignent ainsi la variation au cours du temps de chacune des concentrations des espèces en un point donné, $f(u,v)$ (respectivement $g(v,u)$) est la fonction décrivant la réaction chimique de la substance u (respectivement v) avec la substance v (respectivement u) pour produire des dérivés, et enfin D_u et D_v sont les coefficients de diffusion respectivement pour les substances u et v. Le processus précis avec lequel la réaction se fait, ou la forme précise de l'équation de réaction, n'importe pas.

Le sens commun tendrait à penser, *a priori*, qu'en présence d'une disrtibution hétérogène locale des substances, le phénomène diffusif aura tendance à homogénéiser le tout, à l'image de la diffusion d'une goutte de sirop dans un verre d'eau. Or, et c'est toute l'étrangeté du phénomène, la diffusion mutuelle des deux substances peut au contraire favoriser, dans certaines conditions, la ségrégation et donc l'instabilité de l'état homogène.

9.2.1 Image qualitative de l'instabilité de Turing

Pour percevoir qualitativement la dynamique de l'instabilité énoncée par A. Turing, partons d'une solution homogène, et considérons la présence d'une infime fluctuation au sein du système[5]. Supposons que, suite à une telle fluctuation, l'activateur se trouve être en léger excès en un point donné (voir figure 9.2). Puisque l'activateur u assure sa propre production, un excès de l'activateur produit toujours plus d'activateurs ; mais il ne faut pas oublier qu'il produit simultanément son antagoniste v ; ainsi, la présence d'un excès d'activateur donne également lieu à une production accrue de l'inhibiteur. En principe, les deux substances vont avoir tendance à s'homogénéiser en suivant la loi standard de la diffusion. Or, c'est là toute l'originalité du modèle de Turing que d'avoir souligné ce point : si l'inhibiteur diffuse suffisamment rapidement, plus rapidement donc que l'activateur, l'inhibiteur se dilue plus vite dans la solution

[5]Notons que de telles flucations sont inévitables dans le monde réel.

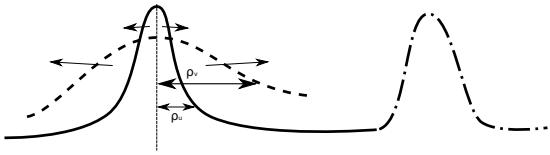


Figure 9.2 – En ligne continue : l'activateur assure sa propre croissance, et produit l'inhibiteur (ligne brisée). Si ce dernier diffuse plus rapidement, son pic de concentration s'étale plus vite, permettant ainsi à l'activateur de continuer à croître localement. C'est le principe de base de l'instabilité de Turing. Un autre pic peut naître, n'importe où en principe, mais de manière préférentielle dans le voisinage du premier, à cause des fluctuations qui tendent à le favoriser. Or, le second pic de l'activateur (en grands tirets séparés par des points) a des chances de croître à condition qu'il se trouve au-delà de la portée de l'excès de v créé par le premier pic, typiquement au-delà de l'ordre de la longueur de diffusion de v, l_v. De même, les molécules u en provenance du premier pic réagissent après une distance de l'ordre l_u. La longueur d'onde typique de la structure de Turing est de l'ordre de $\sqrt{l_u l_v}$. Les flèches unilatérales schématisent la diffusion.

que l'activateur, et donc la concentration de l'inhibiteur étant plus faible que celle de l'activateur, nous sommes confrontés à une réaction en chaîne permettant ainsi à l'activateur de croître localement sans être gêné par la présence de v(voir figure 9.2). Un pic d'activateur se produit ainsi, pic qui finit par saturer lorsque s'établit un équilibre entre la diffusion de l'activateur et son auto-croissance.

Il est possible que plusieurs pics d'activateur déconnectés les uns des autres se développent simultanément au sein de la substance. Il y a d'ailleurs, en principe, plus de chance de voir un autre pic se développer au voisinage du premier pic ; en effet, l'inhomogénéité au voisinage du premier pic favorise la naissance d'autres pics à proximité. Notons cependant que chaque substance chimique possède un certain temps de vie ; elle diffuse jusqu'à disparaître lorsqu'elle rencontre la substance avec laquelle elle interagit.

Dénotons τ_u et τ_v les durées de vie des deux substances et $l_u \sim \sqrt{D_u \tau_u}$ et $l_v \sim \sqrt{D_v \tau_v}$ leurs longueurs de diffusion[6]. Pour avoir une chance de voir naître un nouveau pic dans le voisinage du précédent, il faut en être éloigné d'une distance de l'ordre de l_u au moins : les molécules u, en excès au voisinage du premier pic, nécessitent une distance de l'ordre l_u pour réagir. En même temps l'inhibiteur, qui diffuse plus vite, se trouve être assez abondant par rapport à l'activateur, en dehors du premier pic : il ne faut donc pas être trop près du premier pic. La longueur d'onde spatiale doit donc faire intervenir un compromis entre les deux longueurs l_u et l_v ; la longueur d'onde caractéristique idoine est en fait donnée par la moyenne géométrique des deux longueurs, $\lambda \sim \sqrt{l_u l_v}$

[6]La longueur de diffusion est par définition la longueur moyenne parcourue par une molécule avant de disparaître suite à une réaction chimique.

(voir ci-après).

9.3 Analyse de stabilité linéaire du système de Turing

L'état stationnaire et homogène du système de Turing noté (u_0,v_0) obéit aux conditions suivantes : $f(u_0, v_0) = 0$ et $g(u_0, v_0) = 0$ (voir équation 9.2). On suppose que cette solution homogène existe, et nous verrons par la suite plusieurs exemples concrets qui le confirment. Afin d'étudier la stabilité linéaire de ce système, recherchons une solution de la forme $u = u_0 + u_1(x, t)$ et $v = v_0 + v_1(x, t)$ et reportons ces expressions dans l'équation d'évolution du système (équation 9.2).

En effectuant un développement de Taylor des fonctions non linéaires f et g autour de l'état homogène (u_0,v_0) à l'ordre un (en u_1 et v_1), nous obtenons deux équations linéaires pour le couple (u_1, v_1). Cherchons alors une solution de la forme[7] $(u_1,v_1) = (A, B)e^{iqx+\omega t}$, où q est le vecteur d'onde et ω dénote le taux d'atténuation (respectivement le taux de croissance) de l'instabilité, caractérisé par $Re(\omega) < 0$ (respectivement, $Re(\omega) > 0$) ; nous obtenons :

$$\begin{aligned} \omega A &= (f_u - D_u q^2)A + f_v B \\ \omega B &= g_u A + (g_v - D_v q^2)B \end{aligned} \tag{9.3}$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned} & f_u = [\partial f/\partial u]_{(u_0,v_0)}, \quad f_v = [\partial f/\partial v]_{(u_0,v_0)}, \\ , \quad & g_u = [\partial g/\partial u]_{(u_0,v_0)}, \quad g_v = [\partial g/\partial v]_{(u_0,v_0)} \end{aligned} \tag{9.4}$$

Le système ci-dessus (9.3) étant linéaire et homogène, la solution est non triviale si et seulement si le déterminant est nul. Cette condition nous fournit la relation de dispersion qui relie le vecteur d'onde q au taux (taux de croissance ou d'atténuation) ω de l'instabilité :

$$\omega^2 - S\omega + P = 0 \tag{9.5}$$

avec

$$S = f_u + g_v - (D_u + D_v)q^2 \ , \quad P = f_u g_v - f_v g_u - (D_u g_v + D_v f_u)q^2 + D_u D_v q^4 \tag{9.6}$$

le facteur S correspond à la somme des deux valeurs propres ω_1 et ω_2 de l'équation de dispersion (équation 9.5) (S est la trace de la matrice de stabilité) et le facteur P est égal au produit des valeurs propres, $P = \omega_1\omega_2$.

[7] Tant que nous nous limitons à l'étude linéaire, les différents modes de Fourier $e^{iqx+\omega t}$ ne se couplent pas, et par conséquent il est légitime de ne considérer qu'un seul mode.

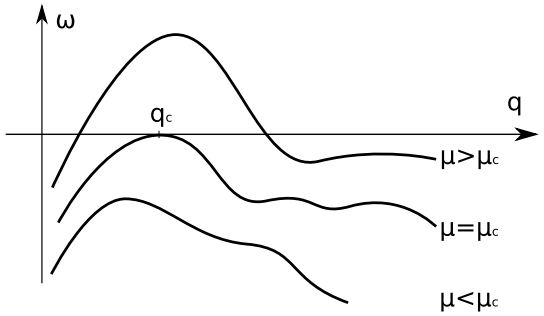


Figure 9.3 – Illustration générale de l'évolution de $\omega(q)$ dans les cas où la solution homogène est stable ($\mu < \mu_c$), neutre (ou critique, $\mu = \mu_c$), ou instable ($\mu > \mu_c$).

9.4 Définition d'une instabilité de Turing

Par définition, une instabilité de Turing est stationnaire et correspond à un vecteur d'onde critique q_c non nul. Nous devons donc déterminer la (ou les) condition(s) requise(s) pour que le taux d'instabilité ω s'annule (la partie réelle s'annule ainsi que la partie imaginaire). Il est clair que si la solution homogène est stable, cela signifie que toute perturbation du système s'atténue (i.e. $\omega < 0$) quelle que soit la valeur du vecteur d'onde q (voir figure 9.3). À la condition critique ($\mu = \mu_c$, où μ est un paramètre de contrôle du système), le taux ω de la perturbation s'annule pour le vecteur d'onde critique q_c, et reste négatif pour toute autre valeur ; ce point est donc nécessairement le maximum de la courbe[8] $\omega(q)$ (voir figure 9.3). Quand le seuil de l'instabilité est franchi ω devient positif non seulement en $q = q_c$ mais également dans toute une bande de vecteur d'onde. C'est donc le maximum de $\omega(q)$ (et éventuellement son voisinage) qui va revêtir un caractère particulier dans notre étude.

Nous pouvons donc résumer notre démarche comme suit.

1. Nous devons déterminer les conditions de l'instabilité de Turing en imposant qu'elle soit caractérisée par une valeur propre ω réelle[9], à la différence de nombreuses instabilités, telle, par exemple, l'instabilité de Hopf, associée à une transition d'une solution initiale stationnaire vers une solution finale oscillante dans le temps (voir chapitre 5).
2. Nous nous intéressons, de plus, à une instabilité produisant un ordre spatial, caractérisé donc par une longueur d'onde critique λ_c finie ; ce qui implique que le vecteur d'onde (inversement proportionnel à la longueur

[8] Nous excluons ici des cas pathologiques où le taux $\omega(q)$ de l'instabilité ne serait pas tangent horizontalement à la condition critique.

[9] Rappelons qu'une instabilité stationnaire est définie par l'évolution du système perturbé initialement dans un état stationnaire (indépendant du temps, ici l'état homogène) vers un autre état stationnaire (un état d'ordre parfait, de type sinusoïdal spatialement).

d'onde, i.e. $q_c = 2\pi/\lambda$) doit être non nul (i.e. $q_c \neq 0$) ; autrement dit, le taux de l'instabilité associée à un nombre d'onde nul, $\omega(q = 0)$), doit être négatif (i.e. $\omega(q = 0) < 0$) pour éviter le développement de cette instabilité et garantir ainsi son amortissement dans le temps. En $q = 0$, nous devons donc nous assurer que les deux valeurs propres de l'équation de dispersion sont négatives ; ce qui est le cas lorsque la somme des valeurs propres est négative (i.e. $S{=}\omega_1 + \omega_2 < 0$) et leur produit positif (i.e. $P = \omega_1\omega_2 > 0$). À partir de l'expression des facteurs S et P et pour $q = 0$ (voir équation 9.6), nous obtenons donc les conditions suivantes :

$$f_u + g_u < 0 \ , \quad f_u g_v - f_v g_u > 0 \ . \tag{9.7}$$

3. Par ailleurs, l'état homogène devient instable lorsque le système, dont le comportement est assujetti aux paramètres de contrôle, réagit en amplifiant la perturbation au lieu de l'amortir. Cette situation se produit lorsque le taux d'instabilité ω négatif devient positif, autrement dit, lorsque ω s'annule. La bifurcation de Turing se réalise ainsi lorsque l'une des deux valeurs propres du système passe par zéro ; ce qui a le plus de chance de se produire pour la valeur propre la moins négative (celle dont la valeur algébrique est la plus élevée), par exemple ω_1, puisque pour l'autre ω_2, la perturbation en $e^{iqx+\omega_2 t}$ s'amortit plus vite. L'annulation du taux d'instabilité se produit en général lorsqu'un paramètre de contrôle, noté par exemple μ, atteint une valeur critique μ_c, ce qui définit un seuil critique $q = q_c$.
4. La condition de criticalité, associée à la bifurcation de Turing, est satisfaite seulement lorsque le taux d'instabilité ω_1 en fonction du vecteur d'onde est tangent en $q = q_c$ (pour $\mu = \mu_c$). En faisant juste un zoom de $\omega_1(q)$ autour de la situation critique, la relation de dispersion a l'allure présentée sur la figure 9.4.

9.4.1 Naissance de l'ordre

Notons qu'au point critique, non seulement la valeur propre du taux de l'instabilité $\omega_1(q_c)$ s'annule, mais s'annule également sa dérivée par rapport au vecteur d'onde (voir figure 9.4). Autrement dit, au point de bifurcation, les deux conditions suivantes sont simultanément satisfaites : (i) $\omega_1(q_c = 0)$ et (ii) $(\partial\omega_1(q)/\partial q)_{q_c} = 0$. La première condition détermine la valeur du vecteur d'onde critique q_c en fonction des paramètres de contrôle, et la seconde impose une relation entre les paramètres de contrôle. Cette relation représente une frontière dans l'espace des paramètres délimitant une région de stabilité des solutions d'une région d'instabilité ; elle définit une ligne, une surface ou un volume, de catastrophe (voir le chapitre consacré à la théorie des catastrophes, chapitre 4).

Toute fonction solution du problème de Turing linéarisé au premier ordre est de la forme $a_q e^{iqx+\omega t}$, où a_q est l'amplitude associée au mode q ; en toute

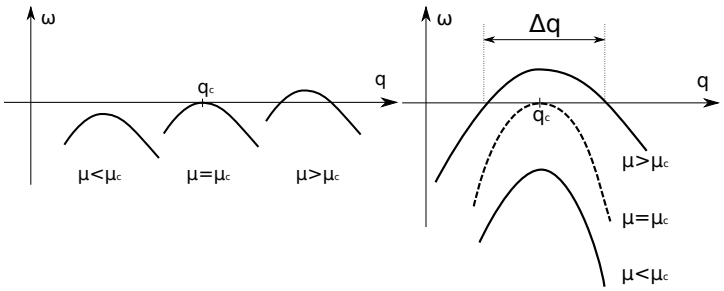


Figure 9.4 – À gauche : relation de dispersion générique montrant les trois situations (μ désigne un paramètre de contrôle) : (i) en dessous du seuil de l'instabilité ($\mu < \mu_c$), (ii) au point critique ($\mu = \mu_c$), et (iii) au-dessus du point critique ($\mu > \mu_c$). À droite : la même relation très près du seuil (ceci correspond à un zoom au voisinage du seuil de l'instabilité) où la courbe de dispersion reste essentiellement centrée autour du même q_c. Il existe une bande de vecteur d'onde Δq correspondant à des modes instables.

généralité, la solution s'écrit ainsi comme une combinaison linéaire des différents modes q, soit :

$$u_1 = \sum_q a_q e^{iqx+\omega t} \ . \tag{9.8}$$

Or, à la bifurcation ($q = q_c$), le taux de l'instabilité est nul ($\omega = 0$), tandis que, pour tout autre valeur du vecteur d'onde (i.e. $q \neq q_c$), le taux des instabilités est négatif ($\omega < 0$) ; ces modes s'amortissent ainsi dans le temps et le seul mode survivant est le mode critique $q = q_c$. Nous pouvons ainsi écrire que la solution stationnaire du système linéaire de Turing est du type :

$$u_1 = Ce^{iq_c x} + c.c. \tag{9.9}$$

où *c.c.* signifie « complexe conjugué » et C est l'amplitude du mode de vecteur d'onde q_c (amplitude dont la valeur est indéterminée dans le régime linéaire). Cette expression porte en elle le signe de la naissance de l'ordre ; car ce mode de Fourier correspond à une solution spatialement périodique au voisinage de la bifurcation.

9.4.2 Condition de Turing pour la naissance de l'ordre

Voyons maintenant les conditions sous lesquelles une instabilité peut se développer dans le système linéaire de Turing. Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la bifurcation de Turing ($q = q_c$) se réalise lorsque les deux conditions suivantes : $\omega_1(q_c) = 0$ et $\partial\omega_1(q_c)/\partial q = 0$ sont satisfaites. Ces deux conditions, alliées à la relation de dispersion du problème de Turing (voir équation 9.5), entraînent deux contraintes sur le facteur P, entrant en jeu dans

la relation de dispersion (équation 9.5) : $P = 0$ et $\partial P/\partial q|_{q=q_c} = 0$. En utilisant explicitement l'expression du facteur P donnée dans l'équation 9.6, nous obtenons, après quelques manipulations algébriques élémentaires, les relations suivantes :

$$(D_v f_u + D_u g_v)^2 - 4D_u D_v (f_u g_v - f_v g_u) = 0 \tag{9.10}$$

et

$$q_c^2 = \frac{D_v f_u + D_u g_v}{2D_u D_v} \; . \tag{9.11}$$

Comme les deux coefficients de diffusion D_u et D_v sont positifs (i.e. $D_u > 0$ et $D_v > 0$), la relation ci-dessus (équation 9.11) nous permet d'écrire la relation entre les deux coefficients de diffusion :

$$D_v f_u + D_u g_v > 0 \; . \tag{9.12}$$

Les conditions portant sur les fonctions de réaction f et g (équations 9.7) et les coefficients de diffusion (équations 9.12) représentent les conditions générales préalables à toute naissance de l'ordre chimique.

Ces expressions peuvent se simplifier davantage, en exploitant le caractère autocatalytique de la réaction de Turing. En effet, puisque **u** désigne l'activateur, la dérivée par rapport **u** du terme lié à la réaction de la substance **u** avec la substance **v** doit être positive (i.e. f_u) ; car ce terme doit contribuer à la croissance de u. Par exemple, en choisissant $f \sim u^2$ dans le système de Turing (équation 9.2), remarquons que l'activateur **u** assure sa propre croissance ($\partial_u/\partial t \sim +u^2$). *A contrario*, l'inhibiteur **v** est tel que $g_v < 0$, car ce terme doit inhiber la croissance de u.

Il est aisé de montrer que les quatre conditions (équations 9.7 et 9.12) ne peuvent être simultanément satisfaites que si

$$f_u > 0, \quad f_v < 0, \quad g_u > 0, \quad g_v < 0$$
$$\text{ou} \tag{9.13}$$
$$f_u > 0, \quad f_v > 0, \quad g_u < 0, \quad g_v < 0 \; . \tag{9.14}$$

Notons bien que $f_u > 0$ va de pair avec $g_v < 0$.

En combinant la première inégalité des conditions issues de l'analyse des termes réactifs (équation 9.7) avec les conditions issues de l'analyse de l'équation de dispersion au point critique (équation 9.12), la naissance d'une instabilité de Turing se produit lorsque :

$$\frac{D_v}{D_u} > r > 1, \quad \text{avec} \quad r \equiv -\frac{g_v}{f_u} > 1 \; . \tag{9.15}$$

Cette formulation explicite formellement le résultat d'Alan Turing : lorsque l'inhibiteur diffuse plus rapidement que l'activateur, plus précisément r fois plus rapidement, avec $r > 1$, l'état homogène devient instable au profit d'un ordre chimique représenté par une oscillation sinusoïdale de longueur d'onde

$\lambda_c = 2\pi/q_c$. Notons bien que ce résultat est très général et ne fait référence à aucune forme précise des fonctions de réaction f et g.

En se plaçant au-dessus de la bifurcation, l'égalité obtenue au point critique pour assurer la naissance de l'ordre chimique (équation 9.10) devient une inégalité :

$$(D_u f_u + D_u g_v)^2 - 4D_u D_v (f_u g_v - f_v g_u) > 0 \,. \tag{9.16}$$

Dans ce cas, et comme nous pouvons le visualiser sur la figure 9.4, le taux d'instabilité ω_1 s'annule en deux valeurs de vecteurs d'onde q notée q_-, and q_+ données par

$$q_\pm^2 = \frac{(D_v f_u + D_u g_v) \pm \sqrt{(D_v f_u + D_u g_v)^2 - 4D_u D_v (f_u g_v - f_u g_u)}}{2D_u D_v} \,. \tag{9.17}$$

La bande de vecteurs d'onde $\Delta q \equiv q_+ - q_-$ correspond aux modes actifs (ou instables, voir figure 9.4) qui croissent exponentiellement avec le temps (voir équation 9.8).

Au voisinage et un peu au-dessus du point critique $q = q_c$, la tangente du taux d'instabilité en fonction du vecteur d'onde est nulle au point critique (i.e. $\partial\omega_1/\partial q|_{q_c,\mu_c} = 0$), nous pouvons écrire (par développement limité au voisinage du seuil) :

$$\omega_1(q) = \alpha(\mu - \mu_c) - \beta(q - q_c)^2 \tag{9.18}$$

où

$$\alpha = \frac{\partial \omega_1}{\partial \mu}|_{q_c,\mu_c}, \quad \beta = \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial q^2}|_{q_c,\mu_c} \tag{9.19}$$

où $\mu - \mu_c$ mesure la distance au seuil de bifurcation.

9.5 Introduction de quelques modèles donnant lieu aux structures de Turing

De nombreux modèles sont susceptibles de développer une instabilité de Turing ; par exemple, en ajoutant un terme de diffusion dans le modèle de réaction chimique, le Bruxellateur, étudié précédemment dans le chapitre consacré à l'instabilité de Hopf (voir section 5.3.4 du chapitre 5), ce modèle bascule dans la classe des modèles de réaction-diffusion décrits par le système de Turing (voir équation 9.2) et devient ainsi susceptible de développer une instabilité de Turing.

Nous allons aborder maintenant deux autres modèles de réaction chimique, le modèle dit de Schnackenberg proposé en 1979 (référence [69]) et le modèle de Lengyel-Epstein proposé en 1991 (référence [44]) susceptibles de développer des instabilités de Turing.

9.5.1 Le modèle de Schnackenberg

Le modèle de réaction chimique de Schnackenberg est une simplification du modèle Bruxellateur (voir section 5.3.4), dont les réactions chimiques suivent les quatre étapes suivantes :

$$A \to X \quad \text{constante} \quad k_1 \tag{9.20}$$
$$X \to Produits \quad \text{constante} \quad k_2 \tag{9.21}$$
$$2X + Y \to 3X \quad \text{constante} \quad k_3 \tag{9.22}$$
$$B \to Y \quad \text{constante} \quad k_4 \tag{9.23}$$

Comparée au modèle Bruxellateur (équation 5.52), cette réaction diffère par la dernière étape où la réaction $B+X \to Y$ se substitue par $B \to Y$. Désignons par k_i $(i = 1, 4)$ les quatre constantes de réactions. En suivant la même démarche adoptée pour l'étude du Bruxellateur (voir section 5.3.4), nous obtenons les équations d'évolution associées aux deux espèces chimiques X et Y :

$$\dot{X} = k_1 A - k_2 X - k_4 BX + k_3 X^2 Y + D_X \nabla^2 X \tag{9.24}$$
$$\dot{Y} = k_4 B - k_3 X^2 Y + D_Y \nabla^2 Y \tag{9.25}$$

où D_X and D_Y sont les constantes de diffusion des substances X et Y. Après adimensionnement des équations[10], nous pouvons écrire le système d'évolution[11] des concentrations à l'aide des fonctions de réaction chimique ($f(u, v)$ et $g(u, v)$) sous la forme du système d'équations générales de Turing (équation 9.2) :

$$\begin{aligned} \partial_t u &= f(u, v) + \partial^2_{x^2} u \\ \partial_t v &= g(u, v) + d\partial^2_{x^2} v \end{aligned} \tag{9.29}$$

avec les fonctions de réaction et les coefficients de diffusion définis comme :

$$f(u, v) = \gamma(a - u + u^2 v), \quad g(u, v) = \gamma(b - u^2 v), \quad D_u = 1, \quad D_v = d\,. \tag{9.30}$$

Ces éléments nous permettent d'établir le critère de déclenchement d'une instabilité de Turing à partir des conditions générales de Turing (équations 9.14),

[10] On définit les nouvelles variables comme suit

$$t^* = \frac{D_X t}{L^2}, \quad \vec{r}^* = \frac{\vec{r}}{L}, \quad d = \frac{D_Y}{D_X}, \quad \gamma = \frac{L^2 K_2}{D_X}, \tag{9.26}$$
$$a = \frac{K_1}{K_2}(\frac{K_3}{K_2})^{1/2} A, \quad b = \frac{K_4}{K_2}(\frac{K_3}{K_2})^{1/2} B, \tag{9.27}$$
$$u = (\frac{K_3}{K_2})^{1/2} X, \quad v = (\frac{K_3}{K_2})^{1/2} Y\,, \tag{9.28}$$

où L est une longueur typique du motif chimique périodique de Turing.

[11] On conserve les mêmes notations pour les variables t et x.

en déterminant la valeur minimale du coefficient de diffusion[12] D_v de l'inhibiteur **v**, soit : $D_v = d > 3+2\sqrt{2} \simeq 6$. Ainsi, pour le modèle de Schnackenberg, il est nécessaire que l'inhibiteur diffuse au moins 6 fois plus que l'activateur pour atteindre la condition d'instabilité de Turing.

9.5.2 Le modèle de Lengyel-Epstein

Le modèle de Lengyel-Epstein (référence [44]) a été proposé en 1991 pour caractériser les résultats d'une expérimentation menée en 1990 et montrant pour la première fois des structures de Turing, une quarantaine d'années donc, après les travaux réalisés par Alan Turing. Fondé sur des phénomènes couplés de réaction-diffusion, le modèle de Lengyel-Epstein propose le système d'équations suivant pour décrire l'évolution des concentrations :

$$\begin{aligned} u_t &= a - u - 4\frac{uv}{1+u^2} + D_u\nabla^2 u \ , \\ v_t &= b(u - \frac{uv}{1+u^2}) + D_v\nabla^2 u \ , \end{aligned} \tag{9.31}$$

où a et b sont des paramètres de contrôle.

Nous reconnaissons ainsi, dans le système ci-dessus (équation 9.31), l'expression générale d'un système de Turing (équation 9.2) avec les fonctions de réaction suivantes :

$$\begin{aligned} f(u,v) &= a - u - 4\frac{uv}{1+u^2} \ , \\ g(u,v) &= b(u - \frac{uv}{1+u^2}) \ , \end{aligned} \tag{9.32}$$

ce qui nous permet d'une part, d'obtenir l'expression de l'état stationnaire et homogène (u_0, v_0) du système de Turing, obtenu lorsque les fonctions de réaction en ces points s'annulent (i.e. $f(u_0, v_0) = 0$ et $g(u_0, v_0) = 0$), soit :

$$u_0 = \frac{a}{5}, \quad v_0 = 1 + \frac{a^2}{25} \tag{9.33}$$

[12]La solution stationnaire et homogène de 9.29 obéit à $f(u,v) = g(u,v) = 0$, ce qui conduit à $u_0 = a + b$ et $v_0 = b/(a+b)^2$. Les dérivées de f et g en ce point sont données par $f_u = \gamma(b-a)/(b+a)$ et $g_u = -2\gamma b/(b+a)$. La première condition 9.7 impose $f_u + g_v = b - a - (a+b)^3 < 0$, tandis que la seconde est automatiquement satisfaite en vertu du fait que $f_u g_v - f_v g_u = \gamma^2(a+b)^2 > 0$. La condition de Turing 9.15 impose $d(b-a) - (a+b)^3 > 0$. En additionnant le membre de gauche avec celui de l'inégalité présentée ci-dessus $(-b + a + (a+b)^3 > 0)$ on obtient $(d-1)(b-a) > 0$. Compte tenu de la relation $b - a > 0$ (provenant de $f_u > 0$; résultant du fait que u est activateur ; voir 9.14), on obtient $d > 1$: l'inhibiteur doit diffuser plus vite que l'activateur pour assurer la condition d'instabilité. Une telle condition est nécessaire mais pas suffisante. La bifurcation requiert en outre (voir 9.16) $[d(b-a) - (a+b)^3]^2 > 4d(a+b)^4$ (obtenu de 9.16 après quelques manipulations algébriques élémentaires). Cette condition se réécrit, après avoir pris la racine carrée des deux membres de part et d'autre du signe inégal, $\alpha\xi^2 - 2\xi\beta^2 - \beta^3 > 0$, où $\alpha = b - a; \beta = a + b; \xi = \sqrt{d}$. Compte tenu des relations établies ci-dessus, on peut montrer que la plus petite valeur de d nécessaire à l'instabilité de Turing est donnée par $d \equiv D_v = 3 + 2\sqrt{2} \simeq 6$.

et d'autre part, d'évaluer les dérivées des fonctions de réaction par rapport aux concentrations u et v des réactifs, soit :

$$f_u = \frac{3a^2 - 125}{25 + a^2}, \quad f_v = -\frac{20a}{25 + a^2} ,$$
$$g_u = \frac{2ba^2}{25 + a^2}, \quad g_v = -\frac{5ba}{25 + a^2} , \tag{9.34}$$

pour notamment vérifier que celles-ci puissent répondre aux conditions générales de Turing (équation 9.14). En outre, l'analyse des conditions de développement de l'instabilité de Turing au voisinage du point critique nous avait permis d'établir le critère de déclenchement de l'instabilité sous forme d'une inégalité constituée d'une combinaison des dérivées des fonctions de réaction et des coefficients de diffusion (équation 9.16) ; dans le cadre spécifique du modèle de Lengyel-Epstein, cette inégalité est satisfaite lorsque le paramètre de contrôle b est inférieur à une certaine valeur critique b_c telle que :

$$b < b_c \equiv \frac{D_v}{5D_u a}(125 + 13a^2 - 4a\sqrt{10(25 + a^2)}) . \tag{9.35}$$

Il est en effet usuel d'agir sur les paramètres de contrôle plutôt que sur les constantes de diffusion, mais cela revient fondamentalement au même ; en effet, comme la valeur critique du paramètre b est proportionnelle au rapport des coefficients de diffusion (équation 9.35), fixer la valeur de b_c revient à contraindre D_v/D_u.

À partir de son expression générale (équation 9.5), la relation de dispersion[13] associée au modèle de Lengyel-Epstein est donnée par :

$$\omega = (b - b_c) \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial b}\right]_{b=b_c, q=q_c} + \frac{(q - q_c)^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial q^2}\right]_{b=b_c, q=q_c} . \tag{9.36}$$

Notons que l'expression obtenue ci-dessus a la même forme que l'équation 9.19 ; c'est un résultat général qui ne dépend pas du détail du système étudié.

9.6 Quelles conditions pour obtenir un inhibiteur qui diffuse suffisamment rapidement par rapport à l'activateur ?

Il est important de signaler que les réactifs mis en jeu dans les systèmes de Turing sont des molécules de taille comparable. Il s'ensuit que leurs coefficients de diffusion sont similaires et ne diffèrent au plus que d'un facteur 2 ou 3, et très rarement, voire jamais d'un facteur 6, ou plus, comme le requiert notamment le modèle du Bruxellateur, par exemple. Ce fut précisément l'obstacle majeur

[13] Développée à l'ordre le plus bas au voisinage du point de bifurcation.

qui compromit toute observation expérimentale de stuctures de Turing en laboratoire jusqu'en 1990 (référence [15]) alors que la prédiction d'Alan Turing fut pourtant proposée dès 1952 (référence [77]).

Avant d'exposer les raisons à l'origine du premier succès expérimental de l'observation de l'instabilité de Turing, rappelons quelques réalités de la dynamique chimique.

Les réactions autocatalytiques, comme toute réaction chimique, impliquent en fait de nombreuses étapes successives, et non pas seulement quelques deux ou trois étapes, comme peuvent le laisser supposer les modèles développés ci-dessus. Mais, fort heureusement, parmi l'ensemble des substances chimiques mises en jeu, seules quelques-unes sont pertinentes du fait de leur dynamique lente. Rappelons, en effet, que les variables lentes dominent la dynamique du système, tandis que les variables rapides leur sont adiabatiquement asservies (voir le chapitre 2). Ainsi, en analysant un modèle fondé sur une réaction à deux ou trois variables, il faut garder présent à l'esprit qu'il s'agit du problème effectif résultant de l'élimination adiabatique des variables rapides au profit des variables lentes[14].

Un exemple célèbre de réaction chimique ayant donné lieu pour la première fois à l'observation d'une instabilité de Turing est la réaction Chlorite-Iodure-Acide Malonique, plus connue par son abbréviation CIMA[15] (référence [15]). Une des principales difficultés de la réaction émanait de la présence d'un phénomène de convection naturelle, qui se superposait à la diffusion ; ce qui perturbait fortement l'analyse. En particulier, les courants de convection ont tendance à homogénéiser le mélange et peuvent ainsi masquer les motifs de Turing. Pour éviter un tel effet, la réaction a été conçue (référence [15]) dans un réacteur contenant un gel (saturé en eau) ; le gel bloque de manière efficace les mouvements de convection, et les réactifs ne sont finalement transportés que par diffusion. Pour distinguer les régions riches en activateur des régions riches

[14] Concrètement, cette élimination adiabatique s'obtient par l'annulation de la dérivée temporelle de la concentration des variables rapides. Ainsi, supposons que le problème soit à trois variable, soit deux variables lentes u, v et une variable rapide w. L'annulation de la dérivée temporelle de la variable rapide (i.e. $\partial w/\partial t = 0$) permet d'exprimer w en fonction des deux autres variables u et v. En reportant le résultat dans les équations des variables lentes, nous obtenons un système couplé faisant intervenir seulement les variables u et v. Les coefficients du système en u et v contiennent ainsi une information « cachée » sur w.

[15] La réaction CIMA dérive de la réaction chlorite-iodure. Cette réaction est souvent décomposée en deux grandes étapes données par les équations suivantes :

$$ClO_2^- + 4I^- + 4H^+ = 2I_2 + Cl^- + 2H_2O\ ,$$
$$5ClO_2^- + 2I_2 + 2H_2O = 5Cl^- + 4IO_3^- + 4H^+\ .$$

Globalement, cette réaction correspond à l'oxydation de l'iodure en iodate par le chlorite :

$$3ClO_2^- + 2I^- = 2IO_3^- + 3CL^-\ . \tag{9.37}$$

Des études cinétiques (référence [41, 50]) ont montré que la première étape est autocatalytique en I_2 (espèce intermédiaire de la réaction) et inhibée par I^- (réactif de départ). Des mesures expérimentales diverses ont conduit finalement à écrire les équations de réaction en termes de deux variables uniquement (pour plus de détail, voir la référence [44]).

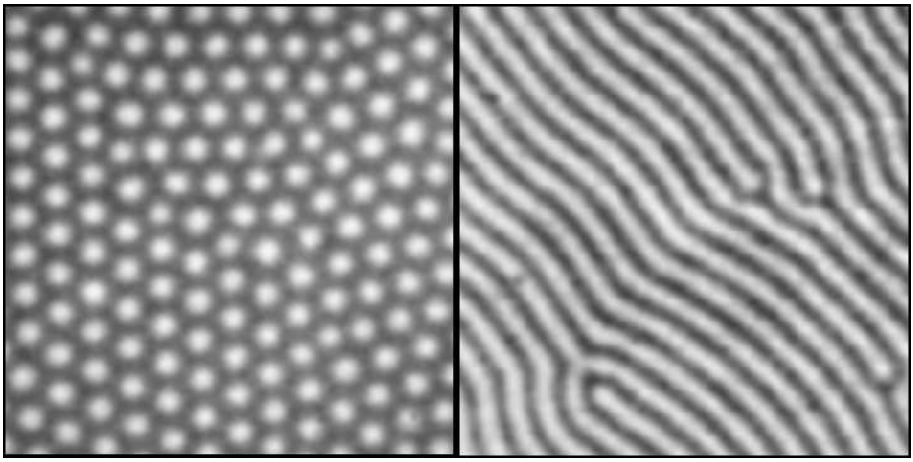


Figure 9.5 – Un motif chimique typique observé expérimentalement [15]. On observe les motifs en bande (à droite) et en nids d'abeilles, ou hexagones (à gauche). Les structures bi-dimensionnelles seront discutées au chapitre 13. Les structures en bandes ne sont pas parfaitement périodiques : elle présentent quelques défauts sur cette figure. Avec l'aimable autorisation de Patrick De Kepper.

en inhibiteur, il est nécessaire d'introduire un indicateur coloré, le produit de contraste, susceptible de se fixer sur une des deux substances. L'indicateur choisi, une molécule de grande taille et de masse non négligeable, forme un certain complexe chimique en réagissant avec l'activateur ; le mouvement de diffusion de l'activateur, piégé dans le complexe, est ainsi freiné. Ceci correspond à une réduction efficace de la diffusion de l'activateur. L'inhibiteur est ainsi suffisamment plus mobile que l'activateur, et la condition de Turing est satisfaite. L'ajout de cet indicateur avec de telles propriétés a été l'ingrédient essentiel qui a conduit à la mise en évidence des structures de Turing pour la première fois par une équipe française située à Pessac, dans la région de Bordeaux (référence [15], voir figure 9.5). Cette première observation fut suivie de près par une découverte du même type par une équipe américaine (référence [60]).

9.7 Au-delà de l'instabilité linéaire de Turing

Au cours de ce chapitre, nous avons donc vu que, sous certaines conditions générales, une solution homogène (i.e. un mélange homogène des deux espèces chimiques) peut devenir instable pour évoluer spontanément vers un état structuré (ou ordre spontané) associé à une longueur d'onde caractéristique. L'analyse de stabilité linéaire est la première étape dans toute étude de stabilité.

Mais, une fois les conditions d'instabilité déterminées à l'aide d'une étude linéaire du système, il est essentiel de traiter l'évolution non linéaire. En effet, l'étude linéaire nous indique que la perturbation initialement infinitésimale[16] croît exponentiellement dans le temps. Ceci signifie que la perturbation finit par acquérir une amplitude importante au cours du temps, de telle sorte que l'hypothèse linéaire s'invalide ; les termes non linéaires doivent donc être pris en considération.

Deux types d'étude de système non linéaire, éventuellement complémentaires, peuvent être envisagés : (i) le premier type d'étude (déjà rencontré précédemment dans cet ouvrage, voir chapitre 6) consiste à procéder à une analyse du système dans un régime faiblement non linéaire. Cette démarche consiste à effectuer un développement limité au voisinage du seuil de l'instabilité ; (ii) le second type d'étude consiste à intégrer directement le système complet des équations aux dérivées partielles, par exemple les systèmes associés au modèle de Schanckenberg (équation 9.29) et au modèle de Lengyel-Epstein (équation 9.31), ou bien d'autres variantes alternatives. Comme nous ne disposons pas, en général, d'une solution analytique pour les équations non linéaires, nous avons recours à des méthodes numériques. L'étude analytique valable au voisinage du seuil de l'instabilité sera présentée au prochain chapitre.

9.8 Diverses formes de l'instabilité de Turing rencontrées dans la nature

Un aspect fascinant du modèle de Turing est sa capacité à engendrer diverses formes semblables à celles qui sont observées dans la nature, recouvrant des structures relativement simples, comme les structures en bandes ou celles en nids d'abeilles (voir figure 9.5), à des structures plus complexes des plus fascinantes, tels (i) les motifs des coquillages (voir les coquillages de la référence [11] ; ces motifs sont obtenus en combinant des équations de type Turing avec d'autres types d'équations chimiques) ; (ii) les motifs de poissons tropicaux (voir référence [4]) ; (iii) les motifs de pelage de plusieurs animaux, comme le léopard, ou le jaguar (voir figure 9.6) etc. Ces différentes structures sont obtenues à partir d'un modèle de Turing en modifiant, dans les cas les plus simples, les paramètres de contrôle ; il est possible également d'adopter pour le substrat des géométries plus élaborées, comme par exemple, une géométrie courbe. Le modèle de Turing qui engendre les structures associées aux motifs de coquillage [11] ou au pelage de certains animaux (voir figure 9.6) a été résolu numériquement par des méthodes devenues maintenant classiques dans les cours élémentaires de simulation numérique.

Au voisinage du seuil de l'instabilité, toutes les structures ordonnées, les bandes, les nids d'abeilles, les carrés, (...) sont possibles. En s'éloignant du seuil

[16] L'hypothèse d'amplitude faible de la perturbation est nécessaire pour rendre légitime la linéarisation des équations.

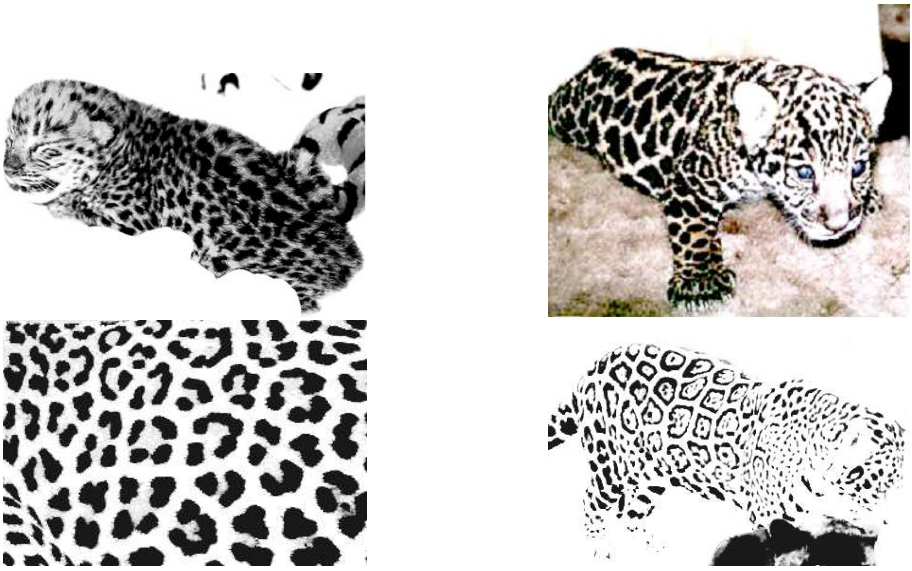


Figure 9.6 – Des motifs chimiques de léopard et de jaguar reproduits par des variantes du modèle de Turing. Les figures du haut sont réelles et celles du bas obtenues par simulation numérique. Le pelage du léopard (en haut à gauche, image réelle) et celui du jaguar (en haut a droite, image réelle) présentent des motifs en spot à l'âge jeune (du même type que les formes en nids d'abeilles). Un modèle de type Turing reproduit les motifs (différents) à l'âge adulte ; en rosette du lépoard (en bas à gauche), et en polygones pour le jaguar (en bas à droite). Voir référence [46]. ©American Physical Society.

de l'instabilité, les structures peuvent devenir plus complexes ; l'ordre parfait laisse la place à une cohabitation entre ordre et désordre (ou défauts). Un jeu de paramètres et de conditions initiales adéquates ont permis de reproduire des images comme celles portées sur la figure 9.6 (voir référence [46]). De manière générale, à partir d'un système de Turing, des jeux de paramètres plus ou moins complexes sont à même d'engendrer les différentes structures reproduites dans la figures 9.6, et bien au-delà, comme les motifs sur des coquillages, ou des poissons tropicaux. Pour plus de détails, nous suggérons de poursuivre la lecture par des ouvrages devenus des références incontournables du domaine (références [56, 51, 52]).

9.9 Quel est l'impact des structures de Turing sur la morphogenèse dans la nature ?

L'observation des multiples formes de la nature induit naturellement une question fondamentale quant à leur origine : les formes de la nature seraient-elles prescrites dans la génétique, ou bien existe-t-il des mécanismes relativement simples pour expliquer la diversité des formes ? Une question d'importance capitale en biologie est celle relevant de l'embryogenèse, et plus particulièrement de la différenciation cellulaire. Une cellule, par exemple humaine, issue d'une fécondation donne lieu, par division cellulaire, à deux cellules identiques, qui se divisent à leur tour comme la cellule mère, et ainsi de suite. Comment cette duplication finit-t-elle par produire, au bout d'une certaine taille de l'agrégat cellulaire, une morphogenèse complexe avec une diversité d'organes (foie, poumons, cœur...) assurant des fonctions bien distinctes ? Pour ce type de morphogenèse avec différenciation cellulaire, Alan Turing a alors imaginé le scénario suivant : l'agrégat cellulaire, formé initialement de cellules identiques, produit des substances chimiques, les « morphogènes », qui, par un jeu de réaction et diffusion à l'image des réactions auto-catalytiques, engendre une alternance de composition chimique à la surface de l'agrégat (ordre chimique). Comme, d'un point à l'autre de l'agrégat, les cellules ne disposent pas du même environnement chimique, elles pourraient se comporter ainsi différemment : par exemple, certaines cellules pourraient activer un gène et d'autres, non ; et, de cette façon, les cellules pourraient être à même de se différencier. Notons que, en dépit de l'apparente simplicité du modèle de Turing, des structures chimiques complexes peuvent émerger[17].

Les théories actuelles de la biologie du développement[18] stipulent que la quantité d'informations nécessaire à la description d'un être vivant est trop importante pour qu'elle soit toute encodée dans le génome. Cela favorise l'idée selon laquelle une partie importante de l'information serait relayée par des processus chimiques de type Turing. Le génome jouerait alors le rôle d'un « expérimentateur très doué » capable de réparer, en fonction de sa structure spécifique, les déficiences ou les excès de concentration qui peuvent être cruciales au développement ; ce qui distinguerait au final les individus les uns des autres. Au-delà de cette tâche – vitale – assurée par le génome, ce serait des processus chimiques de base qui se chargeraient en grande partie de la morphogenèse. Bien entendu, il y aurait une intime interaction entre les morphogènes, et le génome, puisque, comme dit plus haut, la détection d'une substance en quantité suffisante par une cellule peut activer des gènes et influer ainsi la dynamique chimique responsable de l'émergence de formes...

Il reste cependant beaucoup à faire sur le plan expérimental avant de pouvoir affirmer qu'un tel scénario est effectivement à l'œuvre dans la nature. La notion

[17] À ce propos, nous invitons le lecteur à consulter la partie du texte de René Thom figurant dans le paragraphe 4.10 du chapitre 4.

[18] La biologie du développement s'intéresse à l'évolution de l'organisme dès la conception et notamment à la formation d'un embryon.

de morphogène commence, cependant, à faire son chemin ; et une équipe de scientifiques en 2001 a même annoncé l'identification pour la première fois de tels morphogènes au sein d'un poisson tropical, le poisson zèbre (référence [18]) ; il n'est cependant pas encore bien clair comment les cellules interprètent les gradients de morphogènes afin d'activer des gènes.

Pour conclure ce paragraphe, retenons les points suivants : (i) les modèles de Turing, quoique simples, sont capables de produire une grande variété de motifs, dont certains ressemblent à ceux observés dans certains organismes ; (ii) même si la ressemblance entre les motifs observés par exemple sur la peau de certains animaux et les solutions issues des modèles de réaction-diffusion est flagrante, une simple comparaison ne prouve pas que de tels mécanismes sont à l'œuvre : deux processus différents peuvent aboutir au même résultat, (iii) l'hypothèse de l'existence de morphogène semble se confirmer, mais, à ce jour, le scénario fondé sur des processus de réaction-diffusion pour expliquer la naissance des motifs reste un scénario non prouvé. Dans cette ère de post-génomique et de la protéomique[19], les prochaines décennies devraient être riches de découvertes fondées notamment sur la compréhension de la nature des liens entre la présence de certaines protéines, leurs interactions mutuelles, leur interaction avec des cellules et tissus. Ces connaissances permettront certainement de mieux comprendre la morphogenèse dans le monde vivant.

9.10 Convection de Rayleigh-Bénard

La convection de Rayleigh-Bénard, des noms du physicien anglais le baron John William Strutt Rayleigh (1842-1919) et du physicien français Henri Bénard (1874-1939), est un phénomène qui a sans doute été le plus étudié dans le contexte de la naissance de l'ordre. Les raisons sont multiples : (i) tout d'abord, l'expérience est relativement simple à réaliser ; (ii) elle est peu coûteuse ; et (iii) les équations de l'hydrodynamique et de conduction thermique nécessaires à son étude sont bien établies[20], ce qui permet une étude quantitative du phénomène. La convection dite de Rayleigh-Bénard se manifeste dans tous les environnements naturels qui peuvent être modélisés par une couche de fluide placée entre deux parois rigides portées à des températures différentes, le tout étant soumis à un champ de gravité parallèle au gradient thermique. La

[19] Après l'ère du décodage du génome, nous ouvrons l'ère de la post-génomique, et de la protéomique. La protéomique est une science récente qui étudie des ensembles de protéines, leur rôle, leur structure, leur localisation, leurs interactions... Ainsi, la présence, ou l'absence, d'une protéine peut être signe d'anomalie de type séquentiel au sein du génome et révéler ainsi des maladies latentes, par exemple. à l'heure actuelle, bien que l'ensemble des protéines encodées par des gènes soit loin d'avoir été analysé, la protéomique apparaît comme une voie de recherche prometteuse.

[20] La loi de la conduction de la chaleur, la loi de Fourier, a été établie par un mathématicien-physicien français, Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Les équations de la dynamique des fluides (hydrodynamique), dites équations Navier-Stokes, ont été établies entre la fin du XVIIIe et le début du XIXe siècle par le physicien-ingénieur français Claude-Louis Navier (1785-1836), et par le mathématicien irlandais George Gabriel Stokes (1819-1903).

comparaison qualitative et quantitative entre théorie et expérience a souvent été très satisfaisante. Comme il s'agit d'un exemple central dans le monde de la morphogenèse, il nous a semblé important de présenter les grandes étapes du modèle et les résultats essentiels.

De façon générale, la convection est un processus majeur de transport de l'énergie, induit par la présence d'un gradient thermique. Elle peut se déclencher à chaque fois qu'un fluide est soumis à un gradient thermique parallèlement à la force de gravité. C'est un phénomène majeur omniprésent dans la nature et dans la vie courante. Nous l'observons à chaque fois que nous mettons à chauffer une casserole d'eau ; en effet dans une première étape, (i) l'eau chauffe mais reste immobile. L'eau se contente de conduire la chaleur ; c'est l'état, dit de conduction, mais dans une seconde étape ; (ii) les différentes parties du fluide se mettent en mouvement : c'est l'état de convection. En observant l'eau de manière attentive, par exemple en suivant la trajectoire d'une petite poussière, nous pouvons même remarquer que les parties du fluide décrivent des mouvements circulaires. Étudiée de manière précise en laboratoire, c'est-à-dire en contrôlant les conditions de température, de pression, etc, la convection se manifeste comme un ordre spontané.

À une tout autre échelle, la Terre expérimente en son sein un phénomène de convection dû à l'accroissement de la température avec la profondeur. à l'échelle géologique, ce phénomène de convection a une importance cruciale puisqu'il conditionne le renouvellement de la partie superficielle de la Terre, la lithosphère d'une centaine de kilomètres d'épaisseur[21].

Les mouvements de convection sont également abondants dans l'atmosphère, à cause des gradients entre le sol à la base de l'atmosphère, chauffé par le soleil, et la haute amosphère plus fraîche. Ce gradient de température peut engendrer des phénomènes de convection. Lorsque l'air en ascendance contient suffisamment de vapeur d'eau, celle-ci, en se condensant, libère de la chaleur (appelée chaleur latente), ce qui augmente le contraste thermique et donc la poussée convective. Si l'énergie impliquée dans cette conversion est assez importante, elle peut se traduire par de forts coups de vent, des tornades, de la grêle, et de la foudre.

Rectifions enfin une erreur courante dans certains traités portant sur la convection : il est souvent dit que la structure composée d'éléments hexagonaux « nids d'abeille » (voir figure 1.5) se réfère aux cellules de Rayleigh-Bénard ; il n'en est rien. Il s'agit ici d'un autre phénomène appelé convection de Bénard-Marangoni[22].

[21] Selon le modèle de la tectonique des plaques, appelé également dérive des continents, la lithosphère est composée de plaques rigides se déplaçant au cours du temps, à la surface de la Terre ; ce mouvement en surface résulterait de la présence de convection dans les parties internes de la Terre. Ainsi, plus de 90 % de l'énergie interne de la Terre serait évacuée par la convection à grands rouleaux, moteur de la tectonique des plaques. Le premier modèle de la tectonique des plaques fut proposé par l'astronome et le climatologue allemand Alfred Wegener (1880-1930) à partir de considérations cartographiques, structurales, paléontologiques et paléoclimatiques.

[22] Ce type de convection est due à la tension de surface. En effet, en chauffant la base

L'étude de la convection de Rayleigh-Bénard (RB) en laboratoire est réalisée en analysant les mouvements au sein d'une couche de fluide placée entre deux plaques rigides, le tout étant soumis à la gravité terrestre (voir figure 9.7). La plaque inférieure est chauffée et la différence de température, avec la plaque supérieure maintenue à la température T, est positive (i.e. $\Delta T > 0$). En désignant par d l'espacement entre les deux plaques, le gradient de température $\partial T/\partial z$ est donné (en l'absence de convection, i.e. dans le régime de conduction thermique pur) par $\Delta T/d$. Si celui-ci est assez faible, le fluide reste au repos, tandis que la chaleur diffuse du bas vers le haut : c'est le régime purement diffusif (ou conductif). Il existe cependant une expansion thermique des couches basses plus chaudes ; cette expansion thermique, ou dilatation thermique, décrit l'augmentation de volume pour une même quantité de matière (associée donc à une diminution de la densité du fluide), engendrée par l'augmentation de température. Le fluide plus chaud donc moins dense a tendance à monter par un effet dû à la poussée d'Archimède [23] F_A (une force) telle que :

$$F_A = V\Delta\rho g \tag{9.38}$$

où $\Delta\rho$ est la différence de densité du fluide liée à l'expansion thermique et g l'accélération de la gravité, et V le volume d'un petit élément du fluide.

Or si le gradient de température $\Delta T/d$ est trop faible, cela ne suffit pas à induire une ascension du fluide chaud. En effet, les effets de viscosité du fluide s'opposent par friction à tout mouvement du fluide. En augmentant la température et donc le gradient de température, la poussée d'Archimède finit par

d'un fluide en couche mince alors que la surface supérieure est libre de se déformer (dans le cas du modèle de convection de Rayleigh-Bénard, le fluide est placé entre deux plaques rigides), la tension de surface se modifie localement du fait de la présence d'inhomogénéités de température. Le gradient de tension de surface suscite une force motrice qui doit être compensée par des écoulements dans le fluide sous-jacent, donnant lieu *in fine* à des mouvement réguliers visibles à la surface du liquide formant des cellules hexagonales : c'est la convection de Bénard-Marangoni, du nom du même physicien français Henri Bénard et du physicien italien Carlo Marangoni (1840-1925).

[23] La poussée d'Archimède, du nom du savant grec Archimède de Syracuse (287 av. J.-C.-212 av. J.-C) qui, le premier, étudia ce phénomène dans son Traité des corps flottants, est la force particulière que subit un corps plongé dans un fluide lorsque ce système est dans un champ de gravitation. Cette force provient de l'augmentation de la pression du fluide avec la profondeur. Soit un corps rigide de densité ρ_1 et volume V ; sa masse m_1 est donc telle que : $m_1 = \rho_1 V$ et son poids est donné par : $\overrightarrow{p}_1 = \rho_1 V\overrightarrow{g}$. En immergeant ce corps au sein d'un fluide de densité ρ_2, le corps immergé « prend la place » d'un élément fluide de même volume mais d'un poids différent $\overrightarrow{p}_2 = \rho_2 V\overrightarrow{g}$; comme cet élément fluide était en équilibre, cela signifiait que le fluide environnant exerçait une force égale et opposée à ce poids. Ainsi, le corps immergé est soumis à la force résultante, dite force d'Archimède, soit : $\overrightarrow{p}_1 - \overrightarrow{p}_2 = (\rho_1 - \rho_2)V\overrightarrow{g}$. Ainsi, si le corps est plus dense que le fluide (i.e. $\rho_1 > \rho_2$), le corps subit une poussée vers le bas ; c'est le cas d'une boule de pétanque dans une baignoire ; au contraire, si le corps est moins dense (i.e. $\rho_1 < \rho_2$), comme une balle de tennis par exemple, il remonte. Ces deux exemples illustrent la notion de poussée d'Archimède. Une définition courante de la force d'Archimède consiste à dire qu'elle est proportionnelle à la masse « déplacée » $\Delta m = V(\rho_1 - \rho_2) = V\Delta\rho$, avec $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$. Pour un fluide chauffé, la poussée d'Archimède est donc proportionnelle à la différence de masse entre le volume sphérique du fluide chauffé, $\rho_1 V$, et celle du même volume avant chauffage, soit $\rho_2 V$, soit $F_A = V\Delta\rho g$.

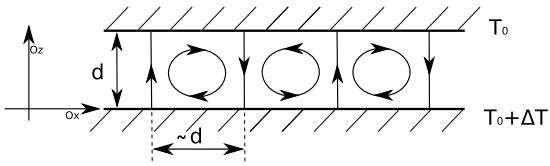


Figure 9.7 – Vue schématique de la cellule de Rayleigh-Bénard.

vaincre la viscosité : le fluide se met alors en mouvement : c'est le régime convectif. Nous allons voir que la convection correspond à une bifurcation associée à la perte de stabilité du régime diffusif.

9.10.1 Argument heuristique pour la détermination du seuil de la convection de Rayleigh-Bénard

Dans cette section, nous adoptons une démarche résolument heuristique[24] pour intuiter les contraintes physiques nécessaires au déclenchement de l'instabilité convective de Rayleigh-Bénard (voir figure 9.7 décrivant le dispositif expérimental et les notations). Bien qu'elles requièrent une intuition physique aiguisée, remarquons que de telles démarches sont essentielles au physicien dans la mesure où elles permettent à l'aide de calculs simplifiés d'établir des résultats, certes simplifiés mais riches d'enseignement sur le plan de la compréhension physique ce qui permet ainsi d'établir un cadre théorique pour les calculs, plus précis mais aussi souvent beaucoup plus complexes sur un plan mathématique. Notons que bien qu'identifiée au début du XX^e siècle, la convection de Rayleigh-Bénard est encore très souvent étudiée expérimentalement pour observer le déclenchement de la convection et le développement de la turbulence en fonction de divers paramètres physiques.

Basiquement, la convection de Rayleigh-Bénard résulte donc de la compétition entre deux forces : la force d'Archimède induite par l'expansion thermique et les forces visqueuses de friction au sein du fluide. Même si *a priori* l'expansion thermique d'un fluide est relativement faible (elle est associée au mieux à un changement relatif de densité de l'ordre de $\Delta\rho/\rho = 10^{-4}$), cela suffit cependant à la poussée d'Archimède pour vaincre les forces visqueuses ; le fluide chauffé monte alors vers la surface alors que le fluide plus froid descend vers le bas : c'est la mise en place de la convection. Le coefficient de dilatation thermique α est défini comme le taux de variation relatif de la densité par rapport à la température, soit :

$$\alpha = -(1/\rho)\partial\rho/\partial T \,. \tag{9.39}$$

Le signe négatif indique qu'une augmentation de la température induit une diminution de densité. Comme nous savons que la densité du fluide consid-

[24] i.e. exploratoire. heuristique est un adjectif signifiant « qui sert à la découverte », notamment dans le champ de la recherche scientifique ; exemple : méthode heuristique.

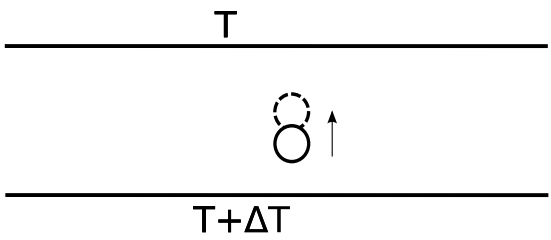


Figure 9.8 – À cause de l'expansion thermique, un élément de fluide (cercle continu), de par le fait que sa densité est plus faible, monte dans la cellule (cercle brisé). À cette montée s'oppose la viscosité. La convection a lieu quand le premier effet l'emporte.

éré varie peu (d'un ordre 10^{-4} en valeur relative), nous pouvons effectuer un développement de Taylor de la densité ρ au premier ordre au voisinage de l'état initial caractérisé par une densité de ρ_0 avant que le fluide ne soit soumis à un gradient de température, soit $\rho = \rho_0 + (\partial\rho/\partial T)\delta T$ où δT est la variation locale de la température. Compte tenu de l'expression du coefficient d'expansion thermique (équation 9.39), nous pouvons ainsi écrire le développement limité de la densité en fonction de ce dernier, soit :

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha\delta T) \; . \tag{9.40}$$

Notons maintenant δz l'ascension verticale d'un élément de fluide de forme sphérique de rayon R (voir figure 9.8) et v sa vitesse de montée. La variation de la température en fonction de l'altitude est donnée au premier ordre par :

$$\delta T = \delta z \partial T/\partial z \; . \tag{9.41}$$

Pendant un laps de temps δt caractéristique du problème, la position de l'élément fluide varie de $\delta z = v\delta t$ vers les régions de plus basse température et le gradient de température est de l'ordre de $\Delta T/d$; l'élément fluide est donc exposé à une variation de température de l'ordre de :

$$\delta T = v\delta t \frac{\Delta T}{d} \tag{9.42}$$

en supposant que cet élément de fluide n'a pas eu le temps d'échanger de la chaleur avec son environnement lors de sa montée[25]. L'absence d'échange d'énergie localement n'est possible que si le temps de montée reste faible par rapport au temps de diffusion τ_{diff}, qui est donc le temps caractéristique de mise en équilibre thermique et donc le temps caractéristique du problème, soit

$$\delta t \sim \tau_{diff} \; . \tag{9.43}$$

[25] Dans le cas contraire, donc si l'élément fluide échange de l'énergie par diffusion avec son environnement, la mise en équilibre thermique locale inhibe tout mouvement convectif.

Le temps de diffusion[26] est de l'ordre de

$$\tau_{diff} \sim R^2/\kappa \, , \tag{9.44}$$

où κ est la diffusivité thermique du fluide. Comme le temps caractéristique est celui de la diffusion thermique, compte tenu de l'analyse précédente (équations 9.43 et 9.44), nous pouvons ainsi réécrire la variation de température (équation 9.42) subie par l'élément fluide comme :

$$\delta T \sim v \frac{R^2}{\kappa} \frac{\Delta T}{d} \, . \tag{9.45}$$

Par ailleurs, compte tenu de l'expression de la force d'Archimède par unité de volume donnée dans l'équation 9.38, un élément fluide sphérique de rayon R, donc de volume $V = 4\pi R^3/3$, est soumis à une poussée d'Archimède F_A telle que :

$$F_A = \delta \rho V g = \frac{4}{3} \pi R^3 \delta \rho g \, , \tag{9.46}$$

où la différence de densité $\delta\rho$ peut s'exprimer comme $\delta\rho = \alpha \delta T \rho_0 g$ (voir équation 9.40), nous obtenons ainsi l'expression de la force d'Archimède :

$$F_A = \frac{4}{3} \pi R^3 \alpha \delta T \rho_0 g \, . \tag{9.47}$$

En substituant la variation de température δT de l'équation ci-dessus (équation 9.47) par son expression approchée (équation 9.45), nous obtenons l'expression suivante pour la force d'Archimède :

$$F_A = \frac{4}{3} \pi \frac{R^5 \alpha \Delta T \rho_0 g v}{\kappa d} \, . \tag{9.48}$$

Par ailleurs, notons qu'à tout mouvement réalisé au sein d'un fluide s'oppose une résistance, comme nous l'indique notre expérience de cycliste ou de nageur. Les mouvements relatifs d'un corps immergé dans un fluide par rapport à son environnement proche engendrent en effet des forces visqueuses de friction. Ainsi, l'élément fluide de volume V ne peut effectivement s'élever que lorsque la force d'Archimède excède les forces de friction auxquelles il est soumis.

Tout mouvement au sein du fluide engendre des mouvements relatifs de couches de fluide les unes par rapport aux autres responsables de forces de friction. Pour un objet solide de forme sphérique, en mouvement avec la vitesse

[26] Ce temps est à comparer au temps de montée de l'ordre de $\tau_{mont} \sim R/v$. La condition d'échange de chaleur faible est satisfaite si $\tau_{mont} << \tau_{diff}$, soit si $R >> \kappa/v$. Dans des situations usuelles, v est de l'ordre de 1 cm/s, et $\kappa \sim 10^{-2}$ cm^2. Nous verrons que le rayon $R \sim d$, et la condition ci-dessus revient à une contrainte sur la distance d entre les deux plaques qui doit être très supérieure à 10^{-2} cm. Dans la plupart des études expérimentales de la convection de Rayleigh-Bénard, cette condition est satisfaite.

relative v par rapport au fluide au repos, la force de friction visqueuse F_S est donnée par une loi classique dite de Stokes[27] :

$$F_S = 6\pi R\eta v \,, \tag{9.49}$$

où η est la viscosité dynamique du fluide. Pour un élément fluide au sein d'un même fluide, le calcul de la force de friction qu'il subit est un peu plus compliqué mais nous admettrons qu'il garde la même dépendance fonctionnelle[28] vis-à-vis des paramètres physique R, η... Et nous considérerons donc dans notre approche qualitative que la force de friction F_S (équation 9.49) constitue une bonne approximation de la friction ressentie par l'élément fluide.

Le déclenchement de la convection s'amorce lorsque la force d'Archimède l'emporte sur la force de Stokes, soit $F_A > F_S$; en utilisant les expressions obtenues ci-dessus pour ces deux forces (équations 9.48 et 9.49), nous obtenons le critère suivant :

$$\Lambda \frac{R^4 \alpha \rho_0 g \Delta T}{\eta \kappa d} \geq 1 \tag{9.50}$$

où Λ est un nombre sans dimension ; il est égal à $2/9$ en adoptant *de facto* les expressions approchées des deux forces en présence (équations 9.48 et 9.49) ; mais rappelons-nous que ces expressions ne sont que des évaluations qualitatives. Notamment, le facteur 6π intervenant dans la force de friction n'est valable que pour un corps sphérique rigide, il est différent dans le cas fluide. Et, par ailleurs, la substitution du temps δt intervenant dans la force d'Archimède, par le temps de diffusion thermique, est là encore une approximation. Ainsi, le nombre sans dimension Λ est *a priori* de l'ordre de l'unité ou d'une décade, ou une fraction de décade (si notre argument est censé), mais sa détermination exacte nécessite un calcul précis, comme nous le verrons par la suite.

Notons enfin que l'expression de la force d'Archimède F_A (équation 9.48) montre que son intensité croît avec le rayon de l'élément fluide. Ce sont donc des éléments de fluide de grande taille qui contribuent à la mise en mouvement du fluide (i.e. mouvement convectif). Dans le dispositif de Rayleigh-Bénard, la plus grande taille possible du rayon R de notre élément fluide est de l'ordre de $R = d/2$, où rappelons-le, d est l'épaisseur de la couche fluide coincée entre les deux plaques. En posant $R = d/2$ dans le critère du déclenchement de la convection (équation 9.50), nous arrivons au critère de l'apparition de la convection de Rayleigh-Bénard, soit :

$$\frac{\alpha \Delta T g d^3}{\nu \kappa} > \frac{16}{\Lambda} \,, \tag{9.51}$$

[27] Du nom du même scientifique britannique (1819-1903) Sir Claude-Louis Stokes, à l'origine des équations Navier-Stokes desquelles est dérivée cette loi après quelques étapes de cacul élaborées (voir référence [31]).

[28] à l'aide d'une analyse dimensionnelle, il est possible de montrer que la force de résistance visqueuse sur un corps de forme quelconque de taille caractéristique R (évaluée par exemple comme la racine cubique du volume du corps) est proportionnelle à $R\eta v$, la seule inconnue étant le nombre sans dimension qui se trouve en préfacteur.

où le coefficient ν est la viscosité cinématique du fluide, reliée à la viscosité dynamique η par $\nu \equiv \eta/\rho_0$. Les deux membres de cette inéquation sont des quantités sans dimension. Posons :

$$R_a \equiv \frac{\alpha \Delta T g d^3}{\nu \kappa}, \tag{9.52}$$

ce qui définit le le nombre de Rayleigh, un nombre sans dimension bien connu de l'hydrodynamique pour caractériser la convection au sein d'un fluide. Ce nombre de Rayleigh R_a dépend des paramètres géométriques du problème (telle l'épaisseur de la couche de fluide) et des paramètres physiques caractérisant le fluide (telle la viscosité ν, la diffusivité thermique κ et le coeeficient de dilatation thermique α). Le déclenchement de la convection (équation 9.51) se réécrit alors comme

$$R_a > R_c \, , \tag{9.53}$$

où nous avons posé $R_{ac} = 16/\Lambda$, qui représente le nombre de Rayleigh critique pour déclencher la convection. Compte tenu de la dépendance fonctionnelle du nombre de Rayleigh R_a vis-à-vis des paramètres physiques (équation 9.52), la convection se déclenche d'autant plus aisément (équation 9.53) lorsque la différence de température ΔT est grande et la viscosité ν du fluide est faible.

Le résultat sur le critère de déclenchement de la convection (équation 9.53), bien qu'issu de considérations heuristiques, reproduit l'essentiel du calcul précis, développé plus bas. Notons, dès à présent, que la seule information nouvelle que procure ce calcul précis (parfois très laborieux [29] dans certaines géométries) est la valeur précise du nombre critique de Rayleigh R_{ac}. Nous verrons que cette valeur exacte est $R_{ac} = 1708$, ce qui donne une valeur de $\Lambda \sim 0,01$.

9.11 Relation de dispersion pour la convection Rayleigh-Bénard

Mathématiquement, l'analyse de la stabilité linéaire du système convectif de Rayleigh-Bénard ne pose aucun problème. La température obéit à l'équation d'advection[30]-diffusion suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla} T = \kappa \nabla^2 T \, , \tag{9.54}$$

où t est le temps et $\vec{v}$ le champ de vitesse du fluide. Le membre de gauche $\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla} T$ de l'équation 9.54 ci-dessus, s'écrit aussi comme une dérivée totale

[29] Nous apprécions de ce fait le raisonnement qualitatif, lequel, certes, demande une intuition physique, mais permet de tirer des conclusions générales d'une grande utilité. Par exemple, le fait que le nombre de Rayleigh, donc le seuil de l'instabilité, soit proportionnel au volume V associé à l'épaisseur de la couche de fluide d (i.e. $R_a \propto d^3$) est un résultat loin d'être évident *a priori*.

[30] Outre la diffusion (ou conduction), la chaleur se transporte avec l'écoulement hydrodynamique, on parle alors de transport de la chaleur par « advection ».

dT/dt, où d/dt est la dérivée matérielle (dénommée aussi dérivée particulaire ou dérivée lagrangienne) « ressentie » par une particule en mouvement. La description lagrangienne adopte donc un référentiel en mouvement avec le fluide ; elle consiste à formuler l'évolution des propriétés d'une particule fluide suivie dans son mouvement. Au contraire, dans le cadre de la description eulérienne, le référentiel adopté est fixe, et l'évolution du fluide est décrit en un point fixe de l'espace. La dérivée partielle (ou dérivée temporelle locale) $\frac{\partial}{\partial t}$ représente ainsi la dérivée dans la description eulérienne, c'est-à-dire la dérivée dite eulérienne « vue » par un observateur en un point fixe.

Développons davantage la physique associée à ces différentes formulations lagrangienne et eulérienne. La température d'un point fluide varie en fonction du temps, mais en même temps, ce point fluide est transporté par le flot hydrodynamique, à l'image d'une poussière déposée à la surface de l'eau. Autrement dit, la température $T(\vec{r},t)$ d'un point fluide en un temps t devient $T(\vec{r}+v\delta t, t+\delta t)$ en un instant $t+\delta t$, car, pendant le laps de temps δt, le point fluide en question s'est déplacé de $\vec{v}\delta t$. La variation totale de la température T à la limite $\delta t \to 0$ est donnée par : $dT/dt = [T(\vec{r}+\vec{v}\delta t, t+\delta t) - T(\vec{r},t)]/\delta t = \partial T/\partial t + \vec{v}.\vec{\nabla}T$. Le terme $\vec{v}.\vec{\nabla}T$ est le terme d'advection. La dénomination « dérivée matérielle » est issue du fait que l'évolution du point fluide est suivie au cours de son mouvement, à l'image du suivi de la dynamique d'un point matériel en mécanique du point. Le champ de vitesse $\vec{v}$ obéit à l'équation de Navier-Stokes[31] (référence [31]) :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\vec{v} = \nu\nabla^2\vec{v} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g}\,, \tag{9.55}$$

où $\nu = \eta/\rho$ est la viscosité cinématique, η la viscosité dynamique, ρ (respectivement) p la densité (respectivement, la pression) du fluide et $\mathbf{g}$ le champ de gravité.

Le terme de gauche de l'équation de Navier-Stokes ci-dessus (équation 9.55) décrit l'accélération du point fluide ; il peut également s'exprimer à l'aide de la dérivée matérielle $d\vec{v}/dt$. Tandis que le terme de droite est égal à la somme des forces par unité de volume agissant sur l'élément fluide, il est composé des forces de pression $(-\nabla p)$, toujours présentes même pour un fluide au repos, des forces de friction[32] suscitées par la présence d'un champ de vitesse inhomogène $(\nabla^2\vec{v})$ et enfin d'une force gravitationnelle par unité de volume $\vec{g}$. Les deux équations 9.55 et 9.54 posent les équations dynamiques associés au phénomène dit de la thermoconvection.

Comme nous allons le démontrer dans ce paragraphe, la solution purement diffusive stationnaire (régime de diffusion, dit aussi régime conductif) peut devenir instable. La solution diffusive est caractérisée (i) par un fluide au repos (i.e. $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ et $\vec{v}=0$) et (ii) par un profil de température stationnaire (i.e. $\frac{\partial T}{\partial t}=0$). Comme les deux plaques délimitant le domaine fluide (voir figure 9.7) sont

[31] Nous avons déjà évoqué cette équation dans la sous-section 4.1.2 du chapitre 4.

[32] Tout mouvement de vitesse inhomogène implique des mouvements relatifs des couches fluides les unes par rapport aux autres ; il en résulte ainsi des forces de friction.

supposées d'extension latérale infinie (par « infinie », nous entendons une extension très grande par rapport à l'espacement entre les plaques) : le système doit donc souscrire à la condition d'invariance de translation le long de l'axe horizontal Ox ; la température T et la pression p ne dépendent ainsi que de la seule variable d'espace verticale z. À partir de l'équation de transport de la chaleur (équation 9.54) et de l'équation Navier-Stokes (équation 9.55), nous obtenons le système suivant : $d^2T_0(z)/dz^2 = 0$ et $\partial p_0/\partial z + \rho_0 g = 0$, où l'indice « 0 » se réfère à la solution stationnaire. Par intégration, nous obtenons le profil de température : $T_0 = a + bz$, où a et b sont deux constantes d'intégration, dont les valeurs sont contraintes par les conditions aux limites : $T_0(z = 0) = T_\downarrow$ et $T_0(z = d) = T_\uparrow$. Nous obtenons ainsi le profil de température suivant :

$$T_0(z) = T_\downarrow - \frac{\Delta T}{d} z \tag{9.56}$$

où ΔT est la différence de température entre les deux plaques (i.e. $\Delta T = T_\downarrow - T_\uparrow$). Le profil de pression associé à la solution stationnaire diffusive prend donc la forme :

$$p_0 = c - \rho_0 g z \tag{9.57}$$

où c est une constante arbitraire, car la pression est toujours définie par rapport à une référence[33]. La densité ρ_0 est en principe déterminée à partir de la pression et de la température par une équation d'état thermodynamique[34]. Même en présence d'un écoulement hydrodynamique, ou en présence d'un gradient de température, la mécanique des milieux continus, comme la thermoconvection que nous étudions ici, repose sur l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local. Ceci veut dire que pour un petit élément fluide, nous utilisons localement les principes de la thermodynamique, tels le premier et second principes[35].

[33] Notons que seule la différence de pression intervient dans les équations de la dynamique et non la pression en soi, à l'instar de la mécanique du point dont la dynamique dépend de la différence de potentiel et non du potentiel lui-même.

[34] Une équation d'état d'un système à l'équilibre thermodynamique est une relation entre différents paramètres physiques, les variables d'état, qui déterminent ainsi son état. Pour un fluide à une seule composante, cette équation d'état relie la densité, la température et la pression. À partir de l'équation d'état caractéristique d'un système physique, il est possible de déterminer la totalité des quantités thermodynamiques décrivant ce système et par suite de prédire ses propriétés.

[35] Le premier principe de la thermodynamique énonce la loi de conservation de l'énergie interne du système thermodynamique considéré ; l'énergie interne est une fonction ou variable d'état notée U, définie comme la somme de toutes les énergies cinétiques et d'interaction des constituants microscopiques du système. Au cours d'une transformation quelconque du système, la variation de l'énergie interne dU est égale à l'énergie échangée par le système avec le reste de l'univers, sous forme de chaleur δQ (la chaleur est associée à l'agitation microscopique des éléments du système ; δQ est l'énergie échangée par le système sous forme de conduction, convection et rayonnement), et sous forme de travail δW (i.e. toute énergie, autre que calorifique, échangée entre le système et le reste de l'univers) ; ce premier principe stipule donc que $dU = \delta W + \delta Q$. Il permet ainsi d'établir un bilan énergétique mais ne permet pas de prédire le sens de l'évolution des systèmes. C'est le rôle du second principe, dit principe d'évolution. Il introduit une nouvelle fonction d'état, dite entropie notée S, qui décrit le comportement des systèmes par la maximalisation de leur entropie (l'entropie S est maximale

9.11.1 Analyse de stabilité linéaire

La non-linéarité des équations de thermoconvection (équations 9.54 et 9.55) résulte de la présence des deux termes d'advection : $\vec{v}.\vec{\nabla}T$ (dans l'équation de transport de la chaleur, équation 9.54) et $\vec{v}.\vec{\nabla}\vec{v}$ (dans l'équation de Navier-Stokes, équation 9.55) ; la solution du problème de thermoconvection dans son ensemble ne peut donc être obtenue que numériquement. Cependant, en se penchant sur l'étude de stabilité linéaire de la solution diffusive obtenue ci-avant (équations 9.56 et 9.57), un calcul analytique est possible. Perturbons donc légèrement le système dans son état purement diffusif stationnaire, de telle sorte que nous pouvons procéder au développement limité au premier ordre de la température :

$$T(\vec{r},t) = T_0(z) + \epsilon T_1(\vec{r},t) \tag{9.58}$$

et de manière analogue, du champ de vitesse $\vec{v}$, de la pression p et de la densité ρ.

Reportons ensuite ces expressions dans les équations de thermoconvection (équations 9.54 et 9.55), en ne retenant que les termes linéaires en ϵ, ce qui définit précisément le propre de toute étude de stabilité linéaire.

À partir de l'équation de transport de la chaleur (équation 9.54) et du profil de température associée à la solution purement diffusive (équation 9.56), nous obtenons l'équation perturbée de transport de la chaleur :

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + v_{z1}.\frac{\Delta T}{d} = \kappa\nabla^2 T_1 \tag{9.59}$$

En tenant compte du profil de pression de la solution purement diffusive (équation 9.57) et du développement limité au premier ordre de la densité (équation 9.40, permettant ainsi d'écrire $\rho_1 = -\rho_0\alpha\delta T = -\epsilon\rho_0\alpha T_1$), la projection de la composante de l'équation de Navier-Stokes (équation 9.55) sur l'axe vertical Oz, s'écrit comme :

$$\frac{\partial v_{z1}}{\partial t} = \nu\nabla^2 v_{z1} + \frac{\rho_1}{\rho_0^2}\frac{\partial p_0}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_1}{\partial z}\ , \tag{9.60}$$

$$= \nu\nabla^2 v_{z1} + \alpha g T_1 - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_1}{\partial z}\ . \tag{9.61}$$

si le système est à l'équilibre). Le physicien autrichien Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906), considéré comme le père de la physique statistique, a défini l'entropie par le logarithme du nombre d'états microscopiques Ω caractéristiques de l'équilibre pour un système isolé ($S = kln\Omega$, où k est la constante de Boltzmann). Le second principe établit ainsi l'irréversibilité de certains phénomènes physiques, en particulier lors des échanges thermiques, en énonçant que l'entropie S d'un système tendant vers son équilibre ne peut que croître $\Delta S > 0$. Au cours d'une transformation quelconque d'un système isolé, la variation d'entropie ne peut donc être que positive ou nulle. Si la variation d'entropie est nulle, il s'agit alors d'une transformation réversible. Si elle est strictement positive, il s'agit d'une transformation irréversible (toute transformation associée à une variation d'entropie négative est impossible). On peut montrer que la fonction S s'exprime en fonction de la quantité de chaleur échangée par le système $dS = \frac{\delta Q}{T}$.

Supposons maintenant que les champs de température T, de pression p et de vitesse $\mathbf{v}$ ne dépendent que des deux variables d'espace z et x et soient indépendants de la variable y. Autrement dit, étudions seulement la naissance de l'ordre selon l'axe $0x$ (ordre unidimensionnel) ; nous verrons au chapitre 13 les conséquences d'une approche bidimensionnelle.

La projection de l'équation de Navier-Stokes (équation 9.55) sur l'axe des Ox s'écrit comme ;

$$\frac{\partial v_{x1}}{\partial t} = \nu \nabla^2 v_{x1} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} \; . \tag{9.62}$$

Pour décrire le système perturbé, nous disposons jusqu'à présent de trois équations : l'équation de transport de la chaleur (équation 9.59) et les deux projections de l'équation de Navier-Stokes le long des axes Oz et Ox (équations 9.61) et (9.62), mais nous avons quatre inconnues : v_{1x}, v_{1z}, T_1, p_1. L'équation supplémentaire que nous devons inclure pour boucler la résolution du système est la loi de conservation de la matière (dite aussi équation de continuité) : $\partial\rho/\partial t + \vec{\nabla}.(\rho\vec{v}) = 0$, soit encore $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\rho + \vec{\nabla}.\vec{v} = \frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla}.\vec{v} = 0$. Pour un fluide incompressible[36], nous avons $d\rho/dt = 0$, et l'équation de conservation de la masse s'écrit simplement :

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \; . \tag{9.63}$$

Pour le système perturbé au premier ordre, nous obtenons ainsi l'équation qui complète les équations de la thermoconvection. Ce qui s'écrit ici

$$\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} = 0 \; . \tag{9.64}$$

Pour décrire l'évolution du système perturbé, nous avons obtenu un ensemble de quatre équations différentielles linéaires (équations de transport de la chaleur et de Navier-Stockes : équations 9.59,9.61-9.62 et l'équation de continuité : équation 9.64) et autonomes[37] par rapport aux variables t et x. La solution a donc la forme $e^{iqx+\omega t}$, où q est le vecteur d'onde et ω le taux de croissance ou d'atténuation (*a priori* complexe) de l'instabilité, tandis que q est réel, sinon nous serions exposés à l'obtention de solutions divergentes spatialement, ce qui est contradictoire avec la recherche d'un ordre spatial associé

[36] Par fluide incompressible, nous ne voulons pas dire que ρ est systématiquement constant partout, mais plutôt qu'en suivant un élément de fluide dans son mouvement, la densité de l'élément fluide reste constante, $d\rho/dt = \partial\rho/\partial t + \vec{v}.\vec{\nabla}\rho = 0$. Cette hypothèse est valable pour tous les liquides, sauf si la vitesse de l'écoulement est proche de celle du son. En particulier, on sait que les ondes sonores correspondent à une contraction/dilatation des couches fluides, et bien entendu le son ne pourrait se propager sans compression/dilatation du liquide. Il faut noter que pour la majorité des problèmes hydrodynamiques des liquides, les effets de compressibilité sont quasiment négligeables eu égard aux vitesses faibles mises en jeu (vitesse faible par rapport à celle du son).

[37] Rappelons qu'une équation dite autonome par rapport à une variable (temps, espace) signifie que les coefficients intervenant dans l'équation sont indépendants de la variable en question.

donc à des échelles de longueur finie[38] ; nous avons donc des solutions pour la perturbation en température de type :

$$T_1 = f(z)e^{iqx+\omega t} + c.c. \tag{9.65}$$

où *c.c.* signifie complexe conjugué et des expressions similaires pour les autres quantités (v_{1z}, v_{x1} et p_1). Il est utile d'éliminer v_{1x} et p_1 des équations pour se focaliser sur les variables T_1 et v_{z1} uniquement. À cet effet, exprimons v_{1x} en fonction de v_{1z} à partir de l'équation de continuité d'un fluide incompressible (équation 9.64) :

$$v_{1x} = -\frac{\partial v_{1z}}{iq\partial z} \tag{9.66}$$

et insérons cette expression dans l'équation de Navier-Stokes projetée sur l'axe Ox (équation 9.62) pour obtenir :

$$p_1 = \frac{\rho_0}{q^2}\left[\nu\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right]\frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \tag{9.67}$$

et reportons l'expression de la perturbation en pression p_1 fonction de v_{1z} dans l'équation de Navier-Stokes projetée sur l'axe des Oz (équation 9.61), pour trouver finalement une équation dépendant uniquement des variables T_1 et v_{z1}, soit :

$$\omega(q^2 - \mathcal{D}^2)v_{1z} - \alpha g q^2 T_1 + \nu(\mathcal{D}^2 - q^2)^2 v_1 z = 0 \tag{9.68}$$

tandis que l'équation perturbée de transport de la chaleur (équation 9.59) s'écrit comme

$$\omega T_1 - \kappa[\mathcal{D}^2 - q^2]T_1 - \frac{\Delta T}{d}v_{1z} = 0 \tag{9.69}$$

où, pour alléger l'écriture des deux dernières équations 9.68 et 9.69, nous avons posé

$$\mathcal{D} \equiv \frac{d}{dz}\ . \tag{9.70}$$

N'oublions pas que l'objectif de l'étude de stabilité linéaire est d'établir la relation de dispersion reliant le taux d'instabilité ω au nombre d'onde q à l'aide de paramètres de contrôle. Mais, au préalable, nous devons préciser les conditions aux limites des variables perturbées. C'est la tâche à laquelle se consacre la section suivante.

Conditions aux limites

Intéressons-nous dans un premier temps à la température. La température du système, $T = T_0 + \epsilon T_1$ doit souscrire aux deux conditions aux limites imposées : $T(z = 0) = T \downarrow$ et $T(z = d) = T \uparrow$. Puisque la température à l'équilibre

[38] Nous verrons cependant dans un chapitre ultérieur qu'il peut s'avérer utile, sur un plan purement mathématique, de traiter formellement le vecteur d'onde q comme une quantité complexe.

T_0 satisfait déjà ces conditions, nous devons donc imposer que les perturbations en température à la base et au sommet du fluide soient nulles, soit :

$$T_1(z=0)=0, \quad T_1(z=d)=0\,. \tag{9.71}$$

La condition aux limites sur la vitesse mérite davantage d'attention. L'équation 9.68, obtenue au terme de la substitution des variables v_{1x} et p_1 dans l'équation de Navier-Stokes projetée le long des axes Oz, est du quatrième ordre, comme nous le constatons avec la présence de l'opérateur $\mathcal{D}^4$, ce qui requiert de disposer de quatre conditions aux limites pour la résoudre.

À première vue, les deux plaques rigides entre lesquelles est confiné le fluide imposent que le champ de vitesse $\vec{v}$ du fluide soit nul sur l'ensemble des interfaces fluide-plaque[39]. Mais ces conditions aux limites restreignent les possibilités de calcul analytique. En effet, les calculs dans ce cas ne peuvent pas être menés analytiquement jusqu'au bout (une solution numérique s'impose). Alors, pour le bénéfice d'une étude analytique complète, nous supposerons que les surfaces délimitant le fluide sont libres[40]. On verra que le résultat principal de l'étude est la détermination de la valeur du nombre de Rayleigh critique. En d'autres termes, changer les conditions aux limites entraîne seulement une valeur différente du nombre de Rayleigh critique, mais n'affecte pas les aspects physiques qualitatifs.

À l'instar d'une surface rigide, une surface plane implique que la composante verticale de la vitesse s'annule en $z=0$ et en $z=d$, soit

$$v_{1z}(z=0)=0, \quad v_{1z}(z=d)=0\,. \tag{9.72}$$

L'hypothèse d'une surface libre vis-à-vis des contraintes[41] impose, par défini-

[39] Si l'annulation de la composante de la vitesse normale à la plaque est évidente (le fluide ne traverse pas la plaque !), l'annulation de la composante tangentielle l'est moins. En effet, il est possible d'imaginer des situations dans lesquelles le fluide « glisse » sur les parois. Cette situation se réalise même, lors de l'étude des écoulement très confinés (ce qui n'est pas le cas ici).

[40] Une telle situation est bien sûr difficile à imaginer dans la pratique ; disons qu'il s'agit là d'une situation idéale que nous admettons pour le moment. Émettre une telle hypothèse soulève un autre problème : une surface libre peut, en toute rigueur, subir une déviation par rapport à la forme plane (en présence de convection, une surface libre se déforme et ne reste pas *a priori* plane) ; il faudrait ainsi, pour rendre compte de ce phénomène, introduire une nouvelle variable. Nous ferons l'hypothèse, cependant, que la surface libre reste plane. Nous verrons que, comme la longueur d'onde de l'instabilité est de l'ordre de la distance d, tant que la valeur de d est très supérieure au millimètre (ce qui est le cas dans la majorité des expériences), l'influence de la déformation de la surface libre reste *de facto* relativement faible.

[41] Une manière de s'approcher expérimentalement de cette situation est d'adopter pour le fluide une huile prise en sandwich entre du mercure et de l'hélium gazeux (voir référence [29]). Comme l'huile possède une grande viscosité par rapport au mercure et à l'hélium, il est possible de montrer que la surface de l'huile peut se comporter comme une surface sans contrainte. La fluctuation de la température T_1 à l'interface huile/mercure est en effet quasiment nulle grâce à la forte conduction de la chaleur par le mercure, tandis que la faible conduction de la chaleur associée à l'hélium impose un flux de chaleur quasiment nul à l'interface huile/hélium. Il s'agit pour la température de conditions aux limites mixtes.

tion, l'annulation de force[42] pour toutes les interfaces $z = 0$ et en $z = d$.

Les forces de friction fluides engendrent deux contraintes hydrodynamiques tangentielles respectivement proportionnelles à : $\eta \partial v_{1z}/\partial x$ et $\eta \partial v_{1x}/\partial z$ qui doivent donc s'annuler sur les deux surfaces. Puisque la composante de la vitesse normale aux surfaces est nulle (i.e. $v_{1z} = 0$), le premier terme s'annule d'emblée[43] ; et en utilisant l'équation 9.66, nous obtenons la seconde condition :

$$\mathcal{D}^2 v_{1z}|_{z=0} = 0 \;\; et \;\; \mathcal{D}^2 v_{1z}|_{z=d} = 0 \; . \tag{9.73}$$

Ayant écrit les six conditions aux limites (équations 9.71, 9.72 et 9.73) associées aux équations différentielles d'évolution du système (équations 9.68 et 9.69), nous sommes en mesure d'écrire la dépendance sinusoïdale[44] des solutions pour les perturbations en fonction de z de la vitesse normale v_{1z} et de la température T_1, nous mettons de côté pour l'instant la dépendance en x dont on a vu qu'elle est en e^{iqx} :

$$v_{1z}(z) = A_1 \sin(\pi \frac{z}{d}) \;\; et \;\; T_1(z) = B_1 \sin(\pi \frac{z}{d}) \tag{9.74}$$

où A_1 et B_1 sont deux constantes d'intégration. Ces solutions vérifient bien les conditions aux limites (équations 9.71, 9.72 et 9.73). Reste à voir maintenant sous quelle condition ces solutions vérifient les équations différentielles au sein du fluide. À partir des équations 9.68 et 9.69, nous obtenons deux équations algébriques linéaires et homogènes, dont la solution est non triviale si et seulement si le déterminant s'annule. Il résulte de cette condition une relation de dispersion ω satisfaisant l'équation :

$$\omega^2 - S\omega + P = 0 \tag{9.75}$$

où

$$S = -\Lambda_q(\nu + \kappa), \quad P = \nu\kappa(\Lambda_q^3 - \frac{R_a q^2}{d^4}) \tag{9.76}$$

avec

$$\Lambda_q = q^2 + \frac{\pi^2}{d^2} \; . \tag{9.77}$$

Cette relation de dispersion est formellement identique à celle obtenue pour le système de Turing (équation 9.5).

[42] Par définition, la force est une contrainte par unité de surface.

[43] Comme $v_{1z} = 0$ le long de Ox, il est donc constant par rapport à la variable x en tout point de la surface. Par conséquent la dérivée de v_{1z} par rapport à x s'annule automatiquement à la surface.

[44] En réalité, il est facile de reconnaître que toute fonction $\sin(nz/d)$, avec n entier, est également une solution des équations. À titre d'exercice, montrez qu'une telle dépendance conduit à une plus grande valeur critique du gradient thermique $\Delta T/d$ (soit encore à un nombre de Rayleigh critique) pour que la convection ait lieu. Comme nous nous intéressons à la valeur minimale du gradient thermique donnant lieu à la convection, les valeurs de $n > 1$ ne seront pas prises en considération ici.

Il est aisé de vérifier que le discriminant de la relation de dispersion précédente de l'instabilité de Rayleigh-Bénard (équation 9.75) est toujours positif, indiquant que les deux solutions pour le taux d'instabilité ω sont réelles ; désignons ces deux solutions par ω_1 et ω_2 (avec $\omega_1 > \omega_2$). Selon la définition de S égale à la somme des deux valeurs propres, nous avons $S = \omega_1 + \omega_2 < 0$; ce qui signifie qu'une au moins des deux racines est négative. Seule la plus grande – en valeur algébrique – des deux racines présente un intérêt ; car, comme nous le signalons dans la section consacrée à l'étude de stabilité linéaire du système de Turing (section 9.3), celle-ci est la première susceptible de devenir positive, ce qui constitue la signature d'une instabilité. Le produit des deux racines $P = \omega_1\omega_2$ s'annule lorsque :

$$\Lambda_q^3 - \frac{R_a q^2}{d^4} = 0 \,. \tag{9.78}$$

Cette condition peut être réécrite sous la forme :

$$R_a = R_{ac}(q) = \pi^4 \frac{[1 + (dq/\pi)^2]^3}{(dq/\pi)^2} \tag{9.79}$$

où $R_{ac}(q)$ désigne la valeur critique du nombre de Rayleigh pour laquelle la première racine s'annule (i.e. $\omega_1 = 0$). Le nombre de Rayleigh critique $R_{ac}(q)$ est appelé la courbe neutre de stabilité (voir figure 9.9). Cette courbe possède un minimum en q_c

$$q_c = \frac{\pi}{d\sqrt{2}} \,. \tag{9.80}$$

En $q = q_c$, la valeur numérique du nombre de Rayleigh critique est donnée par :

$$R_{ac} = \frac{27\pi^4}{4} \simeq 657,5 \tag{9.81}$$

C'est la valeur minimale du nombre de Rayleigh R_a, correspondant donc à la plus petite valeur du gradient thermique, pour laquelle la convection survient (voir équation 9.52). Pour cette valeur, naissent spontanément des champs de vitesse et de température périodiques avec une périodicité spatiale telle que : $\lambda_c = 2\sqrt{2}d$. Ainsi, pour que le système soit convectif (respectivement, conductif), donc instable (respectivement, stable), avec $\omega_1 > 0$ (respectivement, $\omega_1 < 0$), il suffit que le nombre de Rayleigh soit supérieur (respectivement inférieur) au nombre de Rayleigh critique minimal, soit : $R_a > R_{ac}$ (respectivement, $R_a < R_{ac}$).

Discutons maintenant des ordres de grandeur des gradients thermiques nécessaires à la naissance de l'instabilité convective. Considérons pour cela le cas d'un système de Rayleigh-Bénard caractérisé par une épaisseur $d = 10^{-2}\ m$ d'une huile silicone de viscosité $\nu \simeq 10^{-4}\ m^2.s^{-1}$, de diffusivité thermique $\kappa \simeq 10^{-7}\ m^2.s^{-1}$ et de coefficient de dilatation thermique $\alpha \simeq 10^{-3}\ K^{-1}$. À partir de la définition du nombre de Rayleigh R_a (équation 9.52) et de sa valeur critique (équation 9.81), on déduit que la différence de température minimale

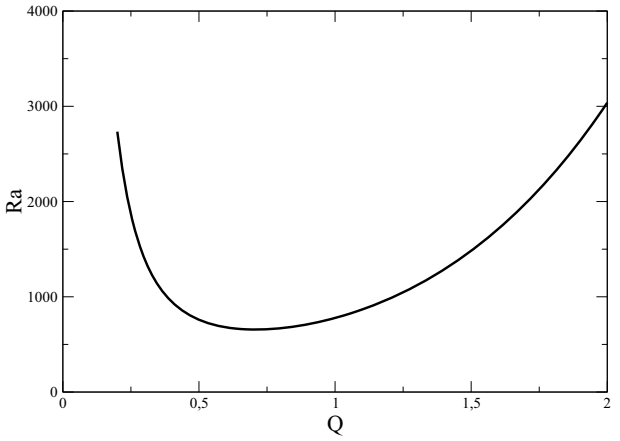


Figure 9.9 – Courbe neutre de la convection de Rayleigh-Bénard où on trace R_a en fonction de $Q = qd/\pi$.

(pour $d \sim 1\ cm$) requise pour le déclenchement de l'instabilité convective est $\Delta T \simeq 1,7\ K$.

Dans le cas de surfaces rigides délimitant le fluide, les vitesses s'annulent sur les parois. Dans ce cas, le calcul devient un tout petit peu plus compliqué (référence [16]), mais les comportements qualitatifs restent identiques (même comportement du nombre de Rayleigh critique $R_a(q)$; voir figure 9.9). Cependant, la valeur numérique du nombre de Rayleight critique vaut dans ce cas $R_{ac} \simeq 1707$ (référence [16]). Cette valeur est environ trois fois plus grande que celle obtenue dans le cas de surfaces libres. La raison physique expliquant un seuil plus élevé est simple : en présence de parois rigides, le frottement du fluide contre la paroi dissipe davantage d'énergie. Il faut injecter plus de puissance, donc un plus grand gradient thermique, pour que la convection puisse démarrer.

9.11.2 Rouleaux de convection

Au seuil de l'instabilité et pour $q = q_c$, la solution du champ de vitesse (en faisant apparaître la dépendance en x par rapport à la solution 9.74) est donnée par

$$v_{z1} = B_{c1} \sin(q_c z) \cos(q_c x), \quad v_{x1} = B_1 \cos(q_c z) \cos(q_c x)\ . \tag{9.82}$$

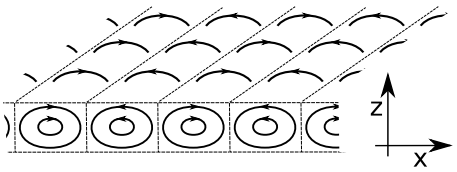


Figure 9.10 – Vue schématique de la structure en rouleaux du champ de vitesse.

Les vitesses verticale et horizontale sont des fonctions périodiques de x. Posons $v_{x1} = dx/dt$ et $v_{z1} = dz/dt$, et formons le rapport entre les deux expressions, nous obtenons l'équation différentielle suivante : $dz/dx = \sin(q_c z)/\cos(q_c z)$, dont la solution est un cercle de rayon B_1. Comme, en outre, la période est donnée par $\lambda_c = 2\sqrt{2}d$, les lignes de courant (trajectoires $z(x)$) sont des cercles (voir figure 9.10).

Par ailleurs, comme nous nous intéressons au cas où la vitesse $v_y = 0$ (invariance des lignes de courant le long de Oy), le champ de vitesse peut être vu comme des rouleaux de convection, ce sont les rouleaux de Bénard, observés expérimentalement. Nous verrons dans un chapitre ultérieur (chapitre 13), pourquoi ces structures sont unidimensionnelles (avec $v_y = 0$) et non des structures bidimensionnelles

Notons encore une fois, que l'amplitude B_1 est indéterminée dans le régime linéaire. Une analyse non linéaire est nécessaire pour en fixer la valeur (voir le chapitre suivant).

La forme générique de la relation de dispersion près du point critique

Au seuil de l'instabilité, la valeur du taux d'instabilité ω_1 (noté par la suite, simplement ω) est nulle. Il est possible de vérifier que $\partial\omega/\partial q \equiv \omega'(q) = 0$. Au voisinage du point critique, la relation de dispersion prend la même forme que celle obtenue pour le système de Turing (équation 9.5). En différenciant l'équation de dispersion de l'instabilité de Rayleigh-Bénard (équation 9.75) par rapport à q et en posant $\omega = 0$ au point critique, nous trouvons $\partial\omega(q)/\partial q|_{q_c} = 0$. Ainsi au point critique, le taux d'instabilité ω doit satisfaire aux deux conditions :

$$\omega(q_c) = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial q}|_{q_c} = 0\ . \tag{9.83}$$

Le taux d'instabilité ω, fonction de q et R_a, est donc tangent à l'axe des q en $q = q_c$. Ces deux conditions déterminent à la fois le nombre de Rayleigh critique (équation 9.81) et le vecteur d'onde critique q_c (équation 9.80). En utilisant ces deux conditions, nous retrouvons des résultats identiques à ceux que nous avons obtenus dans la section précédente sur l'instabilité de Turing (voir notamment figure 9.4). Un développement de Taylor au second ordre du

taux d'instabilité ω conduit à écrire :

$$\omega(q, R_a) = \omega(q_c, R_{ac}) + (q - q_c)\frac{\partial \omega}{\partial q} + (R_a - R_{ac})\frac{\partial \omega}{\partial R_a} + \frac{1}{2}(q - q_c)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial q^2} \ . \quad (9.84)$$

Les dérivées sont évaluées au point critique (q_c, R_{ac}). En ce point, les premier et second termes du taux d'instabilité ci-dessus (équation 9.84) s'annulent en vertu des conditions sur le taux d'instabilité au point critique (équation 9.83).

Dérivons l'équation de dispersion (équation 9.75) une fois par rapport au nombre de Rayleigh R_a et deux fois par rapport au nombre d'onde q et évaluons les résultats au point critique. L'expression approchée du taux d'instabilité (équation 9.84) devient

$$\omega = \frac{\nu + \kappa}{\nu \kappa} \left\{ \frac{3}{2} \frac{\pi^2}{d^2} \frac{R_a - R_{ac}}{R_{ac}} - 2(q - q_c)^2 \right\} \ . \quad (9.85)$$

Le premier terme $\epsilon \equiv (\nu + \kappa) 3/2\pi^2/d^2(R_a - R_{ac})/(R_{ac}\nu\kappa)$ mesure la distance par rapport au seuil de l'instabilité. Le second terme nous informe de l'existence d'une plage de vecteurs d'ondes de l'ordre de $|q - q_c|$ pour lequel le taux d'instabilité $\omega > 0$ est positif, correspondant donc aux modes actifs (modes instables).

Génériquement, la relation de dispersion rencontrée pour toute instabilité d'un état de base homogène vers un état ordonné, ayant q_c comme vecteur d'onde critique, prend la forme :

$$\omega = \epsilon + \omega''(q - q_c)^2/2 \ , \quad (9.86)$$

où $\omega'' = \partial^2 \omega / \partial q^2$ est la concavité (de signe négatif) du taux d'instabilité ω, et ϵ est un petit paramètre mesurant la distance au seuil de l'instabilité. La relation de dispersion de l'instabiilté de Rayleigh-Bénard a donc la même allure que l'instabilté de Turing, équation 9.19 (avec la substitution $\mu \to \epsilon$ et $\mu_c \equiv 0$).

Quand le seuil de l'instabilité est dépassé, le taux d'instabilité devient un taux de croissance (i.e. $\omega > 0$) pour toute une bande de vecteurs d'onde. L'analyse linéaire nous enseigne que les perturbations croissent exponentiellement en fonction du temps. La perturbation, supposée initialement faible, va atteindre donc une amplitude suffisamment grande, et les termes non linéaires ne peuvent plus être négligés ; leur étude constitue le contenu du prochain chapitre.

Chapitre 10

Universalité au voisinage du seuil de la naissance de l'ordre

Nous avons étudié au chapitre précédent des instabilités de Turing et de Rayleigh-Bénard se déclenchant lorsqu'un paramètre de contrôle atteint une valeur critique ; l'état du système le long de l'axe horizontal Ox perd son homogénéité initiale au profit d'une structuration spatiale, autrement dit, de l'établissement d'un ordre spatial : il y a *brisure de symétrie*. La symétrie continue de translation le long de l'axe Ox est en effet rompue en faveur d'une symétrie discrète plus faible ; cette symétrie discrète est caractérisée par le fait que le système retrouve un même état après avoir parcouru une distance égale à un nombre entier de fois la période spatiale.

Rappelons brièvement la démarche adoptée précédemment pour mettre en évidence la naissance d'un ordre spatial. En partant d'un état homogène le long de l'axe Ox, la procédure a consisté à chercher l'évolution d'une perturbation autour de l'état homogène sous la forme :

$$e^{iqx+\omega t} \tag{10.1}$$

où q est le vecteur d'onde de la perturbation et ω le taux d'amplification ou d'atténuation de la perturbation. Nous appellerons par la suite ω le taux de croissance quel que soit son signe (un taux de croissance négatif est synonyme de stabilité). Les chapitres précédents présentent des exemples pour lesquels ω est réel[1]. Lorsque $\omega < 0$ pour tout vecteur d'onde q, la perturbation (équation 10.1) décroît dans le temps, et l'état homogène est linéairement stable. *A contrario*, lorsque $\omega > 0$, au moins pour une valeur du vecteur d'onde q, la perturbation croît exponentiellement et l'état homogène est instable.

[1] Le cas où ω est complexe est traité au chapitre 12.

Au voisinage du seuil de l'instabilité, la forme de la relation de dispersion $\omega(q)$ adopte la forme générique étudiée précédemment (voir équation 9.86) ; la relation de dispersion associée au système (voir la figure 9.4 associée à la relation de dispersion de l'instabilité de Turing) met en jeu la valeur critique μ_c du paramètre de contrôle μ, où μ est, par exemple, le nombre de Rayleigh (voir équation 9.52) du système convectif étudié au chapitre précédent (convection de Rayleigh-Bénard).

Pour $\mu < \mu_c$, le taux de croissance est négatif ($\omega < 0$) ; la perturbation s'atténue donc au cours du temps. Pour $\mu > \mu_c$, il existe un intervalle de valeurs Δq de vecteur d'onde q (voir figure 9.4), dite bande active, pour lequel le taux de croissance est positif ($\omega > 0$) ; dans ce cas, la perturbation croît alors exponentiellement. La perturbation, supposée initialement petite, cesse de l'être et les effets non linéaires deviennent prépondérants.

Lorsque $\mu = \mu_c$, le système est dans une situation critique pour laquelle le taux de croissance est nul. Le vecteur d'onde q associé est précisément égal à la valeur critique q_c. Le taux de croissance est négatif ($\omega < 0$) pour toutes les autres valeurs du vecteur d'onde. Au seuil de l'instabilité, la perturbation engendre un ordre spatial caractérisé par une longueur d'onde λ telle que : $\lambda \simeq \lambda_c = 2\pi/q_c$.

Dans le chapitre précédent, nous avons envisagé deux systèmes caractérisés par des équations d'évolution non linéaires : un problème de nature chimique, la réaction autocatalytique de Turing et un problème de nature physique, la convection de Rayleigh-Bénard. La nature non linéaire de ces problèmes implique que nous ne disposons pas de solution analytique complète et le recours au calcul numérique sur machine est nécessaire à la résolution de ces équations. En revanche, toute étude analytique n'est pas exclue ; en particulier, celle que nous pouvons réaliser à proximité du seuil de l'instabilité en adoptant un développement en loi de puissance d'un petit paramètre représentant la distance au seuil de l'instabilité est particulièrement judicieuse. En effet, si le problème non linéaire considéré dispose de nombreux paramètres, l'analyse numérique s'avère la plupart du temps fastidieuse car elle requiert pour chaque paramètre un traitement détaillé pour en étudier les effets. Or, l'analyse analytique avec une vision synthétique bien que simplifiée offre un terrain favorable à la maîtrise des idées qualitatives sous-jacentes au comportement du système ; elle permet en outre de guider les analyses numériques et les explorations expérimentales, plutôt que de réaliser une analyse systématique parfois inutile. En s'intéressant tout particulièrement au voisinage de la bifurcation, il est possible de mettre en évidence analytiquement le caractère universel de la dynamique.

10.1 Équation d'amplitude universelle

Bien que chaque modèle de systèmes non linéaires dispose d'une spécificité propre, l'ensemble de ces modèles est décrit par une même équation dite universelle. Cette équation est appelée *équation d'amplitude*, dénomination qui

paraîtra plus claire par la suite. Ainsi pour dériver l'équation d'amplitude, nous pourrions au choix étudier le système de Turing ou la convection de Rayleigh-Bénard, mais nous allons opter pour un autre système qui a le mérite de conduire à des calculs algébriques allégés. Notre but ici étant d'exposer le principe de l'analyse et non les détails algébriques qui peuvent être plus au moins compliqués selon les systèmes. En vertu de l'universalité de la problématique, nous n'affecterons pas la généralité du résultat en adoptant pourtant un point de départ simplifié.

Adoptons donc un système relativement simple, associé à l'équation modèle non linéaire suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = [\epsilon - (1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2})^2]\phi + \alpha\phi^2 - \phi^3 \tag{10.2}$$

où ϕ est une fonction scalaire de deux variables x et t décrivant l'évolution du système dynamique non linéaire (par exemple, une composante de la vitesse en convection, etc.) et α et ϵ sont deux paramètres du système. La forme de cette équation nous montre qu'elle présente deux non-linéarités, l'une quadratique et l'autre cubique[2] ; sans le terme quadratique, cette équation est connue sous le nom de Swift-Hohenberg[3] (SH) (voir référence [21]). Étudions dans une première étape la solution homogène de l'équation 10.2 et sa stabilité.

Solution homogène

L'équation de Swift-Hohenberg (SH) a été initialement introduite comme un modèle simple de la convection de Rayleigh-Bénard, pour laquelle $\epsilon = (R - R_c)/R$ est le nombre de Rayleigh relatif, R le nombre de Rayleigh et R_c le nombre de Rayleigh critique associé à la mise en mouvement du fluide. L'équation précédente 10.2 admet la solution homogène $\phi = 0$ (une vitesse nulle dans le problème de convection).

Stabilité linéaire

La première étape de l'étude d'un système dynamique consiste à étudier la stabilité de la solution homogène. À cet effet, superposons à la solution homogène une perturbation de la forme $\phi = \nu\phi_1(x,t)$ (ν est un petit paramètre). En reportant dans l'équation dépendant du temps (équation 10.2) et en ne gardant que les termes du 1^{er} ordre en ν, nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = [\epsilon - (1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2})^2]\phi_1 \ . \tag{10.3}$$

[2]Notons, dès à présent, que le choix d'une fonction non linéaire arbitraire conduit à une même conclusion au regard de la forme finale de l'équation d'évolution ; en effet, cette équation peut être modifiée à volonté, par exemple nous pouvons rajouter des dérivées d'ordre supérieur ou des puissances plus élevées de la fonction ϕ sans affecter la forme de l'équation d'amplitude que nous allons dériver.

[3]Du nom des deux physiciens américains, Jack B. Swift et Pierre C. Hohenberg qui la dérivèrent en 1977 pour modéliser la formation de structures dans un fluide soumis à une convection thermique.

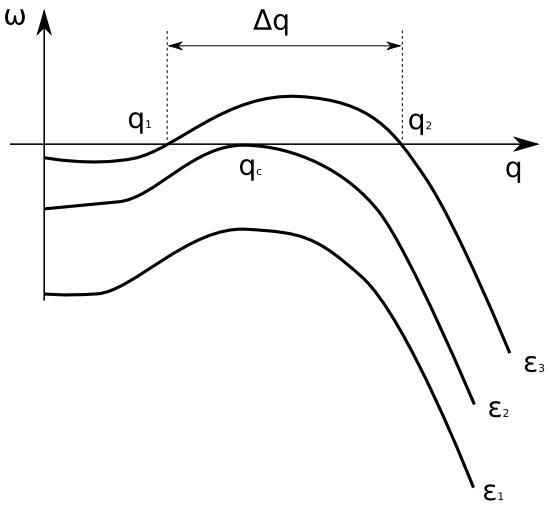


Figure 10.1 – Relation de dispersion pour trois valeurs de ϵ : $\epsilon_1 < 0$ (stable), $\epsilon_2 = 0$ (critique) et $\epsilon_3 > 0$ (instable).

Grâce à la linéarité et au caractère autonome de l'équation (i.e., les coefficients dans l'équation sont indépendants du temps), recherchons une solution sous la forme $e^{iqx+\omega t}$ pour obtenir la relation de dispersion suivante :

$$\omega = \epsilon - (q^2 - 1)^2 \, . \tag{10.4}$$

Le taux de croissance ω de la perturbation est donc négatif pour toute valeur négative du paramètre de Rayleigh relatif (ϵ). Lorsque le nombre de Rayleigh R est égal au nombre de Rayleigh critique R_c, le paramètre ϵ est nul, et la courbe $\omega(q)$ est tangente à l'axe des abscisses q pour un vecteur d'onde critique $q_c = 1$; une valeur nulle du paramètre ($\epsilon = 0$) représente la condition critique pour l'instabilité. Dès que ce paramètre est positif ($\epsilon > 0$), les modes à l'intérieur de la bande active Δq croissent exponentiellement dans le temps, et l'analyse linéaire n'est plus valable. Loin du seuil de l'instabilité, les effets non linéaires ne permettent généralement pas d'obtenir une solution analytique ; un calcul numérique s'impose. Cependant, près du seuil de l'instabilité, l'étude analytique est possible et c'est ce que nous nous proposons d'effectuer maintenant.

10.1.1 Introduction des échelles multiples

Pour des valeurs petites de ϵ, la bande des vecteurs d'ondes des modes instables (obtenue en résolvant $\omega = 0 = \epsilon - (q^2 - 1)^2$) est petite également. Les deux vecteurs d'ondes q_1 et q_2 (voir figure 10.1) solutions de cette équation sont donnés par $q_2 = \sqrt{1 + \sqrt{\epsilon}} \simeq 1 + \sqrt{\epsilon}/2$ et $q_1 = \sqrt{1 - \sqrt{\epsilon}} \simeq 1 - \sqrt{\epsilon}/2$. Ceci

entraîne que la bande active est telle que :

$$\Delta q = q_2 - q_1 \simeq \sqrt{\epsilon}\ . \tag{10.5}$$

Ceci veut dire que la bande de vecteurs d'ondes des modes instables est étroite. Dans le régime linéaire, toute fonction en e^{iqx} est solution, et le vecteur d'onde est un nombre réel quelconque. La solution la plus générale est obtenue par superposition de tous les modes, soit :

$$\phi_1(x,t) = \sum_q a_q(t) e^{iqx} \simeq \sum_{\Delta q} a_q(t) e^{iqx}\ , \tag{10.6}$$

où $a_q(t)$ est l'amplitude du mode de Fourier fonction du temps t (dans le régime linéaire elle est en $e^{\omega t}$, mais nous gardons pour le moment a_q comme notation, car notre objectif est l'extension du résultat au régime non-linéaire). Le premier terme correspondant à une somme portant sur tous les vecteurs d'ondes. Le second terme se limite à la somme sur les vecteurs d'ondes appartenant à la bande instable Δq ; en effet, seuls les vecteurs d'ondes à l'intérieur de la bande instable Δq sont actifs, c'est-à-dire instables, alors que les modes en dehors de cette bande relaxent dans le temps vers une solution homogène. C'est pourquoi, il est justifié de restreindre ce terme à la somme portant seulement sur ces nombres d'ondes.

Réécrivons la fonction $\phi_1(x,t)$ (équation de la perturbation 10.6) en introduisant le vecteur d'onde critique q_c :

$$\phi_1(x,t) = e^{iq_c x} \sum_{\Delta q} a_q(t) e^{i(q-q_c)x}\ . \tag{10.7}$$

Étant donné que $q - q_c \sim \Delta q \sim \sqrt{\epsilon} << 1$, on peut dire que ϕ_1 décrit un paquet d'ondes très piqué et centré sur le vecteur d'onde critique q_c dans l'espace de Fourier (dans le cas extrême où $\epsilon \to 0$, nous avons même une fonction de Dirac $\delta(q - q_c)$). Utilisons le fait que la transformée de Fourier d'une fonction très étroite dans l'espace de Fourier est une fonction très étalée dans l'espace réel (à titre d'exemple la transformée de Fourier de la fonction de Dirac $\delta(q - q_c)$ est une constante) et posons :

$$A(x,t) \equiv \sum_{\Delta q} a_q(t) e^{i(q-q_c)x}\ . \tag{10.8}$$

Comme $q - q_c \sim \sqrt{\epsilon}$ est petit, l'amplitude complexe A varie sur une échelle spatiale de l'ordre de $1/\sqrt{\epsilon}$. En effet, en effectuant le changement de variable suivant : $Q = (q - q_c)/\sqrt{\epsilon}$, la variable Q est de l'ordre de l'unité et l'amplitude $A(x,t)$ est du type :

$$A(x,t) \equiv \sum_{\Delta Q} a_Q(t) e^{iQ\sqrt{\epsilon}x}\ . \tag{10.9}$$

Cette formulation nous permet de mettre en évidence que l'amplitude A est, en fait, fonction du produit $\sqrt{\epsilon}x$ et non de la seule variable x. Nous pouvons donc réécrire la solution $\phi_1(x,t)$ comme :

$$\phi_1(x,t) = A(\sqrt{\epsilon}x, t)e^{iq_c x} + c.c. \tag{10.10}$$

où *c.c.* est l'acronyme de « complexe conjugué ». Par ailleurs au voisinage du seuil de l'instabilité ($q \simeq 1$), d'après la relation de dispersion (équation 10.4), le taux de croissance ω de l'instabilité est de l'ordre ϵ (i.e. $\omega \simeq \epsilon$). Ainsi en posant $\Omega = \omega/\epsilon$ (avec Ω d'ordre 1), la dépendance temporelle de la perturbation $e^{\omega t}$ s'exprime comme $e^{\Omega\epsilon t}$ associée donc à un temps caractéristique d'évolution de $1/\epsilon$: la dynamique est lente au voisinage de l'instabilité (voir la notion de dynamique lente et de ralentissement critique dans la section 2.3.2). La perturbation ϕ_1 est donc composée d'une oscillation spatiale rapide ($e^{iq_c x}$) et d'une amplitude lentement variable dans l'espace et dans le temps $A(\sqrt{\epsilon}x, \epsilon t)$. Pour bien mettre en évidence le fait que A varie lentement, il est d'usage d'introduire les variables lentes X et T (voir section 2.3.3) définies ici par :

$$X = \sqrt{\epsilon}x, \quad T = \epsilon t\ . \tag{10.11}$$

L'amplitude A n'est fonction que de ces deux variables lentes $A(X,T)$, alors que la fonction ϕ de l'équation SH initiale dépend des trois variables $\phi(x,X,T)$. Nous venons d'introduire la notion d'échelles multiples évoquée notamment au début de l'ouvrage (section 2.3.3). Si l'aspect temporel des échelles multiples a été abordé à de nombreuses reprises dans cet ouvrage, c'est la première fois que nous abordons l'aspect spatial des échelles multiples spatiales avec l'introduction de la variable spatiale lente X.

Afin d'exploiter pleinement l'introduction des échelles multiples, nous allons traiter les trois variables x, X, T comme si elles étaient indépendantes. Par conséquent, nous devons modifier les opérateurs de dérivation pour se conformer à ce choix :

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{\epsilon}\frac{\partial}{\partial X} \tag{10.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \epsilon\frac{\partial}{\partial T}\ . \tag{10.13}$$

Reportons ces transformations dans l'équation SH (équation 10.2), pour obtenir

$$\epsilon\frac{\partial\phi}{\partial T} = \left[\epsilon - \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\sqrt{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial x X} + \epsilon\frac{\partial^2}{\partial X^2}\right)^2\right]\phi + \alpha\phi^2 - \phi^3\ . \tag{10.14}$$

Notons que l'introduction des échelles multiples dans l'analyse du système a l'avantage d'expliciter la dépendance des fonctions en fonction du paramètre ϵ, ce qui facilite le calcul perturbatif en puissance de ce petit paramètre puisque le comptage des puissances de ϵ est de ce fait automatique.

10.1.2 Dérivation de l'équation d'amplitude

La stratégie consiste maintenant à développer la fonction ϕ en puissance du petit paramètre ϵ pour déduire des solutions d'ordre élevé. Comme la plus petite puissance qui apparaît dans l'équation d'évolution du système (équation 10.14) est d'ordre $\sqrt{\epsilon}$, il est naturel de penser que la fonction ϕ puisse s'écrire sous la forme suivante :

$$\phi(x, X, T) = \sqrt{\epsilon}\phi_1 + \epsilon\phi_2 + \epsilon^{3/2}\phi_3 + ... \tag{10.15}$$

Reportons cette expression dans l'équation d'évolution du système (équation 10.14) pour déduire les contributions ordre par ordre.

Ordre $\sqrt{\epsilon}$

Réduit à cet ordre en $\sqrt{\epsilon}$, l'équation d'évolution du système (équation 10.14) s'écrit comme :

$$(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2})^2\phi_1 \equiv L\phi_1 = 0 \tag{10.16}$$

où nous avons introduit l'opérateur $L = (1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2})^2$. C'est une équation aux dérivées partielles puisque la fonction ϕ_1 dépend des trois variables x, X, T (i.e. $\phi_1 = \phi_1(x, X, T)$) ; en toute généralité, les constantes d'intégration dépendent donc des variables X et T. La solution acceptable[4] est de type :

$$\phi_1 = A(X, T)e^{ix} + c.c. \tag{10.17}$$

Cette solution n'est rien d'autre que la solution linéaire stationnaire du système.

Ordre ϵ

À cet ordre, nous obtenons :

$$L\phi_2 = \alpha\phi_1^2 - 4(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2})\frac{\partial^2}{\partial x X}\phi_1 = \alpha(A^2e^{2ix} + AA^* + c.c.) \tag{10.18}$$

où A^* désigne le complexe conjugué de A. La solution obtenue à partir de l'équation 10.18 est constituée de la somme de la solution de l'équation sans second membre (soit $B(X, T)e^{ix} + c.c.$) et d'une solution particulière de l'équation complète. La solution générale s'écrit ainsi sous la forme

$$\phi_2 = B(X, T)e^{ix} + \alpha\frac{A^2}{9}e^{2ix} + AA^* + c.c. \tag{10.19}$$

[4]Par acceptable, nous entendons une solution qui se comporte convenablement à l'infini (i.e. pour $x \gg 1$), autrement dit, une solution qui ne diverge pas à l'infini. Car en toute généralité, la solution complète est composée des deux solutions individuelles e^{ix} et xe^{ix}, soit $\phi_1 = A(X, T)e^{ix} + D(X, T)xe^{ix} + c.c.$, mais comme la solution ne doit pas diverger à l'infini, nous devons éliminer la seconde contribution en imposant $D = 0$.

Notons donc que la réponse du système à cet ordre engendre la seconde harmonique e^{2ix}. À cet ordre, les coefficients A et B ne sont pas déterminés ; le résultat principal est obtenu à l'ordre suivant.

Ordre $\epsilon^{3/2}$

L'équation du système à cet ordre s'écrit comme :

$$L\phi_3 = \phi_1 - 4\frac{\partial^4\phi_1}{\partial x^2\partial X^2} - \frac{\partial\phi_1}{\partial T} - 4(1+\frac{\partial^2}{\partial x^2})\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x\partial X} + 2\alpha\phi_1\phi_2 - \phi_3 \qquad (10.20)$$

qui peut être réécrite comme :

$$L\phi_3 = [A+4A_{XX}-A_T-(3-\frac{38}{9}\alpha)A^2A^*]e^{ix}+F(X,T)e^{3ix}+G(X,T)e^{2ix}+c.c. \qquad (10.21)$$

où F et G sont des fonctions dépendant des coefficients A et B qu'il n'est pas besoin de préciser pour des raisons qui vont devenir claire ci-dessous ; afin d'alléger l'écriture de cette équation, nous avons symbolisé les dérivées par une notation indicielle (i.e. $\frac{\partial A}{\partial T} = A_T$ et $\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} = A_{XX}$). L'équation d'évolution du système à l'ordre $\epsilon^{3/2}$ (équation 10.21) est inhomogène[5] : la solution complète est composée d'une solution de l'équation sans second membre ($E(X,T)e^{ix}+c.c.$) plus une solution particulière de l'équation avec second membre. Or, et c'est là le point principal, le second membre de l'équation contient une fonction e^{ix} qui est *résonante*[6], c'est-à-dire que la fonction e^{ix} est une fonction propre de l'opérateur L, de valeur propre associée nulle. La réponse du système à cette fonction diverge, à l'image de la divergence de la solution associée à un oscillateur harmonique, sans frottement, excité par une force ayant la fréquence propre de l'oscillateur. La seule issue pour assurer un comportement acceptable (i.e. non divergent) est donc d'annuler le facteur précédant la fonction e^{ix} dans l'équation d'évolution 10.21. Il s'agit d'une condition de solvabilité. Cette condition est du même type que celle introduite lors de l'étude de l'équation d'amplitude temporelle au voisinage d'une bifurcation de Hopf (chapitre 6). Notons que nous aurions pu également évoquer le théorème de l'alternative de Fredholm (voir la section 6.1.1) pour aboutir au même résultat.

La nécessité d'annuler la contribution divergente de la fonction e^{ix} revient à annuler le facteur $[A + 4A_{XX} - A_T - (3 - \frac{38}{9}\alpha)A^2A^*]$ le précédant dans l'équation 10.21, et nous permet d'obtenir l'équation d'amplitude recherchée :

$$A_T = A + 4A_{XX} - (3 - \frac{38}{9}\alpha)|A|^2A\ . \qquad (10.22)$$

[5] Rappelons qu'une équation est dite homogène lorsqu'elle n'a pas de second membre (i.e. $L\phi = 0$) et inhomogène sinon (i.e. l'équation comporte un second membre $L\phi(x,X,T) = F(X,T)$).

[6] La notion de résonance spatiale se présente, sur le plan mathématique, comme la résonance temporelle que nous avons déjà rencontrée aux chapitres précédents, voir notamment le chapitre dédié à l'étude de l'équation d'amplitude universelle au voisinage d'une bifurcation de Hopf (chapitre 6), la section consacrée à son analyse multi-échelle 6.1.1.

Cette équation est connue sous les noms d'*équation d'amplitude*, d'*équation de Landau-Ginzburg* ou encore d'*équation de Newell-Whitehead-Segel*[7], les deux dernières dénominations sont issues du nom des scientifiques qui l'ont dérivée dans des contextes différents. Notons que, puisque les fonctions F et G ne sont pas facteurs de la fonction e^{ix}, aucune contrainte n'est donc à imposer à leur égard ; c'est pourquoi leur forme est sans intérêt pour notre calcul[8].

10.2 Quelques propriétés de l'équation d'amplitude

Nous allons étudier dans cette section certaines propriétés générales de l'équation d'amplitude.

10.2.1 La forme de l'équation d'amplitude obtenue à partir des symétries

Soulignons que le point principal de cette étude réside dans l'*universalité* de la forme de l'équation d'amplitude au voisinage du seuil. Peu importe l'équation de départ (ici l'équation 10.2), l'équation d'amplitude adoptera toujours cette forme à condition que le système (dans notre cas, associé ici à l'équation 10.2) jouisse de l'invariance par translation et par inversion. La forme de l'équation d'amplitude (équation 10.22) jouit bien de la symétrie $X \to -X$ correspondant à une invariance par inversion, propriété qui résulte de la même invariance associée à l'équation de départ (équation 10.2). L'équation de départ est de plus invariante par une translation de la variable x.

En effet, rappelons que l'amplitude A multiplie dans la solution générale l'harmonique e^{ix} et A^2 la seconde harmonique e^{2ix}, etc.(voir par exemple l'équation 10.19). Ceci signifie qu'en effectuant l'opération $x \to x + x_0$, c'est-à-dire, en modifiant l'origine de l'axe Ox, en la portant au point arbitraire x_0, ceci revient à effectuer, au sein de la solution générale, les opérations $Ae^{ix} \to Ae^{i(x+x_0)} = Ae^{ix_0}e^{ix}$. Autrement dit, l'opération revient à faire le changement sur l'amplitude A

$$A \to Ae^{ix_0} \ . \tag{10.23}$$

Si l'on effectue une telle opération sur l'équation d'amplitude (équation 10.22), celle-ci reste invariante. Cependant, si cette équation contenait des termes quadratiques, comme A^2 ou $|A|^2$, l'équation ne serait plus invariante par un changement de type $A \to Ae^{ix_0}$. C'est pourquoi il n'y a pas de terme quadratique, ni de terme en puissance de 3 (i.e. A^3, A^{*3}) dans cette équation d'amplitude.

[7] Cette équation a été dérivée en étudiant un problème de la convection de Rayleigh-Bénard (voir référence [21]).

[8] Ceci reste valable tant que nous restreignons notre analyse au plus bas ordre de l'équation d'amplitude.

10.2.2 Les coefficients sont réels : conséquence de la symétrie d'inversion

Écrivons l'équation d'amplitude (équation 10.22) sous sa forme la plus générale :

$$A_T = \alpha_1 A + \alpha_2 A_{XX} + \alpha_3 |A|^2 A \,, \tag{10.24}$$

où α_ℓ ($\ell = 1, 2, 3$) sont des coefficients *a priori* complexes. En effectuant la symétrie d'inversion $x \to -x$, nous effectuons donc la transformation $A \to A^*$ dans l'expression du champ ϕ qui décrit la dynamique (notamment ϕ_1, ϕ_2 issus des équations 10.10 et 10.19). Il en résulte que les équations d'amplitude associées à A et à A^* sont équivalentes. Prenons alors le complexe conjugué de l'équation d'amplitude générique (équation 10.24), et imposons l'équivalence entre les deux équations ; nous obtenons $\alpha_\ell = \alpha_{\ell *}$ ($\ell = 1, 2, 3$). Autrement dit, les coefficients α_ℓ sont tous réels. Nous verrons que ceci cesse d'être vrai en présence d'une bifurcation de Hopf, même si l'équation de départ possède la symétrie d'inversion. Dans ce cas, même si l'équation jouit elle-même de la symétrie d'inversion, la solution de l'équation ne dispose pas de la même propriété. Insistons sur le fait que c'est la solution qui porte en elle les brisures de symétrie et non l'équation d'évolution de départ ! C'est pourquoi l'expression « brisure spontanée de symétrie » pour qualifier l'évolution du système est utilisée.

10.2.3 Forme canonique et autres formes équivalentes de l'équation d'amplitude

En effectuant un changement de variables adéquat, l'équation d'amplitude peut toujours être réduite à une forme canonique où tous les coefficients sont égaux à l'unité. En effet, posons l'équation sous la forme

$$A_T = aA + bA_{XX} - c|A|A \tag{10.25}$$

où a, b, c sont des constantes réelles et effectuons les transformations de variables suivantes : $A \to A\sqrt{c/a}$, $X \to X\sqrt{a/b}$ et $T \to aT$; l'équation d'amplitude prend alors la forme canonique suivante :

$$A_T = A + A_{XX} - |A|^2 A \,. \tag{10.26}$$

Il est parfois utile que le petit paramètre ϵ apparaisse explicitement dans l'équation d'amplitude. L'amplitude A, telle qu'elle a été introduite précédemment est d'ordre unité, puisque nous avons introduit ϵ explicitement dans le développement de la fonction ϕ (voir équation 10.15) ; l'amplitude physique est donc d'ordre $\sqrt{\epsilon}$. Ceci suggère le changement de variable $\tilde{A} = A\sqrt{\epsilon}$ où $\tilde{A}$ est l'amplitude physique. En utilisant les variables rapides reliées aux variables lentes par $X = x\sqrt{\epsilon}$ et $T = \epsilon t$, l'équation d'amplitude précédente (équation 10.26) prend la forme

$$\tilde{A}_t = \epsilon \tilde{A} + \tilde{A}_{xx} - |\tilde{A}|^2 \tilde{A} \,. \tag{10.27}$$

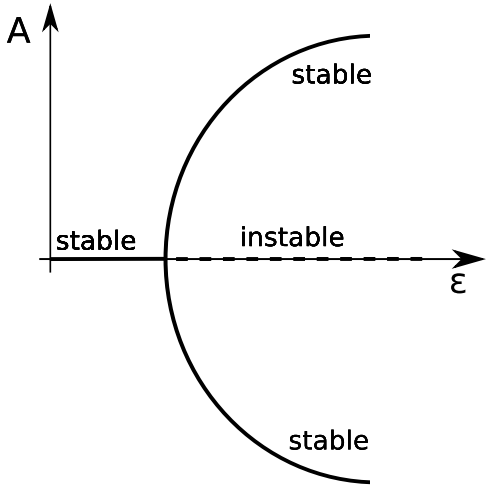


Figure 10.2 – Solution d'équilibre. La partie en pointillés correspond à une solution instable.

Nous allons par la suite omettre le « tilda ». Intéressons-nous au cas où l'amplitude est homogène. Dans ce cas la phase est constante, et peut être prise égale à zéro. En effet, en posant $A = \rho e^{i\psi}$, où ρ est l'amplitude et ψ la phase, nous obtenons à partir de l'équation d'amplitude précédente (équation 10.27) : $d\psi/dt = 0$. L'équation d'amplitude 10.27 admet comme solutions d'équilibre (ou points fixes)

$$A_0 = 0, \quad A_0 = \pm\sqrt{\epsilon}\,. \tag{10.28}$$

La première solution existe toujours, tandis que la seconde n'existe que pour des valeurs du paramètre ϵ strictement positives (i.e. $\epsilon > 0$). Le diagramme de l'amplitude A en fonction du paramètre ϵ (voir figure 10.2) représente les solutions d'équilibre (ou points fixes) où nous montrons la présence d'une bifurcation *fourche*[9].

10.2.4 Dynamique variationnelle de l'équation d'amplitude

Dans le cas où A est indépendant de x, l'équation 10.27 peut s'écrire comme

$$A_t = -\frac{\partial}{\partial A}\left[-\epsilon\frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{4}\right] = -\frac{\partial V}{\partial A} \tag{10.29}$$

[9]Elle est dite également bifurcation directe – par opposition à une bifurcation inversée réservée à la bifurcation sous-critique ; cette bifurcation est analogue à une transition du second ordre. Toutes ces notions ont été déjà introduites auparavant (en particulier dans les chapitres 2 et 3).

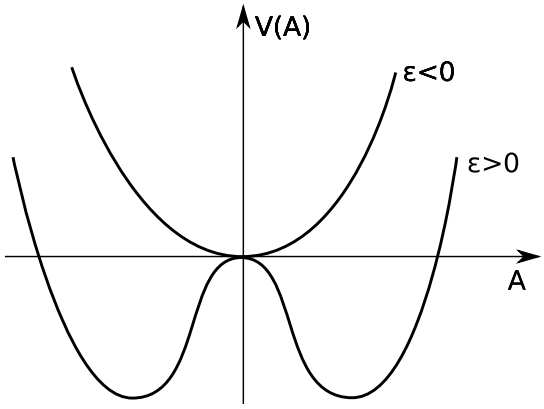


Figure 10.3 – Le potentiel $V(A)$ en fonction de A. Pour $\epsilon > 0$, la solution $A = 0$ devient instable.

où nous rappelons ici que l'amplitude physique A est de type réel[10].

Cette équation est l'analogue en mécanique d'une équation d'une particule avec frottement mais sans masse se déplaçant dans le potentiel $V(A) = -\epsilon A^2/2 + A^4/4$ (voir l'allure du potentiel dans la figure 10.3). Pour des paramètres ϵ négatifs ($\epsilon < 0$), le potentiel V a un seul minimum en $A = 0$; par analogie avec la mécanique, la solution $A_0 = 0$ est stable (toutes ces notions ont été développées dans les deux chapitres 2 et 3). Pour $\epsilon > 0$, le minimum du potentiel en $A = 0$ devient un maximum, alors que deux minima apparaissent en $A = A_0 = \pm\sqrt{\epsilon}$. La solution $A_0 = 0$ perd sa stabilité au profit des deux solutions $A = A_0 = \pm\sqrt{\epsilon}$; la solution $A = A_0 = 0$ a bifurqué vers une nouvelle solution stable. Les courbes continues sur la figure 10.2 représentent les branches stables, alors que les courbes en pointillès se réfèrent aux branches instables[11].

Avant de clore ce paragraphe, il est important de noter que dans le cas général où l'amplitude est inhomogène, l'équation d'amplitude 10.27 dérive d'une fonctionnelle[12] $V[A]$ en ce sens que :

$$A_t = -\frac{\delta}{\delta A^*} V[A] = -\frac{\delta}{\delta A^*} \int dx \left[-\epsilon \frac{|A|^2}{2} + \frac{|A|^4}{4} + \frac{|A_x|^2}{2} \right] \qquad (10.30)$$

[10] Dans le cas où A est indépendant de x, on peut facilement voir à partir de l'équation 10.26, en posant $A = \rho e^{i\psi t}$ (où ρ est une amplitude et ψ une phase), que ψ obéit à $\psi_t = 0$. La phase est donc constante et peut être prise égale à zéro.

[11] Ce comportement est similaire à celui rencontré pour les transitions de phase du second ordre au sens de Landau, où la solution haute température, caractérisée par un paramètre d'ordre nul, se déstabilise au profit d'un état avec un paramètre d'ordre qui se comporte comme $\sqrt{(T_c - T)/T_c}$, où T_c est la température critique ; ϵ, dans le cas traité ici, joue le même rôle que $(T - T_c)/T_c$.

[12] Se référer au problème 3.9.4 pour la notion de dérivée fonctionnelle.

où $\delta/\delta A^*$ désigne la dérivée fonctionnelle par rapport à A^* (le complexe conjugué de A) ; cette dérivée fonctionnelle s'exprime à l'aide des dérivées partielle et totale comme :

$$\frac{\delta}{\delta A^*} \to \frac{\partial}{\partial A^*} - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial A_x^*} \tag{10.31}$$

qui constitue l'expression habituelle de la dérivée d'Euler-Lagrange rencontrée en mécanique dans le cadre du principe de moindre action (voir équation 3.54). Dans le cas où l'amplitude est homogène, nous retrouvons - comme analogue mécanique – que l'évolution de l'amplitude dérive d'un potentiel (équation 10.29). La quantité $V[A]$ est connue sous le nom de *fonctionnelle de Lyapunov* et possède la propriété suivante :

$$\frac{\partial V[A]}{\partial t} = \frac{\delta V}{\delta A^*}\frac{\partial A^*}{\partial t} = -|\frac{\delta V}{\delta A^*}|^2 \leq 0\,, \tag{10.32}$$

où l'on a utilisé le fait que A^* obéit à l'équation $\partial A^*/\partial t = -\delta V[A]/\delta A$. La fonctionnelle $V[A]$ décroît de façon monotone dans le temps jusqu'à atteindre une valeur stationnaire[13].

10.3 Instabilité d'Eckhaus

Dans les situations réelles, l'amplitude A est en toute généralité une fonction de l'espace[14]. Car il existe toujours des imperfections et des conditions aux limites (par exemple des parois), qui conduisent à des modulations de l'ordre et donc à une dépendance de l'amplitude en fonction des variables d'espace. En fait, nous allons voir que l'ordre peut même devenir instable vis-à-vis d'une modulation. Il est donc important de considérer l'aspect inhomogène du problème. Considérons la forme canonique de l'équation d'amplitude (équation 10.26). Cette équation admet une solution stationnaire :

$$A_0(X) = \sqrt{1-q_0^2}e^{iq_0X}, \quad |q_0| < 1 \tag{10.33}$$

où q_0 est un nombre réel de module plus petit que l'unité, mais arbitraire. En considérant la variable d'origine x, écrivons la solution linéaire de l'équation de SH (équation 10.10) comme :

$$\phi_1 = \sqrt{\epsilon}A(X,T)e^{ix} + c.c. = \sqrt{\epsilon}\sqrt{1-q_0^2}e^{iqx} + c.c., \quad \text{avec} \quad q = 1 + \sqrt{\epsilon}q_0\,. \tag{10.34}$$

[13] Le problème de la dynamique au voisinage du seuil est similaire au problème d'approche de l'équilibre thermodynamique où A serait la variable thermodynamique et $V[A]$ un potentiel approprié – par exemple, une énergie libre dans le cas d'une évolution à volume et température constants.

[14] Lorsque l'amplitude A est réduite à une constante, nous sommes en présence d'un ordre parfait qui existe peu dans la Nature.

Les effets non linéaires déplacent la fréquence d'oscillation spatiale 1 en $q = 1 + q_0\sqrt{\epsilon}$. La condition $|q_0| < 1$ devient

$$\epsilon > (q-1)^2 \ . \tag{10.35}$$

Rappelons que nous avons considéré la forme canonique de l'équation d'amplitude (équation 10.26). Si nous avions considéré l'équation 10.22 obtenue directement de l'équation de Swift-Hohenberg (équation 10.2), l'amplitude de la solution périodique stationnaire serait égale à $\sqrt{1-4q_0^2}/\sqrt{3-38\alpha/9}$, et non à $\sqrt{1-q_0^2}$. Il s'ensuit (en gardant les mêmes notations que dans l'étude de la forme canonique) que la solution stationnaire n'existe que si $q_0^2 < 1/4$, et la condition 10.35 devient

$$\epsilon > 4(q-1)^2 \ . \tag{10.36}$$

La relation de dispersion issue de l'équation de Swift-Hohenberg (équation 10.4) nous montre que la solution triviale $\phi = 0$ est instable (i.e. $\omega > 0$) si $\epsilon > (q^2-1)^2$, ou encore (puisque q est proche de l'unité en vertu du fait que ϵ est petit) si $\epsilon > 4(q-1)^2$. Ainsi, la condition d'existence d'un état stationnaire (inégalité 10.36) coïncide donc avec la région d'instabilité linéaire de la solution $\phi = 0$. Nous continuerons par la suite notre analyse sur l'équation d'amplitude canonique (équation 10.26) en se souvenant que dans cette forme la condition de stabilité de l'état $\phi = 0$ correspond à $\epsilon > (q-1)^2$, et non à $\epsilon > 4(q-1)^2$.

Ces états stationnaires périodiques en x définis ci-dessus ne sont pas tous stables. Une partie d'entre eux est instable vis-à-vis d'une modulation de la phase (ou, de manière équivalente, modulation de la longueur d'onde), comme on va le voir. En introduisant explicitement les parties réelle et imaginaire de l'amplitude A, soit :

$$A = \rho e^{i\psi} \tag{10.37}$$

où ρ est une variable réelle associée à l'intensité de l'amplitude réelle et ψ la variable associée à la phase, l'équation d'amplitude canonique (équation 10.26) se subdivise en deux équations correspondant aux parties réelle et imaginaire de l'équation d'amplitude, soit :

$$\begin{aligned} \rho_T &= (1-\psi_X^2)\rho - \rho^3 + \rho_{XX} \ , \\ \psi_T &= \psi_{XX} + \frac{2}{\rho}\psi_X\rho_X \ . \end{aligned} \tag{10.38}$$

La stabilité linéaire de la solution stationnaire (équation 10.34) est traitée en posant :

$$\rho = \sqrt{1-q_0^2} + \rho_1 \ , \quad \psi = q_0 x + \psi_1 \ . \tag{10.39}$$

En ne retenant que les termes linéaires de l'équation d'amplitude 10.38, nous obtenons un système linéaire et homogène pour les variables ρ_1 et ψ_1. La recherche des solutions sous la forme $(\rho_1, \psi_1) = (a, b)e^{iQx+\sigma t}$, où a et b sont

deux constantes arbitraires, nous permet d'établir le système de deux équations à deux inconnues (a, b) :

$$[\sigma + 2\rho_0^2 + Q^2]a + 2i\rho_0 q_0 Q b = 0, \tag{10.40}$$

$$-\frac{2iq_0 Q}{\rho_0}a + [\sigma + Q^2]b = 0. \tag{10.41}$$

L'annulation du déterminant nous fournit la relation de dispersion, dont la solution est donnée par :

$$\sigma_\pm = q_0^2 - Q^2 \pm \sqrt{(q_0^2 - 1)^2 + 4q_0^2 Q^2}\ . \tag{10.42}$$

σ_- est toujours négatif. En revanche, la branche σ_+ peut devenir positive. On peut facilement vérifier que c'est le cas si $q_0^2 > 1/3$ (voir également le prochain paragraphe), c'est-à-dire que la solution stationnaire, existant pour des paramètres $|q_0| < 1$, devient instable dès lors que $|q_0| > 1/\sqrt{3}$. D'après la relation entre q et q_0 (voir équation 10.34), cette instabilité, dite « instabilité d'Eckhaus », se déclenche pour des valeurs du paramètre ϵ telles que :

$$\epsilon < (q-1)^2/3\ . \tag{10.43}$$

L'existence de cette instabilité réduit la bande initiale des états possibles (i.e. $|q-1| < \sqrt{\epsilon}$, équation 10.35) en une bande plus étroite définie par $|q-1| < \sqrt{\epsilon}/\sqrt{3}$.

10.3.1 L'instabilité d'Eckhaus : une instabilité de la phase

Afin d'identifier la nature précise de cette instabilité, procédons à l'analyse des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\sigma_\pm$. La branche σ_+ devient d'abord positive pour des valeurs du paramètre Q assez petites (donc pour de grandes longueurs d'onde). En effet, en réécrivant l'expression de σ_+ comme :

$$\sigma_+ = 2Q^2 \frac{3q_0^2 - 1 - Q^2/2}{\rho_0^2 + Q^2 + \sqrt{(q_0^2-1)^2 + 4q_0 Q^2}} \tag{10.44}$$

nous constatons que le signe de σ_+ est déterminé par le numérateur ; dès lors que la condition $q_0^2 > 1/3$ est réalisée, la branche σ_+ devient positive, ce qui se produit tout d'abord pour des petites valeurs[15] de Q.

[15] Ceci est une conséquence de la symétrie par translation spatiale : si $\phi(x)$ est solution, il en est de même de $\phi(x + x_0)$, où x_0 est une translation arbitraire, correspondant à un déplacement de la phase de qx_0 : ce mode revient à déplacer en bloc la structure périodique. Comme il s'agit d'une solution équivalente à la solution de départ, nous pouvons voir que ce mode de déplacement en bloc a un temps de vie infini, ou, plus précisément, un temps de relaxation infini vers le mode initial. Souvent appelé mode de Goldstone, c'est un mode lent qui dicte la dynamique du système. En effet, en effectuant une modulation du mode de déplacement global, ce sont bien les modes les plus lents qui sont, par continuité, les plus proches du mode de déplacement homogène ; ces modes sont associés aux grandes longueurs d'onde, soit des petites valeurs de Q.

Pour des petites valeurs de Q, nous trouvons aisément que :

$$\sigma_+ \simeq \frac{3q_0^2 - 1}{1 - q_0^2} Q^2, \quad \sigma_- \simeq -2\rho_0^2, \tag{10.45}$$

Reportons chacune de ces expressions dans l'une des deux équations[16] du système linéaire 10.41, pour obtenir les conditions suivantes :

$$\frac{a}{b} \simeq \frac{-iq_0}{\rho_0} Q \ll 1, \quad \frac{a}{b} \simeq \frac{i\rho_0^3}{Qq_0} \gg 1, \tag{10.46}$$

où nous avons utilisé le fait que Q est petit. La première inégalité, associée au mode instable de valeur propre σ_+, indique que les constantes a et b sont telles que la valeur de a doit être très inférieure à celle de b (i.e. $a \ll b$) ; par conséquent, la dynamique est dominée par celle de la phase[17]. La deuxième inégalité se rapporte au mode stable de type amplitude associé à σ_-. En conclusion, l'amplitude relaxe vite dans le temps (mode stable), et le mode instable -dit parfois mode dangereux- est le mode associé à la phase. En d'autres termes, l'amplitude peut être considérée comme adiabatiquement asservie à la phase. Ceci revient à poser $\psi_T = 0$. En outre, on néglige ρ_{XX} (voir juste après), ce qui conduit, en utilisant 10.38, à $\rho_0 \simeq \sqrt{1 - K^2}$ où $K = \psi_X$ est le vecteur d'onde local. Par itération, on peut voir que $\rho_{XX} \sim \psi_{XXX}$ produit une dérivée d'ordre supérieure en ψ par rapport à celle qui sera présente dans l'équation de la diffusion de la phase dérivée ci-après. Par conséquent, ce terme peut être légitimement éliminé.

Une manière qualitative et instructive de présenter ce résultat est la suivante. La première équation d'amplitude du système 10.38 est assez "raide", en ce sens qu'une petite perturbation relaxe immédiatement vers l'intensité ρ_0 (la partie linéaire du second membre indique une relaxation exponentielle). Dans le second membre de cette équation, le terme $\partial^2/\partial X^2$ signifie seulement que la perturbation se propageant par diffusion ne pourra pas modifier rapidement l'amplitude en un point donné. Il s'ensuit que, d'un point à l'autre, nous pouvons supposer que ρ reste sensiblement constant, et n'est seulement fonction que du vecteur d'onde local. Cette équation nous dit donc que l'amplitude est à peu près donnée par sa valeur « adiabatique »

$$\rho \simeq \sqrt{1 - K^2} \tag{10.47}$$

où $K \equiv \psi_x$ est le vecteur d'onde local. La substitution de cette expression dans la seconde équation du système 10.38 déterminant l'évolution de la variable ψ nous donne :

$$\psi_T = D\psi_{XX}, \quad D = \frac{1 - 3K^2}{1 - K^2} \, . \tag{10.48}$$

[16] Lesquelles sont équivalentes en vertu du fait que le déterminant du système 10.41 est nul.

[17] Rappelons que a et b sont respectivement les amplitudes de perturbation de l'amplitude ρ et de la phase ψ, voir équation 10.37.

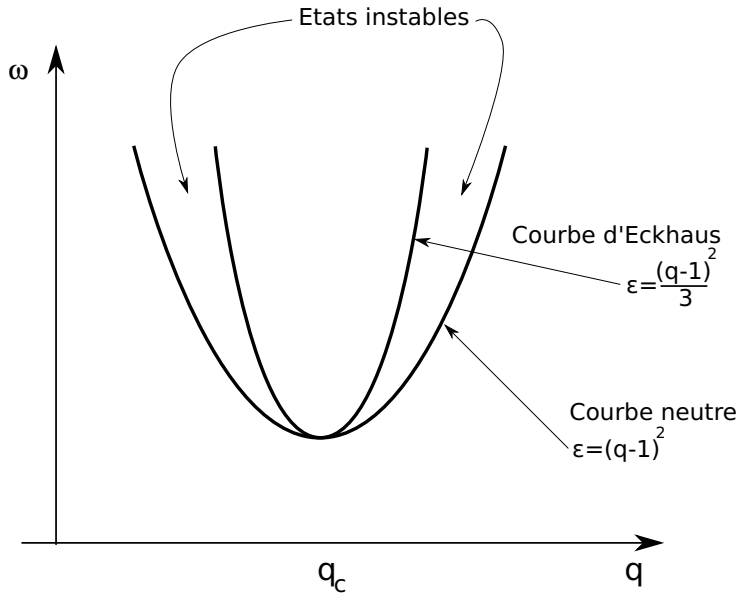


Figure 10.4 – On montre la courbe neutre et la courbe délimitant l'instabilité d'Eckhaus.

C'est typiquement une équation associée à la diffusion de la phase. Elle exprime le fait que toute perturbation de la longueur d'onde locale conduit à un réajustement du système par un processus de diffusion de la phase. Un coefficient de diffusion négatif exprime une instabilité. En se souvenant qu'au plus bas ordre, le vecteur d'onde local est relié au vecteur d'onde total q par $q \simeq 1 + K\sqrt{\epsilon}$ (dans ce cas $K \sim q_0$), le dénominateur est positif lorsque $1 > K^2 \simeq (q-1)^2/\epsilon$, ce qui est la condition d'existence des états stationnaires. Le numérateur est négatif lorsque $3\epsilon < (q-1)^2$. Nous retrouvons ainsi le même critère présenté plus haut : nous sommes en présence de *l'instabilité d'Eckhaus* (voir figure 10.4).

10.4 Instabilité d'Eckhaus : mort et création de cellules

Soit un système composé d'un ensemble de cellules (disons sous formes d'arches, rides, etc.) disposées régulièrement et représentant le motif périodique. En forçant le système dans la bande instable (par exemple, en lui associant une longueur d'onde trop petite), le système va éliminer une cellule (ou plusieurs cellules) pour augmenter sa longueur d'onde et faire « rentrer » la structure dans une bande stable (voir figure 10.5). Après élimination locale de la longueur d'onde, celle-ci se réajuste par un processus de diffusion de la phase. À l'opposé,

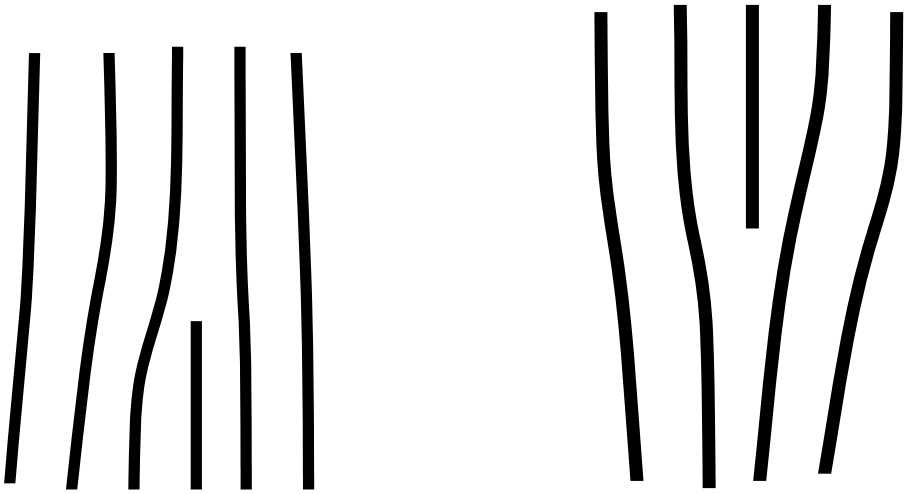


Figure 10.5 – Les barres représentent par exemple la position du maximum de la structure périodique, et le temps s'écoule du bas vers le haut. À gauche : en partant d'une solution périodique à 6 cellules, mais instable, car ayant une longueur d'onde trop petite. Le système élimine des cellules pour augmenter sa longueur d'onde. Après élimination, le réajustement de la longueur d'onde se fait par diffusion de la phase. À droite : on part d'une solution à 4 cellules, instable, car ayant une longueur d'onde trop grande. Le système crée des cellules pour diminuer sa longueur d'onde.

en forçant le système en lui imposant une longueur d'onde trop grande, le système crée par division d'une (ou plusieurs) cellule(s), d'autres cellules (voir figure 10.5), ce qui réduit la longueur d'onde de telle sorte que la structure finale périodique présente une longueur d'onde incluse dans la bande stable.

10.5 Quelques remarques sur les instabilités des structures unidimensionnelles

L'étude menée précédemment est fondée sur les hypothèses suivantes : (i) nous nous sommes limités au cas unidimensionnel, (ii) nous avons considéré que l'instabilité primaire (celle donnant lieu à l'ordre) est une instabilité non oscillante dans le temps et (iii) nous nous sommes placés suffisamment près du seuil de l'instabilité primaire. En levant une ou plusieurs de ces hypothèses, nous sommes confrontés à une plus grande richesse de comportements, telle que l'instabilité « zig-zag » qui survient dans l'étude de la stabilité bidimensionnelle (voir chapitre 13). Par ailleurs, autoriser un écart assez important par rapport au seuil de l'instabilité ouvre la voie à de nouvelles instabilités, telle la brisure de parité (les structures perdent spontanément la symetrie $x \to -x$). Il s'agit

là d'un champ vaste concernant les instabilités secondaires (celle d'Eckhaus en est une), mais que nous n'aborderons pas dans cet ouvrage.

Chapitre 11

Fronts entre domaines et invasion d'un état par un autre

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la naissance de l'ordre spatial résulte de la perte de stabilité de la solution homogène correspondant à une solution sans ordre particulier, donc sans motif spatial. Une fois le seuil d'instabilité atteint, la solution avec un motif spatial correspondant à un ordre spatial prédomine. Mais la manière avec laquelle l'ordre spatial intervient n'est *a priori* pas évidente. Par exemple, l'ordre peut simultanément apparaître en tout point du système. Il s'agit là d'une situation idéale, car les imperfections au sein d'un système réel suscitent l'émergence d'un motif ordonné en un point particulier de l'espace pour finir par envahir peu à peu tout le système. À titre d'exemple, considérons le cas de la convection de Rayleigh-Bénard (section 9.10). Nous avons vu que la naissance des rouleaux de Bénard a lieu lorsque la différence de température entre les deux plaques situées en dessous et au-dessus du fluide atteint une valeur critique : en deçà de la valeur critique, la solution conductive prédomine pour laisser la place à la solution convective. Mais comment passe-t-on de la solution conductive à la solution convective ? Du fait des imperfections naturelles du matériau constituant les plaques, la différence de température entre les deux plaques peut varier d'un point de la plaque à l'autre ; c'est ainsi que s'instaurent un ou deux rouleaux localisés qui s'établissent progressivement sur l'ensemble du fluide. Ce déclenchement de l'instabilité peut également être provoqué en créant artificiellement une perturbation localisée (par exemple, chauffage local). Dans tous les cas, il est dit que la solution sans rouleaux (solution conductive) est envahie par la solution avec rouleaux (solution convective).

Au voisinage de l'instabilité, correspondant à la naissance de l'ordre, les systèmes sont décrits par une équation universelle, dite *équation d'amplitude*,

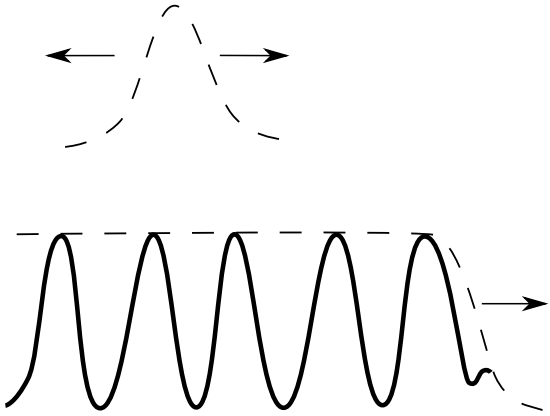


Figure 11.1 – On crée une perturbation initiale localisée et on choisit $\epsilon > 0$ de telle sorte que la solution $A = 0$ est instable. Le fait que la solution $A = 0$ soit instable fait que la perturbation localisée envahit le système avec une certaine vitesse v – à déterminer par la suite –, et laisse derrière elle une structure avec une amplitude quasi constante égale à $\sqrt{\epsilon}$ (trait en pointillés sur la figure du bas). On montre également sur cette figure schématiquement la structure périodique sous-jacente qui n'est pas contenue dans l'équation 11.1, laquelle décrit juste l'enveloppe. Le champ total se compose du produit de l'enveloppe A par une fonction oscillante e^{iqx} (voir chapitre 10).

équation que nous rappelons ici (voir équation 10.27 du chapitre précédent) :

$$A_t = \epsilon A - |A|^2 A + A_{xx} \; . \tag{11.1}$$

Il est clair que cette équation admet les solutions homogènes et stationnaires suivantes $A = 0$ et $A = \pm\sqrt{\epsilon}$. La solution $A = 0$ correspond à la solution sans motif spatial, tandis que les solutions $A = \pm\sqrt{\epsilon}$ se réfèrent à des solutions ordonnées ; l'amplitude A représente l'amplitude de la solution ordonnée. Nous avons, en outre, déjà vu que l'ordre a lieu si le paramètre ϵ est positif (i.e. $\epsilon > 0$, voir figure 10.2 dans le chapitre précédent). La valeur critique du paramètre $\epsilon = 0$ correspond au seuil de la bifurcation de l'état homogène (sans motif) vers l'état ordonné. Plaçons-nous dans des conditions d'une solution d'ordre associée à $\epsilon > 0$ et partons d'une condition initiale définie par une fonction localisée dans l'espace, telle une Gaussienne ou une fonction de Dirac (voir figure 11.1), d'amplitude non nulle (i.e. $A_0(x) \neq 0$). Puisque $\epsilon > 0$, la solution $A = 0$ est instable tandis que $A \neq 0$ est stable. La simulation numérique de l'équation 11.1 révèle que la solution initiale $A_0(x)$ envahit le système en laissant derrière elle une amplitude $A = \pm\sqrt{\epsilon}$; le choix final de $+1$ ou -1 dépend de la condition initiale. Comme l'amplitude (ou enveloppe) A est celle de l'état ordonné, nous sommes en présence d'un problème d'invasion de la solution instable, $A = 0$, par la solution stable $\pm\sqrt{\epsilon}$ (voir figure 11.1). Rappelons que l'amplitude A

correspond juste à l'enveloppe du motif périodique, le champ total se compose du produit de l'enveloppe A par une fonction oscillante e^{iqx} (voir chapitre 10).

Dans ce chapitre, nous allons expliciter la différence fondamentale existant entre le problème d'invasion d'une solution instable par une solution stable et celui de l'invasion d'une solution métastable par un état stable (voir notamment le chapitre 3 dans lequel est décrit un tel exemple de passage d'un état métastable à un état stable). Le critère physique essentiel à la discrimination des deux situations est lié à la vitesse d'invasion d'un état par un autre. Dans le second cas, celui de l'invasion de l'état métastable par un état stable, cette vitesse d'invasion est bien définie alors que, dans le premier cas, l'invasion d'une solution instable par une solution stable, il existe *a priori* une infinité de solutions pour le choix de la vitesse d'invasion.

11.1 Invasion d'une solution métastable par une solution stable

Étudions d'abord un cas classique, souvent rencontré dans les problèmes de transition de phase du premier ordre, celui de la coexistence de deux solutions de même stabilité. Lors de la variation d'un paramètre de contrôle, une des solutions peut devenir plus stable que l'autre, cette dernière acquérant de ce fait le statut d'état métastable. La solution stable envahira la solution métastable avec une vitesse bien définie, comme on va le voir. Introduisons tout d'abord quelques notions préliminaires.

11.1.1 Notion de front

Débutons cette étude par le cas d'un système caractérisé par l'équation d'amplitude générique (équation 11.1), avec A une amplitude réelle. En introduisant le potentiel V (voir figure 10.3) tel que :

$$V = -\epsilon\frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{4}\,, \tag{11.2}$$

l'équation d'amplitude 11.1 peut donc être réécrite comme :

$$A_t = A_{xx} - \frac{\partial V(A)}{\partial A}\,. \tag{11.3}$$

Lorsque ϵ est positif, la solution $A = 0$ est instable, tandis que $A = \pm\sqrt{\epsilon}$ est une solution stable. Penchons-nous sur les deux solutions stables $A = \pm\sqrt{\epsilon}$ et associons, par exemple, la solution négative $A = -\sqrt{\epsilon}$ à des variables x négatives et la solution positive à des variables x positives. Comme les deux solutions sont équivalentes, on s'attend intuitivement à ce que la coexistence des deux solutions soit possible et donc, il est fort probable que ces deux solutions puissent être connectées en $x = 0$. Prouvons-le.

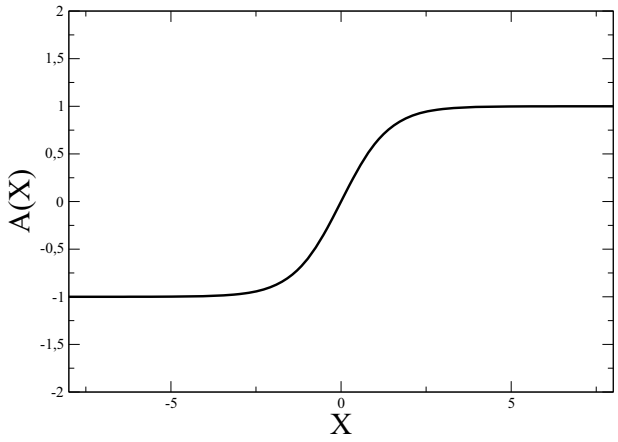


Figure 11.2 – Solution à front obtenu de (11.5) pour $\epsilon = 1$.

La version stationnaire (i.e. $A_t = 0$) de l'équation d'amplitude (équation 11.3) est du type :

$$A_{xx} + \epsilon A - A^3 = 0 \, . \tag{11.4}$$

Cette équation admet la solution suivante :

$$A(x) = \sqrt{\epsilon} \tanh[x\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}] \, . \tag{11.5}$$

Pour s'en convaincre, il suffit de reporter cette expression de l'amplitude $A(x)$ dans l'équation d'amplitude stationnaire 11.4.

En conséquence de la symétrie de l'équation d'amplitude stationnaire vis-à-vis de l'opération d'inversion $A \rightarrow -A$, la solution $-A(x)$ est également solution de l'équation 11.4.

Notons que la solution stationnaire $A(x)$ (équation 11.5) vérifie la condition : $A(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \pm\sqrt{\epsilon}$ (voir figure 11.6). Ainsi, cette solution connecte bien en $x = 0$ les deux solutions $\pm\sqrt{\epsilon}$ de l'équation d'amplitude homogène $\epsilon A - A^3 = 0$. Cette solution stationnaire (équation 11.5) représente un front (ou un *kink* en anglais)[1] (voir figure 11.6).

[1] Cette solution est parfois appelée défaut topologique. En effet, ce front ne peut pas être éliminé facilement, car toute translation du front vers la gauche ou la droite, est également solution du système. Plus généralement, on peut montrer que la solution générale est donnée par $A(x) = \sqrt{\epsilon} \tanh[(x - x_0)\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}]$, avec x_0 une constante arbitraire. Ce résultat découle de l'invariance de l'équation d'amplitude 11.3 par translation.

11.1.2 Analogie avec la mécanique de Newton

Le comportement de la solution stationnaire 11.5 peut être qualitativement perçue à l'aide d'une analogie avec un système mécanique. Libre à nous d'imaginer que x, variable réelle, représente une variable de type « temps ». L'amplitude A devient donc une fonction de la variable temporelle x, et peut être vue comme une position en mécanique (ou un angle, ou un degré de liberté quelconque). Dans ce cadre, l'équation d'amplitude (équation 11.3) exprimée en fonction du potentiel V revêt un caractère analogue à celui d'une équation de Newton où le terme A_{xx} est alors associé à l'accélération, et l'expression $F(A) = \frac{\partial V(A)}{\partial A} = -\epsilon A + A^3$ est assimilée à la « force » (notons que la masse de la particule – correspondant au coefficient de A_{xx} – est alors égale à l'unité). L'équation d'amplitude stationnaire 11.4 s'écrit donc comme :

$$A_{xx} = F(A) = -\epsilon A + A^3 = -\frac{\partial}{\partial A}\left[\epsilon\frac{A^2}{2} - \frac{A^4}{4}\right] = -\frac{\partial}{\partial A}W(A) \tag{11.6}$$

avec

$$W = \epsilon\frac{A^2}{2} - \frac{A^4}{4} = -V \tag{11.7}$$

où W est le potentiel dont dérive la force, responsable du déplacement de la particule (voir figure 11.3, représentant le potentiel W pour $\epsilon > 0$, le seul cas qui nous intéresse ici). Notons que le potentiel W – dénommons-le potentiel fictif, puisqu'il représente le potentiel dans une analogie mécanique – est l'opposé du potentiel V, le potentiel physique. Le potentiel W possède deux maxima, donc deux points fixes, localisés en $A = \pm\sqrt{\epsilon}$; ces points fixes sont stables dans la version physique, mais instables dans la présente analogie mécanique. Par analogie avec la mécanique[2] des systèmes conservatifs, caractérisés par l'absence de terme de type A_x dans l'équation d'amplitude, nous obtenons la condition suivante :

$$\frac{1}{2}A_x^2 + W = E \tag{11.8}$$

définissant une loi de conservation ; celle-ci représente la loi de conservation de l'énergie totale d'un système mécanique conservatif, pour lequel la somme des énergies cinétique et potentielle doit rester une constante, notée E, au cours du temps x.

Dans le cadre de cette analogie mécanique, la connexion entre les deux solutions stationnaires $\pm\sqrt{\epsilon}$ (ou la solution à front définie par l'équation 11.5) exprime le passage de la particule à l'instant $x = -\infty$ de la position $A = -\sqrt{\epsilon}$ (sommet gauche du potentiel de la figure 11.3) à la position $A = \sqrt{\epsilon}$ (sommet droit du potentiel de la figure 11.3) à l'instant $x = \infty$. En effet, prenons un système mécanique ne comportant aucun frottement ; cette situation correspond à une équation d'amplitude ne comportant pas de terme de type A_x(i.e dérivée

[2]Il suffit de multiplier l'équation d'amplitude (équation 11.4) par A_x, et réaliser ensuite que nous pouvons écrire $\partial_x[A_x^2/2 + W(A)] = 0$, ce qui signifie que le terme entre crochets est une constante du mouvement ; cette constante est notée E.

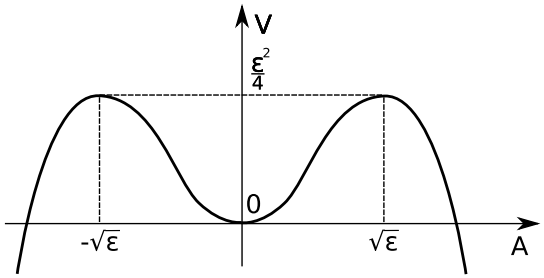


Figure 11.3 – Si $E = \epsilon^2/4$, cela signifie que la particule est lâchée à l'instant initial de la position $A = -\sqrt{\epsilon}$ et atteint $A = \sqrt{\epsilon}$ en un temps très grand (c'est-à-dire elle est lâchée d'un des sommets et arrivera à l'autre sommet). C'est la solution à un seul front. Si $\epsilon^2/4 < E < 0$, cela signifie que la particule est lâchée d'une position se trouvant en dessous des deux extrema. Dans ce cas la particule (sans frottement dans l'analogie mécanique) oscille indéfiniment entre les deux positions. Il s'agit donc de la solution à un nombre infini de fronts.

première en temps dans l'analogie mécanique). Imaginons maintenant que nous lâchons la particule du sommet gauche du potentiel (voir figure 11.3) ; une perturbation, même infime, mène à la chute de la particule au fond du potentiel[3], donc vers la droite du potentiel tracé dans la figure 11.3. Mais en l'absence totale de frottement, la particule ne s'arrête pas au fond du potentiel : elle continue sa course vers la droite du potentiel tracé dans la figure 11.3 et, du fait de la conservation de l'énergie, finit sa course exactement au sommet de droite du potentiel, c'est-à-dire à la même hauteur de potentiel que la position initiale de départ. Cette solution décrit qualitativement la solution à front formulée dans l'équation 11.5.

Le temps que met la particule pour passer d'un sommet à l'autre du potentiel tend vers l'infini. En effet, comme au sommet du potentiel, la vitesse de la particule tend vers une vitesse nulle, il faut un temps infini pour y arriver[4]. En somme, la particule passe de la position $-\sqrt{\epsilon}$ à la position $\sqrt{\epsilon}$ dans un intervalle de temps infini, soit $[-\infty, \infty]$.

Fixer la constante du mouvement E à une valeur inférieure à celle du sommet du potentiel (i.e. $E < \epsilon^2/4$), revient à lâcher la particule d'une hauteur quelconque entre le minimum et le maximum du potentiel (voir figure 11.3).

[3] La particule peut éventuellement partir vers la gauche, mais dans ce cas c'est une solution qui diverge, car la particule ne s'arrête jamais ; ce type de comportement est écarté de la discussion.

[4] Le « temps » de passage d'un sommet à l'autre est donné par la relation $\lambda = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx = \int_{-\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} dA/A_x \sim \int dA/[(A-\sqrt{\epsilon})(A+\sqrt{\epsilon})]$, où la constante E est fixée à $E = \epsilon^2/4$, correspondant au sommet du potentiel V. Pour obtenir ce résultat, nous avons utilisé la loi de conservation (équation 11.8) pour extraire l'expression de A_x. Ainsi, nous pouvons constater que la durée λ diverge logarithmiquement au voisinage de chacun des deux sommets.

Comme le frottement est nul, la particule exécute un nombre infini d'oscillations au sein du potentiel. Il doit donc exister une famille continue de solutions périodiques, c'est-à-dire une solution à un nombre quelconque de fronts, pour toutes les valeurs de la constante du mouvement positive et inférieure à la valeur maximale du potentiel (i.e. $0 < E < \epsilon^2/4$). Nous verrons par la suite que la solution à fronts multiples est instable ; seule une solution à front unique peut être stable.

Lorsque le système décrit correspond à une particule lâchée au somment du potentiel (i.e. $E = \epsilon^2/4$), les deux solutions $\pm\sqrt{\epsilon}$ coexistent. En imprimant, au potentiel $V(A)$, une dissymétrie pour placer les deux minima du potentiel physique à des hauteurs différentes, l'une des deux solutions devient métastable (voir section 3.2 introduisant la notion de métastabilité), et une solution à front fixe ne peut plus exister. Souvenons-nous que, dans l'analogie mécanique, les minima du potentiel physique V sont les maxima du potentiel fictif W d'où dérive la force mécanique. Par analogie mécanique (voir figure 11.4), nous voyons aisément qu'en lâchant la particule du petit sommet, la particule descend le long du potentiel mais, du fait de la conservation de l'énergie[5] n'arrive jamais à remonter de l'autre côté jusqu'à atteindre le grand sommet. Il en résulte que les deux solutions $\pm\sqrt{\epsilon}$ ne peuvent coexister.

Notons, avant de le montrer dans la suite du chapitre, que les solutions à front sont énergétiquement coûteuses : l'évolution du système mène à l'élimination des fronts pour aller vers une solution homogène finale, soit la solution positive $\sqrt{\epsilon}$ ou la solution négative $-\sqrt{\epsilon}$.

11.1.3 Détermination de la vitesse d'invasion d'une solution métastable par une solution stable

Remarquons, de façon préliminaire, qu'il est naturel que la solution stable envahie la solution métastable ; ceci revient, dans l'analogie mécanique, à lâcher la particule du plus haut sommet (figure 11.4) vers le plus bas sommet. Appelons v la vitesse d'invasion, que nous prenons constante, donc indépendante du temps, et positive, et cherchons une solution sous la forme $A(x - vt)$. L'équation d'amplitude (équation 11.3) s'écrit alors comme :

$$A_{xx} + vA_x - \frac{\partial V}{\partial A} = 0 \,. \tag{11.9}$$

En vertu de l'analogie mécanique, où la variable x représente le temps, l'équation ci-dessus est analogue à une équation mécanique comportant un terme de frottement. La valeur du coefficient de frottement v est *a priori* inconnue ; elle reste à déterminer. Il est assez intuitif de se rendre compte que cette vitesse est

[5] Bien entendu, la particule s'arrête à la même hauteur de potentiel que le sommet le moins haut, et peut retourner vers la position initiale. Si la particule stoppe là son chemin, nous sommes en présence d'une solution à deux fronts (figure 11.4). Elle peut refaire également un nombre arbitraire d'aller et retour et, dans ce cas, la solution est à multifronts. Nous n'allons cependant pas nous étendre davantage sur cette question ici.

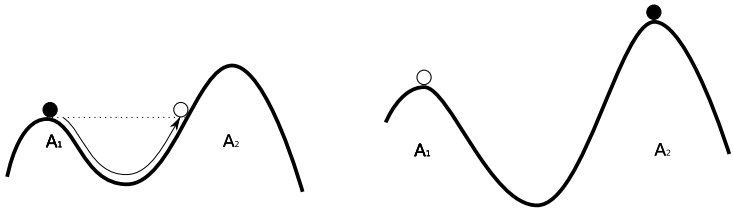


Figure 11.4 – À gauche : la particule (en noir) lâchée sans vitesse du sommet gauche remonte et s'arrête à la même hauteur si $v = 0$ (i.e. pas de frottement) ; particule en gris. Ainsi, les deux points fixes stables (les sommets ; rappelons que les minima du potentiel physique V correspondent aux maxima du potentiel fictif W) A_1 et A_2 ne peuvent coexister ; il y a donc invasion de la solution métastable (A_1) par la solution stable (A_2). À droite : on lâche la particule de A_2. Celle-ci ne peut arrêter sa course en A_1 que si le frottement v est ajusté de manière à ce que la réserve en énergie potentielle de la particule $W(A_2) - W(A_1)$ soit exactement compensée par la dissipation par frottement. La vitesse d'invasion v (correspondant au frottement) est donc unique.

unique. En effet, une particule partant sans vitesse du sommet droit du potentiel (se trouvant en $A = A_2$) ne peut atteindre le sommet gauche du potentiel (qui se trouve en $A = A_1$) (voir figure 11.4) que si la valeur du frottement v est telle que la différence d'énergie potentielle $W(A_2) - W(A_1)$ est exactement égale à l'énergie dissipée par frottement. Multiplions l'équation d'amplitude stationnaire avec frottement (équation 11.9) par A_x et intégrons de $x = -\infty$ à $x = \infty$ cette équation, pour obtenir facilement l'expression de cette vitesse d'invasion, l'analogue mécanique du coefficient de frottement :

$$v = \frac{V(A_2) - V(A_1)}{\int_{-\infty}^{\infty} A_x^2 dx} \, . \tag{11.10}$$

Le numérateur représente le moteur de la dynamique ; il décrit la réserve d'énergie potentielle ; le dénominateur de v représente l'énergie dissipée. La vitesse s'annule lorsque les deux extremums du potentiel sont à la même hauteur, c'est-à-dire lorsque les deux solutions ont la même stabilité. C'est le problème de coexistence des solutions, soit de bistabilité. Un léger biais du potentiel (imperfection) conduit à l'invasion de la solution métastable par la solution stable avec une vitesse bien déterminée. Le problème proposé (section 11.5.1) explicite davantage le calcul de la vitesse d'invasion d'une solution métastable par une solution stable.

11.2 Invasion de la solution instable par une solution stable

Nous allons aborder ici la notion d'invasion d'une solution instable par un état stable en adoptant comme équation modèle l'équation d'amplitude (équation 11.3). Comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises au cours de ce chapitre, pour un système caractérisé par un paramètre ϵ positif ($\epsilon > 0$) et en partant d'une solution localisée (voir figure 11.1), la perturbation s'étale pour envahir tout le système. Nous souhaitons à présent analyser plus en détail l'invasion de la solution instable $A = 0$ par la solution stable $A = \sqrt{\epsilon}$, et déterminer la vitesse d'invasion v. Insistons sur le fait que ce problème est conceptuellement très différent de celui de l'invasion d'une solution métastable par une solution stable.

Supposons que l'invasion se fasse à vitesse constante v ; dans ce cas, il existe deux solutions de l'équation d'amplitude, soit la solution $A(x,t) = A(x - vt)$ correspondant à l'invasion dans un sens et $A(x+vt)$, correspondant à l'invasion dans l'autre sens. Choisissons pour poursuivre, la première solution $A(x,t) = A(x-vt)$, alors nous avons la relation suivante entre les deux dérivées partielles de l'amplitude : $A_t = -vA_x$. En adoptant toujours une amplitude A réelle, l'équation d'amplitude 10.26 s'écrit comme

$$A_{xx} + vA_x = -\epsilon A + A^3 = -\frac{\partial}{\partial A}[\epsilon\frac{A^2}{2} - \frac{A^4}{4}] \, . \tag{11.11}$$

En poursuivant l'analogie mécanique, cette équation d'amplitude (équation 11.11) est analogue à celle d'une particule de position A évoluant au cours du temps x. Ce système mécanique est caractérisé par une « masse » de la particule fictive, correspondant au coefficient du terme en A_{xx}, égale à l'unité, par la présence de frottements avec un terme en A_x et un coefficient de frottement égal à la vitesse d'invasion v. Cette « particule » se déplace dans un potentiel anharmonique[6] W :

$$W = \epsilon\frac{A^2}{2} - \frac{A^4}{4} = -V \, . \tag{11.12}$$

Notons que ce potentiel (voir figure 11.5) est l'opposé du potentiel de la figure 10.3.

Étudier l'invasion revient, à l'aide de cette analogie mécanique, à déterminer la position de la particule à l'instant $t = \infty$ en la lâchant de la position initiale $A = \sqrt{\epsilon}$ à l'instant $t = -\infty$. Puisque le frottement est non nul, la particule finit

[6] Rappelons que la forme quadratique du potentiel définit un potentiel harmonique ; autrement dit, l'harmonicité est associé à un potentiel en forme de parabole. Dans de nombreuses applications de la physique, l'approximation d'harmonicité du potentiel est justifiée pour étudier l'évolution d'un système ; le concept de base de l'oscilateur harmonique joue ainsi un rôle fondamental en physique. Cependant, cette hypothèse d'harmonicité cesse d'être valide, dès lors que l'amplitude de la solution oscillante devient trop élevée. Pour étudier les écarts à l'harmonicité d'un système réel, il est nécessaire de recourir aux ordres supérieurs du potentiel, dit alors potentiel anharmonique.

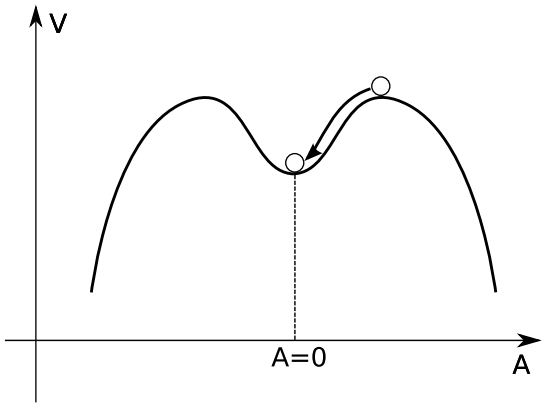


Figure 11.5 – La particule est lâchée à l'instant initial de la position $A = \sqrt{\epsilon}$ et doit atteindre la position $A = 0$ après un certain temps. Comme la particule subit un frottement, elle finira toujours par s'arrêter au fond du puits du potentiel, et ce quelle que soit la valeur (non nulle) du frottement v. Si le frottement est assez faible, elle effectuera quelques oscillations dans le puits du potentiel avant de s'arrêter (on parle alors de mouvement sous-amorti). Si au contraire le frottement est fort, elle s'arrêtera au fond du puits sans oscillation (on parle alors de mouvement sur-amorti).

toujours par s'arrêter en $A = 0$, soit après avoir oscillée autour de $A = 0$, ou sans oscillation, selon que le frottement v est faible ou fort (voir figure 11.6). Autrement dit, quelle que soit la valeur du frottement v, la particule atteint toujours le fond du potentiel et les deux solutions $A = \sqrt{\epsilon}$ et $A = 0$ peuvent toujours être connectées ; le problème admet donc une infinité de solutions ! Autrement dit, il existe une famille continue de solutions : c'est le *dilemme de la sélection de la vitesse*.

Insistons une fois de plus sur la différence conceptuelle entre le problème de l'invasion d'une solution instable par une solution stable et celui de l'invasion d'une solution métastable par une solution stable (étudiée dans le paragraphe précédent). En effet, dans la seconde situation associée à un potentiel visualisé sur la figure 11.4, nous devons connecter la solution stable $A = A_1$ à la solution métastable $A = A_2$. En partant du sommet du potentiel en $A = A_1$ (à gauche de la figure 11.4), et pour arriver à la position $A = A_2$, il est nécessaire que le coefficient de « frottement » ait une valeur bien précise : s'il est trop petit, la particule se déplace au-delà de $A = A_2$ et, dans le cas contraire, la particule ne peut atteindre $A = A_2$. La solution est donc unique. En particulier, si les deux solutions A_1 et A_2 ont la même stabilité (même hauteur du potentiel), le coefficient de « frottement » doit être nul (i.e. $v = 0$), pour que la particule issue d'un des deux sommets du potentiel parvienne au second sommet : c'est le problème de bistabilité correspondant, dans le langage des transitions de

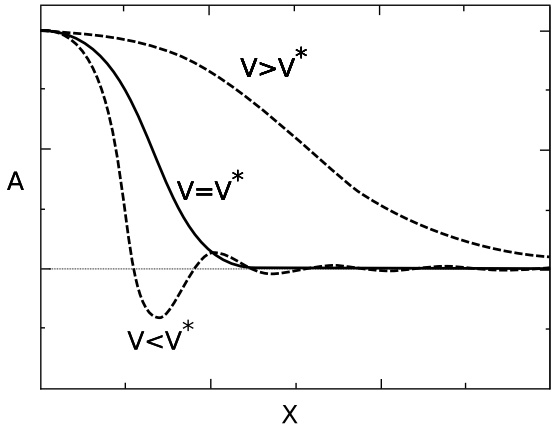


Figure 11.6 – La solution stationnaire pour différentes valeurs de la vitesse.

phases (comme, par exemple, la transition de l'état liquide vers l'état solide), à la coexistence de deux « phases » à l'équilibre (dans l'image de la transition de phase l'état liquide peut coexister avec l'état solide si la température est maintenue à la température de fusion).

11.3 L'approximation du front précurseur

Nous souhaitons à présent résoudre le problème de la sélection de la vitesse d'invasion à partir d'une infinité de solutions possibles. Nous allons procéder par étapes. Remarquons tout d'abord que si le front envahit l'état $A = 0$ (voir figure 11.1), l'amplitude de l'enveloppe A devant le front est assez petite, et il peut s'avérer légitime d'effectuer des approximations dans ce voisinage. Dans cette approche, c'est l'avant du front qui fixe la vitesse d'invasion, c'est pourquoi il est dit front « précurseur » et l'approximation qui lui est associée est dite *approximation du front précurseur*. La démarche exploitant l'idée du front précurseur (*leading edge* en anglais) consiste à se placer très près de l'avant du front d'invasion où nous pouvons toujours considérer que la solution est d'amplitude A faible. Dans ce cas, les termes non linéaires de l'équation d'amplitude 11.11 peuvent être *a priori* négligés, et nous obtenons une équation d'amplitude linéaire :

$$A_{xx} + vA_x + \epsilon A = 0 \,. \tag{11.13}$$

La solution générale de cette équation est de la forme $A(x) = \sum_j a_j e^{-q_j x}$, où a_j est une amplitude et q_j est une constante à déterminer. Reportons dans l'équation 11.13, nous obtenons aisément

$$q_{1,2} = \frac{1}{2}[v \mp \sqrt{v^{*2} - v^2}] \,, \tag{11.14}$$

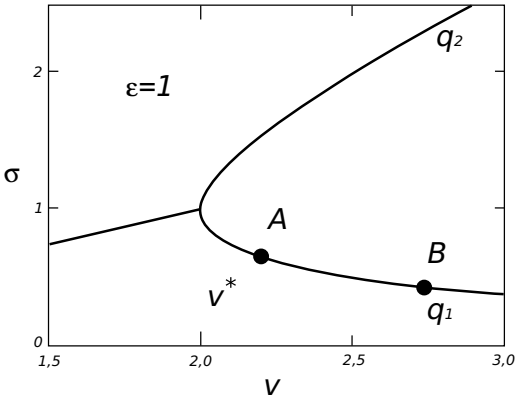


Figure 11.7 – La courbe $q(v)$. La ligne en dessous de $v = v^*$ est une branche correspondant à des valeurs de q complexe. On va montrer par la suite que cette branche est instable. La branche q_2 correspond à un front qui s'évanouit plus vite que celui correspondant à la branche q_1 (voir texte). On va montrer que la dynamique du front est déterminée par la branche q_1. Ici on a posé $\epsilon = 1$.

où $v^* = 2\sqrt{\epsilon}$. Dans l'analogie mécanique, cette valeur particulière v^* est le coefficient de frottement critique marquant la frontière entre une solution sur-amortie (amortissement sur-critique) et une solution sous-amortie (amortissement sous-critique). Pour des valeurs inférieures du coefficient de frottement (i.e. $v < v^*$), la valeur de q devient complexe, ce qui signifie que la solution oscille dans l'espace (voir la figure 11.7 représentant les deux branches q en fonction de v). Dans le cas contraire, le front est sur-amorti. Bien entendu, toute valeur du coefficient v est *a priori* acceptable : nous disposons donc d'un continuum de solutions. Le problème de la sélection de la vitesse d'invasion se pose donc naturellement : quelle solution sera choisie parmi l'infinité de solutions possibles ?

Concentrons-nous tout d'abord sur les cas correspondant à des valeurs du paramètre v supérieures à la valeur critique v^* (i.e. $v > v^*$, voir figure 11.7). La branche supérieure (appelée branche « q_2 » sur la figure 11.7) de la solution correspond à des vecteurs d'ondes plus grands que ceux de la branche inférieure (branche « q_1 »). Compte tenu de la forme exponentielle de la solution du front précurseur, un front associé à la branche supérieure s'évanouit plus vite qu'un front associé à la branche inférieure. Par conséquent le front précurseur est fixé par la branche « q_1 ». Nous allons donc analyser le comportement du front associé à la branche « q_1 », pour montrer que le système sélectionne la plus petite valeur de q sur cette branche. En effet, choisissons deux solutions de la branche inférieure, respectivement désignées par (A) et (B) (voir figure 11.7) ; ces solutions sont choisies telles que le vecteur d'onde de la solution (A) soit

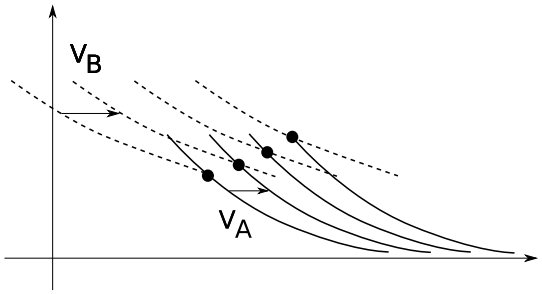


Figure 11.8 – En traits continus le front « A » ; c'est celui qui va le moins vite. En pointillés, le front « B » le plus rapide, mais il ne peut survivre, car le point d'intersection remonte vers le haut, et le front le plus lent « A » détermine la dynamique d'invasion.

plus grand que celui qui est associé à la solution (B) (i.e. le front (B) est plus étalé que le front (A)) ; par ailleurs, la vitesse du front (B) est supérieure à celle du front (A) (voir figure 11.7 et les flèches portées dans la figure 11.8). En traçant la position de chacun des fronts successivement dans le temps, nous constatons que l'intersection des deux fronts remonte au cours du temps (voir figure 11.8) vers le haut et le front (A) détermine la vitesse globale des deux fronts ! C'est donc le phénomène le plus lent qui limite la dynamique. Si on fait abstraction de la branche correspondant à $v < v^*$ sur la figure 11.7, on peut conclure que le front précurseur correspond à la plus petite valeur de q, à savoir q^*. Reste à savoir pourquoi le système ne sélectionne pas une valeur de $v < v^*$ (correspondant à q complexe). C'est à cette question que nous allons répondre dans la prochaine section.

Au préalable nous souhaitons faire une petite digression au sujet de la prédominance des fronts les plus lents. Ce problème est similaire à celui de la croissance d'un cristal facetté, pour lequel seule la facette la plus lente survit (voir figure 11.9). La facette la plus rapide disparaît au cours du temps : la dynamique et la forme du cristal sont donc déterminées par les facettes les plus lentes. Nous aboutissons donc à la conclusion que le front doit choisir la vitesse la plus faible possible et supposons que cette vitesse est celle qui est associée au paramètre critique v^*. Reste à savoir maintenant pourquoi la solution de vitesse plus faible que v^* ne peut être réalisée. Pour cela, nous allons présenter un argument général de stabilité.

11.3.1 Instabilité de la solution correspondant à $v < v^*$

Reprenons l'équation d'amplitude 11.11, et notons la solution stationnaire à vitesse constante $A_0(x - vt)$. Cherchons ensuite une solution de la forme $A(x,t) = A_0(x - vt) + \eta(x,t)$ en linéarisant l'équation 11.11 par rapport à η pour procéder à une étude de stabilité linéaire : donc seuls les termes d'ordre 1

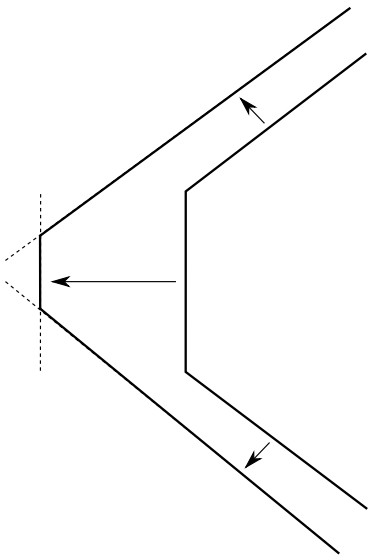


Figure 11.9 – Un cristal facetté croît par avancement des facettes. Comme il est visible sur la figure – qui montre les positions des facettes à deux instants différents (les grandeurs des vitesses des facettes sont indiquées par des flèches) – c'est la facette qui va le plus vite qui disparaît au profit de la facette la plus lente.

en η sont conservés. Nous obtenons :

$$\eta_t = \eta_{xx} + v\eta_x + \epsilon\eta - 3A_0^2\eta \; . \tag{11.15}$$

Posons la perturbation η sous la forme suivante[7] :

$$\eta = \psi(x)e^{-\omega t}e^{-vx/2} \; , \tag{11.16}$$

où $\psi(x)$ est l'amplitude de la perturbation et les termes $e^{-\omega t}$ et $e^{-vx/2}$ correspondent à des modulations respectivement temporelle et spatiale. En introduisant cette expression dans l'équation d'amplitude linéarisée (équation 11.15), nous obtenons l'équation portant sur l'amplitude de la perturbation $\psi(x)$

$$\omega\psi = [-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(z)]\psi \tag{11.17}$$

avec

$$U(z) = \frac{v^2}{4} - \epsilon + 3A_0^2 \; . \tag{11.18}$$

L'équation sur l'amplitude ψ de la perturbation (équation 11.17) s'apparente à l'équation de Schrödinger où ω joue le rôle d'une énergie et U celui de potentiel. Le principal intérêt de l'équation de Schrödinger indépendante du temps est l'identification des états propres ψ et des valeurs propres ω du système. La résolution complète de l'équation aux valeurs propres peut, en toute généralité, requérir des opérations mathématiques relativement élaborées, mais ici, nous nous contenterons d'arguments généraux. Il est clair que l'équation d'amplitude linéarisée au premier ordre (équation 11.15) admet comme solution neutre (ou stationnaire, i.e. $\eta_t = 0$, ce qui revient à une solution pour laquelle $\omega = 0$) la fonction

$$\eta_G(x) = \frac{dA_0(x)}{dx} \equiv A_{0x} \; . \tag{11.19}$$

En effet, repartons de l'équation d'amplitude stationnaire (équation 11.4)

$$A_{0xx} + vA_{0x} + \epsilon A_0 - A_0^3 = 0 \tag{11.20}$$

pour la différencier par rapport à x et obtenir ainsi l'équation suivante :

$$(A_{0x})_{xx} + v(A_{0x})_x + \epsilon A_{0x} - 3A_0^2 A_{0x} = 0 \; . \tag{11.21}$$

En posant $\eta_G(x) = A_{0x}$, nous constatons que la forme de cette équation est identique à celle à laquelle obéit la perturbation η (équation 11.15), avec la recherche d'une solution stationnaire, soit $\eta_t = 0$, soit encore $\omega = 0$; ce qui nous permet de confirmer la solution neutre formulée dans l'équation 11.19.

[7] Notons que nous avons choisi $-\omega$ comme taux de croissance et non ω, comme on l'a toujours fait. Ce choix est dicté par l'utilisation par la suite d'une analogie avec l'équation de Schrödinger.

Cette solution, parfois appelée le mode de Goldstone, est une conséquence de l'invariance par translation[8]. Le mode de Goldstone est solution de l'équation de Schrödinger avec la valeur propre $\omega = 0$. En d'autres termes, l'équation d'amplitude linéarisée (équation 11.17) admet comme mode propre ψ et valeur propre ω associée :

$$\psi_G = e^{xv/2} A_{0x}, \qquad \omega = 0 \,. \tag{11.22}$$

Il s'agit là d'une fonction propre parmi d'autres. S'agit-il de l'état fondamental, d'un état excité ? Les propriétés de l'équation de Schrödinger nous enseignent que les états – fondamental et excités – d'un système quantique sont classés en fonction du nombre de nœuds de la fonction d'onde : l'état fondamental n'a pas de nœud, le premier état excité (s'il en existe) en a un, et ainsi de suite. Pour se souvenir de ce résultat, il suffit de se rappeler que pour une particule libre (respectivement, une corde vibrante), l'énergie (respectivement, la pulsation) se comporte comme $E_n \sim n^2\pi^2/L^2$ et la fonction d'onde qui lui est associée prend la forme $\psi(x) \sim \sin(xn\pi/L)$, où n est un nombre entier représentant la quantification et L est la taille de la boîte (respectivement, la longueur de la corde). Pour $n = 0$, la fonction d'onde n'a pas de nœud, pour $n = 1$ elle en a un, etc. Physiquement, il est clair que le fait d'avoir de nombreux nœuds, équivaut à tordre d'avantage la corde, ce qui est plus coûteux énergétiquement.

Comme il a été souligné plus haut, le cas où la vitesse d'invasion est inférieure à la vitesse critique $v < v^*$ (voir équation 11.14) est le cas correspondant à un faible frottement dans l'analogie mécanique ; dans ce cas, la fonction A_0 présente des oscillations (voir figure 11.6), alors que pour des gammes de valeurs supérieures à la valeur critique (i.e. $v > v^*$), la fonction A_0 est suramortie. Il en résulte donc que, dans le premier cas ($v < v^*$), la fonction d'onde ψ_G possède des nœuds[9] : elle ne peut pas donc représenter l'état fondamental du système. Par conséquent, puisque la fonction propre ψ_G correspond à une énergie propre nulle (i.e. $\omega = 0$), nous pouvons affirmer que l'état fondamental a une énergie nécessairement plus faible, donc négative (i.e. $\omega < 0$). Or, compte tenu de la forme de la perturbation (équation 11.16), une énergie ω négative conduit à une croissance temporelle exponentielle de la perturbation. Nous en concluons donc que toute solution est instable pour ce domaine de variation de la vitesse d'invasion (i.e. $v < v^*$) et ne peut donc être solution stationnaire viable au cours de la dynamique du système.

En conclusion nous venons de voir que tout front se déplaçant à une vitesse inférieure à v^* est instable, ceci exclut la branche en trait fin sur la figure 11.7. Nous avons vu également que le front correspondant à la branche supérieure de la figure 11.7 (branche « q_2 ») s'évanouit vite et donc le front est dominé par la branche inférieure (branche « q_1 »). Enfin, nous avons vu que pour cette dernière branche on a intérêt d'avoir la plus petite vitesse possible (se rapporter

[8] En effet, si $A_0(x - vt)$ est solution, il en est de même de $A_0(x - vt + x_0)$ où x_0 est un déplacement arbitraire du front. Si x_0 est petit, nous pouvons écrire $A_0(x - vt + x_0) = A_0(x - vt) + x_0 A_{0x}$. Donc le mode A_{0x} est bien associé à un déplacement infinitésimal du front.

[9] L'oscillation engendre nécessairement un passage de la fonction par zéro.

à la figure 11.8). Le seul choix possible est donc une invasion à $v = v^*$. Des études numériques ainsi qu'une analyse mathématique poussée conduisent à la même conclusion (voir [79]).

11.3.2 Stabilité marginale

Lorsque la vitesse d'invasion est exactement égale à la valeur critique (i.e. $v = v*$), la variable q devient réelle et, dans ce cas, nous pouvons affirmer que cette situation décrit l'état fondamental de l'équation linéarisée et possède comme valeur propre $\omega = 0$. Autrement dit, ce critère de sélection nous indique que la solution choisie est marginale (ou neutre) : en se déplaçant avec le front à la vitesse $v = v^*$, la perturbation se déplace par invasion aussi vite qu'elle croît localement. En se déplaçant plus vite que cette vitesse, la perturbation décroît, alors qu'elle croît localement dans le cas contraire. Le critère de stabilité dépend donc du repère choisi : la perturbation est dite de nature *convective*, par opposition à une instabilité absolue, indépendante du repère choisi pour la décrire. Il est souvent dit dans la littérature que c'est le critère de stabilité marginale qui determine la selection de la vitesse d'invasion, comme nous venons de le voir. Dans certains cas une analyse plus approfondie devient nécessaire, c'est le cas en particulier où l'approximation du front précurseur devient illégitime [79][10].

Enfin, rappelons-nous que nous avons brièvement évoqué, par analogie avec la mécanique, le fait que l'équation d'amplitude admet des solutions à fronts multiples, dit *multi-kinks*, en anglais (voir section 11.1.2). Nous pouvons déduire des précédentes considérations que ces solutions sont instables. En effet, dans la terminologie de l'équation de Schödinger, une fonction d'onde est proportionnelle à la dérivée de la solution A de l'équation d'amplitude (voir équation 11.22). Dans le cas d'une solution à fronts multiples, la dérivée de A passe par zéro ; elle possède donc des nœuds. Nous venons de voir que toute solution avec nœuds a au moins une valeur propre négative ($\omega < 0$) : il s'agit donc d'une solution instable (rappelons que nous avons choisi la dépendance temporelle en $e^{-\omega t}$; voir équation 11.16). Seule une solution à front unique monotone peut être stable.

[10] Ceci peut se produire quand la bifurcation est sous-critique, et il peut s'avérer indispensable de prendre en considération les termes non linéaires au voisinage de la région de transition entre les deux états entrant en jeu dans le processus d'invasion. On parlera dans ce cas de front « poussé » (car les termes non linéaires derrière le front envahisseur sont déterminants ; le front est « poussé » depuis la région se trouvant derrière lui), par opposition au front « tiré » (front précurseur) traité dans ce chapitre. En effet, dans ce cas, une analyse linéaire est suffisante afin de déterminer la vitesse d'invasion ; c'est ce ce qui se passe dans la région se trouvant en amont du front qui determine la vitesse d'invasion ; le front se trouve ainsi « tiré » par l'avant.

11.4 Conclusion

Nous avons décrit dans ce chapitre les cas de figure associés à l'invasion d'une solution par une autre lors de la résolution de l'équation d'amplitude d'un système physique. Ce problème d'invasion est assez général, car il est rare que la solution s'installe instantanément partout dans le système. En général, la solution prend naissance localement dans l'espace et envahit peu à peu le système. La nouvelle solution dite « envahissante » prend le dessus lorsqu'elle devient plus stable que la solution précédente soit que cette dernière soit devenue métastable ou bien instable. Dans ce type de problèmes, se pose naturellement la question de la détermination de la vitesse d'invasion. Pour résoudre cette question, nous nous sommes limités aux systèmes unidimensionnels décrits par une équation d'amplitude. Nous avons d'abord introduit la notion de front séparant les deux solutions. Nous avons étudié ensuite l'invasion d'une solution métastable par une solution stable, et celui de l'invasion d'une solution instable par une solution stable. Nous avons vu que le premier cas est assez classique et fournit naturellement une solution unique pour la vitesse d'invasion. Le second problème est loin d'être classique et nous a confrontés au dilemme suivant : il existe *a priori* une infinité de vitesses d'invasion possibles. En combinant une étude de stabilité linéaire et des arguments heuristiques, nous avons montré que le système choisit une solution unique parmi un continuum de solutions, soit v^* la vitesse critique discriminant un ensemble de solutions instables associées à des vitesses d'invasion inférieures à v^* d'un ensemble de solutions stables associées à des vitesses d'invasion supérieures à v^*. Le choix de la solution par le système semble être dicté par un principe de stabilité marginale : le système choisit précisément la solution associée à la vitesse correspondant à la frontière entre stabilité et instabilité, solution dite à la stabilité marginale.

Insistons sur le fait que ce principe de stabilité marginale ne résulte pas d'une démonstration rigoureuse au sens mathématique. En effet, nous avons juste prouvé que les solutions de vitesse d'invasion inférieure à v^* sont instables et pour s'assurer que le système choisit bien la vitesse v^* parmi toute une famille stable de solutions (correspondant à $v > v^*$), nous avons fait appel au bon sens physique. Et, ce sens physique semble bien confirmé par les simulations sur ordinateur ; elles montrent en effet que la solution sélectionnée par le système est bel et bien celle qui correspond à v^*. Une preuve mathématique rigoureuse a été présentée par deux mathématiciens américains D.G. Aronson et H.F Weinberger en 1978 (voir référence [3]). À partir de l'équation d'amplitude universelle rappelée au début de ce chapitre (voir équation 11.1) et pour une classe de perturbations initiales localisées (voir la figure 11.1), ces auteurs ont montré l'émergence d'un front de solutions qui peu à peu s'établit pour envahir finalement tout le système précisément à la vitesse de stabilité marginale v^* ; cette preuve est mathématiquement trop élaborée pour figurer dans cet ouvrage.

Notons que notre approche dans ce chapitre s'est fondée sur des approximations linéaires autour du front précurseur. Ces approximations sont pleinement

justifiées lorsque la bifurcation est sur-critique (bifurcation fourche) ; car l'amplitude croît alors de manière continue d'une solution d'amplitude nulle (i.e. $A = 0$) à une solution d'amplitude non nulle (i.e. $A \neq 0$). La vitesse du front est donc déterminée par la dynamique de l'aval du front, le front est alors dit « tiré » (sous-entendu par ce qui se passe en avant du front). Si la bifurcation est sous-critique, la situation s'avère plus complexe, en particulier, lorsque la vitesse d'invasion dépend de mécanismes non linéaires. Dans ce cas, la vitesse d'invasion est déterminée par la dynamique de l'amont du front (l'amplitude y est plus grande ; la prédominance de cette région est d'autant plus grande que les effets non linéaires sont importants). Le front est alors dit « poussé » (sous-entendu par ce qui se passe à l'arrière du front). Pour poursuivre en profondeur, nous invitons le lecteur à consulter une revue plus complète du sujet (voir référence [79]).

11.5 Problèmes

11.5.1 Problème : détermination explicite de la vitesse d'invasion d'une solution métastable par une solution stable

Considérons la situation où le potentiel possède un biais, soit à titre d'exemple, par rapport au potentiel étudié précédemment un terme additionnel $\nu\frac{A^3}{3}$ avec ν positif et suffisamment petit (i.e. $\nu > 0$ et $\nu \ll 1$) ; le potentiel s'écrit donc comme :

$$V = -\frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{4} + \nu\frac{A^3}{3} \tag{11.23}$$

Pour $\nu = 0$, il y a coexistence des deux solutions stables $A = \pm 1$, où nous avons posé $\epsilon = 1$ par rapport au potentiel étudié auparavant (équation 11.2), et la vitesse d'invasion v est nulle. Une valeur non nulle de ν crée une asymétrie du potentiel, à l'image du potentiel porté sur la figure 11.4 ; cette asymétrie induit la présence d'une vitesse d'invasion non nulle, la solution stationnaire (équation 11.5) n'est donc plus valable. Cependant, si ν est suffisamment petit, la nouvelle solution ne devrait pas trop s'en éloigner : elle devrait donc être composée de la solution stationnaire (équation 11.5) et d'un terme perturbatif $\nu\tilde{A}(x)$, avec $\tilde{A}$ la perturbation (i.e $A(x) = A_0(x)+\nu\tilde{A}(x)$). Ceci se confirme par ailleurs, en notant que le numérateur de la vitesse d'invasion (équation 11.10) s'annule pour $\nu = 0$ (la réserve d'énergie potentielle est nulle puisque les valeurs des deux extremums sont égaux) ; ce qui suggère que le premier terme du potentiel doit être de l'ordre 1 en ν. À l'ordre le plus bas, nous pouvons donc remplacer dans le dénominateur de la vitesse d'invasion (équation 11.10), l'amplitude A par la solution stationnaire A_0. Ce qui nous permet de réécrire la vitesse d'invasion (équation 11.10) comme :

$$v \simeq \frac{V(A_2) - V(A_1)}{\int_{-\infty}^{\infty} A_{0x}^2 dx} \simeq \frac{2\nu/3}{\int_{-\infty}^{\infty} A_{0x}^2 dx} = \frac{\nu}{\sqrt{2}}\,, \tag{11.24}$$

où nous avons fait l'approximation au numérateur que $V(A_2) \simeq V(A_{20}) = V(1) = \nu/3$, et $V(A_1) \simeq V(A_{01}) = V(-1) = -\nu/3$. Comme $[\partial V/A]_{A=A_{02}} = [\partial V/A]_{A=A_{01}} = 0$, cette approximation est valable à l'ordre ν^2.

Chapitre 12

Ordre et désordre spatial et temporel au voisinage d'une bifurcation de Hopf

Dans le chapitre consacré à l'étude de la naissance de l'ordre spatial (chapitre 10), nous nous sommes penchés sur le système généralisé issu du système de Swift-Hohenberg (équation 10.2) pour en dériver l'équation d'amplitude et montrer son universalité au voisinage d'un point de bifurcation stationnaire (équation 10.24).

Nous allons, dans ce chapitre, considérer des bifurcations spatiales de nature différente (bifurcation oscillante ou bifurcation de Hopf), pour en étudier les différentes conséquences sur l'évolution du système ; nous verrons que le système peut, de ce fait, aussi bien évoluer vers un état ordonné qu'être soumis au chaos spatio-temporel. Quel sera l'impact sur l'équation d'amplitude de l'intégration de bifurcations non stationnaires ?

Nous avons vu dans le chapitre consacré à l'étude des bifurcations temporelles de Hopf (chapitre 6) que l'équation d'amplitude associée est formellement identique à celle du cas stationnaire, à ceci près que les coefficients deviennent complexes (i.e. ont une partie imaginaire non nulle). Ainsi, nous pouvons *a priori* supposer que l'équation d'amplitude aura donc la même forme que celle qui a été dérivée dans le cas d'une bifurcation stationnaire (équation 10.24) mais elle devrait disposer de coefficients complexes.

Pour dériver l'équation d'amplitude dans le cas d'une bifurcation de Hopf, il nous faut suivre la même démarche que celle qui a été adoptée lors de l'étude de la bifurcation stationnaire menée dans le chapitre 10 : en partant du modèle donné, nous devons le développer en puissance du petit paramètre ϵ, mesurant l'écart au seuil de l'instabilité, pour déduire l'équation d'amplitude recherchée. Pour autant, cette dérivation ne sera pas proposée explicitement dans ses moindres détails ; compte tenu des multiples exemples traités tout au

long de cet ouvrage, nous supposerons que le lecteur est à même de combiner les différentes connaissances acquises afin de dériver l'équation d'amplitude en question. Aussi, nous nous limiterons à énoncer le résultat, en le motivant par des considérations de symétrie, et porterons plutôt notre attention sur les conséquences issues de cette équation ; nous considérons de plus le cas unidimensionnel, uniquement.

12.1 Équation d'amplitude à coefficients complexes

Nous allons dans ce paragraphe montrer que des considérations de symétrie justifient à elles seules l'expression de l'équation d'amplitude au voisinage d'une bifurcation de Hopf, comme identique à celle d'une bifurcation stationnaire (équation 6), la seule différence étant que les coefficients sont complexes. En effet, nous avons vu dans la section 10.2.2 du chapitre 10 que le caractère réel des coefficients est une conséquence de la symétrie par inversion $x \to -x$, laquelle est préservée pour une bifurcation stationnaire. Cette symétrie d'inversion revient en effet, dans le cas d'une bifurcation stationnaire, à changer A en son complexe conjugué A^* ($A \to A^*$), ce qui impose aux coefficients de l'équation leur nature de nombre réel (voir section 10.2.2).

12.1.1 Quelques préliminaires

Rappelons que, dans un régime linéaire, le mode de Fourier associé à une perturbation est une onde plane de type $e^{iqx+\omega t}$, où q est le vecteur d'onde et ω le taux de croissance de la perturbation. Pour une bifurcation de Hopf[1] ω est complexe et s'écrit sous la forme $\omega = \omega_r + i\omega_i$, où ω_r et ω_i représentent les parties réelle et imaginaire de ω. L'instabilité est caractérisée par une partie réelle de ω positive ($\omega_r > 0$). Au voisinage d'une bifurcation, le taux réel ω_r de croissance de l'instabilité (voir équation 9.86) s'écrit sous la forme :

$$\omega_r = \epsilon + \omega_r'' \frac{(q - q_c)^2}{2} , \tag{12.1}$$

où ϵ mesure l'écart au seuil de l'instabilité, q_c est le vecteur d'onde à la bifurcation et ω_r'' est la dérivée seconde évaluée au point de bifurcation (i.e. $q = q_c$ et $\epsilon = 0$) ; rappelons que cette expression provient d'un développement de Taylor au voisinage de la bifurcation (donc au voisinage de $q = q_c$ lorsque $\epsilon = 0$, voir section 9.11.2). L'annulation de la dérivée première du taux de croissance de

[1] Notons que dans certains ouvrages, la dénomination « bifurcation de Hopf » désigne les seuls cas physiques caractérisés par un vecteur d'onde q nul ; cette définition n'est cependant pas communément adoptée (pour une revue, voir par exemple, la référence [2]). Dans cet ouvrage, une bifurcation sera dite bifurcation de Hopf lorsque ω de la perturbation possède une partie imaginaire non nulle à la bifurcation (bifurcation oscillante dans le temps).

l'instabilité ω_r au point de bifurcation (équation 12.1) indique que la partie réelle du taux de croissance ω_r est maximal en ce point (voir section 9.11.2).

Par ailleurs, nous pouvons également effectuer un développement de Taylor de la partie imaginaire ω_i du taux de croissance au voisinage du point de bifurcation, soit :

$$\omega_i = \omega_{i0} + (q - q_c)\omega_i' + \omega_i'' \frac{(q - q_c)^2}{2} + ... \tag{12.2}$$

où $\omega_{i0} \equiv \omega_i(q = q_c, \epsilon = 0)$ et ω_i', ω_i'' sont respectivement les dérivées première et seconde du taux de croissance évaluées à la bifurcation ; soulignons le fait que la dérivée première de la partie imaginaire du taux de croissance ω_i' ne s'annule pas à la bifurcation, contrairement à ω_r'.

Enfin, notons que, pour un problème donné, le nombre de variables dynamiques réellement indépendantes les unes des autres peut être supérieur à un (voir chapitre 9) ; mais, selon l'hypothèse usuelle adoptée au point de bifurcation ($q = q_c$ et $\epsilon = 0$), nous supposons que le taux de croissance ne s'annule que pour une seule [2] valeur propre ω. Cette valeur propre devient positive pour un ensemble de vecteurs d'onde centré autour de q_c pour $\epsilon > 0$ (voir chapitre 9 et 10). Le mode propre h_q associé à la valeur propre ω s'exprime comme une superposition linéaire des différentes variables dynamiques mises en jeu dans le système d'équations caractérisant l'évolution. Le mode propre de Fourier h_q obéit dans le régime linéaire à une équation de type :

$$\frac{\partial h_q}{\partial t} = \omega h_q \ . \tag{12.3}$$

La solution de cette équation 12.3 est donnée par $h_q(t) = h_q(0)e^{\omega t}$.

Pour un système étendu dans la direction ox (i.e. système infini)[3] il n'existe aucune restriction sur q, et par conséquent toute solution avec q arbitraire est solution. Par conséquent, la solution générale de $h(x,t)$ est une superposition linéaire de tous les modes de Fourier (voir chapitre 10), soit :

$$\begin{aligned} h(x,t) &= \sum_q h_q(t)e^{iqx} = e^{iq_c x} \sum_q h_q(0)e^{i(q-q_c)x} + c.c. \\ &= e^{iq_c x} \sum_Q h_Q(t)e^{iQX} + c.c. \end{aligned} \tag{12.4}$$

où nous avons effectué le changement de variable suivant : $Q = (q - q_c)/\sqrt{\epsilon}$, et avons introduit la variable spatiale, dites lente : $X = x\sqrt{\epsilon}$ (voir chapitre 10). Nous souhaitons à présent préciser la dépendance de $h_Q(t)$ vis-à-vis des variables lentes et rapides. À cet effet, nous raisonnons par continuité avec le régime linéaire (notre étude se concentre à la proximité de la bifurcation

[2] Nous parlons quelquefois de bifurcation de co-dimension un.

[3] Tout système réel est fini. L'hypothèse d'une extension infinie revient à dire en pratique que nous supposons que la longueur est petite par rapport à l'extension du système dans la direction ox.

et par conséquent le régime linéaire suffit afin de tirer des renseignement sur ces variables). En effet, dans le régime linéaire et en se référant aux équations 12.1 et 12.2, nous pouvons écrire la dépendance temporelle de la perturbation comme :

$$h_q(t) \sim e^{\omega t} = e^{[i\omega_{i0}+\epsilon+\omega''(q-q_c)^2 t/2+(q-q_c)\omega_i']t}$$
$$= e^{\omega_{i0}t} e^{[1+\omega'' Q^2/2+i\omega_i' Q/\sqrt{\epsilon}]T} . \qquad (12.5)$$

Lorsque la bifurcation est stationnaire, ω est réel (i.e. $\omega_i = 0$) ; la dynamique temporelle n'est fonction que de la variable lente T. Dans le cas plus général décrit par l'équation d'évolution 12.5, la dynamique dépend de plusieurs variables temporelles, soit la variable rapide t et les variables lentes ϵt et $t\sqrt{\epsilon}$. Ainsi, l'expression de l'amplitude lentement variable de l'onde est, en toute rigueur, de type $a_Q(t\epsilon, t\sqrt{\epsilon})$; nous sommes ainsi naturellement invités à introduire deux échelles de temps distinctes T et τ, tels que $T = \epsilon t$ et $\tau = \sqrt{\epsilon} t$, à l'instar de tout problème évoluant selon des échelles multiples (voir chapitre 10). L'opérateur de différenciation partielle s'exprime alors comme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T} + \sqrt{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \tau} . \qquad (12.6)$$

Nous pouvons noter que cet opérateur est composé de trois termes associés aux trois échelles de temps du problème alors que son analogue introduit dans la bifurcation stationnaire ne dépend que d'une seule variable temporelle lente (équation 10.13). Pour éviter de se lancer dans une analyse à échelles multiples à trois variables temporelles (d'autant plus que notre objectif est de déterminer *in fine* l'équation d'amplitude à l'aide de considérations de symétrie uniquement), nous adoptons une hypothèse simplificatrice un peu arbitraire à ce stade : la dérivée de la partie imaginaire du taux de croissance (i.e ω_i') est de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$; ainsi le développement de l'équation 12.5 ne fait intervenir que la variable temporelle lente T. Posons alors $\omega_i' = \bar{\omega}_i'/\sqrt{\epsilon}$ et considérons que $\bar{\omega}_i'$ est d'ordre unité.

Le champ physique $h(x,t)$ est ainsi composé de deux termes associés d'une part à une variation rapide (associée à la variable t) et d'autre part, à une variation lente (associée à la variable T) ; dans le régime faiblement non linéaire (et par continuité avec l'analyse linéaire, voir équation 12.4), la variable rapide est de type $e^{i\omega_{i0}t}$ alors que la dépendance temporelle de la variable lente est encodée dans l'amplitude de l'onde (ou son enveloppe[4]), soit :

$$h(x,t) = e^{iq_c x+\omega_{i0}t} \sum_Q a_Q(T) e^{iQX} + c.c. \qquad (12.7)$$

[4] à la bifurcation, nous avons : $\omega_i = \omega_{i0}$. Au voisinage de la bifurcation, lorsque ϵ est petit, ω_i comporte des termes correctifs d'ordre ϵ ; mais de telles corrections sont déjà prises en compte dans l'expression de l'amplitude non linéaire $a_Q(T)$. C'est pourquoi il est légitime de ne garder qu'explicitement la dépendance par rapport à la variable rapide en $e^{i\omega_{i0}t}$ dans l'expression du champ physique $h(x,t)$.

où nous avons posé $h_Q(t) = e^{\omega i 0 t} a_Q(T)$, ce qui revient à séparer clairement les deux types de dépendance en fonction de t et T, les variables rapide et lente. Dans le cas linéaire, $a_Q(T)$ est une fonction donnée par l'équation 12.5 (i.e. $a_Q(T) = e^{[1+\omega'' Q^2/2 + i\bar{\omega}_i' Q]T}$) ; notons bien que cette expression cesse d'être valide dans le régime non linéaire, et $a_Q(T)$ vérifiera une équation non linéaire (de type équation d'amplitude déjà rencontrée à maintes reprises).

En adoptant un raisonnement similaire à celui qui a été développé dans le chapitre consacré à l'universalité de l'ordre spatial (voir chapitre 10), réécrivons le champ physique $h(x,t)$ (équation 12.7) comme :

$$h(x,t) = e^{iq_c x + i\omega_{i0} t} A(X,T) + e^{-iq_c x - i\omega_{i0} t} A^*(X,T) \tag{12.8}$$

où nous avons posé $A(X,T) = \sum_Q a_Q(T) e^{iQX}$; la somme, qui porte en principe sur tous les vecteurs d'ondes réels, peut être restreinte à la bande des vecteurs d'onde associée aux modes instables (voir chapitre 10).

En prenant la transformée de Fourier de l'équation du mode propre h_q du régime linéaire (équation 12.3) par rapport à la variable Q, et en utilisant la relation $\omega = \omega_r + \omega_i$, où ω_r et ω_i sont donnés par les équations 12.1 et 12.1), nous obtenons l'équation d'amplitude linéaire suivante :

$$A_T = A + \bar{\omega}_i' A_X + \frac{1}{2}(\omega_r'' + i\omega_i'') A_{XX} \ . \tag{12.9}$$

Nous avons adopté les variables lentes et les abréviations suivantes : $A_T = \partial A/\partial T$, $A_X = \partial A/\partial X$ et $A_{XX} = \partial^2 A/\partial X^2$. La comparaison de ce résultat avec celui d'une bifurcation stationnaire (chapitre 10) nous souligne deux différences : (i) le coefficient devant la dérivée seconde A_{XX} est complexe et (ii) l'équation comporte un nouveau terme $\bar{\omega}_i' A_X$.

Avant d'écrire l'équation d'amplitude non linéaire à partir des considérations de symétrie, soulignons enfin que le champ h de l'onde (équation 12.8) est composé du produit d'une oscillation rapide $e^{iq_c x + i\omega_{i0} t}$ et d'une enveloppe lente $A(X,T)$; à la différence de la bifurcation stationnaire, l'oscillation rapide se réalise sous la forme d'une onde plane se propageant à la vitesse de phase ω_{i0}/q_c. Nous devons distinguer entre deux types d'onde : une onde gauche d'amplitude A et une onde droite[5] d'amplitude $B = A^*$; l'onde se propage à la vitesse de groupe $\bar{\omega}_i'$.

12.1.2 Dérivation de l'équation d'amplitude à partir des symétries

Contrairement à la bifurcation stationnaire (i.e. bifurcation associée à un taux de croissance réel, $\bar{\omega}_i = 0$), l'opération d'inversion x en $-x$ pour une bifurcation de Hopf n'est pas équivalente au changement de l'amplitude A

[5] En toute rigueur, l'amplitude B de l'onde droite pourrait ne pas être le conjugué de l'amplitude gauche (i.e. $B \neq A^*$), ce qui pourrait introduire de nouveaux termes d'interaction entre les deux ondes. Par souci de simplicité, nous allons nous restreindre au cas où $B = A^*$.

en son conjugué A^* (le champ $h(x,t)$, équation 12.8, n'est pas invariant sous cette opération). Or, c'est bien cette propriété que nous avions invoquée dans la section 10.2.2, pour montrer que les coefficients de l'équation d'amplitude devaient être réels. Nous ne pouvons plus imposer une telle restriction dans le cas présent, et par conséquent les coefficients sont génériquement complexes (i.e. leurs parties imaginaires sont non nulles).

Mais par ailleurs, dans le cas d'une bifurcation de Hopf, nous sommes confrontés à une onde se propageant dans une certaine direction (disons dans la direction X croissant) à la vitesse de groupe ω_i' ; la forme de l'équation d'amplitude doit donc demeurer identique lorsque l'opération d'inversion X en $-X$ s'applique simultanément à la coordonnée d'espace X et à la vitesse de groupe de l'onde (le changement de signe de l'axe ox et de celui de la vitesse de l'onde maintient la configuration physique équivalente) ; ce qui implique qu'un terme du type γA_X avec γ un coefficient réel proportionnel à la vitesse de groupe ne peut être exclu de l'équation d'amplitude puisqu'il souscrit à cette exigence.

Nous pouvons donc écrire l'équation d'amplitude *a priori* comme :

$$A_T = (1+ia)A - (1+i\beta)|A|^2A + \gamma A_X + (1+i\alpha)A_{XX} \tag{12.10}$$

où a, α β et γ sont des constantes réelles[6].

Nous reconnaissons ici la partie linéaire 12.9 à l'exception du premier terme de droite qui ne contient pas un terme du type iaA. On va voir dans la prochaine section que ce terme peut être absorbé par un simple changement de variable, une opération qui est déjà présente dans l'analyse linéaire, comme on le reconnaîtra au prochain paragraphe.

Nous avons supposé également que la bifurcation est sur-critique en affectant la partie réelle du coefficient cubique d'un signe négatif (saturation non linéaire). Dans cette équation 12.10, les variables T et X, telles que $T = \epsilon t$ et $X = \sqrt{\epsilon}x$, représentent les variables lentes du système (rappelons que A est l'enveloppe de la modulation rapide) ; voir par exemple le paragraphe consacré à l'équation d'amplitude universelle développée dans la section 10.1 du chapitre 10. Nous avons vu dans ce même chapitre (chapitre 10), que la forme de l'équation d'amplitude résulte de propriétés de symétrie par translation dans l'espace, symétrie légitime également dans le cas traité ici d'une bifurcation de Hopf.

Enfin, le terme γA_X peut être facilement éliminé de l'équation 12.10 moyennant une opération de type translation galiléenne. En effet, posons $X' = X + \gamma T$, et $T' = T$. L'amplitude devient maintenant une fonction de X' et de T'. On doit donc effectuer les opérations de dérivation en termes de ces

[6]Nous aurions pu pensé que le coefficient devant A_X soit également complexe, à l'instar des autres coefficients de l'équation ; mais, ceci violerait la symétrie de parité du système qui impose la conservation de la forme de l'équation d'amplitude sous l'opération d'inversion $x \to -x$ et $\omega_i' \to -\omega_i'$. Une autre considération pour justifier l'absence d'un terme en iA_X repose sur l'analyse linéaire développée dans la section précédente où nous avons établi que le coefficient pondérant le terme A_X est réel (il est donné par la vitesse de groupe).

nouvelles variables, soit :

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T'}\frac{\partial T'}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X'}\frac{\partial X'}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T'} + \gamma\frac{\partial}{\partial X'} \tag{12.11}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial T'}\frac{\partial T'}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X'}\frac{\partial X'}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X'} \ . \tag{12.12}$$

Notons que les dérivées spatiales secondes, comme les dérivées premières, ont une forme identique ($\frac{\partial^2}{\partial X^2} = \frac{\partial^2}{\partial X'^2}$). Le report de ces opérations de dérivation dans l'équation d'amplitude (équation 12.10) nous indique que ce changement de variable nous permet d'éliminer le terme γA_X.

Il est possible de simplifier l'expression de l'équation de l'amplitude complexe (équation 12.10). Nous pouvons toujours éliminer le terme en ia de l'équation d'amplitude 12.10, puisqu'il suffit d'effectuer la transformation $A \rightarrow Ae^{iat}$, opération qui revient à se placer dans le repère tournant du plan complexe $(\Re(A), \Im(A))$. Ainsi, nous obtenons aisément l'équation d'amplitude complexe suivante :

$$A_t = A - (1 + i\beta)|A|^2 A + (1 + i\alpha)A_{xx} \tag{12.13}$$

où, bien qu'ayant adopté la notation en petite casse, les variables t et x sont bien les variables lentes. Nous rappellerons le caractère lent de ces variables, si besoin est. Remarquons que dans l'analyse linéaire au début de ce chapitre, nous avions factorisé le terme $e^{i\omega_{i0}t}$ dans le champ représentant la perturbation (équation 12.5) ; c'est pourquoi l'équation d'amplitude linéaire de la perturbation (équation 12.9) ne comporte pas de terme en $i\omega_{i0}A$ (soit un analogue du terme iaA de l'équation d'amplitude 12.13) ; en d'autres termes, ce choix revenait à se placer d'emblée dans le repère tournant.

12.2 Dynamique non variationnelle

Une propriété importante de l'équation 12.13 est son caractère non variationnel : elle ne peut pas s'écrire sous la forme d'un gradient d'une fonction de Lyapunov (i.e. d'un potentiel). Notons cependant que l'équation peut toujours s'écrire sous forme d'une dérivée fonctionnelle[7], soit :

$$A_t = -\frac{\delta V}{\delta A^*} \tag{12.14}$$

où nous définissons la fonctionnelle V comme :

$$V = \int dx \left[-\frac{|A|^2}{2} + (1 + i\beta)\frac{|A|^4}{4} + (1 + i\alpha)\frac{|A_x|^2}{2} \right] \ . \tag{12.15}$$

[7] Voir le problème d'Euler résolu dans la section 3.9.4 pour la notion de dérivée fonctionnelle et la section 10.2.4 pour une discussion de la nature variationnelle de la dynamique de l'équation d'amplitude.

Si l'écriture de l'équation d'amplitude complexe 12.14 nous rappelle celle d'une dynamique variationnelle, nous devons cependant nous garder de la confusion. Puisque, eu égard au caractère complexe de la fonction V caractéristique d'une bifurcation de Hopf, la condition $\partial V/\partial t \leq 0$ ne peut pas être satisfaite, contrairement à ce qui se produit dans le cas d'une bifurcation stationnaire associée ainsi à une dynamique variationnelle.

Nous pouvons écrire

$$\frac{\partial V[A]}{\partial t} = \frac{\delta V}{\delta A^*}\frac{\partial A^*}{\partial t} = -\frac{\delta V}{\delta A^*}\frac{\delta V}{\delta A} \tag{12.16}$$

où nous avons utilisé le fait que l'amplitude conjuguée A^* obéit à l'équation d'évolution $\partial A^*/\partial t = -\delta V[A]/\delta A$.

Dans le cas d'une bifurcation stationnaire (voir la sous-section 10.2.4), la fonction V est une fonction réelle, et nous pouvons écrire $(\delta V/\delta A^*)(\delta V/\delta A) = |\delta V/\delta A|^2$, et par conséquent nous en déduisons la décroissance monotone de la fonction V au cours du temps (i.e. $\partial V/\partial t \leq 0$). Lorsque la fonction V est une fonction complexe, cette condition de décroissance monotone ne peut plus être assurée : nous avons ainsi perdu le caractère variationnel de la dynamique. C'est là une propriété fondamentale des phénomènes hors équilibre[8] : l'évolution n'est pas monotone et la dynamique du système est très riche.

12.3 Quelques propriétés de l'équation d'amplitude complexe

12.3.1 Ondes planes et stabilité

L'équation d'amplitude aux coefficients complexes (équation 12.13) possède une solution simple sous forme d'onde plane, soit :

$$A_0 = R_0 e^{i\omega t + iqx} \ . \tag{12.17}$$

Reportons cette expression de l'amplitude dans l'équation d'amplitude 12.13 pour obtenir :

$$R_0^2 = 1 - q^2, \quad \omega = -\beta - (\alpha - \beta)q^2 \tag{12.18}$$

où q est contraint de vérifier la condition : $|q| \leq 1$.

[8] Notons que bien que les problèmes donnant lieu à une bifurcation stationnaire soient fondamentalement liés à des états hors équilibre (comme la convection de Rayleigh-Bénard), l'équation d'amplitude acquiert un caractère variationnel. Ceci est vrai tant que l'analyse s'effectue au voisinage de la bifurcation. En s'en éloignant, cette propriété cesse d'être vérifiée. Ainsi, en poursuivant l'exposition du fluide à la chaleur dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard, les rouleaux ordonnés de convection peuvent être détruits pour laisser éventuellement place à un régime chaotique (ou turbulent), lequel ne peut évidemment pas souscrire à un principe variationnel du fait de son caractère erratique, foncièrement différent d'un comportement monotone.

Avant d'étudier la stabilité de cette solution, décomposons tout d'abord l'équation d'amplitude complexe 12.13 en ses deux parties, réelle et imaginaire. Pour cela, posons l'amplitude A telle que :

$$A = R(x,t)e^{i\theta(x,t)} \tag{12.19}$$

où θ est la phase de l'onde et reportons l'expression de cette dernière dans l'équation d'amplitude 12.13, Nous obtenons aisément le système des deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} R_t &= R + R_{xx} - R\theta_x^2 - \alpha(R\theta_{xx} + 2\theta_x R_x) - R^3 \ , \\ R\theta_t &= R\theta_{xx} + 2\theta_x R_x + \alpha(R_{xx} - R\theta_x^2) - \beta R^3 \ . \end{aligned} \tag{12.20}$$

Nous pouvons facilement vérifier que le couple de solutions (R, θ) avec $R = R_0 = 1 - q^2$ et $\theta_0 = qx + \omega t$ est bien solution stationnaire de ce système d'équations, en accord avec la solution en onde plane (voir les conditions 12.18), $\omega = -\beta - (\alpha - \beta)q^2$).

Étudions maintenant la stabilité de l'onde plane en perturbant le système à l'équilibre et en adjoignant aux solutions précédentes de petites perturbations à l'amplitude ($\rho(x,t)$) et à la phase de l'onde ($\psi(x,t)$), soit :

$$R = R_0 + \rho(x,t); \quad \theta = \theta_0 + \psi(x,t) \ . \tag{12.21}$$

Si ces perturbations décroissent avec le temps, la solution en onde plane A_0 est stable ; elle est instable dans le cas contraire. Reportons l'expression de la solution perturbée (équation 12.21) dans le système des deux équations d'évolution (équation 12.20) et pour procéder à l'étude de stabilité linéaire du système, intéressons-nous uniquement aux termes linéaires en ρ et ψ. Nous obtenons ainsi le système suivant :

$$\rho_t = -2R_0^2\rho + \rho_{xx} - R_0(\alpha\psi_{xx} + 2q\psi_x) - 2\alpha q\rho_x \ , \tag{12.22}$$

$$R_0\psi_t = \alpha\rho_{xx} + R_0\psi_{xx} + 2q(\rho_x - \alpha R_0\psi_x) - 2\beta R_0^2\rho\alpha \ . \tag{12.23}$$

Comme le système est autonome par rapport à x et t (c'est-à-dire que les coefficients de l'équation sont indépendants des variables x et t), recherchons les solutions ρ et ψ sous la forme suivante : $\rho = Ae^{iQx+\sigma t}$ et $\psi = Be^{iQx+\sigma t}$, où A et B sont des constantes *a priori* complexes, Q est le vecteur d'onde de la perturbation et σ est le taux éventuellement complexe de l'instabilité (taux de croissance ou d'atténuation). Reportons ces solutions dans le système ci-dessus pour obtenir un système homogène d'équations algébriques en A et B dont la solution est non triviale lorsque son déterminant est nul. Ceci résulte en une équation caractéristique du second degré en σ dont les solutions sont données par :

$$\sigma_\pm = -R_0^2 - Q^2 - 2i\alpha qQ \pm \sqrt{R_0^4 + \alpha^2 Q^4 - 2\alpha Q^2\beta R_0^2 + 4q^2Q^2 + 4iqQ\beta R_0^2} \tag{12.24}$$

Si la partie réelle du taux σ_- de l'instabilité est toujours négative, la partie réelle du taux σ_+ peut éventuellement devenir positive, ce qui est la signature du développement possible d'une instabilité.

Remarquons également que lorsque le vecteur d'onde Q de la perturbation est nul (i.e. $Q = 0$), le taux σ_+ de la perturbation est nul alors que le taux σ_- est négatif (atténuation de l'instabilité). Le mode pour lequel le vecteur d'onde de la perturbation est nul définit donc un mode neutre (i.e. mode associé à une valeur propre nulle) caractéristique d'une perturbation qui ne croît ni ne décroît. Le mode $Q = 0$ correspond à une translation homogène le long de l'axe Ox vis-à-vis de l'amplitude A. Cependant, étant donné que le champ total de la perturbation est composé d'une oscillation rapide et d'une enveloppe A (équation 12.8), le mode $Q = 0$ correspond donc à une translation « en bloc » de l'onde le long de l'axe Ox ; ce mode $Q = 0$ reflète l'aspect arbitraire du choix de l'origine de l'axe Ox. Ce type de mode définit, comme nous l'avions évoqué dans la section consacrée à l'instabilité d'Eckhaus (voir section 10.3) un mode de Goldstone. Cette invariance par translation le long de l'axe Ox signifie que l'évolution du système – et donc la physique qui le régit – ne dépend pas du choix du référentiel de l'observateur.

12.3.2 Instabilité de Benjamin-Feir

Le taux d'instabilité σ_+ est donc nul lorsque le vecteur d'onde Q est nul ; mais il peut devenir positif : il est donc possible qu'une instabilité puisse se développer pour des petits nombres d'onde Q, à l'image de l'instabilité d'Eckhaus (voir section 10.3). Pour étudier cette possibilité, développons le taux d'instabilité σ_+ pour des petits nombres d'onde Q pour obtenir :

$$\sigma_+ = -2i(\alpha - \beta)qQ - [1 + \alpha\beta - \frac{2q^2(\beta^2+1)}{R_0^2}]Q^2 + O(Q^3) \qquad (12.25)$$

Le premier terme est imaginaire et n'affecte pas la stabilité du système ; le second terme, du second ordre en Q (i.e. en Q^2), peut, quant à lui, devenir positif, signant ainsi le développement d'une instabilité. Ainsi, nous distinguons deux cas :

– (i) La solution en onde plane est stable vis-à-vis des modulations lorsque le coefficient de Q^2 est négatif, ce qui correspond au cas suivant :

$$1 + \alpha\beta - 2q^2\frac{\beta^2+1}{R_0^2} > 0\,. \qquad (12.26)$$

Autrement dit, puisque $R_0 = 1 - q^2$ (voir les conditions 12.18), les ondes dont les vecteurs d'onde q vérifient l'inégalité suivante :

$$q^2 < \frac{1 + \alpha\beta}{3 + \alpha\beta + 2\beta^2} \qquad (12.27)$$

sont stables.

– (ii) *A contrario*, la solution en onde plane devient instable vis-à-vis des modulations lorsque le coefficient de Q^2 devient positif donc lorsque le vecteur d'onde q des ondes planes satisfait à l'inégalité suivante :

$$q^2 > \frac{1+\alpha\beta}{3+\alpha\beta+2\beta^2} \,. \tag{12.28}$$

C'est la généralisation du résultat obtenu pour l'instabilité d'Eckhaus (voir section 10.3). En effet, lorsque les constantes α et β sont nulles (i.e. $\alpha = \beta = 0$), la condition d'instabilité correspond à $|q| > 1/\sqrt{3}$, ce qui n'est rien d'autre que le critère d'Eckhaus. Notons finalement que si l'inégalité suivante, dite critère de Benjamin-Feir [8] est vérifiée

$$1 + \alpha\beta < 0 \,, \tag{12.29}$$

toute la bande est instable, y compris pour le nombre d'onde q nul : il n'existe ainsi aucune solution d'onde stable. Au domaine instable de Benjamin-Feir, est associée une dynamique complexe, dont nous donnons ci-après un aperçu rapide.

12.4 Illustration de la dynamique pour certains cas typiques : analyse numérique

Nous allons passer en revue quelques propriétés de l'équation d'amplitude obtenues à l'aide d'une solution numérique.

12.4.1 Ondes planes

Reprenons l'équation d'amplitude complexe (équation 12.13) et attribuons des valeurs spécifiques aux constantes réelles α et β, soit $\alpha = 1$ et $\beta = 2$, pour en étudier sa dynamique (voir figure 12.1). Dans ce cas, le critère d'instabilité de Benjamin-Feir (équation 12.29) n'est pas vérifié puisque nous avons $1 + \alpha\beta = 3 > 0$. Le critère de stabilité du système (équation 12.27) définit une bande de vecteur d'onde correspondant à des ondes planes stables tel que le nombre d'onde q vérifie : $-\sqrt{3/13} < q < \sqrt{3/13}$. La dynamique représentée dans la figure 12.1 montre l'évolution de l'amplitude A, plus spécifiquement de son module $|A|$, et de sa partie réelle le plan spatio-temporel (x, t) ; ce type de représentation est parfois nommé *portrait spatio-temporel*.

En partant d'une condition initiale bruitée, ou aléatoire, nous observons que le module de A finit par s'homogénéiser au cours du temps et partout dans l'espace (graphe de gauche de la figure 12.1). Quant à la partie réelle et imaginaire (celle-ci est non représentée sur la figure) de l'amplitude pertubatrice, la perturbation initiale (bas des graphes de droite de la figure 12.1) disparaît au profit d'une modulation périodique montrant le caractère plan de l'onde. Notons que la longueur d'onde associée met plus de temps à atteindre un état

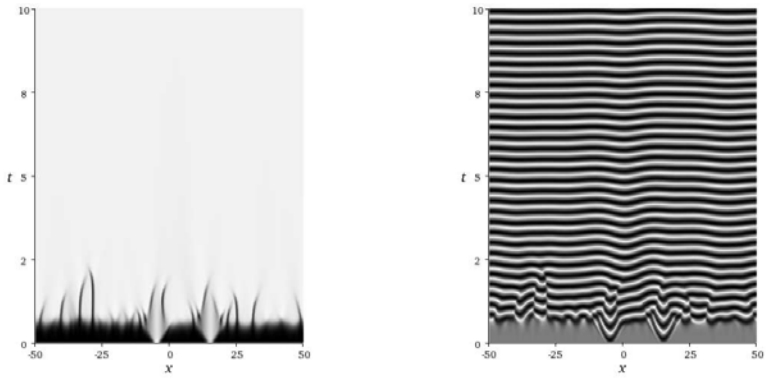


Figure 12.1 – Portrait spatio-temporel : l'axe horizontal représente la position, l'axe vertical le temps et la couleur (le gris foncé correspond au maximum et le gris clair au minimum) représente soit le module de A (figure de gauche) ou sa partie réelle -la phase- (figure de droite) avec des conditions initiales aléatoires. Ici on a pris $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Le système se trouve dans la région stable de Benjamin-Feir, et l'état final est une onde plane.

permanent que le module $|A|$ de l'amplitude : on dit que la dynamique de l'amplitude, donnée par $|A|$, est rapide par rapport à celle de la longueur d'onde. La dynamique est donc limitée par celle de la phase ; c'est pourquoi l'instabilité de Benjamin-Feir, comme celle d'Eckhaus, est une instabilité de phase. L'étude de la dynamique à temps plus long, révèle que le vecteur d'onde finit par devenir homogène dans l'espace, et les bandes deviennent droites et parallèles entre elles (avec un angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale donné par la vitesse de phase q/ω de l'onde).

Modifions maintenant la condition initiale en adoptant pour perturbation initiale une onde plane ayant un vecteur d'onde q dans la bande instable de Benjamin-Feir (soit $|q| > \sqrt{3/13}|$), tout en conservant les mêmes valeurs des paramètres α et β (soit $\alpha = 1$ et $\beta = 2$). Quelle est la dynamique associée à un tel système ? En fait, le système tend à diminuer le nombre d'onde q (donc à augmenter la longueur d'onde) de façon à ce qu'il évolue vers la bande stable de Benjamin-Feir ($|q| < \sqrt{3/13}$) : il y a élimination de bandes, et réajustement de la longueur d'onde vers un état final manifestant une onde plane.

12.4.2 Turbulence de phase et turbulence médiée par des défauts topologiques

Nous allons maintenant étudier le cas où $1 + \alpha\beta < 0$ (correspondant au critère d'instabilité de Benjamin-Feir ; i.e. où toute la bande de vecteurs d'ondes

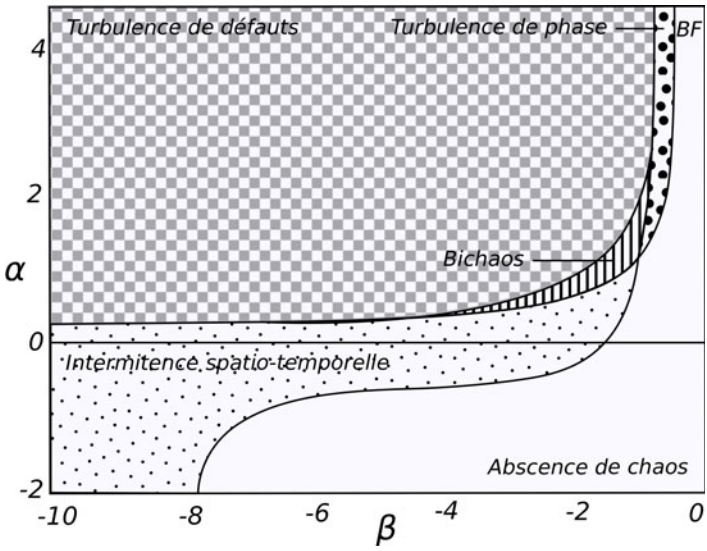


Figure 12.2 – Diagramme de phase de l'équation d'amplitude complexe. La ligne notée BF est la limite de Benjamin-Feir, en dessous de laquelle existent des ondes planes qui sont linéairement stables (pas de chaos). Coexistent avec ces ondes d'autres solutions, dites structures cohérentes (voir texte). Au-dessus de la ligne BF, la dynamique est complexe. La région notée « bichaos » est une région de coexistence de turbulence de phase et de turbulence initiée par des défauts (voir texte). La manifestation de l'une ou l'autre turbulence dépend des conditions initiales.

q correspondant aux ondes planes est instable). Dans ce cas, la dynamique devient très riche, car le système n'a plus la possibilité d'évoluer vers une onde plane. En fonction des valeurs des paramètres α et β, deux grandes classes de comportements dynamiques peuvent être distinguées : (i) la turbulence de phase ou celle médiée par les défauts (voir référence [72]) et (ii) l'intermittence spatio-temporelle (voir référence [17]).

Dans ce paragraphe, notre objectif est de sensibiliser le lecteur à la grande variété de comportements engendrés par une équation d'amplitude dont l'apparence relativement simple ne doit pas faire oublier qu'elle est générique des systèmes non linéaires. Si l'analyse précise de ces dynamiques sort du cadre de cet ouvrage, nous présentons néanmoins ci-après quelques commentaires et illustrations.

Étudions le diagramme de phase de l'équation d'amplitude complexe (voir figure 12.2) dans le plan (α, β). Le critère de Benjamin-Feir définit une frontière dans ce plan d'équation $1 + \alpha\beta = 0$. Au-dessus de cette frontière $\alpha > -1/\beta$, toute la bande correspondant aux ondes planes est instable. En dessous de cette

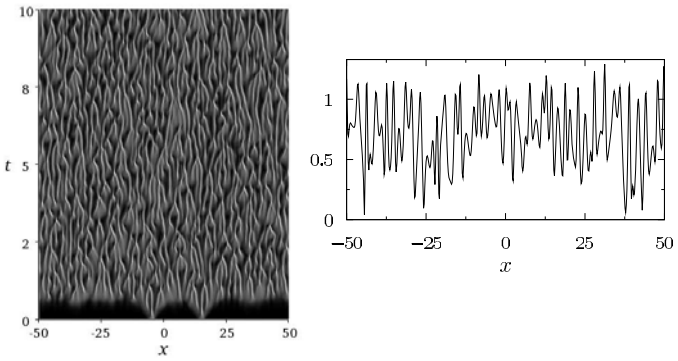


Figure 12.3 – Portrait spatio-temporel dans le cas d'une turbulence initiée par les défauts. La figure de gauche représente $|A|$, et celle de droite $|A|$ en fonction de x dans un régime permanent. $\alpha = 2$, $\beta = -2$.

frontière, l'existence d'ondes planes est possible, mais elles coexistent avec des solutions plus complexes, dites structures cohérentes définies ci-après (voir la sous-section 12.4.4). Dans la région $\alpha > -1/\beta$, deux types de dynamiques sont possibles (voir figure 12.2).

- (i) *La turbulence initiée par les défauts* : dans ce cas, la dynamique est telle que le module d'amplitude est nul (i.e $|A| = 0$) le long de l'axe Ox, en des points nommés *défauts* ; la phase de la perturbation est donc arbitraire en ces points. Ainsi, en traversant ces points, la phase peut varier par un multiple de $2\pi/L$ où L est la taille latérale du système (voir le portrait spatio-temporel de cette instabilité et la configuration de $|A|$ dans le régime permanent, figure 12.3).
- (ii) *La turbulence de phase.* Dans ce cas, le module $|A|$ de l'amplitude ne s'approche pas de la valeur zéro et la phase totale est conservée ; ce type de dynamique a lieu près de la frontière de Benjamin-Feir de l'instabilité du même nom (voir figure 12.2). Dans ce voisinage, la variable la plus pertinente est la phase de la structure, tandis que son amplitude lui est asservie (voir le portrait spatio-temporel, de cette instabilité et la configuration du module $|A|$ de l'amplitude dans le régime permanent, figure 12.4) ; on peut alors montrer que la dynamique de la phase θ est décrite par une équation célèbre, celle de Kuramoto-Sivashinsky (voir problème 12.5.1)[9].

[9] L'équation de Kuramoto-Sivashinsky est de la forme suivante : $\theta_t + \nabla^4\theta + \nabla^2\theta + |\nabla\theta|^2/2 = 0$, où ∇^4 est l'opérateur bi-harmonique, ∇^2 est l'opérateur laplacien et ∇ est l'opérateur gradient. L'équation unidimensionnelle de Kuramoto-Sivashinsky fut introduite par le physicien japonais Yoshiki Kuramoto de l'université de Kyoto lors de l'étude de la turbulence de phase dans un système de réaction-diffusion (réaction dite de Belousov-Zhabotinsky, voir référence [42] ; le physicien israélien Gregory Sivashinsky la dériva indépendamment dans le contexte

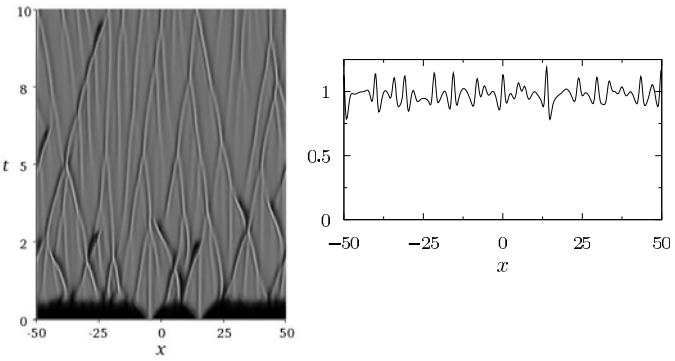


Figure 12.4 – Portrait spatio-temporel (à gauche), et module de A (droite) dans le cas de la turbulence de phase. $\alpha = 2$, $\beta = -1$.

12.4.3 Intermittence spatio-temporelle

Dans le régime d'onde plane stable, associé à la région située en deçà de la frontière de Benjamin-Feir dans le diagramme de phase (figure 12.2), la plupart des conditions initiales font évoluer le système vers des solutions de type onde plane. Cependant, lorsque les conditions initiales sont localisées et de grande amplitude, le système évolue vers un autre type de solution appelé *intermittence spatio-temporelle* (voir figure 12.5). À l'image des conditions initiales, ces structures d'intermittence spatio-temporelle sont caractérisées par des modes localisés (vastes régions sombres du portait spatio-temporel de la figure 12.5), comme des *trous* assez profonds, et elles évoluent de manière complexe tout en délimitant des régions de différentes amplitudes. Les modes localisés visualisés par les zones sombres en forme de parapluie semi-ouvert (figure 12.5) « interrompent » le mouvement raffiné et complexe (à couleur plus claire sur la figure 12.5), d'où le terme « intermittent » attribué au type de solution.

12.4.4 Les trous de Bekki-Nozaki

En sus des ondes planes associées à la région stable de Benjamin-Feir, des variétés alternatives de solutions sont possibles. Les plus connues sont les solutions appelées *trou de Bekki-Nozaki* (voir référence [7]). Ces solutions correspondent à des « trous » profonds de la valeur de l'amplitude (voir figure 12.6). Il s'agit de solutions qui appartiennent à une plus grande famille de solutions dites *structures cohérentes*. Ces solutions consistent en des profils fixes dans l'espace qui peuvent varier par propagation ou oscillation ; d'autres structures

des instabilités thermo-diffusives (voir référence [74]). L'équation de Kuramoto-Sivashinsky est notamment utilisée pour l'étude des connections entre les échelles microscopique et macroscopique opérant dans de nombreux phénomènes physiques.

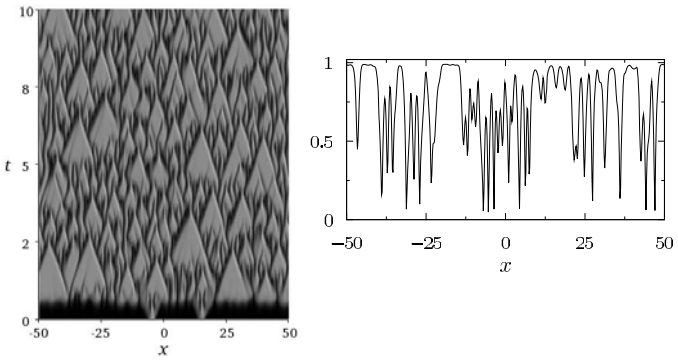


Figure 12.5 – Portrait spatiotemporel (à gauche), et module de A en fonction de x (droite) dans le cas d'une intermittence spatio-temporelle. $\alpha = 0$, $\beta = -3$.

cohérentes incluent les puits, sources et fronts (pour une revue détaillée, voir la référence [79]).

12.5 Problèmes

12.5.1 Problème : équation de Kuramoto-Sivashinsky au voisinage de l'instabilité de Benjamin-Feir

Montrer qu'au voisinage de l'instabilité de Benjamin-Feir, la phase obéit à l'équation de Kuramoto-Sivashinsky. Solution : la condition de Benjamin-Feir est donnée par le critère 12.27. Au voisinage de l'instabilité, la quantité $1 + \alpha\beta$ est proche de zéro. Introduisons un petit paramètre ϵ tel que :

$$\epsilon^2 = 1 + \alpha\beta, \text{ donc } \beta = \frac{1}{\alpha} + \frac{\epsilon^2}{\alpha} . \tag{12.30}$$

Pour simplifier l'analyse, limitons-nous au cas où le nombre d'onde est nul (i.e. $q = 0$)[10]. Rappelons que d'après la condition associée au développement des instabilités (équation 12.28) et lorsque la condition de Benjamin-Feir est satisfaite, alors toute la bande de vecteurs d'ondes q correspondant à l'existence d'ondes planes est instable, y compris le mode correspondant à un nombre d'onde nul ($q = 0$). Par ailleurs, comme la bande des vecteurs d'ondes Q correspondant aux modes instables (voir équation 12.25) est d'ordre $\Delta Q \sim \sqrt{1 + \alpha\beta} \sim \epsilon$, nous en déduisons que le taux de croissance[11] de l'instabilité est de l'ordre $\sigma_+ \sim \epsilon^4$ (à partir de l'équation 12.25). Introduisons alors

[10] Dans les autres cas (i.e. $q \neq 0$), l'analyse peut être faite mais l'équation résultante est un peu plus sophistiquée (voir références [33, 43]).

[11] Notons que puisque la bande des modes instables est limitée par $Q = 0$, nous pouvons écrire avec une bonne approximation que $Q \simeq \epsilon$.

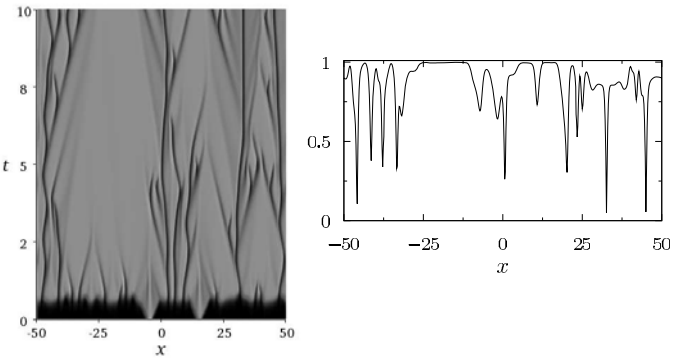


Figure 12.6 – Portrait spatio-temporel (à gauche), et module de A (à droite). Dans ce cas l'amplitude reste assez constante, mais manifeste des trous profonds, trous appelés de Bekki-Nozaki. Ici $\alpha = 0$, $\beta = 1,5$.

les deux variables lentes X et T telles que :

$$X = \epsilon x, \quad T = \epsilon^4 t \; . \tag{12.31}$$

Par ailleurs, nous savons que la phase de l'onde est donnée par $\theta_0 = qx + \omega t$ et que $\omega = -\beta - (\alpha - \beta)q^2$ (voir paragraphe 12.3.1). Pour $q = 0$, nous avons $\omega = -\beta$, et la phase vaut $\theta_0 = -\beta t$.

Rappelons que notre objectif est ici de décrire la modulation spatio-temporelle de la structure ; ainsi, le vecteur d'onde acquiert un caractère local. Notons la phase totale par θ et posons le développement suivant :

$$\theta = -\beta t + \epsilon^2 \psi(X, T) \; , \tag{12.32}$$

où la phase lente ψ ne dépend que de X et T. Ce choix est motivé par le fait que le vecteur d'onde local est donné par $Q(X,T) = \partial\theta/\partial x = \epsilon^{-1}\partial\theta/\partial X = \epsilon\partial\psi/\partial X \sim O(\epsilon)$. Ainsi, le vecteur d'onde de la structure modulée est d'ordre ϵ, en accord avec le fait que le nombre d'onde est tel que $Q \simeq \epsilon$ au sein de la bande instable. De même que la phase, l'amplitude devient maintenant une enveloppe qui varie sur les échelles de la modulation en X et en T. Posons donc

$$R = R(X, T) \; . \tag{12.33}$$

En termes des nouvelles variables θ et R, et sans approximation à ce stade, le système 12.20 prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \epsilon^4 R_T = R + \epsilon^2 \left[R_{XX} - R\psi_X^2 - \alpha\epsilon^2 (R\psi_{XX} + 2\psi_X R_X) \right] - R^3 \\ & (\frac{1}{\alpha} + \frac{\epsilon^2}{\alpha}) R + \epsilon^6 R\psi_T \\ = \; & \epsilon^2 \left[\epsilon^2 (R\psi_{XX} + 2\psi_X R_X) + \alpha (R_{XX} - \epsilon^4 R\psi_X^2) \right] \\ & + (\frac{1}{\alpha} + \frac{\epsilon^2}{\alpha}) R^3 \end{aligned} \tag{12.34}$$

L'idée consiste maintenant à rechercher une solution en puissance du petit paramètre ϵ. Étant donné que la puissance de ϵ est paire dans le système d'équations 12.34, essayons une solution en série de puissance sous la forme suivante :

$$R = R_0 + \epsilon^2 R_2 + \epsilon^4 R_4 + \epsilon^6 R_6 + ... \quad (12.35)$$

$$R = \psi_0 0 + \epsilon^2 \psi_2 + \epsilon^4 \psi_4 + \epsilon^6 \psi_6 + ... \quad (12.36)$$

Reportons cette solution dans le système 12.34 et identifions les ordres en ϵ.

À l'ordre ϵ^0, les deux équations du système 12.34 indiquent que : $R_0(1 - R_0^2) = 0$, soit $R_0 = 0$ et $R_0 = 1$. C'est le second choix qui nous intéresse.

À l'ordre ϵ^2, nous obtenons la condition $R_2(1 - 3R_0^2) = 0$, ce qui entraîne que $R_2 = 0$.

À l'ordre ϵ^4, nous obtenons de la première équation du système 12.34, l'équation suivante :

$$R_6 = -\frac{\alpha}{4}\psi_{0XXXX} - \frac{1}{2}\psi_{0X}^2 - \frac{\alpha}{2}\psi_{2XX} \ . \quad (12.37)$$

Reportons dans la seconde équation de ce même système pour trouver sans détour, puisque le terme en ψ_2 s'élimine automatiquement :

$$\psi_{0T} = -\psi_{0XX} - \frac{1}{2}(1 + \alpha^2)\psi_{0XXXX} - (\alpha + \alpha^{-1})\psi_{0X}^2 \ . \quad (12.38)$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Kuramoto-Sivashinsky. Elle a été dérivée dans de nombreux contextes hors équilibre (voir référence [54], pour une revue). Cette équation est connue pour engendrer du chaos spatio-temporel ; cet état est parfois nommé chaos de phase, dénomination qui puise son origine de l'équation d'amplitude complexe traitée dans ce chapitre, puisque c'est la phase qui est la variable appropriée dans ce régime.

Chapitre 13

Structures bidimensionnelles

Nous nous sommes limités jusqu'à présent, aux structures unidimensionnelles et nous avons vu que l'ordre peut exister sous forme de bandes. La dynamique au voisinage du seuil d'instabilité est décrite par une équation d'amplitude universelle présentée dans le chapitre consacré à l'émergence d'un ordre spatial unidimensionnel dans les systèmes hors équilibre (voir chapitre 9). Dans ce dernier chapitre, nous allons maintenant aborder les structures spatiales[1] à deux dimensions à travers l'étude de leur dynamique et l'émergence de l'ordre spatial bidimensionnel. Nous nous limiterons ici uniquement au cas des instabilités associées à des bifurcations stationnaires, c'est-à-dire que l'état du système transite d'un état stationnaire vers un autre état stationnaire. Nous n'aborderons donc pas le cas de la bifurcation de Hopf correspondant à des transitions de solutions stationnaires vers des solutions oscillantes décrites dans les chapitres 5, 6 et 12.

13.1 Ordre à deux dimensions

L'étude de la stabilité linéaire d'une solution homogène et stationnaire constitue une étape importante dans l'étude des phénomènes non linéaires comme nous l'avons montré tout au long de cet ouvrage. Dans le cas d'un système à une dimension, nous avons notamment établi que la forme de la perturbation au voisinage d'une solution homogène et stationnaire est une onde plane de type : $e^{\omega t+iqx}$ où q désigne le vecteur d'onde et ω le taux de croissance (voir équation 12.17) ; lorsque la partie réelle du taux d'instabilité est positive (i.e. $\Re(\omega) > 0$), nous sommes confrontés à une instabilité qui ne s'amortit pas au cours du temps (ω est alors un taux de croissance) : le système est ainsi instable (voir chapitre 9). L'étude de la stabilité linéaire d'un système permet d'obtenir

[1] Notons ici que nous pouvons rencontrer dans la littérature scientifique le terme anglo-saxon *patterns*, signifiant motifs ou « patrons », pour désigner les structures spatiales associées aux systèmes non linéaires.

un résultat important : la relation de dispersion qui relie le taux d'instabilité ω au vecteur d'onde q de la perturbation ; nous disposons donc d'une relation de type $\omega(q)$.

Dans le cas bidimensionnel, le vecteur d'onde possède deux composantes q_x et q_y dans les directions x et y du plan. Si le plan (O, x, y) ne présente aucune direction privilégiée, nous pouvons nous attendre à ce que la relation de dispersion ne dépende pas de q_x et de q_y indépendamment l'un de l'autre, mais uniquement du module du nombre d'onde $|\mathbf{q}|$ du vecteur d'onde $\vec{q}$. À titre d'exemple, prenons comme équation modèle non linéaire la version à deux dimensions (i.e. 2D), de surcroît isotrope (i.e. pas de direction privilégiée dans l'espace) de l'équation d'amplitude de Swift-Hohenberg (équation 10.2) dans laquelle nous remplaçons la dérivée seconde par rapport à x par le laplacien ∇^2 à deux dimensions (i.e. $\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$), pour obtenir l'équation d'amplitude bidimensionnelle de Swift-Hohenberg :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = [\epsilon - (1 + \nabla^2)^2]\phi + \alpha\phi^2 - \phi^3 \ . \tag{13.1}$$

La solution $\phi = 0$ est une solution triviale de l'équation bidimensionnelle de Swift-Hohenberg (équation 13.1). Afin d'étudier la stabilité linéaire de cette solution, nous lui superposons une petite perturbation ϕ_1 et cherchons une solution sous la forme :

$$\phi_1 = \nu e^{\omega t + i q_x x + i q_y y} \equiv \nu e^{\omega t + i \vec{q}.\vec{r}} \ , \tag{13.2}$$

où ν est un petit paramètre et $\vec{r} = (x, y)$ est le vecteur position. Reportons cette solution dans l'équation précédente 13.1 pour obtenir la relation de dispersion suivante :

$$\omega = \epsilon - (q^2 - 1)^2 \ , \tag{13.3}$$

où nous avons posé $q = |\vec{q}|$ et négligé les termes non linéaires en ν.

à la condition critique, lorsque $\epsilon = 0$, le mode d'instabilité associé au vecteur d'onde critique (i.e. $q \equiv q_c = 1$) est neutre : son taux de croissance ω est nul ; les autres modes associés aux autres vecteurs d'onde (i.e. $q \neq q_c$) sont stables : leur taux de croissance ω est négatif. La condition critique est donc caractérisée par le seul couple $(\epsilon_c, q_c) = (0, 1)$. Lorsque $\epsilon > 0$, il existe dans le plan d'onde (q_x, q_y) un anneau de modes instables d'épaisseur notée $|q_+ - q_-|$. Si ϵ est suffisamment petit, nous pouvons écrire $|q_+ - q_-| \equiv \Delta q \simeq \sqrt{\epsilon}/2$ (voir figure 13.2) : nous sommes donc en présence d'une amplification exponentielle de l'instabilité et nous ne pouvons plus faire abstraction des termes non linéaires. Afin de déterminer l'équation d'amplitude à deux dimensions, nous vous invitons à suivre la même démarche qu'au chapitre dédié à la naissance d'un ordre spatial unidimensionnel (voir chapitre 9) ; nous donnerons ci-après le résultat et pour les détails du calcul, nous renvoyons le lecteur au problème traité dans ce chapitre de l'équation d'amplitude bidimensionnelle pour deux symétries différentes (voir section 13.6.1).

13.1.1 Les différents types d'ordre spatial à deux dimensions

à la différence du problème unidimensionnel pour lequel un seul type d'ordre intervient, soit une solution périodique dans la direction Ox, il existe dans les problèmes bidimensionnels différents types d'ordre spatial. Les types d'ordre les plus usuels sont : (i) les bandes (ce qui équivaut à des rouleaux dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard) ; (ii) l'ordre à symétrie carrée (où réseau carré) ; (iii) l'ordre à symétrie hexagonale. Nous nous proposons d'énumérer ci-après les différents types d'ordres à partir de considérations générales.

L'existence d'un ordre signifie qu'il y a une invariance du motif en se déplaçant par translation d'une certaine distance. La distance minimale requise pour retrouver le même motif n'est autre que la longueur d'onde du motif. Cette condition d'invariance par translation du motif restreint, en fait, le nombre de solutions ordonnées possibles. Plus précisément, il n'existe que cinq types de réseaux distincts. Ces réseaux diffèrent les uns des autres par leurs symétries. Passons à présent à la démonstration de ce résultat et désignons par λ la plus petite période possible du réseau. Prenons deux points A et B situés aux nœuds du réseau et distants d'une longueur λ (voir figure 13.1). Effectuons maintenant une rotation d'un angle $\alpha = 2\pi/n$, avec n entier, de manière à ramener le point A en A' et B en B' (voir figure 13.1). Si le réseau a une symétrie d'ordre n, c'est-à-dire s'il jouit de l'invariance par rotation d'un angle α et ses multiples entiers, les nouveaux points ainsi obtenus, A' et B', doivent appartenir aux nœuds du réseau. Cette condition n'est satisfaite que si ces deux points sont distants de $p\lambda$ où p est un entier. La distance entre A' et B', soit $p\lambda$, est également donnée par la relation géométrique suivante :

$$p\lambda = \lambda + 2\lambda \sin(\alpha - \pi/2) = \lambda - 2\lambda \cos(\alpha) \; . \tag{13.4}$$

Ce résultat, facilement déduit de la figure 13.1, impose la relation suivante : $\cos\alpha = (1-p)/2$; et puisque la valeur absolue de la fonction cosinus est toujours inférieure ou égale à l'unité (i.e. $|\cos(\alpha)| \leq 1$), le nombre entier p ne peut prendre que les valeurs suivantes : 3, 2, 1 ou 0. Ces valeurs correspondent à des rotations d'angle $\alpha = 2\pi/n$, où $n = 2, 3, 4$, et 6. Ces centres de rotations d'ordre n, dits encore axes d'ordre n, sont les seules rotations compatibles avec l'invariance par translation. Une des conséquences pratiques de ce résultat mathématique consiste à noter l'impossibilité de paver continûment un sol plat à l'aide d'un carrelage dont la pièce élémentaire possède 5 ou 7 côtés.

En revanche, le pavage continu d'un plan avec des pièces élémentaires disposant de 6, 4, 3 ou 2 côtés est tout à fait envisageable ; un axe d'ordre 6 correspond à une pièce élémentaire à 6 côtés soit à une symétrie hexagonale, l'ordre 4 à une symétrie carrée, l'ordre 3 à une symétrie triangulaire, l'ordre 2 à une symétrie rectangulaire, et finalement l'ordre 1 à une symétrie oblique : c'est la moins symétrique des structures ordonnées. Ces symétries définissent 5 types différents de réseaux (voir figure 13.4). La figure 13.4 représente des exemples de motifs périodiques. Les réseaux ordonnés sont souvent nommés

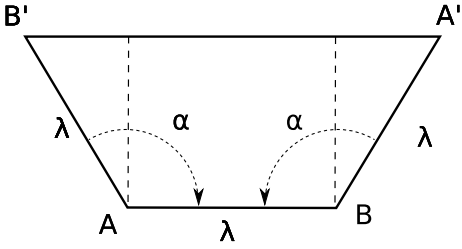


Figure 13.1 – Les points A et B sont aux nœuds du réseau. Les points A' et B' sont obtenus par rotation par un angle α et appartiennent également aux nœuds du réseau, en vertu du fait que le système est supposé être invariant vis-à-vis d'une rotation d'un angle $\alpha = 2\pi/n$.

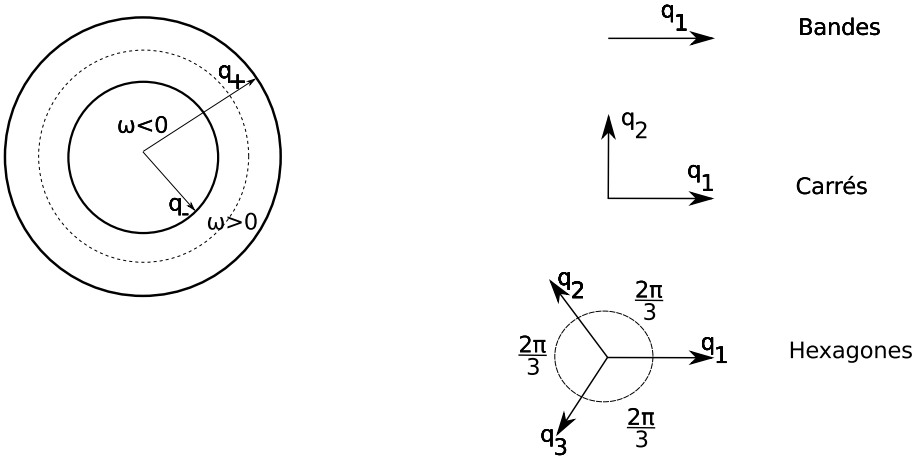


Figure 13.2 – Tous les modes dont le vecteur d'onde se trouve dans l'anneau (à gauche) en traits épais sont linéairement instables. On peut représenter toute solution comme combinaison linéaire de modes ayant des vecteurs d'ondes dans la bande instable (à l'intérieur de l'anneau). La ligne brisée correspond au cercle critique de rayon q_c. À droite, on présente trois combinaisons possibles de vecteurs d'ondes donnant lieu à des structures ordonnées. Il s'agit de la structure en bandes (en réalité cette structure correspond à une solution unidimensionnelle, mais on peut étudier sa stabilité vis-à-vis des perturbations dans le plan ; voir plus loin), et les structures carrée et hexagonale. D'autres structures ordonnées sont possibles (voir texte).

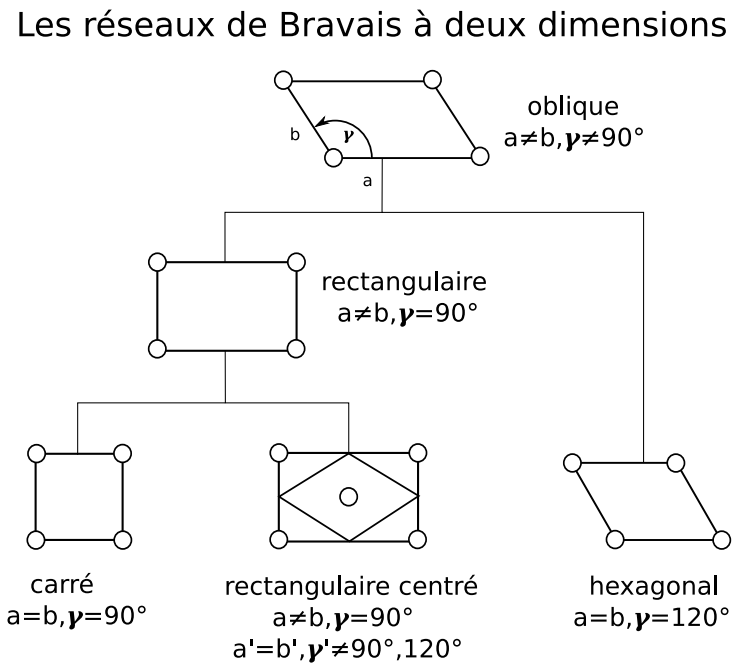


Figure 13.3 – On présente les cinq types de réseaux possibles à deux dimensions.

réseaux de Bravais[2]. Dans cet ouvrage, nous n'allons pas traiter de toutes les symétries, mais nous allons plutôt nous focaliser sur les deux structures bidimensionnelles[3] les plus courantes : les réseaux hexagonaux, structures les plus abondantes dans la nature, et les réseaux carrés.

Au préalable, et dans la section suivante, nous nous proposons de fournir une explication simple à la surabondance des structures hexagonales dans la nature.

13.2 Raison de l'abondance des structures hexagonales dans la nature

Les motifs hexagonaux, également qualifiés de nids d'abeilles, sont abondamment observés dans notre environnement naturel. Pour ne citer que quelques exemples, les motifs hexagonaux structurent (i) les figures de sédimentation (voir figure 13.5) (ii) la surface de différents sols exposés aux pluies et après

[2]Du nom du physicien français Auguste Bravais (1811-1863), connu notamment pour ses travaux en cristallographie.

[3]Notons bien que les structures en bandes, très courantes également, font partie des structures unidimensionnelles !

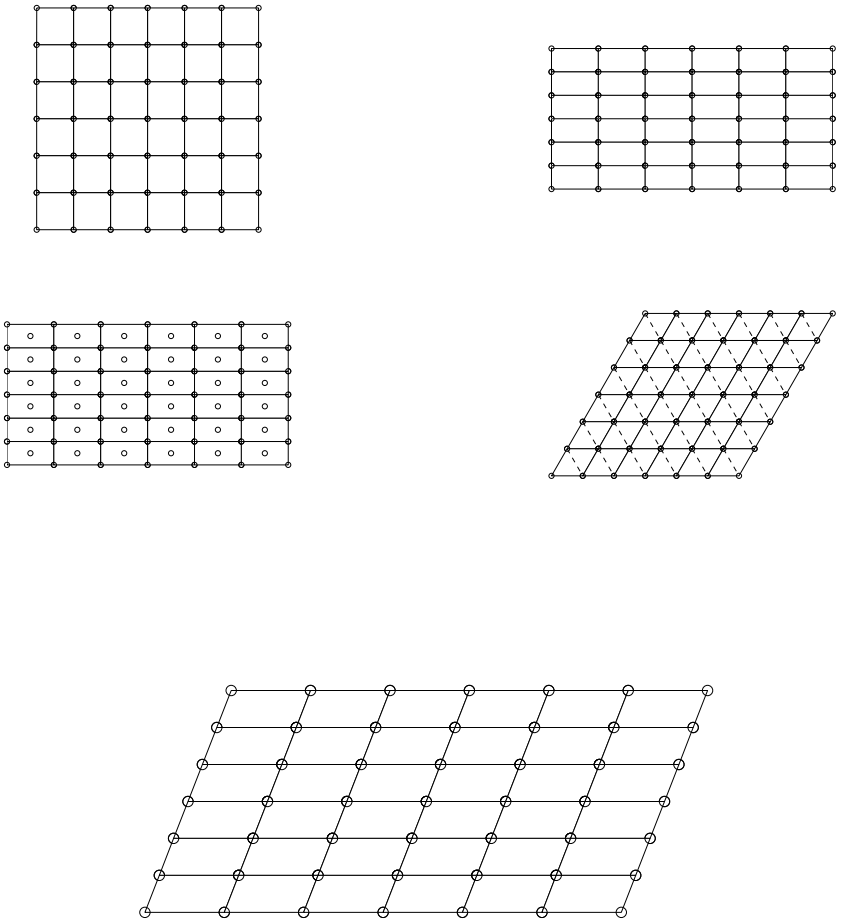


Figure 13.4 – On présente des exemples de motifs périodiques : carré, rectangulaire, rectangulaire centré, hexagonal et oblique.

évaporation (il s'agit de fractures liées à des contraintes thermiques), (iii) la surface d'un liquide chauffée par la base (voir figure 1.5), etc. L'abondance de ce motif n'est pas due au hasard, mais elle résulte de conséquences issues d'un mécanisme non linéaire naturel que nous pouvons appréhender à partir de considérations générales[4].

13.2.1 émergence des structures hexagonales : non-linéarité quadratique et phénomène de résonance

Comme nous l'avons déjà vu à différentes reprises au cours de cet ouvrage, les modes propres du régime linéaire sont les modes de Fourier issus d'une décomposition en série de Fourier contenant toutes les harmoniques.

Si ces modes ne se couplent pas dans le régime linéaire, il n'en va pas de même en présence de non-linéarités. Supposons qu'un mode de Fourier se développe à la naissance d'une instabilité. écrivons-le alors sous la forme $A_1 e^{i\vec{q}_1.\vec{r}}$. Une fois l'instabilité amorcée, les termes non linéaires ne peuvent plus être ignorés et la première non-linéarité naturelle est quadratique ; le mode initial[5] $A_1 e^{i\vec{q}_1.\vec{r}}$ finit par se coupler à d'autres modes. Pour un ordre carré, par exemple, la solution de base dans le régime linéaire s'écrit $A_1 e^{i\vec{q}_1.\vec{r}} + A_2 e^{i\vec{q}_2.\vec{r}}$ avec $\vec{q}_2$ orthogonal à $\vec{q}_1$ (les deux vecteurs d'onde ont la même norme). Pour un ordre hexagonal, la solution est de la forme $A_1 e^{i\vec{q}_1.\vec{r}} + A_2 e^{i\vec{q}_2.\vec{r}} + A_3 e^{i\vec{q}_3.\vec{r}}$ avec $\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 = 0$, etc.

De manière générale tout mode tel que $A_n e^{i\vec{q}_n.\vec{r}}$ (avec n entier et $|\vec{q}_n| = q_c$) est une solution possible. La formation d'un ordre consiste en une combinaison particulière de ces modes de base (comme indiqué plus haut pour le cas carré et hexagonal). Dans le régime initial quasi linéaire et en toute généralité, la solution est une superposition de modes de base (par exemple, deux modes pour les carrés, trois pour le les hexagones), et de leurs harmoniques supérieures ayant des vecteurs d'ondes de norme $2q_c, 3q_c$.... Au voisinage du seuil de l'instabilité, seul le mode principal de vecteur ayant comme norme q_c est instable, tandis que les modes d'ordres supérieurs sont stables.

Les modes qui se couplent au mode initial $A_1 e^{i\mathbf{q_1}.\mathbf{r}}$ sont ceux dont le vecteur d'onde est quasi égal à celui du mode initial $\mathbf{q}_1$: la proximité des modes assure un couplage dominant : c'est la résonance. Étant donné que la première non-linéarité envisageable dans un système non-linéaire est quadratique, les différents modes de Fourier interviennent en produit deux à deux (chaque produit de mode correspond à l'addition des deux vecteurs d'ondes ; par exemple, le couplage entre les modes numérotés « 2 » et « 3 » donne le mode suivant : $A_2 e^{i\vec{q}_2.\vec{r}} A_3 e^{i\vec{q}_3.\vec{r}} = A_2 A_3 e^{i(\vec{q}_2+q_3).\vec{r}}$; notons que le produit de deux modes complexes conjugués peut également apparaître dans un développement non linéaire

[4] L'argument qui suit ne repose donc pas sur un principe ou un dogme, comme celui d'une compacité maximale, mais il s'appuie sur la dynamique d'un mécanisme non linéaire naturel.

[5] Au seuil de l'instabilité, le module du nombre d'onde q_1(i.e. $|\vec{q}_1|$) se trouve sur un cercle de rayon q_c, voir figure 13.2.

Figure 13.5 – Motifs hexagonaux rencontrés dans la nature. En haut : des colonnes de basalte (Giant's Causeway ©forcdan #28975739–Fotolia). En bas : Sol d'argile craquelé (Deadvlei–Namibie ©Sahara Nature #3863433–Fotolia)

et investiguons toutes les combinaisons quadratiques constituées en présence de 3 modes arbitraires (la prise en compte de 3 modes généraux arbitraires inclue en particulier les 5 types d'ordre possibles à deux dimensions), soit :

$$(i)\ A_1^2, (ii)\ A_2^2, A_3^2, (iii)\ A_1A_2, (iv)\ A_1A_3, (v)\ A_2A_3,$$
$$(vi)\ A_1^*A_2, (vii)\ A_1^*A_3, (viii)\ A_2^*A_3 \tag{13.5}$$

ainsi que leurs complexes conjugués

$$(i)\ {A^*}_1^2, (ii)\ {A^*}_2^2, (iii)\ {A^*}_3^2, (iv)\ {A^*}_1A_2^*, (v)\ {A^*}_1A_3^*,$$
$$(vi)\ {A^*}_2A_3^*, (vii)\ A_1{A^*}_2, (viii)\ A_1A_3^*, A_2{A^*}_3 \tag{13.6}$$

Concentrons-nous maintenant sur ces combinaisons quadratiques (équation 13.5) ; elles sont associées aux vecteurs d'ondes suivants :

$$(i)\ 2\vec{q}_1, (ii)\ 2\vec{q}_2, (iii)\ 2\vec{q}_3, (iv)\ \vec{q}_1 + q_2, (v)\ \vec{q}_1 + q_3,$$
$$(vi)\ \vec{q}_2 + \vec{q}_3, (vii) -\vec{q}_1 + \vec{q}_3, (viii)\ -\vec{q}_2 + \vec{q}_3\ . \tag{13.7}$$

La condition de résonance impose à chacune des combinaisons d'être égale à $\vec{q}_1$. La première n'est à l'évidence pas possible, la seconde et la troisième impliquent que $\vec{q}_1$ soit colinéaire à $\vec{q}_2$ et $\vec{q}_3$, ce qui correspond, d'une part, à un ordre unidimensionnel, et d'autre part cette condition implique que le module q_1 soit égal au double de q_2 ou de q_3. Or au voisinage de la bifurcation, les trois vecteurs d'ondes ont un module $\simeq q_c$, et l'un ne peut être le double de l'autre. Pour les mêmes raisons que pour les combinaisons (i),(ii), et (iii), les combinaisons (iv), (v), (vii) sont également à écarter. Il ne reste plus que (vi) et $(viii)$ qui imposent $\mathbf{\tilde{q}_2 + \tilde{q}_3 - \tilde{q}_1 = 0}$ et $\vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{q}_3 = 0$. Ces relations sont représentées géométriquement sur la figure 13.6. Même si ces deux combinaisons s'apparentent à une structure triangulaire, une rotation par un angle d'ordre $n = 1, 2, 3, 4, 6$ (les seuls angles autorisés pour un ordre bidimensionnel) ne fait coïncider en aucun cas la base des vecteurs générée par rotation avec la base initiale (voir figure 13.6).

Examinons maintenant les combinaisons 13.6 qui conduisent aux combinaisons suivantes pour les vecteurs d'ondes

$$(i)\ -2\vec{q}_1, (ii)\ -2\vec{q}_2, (iii)\ -2\vec{q}_3, (iv)\ -(\vec{q}_1 + \vec{q}_2), (v)\ -(\vec{q}_1 + \vec{q}_3)$$
$$(vi)\ -(\vec{q}_2 + \vec{q}_3), (vii)\vec{q}_1 - \vec{q}_3, (viii)\ \vec{q}_2 - \vec{q}_3\ . \tag{13.8}$$

En imposant à chacune des expressions d'être égale à $\vec{q}_1$ nous pouvons écarter toutes les combinaisons (pour les mêmes raisons que celles rencontrées plus haut) à l'exception de (iv) dont la condition de résonance implique la relation suivante $-(\vec{q}_2 + \vec{q}_3) = \vec{q}_1$, ou encore

$$\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 = 0\ . \tag{13.9}$$

Comme au seuil d'instabilité et dans son voisinage, les trois vecteurs d'ondes ont le même module, ces vecteurs font un angle de $2\pi/3$ entre eux ; ils constituent ainsi une base hexagonale (voir figure 13.2). Autrement dit, la seule

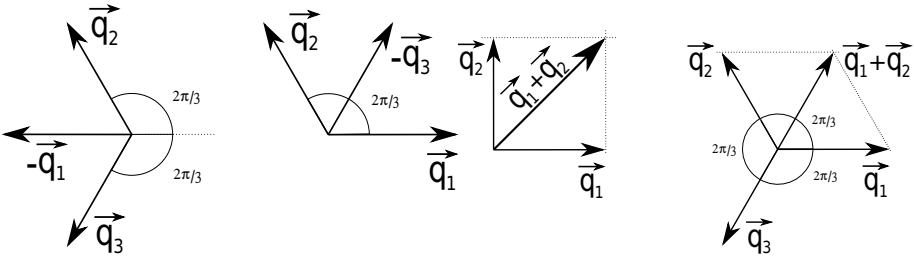


Figure 13.6 – On présente les vecteurs d'ondes (rapportés à la même origine) qui satisfont $\vec{q}_2 + \vec{q}_3 - \vec{q}_1 = 0$ et $\vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{q}_3 = 0$ (les deux schémas de gauche). Aucune rotation par un angle d'ordre $n = 2, 3, 4, 6$ ne peut faire coïncider la base avec elle-même. Ces combinaisons ne sont donc pas permises. Le troisième schéma illustre l'ordre carré. Une non-linéarité quadratique conduit à additionner les deux vecteurs d'ondes. Leur somme ne peut coïncider avec l'un des deux vecteurs de base (ou leurs opposés, ce qui correspond au complexe conjugué en termes de l'amplitude A). À droite on représente la configuration permise où la somme de deux vecteurs est égale à l'opposé du troisième. Ceci veut dire que l'amplitude d'un mode (disons A_1) se couple au complexe conjugué du produit des deux autres.

non-linéarité qui se couple à l'ordre dominant à la dynamique de A_1 est

$$A_2^* A_3^* \,. \tag{13.10}$$

On peut égalemnt vérifier géométriquement que seul l'ordre hexagonal peut satisfaire une résonance à l'ordre quadratique. Par exemple, en choisissant un axe d'ordre carré (symétrie carrée), aucune combinaison de deux vecteurs d'ondes ne conduit à la résonance à l'ordre quadratique (voir figure 13.6).

13.2.2 Inhibition des structures hexagonales : cas de la convection de Rayleigh-Bénard

à cette règle générale de la prédominance des structures hexagonales dans la nature, il existe des exceptions. En effet, en raison de symétries particulières du système, il est possible que les termes de non-linéarité quadratique ne soient pas autorisés ; et par conséquent le raisonnement fondé sur l'hypothèse de la dominance de la non-linéarité quadratique (voir section 13.2.1) menant à l'émergence de structures hexagonales ne peut pas être suivi. Un exemple célèbre de cette catégorie de systèmes est la convection de Rayleigh-Bénard, que nous avons étudiée dans le chapitre consacré à l'émergence de l'ordre spatial unidimensionel (voir chapitre 9). Cette affirmation n'est *a priori* pas évidente, étant donné que les équations de la thermo-convection contiennent des non-linéarités quadratiques, tel le terme en $\vec{v}.\nabla\vec{v}$ (voir équation 9.55). Mais une symétrie cachée dans les équations interdit en fait l'apparition des hexagones. Pour le

prouver, ré-écrivons les équations de la thermo-convection sous la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}T = \kappa\nabla^2 T$$

et

$$\rho[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\mathbf{v}] = \nu\nabla^2\vec{v} - \vec{\nabla}p + \rho\vec{g}, \quad \vec{\nabla}.\vec{v} = 0$$

où $\nu = \eta/\rho$ est la viscosité cinématique, η est la viscosité dynamique, et ρ est la densité. La majorité des fluides sont dits « fluides de Boussinesq », du nom du mathématicien et physicien français, Joseph Valentin Boussinesq (1842-1929). Dans cette approximation, il est admis que la densité du fluide ne varie que suite à un changement de température, et non, par exemple, du fait d'une variation de pression (le fluide est incompressible). Ainsi, la variation de la densité n'est prise en compte que dans le terme de gravité et elle est supposée constante dans les autres termes. Ainsi, prenons partout $\rho = \rho_0$, sauf devant le terme en $\mathbf{g}$ où nous posons $\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T\downarrow))$, où α est le coefficient d'expansion thermique (voir chapitre 9), et $T\downarrow$ est la température de la plaque inférieure. Posons $\theta = T - T_0(z)$, où $T_0(z)$ est la température de l'état conductif pur, et ré-écrivons les équations ci-dessus sous la forme :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\theta = \kappa\nabla^2\theta$$

et

$$\rho_0[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\vec{v}] = \nu\nabla^2\vec{v} - \vec{\nabla}p + \rho_0 g\hat{z}\theta, \quad \vec{\nabla}.\vec{v} = 0\ ,$$

où nous rappelons le lien entre les viscosités cinématique et dynamique : $\nu = \eta/\rho$ et $\hat{z}$ est le vecteur unitaire dirigé le long de l'axe vertical Oz. Rappelons que la cellule de Rayleigh-Bénard est comprise entre $z = 0$ (plaque inférieure) et $z = d$ (plaque supérieure). Notons que θ (tel qu'il a été défini ci-dessus) satisfait à la condition aux limites $\theta(x, y, z = 0, t) = \theta(x, y, z = d, t) = 0$, et étant donné que les deux surfaces sont identiques, les conditions aux limites sur la vitesse sont équivalentes sur les deux plaques. Chaque quantité (température, vitesse et pression) entrant en jeu dans les équations ci-dessus est, en général, une fonction du temps t et des trois variables d'espace (x, y, z). Il est facile de voir que le système d'équations de la thermo-convection ci-dessus (adjoint aux conditions aux limites) est invariant vis-à-vis de l'opération de symétrie suivante :

$$[v_x, v_y, v_z, \theta, p](t, x, y, z) \to [v_x, v_y, -v_z, \theta, p](t, x, y, d - z)\ , \tag{13.11}$$

où v_x est la composante du vecteur vitesse $\vec{v}$ sur l'axe Ox, etc. Or, une telle symétrie n'est rien d'autre que la symétrie qui consiste à interchanger le haut avec le bas (symétrie « haut-bas »). Ainsi, dans l'approximation de Boussinesq, les équations de la thermo-convection jouissent de cette symétrie, ce qui inhibe la naissance des hexagones. En effet, ceux-ci sont exprimés sous forme d'une non-linéarité quadratique dans l'équation d'amplitude (voir section suivante),

ce qui brise la symétrie haut-bas ; car en changeant dans l'équation d'amplitude A par $-A$, l'équation est modifiée (i.e. elle n'est pas invariante sous cette opération d'inversion). Dans les cas où l'approximation de Boussinesq cesse d'être valable, les structures hexagonales redeviennent possibles.

13.3 Forme générale de l'équation d'amplitude à deux dimensions spatiales

13.3.1 Symétrie hexagonale

Dans cette section, nous dérivons l'équation d'amplitude à partir de considérations de symétrie ; la dérivation directe de cette équation à partir de l'équation modèle de Swift-Hohenberg à deux dimensions (équation 13.1) est proposée en tant que problème résolu dans une section ultérieure (section 13.6.1).

Commençons par considérer la symétrie hexagonale. Il est d'usage d'introduire trois vecteurs unitaires de base, soit $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, et $\vec{a}_3$ formant un angle $2\pi/3$ deux à deux. Notons q_c le module du vecteur d'onde critique et $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$, et $\vec{q}_3$, les trois vecteurs d'ondes orientés le long des vecteurs de base $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, et $\vec{a}_3$ tels que $|\vec{q}_i| = q_c$ (voir figure 13.2) ; les trois vecteurs d'ondes vérifient la relation suivante (voir 13.9) :

$$\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 = 0 \,. \tag{13.12}$$

Soit A_i $(i = 1, 2, 3)$ l'amplitude de la perturbation associée à la direction i, le champ physique ϕ (position du front instantané, concentration, vitesse...) décrivant le système étudié s'écrit comme :

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{3} A_n e^{i\vec{q}_n.\vec{r}} + A_n^* e^{-i\vec{q}_n.\vec{r}} \tag{13.13}$$

ce qui décrit bien une structure hexagonale, à condition de fixer une même valeur d'amplitude dans les trois directions (i.e. $A_1 = A_2 = A_3 = A$) ; le champ ϕ peut alors être écrit sous la forme suivante :

$$\phi(\mathbf{r}) = 2A[\cos(q_c x) + \cos\frac{q_c}{\sqrt{3}}(x - y) + \cos\frac{q_c}{\sqrt{3}}(x + y)] \,. \tag{13.14}$$

Mais par la suite, et pour conserver une portée générale à notre propos, nous nous placerons dans le cas général où les valeurs des amplitudes A_i sont dif-

férentes[6]. À l'ordre cubique[7], l'équation d'amplitude a la forme suivante :

$$\dot{A}_1 = \epsilon A_1 - [|A_1|^2 + \nu(|A_2|^2 + |A_3|^2)]A_1 + \gamma A_2^* A_3^* \qquad (13.15)$$
$$\dot{A}_2 = \epsilon A_2 - [|A_2|^2 + \nu(|A_3|^2 + |A_1|^2)]A_2 + \gamma A_3^* A_1^* \qquad (13.16)$$
$$\dot{A}_3 = \epsilon A_3 - [|A_3|^2 + \nu(|A_1|^2 + |A_2|^2)]A_3 + \gamma A_1^* A_2^* \qquad (13.17)$$

où ϵ est un petit paramètre, γ un paramètre que nous prenons arbitrairement positif[8] et ν un paramètre qui peut être positif ou négatif. On verra par la suite (section 13.4.3) que les structures carrées n'existent que si $\nu + 1 > 0$. Comme notre but sera de comparer les stabilités des structures en bandes, celles en hexagones, et celles en carrée, nous allons adopter le choix $\nu + 1 > 0$. Enfin le signe négatif devant les termes cubiques est là pour garantir une saturation non linéaire de l'instabilité à l'ordre cubique[9]. Lorsque le paramètre ϵ est négatif, la solution homogène d'amplitude nulle (i.e. $A = 0$) est linéairement stable ; elle perd sa stabilité lorsque le paramètre ϵ devient positif. L'invariance par rotation d'un angle égal à $2\pi/3$ impose que les trois équations se déduisent les unes des autres par permutation circulaire.

Dans le chapitre consacré à l'universalité au seuil de la naissance de l'ordre (chapitre 10), nous avons obtenu la forme de l'équation d'amplitude unidimensionnelle à partir de considérations sur les symétries du système (voir sous-section 10.2.1). En annulant les deux amplitudes A_1 et A_2 (i.e. $A_2 = A_3 = 0$), l'équation d'amplitude de A_1 (équation (13.15) devient identique à l'équation d'amplitude à une dimension la plus générale (équation 10.24) obtenue dans la sous-section 10.2.2. Notons au passage que le terme quadratique disparaît à une dimension. Sa présence découle donc bien de la bidimensionnalité du problème. L'invariance par translation (ou plus précisément l'invariance vis-à-vis du choix de l'origine) exige que les équations demeurent identiques, en effectuant l'opération : $\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$, où $\mathbf{r}_0$ est une constante arbitraire. Une telle opération revient à opérer sur l'amplitude, le changement de variable suivant :

$$A_n \to A_n e^{i\vec{q}_n \cdot \vec{r}_0} \ . \qquad (13.18)$$

Cette condition d'invariance doit être satisfaite pour tous les termes dans les trois équations (équations 13.15, 13.16 et 13.17). Considérons, à titre d'exemple, l'équation d'amplitude portant sur l'amplitude A_1 (équation 13.15). L'invariance de l'équation par translation (condition 13.18) est explicite pour le terme linéaire et les termes cubiques. En effet, chacun de ces termes est affecté

[6] Le problème 13.6.1 montre que la dérivation de l'équation d'amplitude n'a aucun besoin d'émettre d'hypothèse sur l'égalité des trois amplitudes. C'est pourquoi nous préférons travailler dans un cadre le plus général possible. Ceci nous permettra, par exemple, d'étudier la stabilité de structures ordonnées en perturbant les amplitudes de manière différente dans les trois directions.

[7] Voir le problème 13.6.1.

[8] Changer le signe de γ revient à changer A en $-A$, et par conséquent, les résultats se déduisent à l'identique.

[9] Rappelons ici que le signe du terme cubique n'est pas systématiquement négatif, voir le problème 3.9.2 dans le chapitre 3.2.

d'un facteur $e^{i\vec{q}_1.\vec{r}_0}$ suite à l'opération de translation. Ici, dans le cas bidimensionnel, l'élément nouveau est la présence d'un terme quadratique alors qu'ils étaient interdits dans le problème à une dimension (voir paragraphe 10.2.1). Sous l'opération de translation, ce terme quadratique se transforme comme :

$$A_2^* A_3^* \rightarrow A_2^* A_3^* e^{-i(\vec{q}_2+\vec{q}_3).\vec{r}_0} = A_2^* A_3^* e^{i\vec{q}_1.\vec{r}_0} \tag{13.19}$$

où nous avons argué de la relation 13.12 liant les trois vecteurs d'ondes. Autrement dit, ce terme cubique se transforme comme un terme linéaire (ou cubique) et par conséquent la symétrie du problème l'autorise. Nous pouvons vérifier qu'à l'ordre cubique en amplitude, seuls les termes intervenant dans l'équation d'amplitude (équation 13.15) sont autorisés par des arguments de symétrie. Ce raisonnement s'applique à l'évidence aux deux autres équations d'amplitude (équations 13.16 et 13.17).

Il convient de préciser que le terme quadratique dans l'équation d'amplitude brise la symétrie $A_n \rightarrow -A_n$. Autrement dit, les hexagones induisent une brisure de symétrie « haut-bas ». Or, dans la pratique, nous pouvons rencontrer des systèmes pour lesquels le modèle de départ jouit de la symétrie par inversion du champ ; i.e. l'équation est invariante vis-à-vis de l'opération $\phi \rightarrow -\phi$. C'est le cas, par exemple, de l'équation bidimensionnelle de Swift-Hohenberg (équation 13.1), lorsque le paramètre α est nul (i.e. $\alpha = 0$). Dans ce cas, même si les symétries de l'équation d'amplitude autorisent la présence d'un terme quadratique, la symétrie de l'équation de départ écarte ce type de terme : le coefficient du terme quadratique dans l'équation d'amplitude s'annule (voir problème 13.6.1). Notons finalement que si la bifurcation de l'état homogène ($\phi = 0$) vers l'état modulé est stationnaire, les coefficients ϵ, ν et γ sont réels (voir paragraphe 10.2.2).

13.3.2 Symétrie carrée

Pour la symétrie carrée, le champ physique ϕ prend la forme

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{2} A_n e^{i\vec{q}_n.\vec{r}} + A_n^* e^{-i\vec{q}_n.\vec{r}} \tag{13.20}$$

où A_i est l'amplitude dans la direction i avec $i = 1, 2$, les deux directions de la structure carrée ; notons que les deux vecteurs d'ondes $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$, perpendiculaires entre eux, sont de même norme et égale à q_c (voir figure 13.2).

Les équations d'amplitude de la structure carrée sont obtenues à partir des équations générales (équations 13.15-13.17) en posant formellement $A_3 = 0$ (ce

qui entraîne $\gamma = 0$)[10]. Nous obtenons :

$$\dot{A}_1 = \epsilon A_1 - [|A_1|^2 + \nu|A_2|^2]A_1 \ , \tag{13.21}$$
$$\dot{A}_2 = \epsilon A_2 - [|A_2|^2 + \nu|A_1|^2]A_2 \ . \tag{13.22}$$

Comme dans le paragraphe précédent, les règles d'invariance par symétrie, soit l'invariance par rotation d'un angle de $2\pi/4$ (donc $\pi/2$) et l'invariance par translation, fixent la forme des équations. Nous pouvons vérifier qu'en fixant l'une des deux amplitudes à zéro, nous retrouvons l'équation unidimensionnelle, dite l'équation des bandes, ou parfois l'équation des rouleaux, en référence aux rouleaux de Bénard (voir partie 9.11.2 consacrée à la convection de Rayleigh-Bénard).

13.4 Stabilité des structures en bandes, carrées et hexagonales

Avant de traiter la stabilité de chacune des solutions, nous avons besoin de préciser quelques propriétés qui seront utiles par la suite. Tout d'abord notons que les équations générales (équations 13.15, 13.16 et 13.17) contiennent les carrés (voir section 13.3.2) et les bandes (comme on va le voir dans ce paragraphe) comme cas particulier. Commençons par le cas le plus simple, celui des motifs sous forme de bandes. Dans ce cas, les systèmes d'équations d'amplitude associés (équations 13.15, 13.16 et 13.17, en posant $A_2 = A_3 = 0$, ou les équations 13.21 et 13.22, en posant $A_2 = 0$) se réduisent à une équation unidimensionnelle de type :

$$\dot{A}_1 = \epsilon A_1 - |A_1|^2 A_1 \tag{13.23}$$

où A_1 est la seule amplitude non nulle. Nous pouvons facilement vérifier que la phase de l'amplitude complexe A_1, en posant $A_1(t) = R_1(t)e^{i\theta(t)}$, est constante (i.e. $\dot{\theta} = 0$), et, compte tenu de l'invariance par translation, cette phase est arbitraire, et peut donc être prise égale à zéro : l'amplitude A_1 est donc réelle. L'équation d'amplitude associée à A_1 possède deux points fixes : $A_1 = 0$ et $A_1 \pm \sqrt{\epsilon}$, avec $\epsilon > 0$. Le champ associé à cette solution en bandes est donné par :

$$\phi = A_1(t)e^{iq_c x} + c.c. \tag{13.24}$$

où *c.c.* vaut pour complexe conjugué. À la différence du cas purement unidimensionnel (bande unidimensionnelle dans un espace à une dimension), l'espace est

[10] Il convient de préciser que les coefficients de l'équation d'amplitude des structures carrées ne se déduisent pas de celles des structures hexagonales (par exemple en posant $A_3 = 0$). La détermination des coefficients doit se faire cas par cas. Nous recommandons de suivre la même démarche que celle présentée dans la partie 13.5 pour les hexagones, et de l'adopter au cas d'une symétrie carrée. Nous allons ici garder cependant les mêmes notations pour les coefficients afin d'éviter de multiplier les notations.

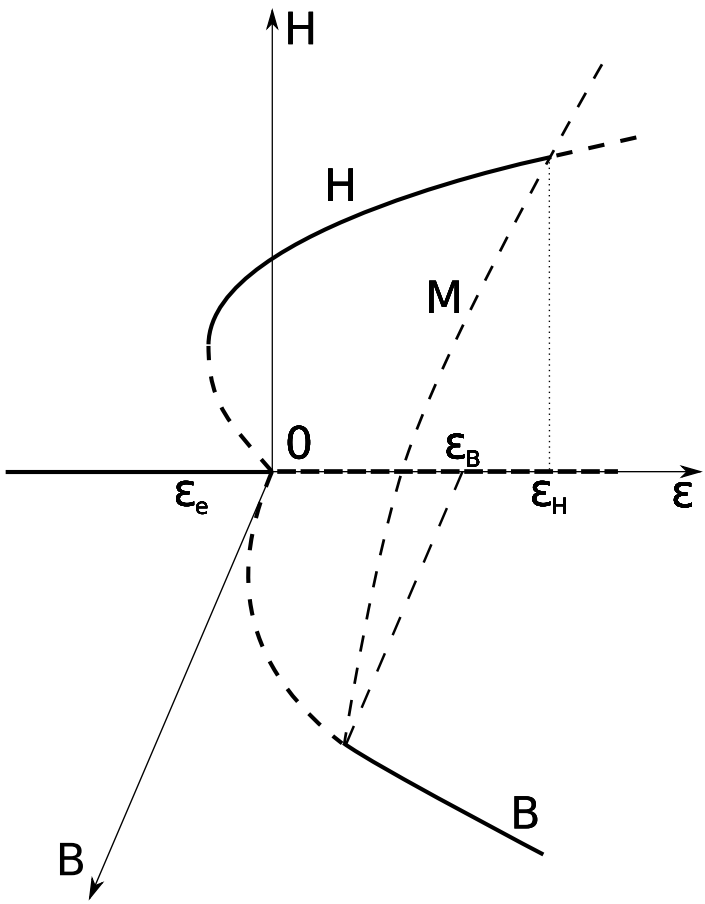


Figure 13.7 – Diagramme de bifurcation des structures hexagonales et des structures en bandes et leur stabilité. Sur l'axe vertical on porte l'amplitude de la solution hexagonale et on la note H. L'axe B se réfère à l'amplitude des bandes. Les branches des hexagones, bandes et branches mixtes sont désignées par les symboles « H », « B » et « M ». Les hexagones « H » sont stables dans la bande $\epsilon_e < \epsilon < \epsilon_H$, et instables pour $\epsilon > \epsilon_H$. Les bandes « B » sont instables dans l'intervalle $\epsilon < \epsilon_B$ et stables au-delà. La branche mixte « M » est toujours instable. Elle croise la branche « H » au point de l'instabilité de la branche « H ».

ici bidimensionnel et, par conséquent, les bandes sont susceptibles d'être perturbées dans les deux directions d'espace. Rappelons d'abord que les motifs sous forme de bandes constituent un cas particulier des motifs hexagonaux[11]. La solution stationnaire en bandes est donc donnée par $R_1 = \pm\sqrt{\epsilon}$ et $R_2 = R_3 = 0$.

Réécrivons les équations d'amplitude (équations 13.15, 13.16 et 13.17) en posant $A_n(t) = R_n(t)e^{i\theta_n(t)}$, pour obtenir :

$$\dot{R}_1 = \epsilon R_1 - [R_1^2 + \nu(R_2^2 + R_3^2)]R_1 + \gamma R_2 R_3 \,, \tag{13.25}$$

$$R_1\dot{\theta}_1 = -\gamma R_2 R_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \,. \tag{13.26}$$

Les quatre autres équations, associées aux deux amplitudes et aux deux phases, se déduisent de ces deux équations par permutation circulaire. En effectuant le changement de variable suivant $\psi = (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ et en utilisant les équations d'amplitude associées aux R_n (équation 13.26, ainsi que les équations analogues vérifiées par θ_2 et θ_3), nous obtenons l'équation d'amplitude suivante :

$$\dot{\psi} = -P\sin(\psi) \tag{13.27}$$

avec la quantité P telle que :

$$P = \gamma\left[\frac{R_2R_3}{R_1} + \frac{R_3R_1}{R_2} + \frac{R_1R_2}{R_3}\right] > 0 \tag{13.28}$$

où γ est un paramètre dont le signe est arbitrairement choisi positif [12]. L'équation de la phase (équation 13.27) possède les points fixes suivants : $\psi_0 = 0$ et $\psi_0 = \pi$. En posant $\psi = \psi_0 + \psi_1(t)$, où $\psi_1(t)$ est une perturbation, et en linéarisant l'équation par rapport à ψ_1, nous obtenons

$$\dot{\psi}_1 = -P\cos(\psi_0)\psi_1 \,. \tag{13.29}$$

Cherchons une solution pour la perturbation ψ_1 de type $e^{\sigma t}$; à partir de l'équation d'évolution de la perturbation ψ_1 (équation 13.29), le taux de croissance (ou d'atténuation) de la perturbation est déterminé par $\sigma = -P\cos(\psi_0)$. Lorsque la solution stationnaire est le point fixe $\psi_0 = 0$, le système est stable, puisque σ est négatif ($P > 0$, voir équation 13.29) ; en revanche, lorsque l'état ψ_0 est le point fixe égal à π, σ est positif. Par conséquent, seuls les états tels que $\psi_0 = 0$ peuvent être stables ; adoptons cette valeur pour la phase. Notons que si nous avions choisi $\gamma < 0$, nous aurions, pour solution stable, la solution $\psi = \pi$, et c'est cette valeur de phase que nous aurions choisie pour le reste du raisonnement mené ci-après pour aboutir aux mêmes conclusions générales.

[11] Les bandes sont également un cas particulier des motifs de symétrie d'ordre 2, soit des motifs carrés.

[12] Rappelons que le signe de γ s'inverse lors de l'opération $A_n \to -A_n$ appliquée aux équations de départ (équations 13.15, 13.16 et 13.17). Ainsi le choix du signe positif ne restreint pas la généralité des résultats.

13.4.1 Stabilité des bandes

Intéressons-nous maintenant au problème spécifique de la stabilité des bandes ; pour cela, partons de la solution initiale :

$$R_1 = R_1^0, \quad R_2 = 0, \quad R_3 = 0 \,, \tag{13.30}$$

où R_1^0 est la solution stationnaire $\pm\sqrt{\epsilon}$, et perturbons-la par de petites quantités $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$ et $\delta_3(t)$, et cherchons la solution sous la forme suivante :

$$R_1 = R_1^0 + \delta_1(t), \quad R_2 = \delta_2(t), \quad R_3 = \delta_3(t) \,. \tag{13.31}$$

Reportons ce système perturbé (équation 13.31) dans l'équation d'amplitude en R_1 (équation 13.25) et dans les équations d'amplitude en R_2 et R_3 obtenues par permutation circulaire à partir de l'équation en R_1 (équation 13.25) et linéarisons le résultat par rapport aux petites perturbations δ_i. Nous obtenons ainsi le système suivant :

$$\dot{\delta}_1 = -2\epsilon\delta_1 \,, \tag{13.32}$$

$$\dot{\delta}_2 = \epsilon\delta_2 - \nu\epsilon\delta_2 + \gamma\sqrt{\epsilon}\delta_3 \,, \tag{13.33}$$

$$\dot{\delta}_3 = \epsilon\delta_3 - \nu\epsilon\delta_3 + \gamma\sqrt{\epsilon}\delta_2 \,. \tag{13.34}$$

Nous supposons $\epsilon > 0$ afin d'assurer l'existence de solutions en bandes (car $R_1^0 = \pm\sqrt{\epsilon}$). Recherchons une solution du type : $\delta_i = a_i e^{\sigma t}$. La première équation indique que le mode δ_1 est stable. L'annulation du déterminant issu des deux autres équations nous fournit le critère suivant :

$$(\sigma - \epsilon + \nu\epsilon)^2 = \gamma\epsilon > 0 \,. \tag{13.35}$$

Dans l'étude de stabilité linéaire, c'est la plus grande valeur algébrique des deux valeurs propres qui fixe l'issue de la dynamique. Celle-ci est donnée par :

$$\sigma = \epsilon(1 - \nu) + \gamma\sqrt{\epsilon} \,. \tag{13.36}$$

Ainsi, lorsque $\nu < 1$, les bandes sont toujours instables. Dans le cas contraire, $\nu > 1$, les bandes ne sont stables que lorsque la relation suivante est vérifiée :

$$\epsilon > \epsilon_b \equiv \frac{\gamma^2}{(\nu - 1)^2} \tag{13.37}$$

Quelques remarques sur la stabilité des bandes

Pour étudier la stabilité des bandes, nous pouvions alternativement partir des équations correspondant à la symétrie carrée (équations 13.21 et 13.22) à la place des équations issues de la symétrie hexagonale. En adoptant ce point de

départ, nous obtenons pour les équations d'amplitude en R_1 et R_2, le système suivant :

$$\dot{R}_1 = \epsilon R_1 - [R_1^2 + \nu R_2^2]R_1 \ , \tag{13.38}$$

$$\dot{R}_2 = \epsilon R_2 - [R_2^2 + \nu R_1^2]R_1 \ . \tag{13.39}$$

La solution stationnaire est identique à celle obtenue plus haut. L'étude de stabilité aboutit à la même équation en δ_1, tandis que celle vérifiée par δ_2 obéit à l'équation suivante : $\dot{\delta}_2 = \epsilon(1-\nu)\delta_2$ et nous obtenons pour le paramètre σ la condition suivante : $\sigma = \epsilon(1-\nu)$. Ainsi, lorsque $\nu < 1$, nous obtenons le même résultat issu du point de départ d'une symétrie hexagonale, à savoir : les bandes sont toujours instables. En revanche, lorsque $\nu > 1$, nous n'obtenons aucune condition à la stabilité des bandes : les bandes sont toujours stables.

Ainsi, en partant des équations correspondant à la structure carrée, nous obtenons que les bandes sont stables, lorsque $\nu > 1$ et quelle que soit la valeur du paramètre ϵ, tandis qu'en partant des équations des structures hexagonales, nous avons montré que les bandes ne sont stables qu'à la condition suivante : $\epsilon > \epsilon_b$ (condition 13.37).

Comment concilier ces deux résultats en apparence conflictuels ? En fait, la différence de conditions pour $\nu > 1$ provient de la présence du terme quadratique en γ dans le cas hexagonal. Rappelons tout d'abord qu'une solution est dite stable si elle conserve sa stabilité en regard de tout type de perturbation permise par les symétries.

Or, si les équations de départ, telle l'équation de Swift-Hohenberg modifiée (équation 13.1), ne jouissent pas de la symétrie haut/bas (i.e. opération de symétrie associée : $\psi \to -\psi$), la présence du terme quadratique (proportionnel à γ) dans les équations d'amplitude devient possible ; par conséquent, les perturbations de ce type sont bien autorisées. Ainsi, la présence de non-linéarités quadratiques restreint le domaine de stabilité en limitant les valeurs que peut adopter le paramètre ϵ (équation 13.37). Lorsque, en revanche, les équations de départ possèdent la symétrie haut/bas (i.e. $\psi \to -\psi$), le terme quadratique en γ est absent et les bandes sont stables quelle que soit la valeur de ϵ (lorsque $\nu > 1$). Reste à étudier la stabilité des structures de différentes symétries pour déterminer la cohérence entre ces deux résultats, étude à laquelle nous allons procéder dans les deux sous-sections suivantes consacrées à la stabilité des structures hexagonales et carrées ; nous comparerons alors les résultats obtenus avec la stabilité des structures en bandes.

13.4.2 Stabilité des hexagones

Une solution stationnaire hexagonale correspond à des variables R_i de même valeur, égales donc à R_0 (soit $R_i = R_0$, $i = 1, 2, 3$). À partir de l'équation d'amplitude en R_1 (équation 13.25), nous obtenons l'équation stationnaire à laquelle satisfait R_0, soit :

$$\epsilon R_0 + \gamma R_0^2 - R_0^3(1 + 2\nu) = 0 \ . \tag{13.40}$$

Il existe ainsi trois points fixes :

$$R_0 = 0, \quad ; R_{0\pm} = \gamma \pm \sqrt{\frac{\gamma^2 + 4\epsilon(1+\nu)}{2(1+\nu)}} \, . \tag{13.41}$$

Les solutions $R_{0\pm}$ imposent que le terme sous la racine soit positif ; étant donné que $\nu > -1$ (comme nous l'avons supposé au paragraphe 13.3.1 afin d'assurer l'existence des structures carrées), le paramètre ϵ est alors contraint de respecter un domaine de variation suivant :

$$\epsilon > -\frac{\gamma^2}{4(1+\nu)} \equiv \epsilon_e \, . \tag{13.42}$$

Nous constatons donc que les deux solutions $R_{0\pm}$ existent pour des valeurs négatives du paramètre ϵ (i.e. $\epsilon < 0$), c'est-à-dire avant d'atteindre la condition d'instabilité linéaire de la solution nulle $R_0 = 0$, laquelle est atteinte lorsque ϵ est nul. Nous sommes donc en présence d'une bifurcation sous-critique (analysée au paragraphe 3.2 ; il s'agit même d'une bifurcation transcritique, voir paragraphe 3.3).

écrivons l'équation vérifiée par R_0 en version dynamique, c'est-à-dire en posant que la solution stationnaire R_0 dépend du temps (soit $R_1 = R_2 = R_3 = R_0(t)$)) ; à partir de l'équation d'amplitude en R_1 (équation 13.25), nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{R}_0 \quad &= \epsilon R_0 + \gamma R_0 2 - (1+2\nu) R_0^3 \\ &= -\frac{\partial}{\partial R_0}\left[-\epsilon\frac{R_0}{2} - \gamma\frac{R_0^3}{3} + (1+2\nu)\frac{R_0^4}{4}\right] \equiv -\frac{\partial V}{\partial R_0} \end{aligned} \tag{13.43}$$

où $V = V(R_0) = -\epsilon\frac{R_0}{2} - \gamma\frac{R_0^3}{3} + (1+2\nu)\frac{R_0^4}{4}$ est un potentiel (voir figure 13.8), d'où le diagramme des solutions stationnaires peut être déduit (voir figure 13.9).

En superposant une perturbation δ_i à la solution stationnaire et en effectuant une linéarisation des équations d'amplitude en R_i (équation 13.25 et les équations associées à R_2 et R_3, déduites de l'équation 13.25 par permutation circulaire), nous obtenons

$$\dot{\delta}_1 = (\epsilon - 3R_0^2 - 2\nu R_0^2)\delta_1 - (\gamma R_0 - 2\nu R_0^2)(\delta_2 + \delta_3) \, . \tag{13.44}$$

Les équations pour δ_2 et δ_3 se déduisent de l'équation 13.44 par permutation circulaire.

Réécrivons ce système en calculant la différence deux à deux des équations associées aux δ_i ; nous obtenons pour la première équation associée à $\delta_1 - \delta_2$:

$$(\sigma - \lambda_1)(\delta_1 - \delta_2) - \lambda_2(\delta_1 - \delta_2) = 0 \, , \tag{13.45}$$

où λ_1 et λ_2 sont deux paramètres tels que : $\lambda_1 = (\epsilon - 3R_0^2 - 2\nu R_0^2)$ et $\lambda_2 = -(\gamma R_0 - 2\nu R_0^2)$. Les deux autres équations sont obtenues par permutation circulaire de l'équation 13.45. En annulant le déterminant de ce nouveau système

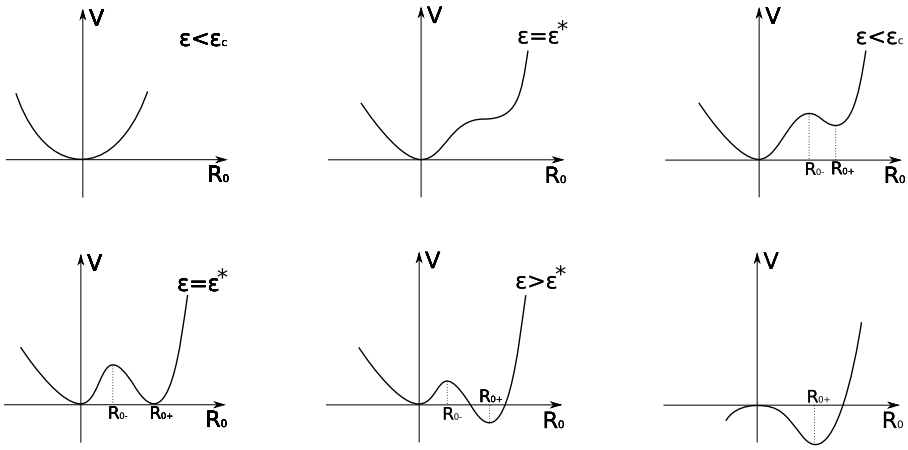


Figure 13.8 – Le potentiel $V(R_0)$ pour différentes valeurs de ϵ. $\epsilon = \epsilon^*$ correspond à la bistabilité, et la ligne $\epsilon = \epsilon^*$ correspond au plateau de Maxwell (voir problème 3.9.1) entre $R_0 = 0$ et $R_0 = R_+$.

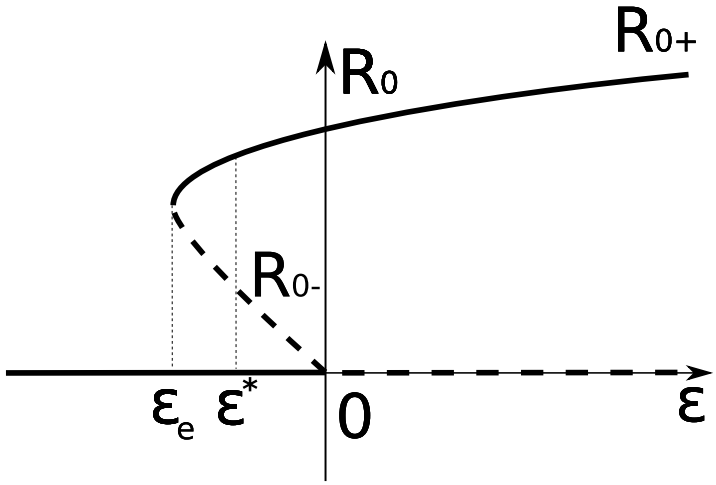


Figure 13.9 – Le diagramme de bifurcation pour les hexagones. Les lignes brisées représentent les branches instables.

d'équations, nous obtenons la valeur propre dégénérée :

$$\sigma = \lambda_1 = \epsilon - 3R_0^2 - 2\nu R_0^2 \ . \tag{13.46}$$

En utilisant l'équation vérifiée par R_0 (équation 13.40), nous pouvons réécrire cette équation comme

$$\sigma = \frac{2\epsilon(\nu-1)}{1+2\nu} - 2\frac{R_0(2+\nu)\gamma}{1+2\nu} \ . \tag{13.47}$$

Le signe de σ est celui de l'expression suivante : $\epsilon(\nu-1)(1+2\nu) - R_0(2+\nu)\gamma$. Rappelons que la solution R_{0-} est toujours instable et en remplaçant la solution R_0 par la solution R_{0+}, nous obtenons que σ est positif si la condition suivante est vérifiée :

$$\epsilon > \epsilon_H = \frac{\gamma^2(2+\nu)}{(1-\nu)^2} \ . \tag{13.48}$$

Autrement dit, les hexagones sont instables loin du seuil de leur naissance (voir la figure 13.7 qui illustre le diagramme de bifurcation et de stabilité). Nous pouvons vérifier qu'il existe également une solution stationnaire dite mixte (voir référence [19]), caractérisée par des R_i tels que : $R_1 = R_2 = R_0 = [(\epsilon - U^2)/(1+\nu)]^{1/2}$, et $R_3 = U = \gamma/(n-1)$. L'étude de stabilité de cette solution montre qu'elle est toujours instable. Notons que, pour $\epsilon = \epsilon_H$, la valeur de R_0 est égale à U, et par conséquent la branche mixte croise la branche hexagonale précisément là où la stabilité des hexagones se modifie (voir figure 13.7).

13.4.3 Stabilité des structures carrées

Pour étudier les structures carrées, reprenons le système des équations 13.38 et 13.39. Il existe une solution stationnaire $R_1^0 = R_2^0 = R_0 = \pm\sqrt{\epsilon/(1+\nu)}$. Pour $\epsilon > 0$, nous devons imposer $\nu > -1$. Posons $R_i = R_0 + \delta_i$ $(i = 1, 2)$ et, en linéarisant le système composé des équations 13.38 et 13.39, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1 &= -2\epsilon\delta_1 - 2\nu R_0^2 \delta 2 \ , \\ \dot{\delta}_2 &= -2\epsilon\delta_2 - 2\nu R_0^2 \delta 1 \ . \end{aligned}$$

En cherchant la solution sous la forme exponentielle suivante : $\delta_i \sim e^{\sigma t}$ et en annulant le déterminant, nous obtenons deux valeurs propres :

$$\sigma_1 = \frac{2\epsilon(1-\nu)}{1+\nu}, \quad \sigma_2 = -2\epsilon \ . \tag{13.49}$$

Étant donné que $\nu > -1$, la valeur propre σ_1 est positive (cas d'instabilité), lorsque le paramètre ν est supérieur à l'unité (i.e. $\nu > 1$). Rappelons que le paramètre ϵ est nécessairement positif, condition nécessaire pour que les points fixes ne soient pas réduits à la solution triviale $R_0 = 0$. Donc, les structures

carrées sont instables lorsque $\nu > 1$ et elles sont stables pour le paramètre nu de module inférieur à l'unité (i.e. $-1 < \nu < 1$).

En résumé, en admettant que la symétrie hexogonale soit exclue des solutions possibles du fait des symétries associées à l'équation de départ, nous devons donc comparer les solutions carrées à celles des structures en bandes. Compte tenu des résultats de stabilité, nous obtenons la conclusion suivante :

- les structures carrées existent lorsque $\nu > -1$ et elles sont stables dans l'intervalle $-1 < \nu < 1$;
- les bandes existent toujours et elles sont stables lorsque $\nu > 1$.

Notons enfin que lorsque les symétries permettent des termes quadratiques, les structures hexagonales deviennent possibles. Nous devons alors comparer leur stabilité relative en regard des structures carrées. Comme les hexagones sont issus d'une non-linéarité plus faible, nous pouvons nous attendre à ce qu'elles dominent, en général, sur les autres structures. Néanmoins, il est possible d'imaginer des situations dans lesquelles les structures carrées (ou rectangulaires, etc.) deviennent compétitives par rapport aux structures hexagonales et peuvent coexister ; cette question importante de la compétition entre les structures de symétries différentes sort du cadre de cet ouvrage, le but essentiel recherché ici étant de montrer les grandes richesse et variété de solutions en matière de dynamique de systèmes non linéaires[13].

13.5 Équation d'amplitude de structures bidimensionnelles à symétrie hexagonale

L'étude de l'ordre hexagonal nous mène à nous restreindre aux modes de Fourier $\vec{q}_i$, avec $i = 1, 2, 3$ vérifiant la relation suivante $\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 = 0$ (voir figure 13.2), menant à la solution suivante pour la perturbation ϕ_1 (voir équation 13.13) :

$$\phi_1(\vec{r}, T) = \sum_{n=1}^{3} A_n(T) e^{-\vec{q}_n . \vec{r}} + A_n(T) e^{-i\vec{q}_n . \vec{r}} \, . \tag{13.50}$$

écrivons maintenant l'équation 13.54 à l'ordre ϵ :

$$(1 + \nabla^2)^2 \phi_2 = 0 \, . \tag{13.51}$$

Cette équation est identique à celle qui a été obtenue à l'ordre $\epsilon^{1/2}$ pour ϕ_1 (équation 13.56) et par conséquent, ϕ_2 est de la même forme que ϕ_1 (équation 13.58) avec pour amplitude des quantités notées $B_n(T)$). Le champ ϕ, à cet ordre, est donc donné par : $\phi = \epsilon^{1/2}\phi_1 + \epsilon\phi_2$.

Compte tenu des solutions ϕ_1 et ϕ_2, l'équation satisfaite par ϕ obéit à la même équation associée à ϕ_1 (équation 13.56) et ϕ_2 (équation 13.51) et donc

[13] Il convient de préciser que les coefficients de l'équation d'amplitude des structures carrées ne se déduisent pas de celles des structures hexagonales (par exemple en posant $A_3 = 0$). La détermination des coefficients doit se faire cas par cas.

la solution pour le champ ϕ est de même type que ϕ_1 (équation 13.58), en substituant A_n par $A_n + \sqrt{\epsilon}B_n \equiv \tilde{A}_n$; nous verrons plus loin que nous n'avons pas besoin, en fait, de la fonction B_n.

écrivons maintenant l'équation 13.54 à l'ordre $\epsilon^{3/2}$ pour obtenir :

$$(1+\nabla^2)^2\phi_3 = -\frac{\partial\phi}{\partial T} + \phi_1 + \bar{\alpha}\phi_1^2 - \phi_1^3 \,. \tag{13.52}$$

La solution est composée d'une solution sans second membre (équation 13.58) plus une solution particulière. Rappelons que seuls les termes résonants, dits également séculaires, du second membre de l'équation 13.52 nous importent (voir chapitre 10). Ces termes résonnants sont solutions de l'équation $(1+\nabla^2)^2\phi = 0$. Cette équation a pour solution la fonction suivante : $e^{-i\vec{q}_n\cdot\vec{r}}$ (avec $n = 1, 2, 3$). Considérons d'abord les termes en $e^{-i\vec{q}_1\cdot\vec{r}}$ issus du second membre de l'équation 13.52). En se restreignant aux termes linéaires de l'équation 13.52, soit $-\partial\phi/\partial T + \phi_1$, nous obtenons des termes de type $[-\frac{\partial A_1}{\partial T} + A_1]e^{i\vec{q}_1\cdot\vec{r}}$. Le terme cubique ϕ_1^3 produit des termes du type $A_1A_1^*A_1e^{i\vec{q}_1\cdot\vec{r}}$ ainsi que des termes sous la forme $A_2A_2^*A_1e^{i\vec{q}_1\cdot\vec{r}}$ et $A_3A_3^*A_1e^{i\vec{q}_1\cdot\vec{r}}$ (rappelons-nous la condition de symétrie hexagonale $\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 = 0$). Le terme quadratique produit des termes du type $A_2^*A_3^*e^{i\vec{q}_1\cdot\vec{r}}$.

L'équation 13.52 a des solutions à la condition d'éviter les termes résonnants du second membre de l'équation (voir chapitre 10) ; ceci impose l'annulation du coefficient de $e^{i\vec{q}_1\cdot\vec{r}}$ au second membre de 13.52. Cette condition résulte en une équation non linéaire, qui n'est autre que l'équation d'évolution recherchée

$$\frac{\partial A_1}{\partial T} = A_1 + 2\bar{\alpha}A_2^*A_3^* - 3|A_1|^2 - 6(|A_2|^2 + |A_3|^2)A_1 \,. \tag{13.53}$$

Les amplitudes A_2 et A_3, obtenues en éliminant les termes résonnants en $e^{i\vec{q}_2\cdot\vec{r}}$ et $e^{i\vec{q}_3\cdot\vec{r}}$, obéissent à des équations similaires obtenues par permutation circulaire de l'équation 13.53.

Ainsi, nous constatons le terme quadratique $A_2^*A_3^*$ de l'équation 13.53 est induit par le terme en α de l'équation 13.52. Ceci diffère foncièrement du cas unidimensionnel (voir chapitre 10) où le terme quadratique était sans importance pour la forme de l'équation d'amplitude.

13.6 Problèmes

13.6.1 Problème : dérivation formelle de l'équation d'amplitude

Nous nous proposons ici de dériver l'équation d'amplitude associée à des structures bidimensionnelles à symétries hexagonale ou carrée, en adoptant pour modèle de départ l'équation de Swift-Hohenberg bidimensionnelle (équation 13.1).

À l'instar du procédé adopté dans le chapitre dédié à l'équation d'amplitude universelle (voir chapitre 10), nous pouvons introduire les variables lentes associées au problème. En toute généralité (i.e. en considérant l'ensemble des modes instables),

l'amplitude A_n est une fonction des variables lentes spatiales X, Y et de la variable temporelle lente T (i.e. $A_n(T, X, Y)$). Le résultat final fait alors intervenir une équation d'amplitude contenant des dérivées de A_n par rapport à X et Y et T. Mais afin d'alléger les calculs, nous nous intéresserons au seul mode associé au vecteur d'onde q_c et non à toute la bande Δq instable ; l'amplitude A_n ne sera donc fonction que du temps, donc de la variable temporelle lente $T = \epsilon t$, et non de l'espace. Cette hypothèse, selon laquelle seul le mode à vecteur d'onde q_c est pris en compte, revient à ne considérer que les situations caractérisées par une amplitude dont l'enveloppe A_n est homogène dans l'espace. L'extension au cas inhomogène se fait selon le même principe développé dans le problème unidimensionnel (voir chapitre 10).

L'équation de Swift-Hohenberg bidimensionnelle (équation 13.1) s'écrit alors de la façon suivante :

$$\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial T} = [\epsilon - (1 + \nabla^2)^2]\phi + \sqrt{\epsilon}\bar{\alpha}\phi^2 - \phi^3 \,, \tag{13.54}$$

où nous avons posé $\alpha = \bar{\alpha}\sqrt{\epsilon}$ et $\bar{\alpha}$ est d'ordre un ; cette hypothèse qui définit la méthode de dérivation de l'équation d'amplitude (méthode fondée sur le développement en puissance d'un petit paramètre) est commentée en fin de la sous-section 13.5 et une alternative (développement en harmoniques) est alors proposée dans la sous-section 13.6.2.

Poursuivons à l'identique la démarche adoptée dans le chapitre 10 en développant le champ ϕ en puissance du petit paramètre $\sqrt{\epsilon}$, soit :

$$\phi(x, T) = \epsilon^{1/2}\phi_1 + \epsilon\phi_2 + \epsilon^{3/2}\phi_3 + ... \tag{13.55}$$

pour obtenir à partir de l'équation 13.54 à l'ordre $\epsilon^{1/2}$, l'équation suivante :

$$(1 + \nabla^2)^2 \phi_1 = 0 \tag{13.56}$$

dont la solution est donnée par :

$$\phi_1 = A(T)e^{\vec{q}.\vec{r}} + c.c. \tag{13.57}$$

où $c.c.$ vaut pour complexe conjugé et $|\vec{q}| = q_c = 1$.

Or, comme nous l'avons vu dans le paragraphe 13.1 consacré à l'ordre spatial bidimensionnel dans un plan isotrope, tout vecteur d'onde $\vec{q}$ dans le plan, de module unité ici, est une solution valable pour la perturbation ϕ_1. En vertu de la linéarité de l'équation satisfaite par la perturbation ϕ_1 (équation 13.56), nous obtenons la solution générale : $\phi_1 = \sum_{\vec{q}} A_{\vec{q}}(T)e^{i\vec{q}.\vec{r}} + c.c.$.

Or chaque mode de Fourier élémentaire en $e^{i\vec{q}.\vec{r}}$ ne représente pas nécessairement un état spatialement ordonné à deux dimensions. Un état ordonné ne doit faire apparaître que certaines orientations des vecteurs d'ondes (symétrie carrée, hexagonale, etc., voir paragraphe 13.3.1).

13.6.2 Problème : dérivation de l'équation d'amplitude à partir de considérations des harmoniques

à titre d'exercice, nous pouvons refaire le calcul sans supposer que α est petit. L'idée consiste juste à développer la solution générale en séries de Fourier et de regrouper les termes résonnants entre eux. Ensuite on élimine adiabatiquement les harmoniques d'ordre supérieur.

Le développement en séries de Fourier sur une base hexagonale fournit :

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r},t) &= \sum_{n=1}^{3} A_n(t)e^{i\vec{q}_n.\vec{r}} \\ &+C_n(t)e^{2i\vec{q}_n.\vec{r}} + D(t)e^{i(\vec{q}_1.+\vec{q}_2)\vec{r}} \\ &+E(t)e^{i(\vec{q}_1-\vec{q}_2).\vec{r}} + F(t)e^{i(\vec{q}_2+\vec{q}_3).\vec{r}} \\ &+G(t)e^{i(\vec{q}_2-\vec{q}_3).\vec{r}} \\ &+H(t)e^{i(\vec{q}_1+\vec{q}_3).\vec{r}} + J(t)e^{i(\vec{q}_1+\vec{q}_3).\vec{r}} + c.c. \end{aligned} \tag{13.58}$$

Ceci correspond aux premiers termes issus du développement de Fourier sur la base hexagonale. La seconde harmonique, issue des termes $\sum_{n=1}^{3} A_n(T)e^{i\vec{q}_n.\vec{r}} + C_n e^{i\vec{q}_n.\vec{r}}$, fournit le double du vecteur d'onde $\vec{q}_n$ (terme C_n), mais également des termes dont les vecteurs d'ondes sont $\vec{q}_1 \pm \vec{q}_2$ (plus permutation circulaire), qui sont représentés par les termes D, E, F, G, H, J. Ensuite, remplaçons cette expression dans l'équation 13.1 et identifions terme à terme les mêmes modes de Fourier. Considérons, par exemple, le cas du mode A_1. Nous obtenons dans ce cas :

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} = \epsilon A_1 + 2\alpha A_2^* A_3^* + \text{termes cubiques en } A_n + etc\,, \tag{13.59}$$

où l'expression etc désigne dans l'équation ci-dessus, les termes d'ordre supérieur, contenant les autres amplitudes $C, D, ...$ En écrivant des équations similaires pour ces amplitudes, et en utilisant l'approximation adiabatique (c'est-à-dire en posant la dérivée temporelle des harmoniques supérieures égale à zéro), nous pouvons exprimer les amplitudes des harmoniques supérieures en fonction des A_n ; ces dernières sont alors « injectées » dans l'équation 13.59, afin extraire l'équation associée à l'amplitude A_1 (les équations associées à A_2 et A_3 se déduisent par permutation circulaire).

Dans cette démarche, ce n'est plus un développement en puissance d'un petit paramètre qui est important, mais c'est plutôt l'ordre de l'harmonique qui importe. Les deux méthodes (développement en puissance du petit paramètre, et développement en harmonique) coïncident. Nous avions pris le soin d'affecter le terme ϕ^2 par un petit paramètre dans le but de rendre le développement cohérent dès le départ (apparition des termes quadratiques au même niveau que les termes cubiques), et par là-même de rendre plus concise la dérivation de l'équation d'amplitude.

Chapitre 14

Conclusion

Ce dernier chapitre résume brièvement le contenu de cet ouvrage et rappelle l'esprit qui a animé cette entreprise à laquelle je me suis consacré durant tout le temps nécessaire à son élaboration.

Cet ouvrage offre ainsi une introduction qualitative et quantitative aux sciences non linéaires en partant d'exemples simples et concrets – tels le cas d'un ressort, celui du pendule, etc. – se prêtant bien à une image intuitive pour progressivement définir le langage et les concepts de base des sciences non linéaires. Nous avons ainsi présenté les principaux types de bifurcations que nous avons ensuite recoupés avec les sept catégories de catastrophes élémentaires. Ces sept catastrophes décrivent l'ensemble des cas de figures rencontrés pour tout système ne disposant pas de plus de quatre paramètres de contrôle indépendants[1]. Nous avons mis en lumière le caractère universel de la classification des bifurcations et celle des catastrophes, c'est-à-dire que ces classifications ne dépendent que du nombre de paramètres sans dimension ; ils ne dépendent ni du nombre de degrés de liberté ni de la spécificité du modèle considéré. Nous avons ensuite brièvement évoqué le phénomène du chaos pour notamment le comparer au hasard ; puis nous avons décrit le chaos déterministe dans un cadre statistique. La première partie de l'ouvrage a été consacrée à l'aspect purement temporel de la dynamique des systèmes.

Dans la seconde partie de cet ouvrage, nous nous sommes penchés sur la morphogenèse (ou naissance des formes), tout d'abord en abordant cette thématique à partir d'exemples (systèmes de Turing et convection de Rayleigh-Bénard), avant d'extraire l'universalité de la problématique. Nous avons montré en particulier que la dynamique est décrite au voisinage du seuil de l'instabilité par une équation d'amplitude universelle ; la résolution de cette équation nous a permis d'analyser la nature des solutions ainsi que leurs stabilités. Nous avons ensuite étudié l'instabilité d'Eckhaus quit peut être qualifiée d'instabilité secondaire, par comparaison à l'instabilité primaire qui se réfère à l'instabilité

[1] Notons bien la nature adimensionnelle de ces paramètres ; le système peut en fait disposer d'un nombre supérieur de paramètres dimensionnés libres.

associée au passage de l'état homogène à un état ordonné. Nous avons ensuite introduit la notion d'invasion d'une solution instable par une solution stable, et nous avons insisté sur la différence fondamentale existante entre ce problème et celui, plus classique, de l'invasion d'une solution métastable par une solution instable. En effet, le choix de la vitesse d'invasion dans ce dernier cas de figure se réduit à une seule possibilité, tandis que le premier problème nous a confronté à un grand dilemme, celui de l'existence *a priori* d'une infinité de solutions possibles. Nous avons ensuite montré, en se référant à plusieurs concepts, comment sélectionner une vitesse unique parmi une infinité de solutions.

Nous nous sommes d'abord restreints au cas d'une bifurcation stationnaire, pour lequel la dynamique est relativement simple. Nous avons ensuite abordé le problème de la dynamique spatiale et temporelle dans le cas d'une bifurcation de Hopf (bifurcation oscillante dans le temps). À la différence de la dynamique associée à une bifurcation stationnaire, la dynamique en présence d'une bifurcation de Hopf perd son caractère variationnel[2]. C'est là un des points les plus essentiels des systèmes hors équilibre. Cette perte du caractère variationnel conduit à une dynamique riche allant de l'ordre au chaos spatio-temporel. De plus, le chaos spatio-temporel est complexe en soi : il peut s'agir d'un chaos de phase, d'un chaos médié par des défauts, etc. Le traitement du problème unidimensionnel a permis d'entrevoir une grande complexité spatiale et temporelle que recèlent les systèmes hors équilibre.

Les différents exemples décrits ci-dessus se sont limités aux structures unidimenionnelles. Le dernier chapitre a présenté des problèmes bidimensionnels introduisant la notion de « structures » ou « patrons » à deux dimensions. Nous nous sommes limités à l'étude d'une bifurcation stationnaire, afin d'introduire des notions essentielles.

Cet ouvrage est, en quelque sorte, un sésame d'entrée aux sciences non linéaires à la portée de tous ou presque, des étudiants de première année, aux enseignants-chercheurs et chercheurs. Cependant, les sciences non linéaires recèlent tant de richesses que de nombreuses autres questions un peu plus subtiles mériteraient d'être développées davantage. Nous en dressons ci-après une liste principale, mais pas entièrement exhaustive.

14.1 Instabilités secondaires

Nous avons considéré dans le présent ouvrage, un seul type d'instabilité secondaire, l'instabilité d'Eckhaus (similaire à l'instabilité de Benjamin-Feir rencontrée lors de l'étude de la bifurcation de Hopf). C'est en fait l'unique instabilité secondaire apparaissant dans les systèmes présentant une bifurcation

[2]C'est-à-dire que l'équation d'évolution ne dérive plus d'un potentiel ; il faut noter que le caractère variationnel dans le cas d'une bifurcation stationnaire reste vrai tant que l'étude se réalise au voisinage du seuil de l'instabilité. En s'éloignant du seuil d'instabilité, le caractère variationnel est brisé, ce qui conduit à une grande richesse de comportements ; voir également notre brève discussion en section 14.1.

stationnaire, lorsqu'ils sont étudiés au voisinage du seuil de l'instabilité primaire. En s'écartant du voisinage immédiat du seuil de l'instabilité primaire, outre l'harmonique principale, des instabilités associées aux autres modes de Fourier peuvent être activées et se développer. Si, par exemple, la seconde harmonique devient instable à son tour, d'autres instabilités secondaires sont observées. La plus connue est l'instabilité suscitant la brisure spontanée de la parité : les motifs spatiaux unidimensionnels perdent leur symétrie miroir ou leur centro-symétrie ; par exemple un rouleau convectif de Bénard, dont la section est circulaire, perd précisément cette symétrie circulaire. Cette instabilité a été mise en évidence expérimentalement en 1988 lors de l'étude de la dynamique d'un front de croissance entre deux phases[3] (voir référence [73]) pour l'étude expérimentale et les références [61, 45, 36, 54] pour les analyses théoriques). Des expériences ultérieures réalisées sur différents systèmes ont révélé le même type de phénomènes (voir références [24, 65, 14]). Une des conséquences de cette brisure de symétrie est l'observation d'une dérive latérale de la structure à vitesse constante (par exemple, les rouleaux de Bénard dériveraient horizontalement).

D'autres instabilités secondaires peuvent également se développer tel le mode de vacillation-respiration dans lequel deux arches consécutives (s'il s'agit d'un front de forme modulée entre deux phases) oscillent dans le temps en opposition de phase (ou la largeur de deux bandes successives dans un motif chimique oscilleraient en opposition de phase).

En se basant sur les propriétés de symétrie, dix instabilités secondaires génériques peuvent être dénombrées (voir référence [62]) : l'instabilité d'Eckhaus, l'instabilité associée à la brisure de parité, et le mode de vacillation-respiration constituent les trois exemples les plus courants de ces instabilités génériques. En s'éloignant davantage du seuil d'instabilité primaire, d'autres harmoniques deviennent instables et la dynamique devient de plus en plus complexe, jusqu'à déboucher, par exemple, sur une dynamique caractéristique du chaos spatio-temporel.

14.2 Structures à deux dimensions et bifurcation de Hopf

Nous nous sommes limités dans cet ouvrage au cas de motifs bidimensionnels issus d'une bifurcation stationnaire. Si nous nous penchons maintenant sur des bifurcations de type Hopf, la dynamique devient très complexe. En particulier, nous retrouvons l'instabilité de Benjamin-Feir (rencontrée à une dimension) et

[3] Le front d'instabilité, initialement plan, croît dans la direction Oz. Il subit une instabilité primaire, pour une vitesse critique de croissance, se caractérisant par une modulation spatiale unidimensionnnelle périodique le long de l'axe Ox, jouissant de la symétrie $x \to -x$. Au-delà d'un second seuil en vitesse de croissance, la modulation du front perd la symétrie $x \to -x$ – il s'agit de la brisure de parité – et la structure dérive à vitesse constante le long de l'axe Ox, soit dans la direction orthogonale à la croissance.

le chaos spatio-temporel. En outre, plusieurs nouvelles manifestations typiques des motifs à deux dimensions sont révélées, tels la naissance de spirales, le chaos spatio-temporel médié par les spirales, les sources et les puits d'ondes, etc. (voir référence [2] pour une revue sur ces questions).

14.3 Systèmes non réductibles à une équation d'amplitude

Nous avons insisté dans cet ouvrage sur le fait que, près des seuils des instabilités, la dynamique est réduite à une équation d'amplitude universelle à coefficients réels ou complexes ; rappelons que cette équation d'amplitude représente l'enveloppe d'une oscillation rapide du mode de Fourier principal (voir chapitre 10). Cette réduction de la dynamique en une équation n'est possible que sous l'hypothèse que seule l'harmonique principale est instable et que toutes les harmoniques d'ordre supérieur sont stables. En fait, de nombreux systèmes ne souscrivent pas à ce cas de figure, même étudiés très près du seuil de l'instabilité, tels les systèmes dans lesquels le vecteur d'onde critique est petit, de l'ordre du paramètre ϵ à une certaine puissance, où ϵ désigne la distance au seuil d'instabilité. écrivons à titre d'exemple le type de relation de dispersion associée à de tels cas :

$$\omega = \epsilon q^2 - q^4 \tag{14.1}$$

où ω est la pulsation du mode d'instabilité et q le vecteur d'onde. Le maximum de ω, définissant le mode le plus instable, est obtenu pour un vecteur d'onde $q = \sqrt{\epsilon/2} \sim \sqrt{\epsilon}$, et la bande des vecteurs d'ondes correspondant aux modes instables, c'est-à-dire qui ont un taux de croissance ω positif, est de l'ordre de $\Delta q \sim \sqrt{\epsilon}$ (plus précisément cette bande s'étend de $q = 0$ à $q = \sqrt{\epsilon}$).

Pour tout vecteur d'onde q suffisamment petit, disons pour fixer les idées de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}/100$, nous avons une instabilité (i.e. $\omega > 0$), non seulement pour le mode principal de Fourier mais également pour tous ses multiples (i.e. nq, avec $n < 100$). Nous sommes donc confrontés à une situation dans laquelle, même près du seuil d'instabilité (puisque nous supposons ϵ petit), le nombre de modes instables peut être très grand, et la réduction en une équation d'amplitude n'est alors plus possible. Cependant, nous pouvons tirer profit du fait que les vecteurs d'ondes correspondant aux modes instables soient petits[4] afin de réduire les équations du modèle en une équation plus simple, mais il ne s'agira plus d'équation de type amplitude. En effet, nous pouvons effectuer un

[4]Par un vecteur d'onde q petit, nous entendons que la longueur d'onde des modes d'instabilité est grande par rapport aux échelles physiques de longueur. Cette limite est souvent qualifiée de limite « hydrodynamique » par analogie avec la description continue de l'écoulement d'un fluide sans avoir à considérer la nature intrinsèquement discrète de la matière constituant le fluide ; cette description se justifie lorsque les modes de l'écoulement ont une longueur caractéristique grande par rapport à la distance entre atomes ou au libre parcours moyen. Par extension et en toute généralité, quelle que soit la nature du système physique considéré, lorsque les tailles typiques considérées sont grandes par rapport à l'échelle de longueur physique intrinsèque pertinente, le système peut être décrit dans la limite hydrodynamique.

développement en puissance du paramètre ϵ dans lequel les variables décrivant la dynamique du système, telles la vitesse en hydrodynamique ou la concentration chimique, etc., varient lentement ; précisons qu'il s'agit dans ce contexte de la variable tout entière et non de l'enveloppe de l'oscillation rapide e^{iqx} introduite lors de la dérivation de l'équation d'amplitude ; voir chapitre 10). En général, ce type de développement permet de réduire les équations de départ, qui sont en général non locales (la dynamique en un point dépend de celle de points lointains) et fortement non linéaires, à des équations non linéaires aux dérivées partielles (donc locales) et faiblement non linéaires. Un exemple typique est celui de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky, évoquée dans la section 12.5.1 du chapitre 12, qui peut être formulée comme :

$$u_t = -u_{xx} - u_{xxxx} + u_x^2 \,, \tag{14.2}$$

où $u(x,t)$ est une variable dynamique pouvant représenter une concentration chimique, un front entre deux phases dans un problème de la croissance, etc. (voir référence [54] pour une revue sur l'équation de Kuramoto-Sivashinsky) ; il s'agit là d'un exemple parmi beaucoup d'autres. à la différence de l'équation d'amplitude, unique pour tous les systèmes, les équations génériques des systèmes étudiés loin du seuil d'instabilité primaire sont plus variées. Une liste des équations d'évolution peut être dressée de manière relativement systématique en se fondant sur les propriétés de symétrie et sur les lois de conservation du système (voir référence [22]). Notons cependant que, dans certains cas, les équations ne peuvent pas se réduire à des équations faiblement non linéaires, à la différence de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky (équation 14.2) qui présente une non linéarité faible quadratique. Ce champ de recherche est actuellement en pleine activité (pour une revue récente voir référence [53]).

Finalement, pour certains problèmes, la réduction de la dynamique du système en une équation locale, autrement dit une équation aux dérivées partielles, telle l'équation de Kuramoto-Sivashinsky (équation 14.2), n'est même plus possible ; la dynamique non locale persiste alors même que la limite hydrodynamique est vérifiée (i.e. les vecteurs d'ondes des modes actifs sont petits, voir référence [38]).

14.4 Mûrissement des structures hors équilibre

Lors de l'étude de la morphogenèse, nous avons étudié l'émergence de structures périodiques ordonnées caractérisées par des motifs spatiaux régulièrement répartis (voir chapitres 9 et 10), et la naissance de quelques structures non ordonnées, tel le chaos spatio-temporel (voir chapitre 12). Il faut noter que, dans les structures non ordonnées étudiées, il existe néanmoins une modulation spatiale des solutions, une modulation certes complexe mais qui maintient tout de même une certaine longueur caractéristique au cours du temps (voir par exemple figure 12.3).

Cet exemple est foncièrement différent d'une autre catégorie de systèmes qui ne maintient aucune longueur caractéristique au cours du temps. Dans ces systèmes, un motif émerge initialement avec une certaine longueur d'onde (ou échelle caractéristique), avant de céder la place à un processus de mûrissement : la taille latérale caractéristique des motifs croît au cours du temps. Cette croissance évolue, en général, de manière algébrique dans le temps (i.e. $\lambda \sim t^{\alpha}$, où α est appelé exposant de mûrissement). Si la notion de mûrissement est assez classique pour les systèmes à l'équilibre global (par exemple, la décomposition spinodale[5], voir référence [13]), la situation des systèmes ouverts (ou hors équilibre) présente un grand défi, et constitue actuellement un problème de recherche très actif. Parmi les premiers résultats prometteurs, des critères qui permettent de savoir si une équation non linéaire donne lieu ou non à un mûrissement sans avoir à résoudre les équations dans le temps, ont été établis (voir référence [63], voir également pour une revue la référence [53]). Mais, nous ne disposons pas encore, loin s'en faut, d'une classification universelle.

14.5 Branches et formes variées en matière inerte et vivante

La morphogenèse est un domaine d'études extrêmement riche et varié. Nous nous sommes volontairement limités dans cet ouvrage à la naissance de structures périodiques étendues dans l'espace (par exemple, les motifs chimiques rencontrés au chapitre 9, à l'image des rides sur le sable), sans couvrir la naissance des formes au sens le plus général. Cette première étape constitue tant par la simplicité de l'étude physique que par l'approche logique avant de parler de formes au sens plus large, une introduction à la naissance de formes variées plus au moins complexes existant dans la nature. L'exemple le plus célèbre est celui des cristaux de neige (voir figure 14.1). Sur le plan conceptuel, le problème des cristaux de neige est proche de celui du doigt de Saffmann-Taylor[6] (voir figure 14.1) et du modèle d'agrégation particule-amas le plus important, le modèle de croissance limitée par la diffusion[7] (selon la terminologie anglo-

[5] Prenons un alliage binaire dans l'état solide, et supposons que les deux substances chimiques A et B le composant soient miscibles à la température considérée. Cependant, la plupart des alliages miscibles à une certaine température, cessent de l'être en deçà d'une certaine température critique T_c. En diminuant brusquement la température en dessous de T_c (i.e. trempe rapide, selon l'expression consacrée), l'alliage miscible devient instable et entame une séparation de phases, sous forme de taches irrégulières parfois riches en A et parfois riches en B : c'est la décomposition spinodale. Au cours du temps, chaque tache croît au détriment de taches plus petites, c'est le phénomène dit de mûrissement, jusqu'à atteindre en principe deux domaines macroscopiques, l'un riche en A et l'autre riche en B ; la croissance en taille évolue selon la loi temporelle $t^{1/3}$.

[6] Structure en forme de doigt comme son nom l'indique et qui émerge lorsqu'une instabilité, dite de Saffmann-Taylor, se développe à l'interface de deux fluides immiscibles de viscosités différentes.

[7] Ce modèle décrit le la croissance branchée d'un amas de particules initialement diffusées aléatoirement avant de se coller à l'amas dès lors qu'elles entrent en contact avec lui.

saxonne, le modèle DLA, pour *Diffusion Limited Aggregation*, voir figure 14.1, introduit par Witten et Sander en 1981 (voir référence [81]).

Ce type de structures branchées se retrouve dans d'autres domaines plus complexes, telle l'organisation spatiale de colonies de bactéries (voir figure 14.2, et la référence [5]), ou dans le problème d'angiogenèses (formation de réseaux de vaisseaux sanguins), pour ne citer que ces exemples (pour une revue exhaustive des exemples, voir référence [5]). Le problème des cristaux de neige, celui du doigt de Saffmann-Taylor, celui du modèle de Witten et Sander sont maintenant bien compris tant sur le plan théorique qu'expérimental, mais leur présentation dans cet ouvrage aurait requis l'introduction de plusieurs notions avancées qui vont au-delà du principe que nous nous sommes fixés dans ce premier essai, se destinant à une introduction simple aux sciences non linéaires.

Si l'importance des sciences non linéaires s'illustre dans tous les domaines de sciences, la biologie semble nous offrir un éventail des plus fascinants pour étudier la morphogenèse, bien au-delà des formes de Turing abordées dans cet ouvrage.

Citons par exemple un problème récemment résolu – en 2009 – jettant le jour sur l'origine asymétrique – en forme de pantoufle – de la morphologie des globules rouges circulant dans les capillaires sanguins (même dans un écoulement symétrique) alors qu'ils ont une forme parfaitement symétrique (en forme biconcave) au repos. Il s'avère que l'adoption de cette morphologie asymétrique résulte d'une instabilité : la forme symétrique devient instable lorsqu'un paramètre de contrôle atteint une valeur critique (référence [35], en suivant une catastrophe de type « *cusp* » ou fronce, voir chapitre 4). Il apparaît que la morphologie symétrique en forme de parachute des globules rouges est instable alors que la forme asymétrique de type pantoufle des globules rouges reste stable au cours de l'écoulement du sang. Or le sang est un fluide complexe, c'est-à-dire qu'il ne s'écoule pas comme l'eau claire dans le lit d'un ruisseau, il y a des multitudes de perturbations qui apparaissent lors de l'écoulement du sang dans les vaisseaux sanguins. Ce sont précisément ces petites perturbations dans le flux sanguin qui façonnent les hématies en forme de pantoufle. De plus, l'hémoglobine, qui est responsable du transport de l'oxygène, est au repos par rapport à la membrane du globule lorsque les globules rouges ont la forme en parachute alors que les globules rouges en pantoufle (ou asymétriques) stimulent une circulation interne de l'hémoglobine et donc l'oxygénation des cellules et des tissus. Le modèle développé par les chercheurs a ainsi permis de connaître comment les hématies adoptent une forme asymétrique, plutôt que symétrique, dans les petits vaisseaux et surtout d'identifier la nature du gain dont elles bénéficient (minimisation des instabilités).

Citons un autre exemple en biologie de l'importance de la morphogenèse au sein du système immunitaire. Les globules blancs (ou leucocytes) utilisent un processus de polymérisation de l'actine, une protéine du cytoplasme. Des études simplifiées en laboratoire (voir références [82, 47, 10]) et des analyses théoriques (voir référence [34]) ont montré récemment qu'une couche d'actine

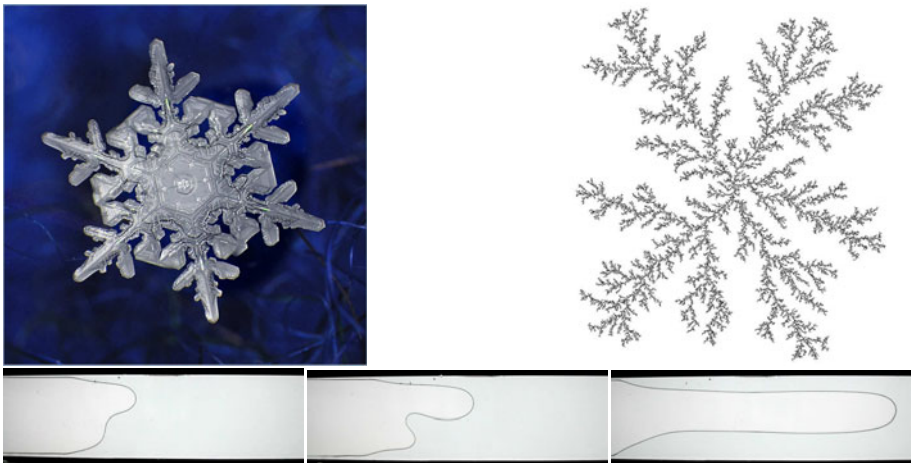


Figure 14.1 – En haut (à gauche), on représente un cristal de neige (Real snowflake ©Yaroslav Gnatuk #507798–Fotolia) et une structure branchée obtenue par croissance limitée par diffusion. En haut (à droite), on représente une structure branchée de type DLA obtenue sur ordinateur de la manière suivante : on place au centre d'un réseau carré un point matériel représentant un « atome ». On choisit un site au hasard sur la périphérie de la surface carrée considérée. On matérialise le site périphérique sélectionné par un point matériel qui diffuse (plus précisément qui effectue une marche aléatoire avec la même probabilité dans les 4 directions proches voisines). Quand ce diffuseur se trouve être un proche voisin du centre, on l'immobilise. On recommence l'opération et à chaque fois que le nouvel atome diffusant devient proche voisin d'un atome déjà immobilisé (faisant partie de l'agrégat déjà formé), on l'immobilise à son tour, et ainsi de suite. Quand cette opération est refaite un certain nombre de fois, on obtient l'image d'un agrégat macroscopique branché. Une des propriétés remarquables de la structure DLA est sa dimension fractale : la masse m contenue à l'intérieur d'un cercle de rayon R centré sur la structure croît avec le rayon R comme $m \sim R^{D_F}$ où D_F est la dimension fractale qui vaut environ 1.7. Les trois images en bas, représentent l'évolution au cours du temps d'un doigt de Saffmann-Taylor. Celui-ci est obtenu en poussant un fluide visqueux, comme l'huile, par un fluide moins visqueux, comme l'air, dans une cellule parallélipédique dont on voit ici la section composée de la largeur et de la longueur. L'épaisseur dans la direction perpendiculaire est petite par rapport aux deux autres dimensions (on parle souvent de cellule Hele-Shaw). Après un stade transitoire (figure de gauche et du milieu), le doigt finit par atteindre un état stationnaire (figure de droite) et occupe la moitiée du canal. (Avec l'aimable autorisation de Marc Rabaud).

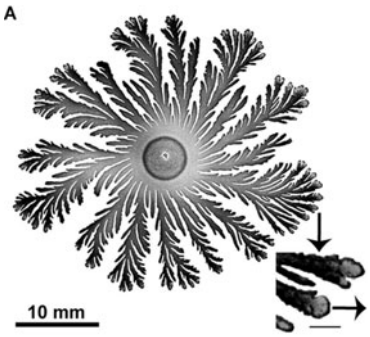


Figure 14.2 – Une population de bactéries (connue sous le nom *Bacillus subtilus*) s'organisent en se multipliant en des formes branchées dont certaines ressemblent aux structures DLA.

polymérisée formée sur une petite bille sphérique artificielle[8] subit une brisure spontanée de symétrie.

En effet, initialement, l'épaisseur de la couche d'actine sur la bille (épaisseur de l'ordre d'une fraction de micromètre) adopte une symétrie sphérique. Au-delà d'une certaine épaisseur critique, la couche d'actine perd spontanément sa symétrie sphérique : il y a brisure de symétrie, ce qui induit la polarisation de la cellule. Notons que dans ce cas, la polarisation, initiée par la présence d'un pathogène pour les cellules du système immunitaire[9], est probablement une propriété intrinsèque résultant du développement d'une instabilité. Quoi qu'il en soit, suite à cette brisure spontanée de la symétrie du système, cette polarisation de la cellule qu'elle acquiert suite à un processus de polymérisation semble permettre d'indiquer à la cellule le sens du mouvement.

Citons également un autre exemple de biologie issu du problème de la division cellulaire (ou mitose) : lors de la division cellulaire, certaines macromolécules – dites microtubules – du cytoplasme, s'organisent spatialement sous forme d'astres (voir figure 14.3).

Ces quelques exemples montrent l'omniprésence d'instabilités et de brisures de symétrie dans le monde du vivant ; l'apport des sciences non linéaires dans ce domaine permet un véritable essor dans la compréhension des phénomènes.

[8] La bille, censée modéliser une cellule, est plongée dans une solution aqueuse contenant des molécules d'actine. Cette bille est couverte d'une enzyme qui permet aux molécules d'actine de la solution de polymériser sous forme d'un réseau branché.

[9] Notons que, dans d'autres cas en biologie, certaines cellules brisent spontanément leur symétrie sans que la présence d'un agent extérieur soit nécessaire.

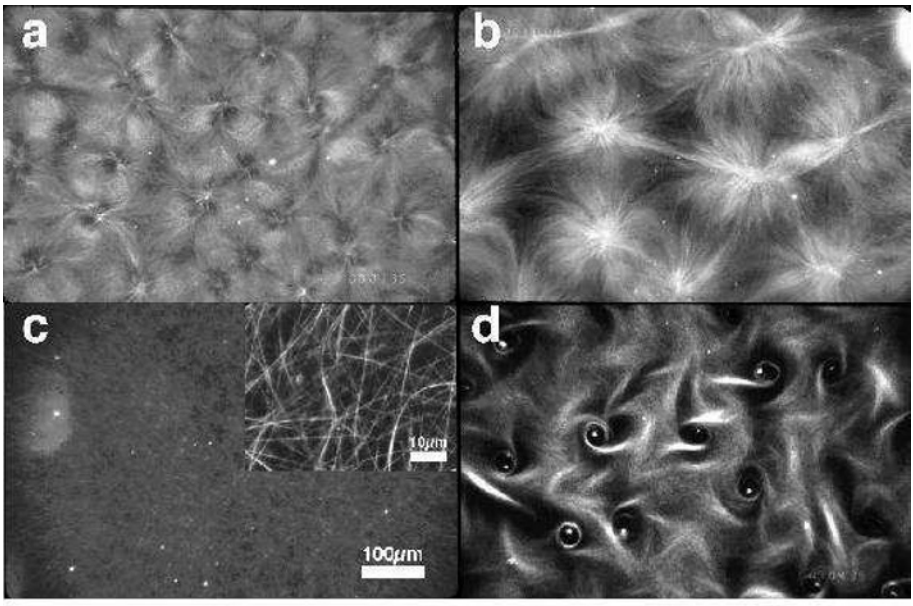


Figure 14.3 – Lors de la division cellulaire, les macromolécules s'organisent spatialement sous forme d'astres. Le même type d'organisation est reproduit dans des systèmes plus simples (une solution de microtubules et des moteurs moléculaires), ce qui peut être indicateur de la persistence de l'instabilité d'une structure homogène. Le système modèle présenté sur cette figure est le suivant : initialement on prépare un mélange homogène de protéines chauffé à 37° C. Il en résulte une structure en motifs après 7 minutes. Les échantillons diffèrent juste par la concentration d'une protéine (appelée kinesin) : (a) un réseau à vortex obtenu à concentration $\sim 25\ \mu g/ml$ de kinesin ; (b) un réseau irrégulier d'astres obtenu à $\sim 37,5\ \mu g/ml$ de kinesin ; (c) un état de microtubules formant des réseaux de filaments obtenu pour $\sim 50\ \mu g/ml$ de kinesin (présenté également en zoom) ; (d) un réseau de vortex, ayant une autre structure obtenue pour une faible concentration de kinesin ($< 15\ \mu g/ml$). D'après la référence [58]. ©Nature Publishing Groups.

14.6 Vers une science des systèmes complexes

Indépendamment des sciences de la matière et du vivant, notons que ces mêmes comportements non linéaires sont observés dans les sciences sociales et économiques, et plus généralement dans tout système de réseaux au sens large du terme[10], tels le réseau composé par les cellules nerveuses de notre cerveau, la colonie de fourmis ou le réseau composé des agents qui peuplent un marché économique (voir référence [6]). Ces réseaux constituent une manne pour étudier l'ensemble des phénomènes caractéristiques des sciences non linéaires, tels l'irruption de catastrophes élémentaires (accidents locaux), les processus d'auto-organisation et l'émergence de propriétés globales ou de structures cohérentes quand un paramètre de contrôle atteint une valeur critique (voir référence [6]).

Une des carastéristiques notables de ces systèmes est la présence de plusieurs comportements en compétition, certains sont simples, d'autres chaotiques (désordonnés). Ce type de systèmes se situe souvent à la frontière de comportements en compétition, ce qui induit une alternance entre la dynamique menant à une évolution et une structuration simples et ordonnées soit chaotiques et donc désordonnées ; plusieurs échelles temporelles et spatiales apparaissent dans ces systèmes, donnant ainsi lieu à une hiérarchie de structures.

La difficulté majeure à laquelle se heurtent les systèmes sous forme de réseaux provient du défi que présente leur mise en équations. Et c'est pourquoi, en toute généralité, ces systèmes sont souvent abordés à partir de simulations numériques en se donnant un ensemble de règles d'interactions entre les éléments du réseau et de règles de rétroaction, etc. Cependant la description des systèmes complexes, au moins en partie, peut s'effectuer à l'aide des sciences non linéaires évoquées dans cet ouvrage ; il est en effet fort probable que les principes de base des catastrophes se produisant dans les réseaux soient similaires aux principes des catastrophes élémentaires traitées ici, mais l'apparence macroscopique globale peut s'avérer cependant bien plus complexe.

Ainsi, le cadre conceptuel des instabilités, des catastrophes, des bifurcations élémentaires fondant une partie des sciences non linéaires peut servir la description des systèmes complexes ; la complexité de ces systèmes – diversité des apparences globales extérieures, richesse des comportements – proviendrait

[10] Il n'existe pas de consensus au sujet de la signification de la dénomination « systèmes complexes ». Ici nous adoptons une définition relativement basique qui consiste à dire qu'un système est complexe dès lors qu'il est difficile, voire impossible, à décrire sous forme d'équations simples, ce qui est le cas de systèmes comportant des règles complexes d'interaction entre entités formant le réseau (réseau de protéines au sein d'une cellule, réseaux d'agents financiers, etc.). Bien sûr, nous nous gardons d'exclure la possibilité qu'un jour la description de ces systèmes puisse se prêter à une formulation mathématique relativement simple. Ainsi, par exemple, historiquement un liquide macroscopique vu sous l'angle microscopique a posé un grand défi : il est composé d'un grand nombre de molécules, de l'ordre du nombre d'Avogadro, soit 10^{23} particules, qui interagissent les unes avec les autres, qui rentrent en collision, etc. Sous cet angle, la description d'un fluide ordinaire (tel l'eau) tel que celui que nous obtenons maintenant via les équations de Navier-Stokes, aurait pu nous paraître hors de portée d'une modélisation simple.

alors de la nature statistique des catastrophes locales (corrélations) pouvant survenir dans le système au cours de processus donnés. Mais la théorie fondamentale permettant de formaliser ces idées dans un cadre accessible reste à bâtir.

Remerciements

Je remercie Christiane Caroli et Philippe Nozières de m'avoir encouragé d'entreprendre ce projet de livre. Je remercie très chaleureusement les membres de mon équipe à Grenoble, équipe DYFCOM (Dynamique de Fluides Complexes et Morphogenèse), d'avoir bien voulu relire les différents chapitres de cet ouvrage, et d'avoir fait de nombreuses suggestions très constructives.
Je remercie très vivement Christian Wojcik pour la réalisation de la majorité des figures de l'ouvrage, et Richard Michel pour la réalisation des calculs numériques et des figures des chapitres 8, 4 et 12.
Je remercie M. Rabaud d'avoir refait l'expérience de Saffmann-Taylor et de m'avoir fourni les images issues de cette expérience, présentées au chapitre 14.

Bibliographie

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, editors. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publication, New York, 1970.

[2] I. S. Aranson and L. Kramer. The world of the complex Ginzburg-Landau equation. *Rev. Mod. Phys.*, 82(1) : 99, Feb 2002.

[3] D.G. Aronson and H.F. Weinberger. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetic. *Adv. Math.*, 30 : 33–76, 1978.

[4] R. Asai, E. Taguchi, Y. Kume, M. Saito M, and S. Kondo. Zebrafish leopard gene as a component of the putative reaction-diffusion system. *Mech. Dev.*, 89 : 87–92, 1999.

[5] P. Ball. *Branches, Shapes, Flow : Nature's Patterns : a Tapestry in Three Parts*. Oxford University Press, 2009.

[6] Y. Bar-Yam. *Dynanics of complex systems*. The Advanced Book Studies in Nonlinearity series, Westeview Press, 2005.

[7] N. Bekki and K. Nozaki. Formations of spatial patterns and holes in the generalized ginzburg-landau equation. *Phys. Lett.*, 110A : 133, 1985.

[8] T.B. Benjamin and J.E. Feir. The disintegrationof wavetrains in deep water. *J. Fluid Mech.*, 27 : 417–430, 1967.

[9] P. Bergé, Y. Pomeau, and C. Vidal. *L'ordre dans le chaos ; Vers une approche déterministe de la turbulence, Hermann (1988)*. Hermann, 1993.

[10] A. Bernheim-Groswasser, S. Wiesner, R. M. Golsteyn, M.F. Carlier, and C. Sykes. The dynamics of actin-based motility depend on surface parameters. *Nature*, 417 : 308–311, 2002.

[11] A. Boettigera, B. Ermentroutb, and G. Oster. Solitary modes and the eckhaus instability in directional solidification. *PNAS*, 106(22) : 6837–6842, Apr 2009.

[12] J. Boissonade, V. Castets, , P. De Kepper, and E. Dulos. Les structures de Turing. *Pour la Science*, 157 : 10–12, 1990.

[13] A.J. Bray. Theory of phase-ordering kinetics. *Adv. Phys.*, 43 : 357–459, 1994.

[14] P. Brunet, J.-M. Flesselles, and L. Limat. Parity breaking in a one-dimensional pattern : A quantitative study with controlled wavelength. *Europhys. Lett.*, 56 : 221–226, 2001.

[15] V. Castets, E. Dulos, J. Boissonade, and P. De Kepper. Experimental evidence of a sustained standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern. *Physical Review Letters*, 64(24) : 2953–2956, 1990.

[16] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. International Series of Monographs on Physics, Oxford : Clarendon, 1961, 1961.

[17] H. Chaté. Spatiotemporal intermittency regimes of the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation. *Nonlinearity*, 7 : 185, 1994.

[18] Y. Chen and A. F. Schier. The zebrafish nodal signal squint functions as a morphogen. *Nature*, 411 : 607–610, 2001.

[19] S. Ciliberto, P. Coullet, J. Lega, E. Pampaloni, and C. Perez-Garcia. Defects in roll-hexagon competition. *Phys. Rev. Lett.*, 65(19) : 2370–2373, Nov 1990.

[20] P. Coullet and C. Tresser. Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation. *J. Phys. Colloque C*, 539 : 5–25, 1978.

[21] M. C. Cross and P. C. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, 65 : 851–1112, 1993.

[22] Z. Csahok, C. Misbah, and A. Valance. A class of nonlinear equations based on geometry and conservation. *Physica D*, 128 : 87, 2000.

[23] W. L. Ditto, S. N. Rauseo, and L. L. Spano. Experimental control of chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 65(26) : 3211–3214, Dec 1990.

[24] G. Faivre, S. de Cheveigné, C. Guthmann, and P. Kurowski. Solitary tilt waves in thin lamellar eutectics. *Europhys. Lett.*, 9 : 779–784, 1989.

[25] M. J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of non-linear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19 : 25–52, 1978.

[26] A. Garfinkel, M. Spano, W. L. Ditto, and J. Weiss. Controlling cardiac chaos. *Science*, 257(5074) : 1230–1235, Aug 1992.

[27] Z. Gills, C. Iwat, R. Roy, I. B. Schwartz, and I. Triandaf. Tracking unstable steady states : Extending the stability regime of a multimode laser system. *Phys. Rev. Lett.*, 69(22) : 3169–3172, Nov 1992.

[28] C. Godrèche, editor. *in "Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities"*. Collection Alea-Saclay : Monographs and Texts in Statistical Physics, 1977.

[29] R. J. Goldstein and D. J. Graham. Stability of a horizontal fluid layer with zero-shear boundaries. *Phys. Fluids*, 12 : 1133, 1969.

[30] E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit. *Ce que disent les fluides*. Belin, 2005.

[31] Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, and Luc Petit. *Hydrodynamique physique*. Physique. Savoirs actuels, 2001.

[32] M.P. Hassell. *The dynamics Arthropod Predator-Prey Systems*. Princeton, J.J., Princeton Univeristy Press, 1978.

[33] B. Janiaud, A. Pumir, D. Bensimon, V. Croquette, H. Richter, and L. Kramer. The eckhaus instability for traveling waves. *Physica D*, 55 : 269–286, 1992.

[34] K. John, P. Peyla, K. Kassner, J. Prost, and C. Misbah. Nonlinear study of symmetry breaking in actin gels : Implications for cellular motility. *Phys. Rev. Lett.*, 100(6) : 068101, Feb 2008.

[35] Badr Kaoui, George Biros, and Chaouqi Misbah. Why do red blood cells have asymmetric shapes even in a symmetric flow? *Phys. Rev. Lett.*, 103(18) : 188101, Oct 2009.

[36] K. Kassner and C. Misbah. Parity breaking in eutectic growth. *Phys. Rev. Lett.*, 65(12) : 1458–1461, Sep 1990.

[37] K. Kassner and C. Misbah. Nonlinear evolution of a uniaxially stressed solid : a route to fracture? *Europhys. Lett.*, 28 : 245, 1994.

[38] K. Kassner and C. Misbah. Amplitude equations for systems with long-range interactions. *Phys. Rev. E*, 66(2) : 026102, Aug 2002.

[39] K. Kassner, C. Misbah, and H. Müller-Krumbhaar. Transition to chaos in directional solidification. *Phys. Rev. Lett.*, 67(12) : 1551–1554, Sep 1991.

[40] K. Kassner, C. Misbah, H. Müller-Krumbhaar, and A. Valance. Directional solidification at high speed. ii. transition to chaos. *Phys. Rev. E*, 49(6) : 5495–5516, Jun 1994.

[41] D.M Kern and C.H. Kim. Iodine catalysis in chloride-iodine reaction. *J. Am. Chem. Soc.*, 87 : 5309–5313, 1965.

[42] Y. Kuramoto and T. Tsuzuki. On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems. *Prog. Theor. Phys.*, 54 : 687, 1975.

[43] J. Lega. Traveling hole solutions of the complex ginzburg-landau equation : a review. *Physica D*, 152 : 269–287, 2001.

[44] I. Lengyel and I.R. Epstein. Modeling of turing structures in the chlorite-iodidemalonic acid-starch reaction system. *Science*, 251 : 650–652, 1991.

[45] H. Levine and W. J. Rappel. Numerical study for traveling waves in directional solidification. *Phys. Rev. A*, 42(12) : 7475–7478, Dec 1990.

[46] R. T. Liu, S. S. Liaw, and P. K. Maini. Two-stage turing model for generating pigment patterns on the leopard and the jaguar. *Physical Review E*, 74(1) : 011914, 2006.

[47] T. P. Loisel, R. Boujemaa, D. Pantaloni, and M. F. Carlier. Reconstitution of actin-based motility of listeria and shigella using pure proteins. *Nature*, 401 : 613–616, 1999.

[48] A.J. Lotka. *Elements of physical biology.* Williams and Wilkins Co, Baltimore, 1925.

[49] M.-A. Mader, V. Vitkova, M. Abkarian, A. Viallat, and T. Podgorski. Dynamics of viscous vesicles in shear flow. *Eur. Phys. J. E*, 19 : 389–397, 2006.

[50] J. De Meeus and J. Sigala. Cinétique et mécanisme de la réduction du chlorite par l'iodure. *J. Chim. Phys. Biol.*, 63 : 453–459, 1966.

[51] H. Meinhardt. *Models of biological pattern formation.* Academic Press, London UK, 1982.

[52] H. Meinhardt. *The algorithmic beauty of sea shells.* Springer Verlag, Berlin, 2003.

[53] C. Misbah, O. Pierre-Louis, and Y. Saito. Crystal surfaces in and out-of equilibrium : a modern view. *Rev. Mod. Phys.*, 82(1) : 981–1040, January 2010.

[54] C. Misbah and A. Valance. Secondary instabilities in the stabilized Kuramoto-Sivashinsky equation. *Phys. Rev. E*, 49(1) : 166–183, Jan 1994.

[55] F. C. Moon. *Chaotic and Fractal Dynamics : An Introduction for Applied Scientists and Engineers.* Wiley, 1992.

[56] J. Murray. *Mathematical Biology.* Spinger Verlag, Berlin, 1993.

[57] A. H. Nayfeh. *Introduction to perturbation techniques.* Willey Inter Science, NY, 1981.

[58] F. J. Nedelec, T. Surrey, A. C. Maggs, and S. Leibler. Self-organization of microtubules and motors. *Nature*, 389(22) : 305–308, Sept 1997.

[59] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems.* Cambridge Univ. Press, 1993.

[60] Q. Ouyang and H.L. Swinney. Transition from a uniform steady state to hexagonal and striped turing patterns. *Nature*, 352 : 610–612, 1991.

[61] Coullet P., R. E. Goldstein, and G. H. Gunaratne. Parity-breaking transitions of modulated patterns in hydrodynamic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 63(18) : 1954–1957, Oct 1989.

[62] P. Coullet P. and G. Iooss. Instabilities of one-dimensional cellular patterns. *Phys. Rev. Lett.*, 64(8) : 866–869, Feb 1990.

[63] P. Paolo and C. Misbah. When does coarsening occur in the dynamics of one-dimensional fronts ? *Phys. Rev. Lett.*, 92(9) : 090601, Mar 2004.

[64] V. Petrov, V. Gaspar, J. Masere, and K. Showalter. Controlling chaos in the Belousov-Z habotinsky reaction. *Nature*, 361 : 240–243, 1993.

[65] M. Rabaud, S. Michalland, and Y. Couder. Dynamical regimes of directional viscous fingering : Spatiotemporal chaos and wave propagation. *Phys. Rev. Lett.*, 64(2) : 184–187, Jan 1990.

[66] F. Rioual, T. Biben, and C. Misbah. Analytical theory of vesicle tumbling. *Phys. Rev. E*, 69 : 061914, 2004.

[67] D. Ruelle and F. Takens. On the nature of turbulence. *Comm. Math. Phys*, 20(2) : 167–191, 1971.

[68] P. T. Saunders. *An introduction to catastrophe theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[69] J. Schnackenberg. Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour. *J. Theor. Biol.*, 81 : 389–400, 1979.

[70] M. Schroeder. *Fractals, Chaos, and Power Laws : Minutes from an Infinite Paradise*. Freeman, 1991.

[71] A.A. Seyraniana and A.P. Seyranian. The stability of an inverted pendulum with a vibrating suspension point. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 70 : 754–761, 2006.

[72] B. I. Shraiman. Order, disorder, and phase turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 57(3) : 325–328, Jul 1986.

[73] A.J. Simon, J. Bechhoefer, and A. Libchaber. Solitary modes and the eckhaus instability in directional solidification. *Phys. Rev. Lett.*, 61(22) : 2574–2577, Nov 1988.

[74] G.I. Sivashinsky. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames : 1. derivation of basic equations. *Acta Astraunautica*, 4 : 1177–1206, 1977.

[75] R. Thom. *Stabilité structurelle et morphogenèse. Essai d'une Théorie générale des modèles*. InterEditions, Paris, 1977.

[76] D'Arcy Thompson. *On growth and forms*. Cambridge University Press, Oxford, 1961.

[77] A. Turing. The chemical theory of morphogensis. *Phil. Trans. Roy. Soc. B*, 237 : 32, 1952.

[78] Y. u and P. Manneville. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Comm. Math. Phys*, 74(2) : 189–197, 1980.

[79] W. van Saarloos and P. C. Hohenberg. Fronts, pulses, sources and sinks in generalized complex Ginzburg-Landau equations. *Physica D*, 56 : 303–367, 1992.

[80] V. Volterra. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. *Mem. R. Accad. Naz. dei Lincei, Ser. VI*, 1926.

[81] T. A. Witten and L. M. Sander. Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon. *Phys. Rev. Lett.*, 47(19) : 1400–1403, Nov 1981.

[82] D. Yarar, W. To, A. Abo, and M. D. Welch. The Wiscot-Aldrich syndrome protein directs actin-based motility by stimulating actin nucleation with the arp2/3 complex. *Curr. Bio*, 9 : 555–558, 1999.

Sources des illustrations

Figure 1.4 : Rides éoliennes. Sand dunes ©Greg Pickens #631279 – Fotolia
Figure 1.5 : Sechseckige Strömungszellen in erhitztem Öl / ©M.G. Velarde
Figure 1.6 : Zeitlos schöne pflasterung ©Michael Stüning #876669 – Fotolia
Figure 3.24 : Figure extraite de M.A. Mader, V. Vitkova, M. Abkarian, A. Viallat, T. Podgorski, Eur. Phys. J. E Soft Matter. 19, 389 (2006)
Figure 8.6 : ©Jose Luis Subias. Avec l'aimable autorisation de l'auteur
Figure 8.8 : ©Christian Ricordeau, à partir d'une image de James P. Crutchfield.
Figure 8.9, à droite : Fig. 17 extraite K. Kassner, C. Misbah, A. Valance, H. Müller-Krumhaar, Physical Review E 49, 5495 (1994) ©the American Physical Society
Figure 8.10 : Fig. 4-5 extraites de K. Kassner, C. Misbah, H. Müller-Krumhaar, Physical Review Letters, 67, 1551 (1991) ©the American Physical Society
Figure 9.1 : ©NOAA Photo Library, NOAA Central Library ; OAR/ERL/National Severe Storms Laboratory (NSSL)
Figure 9.5 : ©Patrick De Kepper
Figure 9.6 : Fig. 1 R. T. Liu and S. S. Liaw and P. K. Maini, Physical Review E, 74, 011914 (2006) ©the American Physical Society
Figure 13.5, en haut : Giant's Causeway ©forcdan #28975739 – Fotolia. En bas : Sol d'argile craquelé - Deadvlei - Namibie ©Sahara Nature #3863433 – Fotolia
Figure 14.1, à gauche : Real snowflake ©Yaroslav Gnatuk #507798 – Fotolia. En bas : ©Marc Rabaud
Figure 14.3 : extrait de F.J. Nedelec, T. Surrey, A.C. Maggs and S. Leibler, Nature 389,305 (1997) ©Nature Publishing Group

Index

Accrochage de la phase, 158
Accumulation
    point d', 191
Application
    logistique, 170, 188
    tente, 205
Attracteur
    étranges, 180
    solution de l'équation d'amplitude, 29
Auto-similarité, 193, 198

Bascule, 58
Bekki-Nozaki
    trous de, 305
Benjamin-Feir
    instabilité, 300
Bifurcation
    col-nœud, 51, 77
    définition, 63
    fourche, 19
    Hopf, 109, 114, 123, 128
    imparfaite, 33
    sous-critique, 40, 42
        branche col-noeud, 84
        stabilité, 44
    sous-critique imparfaite, 77
    sur-critique, 19
    transcritique, 47
Bravais
    réseau de, 313
Brisure de symétrie
    dans le cas du ressort, 30
    extrinsèque, 38
Bruxellateur, 127, 144

Cascade sous-harmonique, 184, 188
Catastrophe
    avant-gôut, 38
    codimension, 93
    cusp ou fronce, 70, 94
    déploiement des singularités, 89
    différence avec bifurcation, 66
    illustration, 67
    ombilic elliptique, 102
    ombilic hyperbolique, 101
    ombilic parabolique, 104
    papillon, 98
    pli ou point tournant, 88
    queue d'aronde, 97
    résumé, 104
    stabilité dynamique, 65
    stabilité structurelle, 64, 65, 71
    subjectivité, 65
CIMA
    réaction, 227
Coquillage, 229
Crises, 202
Cumulonimbus, 213
Cycle limite, 140, 142
    van der Pol, 115

Dérivée fonctionnelle, 79
Déterminisme, 175, 178, 205
Déterministe, 172

Échelles multiples, 256
Eckhaus
    instabilité de, 263, 267
    instabilité de phase, 266
Élimination adiabatique, 25
Équation d'amplitude, 252, 257, 260
    à coefficients complexes, 292, 297
    à coefficients réels, 259, 260
    à deux dimensions, 320, 332
    à partir des symétries, 138, 156, 259, 295
    bifurcation col-nœud, 55
    bifurcation de Hopf, 134, 137

bifurcation imparfaite, 35
bifurcation transcritique, 48
Bruxellateur, 144
complexe, 129
dérivant d'un potentiel, 28
dans le problème du ressort, 27
forme canonique, 28
instabilité paramétrique, 154, 160

Fluctuations, 45
Fractale, 198
définition, 198
Front, 271
analogie avec l'équation de Newton, 275
invasion, 273, 279
notion de, 273
poussé, 287
précurseur, 281
sélection de la vitesse, 281
tiré, 287
vitesse d'invasion, 277

Globules rouges, 62

Hasard, 176, 205, 209
Hexagones, 313
Rayleigh-Bénard, 318
Hystérésis, 46

Instabilité
paramétrique, 149
image intuitive, 152
symétrie, 156
sous-harmonique, 150
Intermittence, 184, 186
spatio-temporelle, 305

Jaguar, 229

Kuramoto-Sivashinsky
équation de, 306, 308

Léopard, 229
Lengyel-Epstein
modèle de, 225
Lotka-Voltera
modèle conservatif, 120
modèle de, 118
modèle plus réaliste, 121
Lyapunov
fonction de, 30
fonctionnelle de, 263
exposant de, 196

Métastabilité, 47
Métastable, 44–46, 72
Mandelbrot
fractale de, 198
Marangoni
convection de, 233
Mesure invariante, 209
Multi-échelles, 130, 131, 254

Ondes planes, 301
Ordre, 213
à deux dimensions, 309, 311
Oscillateur
van der Pol, 109, 129

Paramétrique, 149
Pendule
couple extérieur, 52
paramétrique, 150
simple, 51
Plateau de Maxwell, 72
Poisson tropical, 229
Proie-prédateur, 118

Quasi-périodicité, 184

Rössler
système de, 173
Ralentissement critique, 24
Rayleigh-Bénard
argument heuristique, 235
convection de, 232, 233
stabilité linéaire, 239, 242

Schnackenberg
modèle de, 224
Section de Poincaré, 179

Sensibilité aux conditions initiales, 172, 207
Solvabilité
    condition de, 134
    l'alternative de Fredholm, 136
Stabilité linéaire
    bifurcation col-nœud, 54
    bifurcation transcritique, 49
    des bandes, 323, 326
    des carrés, 323, 330
    des hexagones, 323, 327
    problème de ressort, 23
Stabilité marginale, 287

Transition de phase
    analogie avec bifurcation fourche, 21
Tumbling, 58
Turbulence
    de phase, 304
    médiée par les défauts, 302
Turing
    condition de, 221
    instabilité de, 218, 219
    modèle de, 216
    système de, 215

Universalité, 19