EXERCICES POUR LE COURS DE PHYSIQUE DE

FEYNMAN

Richard Feynman | Robert Leighton | Matthew Sands et al.
édités par Michael A. Gottlieb et Rudolf Pfeiffer

900 EXERCICES CORRIGÉS

Traduit par Jean-Louis Basdevant

DUNOD

First published in the United States by Basic Books a member of the Perseus Books Group.
L'édition originale de cet ouvrage a été publiée aux États-Unis
par Basic Books, un membre du groupe Perseus Books, sous le titre :
Exercices For the Feynman
Lectures on Physics

© 2014 by California Institute of Technology, Michael A. Gottlieb,
and Rudolf Pfeiffer.

Version française de Jean-Louis Basdevant.

Maquette de couverture : Raphaël Tardif

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, 2015
pour la version française

5 rue Laromiguière,
75005 Paris

ISBN 978-2-10-072798-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

Préface VI

Exercices pour le volume I
(*Mécanique 1* et *Mécanique 2*)

Introduction 3

1. Atomes en mouvement 4
2. Conservation de l'énergie, statique 6
3. Loi de Kepler et gravitation 18
4. Cinématique 21
5. Lois de Newton 26
6. Conservation de l'impulsion 32
7. Vecteurs 36
8. Collisions à deux corps non-relativistes en trois dimensions 40
9. Forces 47
10. Potentiels et champs 53
11. Unités et dimensions 58
12. Cinématique et dynamique relativistes, équivalence de la masse et de l'énergie au repos 61
13. Énergie et impulsion relativistes 62
14. Rotations à deux dimensions, le centre de masse 65
15. Moment cinétique, le moment d'inertie 70
16. Rotations à trois dimensions 77
17. L'oscillateur harmonique, équations différentielles linéaires 88
18. Algèbre 97
19. Oscillations forcées avec amortissement 100
20. Optique géométrique 111
21. Rayonnement électromagnétique : interférences 116
22. Rayonnement électromagnétique : diffraction 120
23. Rayonnement électromagnétique : réfraction, dispersion, absorption 124
24. Rayonnement électromagnétique : amortissement par rayonnement, diffusion 125
25. Rayonnement électromagnétique : polarisation 126
26. Rayonnement électromagnétique : effets relativistes 128
27. Comportement quantique : ondes, particules et photons 131
28. Théorie cinétique des gaz 136
29. Principes de la mécanique statistique 139
30. Applications de la théorie cinétique : équipartition 142
31. Applications de la théorie cinétique : phénomènes de transport 144
32. Thermodynamique 147
33. Illustrations de la thermodynamique 152
34. L'équation d'onde, le son 155
35. Système d'ondes linéaires : battements, modes 157
36. Analyse de Fourier des ondes 162

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercices pour le volume II

(*Électromagnétisme 1* et *Électromagnétisme 2*)

Introduction **167**

37. Électromagnétisme 168
38. Calcul différentiel de champs de vecteurs 169
39. Calcul intégral vectoriel 172
40. Électrostatique 173
41. Applications de la loi de Gauss 175
42. Le champ électrique dans diverses circonstances 178
43. Le champ électrique dans diverses circonstances (suite) 182
44. Énergie électrostatique 182
45. Diélectriques 184
46. À l'intérieur des diélectriques 186
47. Analogues électrostatiques 187
48. Magnétostatique 189
49. Le champ magnétique dans diverses situations 191
50. Le potentiel vecteur 193
51. Les lois de l'induction 194
52. Solution des équations de Maxwell dans le vide 199
53. Solution des équations de Maxwell avec des courants et des charges 200
54. Circuits en courant alternatif 203
55. Cavités résonantes 210
56. Guides d'ondes 211
57. L'électrodynamique en notations relativistes 214
58. Transformations de Lorentz des champs 215
59. Énergie et impulsion du champ 217
60. Masse électromagnétique 220
61. Le mouvement des charges dans des champs électriques et magnétiques 221
62. Indice de réfraction des milieux denses 222
63. La réflexion sur des surfaces 223
64. Le magnétisme de la matière 224
65. Paramagnétisme et résonance magnétique 224
66. Ferromagnétisme 225
67. Élasticité 226
68. L'écoulement de l'eau sèche 228
69. L'écoulement de l'eau mouillée 229

Exercices pour le volume III

(*Mécanique quantique*)

Introduction **233**

70. Amplitudes de probabilité 234
71. Particules identiques 238
72. Le spin un 242
73. Le spin 1/2 244
74. La dépendance en temps des amplitudes 248
75. L'Hamiltonien matriciel 249

76. Le maser à ammoniac 251
77. Autres systèmes à deux états 251
78. Davantage de systèmes à deux états 252
79. Le clivage hyperfin de l'atome d'hydrogène 254
80. Propagation dans un réseau cristallin 254
81. Les semi-conducteurs 256
82. L'approximation des particules indépendantes 258
83. La dépendance des amplitudes dans la position 260
84. Le moment cinétique 262
85. L'atome d'hydrogène et la classification périodique 264

Annexes

Annexe A. Unités et dimensions **269**

Annexe B. Constantes physiques et valeurs approchées **271**

1. Constantes astrophysiques et géophysiques 271
2. Constantes atomiques et nucléaires 272
3. Constantes macroscopiques 273
4. Constantes numériques 273

Annexe C. Réponses **275**

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

PRÉFACE

Cet ensemble complet d'exercices pour le *Cours de Physique de Feynman* a été construit à partir de trois sources : les *Exercises in Introductory Physics* de Leighton et Vogt's (Addison-Wesley, 1969), et les Volumes II et III des *Exercises for The Feynman Lectures on Physics* de Caltech (Addison-Wesley 1964–65). Les exercices d'origine ont subi un lifting : ils sont réécrits en LaTeX avec de belles figures propres, clarifiés, corrigés et actualisés avec des unités modernes. Les exercices des volumes II et III ont été complétés par plusieurs nouveaux problèmes, et des solutions, qui manquaient complètement dans les éditions précédentes, sont maintenant données. C'est la première fois que des exercices pour les trois volumes du *Cours de Physique de Feynman* sont publiés en un seul volume, et la première fois que de tels exercices paraissent avec un ensemble (presque) complet de réponses.

Tous ces exercices ont été donnés à un moment ou à un autre aux étudiants comme exercices à la maison ou comme problèmes d'examen dans le cours obligatoire d'introduction à la physique de deux ans de Caltech, que ce soit lorsque Richard Feynman l'enseignait (1961–64), ou pendant les deux décennies qui ont suivi lorsque le *Cours de Physique de Feynman* était le manuel de physique. Plusieurs personnes ont contribué à l'élaboration de ces exercices, elles sont remerciées dans les *Introductions* aux exercices de chaque volume. En outre, nous souhaitons remercier :

Le département de Physique, Maths et Astronomie du California Institute of Technology, pour nous avoir autorisés à faire ce livre et à l'inclure dans *The Feynman Lecture on Physics New Millennium Edition* ;

Rochus Vogt, pour avoir communiqué ses notes de cours accumulées pendant de nombreuses années d'enseignement des bases de la physique à Caltech ;

Eugene Cowan, pour nous avoir communiqué ses solutions aux exercices des volumes II & III ;

Aaron Zimmerman, pour avoir vérifié les nouveautés dans les cours et exercices de Caltech ;

Adam Cochran, pour avoir habilement négocié l'accord de publication avec Basic Books.

Michael A. Gottlieb & Rudolf Pfeiffer
Éditeurs, *The Feynman Lecture on Physics New Millennium Edition*
Décembre 2013

Exercices pour le volume I (*Mécanique 1* et *Mécanique 2*)

INTRODUCTION

Ces exercices ont été rassemblés par les auteurs pour être utilisés avec le Volume I* du *Cours de Physique de Feynman* dans le cours d'introduction à la physique de première année au California Institute of Technology, et ils sont donc classés dans le même ordre que les sujets enseignés dans le *Cours de Feynman*. À l'intérieur de chaque sujet ou de chaque chapitre, les exercices sont subdivisés en catégories suivant leur généralité et leur difficulté. Dans l'ordre où ces exercices apparaissent dans un chapitre donné, il y a : des démonstrations ou des généralisations, des exercices faciles, des exercices intermédiaires, et puis des exercices plus sophistiqués ou plus compliqués. La plupart du temps, les démonstrations et généralisations complètent les discussions faites dans le *Cours de Feynman*, et les résultats sont considérés comme devant être assimilés par les étudiants. Un étudiant moyen ne devrait pas avoir de difficulté à résoudre les exercices simples, et il devrait être capable de résoudre la plupart des exercices intermédiaires en un temps raisonnable – de dix à vingt minutes chacun. Les exercices plus sophistiqués demandent en général une réflexion physique plus approfondie, et seront utiles principalement aux meilleurs étudiants.

Les exercices individuels ont été conçus et évalués de façon critique par plusieurs personnes. Un bon nombre sont dus à R. B. Leighton et sont en rapport direct avec la série originale des cours de Feynman ; quelques-uns sont reproduits, avec autorisation, à partir d'un plus gros ensemble compilé par Foster Strong ; plusieurs ont été adaptés par R. E. Vogt à partir d'exercices d'examens présents dans le cours d'introduction. Les auteurs expriment ici leurs remerciements sincères à tous ceux qui ont contribué, qu'ils soient nommés ou anonymes.

Les auteurs considèrent que ce recueil est loin d'être complet. Nous espérons qu'avec le temps, eux-mêmes et d'autres à Caltech, affineront ce texte et le complèteront d'exercices nouveaux de façon qu'un ouvrage de travail personnel puisse peut-être en résulter, dont l'utilité pourrait dépasser la portée limitée actuelle.

Robert B. Leighton & Rochus E. Vogt

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

* Volume I de l'édition américaine : *Mécanique 1* et *2* pour l'édition française. Volume II : *Électromagnétisme 1* et *2* pour l'édition française. Volume III : *Mécanique quantique* pour l'édition française.

1. Atomes en mouvement

On se réfèrera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1, Chap. 1 à 3.

Utilisez les idées données dans ces chapitres ainsi que votre propre expérience et votre imagination, afin de résoudre les exercices suivants. La plupart du temps, on ne demandera *pas* de résultats numériques de haute précision.

Exercice 1.1 Si la chaleur provient seulement du mouvement moléculaire, quelle différence y a-t-il entre une balle de baseball chaude au repos et une autre froide mais en mouvement rapide ?

Exercice 1.2 Si les atomes de toute matière sont en mouvement perpétuel, comment peut-il exister des objets de forme permanente, comme les empreintes fossiles ?

Exercice 1.3 Expliquez quantitativement pourquoi et comment les frottements dans une machine en mouvement produisent de la chaleur. Expliquez également, si vous le pouvez, pourquoi la chaleur ne peut provoquer du mouvement utilisable par le processus inverse.

Exercice 1.4 Les chimistes ont découvert que les molécules de caoutchouc sont formées de longues chaînes entrecroisées d'atomes. Expliquez pourquoi une bande de caoutchouc s'échauffe lorsqu'on l'allonge.

Exercice 1.5 Que devrait-il arriver à un élastique qui soutient un certain poids lorsqu'on le chauffe ? (Pour trouver la réponse, faites l'expérience.)

Exercice 1.6 Pouvez-vous expliquer pourquoi on ne trouve pas de cristaux ayant la forme d'un pentagone régulier ? (Des formes triangulaires, carrées, hexagonales se trouvent fréquemment parmi les cristaux.)

Exercice 1.7 On vous donne un grand nombre de billes d'acier de même diamètre d et un récipient de volume donné V. Chacune des dimensions du récipient est beaucoup plus grande que le diamètre d'une bille. Quel est le nombre maximum de billes, N, que vous pouvez mettre dans le récipient ?

Exercice 1.8 Comment la pression P d'un gaz doit-elle varier avec n, le nombre d'atomes par unité de volume, et avec $\langle v \rangle$, la vitesse moyenne d'un atome ? La pression P doit-elle être proportionnelle à n et/ou à $\langle v \rangle$, ou bien doit-elle varier plus ou moins rapidement que de façon linéaire ?

Exercice 1.9 L'air habituel a une densité d'environ $0{,}001\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, alors que l'air liquide a une densité d'environ $1{,}0\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$.

(a) Estimer le nombre n_G de molécules d'air par cm^3 dans de l'air habituel et dans de l'air liquide, n_L.

(b) Estimer la masse m d'une molécule d'air.

(c) Estimer la distance moyenne l qu'une molécule d'air doit parcourir entre deux collisions à une température et une pression standard CNTP (conditions standard : 20 °C à 1 atm). Cette distance s'appelle le *libre parcours moyen*.

(d) Estimer quelle pression P, dans une atmosphère normale, un système doit-il avoir pour que le libre parcours moyen soit d'environ un mètre.

Exercice 1.10 L'intensité d'un faisceau parallèle d'atomes de potassium est réduite de 3 % par une couche d'argon gazeux de 1 mm d'épaisseur à une pression de $6{,}0 \times 10^{-4}$ mmHg. Calculer la surface apparente A de chacun des atomes d'argon.

Exercice 1.11 Les études de diffraction des rayons X montrent que les cristaux de NaCl sont disposés en un réseau cubique, avec une distance de 2,820 Å entre plus proches voisins. En allant chercher la densité et la masse moléculaire de NaCl, calculer le nombre d'Avogadro N_A. (C'est là une des méthodes expérimentales les plus précises pour déterminer N_A.)

Exercice 1.12 Boltwood et Rutherford avaient trouvé que le radium en équilibre avec ses produits de désintégration produit $13{,}6 \times 10^{10}$ atomes d'hélium par seconde et par gramme de radium. Ils avaient également mesuré que la désintégration de 192 mg de radium produit 0,0824 mm^3 d'hélium par jour à température et pression normales (0 °C à 1 atm). Calculer, à partir de ces nombres :

(a) Le nombre d'atomes d'hélium N_H par cm^3 de gaz dans des conditions normales.

(b) Le nombre d'Avogadro N_A.

Référence : Boltwood et Rutherford, *Phil. Mag.* **22**, 586 (1911).

Exercice 1.13 Rayleigh avait trouvé que 0,81 mg d'huile d'olive à la surface de l'eau produisaient une couche mono-moléculaire de 84 cm de diamètre. Quelle valeur du nombre d'Avogadro N_A en résulta-t-il, en supposant que la composition approximative de l'huile d'olive est $H(CH_2)_{18}COOH$, en une chaîne linéaire, de densité 0,8 g cm^{-3} ?

Référence : Rayleigh, *Proc. Roy. Soc.* **47**, 364 (1890).

Exercice 1.14 En 1860, Maxwell montra que la viscosité d'un gaz est donnée par :

$$\eta = \frac{1}{3}\rho v\, l,$$

où ρ est la densité, v la vitesse moléculaire moyenne, et l, le libre parcours moyen. Maxwell avait montré que cette dernière grandeur est $l = 1/(\sqrt{2}\,\pi N_g \sigma^2)$, où σ est le diamètre de la molécule. Loschmidt (1865) utilisa les valeurs mesurées de η, ρ (du gaz), ρ (du solide) avec la valeur calculée par Joule de v pour déterminer N_g, le nombre de molécules par cm^3 dans un gaz à température et pression standard. Il supposa que les molécules sont des sphères dures formant un empilement compact dans un solide. Sachant que $\eta = 2{,}0 \times 10^{-4}$ g cm^{-1} s^{-1} pour de l'air dans des conditions standard, ρ(liquide) $\approx 1{,}0$ g cm^{-3}, ρ(gaz) $\approx 1{,}0 \times 10^{-3}$ g cm^{-3}, et $v \approx 500$ m s^{-1}, calculer N_g.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 1.15 Un verre plein d'eau est laissé sur le rebord d'une fenêtre en Californie.

(a) En combien de temps T pensez-vous que cette eau se sera complètement évaporée ?

(b) Combien de molécules J par cm^2 et par s quittent le verre d'eau à ce rythme-là ?

(c) Discuter brièvement la relation quelle qu'elle soit, entre votre réponse à la question (a) ci-dessus et la pluviosité moyenne sur la Terre.

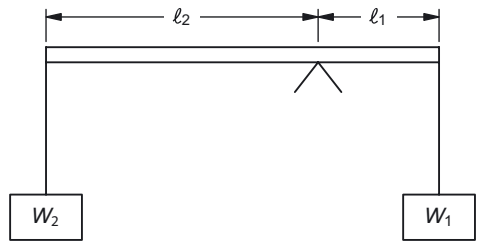
Exercice 1.16 Une goutte d'eau d'un orage tomba, un après-midi, sur une flaque de boue paléozoïque et laissa une empreinte. Longtemps après, cette empreinte fut déterrée en tant que fossile par un étudiant en géologie assoiffé par la chaleur. En vidant sa gourde d'eau, l'étudiant se demanda combien de molécules d'eau, N, provenant de cette ancienne goutte d'eau il venait de boire. Estimez N en n'utilisant que des données que vous connaissez déjà. (Faites des hypothèses raisonnables sur l'information que vous ne possédez pas complètement.)

2. Conservation de l'énergie, statique

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1, Chap. 4.

Exercice 2.1 En utilisant le principe des travaux virtuels, établir la formule d'équilibre pour une balance asymétrique décrite en Fig. 2.1, $W_1 l_1 = W_2 l_2$. (On négligera le poids du bras.)

Figure 2.1



Exercice 2.2 Étendre la formule obtenue dans l'exercice 2.1 dans le cas d'un nombre quelconque de poids suspendus à des distances différentes du point pivot,

$$\sum_i W_i l_i = 0.$$

(Les distances d'un côté du point d'appui sont considérées comme positives, celles de l'autre côté comme négatives.)

Exercice 2.3 Sur un corps en équilibre statique s'exercent n forces. En utilisant le principe des travaux virtuels démontrer que :

(a) Si $n = 1$, L'intensité de la force doit être nulle (cas trivial)

(b) Si $n = 2$, les deux forces sont de même intensité, de directions opposées et colinéaires.

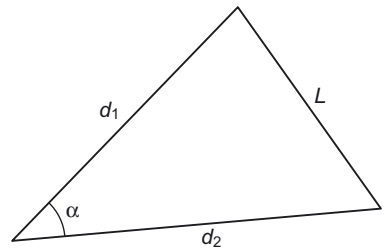
(c) Si $n = 3$, les forces doivent être coplanaires et passer par un seul et même point.

(d) Pour n quelconque, la somme des produits des valeurs F_i des forces par le cosinus de l'angle Δ_i entre la force et une droite quelconque est nulle.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \cos \Delta_i = 0.$$

Exercice 2.4 Les problèmes d'équilibre statique en l'absence de frottement peuvent être ramenés, en faisant usage du *Principe des travaux virtuels*, à de simples problèmes de géométrie comme : où se déplace tel point si tel autre se déplace sur une petite distance ? Souvent, cette question trouve une réponse simple en faisant usage des propriétés suivantes d'un triangle (représenté sur la Fig. 2.2) :

Figure 2.2



(a) Si les côtés d_1 et d_2 ne changent pas de longueur, mais que l'angle α change d'une petite quantité $\Delta\alpha$, le côté opposé L change de

$$\Delta L = \frac{d_1 d_2}{L} \sin\alpha \, \Delta\alpha.$$

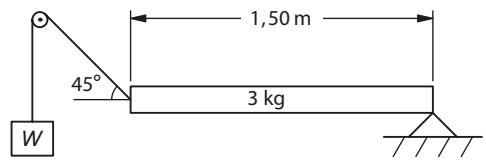
(b) Si les trois côtés a, b, c d'un triangle rectangle changent de longueur par de petites quantités Δa, Δb, et Δc, alors

$$a\,\Delta a + b\,\Delta b = c\,\Delta c \qquad (\text{où } c \text{ est l'hypoténuse}).$$

Démontrer ces relations.

Exercice 2.5 L'extrémité d'une planche uniforme de 1,5 m de long pesant 3 kg est posée sur un pivot. La planche est tenue en équilibre en position horizontale grâce à un système fait d'un poids et d'une poulie comme sur la figure Fig. 2.3. En négligeant tout frottement, trouver la valeur du poids W nécessaire pour maintenir la planche en équilibre.

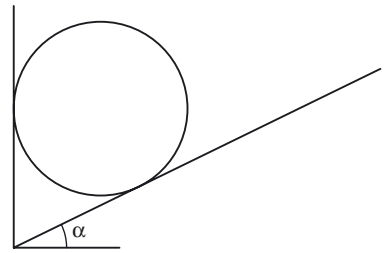
Figure 2.3



© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

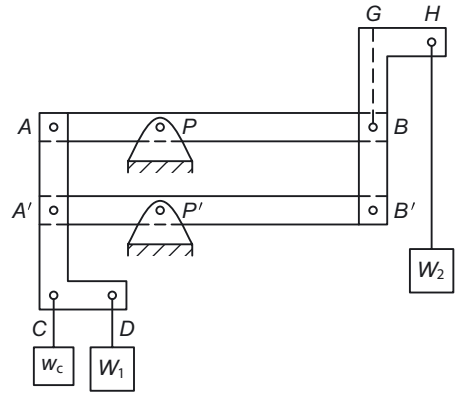
Exercice 2.6 Une balle de 3 cm de rayon et de poids 1 kg est au repos sur un plan tourné d'un angle α par rapport à l'horizontale, et est également en contact avec un mur vertical, comme sur la figure 2.4. Les deux surfaces ont des frottements négligeables. Calculer la force que la balle exerce sur le mur F_W et sur le plan F_P.

Figure 2.4



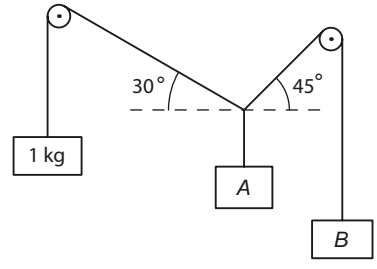
Exercice 2.7 Le cadre d'un parallélogramme déformable $AA'BB'$ peut être tourné (dans un plan vertical) autour des pivots P et P', comme sur la figure 2.5. Les frottements sont négligeables en A, A', B, B', P, et P'. Les bords $AA'CD$ et $B'BGH$ sont rigides et de même taille. $AP = A'P' = \frac{1}{2}PB = \frac{1}{2}P'B'$. À cause du contrepoids w_c, le cadre est en équilibre en l'absence des poids W_1 et W_2. Si l'on suspend un poids W_1 de 0,50 kg en D, quel poids W_2, suspendu en H, assurera l'équilibre ?

Figure 2.5



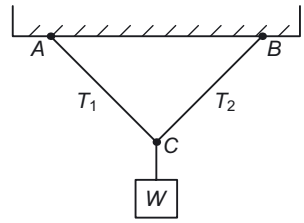
Exercice 2.8 Le système de la figure 2.6 est en équilibre statique. En utilisant le principe des travaux virtuels, déterminer les poids A et B. On négligera le poids des fils de suspension et les frottements des poulies.

Figure 2.6



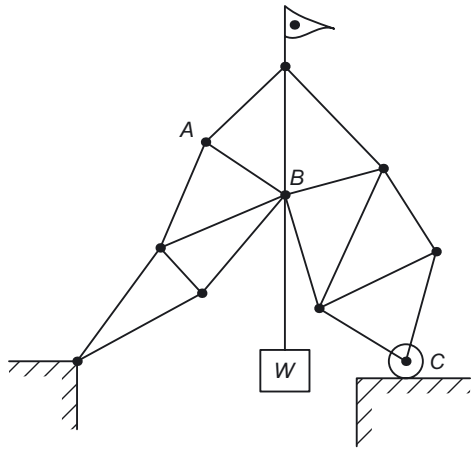
Exercice 2.9 Un poids de $W = 25\,\text{kg}$ est suspendu au milieu d'un fil métallique ACB comme sur la figure 2.7. $AC = CB = 1{,}5\,\text{m}$. $AB = 1{,}5\sqrt{2}\,\text{m}$. Déterminer les tensions T_1 et T_2 dans le fil.

Figure 2.7



Exercice 2.10 Le treillis montré sur la figure 2.8 est fait de bras légers en aluminium qui peuvent pivoter à leurs extrémités. En C se trouve une roue qui roule sur un plaque lisse. Lorsqu'on chauffe le bras AB avec un fer à souder, on observe que ce bras s'allonge d'une quantité x, et que le poids W se déplace verticalement d'une quantité y.

Figure 2.8

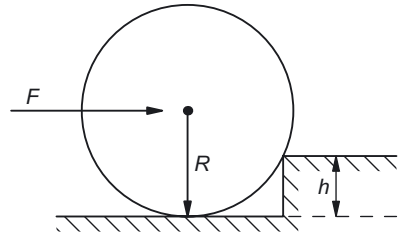


(a) Le mouvement de W se fait-il vers le haut ou vers le bas ?

(b) Quelle est la force F dans le bras AB (est-ce une tension ou une compression) ?

Exercice 2.11 Quelle force horizontale F (appliquée sur l'axe) doit-on exercer pour pousser une roue de poids W et de rayon R sur une hauteur h, comme sur la figure 2.9 ?

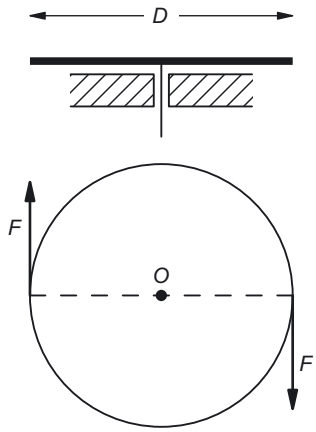
Figure 2.9



Exercice 2.12 Une plaque tournante horizontale de diamètre D est montée sur un support de roulement de frottement négligeable. Deux forces horizontales et de même grandeur F dans le plan de la plaque, mais de sens opposé s'exercent sur le bord de la plaque en des points diamétralement opposés, comme sur la figure 2.10.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Figure 2.10



(a) Quelle force F_B s'exerce sur le support ?

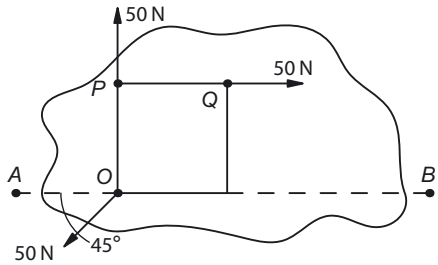
(b) Quel est le couple (= le moment de ce couple) τ_O le long d'un axe vertical passant par son centre O ?

(c) Quel serait le moment τ_P le long d'un axe vertical quelconque passant par un autre point P dans le même plan ?

(d) La proposition suivante est-elle juste ou non ? Expliquer pourquoi. « Deux forces quelconques agissant sur un corps peuvent être combinées en une seule résultante qui aurait le même effet. » En élaborant la réponse, considérer le cas de deux forces de sens opposé mais d'intensité légèrement différente.

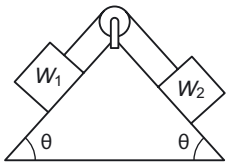
Exercice 2.13 Une plaque plate en acier flottant sur du mercure subit trois forces aux trois coins d'un carré de 0,1 m de côté, comme sur la figure 2.11. Trouver une quatrième force *unique* $\boldsymbol{F}$ qui peut tenir la plaque en équilibre. Donner la grandeur, la direction et le point d'application de $\boldsymbol{F}$ le long de AB.

Figure 2.11



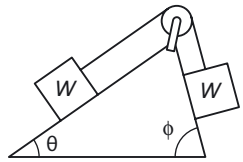
Exercice 2.14 En l'absence de frottements, quelle vitesse v auront les poids W_1 et W_2 de la figure 2.12 après avoir parcouru une distance D, s'ils sont initialement au repos ? ($W_1 > W_2$)

Figure 2.12



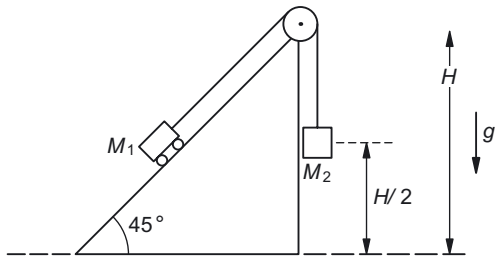
Exercice 2.15 Sur la figure 2.13, les poids sont égaux et les frottements sont négligeables. Si le système est initialement au repos, quelle vitesse v les poids auront-ils après avoir parcouru une distance D ?

Figure 2.13



Exercice 2.16 Une masse M_1 glisse sur un plan incliné à 45° à une hauteur H comme sur la figure 2.14. Elle est reliée par un fil de masse négligeable passant sur une poulie (de masse négligeable) à une masse égale M_2 pendue à la verticale. La longueur de la corde est telle que les deux masses peuvent être au repos si elles sont toutes deux à la hauteur $H/2$. Les dimensions des masses et de la poulie sont négligeables par rapport à H. Au temps $t = 0$ on lâche les masses.

Figure 2.14



(a) Pour $t > 0$ calculer l'accélération verticale a de M_2.

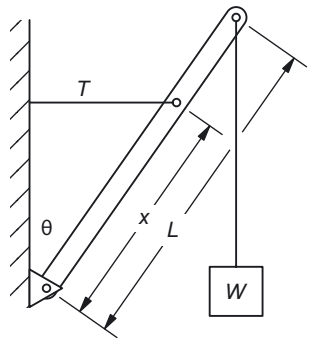
(b) Quelle masse se déplace vers le bas ?

(c) À quel instant t_1 la masse identifiée en b) touche-t-elle le sol ?

(d) Si la masse identifiée en b) s'arrête en touchant le sol, mais que l'autre poursuit son mouvement, atteindra-t-elle la poulie ?

Exercice 2.17 Un derrick est constitué d'un mât uniforme de longueur L et de poids w, articulé à sa base, comme sur la figure 2.15. Il est maintenu à un angle θ avec la verticale par un câble horizontal attaché en un point à une distance x de l'axe du pivot, et un poids W est suspendu à son extrémité. Quelle est la tension T du câble horizontal ?

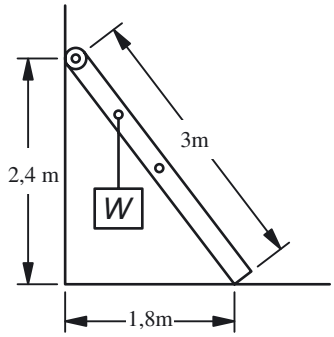
Figure 2.15



© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 2.18 Une échelle uniforme de 3 m de long munie de roulettes à son extrémité supérieure est penchée contre un mur lisse, comme sur la figure 2.16. L'échelle pèse 15 kg. Une masse $W = 30$ kg est suspendue à un barreau à 75 cm du sommet.

Figure 2.16



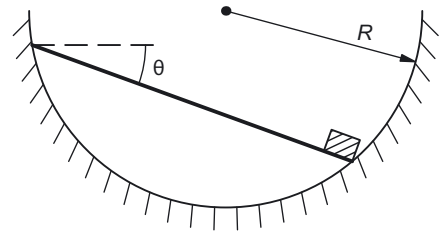
Trouver :

(a) la force F_R qu'exercent les roulettes sur le mur.

(b) Les forces horizontale F_h et verticale F_v qu'exerce l'échelle sur le sol.

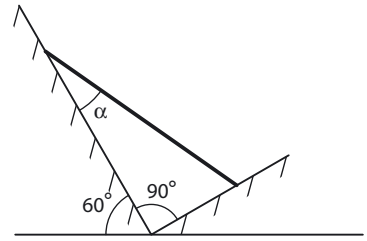
Exercice 2.19 Une planche de poids W et de longueur $\sqrt{3}\,R$ se trouve dans un cylindre lisse circulaire de rayon R, comme sur la figure 2.17. À une extrémité de la planche se trouve un poids $W/2$. Calculer l'angle θ de la planche à l'équilibre.

Figure 2.17



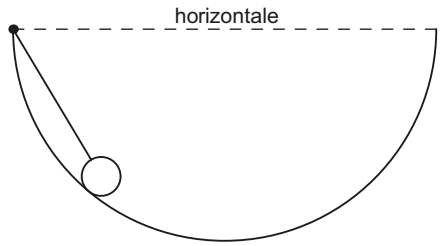
Exercice 2.20 Un barreau uniforme de longueur l et de poids W repose, en ses extrémités, sur deux plans inclinés comme sur la figure 2.18. À partir du principe des travaux virtuels, trouver l'angle α auquel le barreau se trouve en équilibre. (Négliger les frottements.)

Figure 2.18



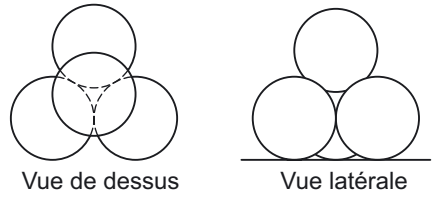
Exercice 2.21 Une petite sphère solide de rayon 4,5 cm et de poids W, doit être suspendue par un fil aux extrémités d'un récipient lisse hémisphérique d'un rayon de 49 cm, comme sur la figure 2.19. On s'aperçoit que si le fil est plus court que 40 cm, il se rompt. À partir du principe des travaux virtuels, trouver la force de rupture F du fil.

Figure 2.19



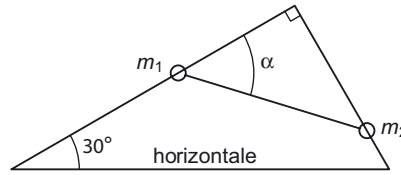
Exercice 2.22 Un élément décoratif présenté à une Foire internationale est constitué de quatre sphères métalliques identiques, chacune de $2\sqrt{6}$ tonnes. Les sphères doivent être disposées comme sur la figure 2.20, trois d'entre elles reposant sur une surface horizontale et au contact les unes des autres ; la quatrième doit reposer sur les trois autres. Les trois sphères inférieures sont fixées les unes aux autres par des points de soudure. En se donnant une marge de sécurité d'un facteur 3, quelle tension T les points de soudure doivent-ils pouvoir supporter ?

Figure 2.20



Exercice 2.23 Un cadre rigide en fil métallique est mis sous la forme d'un triangle rectangle, et disposé dans un plan vertical, comme sur la figure 2.21. Deux billes de masse $m_1 = 100$ g, $m_2 = 300$ g glissent sans frottement sur les fils et sont reliées par une corde. Lorsque le système est en équilibre statique, quelle est la tension T de la corde, et quel angle α fait-elle avec le premier fil ?

Figure 2.21

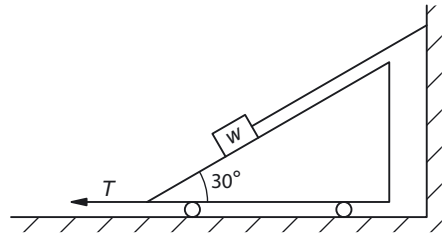


Exercice 2.24 Calculer la valeur de la tension T nécessaire pour maintenir en équilibre la cariole de la figure 2.22 s'il n'y a pas de frottements :

(a) En utilisant le principe des travaux virtuels.

(b) En travaillant avec les composantes des forces.

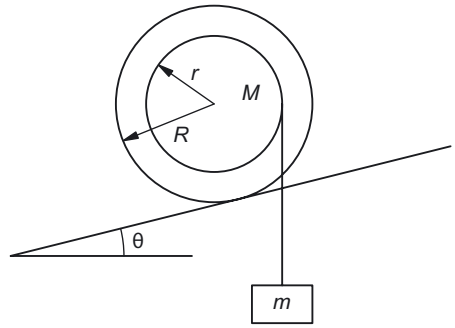
Figure 2.22



© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

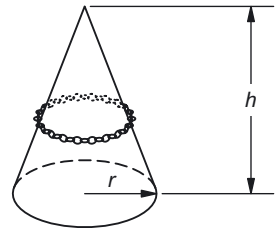
Exercice 2.25 Une bobine de masse $M = 3\,\text{kg}$ est constituée d'un cylindre central de rayon $r = 5\,\text{cm}$ et de deux roues de rayon $R = 6\,\text{cm}$. Elle est placée sur un plan incliné sur lequel elle peut rouler sans glisser. Une masse $m = 4{,}5\,\text{kg}$ est suspendue par un fil enroulé sur la bobine comme le montre la figure 2.23. On observe que le système est en équilibre statique. Quel est l'angle d'inclinaison θ ?

Figure 2.23



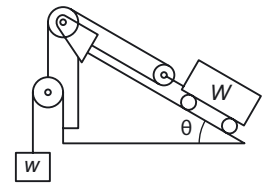
Exercice 2.26 Une boucle de chaîne, de poids total W, est en équilibre sur un cône droit, d'axe vertical, de base circulaire de rayon r, à la hauteur h, comme indiqué sur la figure 2.24. La chaîne est disposée sur un cercle horizontal. Calculer la tension T de la chaîne. On négligera les frottements.

Figure 2.24



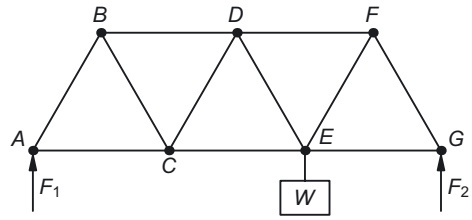
Exercice 2.27 Un chariot sur un plan incliné est équilibré par un poids w, comme sur la figure 2.25. Tous les frottements sont négligeables. Quel est le poids W du chariot ?

Figure 2.25



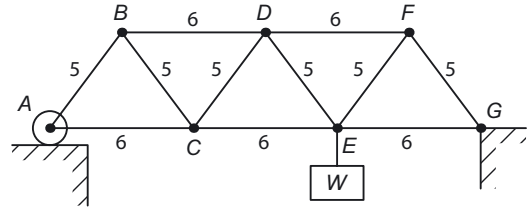
Exercice 2.28 La charpente d'un pont est construite comme sur la figure 2.26. Toutes les articulations sont des pivots sans frottements et tous les bras sont rigides, de masse négligeable et d'égale longueur.Trouver les forces de réaction F_1 et F_2 et la force F_{DF} dans le bras DF.

Figure 2.26



Exercice 2.29 Dans la charpente de la figure 2.27, tous les bras en diagonale sont de longueur 5 (unité appropriée) et tous les bras horizontaux de longueur 6. Tous les joints ont des charnières libres et le poids de la charpente est négligeable.

Figure 2.27

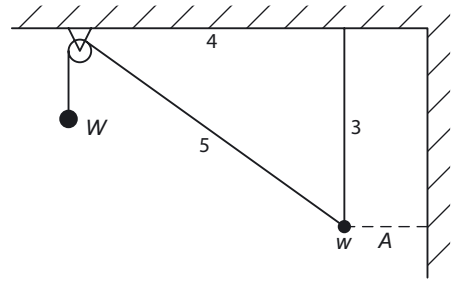


(a) Quels bras pourraient être remplacés par des cables flexibles, sous la charge du poids W placé comme l'indique la figure ?

(b) Trouver les forces dans les bras BD et DE.

Exercice 2.30 Dans le système de la figure 2.28, la partie pesante d'un pendule de poids w est initialement maintenue en position verticale par un fil A. Une fois ce fil brûlé, le pendule est relâché, se balance vers la gauche et atteint presque le plafond au maximum de son balancement. Trouver le poids W. (On négligera les frottements, le rayon de la poulie et la taille finie des poids.)

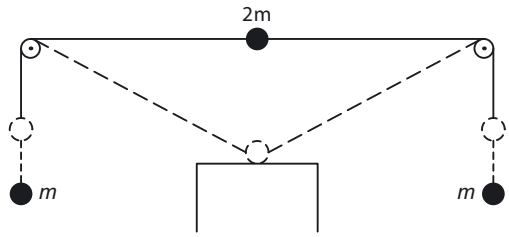
Figure 2.28



Exercice 2.31 Deux boules de masse égale m sont attachées à une troisième de masse $2m$ par des fils fins de même longueur. Les fils passent sur de petites poulies de frottement négligeable distantes de 100 cm, comme sur la figure 2.29. La masse $2m$ est initialement à égale distance des deux poulies et au même niveau qu'elles. Elle est lâchée avec une vitesse initiale nulle. Lorsqu'elle est descendue d'une hauteur de 50 cm, elle heurte une table. Quelle est sa vitesse v lors du choc sur la table ?

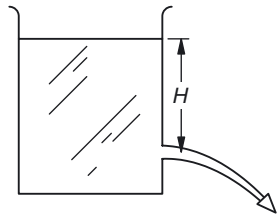
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Figure 2.29



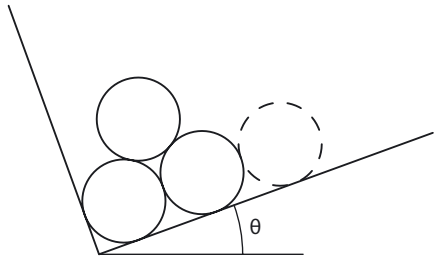
Exercice 2.32 Un tonneau d'aire transversale A contient un liquide de densité ρ. Le liquide s'éjecte librement par un petit trou d'aire a à une hauteur H sous la surface libre du liquide comme sur la figure 2.30. Si le liquide n'a pas de frottements internes (la viscosité), à quelle vitesse v sort-il ?

Figure 2.30



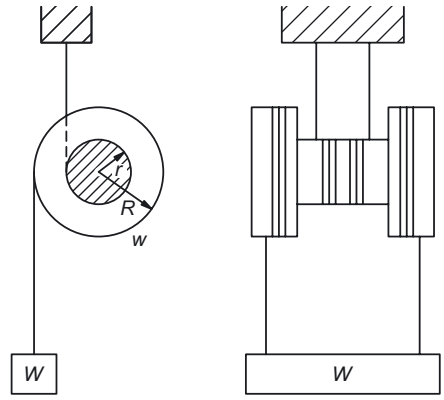
Exercice 2.33 Des poteaux identiques et lisses sont empilés horizontalement à l'arrière d'un camion. Le camion quitte la route et s'arrête sur une surface horizontale dans le sens de la longueur, mais inclinée latéralement d'un angle θ comme le montre la figure 2.31. À la fin du déchargement du camion, l'enlèvement du poteau en pointillé laisse les trois autres dans une position telle qu'ils sont juste en équilibre, c'est-à-dire que si θ était légèrement plus petit, les poteaux tomberaient à côté les uns des autres. Trouver θ.

Figure 2.31



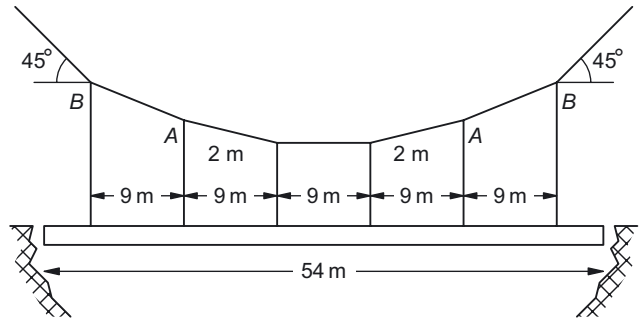
Exercice 2.34 Une corde entoure une bobine de poids w et de rayons r et R, qui est suspendue à un support fixe par deux cordes entourant le plus petit rayon. Un poids W est suspendu par deux cordes entourant le plus grand rayon, comme sur la figure 2.32. W est tel que le système soit en équilibre. Trouver la valeur de W.

Figure 2.32



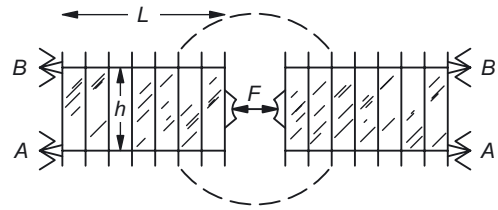
Exercice 2.35 Un pont suspendu doit enjamber une vallée profonde, d'une largeur de 54 m. Le passage routier est constitué d'un tablier en acier maintenu par six paires de câbles verticaux espacés de 9 m les uns des autres, comme sur la figure 2.33. Chaque câble doit supporter la même part du poids total de $4{,}8 \times 10^4$ kg. Les deux paires de câbles les plus proches du centre sont d'une longueur de 2 m. Trouver la longueur des autres câbles verticaux A et B ainsi que la tension maximale $T_{\max}$ dans les deux câbles longitudinaux si, à leurs extrémités, ces derniers doivent être à 45° de l'horizontale.

Figure 2.33



Exercice 2.36 La structure de soutien isolante d'un Tandem Van de Graaff peut être représentée comme sur la figure 2.34 : deux blocs de densité uniforme, de longueur L, de hauteur h et de poids W, soutenus par des cloisons verticales sont maintenus par des joints articulés (A et B) et séparés par un cric à vis (F) disposé entre eux. Étant donné que le matériau des blocs ne peut résister à de la tension, le cric doit être ajusté de façon à ce que la force exercée sur le joint articulé du haut soit nulle.

Figure 2.34



(a) Quelle force F est nécessaire ?

(b) Quelle est la force totale (en grandeur et en direction) $\boldsymbol{F}_A$ sur un support du bas A ?

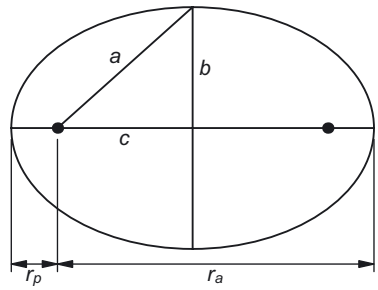
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

3. Loi de Kepler et gravitation

On se réfèrera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1, Chap. 7.

Exercice 3.1 Quelques propriétés de l'ellipse. La taille et la forme d'une ellipse sont déterminées en se donnant deux des grandeurs suivantes (voir la figure 3.1) :

Figure 3.1



a : le demi grand axe

b : le demi petit axe

c : la distance d'un foyer au centre

e : l'excentricité

r_p : la distance du périhélie (ou périgée) (plus courte distance entre un foyer et l'ellipse)

r_a : la distance de l'aphélie (ou apogée) (plus grande distance entre un foyer et l'ellipse)

Ces quantités sont reliées par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2, \\ e &= c/a \quad \text{(définition de } e\text{)}, \\ r_p &= a - c = a(1-e), \\ r_a &= a + c = a(1+e). \end{aligned}$$

Montrer que l'aire de l'ellipse est donnée par $A = \pi ab$.

Exercice 3.2 La distance de la Lune au centre de la Terre varie entre 363 300 km au perigée et 405 500 km à l'apogée, et sa période est de 27,322 jours. Un satellite artificiel de la Terre est sur une orbite telle que son périgée par rapport à la surface de la Terre soit de 225 km, et son apogée de 710 km. Le diamètre moyen de la Terre est 12 756 km. quelle est la période sidérale T de ce satellite ?

Exercice 3.3 L'excentricité de l'orbite terrestre est de 0,0167. Trouver le rapport $v_{\max}/v_{\min}$ entre sa vitesse maximale et sa vitesse minimale sur son orbite.

Exercice 3.4 Les rayons de la Terre et de la Lune sont de 6 378 km et 1 738 km, respectivement, et leurs masses sont dans un rapport de 81,3 à 1. Calculer l'accélération de la pesanteur g_{Lune} à la surface de la Lune. ($g_{\text{Terre}} = 9{,}81\ \text{m s}^{-2}$.)

Exercice 3.5 En 1986, la comète de Halley a effectué son septième voyage autour du Soleil depuis 1456 lorsque les gens avaient été si terrifiés qu'ils faisaient d'abondantes prières dans les églises « pour être sauvés du Diable, des Turcs et de la comète ». (NdT : les Turcs venaient d'envahir la Hongrie ; la comète reviendra en 2061.) Lors de son précédent périhélie, le 19 avril 1910, elle est passée à une distance de 0,60 UA du Soleil.

(a) À quelle distance r_a s'éloigne-t-elle du Soleil à l'autre extrémité de son orbite ?

(b) Quel est le rapport $v_{\text{max}}/v_{\text{min}}$ entre ses vitesses orbitales maximale et minimale ?

Exercice 3.6 Un satellite en orbite circulaire autour de la Terre a une période d'environ 100 minutes. Quel est le rayon r de son orbite (en unités de rayon terrestre, r_{Terre}) pendant une période de 24 heures ?

Exercice 3.7 Soient deux satellites terrestres de même rayon orbital. L'un est sur une orbite polaire, l'autre dans le plan de l'équateur. Lequel des deux a eu besoin d'une fusée de poussée plus forte que l'autre, et pourquoi ?

Exercice 3.8 Un satellite géostationnaire « Syncom » tourne de façon synchrone avec la Terre. Il demeure en permanence en position fixe par rapport à tout point P de la surface terrestre.

(a) Soit la ligne droite reliant le centre de la Terre et le satellite. Si le point P est sur l'intersection de cette droite avec la surface de la Terre, P peut-il avoir une latitude λ quelconque, ou bien existe-t-il des restrictions ? Expliquer pourquoi.

(b) Quelle est la distance r_s entre le centre de la Terre et un satellite Syncom de masse m ? Exprimer r_s en unités de la distance Terre-Lune $r_{\text{TerreLune}}$

Note : On considèrera que la Terre est une sphère uniforme. On peut utiliser $T_{\text{Lune}} =$ 27 jours comme période de la Lune.

Exercice 3.9

(a) En comparant les données sur le mouvement orbital de la Terre autour du Soleil et sur celui de la Lune autour de la Terre déterminer la masse du Soleil m_{Soleil} par rapport à celle de la Terre m_{Terre}.

(b) Io, une lune de Jupiter, a une période de révolution orbitale de 1,769 jour et un rayon orbital de 421 800 km. Déterminer la masse de Jupiter m_{Jupiter} par rapport à celle de la Terre.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 3.10 Deux étoiles, a et b, tournent l'une autour de l'autre sous l'influence de leur attraction gravitationnelle mutuelle. Si le demi grand axe de leur orbite relative est de longueur R, mesuré en unités astronomiques (UA) et que leur période de révolution est de T années, trouver une expression pour la somme de leurs masses, $m_a + m_b$, en fonction de la masse du Soleil m_{Soleil}.

Exercice 3.11 Si l'attraction gravitationnelle entre une très grande sphère centrale M et un satellite de masse m en orbite autour d'elle était en réalité $\boldsymbol{F} = -GMm\boldsymbol{R}/R^{(3+a)}$, (où $\boldsymbol{R}$ est le rayon vecteur entre les deux) comment les deuxième et troisième lois de Kepler seraient-elles modifiées ? (Pour la troisième loi, on supposera l'orbite circulaire.)

Exercice 3.12 En effectuant des mesures de g en laboratoire, de quelle précision a-t-on besoin pour pouvoir détecter les variations diurnes Δg dues à l'attraction de la Lune ? Pour simplifier, on supposera que le laboratoire est situé de telle façon que le Lune passe au zénith et au nadir, et on ne tiendra pas compte de l'accélération de la Terre par l'attraction gravitationnelle de la Lune.

Exercice 3.13 Une étoile binaire à éclipses est telle que son plan contient la ligne de visée, si bien qu'une étoile éclipse l'autre périodiquement. La vitesse relative des deux étoiles peut se mesurer par effet Doppler de leurs raies spectrales. Si T est la période observée, en jours, et V la vitesse orbitale en $\mathrm{km\,s^{-1}}$, quelle est la masse totale M du système binaire en unités de masse solaire ?

Note : La distance moyenne de la Terre au Soleil est de $1{,}5 \times 10^8$ km.

Exercice 3.14 Une comète orbite autour du Soleil avec un périhélie de $r_p = 1{,}00 \times 10^6$ km. À ce point de sa trajectoire, sa vitesse est de $v = 500\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

(a) Quel est le rayon de courbure R_c de l'orbite au périhélie (en km) ?

(b) Pour une ellipse de demi grand axe a et demi petit axe b, le rayon de courbure au périhélie est $R_c = b^2/a$. En connaissant R_c et r_p on doit pouvoir écrire une relation reliant a à ces seules autres grandeurs. Établir la relation et trouver a.

(c) Si l'on peut calculer a à partir de ces données, on doit pouvoir calculer la période T_c de la comète. Faites-le.

Exercice 3.15 En se disant que deux corps gravitant l'un par rapport à l'autre « tombent » l'un vers l'autre, et se déplacent donc par rapport à un point fixe (leur centre de masse), montrer que leur période sur une orbite telle qu'ils restent constamment à la même distance l'un de l'autre ne dépend que de la somme de leurs masses $M + m$ et non du rapport de ces masses. C'est également vrai pour des orbites elliptiques. En supposant que les demi grands axes des ellipses des deux corps sont R et r, trouver la période T de leur orbite.

Exercice 3.16 Comment peut-on trouver la masse de la Lune ?

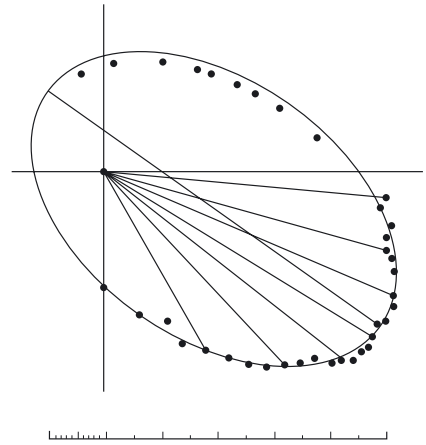
Exercice 3.17 Le parallaxe trigonométrique de Sirius (c'est-à-dire l'angle de l'orbite terrestre vue de Sirius) est de 0,378 degrés d'arc. En utilisant cette information et les données contenues sur la figure 3.2, déduire le mieux possible la masse M du système de Sirius par rapport à la masse du Soleil,

(a) en supposant que le plan de l'orbite est perpendiculaire à la ligne de visée, puis,

(b) en tenant compte d'une inclinaison de cette orbite.

La valeur trouvée en (b) ci-dessus est-elle une borne supérieure ou inférieure (ou les deux) ?

Figure 3.2



4. Cinématique

On se reportera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1, Chap. 8.

Exercice 4.1

(a) Un corps se déplace en ligne droite avec une accélération constante. À $t = 0$, il est situé en $x = x_0$ et a une vitesse $v_x = v_{x0}$. Montrer que sa position et sa vitesse à l'instant t sont :

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}at^2,$$
$$v_x(t) = v_{x0} + at.$$

(b) Éliminer t des équations précédentes et montrer qu'à tout instant :

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a(x - x_0).$$

Exercice 4.2 Généraliser le problème précédent à un mouvement tridimentionnel avec une accélération constante de composantes a_x, a_y, a_z suivant les trois axes. Montrer que :

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(a)

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2, \\ y(t) &= y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2, \\ z(t) &= z_0 + v_{z0}t + \frac{1}{2}a_z t^2, \\ v_x(t) &= v_{x0} + a_x t, \\ v_y(t) &= v_{y0} + a_y t, \\ v_z(t) &= v_{z0} + a_z t. \end{aligned}$$

(b)

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_0^2 + 2\left[a_x(x - x_0) + a_y(y - y_0) + a_z(z - z_0)\right],$$

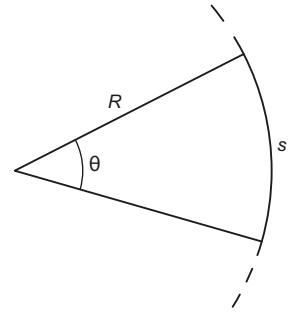
où

$$v_0^2 = v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + v_{z0}^2.$$

Exercice 4.3 Un angle peut être mesuré par la longueur d'un arc de cercle qu'il sous-tend, ou par l'écartement angulaire de la pointe qu'il définit au centre du cercle. Si s est la longueur de l'arc de cercle et R le rayon du cercle, comme sur la figure 4.1, alors l'angle sous-tendu θ est, en radians,

$$\theta = s/R.$$

Figure 4.1



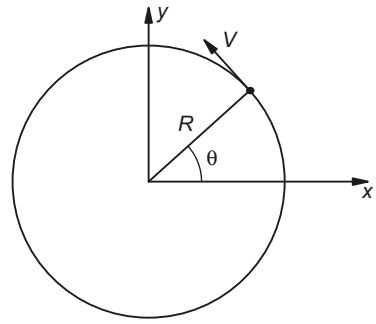
(a) Montrer que, si $\theta \ll 1$ radian, $\sin\theta \approx \theta$, et $\cos\theta \approx 1$.

(b) Avec les résultats précédents, et les formules du sinus et du cosinus d'une somme de deux angles, trouver les dérivées de $\sin x$ et de $\cos x$, en utilisant la formule fondamentale

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

Exercice 4.4 Un objet se déplace dans le sens inverse des aiguilles d'une montre sur un cercle de rayon R à une vitesse constante V, comme sur la figure 4.2. Le centre du cercle est à l'origine de coordonnées cartésiennes (x,y), et à l'instant $t = 0$ la particule est en $(R,0)$.

Figure 4.2



Montrer que :

(a)

$$x = R\cos\omega t,$$
$$y = R\sin\omega t,$$
$$v_x = -V\sin\omega t,$$
$$v_y = V\cos\omega t,$$
$$a_x = -\frac{V^2}{R}\cos\omega t,$$
$$a_y = -\frac{V^2}{R}\sin\omega t,$$
$$a = \frac{V^2}{R},$$

(b)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$
$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

où $\omega = V/R =$ est la fréquence angulaire.

Exercice 4.5 Un ballon Skyhook emportant une installation scientifique s'élève à une vitesse de 300 mètres par minute. À une altitude de 10 000 mètres le ballon éclate et son chargement tombe en chute libre. (De tels désastres se produisent *vraiment* !)

(a) Pendant quelle durée t le chargement a-t-il quitté le sol ?

(b) Quelle était sa vitesse v lors de l'impact ?

On négligera la résistance de l'air.

Exercice 4.6 Un train peut accélérer avec une accélération de $20\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$ et freiner avec une décélération de $100\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$. Quel est le temps minimum t que le train met pour aller d'une station à une autre distante de 2 km.

Exercice 4.7 Si l'on jette une petite balle verticalement dans de l'air réel, avec résistance, met-elle plus de temps à monter ou à descendre ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 4.8 Soit un point de la surface de la Terre situé sur l'équateur :

(a) Quelle est sa vitesse relative v par rapport au centre de la Terre ?

(b) Quelle est sa fréquence angulaire ω ?

(c) Quel est le rapport entre son accélération radiale a provenant du mouvement circulaire et l'accélération de la pesanteur g ?

Exercice 4.9 Une fusée Corporal tirée verticalement a eu une accélération verticale constante de $2g$ pendant la combustion de son carburant, qui a duré 50 secondes. En négligeant la résistance de l'air et la variation de g avec l'altitude,

(a) Dessiner un diagramme v-t pour l'ensemble du voyage de la fusée.

(b) Calculer la hauteur maximum atteinte $H_{\max}$.

(c) Calculer le temps total T écoulé entre la mise à feu de la fusée et son retour sur Terre.

Exercice 4.10 Lors d'une expérience de cours, une petite bille d'acier rebondit sur une plaque en acier. À chaque rebond sur la plaque, la vitesse de la bille est réduite d'un facteur e dans le rebond, c'est-à-dire $v_{\text{haut}} = ev_{\text{bas}}$.

Si la bille a été initialement lâchée d'une hauteur de 50 cm au-dessus de la plaque à l'instant $t = 0$, et si 30 secondes plus tard un micro laisse entendre que tout rebond a cessé, quelle était la valeur de e ?

Exercice 4.11 Un projectile est tiré au-dessus d'un terrain horizontal à une vitesse initiale v_0, à un angle θ avec l'horizontale. (On néglige la résistance de l'air.)

(a) Trouver la hauteur maximum atteinte $H_{\max}$ et la portée R.

(b) À quel angle ce projectile doit-il être tiré pour atteindre sa portée maximale ?

Exercice 4.12 Un champion de tir à l'arc atteint le centre d'une cible montée sur un mur à une distance L et à une hauteur h au-dessus de son arc. En déduire la relation entre la vitesse V à laquelle la flèche a quitté l'arc, l'angle initial de la flèche avec l'horizontale θ, la hauteur et la distance de la cible que le tireur connaissait avant de tirer, bien évidemment.

Note : Le tireur n'a pas négligé la résistance de l'air, mais vous pouvez le faire.

Exercice 4.13 Un garçon jette une balle en l'air à un angle de 70° avec l'horizontale, et elle passe à l'horizontale par une fenêtre ouverte, à 10 mètres au-dessus de son épaule.

(a) Quelle était la vitesse v de la balle lorsqu'elle a quitté sa main ?

(b) Quel était le rayon de courbure R de sa trajectoire lorsqu'elle est passée par la fenêtre ?

Pouvez-vous trouver le rayon de courbure de la trajectoire à tout instant ?

Exercice 4.14 Un petit caillou est coincé dans le dessin d'un pneu de rayon R. Si ce pneu roule à une vitesse V sans glisser sur une route horizontale, et que le caillou touche

la route à l'instant $t = 0$, où ses coordonnées sont x (horizontale) et y (verticale) nulles, trouver les équations pour les composantes x et y de :

(a) la position du caillou ;

(b) sa vitesse $\boldsymbol{v}$;

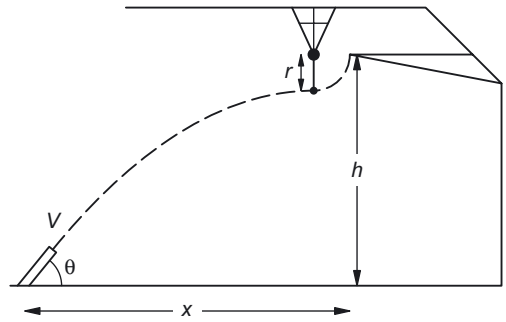
(c) et son accélération $\boldsymbol{a}$;

en fonction du temps.

Exercice 4.15 Le conducteur d'une voiture suit un camion lorsqu'il s'aperçoit qu'une pierre est coincée entre deux des pneus arrières du camion. Comme c'est un conducteur prudent (et aussi un physicien) il accroît immédiatement la distance qui le sépare du camion à 22,5 mètres, pour ne pas être heurté par la pierre si elle devait se détacher. À quelle vitesse v le camion roulait-il ? (On supposera que la pierre ne rebondit pas sur la chaussée.)

Exercice 4.16 Un artiste de cirque était en train de monter un nouveau numéro. Il voulait combiner le boulet de canon humain avec une acrobatie de trapèze. Il sortait de son canon à une vitesse V. Son objectif était de monter suffisamment haut pour pouvoir attrapper le trapèze ($r = 2\,\text{m}$) puis continuer jusqu'à une plate-forme située à une hauteur $h = 20\,\text{m}$ au-dessus du sol, comme le montre la figure 4.3. (La vitesse verticale du trapèze doit être nulle à la fois en r et en h).

Figure 4.3



(a) À quel angle θ le canon doit-il être orienté ?

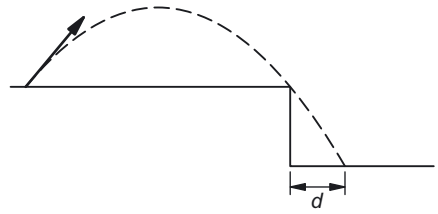
(b) À quelle distance x de la plate-forme, sous la tente, doit-il mettre le canon ?

(c) Quelle valeur de V doit-il choisir ?

Exercice 4.17 L'emplacement d'un mortier est disposé à 8 000 m horizontalement du bord d'une falaise de 100 m de haut, comme sur la figure 4.4. On veut détruire des objets cachés par terre en bas de la falaise. Quelle est la plus petite distance horizontale d de la falaise que les obus peuvent atteindre s'ils sont tirés à une vitesse de $300\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Figure 4.4



Exercice 4.18 Un jeune étudiant de Caltech, qui n'avait jamais eu affaire aux agents de la circulation en banlieue, venait d'avoir une contravention pour excès de vitesse. Par conséquent, en passant devant un dispositif de « Vérification de Compteur de vitesse », il décide de vérifier les indications de son compteur. En passant le point « 0 » de la zone marquée, il appuie sur son accélérateur et pendant tout le temps de l'essai il maintient son véhicule à une accélération constante. Il remarque qu'il passe devant le point « 160 m » 16 s après avoir commencé le test, et 8 s plus tard il passe devant le point « 320 m ».

(a) Quelle vitesse v son compteur devrait-il indiquer au point 320 m ?

(b) Quelle était son accélération a ?

Exercice 4.19 Sur la longue piste d'essais de la base aérienne d'Edwards, on peut tester aussi bien des fusées que des moteurs à réaction. Un jour, un moteur de fusée, démarrant à l'arrêt, prit une accélération constante jusqu'à l'épuisement de son carburant, après quoi il roula à une vitesse constante. On remarqua que l'épuisement du combustible se produisit lorsque la fusée passa au milieu de la distance mesurée du test. On mit ensuite un moteur à réaction, initialement au repos, avec une accélération constante pendant l'intégralité de cette distance. On observa que la fusée et le moteur à réaction avaient mis exactement le même temps pour parcourir cette distance. Quel était le rapport de l'accélération a_R de la fusée et celle a_J du moteur à réaction ?

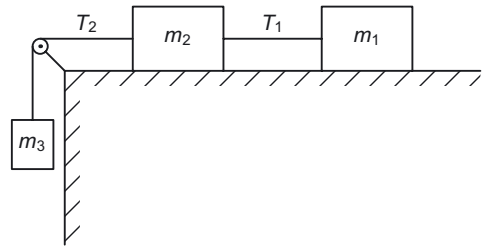
5. Lois de Newton

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1, Chap. 9.

Les exercices 5.1–5.13 doivent être traités de manière analytique.
Les exercices 5.14–5.17 doivent être traités par des méthodes numériques.

Exercice 5.1 Deux blocs de masse $m_1 = 1\,\text{kg}$ et $m_2 = 2\,\text{kg}$ sur une surface horizontale, reliés par un fil, sont tirés par un autre fil attaché à une masse $m_3 = 2\,\text{kg}$ et passant sur une poulie, comme le montre la figure 5.1. On négligera les frottements et les masses des fils et de la poulie.

Figure 5.1



(a) Esquisser des diagrammes de corps libres pour toutes ces masses, en montrant les forces en action.

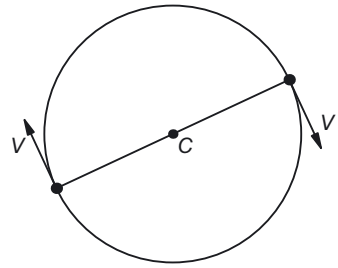
(b) Trouver l'accélération a des masses.

(c) Déterminer les tensions T_1 et T_2 dans les fils.

Exercice 5.2 Une masse m (kg) est pendue au bout d'une corde elle-même suspendue à un ascenseur qui descend avec une accélération de $0{,}1g$. Quelle est la tension T de la corde en newtons ?

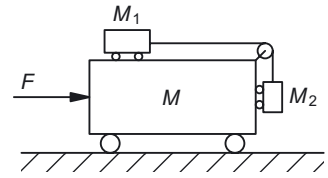
Exercice 5.3 Deux objets de masse égale $m = 1\,\text{kg}$, reliés par un fil tendu de longueur $L = 2\,\text{m}$, sont en mouvement circulaire à une vitesse constante $V = 5\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ autour de leur centre C dans un environnement de zéro-g, comme sur la figure 5.2. Quelle est la tension de la corde T en newtons ?

Figure 5.2



Exercice 5.4 En se reportant à la figure 5.3 : quelle force horizontale F doit être appliquée constamment à M pour que M_1 et M_2 ne se déplacent pas par rapport à M ? On négligera les frottements.

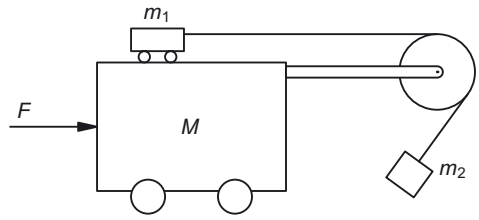
Figure 5.3



Exercice 5.5 En se reportant à la figure 5.4 : Quelle force horizontale F doit être appliquée en permanence à $M = 21\,\text{kg}$ de façon que $m_1 = 5\,\text{kg}$ ne bouge pas par rapport à $m_2 = 4\,\text{kg}$. On négligera les frottements.

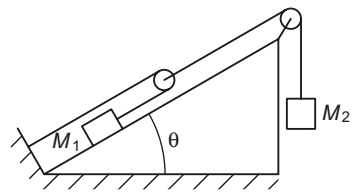
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Figure 5.4



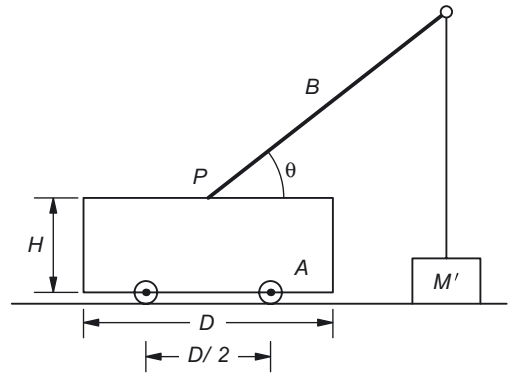
Exercice 5.6 Dans le système de la figure 5.5, M_1 glisse sans frottements sur le plan incliné : $\theta = 30°$, $M_1 = 400$ g, $M_2 = 200$ g. Trouver l'accélération $\boldsymbol{a}$ de M_2 et la tension T dans les cordes.

Figure 5.5



Exercice 5.7 Une grue très simple est constituée de deux parties. La partie « A » de masse M_A, de longueur D, de hauteur H, avec une distance $D/2$ entre les roues de rayon r ; et la partie « B » est une tige uniforme de longueur L et de masse M_B. La grue est montrée assemblée sur la figure 5.6, avec le point de pivot P au milieu du haut de A. Le centre de gravité de A est à mi-chemin entre les deux roues.

Figure 5.6



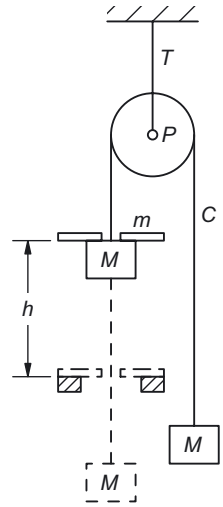
(a) Si la tige B fait un angle θ avec l'horizontale, quelle est la masse maximum $M_{\max}$ que la grue peut soulever sans se renverser ?

(b) S'il y a une masse $M' = (4/5)M_{\max}$ au bout de la corde, quel est le temps minimum t nécessaire pour élever cette charge M' d'une distance $(L \sin \theta)$ du sol ? (L'angle θ reste fixe, et la masse de la corde peut être négligée.)

Exercice 5.8 Un dispositif ancien pour mesurer l'accélération de la pesanteur, appelé la machine d'Attwood, est montré sur la figure 5.7. La poulie P et la corde C ont une masse et des frottements négligeables. Le système est équilibré par deux masses égales M de chaque côté comme il est indiqué (trait), puis un petit cavalier m est ajouté d'un côté. Les masses ainsi combinées accélèrent sur une certaine distance h, le cavalier

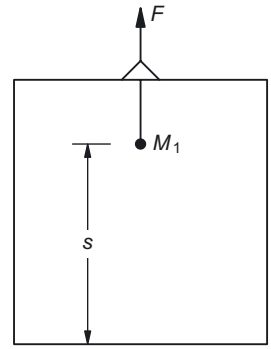
est alors bloqué par un anneau et les deux masses égales se déplacent à vitesse constante v. Trouver la valeur de g qui correspond aux valeurs mesurées de m, M, h, et v.

Figure 5.7



Exercice 5.9 Un ascenseur de masse M_2 a, pendue à son plafond, une masse M_1, comme le montre la figure 5.8. L'ascenseur est accéléré vers le haut par une force constante F. (F est supérieure à $(M_1 + M_2)g$.) La masse M_1 est initialement à une distance s au-dessus du sol de l'ascenseur.

Figure 5.8



(a) Trouver l'accélération a_0 de l'ascenseur.

(b) Quelle est la tension T dans le fil qui relie la masse M_1 à l'ascenseur ?

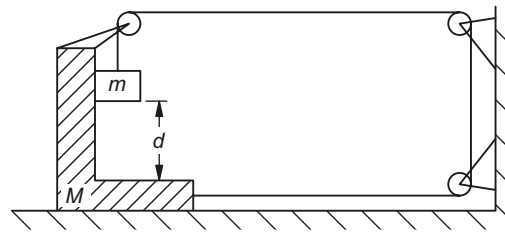
(c) Si le fil se casse soudainement, quelle est l'accélération a de l'ascenseur immédiatement après, et quelle est l'accélération a' de la masse M_1 ?

(d) Combien de temps t faut-il pour que M_1 heurte le plancher de l'ascenseur ?

Exercice 5.10 Soit le système de la figure 5.9, où l'on considérera que toutes les surfaces sont sans frottements. Si une masse $m = 150\,\text{g}$ est relâchée à une distance $d = 1\,\text{m}$ au-dessus de la base de $M = 1650\,\text{g}$, au bout de combien de temps, Δt, m va-t-elle atteindre la base de M ?

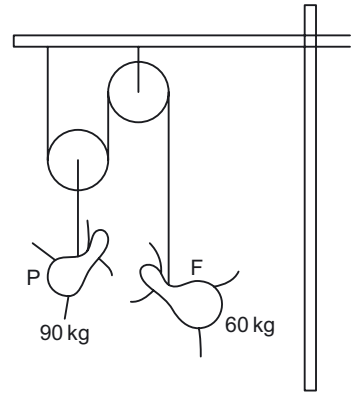
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Figure 5.9



Exercice 5.11 Aucune des gondoles identiques du canal Martien Rimini ne peut porter en même temps le poids de Paolo et Francesca, deux marsupiaux pleins de tendresse qui refusent d'être dans des bateaux différents. Le gondolier en chef, Giuseppe, accepte de les prendre tous deux à bord en les attachant au mât comme sur la figure 5.10, à l'aide de cordes sans masse et de poulies sans frottements qui sont des éléments typiques de la construction martienne. Il les fait traverser avant qu'ils n'atteignent le mât ou le pont. En supposant que la masse de Paolo est de 90 kg et celle de Francesca de 60 kg, quelle est l'économie de charge W réalisée par Giuseppe ?

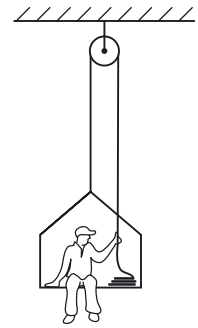
Figure 5.10



Suggestion : La tension d'une corde sans masse qui passe sur une poulie sans masse ni frottement, est la même des deux côtés de la poulie.

Exercice 5.12 Un peintre travaille sur une plate-forme suspendue le long d'un bâtiment élevé comme sur la figure 5.11. Voulant se déplacer rapidement, le peintre de 80 kg tire sur la corde de suspension si fort qu'il n'exerce sur la plate-forme qu'une force de 45 kg. La plate-forme elle-même pèse 15 kg.

Figure 5.11

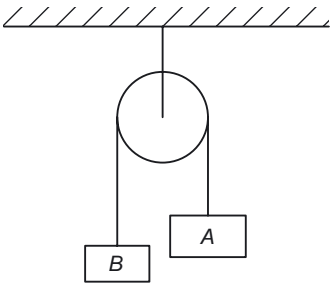


(a) Quelle est l'accélération $\boldsymbol{a}$ du peintre et de la plate-forme ?

(b) Quelle est la force totale F exercée sur la poulie ?

Exercice 5.13 Un voyageur spatial sur le point de partir pour la Lune a une balance à ressort et un objet A d'une masse de 1,0 kg, qui, lorsqu'on le pose sur la balance à Terre indique un poids de 9,8 N. En arrivant sur la Lune à un endroit où l'accélération de la pesanteur n'est pas connue avec exactitude mais a une valeur d'environ un sixième de l'accélération de la pesanteur sur Terre, il ramasse une pierre B qui indique un poids de 9,8 N sur la balance. Il suspend alors A et B sur une poulie comme indiqué sur la figure 5.12 et observe que B tombe avec une accélération de $1{,}2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Quelle est la masse m_B de la pierre B ?

Figure 5.12



- *Utiliser des méthodes numériques pour les exercices suivants*

Exercice 5.14 Une masse suspendue à un ressort au repos reçoit un coup dirigé vers le haut tel qu'elle se déplace verticalement à une vitesse unité (autrement dit égale à l'unité de masse du calcul). Si la masse et la constante de rappel du ressort sont telles que l'équation du mouvement est $\ddot{x} = -x$, trouver la hauteur maximum $x_{\max}$ que cette masse atteint en intégrant numériquement l'équation du mouvement.

Exercice 5.15 Une particule de masse m se déplace en ligne droite. Son mouvement est freiné par une force proportionnelle à sa vitesse, $F = -kv$. Initialement, sa vitesse est $v = v_0$ en $x = 0$ et à $t = 0$.

(a) Trouver x en fonction de t par une intégration numérique.

(b) Trouver le temps $t_{\frac{1}{2}}$ tel que la vitesse soit réduite de moitié, ainsi que la distance maximum $x_{\max}$ atteinte par la particule.

Notes :

(a) Ajuster les échelles de x et t de telle façon que l'équation du mouvement ait des coefficients numériques simples.

(b) Inventer un algorithme tel que l'on ait une bonne précision avec un découpage en temps Δt assez grossier.

(c) Utiliser l'analyse dimensionnelle pour trouver de quelle façon $t_{\frac{1}{2}}$ et $x_{\max}$ dépendent de v_0, k, et m, et effectuer la résolution pour une seule valeur adaptée de v_0, par exemple $v_0 = 1{,}00$ (dans les unités modifiées de x et t).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 5.16 Une particule chargée se déplace dans un champ électrique et un champ magnétique suivant les équations :

$$\frac{dv_x}{dt} = -2v_y,$$
$$\frac{dv_y}{dt} = 1 + 2v_x.$$

À $t = 0$ la particule est en $x = 0$, $y = 0$ avec une vitesse $v_x = 1{,}00$, $v_y = 0$. Déterminer la nature du mouvement par intégration numérique.

Exercice 5.17 Un obus est tiré à une vitesse (de sortie du canon) de $v = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ à un angle de 45° avec l'horizontale. Une force proportionnelle au cube de sa vitesse s'oppose à son mouvement ($F = -kv^3$). Le coefficient k est tel que la force de résistance est égale au double du poids de l'obus si $v = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Trouver approximativement la hauteur maximum $h_{\max}$ atteinte par l'obus, ainsi que la portée horizontale R, par intégration numérique. Comparer ces valeurs avec celles obtenues en l'absence de résistance.

6. Conservation de l'impulsion

On se réfèrera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1, Chap. 10.[1]

Exercice 6.1 Lorsque deux corps se déplacent sur une ligne droite, il existe un système de coordonnées particulier dans lequel l'impulsion d'un des corps est l'opposée de celle de l'autre. Autrement dit, l'impulsion totale est nulle. Ce référentiel est appelé le référentiel du centre de masses (CM en abrégé). Si les deux corps ont des masses m_1 et m_2 et se déplacent à des vitesse v_1 et v_2, montrer que le référentiel du CM se déplace à la vitesse

$$v_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Exercice 6.2 Généraliser l'exercice 6.1 à un nombre quelconque de masses se déplaçant sur une ligne droite, c'est-à-dire montrer que le référentiel dans lequel l'impulsion totale est nulle est donné par

$$v_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum m_i v_i}{\sum m_i}.$$

Exercice 6.3 Si T est l'énergie cinétique totale des deux masses de l'exercice 6.1, et T_{CM} leur énergie cinétique totale dans le système du CM, montrer que

$$T = T_{\mathrm{CM}} + \left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right) v_{\mathrm{CM}}^2.$$

1. NdT Nous adoptons le terme « Impulsion », moment conjugué de Lagrange, plutôt que celui de « Quantité de mouvement », c'est-à-dire produit de la masse par la vitesse. Dans les cas simples, ces deux grandeurs sont les mêmes. Quand elles diffèrent, par exemple en présence d'un champ magnétique, c'est l'impulsion qui obéit aux lois de conservation.

Exercice 6.4 Généraliser le résultat de l'exercice 6.3 à un nombre quelconque de masses.
Montrer que

$$T = T_{\mathrm{CM}} + \frac{\sum m_i}{2} v_{\mathrm{CM}}^2.$$

Exercice 6.5 Deux aéroglisseurs de masses m_1 et m_2 sont libres de se déplacer sur un rail aérien horizontal. m_1 entre en collision avec m_2, initialement à l'arrêt, de façon parfaitement élastique. Ils rebondissent avec des vitesses égales et opposées. Quel est le rapport m_2/m_1 de leurs masses ?

Exercice 6.6 Un neutron d'énergie E a une collision frontale avec un noyau de C^{12} au repos, et rebondit de façon élastique dans le direction d'où il venait. Quelle est son énergie cinétique finale E' ?

Exercice 6.7 Un projectile de masse $m = 10\,\mathrm{kg}$ est tiré verticalement depuis la Terre avec une vitesse initiale $v_p = 500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

(a) Calculer la vitesse de recul de la Terre v_E.

(b) Calculer le rapport entre l'énergie cinétique de la Terre T_E et celle du projectile T_p au moment de leur séparation.

(c) Décrire qualitativement la vitesse et l'énergie cinétique du projectile et de la Terre en fonction du temps.

On négligera la résistance de l'air et le mouvement orbital de la Terre.

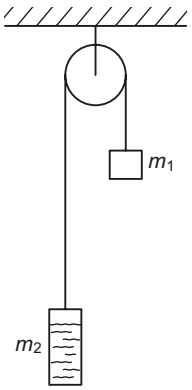
Exercice 6.8 Une particule de masse $m = 1\,\mathrm{kg}$, se déplaçant à une vitesse de $V = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, entre en collision avec une particule au repos de masse $M = 4\,\mathrm{kg}$ et rebondit dans la direction d'où elle venait, avec une vitesse V_{F}. Si une quantité de chaleur $h = 20$ joules est produite dans la collision, quelle est la valeur de V_{F} ? (Définir toutes les quantités entrant en jeu et énoncer clairement de quelles lois proviennent les équations que vous écrivez.)

Exercice 6.9 Une mitrailleuse montée sur l'extrémité nord d'une plate-forme de 10 000 kg, et de 5 m de long, libre de se mouvoir sur un coussin d'air, tire des balles dans une cible épaisse montée sur l'extrémité sud de la plate-forme. La mitrailleuse tire dix balles de 100 g chacune avec une vitesse (à la sortie du canon) de $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Est-ce que la plate-forme bouge ? Si oui, dans quelle direction et à quelle vitesse v ?

Exercice 6.10 Une masse m_1 est connectée, par un câble passant sur une poulie, à un réservoir d'eau de masse initiale $m_2(t = 0) = m_0$, comme sur la figure 6.1. Le système est lâché et m_2 (avec l'aide d'une pompe externe) éjecte de l'eau vers le bas à un taux constant $dm/dt = r_0$ à une vitesse v_0 par rapport au réservoir. Trouver l'accélération $\boldsymbol{a}$ de m_1, en fonction du temps. Négliger les masses du câble et de la poulie.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

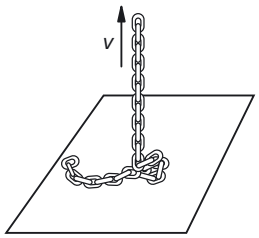
Figure 6.1



Exercice 6.11 Un toboggan descend sur une pente essentiellement sans frottements, couverte de neige, en ramassant de la neige le long du trajet. Si l'inclinaison de la pente est de 30° et que le toboggan ramasse 0,50 kg de neige par mètre parcouru, calculer son accélération a à un instant où sa vitesse est de 4,0 m s^{-1} et sa masse (y compris la neige) de 9,0 kg.

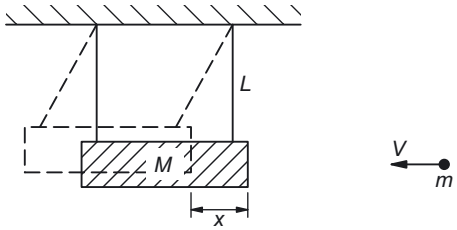
Exercice 6.12 L'extrémité d'une chaîne, de masse linéaire μ, au repos sur une table à $t = 0$, est soulevée verticalement à une vitesse constante v, comme le montre la figure 6.2. Évaluer la force exercée vers le haut F en fonction de temps.

Figure 6.2



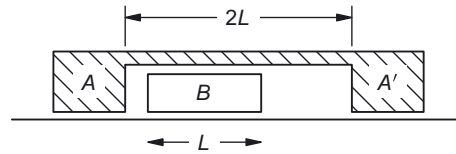
Exercice 6.13 La vitesse de la balle d'une carabine peut être mesurée à l'aide d'un pendule balistique : la balle, de masse m connue et de vitesse V inconnue, s'encastre dans un bloc de bois à l'arrêt de masse M, suspendu comme un pendule de longueur L (voir la figure 6.3). Cela met le bloc de bois en mouvement pendulaire. L'amplitude x du mouvement peut être mesurée et, par conservation de l'énergie, on mesure ainsi la vitesse du bloc juste après l'impact. Donner l'expression de la vitesse de la balle en fonction de m, M, L, et x.

Figure 6.3



Exercice 6.14 Deux aéroglisseurs A et A' sont reliés de façon rigide et ont une masse totale M. Ils sont séparés d'une distance $2L$. Un autre aéroglisseur B de masse m, de longueur L, est contraint à se déplacer entre A et A', comme sur la figure 6.4. Tous les aéroglisseurs se déplacent sur un couloir aérien très long sans frottements. Toutes les collisions entre (A,A') et B sont parfaitement élastiques. Au début, l'ensemble du système est au repos et l'aéroglisseur B est en contact avec l'aéroglisseur A. Une charge placée au contact de A et B explose, ce qui donne une énergie cinétique totale T au système.

Figure 6.4



(a) Montrer les aspects *qualitatifs* du mouvement de B, c'est-à-dire sa position x, sa vitesse v par rapport au sol, en dessinant x et v en fonction du temps. Faire les deux graphiques avec la *même* échelle de temps.

(b) Calculer la période τ_0 à partir de T, L, m, et M.

Aide : La vitesse relative de B par rapport à (A,A') est :

$$\boldsymbol{v}_{\text{rel}} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_{(A,A')}.$$

Exercice 6.15 Deux aéroglisseurs de même masse, se déplaçant sur une piste horizontale avec des vitesses opposées $\boldsymbol{v}$ et $-\boldsymbol{v}$, entrent en collision presque élastique et rebondissent avec des vitesses légèrement inférieures. Ils perdent une fraction $f \ll 1$ de leur énergie cinétique dans la collision. Si l'un d'eux entre en collision avec l'autre initialement au repos, à quelle vitesse se déplacera le second après la collision ? (La petite vitesse résiduelle Δv peut facilement être mesurée à partir de la vitesse finale v de l'aéroglisseur initialement au repos. On peut ainsi déterminer l'élasticité des ressorts des butoirs.)

Note : Si $x \ll 1$, $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$.

Exercice 6.16 Une fusée de masse initiale $m = M_0$ éjecte son combustible usagé à un taux constant $dm/dt = -r_0$ et à une vitesse relative V_0 (par rapport à la fusée).

(a) Calculer l'accélération initiale a de la fusée (on négligera la pesanteur).

(b) Si $V_0 = 2{,}0\,\text{km}\,\text{s}^{-1}$, à quel taux r_0 doit-on éjecter le combustible pour développer une poussée de 10^5 kg-poids ?

(c) Écrire une équation différentielle reliant la vitesse v de la fusée à sa masse résiduelle $m = M$, et résoudre l'équation, si possible.

Exercice 6.17 Un satellite terrestre d'une masse de 10 kg et d'aire apparente $0{,}50\ \text{m}^2$ se déplace sur une orbite circulaire à 200 km d'altitude où les libres parcours moyens moléculaires sont de plusieurs mètres et où la densité de l'air est d'environ

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

$1{,}6 \times 10^{-10}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. À partir de l'approximation, grossière, que les impacts moléculaires avec le satellite sont inélastiques (mais que les molécules ne se collent pas sur le satellite, et rebondissent à faible vitesse),

(a) Calculer la force de freinage F_R que le satellite subirait du fait de la résistance de l'air.

(b) Comment une telle force de frottement doit-elle varier avec la vitesse du satellite v ? La vitesse du satellite va-t-elle diminuer sous l'effet de la force totale qui s'exerce sur lui ? (Vérifier la relation entre la vitesse d'un satellite en orbite circulaire et sa hauteur.)

7. VECTEURS

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1, Chap. 11.

Généraliser les exercices (6.1) à (6.4) à trois dimensions en utilisant une notation vectorielle.

Exercice 7.1 Si deux corps ont des masses m_1 et m_2 et des vitesses $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$, montrer que le système du CM se déplace à la vitesse :

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Exercice 7.2 Montrer que, pour N corps de masses m_i et de vitesses $\boldsymbol{v}_i$, la vitesse du système de coordonnées où l'impulsion totale est nulle est donnée par :

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}.$$

Exercice 7.3 Si T est l'énergie cinétique totale des deux masses dans l'exercice 7.1, et T_{CM} leur énergie cinétique totale dans le système du CM, montrer que

$$T = T_{\mathrm{CM}} + \left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right)|\boldsymbol{v}_{\mathrm{cm}}|^2.$$

Exercice 7.4 Généraliser les résultats de l'exercice 7.3 à N masses. Montrer que

$$T = T_{\mathrm{CM}} + \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i}{2}|\boldsymbol{v}_{\mathrm{cm}}|^2.$$

Exercice 7.5 Une particle est initialement en $\boldsymbol{r}_0$, et se déplace sous l'effet de la pesanteur avec une vitesse initiale $\boldsymbol{v}_0$. Trouver son mouvement ultérieur $\boldsymbol{r}(t)$.

Exercice 7.6 On vous donne trois vecteurs,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{b} &= 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

où $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ forment un trièdre direct orthonormé. Trouver :

(a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (c) $\boldsymbol{a}_x$ (e) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

(b) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ (d) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{i}$ (f) $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$

Exercice 7.7 Une particule d'une masse de 1 kg se déplace de telle façon que son mouvement est décrit par le vecteur :

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (t + t^2/2)\boldsymbol{j} - (4/\pi^2)\sin(\pi t/2)\boldsymbol{k}.$$

(a) Trouver la position, la vitesse $\boldsymbol{v}(t)$, l'accélération $\boldsymbol{a}(t)$, et l'énergie cinétique $T(t)$ de la particule à $t = 0$ et $t = 1$ s.

(b) Trouver la force $\boldsymbol{F}(t)$ qui produit ce mouvement.

(c) Trouver le rayon de courbure $R(t)$ de la trajectoire de la particule à $t = 1$ s.

Exercice 7.8 Un pilote volant à une vitesse par rapport à l'air de $180\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ veut voyager droit vers le Nord. Il sait, par ses conversations avec les météorologues de l'aérodrome, qu'il y a un vent de $45\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ d'Ouest en Est à son altitude de vol.

(a) Dans quelle direction doit-il diriger son avion ?

(b) Quelle sera la durée T de son vol, si sa destination et à 160 km ? (On négligera le temps de décollage et d'atterrissage.)

Exercice 7.9 Un cycliste roule à $15\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ vers le Nord, et le vent, qui souffle à $10\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ d'un point situé entre le Nord et l'Est, paraît, au cycliste, provenir d'un point à 15°-Est du nord.

(a) Trouver la vraie direction du vent.

(b) Trouver la direction que paraîtra avoir le vent au retour du cycliste, s'il roule à la même vitesse.

Exercice 7.10 Un homme assis sur la berge d'une rivière de 1,6 km de large souhaite aller en un point exactement symétrique du sien sur l'autre berge. Il peut le faire de deux façons :

(a) se diriger à contre-courant, de façon que son mouvement résultant soit tout droit.

(b) viser le point auquel il veut arriver sur la berge d'en face, puis marcher le long de la berge depuis le point, en aval, où le courant l'a amené.

S'il nage à $4\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ et qu'il marche à $6\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, et si le courant a une vitesse de $3\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, quelle est la façon la plus rapide de traverser, et de combien ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 7.11 Un bateau à moteur qui se déplace à une vitesse constante V par rapport à l'eau, navigue sur une rivière droite où l'eau s'écoule à une vitesse constante R. Le bateau est d'abord envoyé faire un aller-retour de son point d'amarrage jusqu'à une distance d en amont. Puis on l'envoie faire un aller-retour jusqu'à un point situé à une distance d exactement perpendiculairement à la rivière. Pour simplifier, nous supposons que pendant tous ses voyages le bateau est à pleine vitesse, et qu'il n'y a pas de délai pour rebrousser chemin. Soit t_V le temps mis pour l'aller-retour dans la direction du courant (deux sens), t_A le temps qu'il met pour effectuer son aller-retour transverse et t_L le temps qu'il mettrait à faire un aller-retour de la même distance $2d$ sur un lac sans courants.

(a) Quel est le rapport t_V/t_A ?

(b) Quel est le rapport t_A/t_L ?

Exercice 7.12 Utiliser des vecteurs pour trouver la distance D sur un grand cercle entre deux points situés sur Terre (rayon = r_{Terre}), dont les latitudes et longitudes sont (λ_1,ϕ_1) et (λ_2,ϕ_2).

Note : Utiliser un système de coordonnées rectangulaire dont l'origine est au centre de la Terre, un axe le long de l'axe de la Terre, un autre passant par $\lambda = 0$, $\phi = 0$, et le troisième orienté suivant $\lambda = 0$, $\phi = 90°$ Ouest. Faites varier les longitudes de 0° vers l'Est à 360°.

Exercice 7.13 Quelles sont la valeur et la direction de l'accélération $\boldsymbol{a}$ de la Lune à

(a) la nouvelle Lune ?

(b) le premier quartier ?

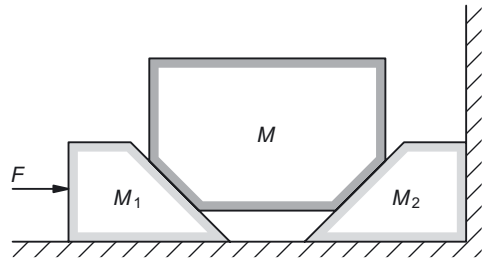
(c) la pleine Lune ?

Note :

$$R_{\text{TerreSoleil}} = 1.50 \times 10^8 \text{ km}$$
$$R_{\text{TerreLune}} = 3.85 \times 10^5 \text{ km}$$
$$M_{\text{Soleil}} = 3.33 \times 10^5 M_{\text{Terre}}$$

Exercice 7.14 Deux cales identiques de 45°, M_1 et M_2, avec des faces lisses et $M_1 = M_2 = 8$ kg, sont utilisées pour déplacer un objet de $M = 384$ kg, comme sur la figure 7.1. Les deux cales reposent sur un plan horizontal lisse. Une cale est poussée contre un mur lisse vertical, on applique à l'autre une force horizontale de $F = 592$ kg-poids.

Figure 7.1



(a) Quelles sont la grandeur et la direction de l'accélération $\boldsymbol{a}_1$ de la cale mobile M_1 ?

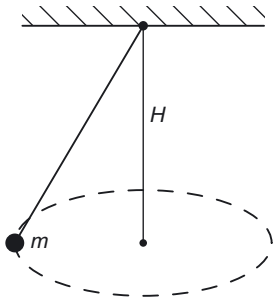
(b) Quelles sont la grandeur et la direction $\boldsymbol{a}$ de la grosse cale M ?

(c) Quelle force F_2 est-ce que la cale immobile M_2 exerce sur la masse M ?

On négligera les frottements.

Exercice 7.15 Une masse m est suspendue à un pivot sans frottement au bout d'un fil de longueur arbitraire. On la met en mouvement circulaire le long d'un plan horizontal à une distance H sous le pivot, comme sur la figure 7.2. Trouver la période de révolution T de la masse en orbite.

Figure 7.2



Exercice 7.16 Deux petites boules de mastic collantes, a et b, chacune d'une masse d'un gramme se déplacent sous l'influence de la pesanteur avec une accélération de $-9.8\,\boldsymbol{k}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Avec les conditions initiales : à $t = 0$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_a(0) &= 7\boldsymbol{i} + 4.9\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{v}_a(0) &= 7\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{r}_b(0) &= 49\boldsymbol{i} + 4.9\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{v}_b(0) &= -7\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j},\end{aligned}$$

trouver $\boldsymbol{r}_a(t)$ et $\boldsymbol{r}_b(t)$ à tout instant $t > 0$.

Exercice 7.17 Vous êtes sur un vaisseau qui avance vers l'Est à $27\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Un bateau d'un mouvement uniforme dont la vitesse est connue : $47\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, apparaît à 10 km au Sud de vous. Plus tard, il passe derrière vous, sa distance au plus près de vous est de 5 km.

(a) Quel est le trajet de cet autre bateau ?

(b) Quel temps T s'est-il écoulé entre son passage au Sud de vous et son passage au plus près de vous ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

8. Collisions à deux corps non-relativistes en trois dimensions

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1, Chap. 10 et 11.

L'analyse des collisions à deux corps est souvent simplifiée si l'on se place dans le système du CM. Considérons le cas général d'une collision non-relativiste dans le système du laboratoire. Deux masses m_1 et m_2 de vitesses $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ entrent en collision. Elles peuvent échanger de la masse pendant la collision, ce qui aboutit, après la collision, à deux masses finales m_3 et m_4 de vitesses $\boldsymbol{v}_3$ et $\boldsymbol{v}_4$, comme le montre la figure 8.1.

Figure 8.1

Les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion donnent les relations suivantes :

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + Q = \tfrac{1}{2}m_3v_3^2 + \tfrac{1}{2}m_4v_4^2$$
$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_3\boldsymbol{v}_3 + m_4\boldsymbol{v}_4.$$

La valeur de Q détermine l'inélasticité du processus de collision. Dans le système du laboratoire, cette méthode d'analyse est souvent encombrante et ne révèle pas toujours les propriétés systématiques et les relations simples. Dans la plupart des cas, il est préférable de se placer dans le système du CM, où le mouvement est en ligne droite, avant comme après la collision.

(i) Déterminer la vitesse du CM :

Avant la collision :

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Après la collision :

$$\boldsymbol{v}'_{\mathrm{CM}} = \frac{m_3\boldsymbol{v}_3 + m_4\boldsymbol{v}_4}{m_3 + m_4}.$$

Remarquons que dans toute collision non-relativiste

$$m_1 + m_2 = m_3 + m_4,$$

si bien que

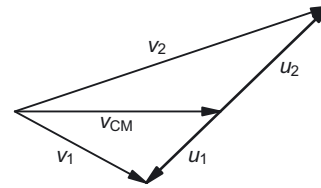
$$\boldsymbol{v}'_{\mathrm{CM}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{CM}}.$$

Dans cette discussion nous allons considérer le *cas particulier* de

$$m_1 = m_3,$$
$$m_2 = m_4.$$

(ii)

Figure 8.2



Trouver les vitesses de m_1 et m_2 dans le système du CM, comme sur la figure 8.2,

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_{\mathrm{CM}},$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_{\mathrm{CM}}.$$

Dans le système du CM, les impulsions des deux masses sont égales et opposées,

$$m_1\boldsymbol{u}_1 = -m_2\boldsymbol{u}_2,$$

c'est-à-dire que, $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ sont *colinéaires* si les corps en collision peuvent être assimilés à des points. Également,

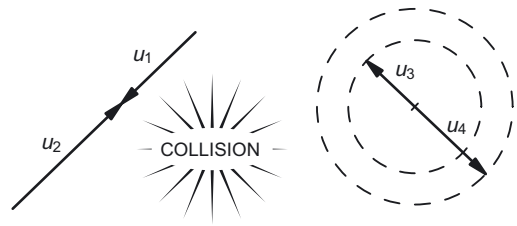
$$\frac{|\boldsymbol{u}_1|}{|\boldsymbol{u}_2|} = \frac{m_2}{m_1}.$$

(iii) Après la collision, les impulsions dans le système du CM *doivent encore* être égales et opposées, c'est-à-dire

$$m_3\boldsymbol{u}_3 = -m_4\boldsymbol{u}_4,$$

$$\frac{|\boldsymbol{u}_3|}{|\boldsymbol{u}_4|} = \frac{m_4}{m_3}.$$

Figure 8.3



Notons que dans le système du CM, la droite du mouvement relatif des particules incidentes peut être tournée dans une nouvelle direction par la collision, comme sur la figure 8.3. Cette nouvelle direction *n'est pas* déterminée par les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion, mais elle résulte de la géométrie des forces d'interaction et du mouvement relatif initial. Après la collision, la valeur des vitesses $\boldsymbol{u}_3$ et $\boldsymbol{u}_4$ peut être plus grande ou plus petite, ou égale à celles de $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$, suivant que de l'énergie a été fournie, absorbée, ou qu'elle est restée la même. Dans une représentation géométrique, les vecteurs vitesse $\boldsymbol{u}_3$ et $\boldsymbol{u}_4$ doivent

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

être colinéaires et leurs extrémités doivent se situer sur des sphères concentriques (des cercles, dans le cas de collisions à deux dimensions) de rayons

$$\frac{|\boldsymbol{u}_3|}{|\boldsymbol{u}_4|} = \frac{m_4}{m_3}$$

Les grandeurs de $\boldsymbol{u}_3$ et $\boldsymbol{u}_4$ se déduisent de la conservation de l'énergie. Dans l'exercice 7.3 on a montré que l'énergie cinétique totale de deux masses peut s'écrire :

$$T = T_{\mathrm{CM}} + \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)|\boldsymbol{v}_{\mathrm{CM}}|^2.$$

où :

$$T_{\mathrm{CM}} = \tfrac{1}{2}m_1|\boldsymbol{u}_1|^2 + \tfrac{1}{2}m_2|\boldsymbol{u}_2|^2.$$

Nous savons, par conservation de l'impulsion, que :

$$m_1|\boldsymbol{u}_1| = m_2|\boldsymbol{u}_2| = P,$$

par conséquent :

$$T_{\mathrm{CM}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{P^2}{2}$$

La « masse réduite » m_r d'un système de deux masses m_1 et m_2 est définie par :

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Dans cette notation :

$$T_{\mathrm{CM}} = \frac{P^2}{2m_r}.$$

Avant la collision :

$$T = T_{\mathrm{CM}} + \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)|\boldsymbol{v}_{\mathrm{CM}}|^2.$$

Après la collision :

$$T' = T + Q = T'_{\mathrm{CM}} + \tfrac{1}{2}(m_3 + m_4)|\boldsymbol{v}'_{\mathrm{CM}}|^2$$

Dans des collisions non-relativistes :

$$m_1 + m_2 = m_3 + m_4,$$
$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{CM}} = \boldsymbol{v}'_{\mathrm{CM}},$$

par conséquent :

$$T'_{\mathrm{CM}} = T_{\mathrm{CM}} + Q = T_{\mathrm{CM}}\left(1 + \frac{Q}{T_{\mathrm{CM}}}\right).$$

On a aussi,

$$T'_{\mathrm{CM}} = \tfrac{1}{2}m_3|\boldsymbol{u}_3|^2 + \tfrac{1}{2}m_4|\boldsymbol{u}_4|^2,$$

et, puisque

$$m_3|\boldsymbol{u}_3| = m_4|\boldsymbol{u}_4| = P',$$

il s'ensuit que

$$T'_{\mathrm{CM}} = \left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}\right)\frac{P'^2}{2} = \frac{P'^2}{2m'_r}.$$

Dans le cas particulier considéré ($m_1 = m_2$, $m_3 = m_4$), on a $m_r = m'_r$, et, par conséquent, à partir de $T'_{\mathrm{CM}} = T_{\mathrm{CM}}\,(1 + Q/T_{\mathrm{CM}})$, il découle que

$$P'^2 = \left(1 + \frac{Q}{T_{\mathrm{CM}}}\right)P^2.$$

Cette expression donne la grandeur des vitesses dans le système du CM après la collision.

a) *Collision élastique*

$Q = 0$: énergie cinétique inchangée dans la collision et

$$P'^2 = P^2.$$

Par conséquent

$$|\boldsymbol{u}_3| = |\boldsymbol{u}_1|,$$
$$|\boldsymbol{u}_4| = |\boldsymbol{u}_2|.$$

b) *Collision inélastique*

$Q > 0$: énergie cinétique produite par la collision,

$Q < 0$: énergie cinétique absorbée dans la collision, et

$$P'^2 = \left(1 + \frac{Q}{T_{\mathrm{CM}}}\right)P^2.$$

Par conséquent

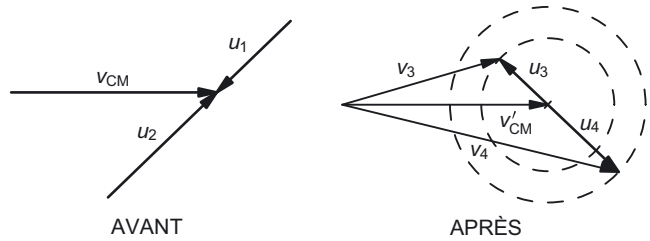
$$|\boldsymbol{u}_3| = \left(1 + \frac{Q}{T_{\mathrm{CM}}}\right)^{1/2}|\boldsymbol{u}_1|,$$
$$|\boldsymbol{u}_4| = \left(1 + \frac{Q}{T_{\mathrm{CM}}}\right)^{1/2}|\boldsymbol{u}_2|.$$

(iv) Les vitesses dans le laboratoire s'obtiennent tout simplement en ajoutant la vitesse du CM $\boldsymbol{v}'_{\mathrm{CM}}$ à $\boldsymbol{u}_3$ et $\boldsymbol{u}_4$, comme le montre la figure 8.4

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}'_{\mathrm{CM}} + \boldsymbol{u}_3,$$
$$\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{v}'_{\mathrm{CM}} + \boldsymbol{u}_4.$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Figure 8.4



Une information importante, tant générale que particulière à la réaction considérée, peut être déduite de la représentation géométrique ci-dessus de la dynamique d'une collision.

Exercice 8.1 De façon analogue à la discussion ci-dessus, démontrer les résultats pour une collision non-relativiste à trois dimensions ($m_1 + m_2 = m_3 + m_4$) dans le cas $m_1, m_2 \neq m_3, m_4$, par exemple, montrer que dans la collision de deux corps d'impulsions initiales $\boldsymbol{p}_1$ et $\boldsymbol{p}_2$, les impulsions finales sont données par :

$$\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{P}_3 + m_3 \boldsymbol{v}_{CM}$$
$$\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{P}_4 + m_4 \boldsymbol{v}_{CM},$$

où $\boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i$ est l'impulsion de la masse m_i dans le système du laboratoire, et $\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{p}_i - m_i \boldsymbol{v}_{CM}$ est l'impulsion de la masse m_i dans le système du CM, et

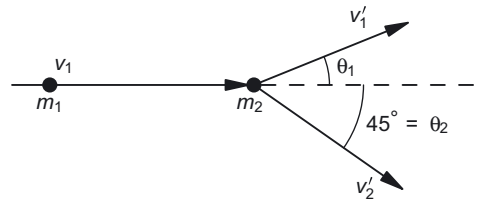
$$|\boldsymbol{P}_1| = |\boldsymbol{P}_2| = \sqrt{2 m_r T_{CM}},$$
$$|\boldsymbol{P}_3| = |\boldsymbol{P}_4| = \sqrt{2 m'_r T'_{CM}}.$$

Exercice 8.2 Une particule en mouvement entre en collision parfaitement élastique avec une autre particule de même masse, initialement au repos. Montrer que les vitesses deux particules sont à angle droit après la collision.

Exercice 8.3 Une particule en mouvement de masse M entre en collision parfaitement élastique avec une particule au repos de masse $m < M$. Trouver l'angle maximum θ_{max} de déflexion de la particule incidente.

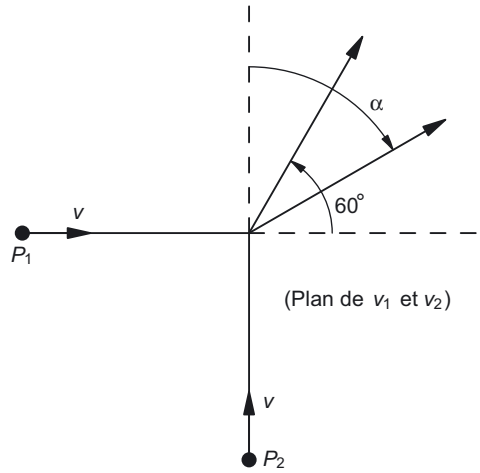
Exercice 8.4 Une particule de masse m_1 et de vitesse $\boldsymbol{v}_1$ entre en collision parfaitement élastique avec une autre particule de masse $m_2 = 3m_1$ au repos ($\boldsymbol{v}_2 = 0$). Après la collision, m_2 se déplace à un angle $\theta_2 = 45°$ par rapport à la direction originale de m_1, comme montré sur la figure 8.5. Trouver θ_1, l'angle final du mouvement de m_1, et v'_1, v'_2, les vitesses finales.

Figure 8.5



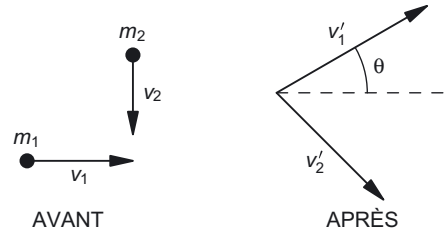
Exercice 8.5 Deux particules de même masse m sont envoyées l'une sur l'autre à partir de directions perpendiculaires, avec des vitesses égales. Après leur collision, l'une est défléchie de 60° de sa direction initiale, vers la direction de l'autre particule, comme le montre la figure 8.6. Déterminer l'angle α dont est défléchie la deuxième particule vers la direction initiale de la première si la collision est élastique.

Figure 8.6



Exercice 8.6 Deux particules de même masse se déplacent à angle droit l'une de l'autre avec des vitesses $v_1 = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $v_2 = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, respectivement. Elles entrent en collision élastique. Après la collision, le trajet de m_1 fait un angle $\theta = \arctan(1/2)$ par rapport à sa direction initiale, comme sur la figure 8.7.

Figure 8.7



(a) Quel est le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}_{\mathrm{CM}}$ du centre de masse ? Donner des composantes cartésiennes.

(b) Quelles sont les grandeurs u_1, u_2 des vitesse finales dans le système du CM ?

(c) Quelle est la vitesse finale $\boldsymbol{v}'_1$ de la particule 1 dans le système du laboratoire ?

Exercice 8.7 Un proton se déplaçant le long de l'axe x à une vitesse $v_0 = 1{,}00 \times 10^7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ entre en collision élastique avec un proton au repos. Après la collision, un proton se déplace dans le plan xy avec un angle de 30° par rapport à l'axe x. Trouver les vitesses $\boldsymbol{v}'_1$ et $\boldsymbol{v}'_2$ (grandeur et direction !) des deux protons après la collision.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 8.8 Un proton se déplaçant le long de l'axe x à la vitesse $v_0 = 1{,}00 \times 10^7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ subit une collision élastique avec un noyau de béryllium (Be) au repos. Après la collision, on constate que le noyau de béryllium se déplace dans le plan xy avec un angle 30° par rapport à l'axe x. Trouver :

(a) La vitesse v_2 du noyau de Be dans le système du laboratoire,

(b) La vitess finale $\boldsymbol{v}'_1$ du proton dans le système du laboratoire,

(c) La vitesse finale $\boldsymbol{u}'_1$ du proton dans le système du CM.

Note : On supposera que le rapport des masses du noyau de Be et du proton est 9 : 1.

Exercice 8.9 Un palet circulaire sur coussin d'air de masse 100 g et de rayon 2,00 cm se déplace à $150\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ sur une table horizontale, lorsqu'il entre en collision avec un autre palet au repos, de masse 200 g et de rayon 3,00 cm. À l'instant de la collision, la droite joignant les centres des deux palets fait un angle de 60° avec la direction originale du palet de 100 g. S'il n'y a pas de frottements avec la table ou entre les palets, trouver les vitesses $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ de chaque palet après la collision.

Exercice 8.10 Un objet de masse m_1, se déplaçant à une vitesse linéaire v dans le système d'un laboratoire, entre en collision avec un objet de masse m_2, au repos dans ce laboratoire. Après la collision, on observe qu'une fraction $|\Delta T/T|_{\mathrm{CM}} = 1 - \alpha^2$ de l'énergie cinétique dans le système du CM a été perdue lors de la collision. Quelle était la fraction $|\Delta T/T|_{\mathrm{lab}}$ de l'énergie perdue dans le système du *laboratoire* ?

Exercice 8.11

(a) Une particule de masse m subit une collision parfaitement élastique avec une particule au repos de masse $M > m$. La particule incidente est déviée d'un angle de 90°. À quel angle θ par rapport à la direction initiale de m la particule plus massive recule-t-elle ?

(b) Si, lors de la collision, une fraction $(1 - \alpha^2)$ de l'énergie dans le CM est perdue, quel est l'angle de recul de la particule initialement au repos ?

Exercice 8.12 Un proton d'énergie cinétique de 1 MeV entre en collision élastique avec un noyau au repos et sa vitesse est déviée de 90°. Si l'énergie de ce proton est de 0,8 MeV après la collision, quelle était la masse M du noyau cible, en unités de la masse du proton m_p ?

Exercice 8.13 Un palet de masse 1 kg et de vitesse $v_1 = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ entre en collision avec un palet au repos de masse 2 kg. Après la collision, le palet de 1 kg se déplace à 45° au Nord-Est de sa direction initiale à la vitesse $v'_1 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

(a) Quelle est la vitesse $\boldsymbol{v}'_2$ du palet de 2 kg après l'impact ?

(b) Quelle fraction α de l'énergie cinétique a été perdue dans le système du CM ?

(c) À quel angle θ le palet de 1 kg a-t-il été défléchi dans le système du CM ?

Exercice 8.14 Une « particule » de masse $m_1 = 2\,\text{kg}$, se déplaçant à la vitesse $\boldsymbol{v}_1 = (3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})\,\text{m s}^{-1}$ entre en collision inélastique avec une deuxième particule de masse $m_2 = 3\,\text{kg}$, de vitesse $\boldsymbol{v}_2 = (-2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k})\,\text{m s}^{-1}$.

(a) Trouver la vitesse $\boldsymbol{v}$ de la particule composée.

(b) Trouver l'énergie cinétique T_{CM} de ces particules dans le CM, *avant* l'impact.

9. Forces

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1, Chap. 12.

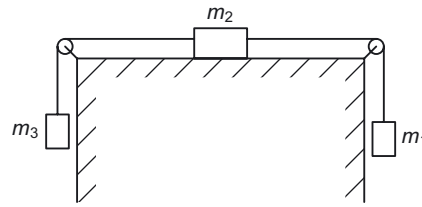
Exercice 9.1 La pression $P+\Delta P$ dans un bulle de savon est plus grande que la pression extérieure P à cause de la tension superficielle. Montrer qu'en termes de différence de pression la différence ΔP sur une bulle de savon sphérique de rayon R est donnée par l'expression

$$\sigma = \frac{R}{4}\Delta P.$$

Exercice 9.2 Un objet de 3 kg a un mouvement donné par $x = 6t^2 - 2t^3$ (x en mètres, t en secondes). Quelle est la force $\boldsymbol{F}$ (en newtons) agissant sur l'objet à $t = 4$ secondes ?

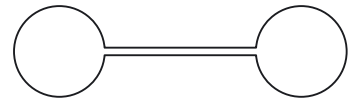
Exercice 9.3 Deux masses, $m_1 = 4\,\text{kg}$ et $m_3 = 2\,\text{kg}$, sont reliées par des cordes de poids négligeable passant sur des poulies de poids et de frottement négligeables, à une troisième masse $m_2 = 2\,\text{kg}$, comme sur la figure 9.1. La masse m_2 se déplace sur une longue table, avec un coefficient de frottement $\mu = 1/2$. Quelle est l'accélération $\boldsymbol{a}$ de la masse m_1 lorsque le système, initialement au repos, est relâché ?

Figure 9.1



Exercice 9.4 L'intérieur de deux bulles de savon de rayons égaux est relié par un mince tube, comme sur la figure 9.2. Décrire ce qui se passera dans un cas concret.

Figure 9.2

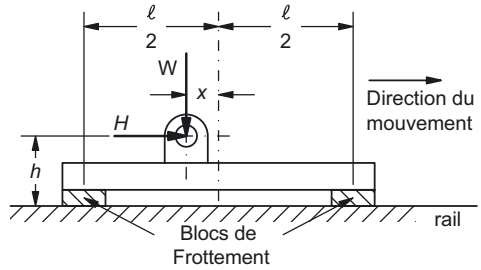


Exercice 9.5 Une luge, propulsée à haute vitesse sur des rails par une fusée, fait usage de freins de guidage pivotants entre la luge et les rails, comme sur la figure 9.3. Chaque frein est pourvu de patins de frottement remplaçables au talon et au pouce. Le coefficient de frottement des patins sur le rail est μ. Le taux d'usure des patins pendant l'utilisation de la luge à fusée est proportionnel à la force de frottement qui agit sur les surfaces

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

frottantes. Si le point de pivot est à une hauteur h au-dessus du rail, à quelle distance horizontale x de la verticale centrale des deux patins de frottement doit être placé le point de pivot P de façon que les deux patins de frottement s'usent à la même vitesse ?

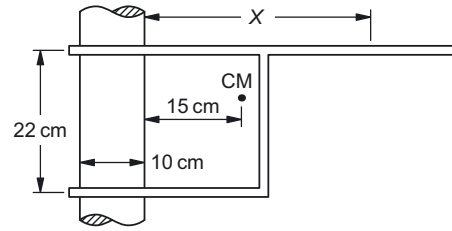
Figure 9.3



W : Portion du poids de la luge à fusée portée par le frein dans le diagramme
H : Composante horizontale de la force au point de pivotage des freins
l : Longueur totale entre les centres des deux freins à frottement.

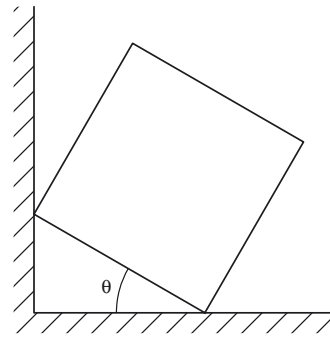
Exercice 9.6 Des supports ajustables que l'on peut faire glisser verticalement en haut ou en bas sont très utiles dans de multiples dispositifs. Un tel support est représenté sur la figure 9.4, avec des dimensions réalistes. Si le coefficient de frottement statique entre le poteau et le support est 0,3, et si une charge de masse 50 fois plus lourde que le porteur est placée dessus en X, quelle doit être la valeur minimum de X pour qu'elle ne glisse pas du support ?

Figure 9.4



Exercice 9.7 Un cube de masse M repose incliné sur un mur comme sur la figure 9.5. Il n'y a pas de frottement entre le mur et le cube, mais le frottement du cube sur le sol est juste suffisant pour l'empêcher de glisser. Lorsque $0 < \theta < 45°$, trouver le coefficient de frottement minimum $\mu_{\min}$ en fonction de θ. Vérifier que la réponse est vraisemblable en notant les valeurs de μ entre $\theta \to 0$ et $\theta \to 45°$ et en calculant la valeur de θ pour laquelle $\mu = 1$.

Figure 9.5

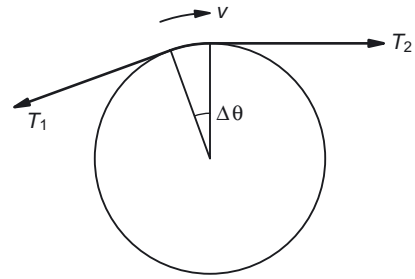


Exercice 9.8

(a) Une corde se déplaçant à basse vitesse v frotte contre un poteau rond et dévie par rapport à la droite sur laquelle elle se déplaçait d'un petit angle $\Delta\theta \ll 1$ radian, comme sur la figure 9.6. Si la tension d'un côté du poteau est $T + \Delta T$ et de l'autre côté T, quelle est la différence ΔT introduite par le frottement ?

(b) Intégrer l'équation précédente pour trouver le rapport des tensions T_2/T_1 aux deux extrémités d'une corde enroulée autour d'un poteau circulaire sur un angle fini α et que l'on tire pour la faire glisser.

Figure 9.6



Exercice 9.9 Une balle de 5 g est tirée horizontalement dans un bloc de bois de 3 kg qui repose sur une surface. Le coefficient de frottement par glissement entre le bloc et la surface est de 0,2. La balle reste plantée dans le bois, dont on observe qu'il glisse de 25 cm sur la surface. Quelle était la vitesse v_0 de la balle ?

Exercice 9.10 Lors d'une enquête sur la scène d'un accident automobile, la police mesure que la voiture A a laissé des traces de freinage de 45 m avant d'entrer en collision avec la voiture B. On savait, par ailleurs, que le coefficient de frottement entre le caoutchouc et le sol à l'endroit de l'accident n'était pas inférieur à 0,6. Déterminer la vitesse v de la voiture A juste avant l'accident, et montrer qu'elle devait dépasser la limite affichée de 70 km/h.

Exercice 9.11 Un objet est au repos à la base d'un plan incliné à 20°, sans frottements et d'une longueur de 1 m. Si l'on accélère le plan incliné le long de la table avec une accélération $a = 4\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, quel est le temps t qu'il faut à l'objet pour glisser jusqu'en haut de la pente ?

Exercice 9.12 Un bloc de masse m glisse sur un plan incliné à un angle θ par rapport à l'horizontale. Le coefficient de frottement du glissement est $\mu < \tan\theta$. Soit $m = 1$ kg, $\mu = 0{,}20$ et $\theta = 30°$. Si le bloc est projeté vers le haut du plan à une vitesse initiale de $3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$,

(a) jusqu'à quelle hauteur d arrive-t-il ?

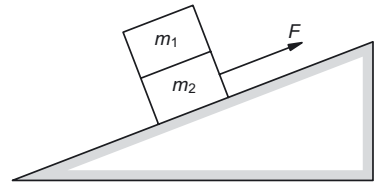
(b) combien de temps t met-il à s'élever puis à redescendre jusqu'à son point de départ ?

(c) combien d'énergie ΔE est perdue sous forme de chaleur dans le processus ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 9.13 Dans le dispositif montré sur la figure 9.7, le plan incliné fait 130 cm de long et son extrémité supérieure est à 50 cm au-dessus du niveau de l'autre. Le bloc m_2 repose sur ce plan et a une masse de 60 g. Le bloc m_1 a une masse de 200 g. Le coefficient de frottement statique entre les deux blocs est de 0,5 ; le coefficient de frottement par glissement entre le bloc inférieur et le plan est de 0,33. Une force $\boldsymbol{F}$ dirigée vers le haut parallèlement au plan est appliquée au bloc inférieur.

Figure 9.7

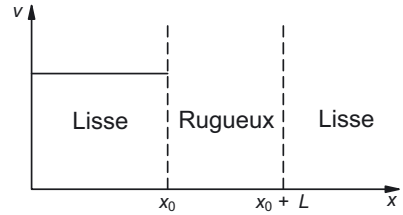


(a) Quelle est l'accélération a du bloc inférieur au moment où le bloc supérieur se met à glisser dessus ?

(b) Quelle est la valeur maximum de F avant que le glissement ne débute ?

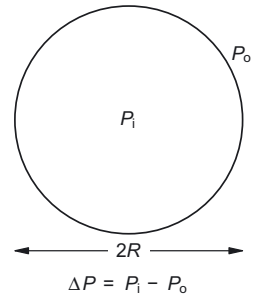
Exercice 9.14 Un palet de hockey de masse m glisse sans frottement à une vitesse v_0 ($\mathrm{cm\,s^{-1}}$), comme sur la figure 9.8, et rencontre une courte bande de glace de largeur L (cm), sur laquelle il y a une force de frottement proportionnelle à la vitesse $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{v}$. Trouver l'expression de la vitesse v en fonction de la position x et compléter le diagramme.

Figure 9.8



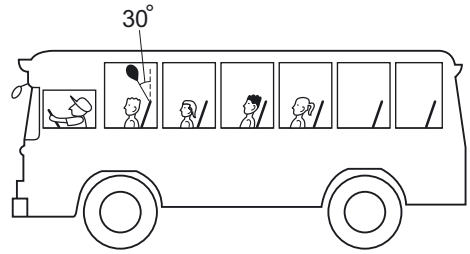
Exercice 9.15 Lors d'une petite augmentation ΔR du rayon d'une bulle de savon, comme le montre la figure 9.9, du travail est exercé contre la force de tension superficielle σ, ce qui mène à une augmentation ΔE de l'énergie de surface. La variation d'énergie de surface par variation d'aire de la surface $\epsilon = \Delta E/\Delta A$ est nommée *énergie de surface spécifique*. À partir du principe des travaux virtuels, trouver comment varie l'énergie spécifique de surface en fonction du rayon R, de la surpression ΔP, etc., de la bulle. Quelle est la valeur numérique du rapport $|\sigma/\epsilon|$?

Figure 9.9



Exercice 9.16 Un car scolaire à air conditionné s'approche d'un croisement de chemin de fer. Un des enfants a attaché un ballon d'hydrogène à un siège. On observe que le fil du ballon fait un angle de 30° avec la verticale dans le sens du mouvement (voir la figure 9.10). Le chauffeur est-il en train d'accélérer ou de ralentir le car, et de combien ? (Un responsable de la sécurité routière recommanderait-il le chauffeur pour sa dextérité ?)

Figure 9.10



Exercice 9.17 Une particule de masse m et de charge q se déplace à la vitesse v dans un plan perpendiculaire à un champ magnétique $\boldsymbol{B}$.

(a) Montrer que la particule a une trajectoire circulaire.

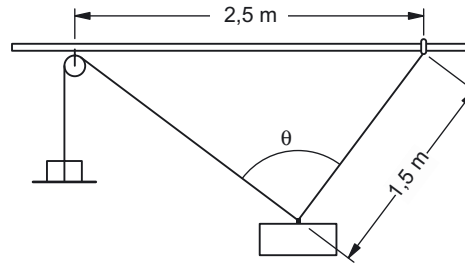
(b) Trouver le rayon R du cercle.

(c) Trouver le temps T que met la particule pour faire un tour de cercle.

Ce résultat est important pour manœuvrer un cyclotron. Pourquoi ?

Exercice 9.18 Une masse de 1000 g est suspendue à une corde de 1,5 m de long qui est attachée à un anneau libre de se déplacer sur une barre horizontale, comme sur la figure 9.11. Le coefficient de frottement statique entre l'anneau et la barre est 0,75. Une deuxième corde est attachée à la masse et passe sur une poulie attachée à 2,5 m à gauche de l'anneau. Des poids W sont attachés à l'autre extrémité de cette corde jusqu'à ce que l'anneau se mette à glisser.

Figure 9.11



Trouver :

(a) la valeur de W lorsque le glissement débute ;

(b) la tension T dans la longueur de 1,5 m de la corde ;

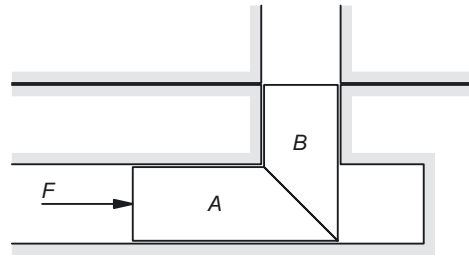
(c) l'angle θ.

Exercice 9.19 La vue latérale d'une forme simplifiée de loquet est montrée sur la figure 9.12. Le membre inférieur A peut être avancé sur son barillet horizontal. Les parois latérales des barillets ont des frottements négligeables, mais aux interfaces de A et B, qui

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

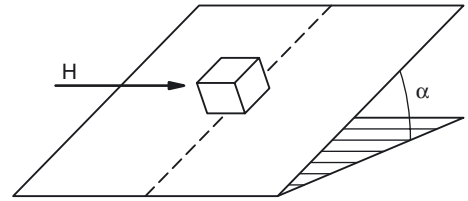
sont à 45° de l'horizontale, il existe un coefficient de frottement statique μ. Quelle est la force minimum F que l'on doit appliquer horizontalement à A pour déplacer le loquet, si B a une masse m ?

Figure 9.12



Exercice 9.20 Une particule de poids W est au repos sur un plan incliné rugueux faisant un angle α avec l'horizontale, comme sur la figure 9.13. Le coefficient de frottement statique est $\mu = 2 \tan \alpha$.

Figure 9.13



(a) Trouver la force horizontale minimum $H_{\min}$ qui, en agissant transversalement par rapport à la pente du plan, va faire bouger la particule.

(b) Dans quelle direction ϕ la particule se déplacera-t-elle par rapport à $\boldsymbol{H}$?

Exercice 9.21 La pression à l'intérieur d'une bouteille fermée d'eau gazeuse est de $3{,}00 \times 10^5$ Pa. La tension superficielle de l'eau est de $73\ \mathrm{mN\,m^{-1}}$. (On supposera que c'est la même valeur pour de l'eau en contact avec du CO_2 gazeux.) Lorsqu'on ouvre la bouteille doucement, une bulle ne grossira dans le liquide que si son rayon initial, lors de sa « naissance » en un certain centre, est plus grand qu'une valeur critique R. Calculer ce rayon critique dans les conditions données.

Exercice 9.22 Une particule de charge q et de masse m se déplace dans la superposition d'un champ électrique E_y et d'un champ magnétique B_z. (Toutes les autres composantes des champs sont nulles.)

(a) Écrire les équations du mouvement de la particule.

(b) Faire une transformation de Galilée du système de coordonnées :

$$x' = x - (E_y/B_z)t,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z.$$

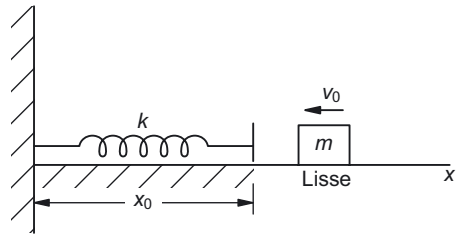
(c) Qu'en concluez-vous sur le mouvement d'une particule dans des champs électrique et magnétique croisés ?

10. Potentiels et champs

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1, Chap. 13 et 14.

Exercice 10.1 Une masse m glissant sur une surface horizontale sans frottement à la vitesse v_0 entre en collision avec un ressort de constante de rappel k et de longueur x_0, comme sur la figure 10.1. En quel point x la masse s'arrête-t-elle pour la première fois ? On négligera la masse du ressort.

Figure 10.1



Exercice 10.2 Un certain ressort a une constante de rappel k. S'il est allongé à une nouvelle longueur d'équilibre par une force constante F, montrer qu'il a la même constante de rappel dans sa nouvelle position d'équilibre.

Exercice 10.3 Un astéroïde creux est en mouvement libre dans l'espace. Il y a, en son intérieur, une petite particule de masse m. À quel point intérieur la particule est-elle en équilibre ?

Exercice 10.4 La vitesse nécessaire pour qu'un corps échappe à l'attraction terrestre est (environ) de $11\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Si une sonde interplanétaire a une vitesse initiale de $13\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ juste au-dessus de l'atmosphère terrestre, quelle vitesse v par rapport à la Terre aura-t-elle à une distance de $1{,}6\,10^6$ km de la Terre ?

Exercice 10.5 Si la Terre avait une charge électrique totale de 1 C, quel serait son potentiel ϕ ?

Exercice 10.6 Une sphère de rayon 0,5 m est chargée uniformément et portée à un potentiel de 10^6 V. Quelle est la charge Q sur la sphère ?

Exercice 10.7 Le champ électrique maximum que peut supporter de l'air sec à la pression atmosphérique sans décharge est environ de $31\,\mathrm{kV\,cm^{-1}}$. Calculer le potentiel maximum ϕ auquel une sphère isolée de 20 cm de diamètre peut être portée (dans l'air) sans problème de décharge.

Exercice 10.8 Un objet de masse égale à 6 kg est libre de se déplacer sur un rail sans frottement le long de l'axe x. Dans chaque cas, il est initialement au repos en $x = 0$, $t = 0$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(a) Il se déplace de 3 m sous l'action d'une force $F = (3 + 4x)$ N dans la direction x (où x est en mètres),
   1. Quelle est alors sa vitesse v ?
   2. Quelle est son accélération a en ce point ?
   3. Quelle puissance P est exercée sur lui en ce point ?

(b) Il se déplace pendant 3 s sous l'action d'une force $F = (3+4t)$ N dans la direction x (dans cette formule, t est en secondes).
   1. Quelle vitesse v atteint-il ?
   2. Quelle est son accélération a ?
   3. Quelle puissance P est exercée sur lui à cet instant ?

Dans les exercices 10.9 à 10.11 une force $\boldsymbol{F} = (1.5y\boldsymbol{i} + 3x^2\boldsymbol{j} - 0.2(x^2 + y^2)\boldsymbol{k})$ N agit sur une particule de masse 1 kg (dans un référentiel orthonormé $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$. À $t = 0$ la particule est en $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$ (en mètres) et se déplace à une vitesse de $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ mètres par seconde.

Exercice 10.9 Trouver à $t = 0$,

(a) La force $\boldsymbol{F}$ agissant sur la particule,

(b) L'accélération $\boldsymbol{a}$ de la particule,

(c) Son énergie cinétique T, et

(d) Le taux de variation de son énergie cinétique, dT/dt.

Exercice 10.10 Trouver, approximativement, à $t = 0{,}01$ s,

(a) La position $\boldsymbol{r}$ de la particule,

(b) La vitesse $\boldsymbol{v}$ de la particule, et

(c) Son énergie cinétique T.

Exercice 10.11 La particule se déplace du point $(0,-1,0)$ au point $(0,+1,0)$ sur un rail sans frottement sous l'action d'une force $\boldsymbol{F}$ (en plus d'une certaine force de contrainte). Trouver le travail W de la force $\boldsymbol{F}$ si le rail est

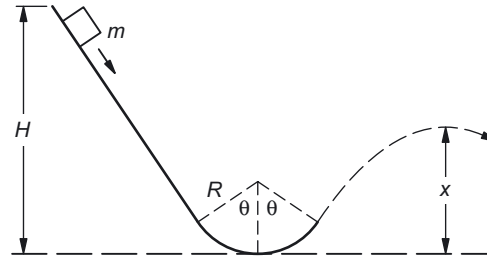
(a) Rectiligne suivant l'axe y.

(b) Circulaire dans le plan yz. Est-ce une force conservative ?

Exercice 10.12 Une petite automobile sans frottement roule sur une piste inclinée avec une boucle verticale de rayon R à son extrémité inférieure. De quelle hauteur H au-dessus du sommet de la boucle l'automobile doit-elle démarrer de façon à parcourir la boucle sans quitter la piste ?

Exercice 10.13 La portion inférieure d'une piste sans frottements est formée d'une partie de surface cylindrique de rayon R sous-tendue par un angle θ de chaque côté de la verticale comme sur la figure 10.2. La glissade démarre à une hauteur H au-dessus du point le plus bas. Un petit objet de masse m part de l'extrémité supérieure et glisse vers le bas.

Figure 10.2

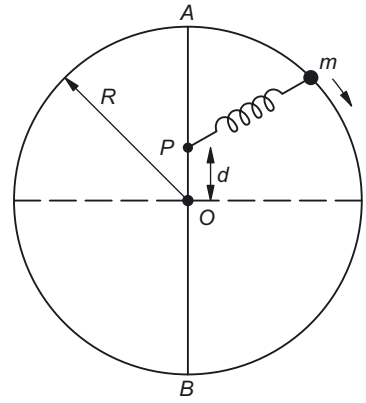


(a) Quelle est la hauteur maximum x de sa trajectoire par rapport au point le plus bas après que m a quitté la piste ?

(b) Quelle force F l'objet exerce-t-il sur la surface du cylindre au point le plus bas ?

Exercice 10.14 Un petit objet glissant de masse m (kg) est relié à un point P par un ressort de longueur (non étiré) négligeable et de constante de rappel k ($\mathrm{N\,m^{-1}}$). Le point P est ajustable, mais, une fois fixé, il ne bouge pas. L'objet est libre de se déplacer sans frottement sur la surface externe d'un cercle de rayon R dans un plan vertical, comme sur la figure 10.3. Soit $\overline{\mathrm{OP}} = d$. Si la masse démarre sans vitesse initiale au sommet du cercle au point A et qu'elle est tout juste en contact avec le cercle au point le plus bas B, trouver d.

Figure 10.3



Exercice 10.15 Un câble flexible de longueur L de masse M ($\mathrm{kg\,m^{-1}}$) est suspendu à une poulie de masse, de rayon et de frottement négligeables. Initialement, le câble est tout juste en équilibre. On lui donne une petite poussée pour le déséquilibrer et il accélère. Quelle est sa vitesse v lorsque son extrémité quitte la poulie ?

Exercice 10.16 Une particule, au repos au sommet d'une sphère sans frottement de rayon R, glisse sur la sphère sous l'action de la pesanteur. À quelle hauteur d au-dessous de son point de départ se trouve-t-elle au moment où elle quitte la sphère ?

Exercice 10.17 Une voiture de masse 1400 kg a un moteur de 75 chevaux (55kW). Pour se déplacer à une vitesse constante de $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ horizontalement, la voiture doit utiliser environ 20 chevaux (15kW). En supposant que les forces de frottement sont les

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

mêmes, quelle est la pente maximum que la voiture peut gravir à la même vitesse ? (On indiquera l'angle θ que la pente fait avec l'horizontale, ou une fonction de cet angle.)

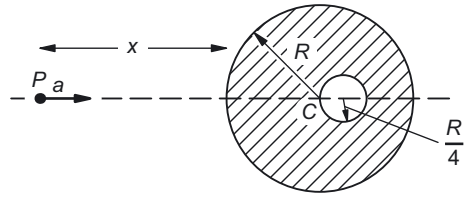
Exercice 10.18 Une voiture de masse 1000 kg est propulsée par un moteur d'une puissance de 120 kW lorsque la vitesse est de 60 km h^{-1}. Quelle est l'accélération maximum a que la voiture peut avoir à cette vitesse ?

Exercice 10.19 En 1960, Les records du monde du lancer du poids, du disque et du javelot étaient respectivement de 19,30 m, 59,87 m, et 86,09 m. Les masses lancées étaient respectivement de 7,25 kg, 2 kg et 0,8 kg. Calculer le travail fourni par chacun des champions lors de son lancer-record : W_{poids}, W_{disque}, $W_{\text{jav.}}$. On supposera que chaque trajectoire débutait à une hauteur de 1,80 m au-dessus du sol et à un angle de 45°. On négligera la résistance de l'air.

Exercice 10.20 Un corps sphérique de rayon R et de masse M a une densité uniforme. Calculer le potentiel gravitationnel ϕ et le champ gravitationnel $\boldsymbol{g}$ en fonction de la distance au centre $\boldsymbol{r}$. Représenter graphiquement les résultats.

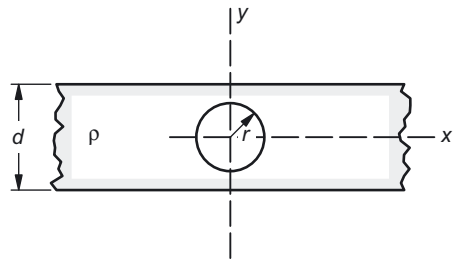
Exercice 10.21 Quelle est l'accélération gravitationnelle $\boldsymbol{a}$ en un point P à une distance x de la surface d'une masse sphérique de rayon R et de densité ρ, qui a une cavité centrale de rayon $R/4$ dont le centre est à une distance $R/4$ du centre de la grande sphère C, sur la ligne PC montrée sur la figure 10.4.

Figure 10.4



Exercice 10.22 Soit un matériau de densité ρ dont la forme est celle d'une plaque étendue (infinie) d'épaisseur d. Une cavité sphérique de rayon r (inférieur à $d/2$) est creusée à l'origine des coordonnées, comme sur la figure 10.5.

Figure 10.5



(a) Quelle force gravitationnelle $\boldsymbol{F}$ agira sur une petite masse m si cette dernière est localisée en un point y *quelconque* de l'axe y ?

(b) Dessiner la force en fonction de y.

Exercice 10.23 Un petit corps de masse m se déplace sous l'action de la gravitation sur une orbite elliptique d'excentricité e et de demi grand axe a autour d'une grande masse M. (On supposera M immobile.) Évaluer l'énergie totale E de m (cinétique et potentielle). (Noter que E ne dépend pas de e.)

Exercice 10.24

(a) Démontrer la troisième loi de Kepler pour des orbites elliptiques, et donner la relation entre la masse M d'un corps, la masse m de son satellite, le demi grand axe de l'orbite du satellite, a, et la période orbitale T.

(b) Montrer que toutes les orbites d'une énergie totale donnée E par unité de masse ont la même période, et donner la relation entre la période et l'énergie E. (On supposera $m \ll M$ pour simplifier.)

Exercice 10.25 Souvent, un condensateur est formé de deux corps (métalliques), de charges opposées. La capacité C est alors définie comme le rapport entre la charge de l'un des corps et la différence de potentiel entre les deux,

$$C = Q/(\phi_2 - \phi_1) \text{ farad},$$

où Q est en coulombs et ϕ_1,ϕ_2 en volts.

Trouver la capacité d'un couple de sphères concentriques de rayons A et B.

Exercice 10.26 Un cintre de 25 g est attaché à un ressort de masse négligeable dont la constante de rappel est $k = 15{,}3\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Une masse $m = 50\,\mathrm{g}$ est lâchée d'une hauteur de $h = 9\,\mathrm{cm}$ sur le cintre au repos, avec lequel elle a une collision inélastique. Quelle est la hauteur minimum $H_{\min}$ atteinte par la masse m au-dessous de son point de départ ?

Exercice 10.27 De l'eau (densité $1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$) est pompée par un tuyau dont le bec a une section droite de $35\,\mathrm{cm^2}$. Lorsque l'extrémité du tuyau est dirigée à un angle de 30° au-dessus de l'horizontale, le sommet du jet d'eau est à 5 m au-dessus du bec. La pompe est reliée à un grand réservoir, et l'eau du réservoir est à une hauteur de 2,5 m au-dessous du bec du tuyau. Si l'efficacité globale du système alimentant la pompe est de 60 %, quelle puissance P en kilowatts est consommée dans l'alimentation électrique du moteur ?

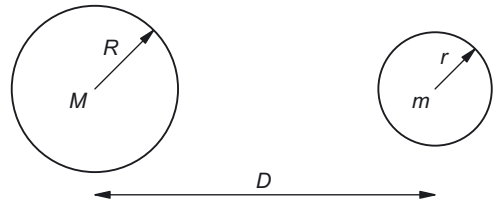
Exercice 10.28 Estimer la pression P au centre de la Lune en atmosphères. ($1\,\mathrm{atm} = 1.02 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$.) On utilisera les valeurs suivantes pour la Lune :

$$\begin{aligned} \text{Masse} &= 7 \times 10^{22}\,\mathrm{kg} \\ \text{Rayon} &= 1740\,\mathrm{km} \\ \text{Pesanteur à la surface} &= 160\,\mathrm{cm\,s^{-2}} \\ \text{Densité moyenne} &= 3{,}34\,\mathrm{g\,cm^{-3}}. \end{aligned}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 10.29 Quel est le travail minimum $W_{\min}$ nécessaire pour déplacer un rocher de masse m' de la surface de la Terre à celle de la Lune, en fonction de la masse et du rayon de la Terre, M et R, de la masse et du rayon de la Lune, m et r, et de la distance D entre leurs centres ? (Voir la figure 10.6.)

Figure 10.6



Exercice 10.30 Un satellite de masse m est en orbite circulaire autour d'un astéroïde de masse M ($M \gg m$). Si la masse de l'astéroïde était soudainement diminuée de moitié[2] qu'arriverait-il au satellite. Décrire sa nouvelle orbite.

Exercice 10.31

(a) À quelle vitesse minimum $v_{\min}$ doit-on lancer une sonde interstellaire depuis la surface terrestre de façon à ce qu'elle quitte le système solaire avec une vitesse résiduelle de $16\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ par rapport au Soleil ?

(b) La vitesse de la Terre sur son orbite est de $30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Si l'on souhaite envoyer la sonde dans une *direction donnée* après qu'elle a échappé à l'attraction solaire, quelle est alors la vitesse de lancement *maximum* $v_{\max}$ qui peut être nécessaire ?

Exercice 10.32 On veut envoyer une sonde solaire sur une orbite de périhélie 0,010 UA et de même période que la Terre, de façon que les données enregistrées pendant le vol puissent être transmises à la Terre un an après le lancement. À quelle vitesse v_0, et dans quelle direction α par rapport à le droite Terre-Soleil, doit-on lancer la sonde depuis la Terre ?

Note : La vitesse orbitale de la Terre est de $30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

11. Unités et dimensions

Exercice 11.1 Quelle est la dimension :

(a) de la constante de rappel d'un ressort ?

(b) du travail ?

(c) d'un couple ?

(d) de la tension superficielle ?

(e) d'un coefficient de frottement ?

2. Comment cela pourrait-il avoir lieu ? Le satellite étant en orbite à une grande distance de l'astéroïde serait équipé pour déclencher, à distance, l'essai d'un engin nucléaire sur l'astéroïde. L'explosion éjecterait la moitié de la masse de l'astéroïde sans affecter directement le satellite.

(f) d'un coefficient de viscosité ?

(g) du champ gravitationnel ?

(h) d'un champ électrique ?

(i) d'un champ magnétique ?

(j) de E/B ?

Note : On utilisera les symboles suivants : M pour une masse, T pour un temps, L pour une longueur, et Q pour une charge.

Exercice 11.2 Montrer que la quantité $(\epsilon_0 c)^{-1}$ a la dimension d'une résistance et la calculer numériquement.

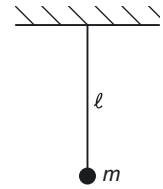
Exercice 11.3 Moe et Joe, deux physiciens cosmiques qui ont grandi sur deux planètes différentes, se rencontrent lors d'une conférence interplanétaire sur les poids et mesures pour établir un système d'unités interplanétaire. Moe décrit fièrement le système MKSA, en cours dans toutes les régions civilisées de la Terre. Joe décrit de façon tout aussi fière les beautés du système M′K′S′A′, utilisé partout ailleurs dans le système solaire. Si les constantes reliant les unités fondamentales de masse, de longueur et de temps des deux systèmes sont μ, λ et τ, tels que

$$\begin{aligned} m' &= \mu m, \\ l' &= \lambda l, \\ t' &= \tau t, \end{aligned}$$

quels facteurs relient les unités de vitesse v, d'accélération a, de force F, et d'énergie E des deux systèmes ?

Exercice 11.4 Utiliser l'analyse dimensionnelle pour trouver la dépendance de la période T du pendule simple de la figure 11.1 dans ses paramètres physiques.

Figure 11.1



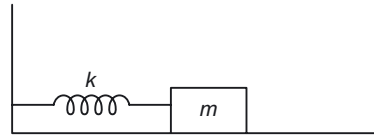
Exercice 11.5 Quelle est la valeur de GM_{Soleil} si les longueurs sont mesurées en UA et les temps en années ?

Exercice 11.6 Si un modèle du système solaire est construit en utilisant des matériaux de même densité moyenne respective que celles du Soleil et des planètes, mais en réduisant toutes les dimensions linéaires par un facteur d'échelle k, comment les périodes de révolution T des planètes vont-elles dépendre de k ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 11.7 Par analyse dimensionnelle, trouver la dépendance en m, k, etc., de la période T du système masse-ressort de la figure 11.2. (Négliger les frottements.)

Figure 11.2



Exercice 11.8 Une masse m tourne sur un cercle à la vitesse v au bout d'une ficelle de longueur l. (On négligera la pesanteur.) Trouver comment varie la tension T dans la ficelle et l'accélération radiale a de cette masse avec ces quantités.

Exercice 11.9 Un projectile de masse m est tiré à un angle θ de l'horizontale à une vitesse initiale v. Trouver comment la portée R et le temps de vol T dépendent des constantes du problème.

Exercice 11.10 Une goutte liquide de rayon R, de densité ρ, peut osciller, la tension superficielle σ procurant la force de rappel. Trouver la façon dont la période d'oscillation T dépend de ces paramètres.

Exercice 11.11 Un étudiant découvre qu'il peut accorder le piano familial en modifiant la tension des cordes. Si la fréquence ω est inversement proportionnelle à la longueur de la corde, comment dépend-elle de la longueur l, de la tension T, et de la densité linéaire σ ?

Exercice 11.12 On observe que les ondes de l'eau sur un océan très profond se déplacent à une vitesse v qui dépend de leur longueur d'onde λ, mais pas de leur amplitude. Comment la vitesse v doit-elle dépendre de la longueur d'onde et de la densité ρ de l'eau ?

Exercice 11.13 Une boîte de volume V contient N particules de masse m, se déplaçant dans des directions aléatoires à la vitesse v. Par analyse dimensionnelle, trouver comment la pression p d'un tel gaz dépend de N, de V, de m et de v. Pouvez-vous en tirer une conclusion sur la nature de la température absolue ?

Exercice 11.14 Montrer que la troisième loi de Kepler $r^3/t^2 = \text{const.}$ découle de l'application de la loi de Newton $F = GMm/r^2$ à des orbites circulaires. Faire usage de considérations dimensionnelles.

Note : Ici, r est la distance radiale (constante) entre une planète et le Soleil, t est la période de la planète sur son orbite, M est la masse du Soleil, m la masse de la planète, et F la grandeur de la force gravitationnelle entre le Soleil et la planète.

12. Cinématique et dynamique relativistes, équivalence de la masse et de l'énergie au repos

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1, Chap. 15 et 16.

Exercice 12.1 Résoudre la transformation de Lorentz pour x, y, z, t en fonction de x', y', z', t', entre deux référentiels d'inertie avec des axes parallèles et une vitesse relative V le long de x.

Exercice 12.2 Écrire la transformation de Lorentz trouvée dans l'exercice 12.1 sous forme différentielle et évaluer ainsi $dx/dt = v_x$ en fonction de v'_x, V, etc. ; faire de même pour $dy/dt = v_y$.

Exercice 12.3 Une particule dans le système S se déplace suivant l'axe x avec une vitesse v_x et une accélération a_x. Quelle vitesse et quelle accélération a-t-elle dans le système S' (d'axes parallèles) en mouvement par rapport à S avec une vitesse V dirigée suivant l'axe x ?

Exercice 12.4 Un bâton de longueur $L = 5\,\text{m}$ est au repos dans un système S et est orienté à un angle $\theta = 30°$ par rapport à l'axe x. Quels sont la longueur apparente et l'angle apparent de ce bâton vus par un observateur dans le système S', parallèle, qui se déplace à la vitesse $v_x = c/2$ par rapport au système S ?

Exercice 12.5 Un muon est formé dans la haute atmosphère et se déplace à la vitesse $v = 0{,}990\,c$ sur une distance de 5 km avant de se désintégrer.

(a) Pendant combien de temps Δt le muon « vit-il » tel que nous l'observons sur Terre, et tel qu'il se verrait dans son référentiel propre $\Delta t'$?

(b) Quelle épaisseur de l'atmosphère L', mesurée dans son référentiel propre, le muon traverse-t-il ?

Exercice 12.6 Montrer que l'électron a une énergie au repos $m_e c^2 = 0{,}511\,\text{MeV}$.

Exercice 12.7 Une particule de masse m se déplace sur une ligne de telle façon que sa position est

$$x = \sqrt{b^2 + c^2 t^2} - b.$$

Quelle force F doit-on appliquer à la particule pour produire ce mouvement ?

Exercice 12.8 L'énergie totale produite aux USA en 1965 fut de $1{,}05\,10^{12}$ kWh.

(a) Combien de masse M a été convertie en énergie dans ce processus ?

(b) Si tout le changement de masse de la conversion du deutérium en hélium était disponible (une partie est perdue dans les neutrinos), quel volume d'eau lourde par seconde H faudrait-il pour fournir le deutérium nécessaire ?

Note : $M_{\text{H}^2} = 2{,}0147$ uma, $M_{\text{He}^4} = 4{,}0039$ uma.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 12.9 La puissance totale émise par le Soleil et atteignant le haut de l'atmosphère terrestre est environ $1{,}4\,\mathrm{kW/m^2}$. Si cette énergie provient entièrement de la conversion d'hydrogène en hélium, combien d'hydrogène H, en tonnes par seconde, le Soleil « brûle-t-il ». (On négligera les pertes en neutrinos.)

Exercice 12.10

(a) Exprimer l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre g dans les unités : années-lumière et année^{-2}.

(b) Si un vaisseau spatial accélère au point que ses occupants ressentent une accélération constante égale à celle de la pesanteur sur Terre, et le fait pendant cinq années mesurées par un observateur (non accéléré) au repos par rapport au vaisseau à $t = 0$, à quelle distance x le vaisseau est-il parvenu, et à quelle vitesse v voyage-t-il au bout de ces cinq années ?

13. Énergie et impulsion relativistes

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1, Chap. 16 et 17.

Exercice 13.1 Montrer que la vitesse d'un électron de 1 GeV diffère de c d'une fraction $1/(8 \times 10^6)$.

Exercice 13.2

(a) Exprimer l'impulsion p d'une particule en fonction de son énergie cinétique T et de son énergie au repos mc^2.

(b) Quelle est la vitesse v d'une particule dont l'énergie cinétique est égale à son énergie au repos ?

Exercice 13.3 La masse d'un proton est de $m_p c^2 = 938\,\mathrm{MeV}$. Dans le rayonnement cosmique, on a observé, par des méthodes indirectes, que les protons peuvent avoir des énergies de 10^{10} GeV. En supposant qu'un proton de cette énergie traverse diamétralement une galaxie d'un rayon de l'ordre de 10^5 années-lumière, combien de temps Δt cela prend-il dans le référentiel du proton ?

Exercice 13.4 Une particule de charge q et d'impulsion p décrit un mouvement circulaire, de rayon R à angle droit avec un champ magnétique B.

(a) Si q est mesurée en unités de charge de l'électron, p en MeV/c, et B est mesuré en gauss, quelle est la relation entre p, B, et R ? (Poser $q = Zq_e$.)

(b) Quel est le rayon de courbure d'un proton d'énergie cinétique de 60 GeV dans un champ de $B = 0{,}3$ gauss ?

Exercice 13.5 Un cyclotron est planifié pour accélérer des protons d'une énergie cinétique de 150 MeV. Le champ magnétique prévu est de $1{,}00 \times 10^4$ gauss.

(a) Quel doit être le rayon minimum $R_{\min}$ des pièces polaires magnétiques ?

(b) Quelle fréquence f doit être utilisée dans les électrodes accélératrices ?

(c) De quelle fraction $\Delta f/f$ doit-on changer la fréquence pour tenir compte des effets relativistes pendant l'accélération d'une particule donnée ?

Exercice 13.6 Un corps de masse M, au repos dans le laboratoire, se désintègre en deux particules de masses m_1 et m_2. Déterminer de façon relativiste les énergies *cinétiques* T_1 et T_2 des produits de désintégration.

Exercice 13.7 Un méson pi ($m_\pi = 273\, m_e$) au repos se désintègre en un muon ($m_\mu = 207\, m_e$) et un neutrino ($m_\nu = 0$). Trouver l'énergie cinétique et l'impulsion du muon (T_μ, p_μ) et du neutrino (T_ν, p_ν) en MeV.

Exercice 13.8 Un atome excité de masse totale m est au repos dans un système de coordonnées donné. Il émet un photon, perdant ainsi une énergie ΔE. En tenant compte du recul de l'atome, calculer l'énergie E_γ du photon.

Exercice 13.9 Une particule de masse m, se déplaçant à la vitesse $v = 4c/5$, entre en collision inélastique avec une particule semblable au repos.

(a) Quelle est la vitesse V de la particule composée ?

(b) Quelle est sa masse M ?

Exercice 13.10 Le « bevatron » de Berkeley a été conçu pour accélérer des protons à une énergie suffisamment élevée pour produire des paires proton-antiproton dans la réaction

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + (\mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}}).$$

On appelle « énergie de seuil » de cette réaction la situation où les quatre particules de droite se déplacent à la même vitesse comme une seule particule de masse $M = 4m_p$. Si les protons cibles sont au repos avant la collision, quelle énergie cinétique T doit avoir le proton incident pour atteindre ce seuil ?

Exercice 13.11 Calculer l'énergie de seuil T_e pour produire une paire proton-antiproton dans une collision électron-électron

$$\mathrm{e}^- + \mathrm{e}^- \rightarrow \mathrm{e}^- + \mathrm{e}^- + \mathrm{p}^- + \mathrm{p}^+.$$

On peut utiliser $m_e \approx 0{,}5$ MeV, $m_p \approx 1$ GeV. Comparer cette énergie avec l'énergie nécessaire dans une collision proton-proton (comme dans l'exercice 13.10).

Exercice 13.12 Une paire proton-antiproton peut être créée par l'absorption d'un photon (γ) par un proton au repos.

$$\gamma + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + (\mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}}).$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Quelle énergie minimum E_γ doit avoir le photon ? (On exprimera E_γ à partir de l'énergie d'un proton au repos $m_p c^2$.) Comparer cette énergie à celle requise dans une collision proton-proton (comme dans l'exercice 13.10), et dans une collision électron-électron (comme dans l'exercice 13.11).

Exercice 13.13 Un proton de masse m_p subit une collision frontale avec un autre proton au repos et produit un méson π de masse $m_\pi \ll m_p$.

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \pi.$$

(a) Quelle est l'énergie cinétique minimale T_p du proton incident ?

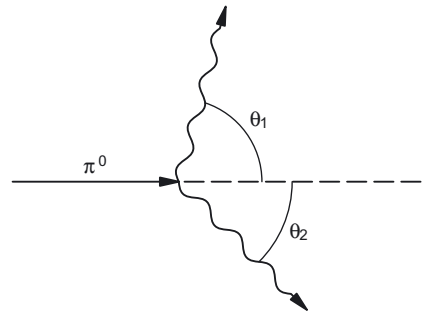
(b) Quelle est l'énergie cinétique T_π du méson au seuil ?

(c) Quelle erreur commet-on approximativement en utilisant des formules non-relativistes ?

Donner les réponses à partir de m_p et m_π. On peut utiliser des expressions non relativistes pour les énergies cinétiques et les transformations des vitesses.

Exercice 13.14 Un méson π^0 peut se désintégrer en deux rayons γ[3] que ce soit au repos ou en mouvement, comme le montre la figure 13.1 : $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$.

Figure 13.1



Note : Un rayon γ est un photon : $E_\gamma = p_\gamma c = h\nu$.

(a) Si le π^0 qui se désintègre a une vitesse $\boldsymbol{v}$ et une masse m_π, et si le rayon γ est émis à un angle θ par rapport à la direction initiale du π^0, trouver l'énergie du rayon γ en fonction de m_π, v, et θ.

(b) Quelles sont les énergies maximum et minimum, $E_{\max}$ et $E_{\min}$, qu'un rayon γ émis peut avoir et quels angles d'émission sont possibles ?

(c) Pouvez-vous trouver une expression simple pour $E_{\max}$ et $E_{\min}$ indépendante de la vitesse du π^0, et quelle est sa signification physique ?

3. L'existence et la valeur de la masse du π^0 ont été déterminées par une mesure de ce type. Référence : A. G. Carlson, J. E. Hooper, et D. T. King, *Phil. Mag.* ***41***, p. 701–724 (1950)

14. Rotations à deux dimensions, le centre de masse

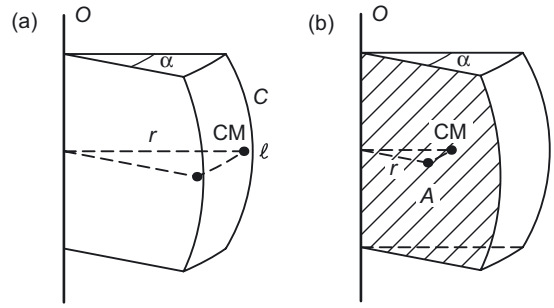
On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1, Chap. 18 et 19.

Exercice 14.1 Une roue rigide de rayon R roule sans glisser sur une surface horizontale. Le plan de la roue est vertical, et l'axe de la roue se déplace horizontalement à une vitesse V par rapport à la surface. Si l'axe de la roue est parallèle à l'axe z, V est dans la direction x-positif, et θ est l'angle dont la roue a tourné depuis qu'un certain point P sur son bord a été en contact avec le sol, montrer que la vitesse instantanée (valeur et direction) du point P est donnée par :

$$\boldsymbol{v} = V\left((1 - \cos\theta)\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}\right).$$

Exercice 14.2 La connaissance de l'aire (ou du volume) balayée par une courbe plane (ou une aire) peut être utilisée pour trouver le centre de masse d'un fil métallique fin ou d'une plaque plate fine.

Figure 14.1



(a) Montrer que l'aire A balayée par la courbe plane C dans sa rotation d'un angle α autour de l'axes O dans le plan de C, comme sur la figure 14.1(a), est égale à la longueur l de C, multipliée par la distance αr dont le CM se déplace,

$$A = \alpha r l,$$

(où r est la distance de CM à O).

(b) Montrer que le volume V balayé par l'aire plane A dans une rotation d'un angle α autour de l'axe O, représenté sur la figure 14.1(b), est égal à l'aire A multipliée par la distance dont se déplace le CM,

$$V = \alpha r A.$$

Exercice 14.3 Montrer que le CM d'un ensemble quelconque de particules se déplace comme le ferait une seule particule ayant comme masse la somme des masses individuelles, et sujette à la somme des forces appliquées à chacune de ces particules,

$$M\ddot{\boldsymbol{R}} = \sum_i \boldsymbol{f}_i.$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 14.4 Une force de $\boldsymbol{F} = 30\boldsymbol{i} + 40\boldsymbol{j}$ newtons agit en un point à $\boldsymbol{r} = 8\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$ mètres. Trouver :

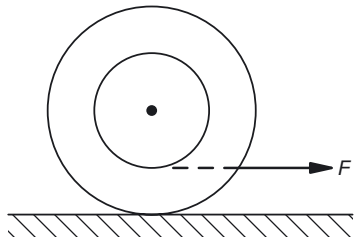
(a) le couple τ par rapport à l'origine ;

(b) la grandeur (longueur) l du bras de levier de la force ;

(c) la composante de la force $F_\perp$ perpendiculaire à $\boldsymbol{r}$.

Exercice 14.5 Un yo-yo posé sur une table horizontale est libre de rouler sans glisser. Si on lui applique une force horizontale $\boldsymbol{F}$ comme sur la figure 14.2, va-t-il rouler dans la direction de $\boldsymbol{F}$ ou dans la direction opposée ? Pourquoi ?

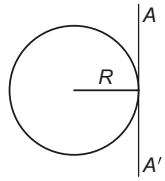
Figure 14.2



Exercice 14.6 À quelle latitude λ la vitesse tangentielle d'un point due à la rotation de la Terre est-elle de 200 m/s inférieure à sa valeur à Los Angeles (latitude 34°N) ?

Exercice 14.7 Un cercle de rayon R tangent à un axe AA', comme sur la figure 14.3, tourne autour de cet axe pour engendrer un tore. Trouver le volume V de ce tore.

Figure 14.3

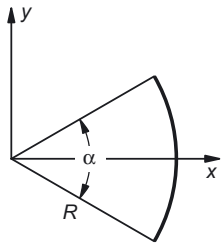


Exercice 14.8 Une masse M et une masse $2M$ sont en rotation autour de leur CM à une vitesse angulaire ω, à une distance fixe R l'une de l'autre. Quelle est leur énergie cinétique de rotation T ?

Exercice 14.9

(a) Trouver le CM d'un fil métallique uniforme et fin de longueur L, plié en un arc de cercle de rayon R ($R > L/2\pi$). Utiliser des coordonnées dont l'origine est au centre du cercle et dont l'axe x passe au centre du fil, comme sur la figure 14.4.

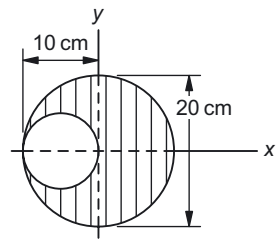
Figure 14.4



(b) Utiliser le résultat précédent pour trouver le CM d'un secteur circulaire contitué d'une feuille uniforme métallique, si le secteur a un rayon R et sous-tend un angle α au centre, comme sur la figure.

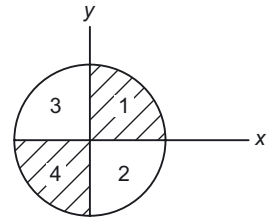
Exercice 14.10 Un disque de densité uniforme est percé d'un trou, comme sur la figure 14.5. Trouver les coordonnées du centre de masse.

Figure 14.5



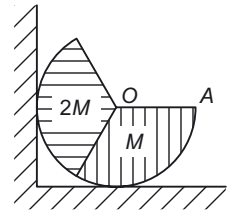
Exercice 14.11 Un cylindre solide a une densité qui varie d'un quart de cercle à l'autre comme sur la figure 14.6, où les nombres indiquent les densités relatives. Si les axes x-y sont tels qu'indiqués, quelle est l'équation de la droite passant par l'origine et par le centre de masse ?

Figure 14.6



Exercice 14.12 Un cylindre de rayon π cm et de masse 3 kg est coupé en trois tiers. La même chose est faite sur un autre cylindre de rayon π cm et de masse 6 kg. Un morceau d'un des cylindres est collé sur un morceau de l'autre de façon à fabriquer l'arrangement montré sur la figure 14.7, où le rayon OA est horizontal. Le plancher a suffisamment de frottements pour qu'il n'y ait pas de glissement, et le mur n'a pas de frottements.

Figure 14.7



(a) Quelle force F le cylindre exerce-t-il sur le mur ?

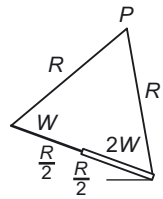
(b) À quelle distance x du centre suivant le rayon OA devrait-on placer une masse ponctuelle M de façon que le système reste en équilibre si l'on retire le mur ?

Note : Pour la position de CM d'un secteur de cercle, voir l'exercice 14.9.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

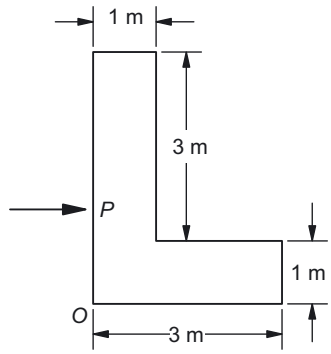
Exercice 14.13 Une tige de longueur R est constituée de deux morceaux uniformes de même longueur $R/2$, mais l'un des morceaux a une masse double de celle de l'autre. La tige est suspendue par des cordes de longueur R attachées à chaque extrémité et attachées par un clou en P, comme le montre la figure 14.8. Lorsque le système est au repos, quel angle α la tige fait-elle avec l'horizontale ?

Figure 14.8



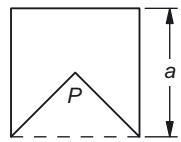
Exercice 14.14 Un corps en forme de L (voir la figure 14.9) est constitué d'une feuille métallique d'épaisseur uniforme et repose sur un table horizontale sans frottement. Elle est heurtée au point P dans la direction indiquée et se met en marche sans tourner sur elle-même. À quelle distance du centre O le coup a-t-il été appliqué ?

Figure 14.9



Exercice 14.15 Dans une feuille métallique carrée uniforme de côté a, on découpe un triangle isocèle à partir d'un côté comme sur la figure 14.10, de telle façon que le métal restant, s'il est suspendu par la pointe P de la coupure, reste en équilibre dans n'importe quelle position. Quelle est la hauteur h du triangle découpé ?

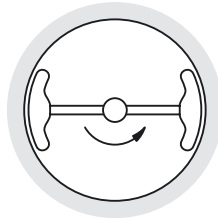
Figure 14.10



Exercice 14.16 Deux masses M_1 et M_2 sont placées aux extrémités d'une tige rigide de longueur L et de masse négligeable. Les dimensions de M_1 et de M_2 sont négligeables devant L. La tige est mise en rotation autour d'un axe qui lui est perpendiculaire. En quel point x de la tige (mesuré à partir de M_2) doit-on faire passer l'axe de façon que le travail nécessaire pour faire tourner la tige à une vitesse angulaire ω_0 soit minimum ?

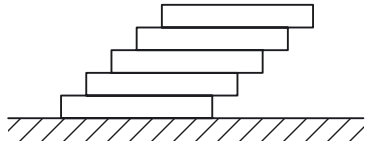
Exercice 14.17 Les éléments essentiels d'une forme simple de régulateur de vitesse sont montrés sur la figure 14.11. Un bras horizontal est monté de façon symétrique sur l'axe d'un puits vertical et, sur le bras, sont disposés des patins qui se déplacent librement. Lorsque l'axe tourne, les patins appuient sur la surface interne d'un tambour cylindrique immobile. Si les patins ont chacun une masse m et que leur épaisseur est négligeable par rapport au rayon interne r du tambour du frein, et si le coefficient de frottement de glissement entre les patins et le tambour est μ, quelle est la puissance P nécessaire pour faire tourner l'axe du frein, en fonction de m, r, μ et f, la fréquence de rotation de l'axe ?

Figure 14.11



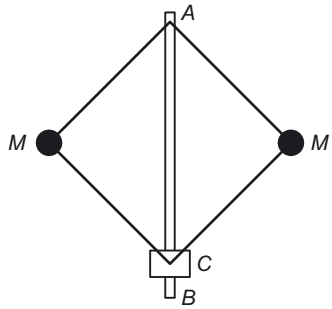
Exercice 14.18 Une brique uniforme de longueur L est déposée sur une surface horizontale lisse. D'autres briques identiques sont alors empilées comme sur la figure 14.12, de façon que les côtés forment des plans continus, mais les extrémités sont décalées d'une brique à la suivante par une distance L/a, où a est un entier. Combien de briques, n, peuvent être empilées de cette façon avant que la pile ne s'effondre ?

Figure 14.12



Exercice 14.19 Un limiteur de rotation, comme sur la figure 14.13, doit être conçu de telle façon qu'il arrête le moteur lorsque la machine à laquelle il est directement relié atteint une vitesse de 120 tours par minute. Le collier C pèse 4,5 kg et glisse sans frottements sur l'axe vertical AB. C est construit pour que la puissance soit coupée lorsque la distance $\overline{AC}$ descend à 40 cm. Si les quatre liens du limiteur font chacun 30 cm de long entre des articulations sans frottements, et sont à peu près sans masse, quelle doit être la valeur des masses M pour que le limiteur fonctionne comme prévu ?

Figure 14.13



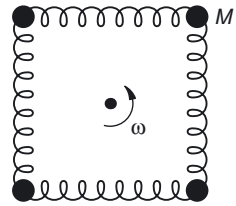
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 14.20 Quatre masses M dans le même plan, dans l'espace sans champs, reliées par de très légers ressorts de constante k tournent à une vitesse angulaire ω autour d'un axe perpendiculaire au plan et passant par le centre de symétrie du système, comme sur la figure 14.14. Les ressorts ont une longueur au repos de L.

(a) En supposant le système à l'équilibre, de combien ΔL, les ressorts sont-ils tendus ?

(b) Quelle condition détermine si l'équilibre stable est possible ?

Figure 14.14



15. Moment cinétique, le moment d'inertie

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1, Chap. 18 et 19.

Exercice 15.1 Une masse ponctuelle se déplace sous l'action d'une force centrale – c'est-à-dire une force dont la direction passe par un point fixe. Montrer que le moment cinétique de cette masse reste constant. Montrer que ce résultat est équivalent à la deuxième loi de Kepler pour le mouvement planétaire.

Exercice 15.2 La formule $\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$ est générale pour un corps solide si l'on considère toutes les forces y compris les (pseudo) forces d'inertie. Si l'on incorpore les forces d'inertie, montrer que $\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$ est encore valable pour :

(a) tout axe fixe extérieur au corps ;

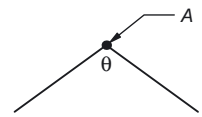
(b) tout axe de direction fixe passant par le CM du corps ;

(c) un axe autour duquel le corps est en rotation à chaque instant (axe instantané de rotation).

Combien de ces propositions pouvez-vous démontrer ?

Exercice 15.3 Un fil métallique droit, uniforme, de longueur L et de masse M est plié en son milieu de façon à former un angle θ, comme sur la figure 15.1. Quel est son moment d'inertie I par rapport à un axe passant par le point A, et perpendiculaire au plan du fil ?

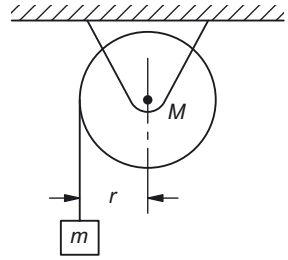
Figure 15.1



Exercice 15.4 Une trappe de masse m et de largeur l est articulée verticalement par un côté sur une charnière fixée au sol. Si on la laisse tomber, à quelle vitesse angulaire ω atteindra-t-elle le sol ? On négligera les frottements de la charnière.

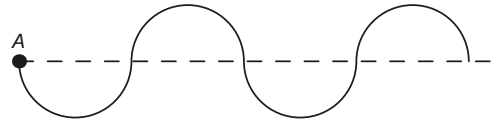
Exercice 15.5 Une masse m est suspendue à un fil enroulé sur un cylindre circulaire solide de masse M et de rayon r, qui tourne sur des roulements à billes sans frottements comme sur la figure 15.2. Trouver l'accélération a de m.

Figure 15.2



Exercice 15.6 Calculer le moment d'inertie I de l'objet décrit sur la figure 15.3, par rapport à l'axe A perpendiculaire au plan de la figure. L'objet est constitué de quatre demi-cercles de rayon a faits de fil métallique uniforme, de masse totale M.

Figure 15.3



Exercice 15.7 Calculer les moments d'inertie I des objets rigides suivants, chacun de masse m :

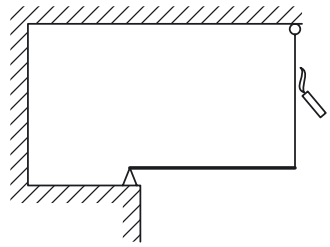
(a) une baguette droite uniforme de longueur L, autour d'un axe perpendiculaire passant par une de ses extrémités ;

(b) un cylindre circulaire de paroi mince et de rayon r, autour de son axe, et

(c) un cylindre plein de rayon r, autour de son axe.

Exercice 15.8 Une extrémité d'une baguette horizontale fine de masse M, de longueur L repose sur un support, tandis que l'autre extrémité est suspendue à un fil, comme sur la figure 15.4. Quelle force F est exercée sur le support immédiatement après que le fil ait brûlé ?

Figure 15.4

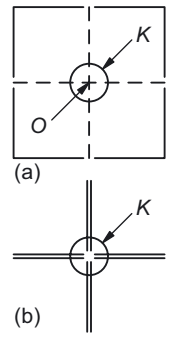


Exercice 15.9 Huit baguettes uniformes, chacune de longueur L et de masse m, sont maintenues en forme de carré par une structure de masse négligeable montrée en pointillé sur la figure 15.5(a). Le carré est mis en rotation libre autour d'un axe sans frottements perpendiculaire passant par O, avec une vitesse angulaire ω_0 (en radians par seconde). Pendant la rotation, un mécanisme interne K, attaché à la structure externe et d'un moment d'inertie constant par rapport à O de $(40/3)mL^2$, transforme le carré en une croix

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

schématisée sur la figure 15.5(b). Quel travail W le mécanisme a-t-il effectué pendant la transformation ?

Figure 15.5



Exercice 15.10

(a) Un objet symétrique, initialement au repos, roule sans glisser sur un plan incliné de hauteur h. Le moment d'inertie de l'objet par rapport à son centre de masse est I, la masse est M, et le rayon de la surface en rotation au contact du plan est r. Déterminer la vitesse linéaire V_0 du centre de masse en bas du plan incliné.

(b) Appliquer l'équation générale de question précédente (a) pour déterminer la vitesse du centre de masse si l'objet est :

1. une sphère,
2. un disque,
3. un disque de masse M_1 et de rayon externe R_1, monté sur une roue de masse m_2 et de rayon r_2 sur laquelle il roule.

Exercice 15.11 Sur une boucle sans fin inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale, on place un cylindre uniforme dont l'axe est horizontal et perpendiculaire aux côtés du support en mouvement. Les surfaces sont telles que le cylindre peut rouler sans glisser sur la boucle. De quelle façon doit-on ajuster le mouvement de la boucle pour que l'axe du cylindre demeure immobile ?

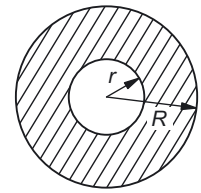
Exercice 15.12 Deux cylindres indistinguables de même masse et de dimensions extérieures identiques roulent vers le bas d'un plan incliné. Un des cylindres atteint le bas avant l'autre.

(a) Que peut-on en conclure ?

(b) Justifier cette hypothèse sur la composition interne des cylindres en calculant l'effet observé.

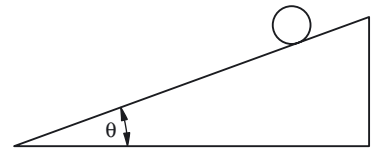
Exercice 15.13 Une balle sphérique de rayon R contient un trou vide concentrique de rayon r ($r < R$), comme sur la figure 15.6. La masse volumique ρ est constante entre r et R. Exprimer le moment d'inertie I de la balle autour d'un axe passant en son centre en fonction de r, R, et ρ, et également en fonction de r, R, et de la masse totale M.

Figure 15.6



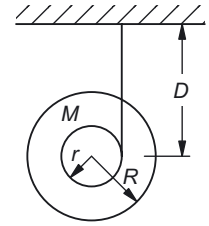
Exercice 15.14 Une balle solide uniforme est au repos sur une pente d'angle θ, comme sur la figure 15.7. Quelle est la valeur minimum μ_0 du coefficient de frottement statique μ entre la balle et la pente telle que la balle roulera sur la pente sans glisser ?

Figure 15.7



Exercice 15.15 Une bobine en forme de yo-yo est formée de deux disques uniformes, chacun de masse M et de rayon R, et d'un axe de rayon r et de masse négligeable. Un fil est enroulé autour de l'axe et attaché au plafond, et la bobine est relâchée au repos d'une distance D au-dessous du plafond comme sur la figure 15.8.

Figure 15.8

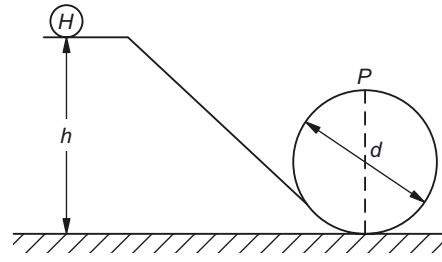


(a) S'il n'y a pas de mouvement pendulaire, quel angle θ fait le fil avec la verticale quand la bobine est relâchée ?

(b) Quelle est l'accélération vers le bas a du centre de la bobine ?

Exercice 15.16 La boucle H de rayon r, montrée sur la figure 15.9, roule sans glisser sur une pente. La hauteur de départ h est telle que la boucle acquiert une vitesse tout juste suffisante pour faire un « saut périlleux », c'est-à-dire qu'elle garde contact avec la piste circulaire en P. Que vaut h ?

Figure 15.9



© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 15.17 Un palet de masse m sur coussins d'air se déplace sur la surface d'une table horizontale, guidé par une ficelle attachée au palet et passant par un petit trou percé dans la surface de la table. Initialement, la longueur de la ficelle au-dessus de la table est r_1, et le palet est envoyé à une vitesse v_1 sur une trajectoire circulaire de ce rayon. La ficelle est alors tirée vers le bas au travers du trou jusqu'à ce qu'il en reste une longueur r_2 au-dessus de la table. Trouver :

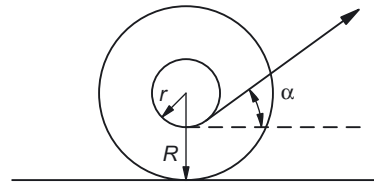
(a) la vitesse finale v_2 du palet ;

(b) le travail W nécessaire pour tirer la ficelle au travers du trou de r_1 à r_2 ;

(c) et la valeur de la force F nécessaire pour maintenir le rayon constant, en utilisant le principe de conservation de l'énergie.

Exercice 15.18 Un yo-yo de masse M, de rayon externe R, et de moment d'inertie I, est libre de rouler sans glisser sur une table horizontale. Une force F, d'angle α avec l'horizontale, est appliquée sur le rayon interne r, comme sur la figure 15.10.

Figure 15.10

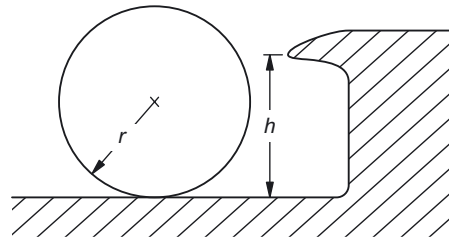


(a) Trouver l'accélération a du yo-yo, s'il ne se soulève pas de la table.

(b) Quelle force F d'angle α est nécessaire pour soulever le yo-yo de la table ?

Exercice 15.19 Trouver le rapport h/r de la hauteur h du rebord d'une table de billard au rayon r des boules (voir la figure 15.11) de telle façon qu'une boule arrivant en roulant sans glisser rebondit en roulant même si le coefficient de frottement entre la table et la boule est négligeable. On supposera que la force exercée sur la boule lors de l'impact est horizontale.

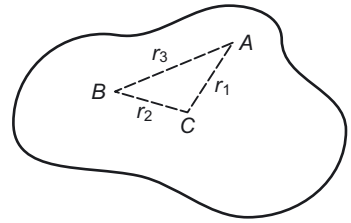
Figure 15.11



Exercice 15.20 Une plaque métallique irrégulière d'épaisseur uniforme et de masse M a son centre de masse en C, comme sur la figure 15.12. Le moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire à la plaque et passant par A est connu et vaut I_A. Dans quelles conditions sur $r_1 = \overline{AC}$, $r_2 = \overline{BC}$, et $r_3 = \overline{AB}$ peut-on exprimer correctement le moment d'inertie par rapport à un axe passant par B, et également perpendiculaire à la plaque comme étant :

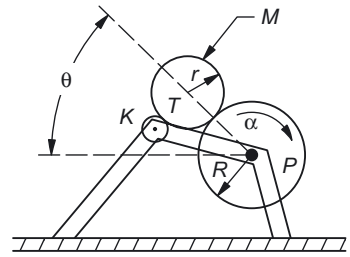
$$I_B = I_A + Mr_3^2 \,?$$

Figure 15.12



Exercice 15.21 L'adaptation d'un dispositif d'encrage pour une presse à imprimer est montré sur la figure 15.13. K est un rouleau encreur bien fixé mais tournant au ralenti ; P est un rouleau d'impression fermement maintenu et T est un rouleau de transfert qui flotte librement entre K et P. T est un cylindre solide de rayon r et de masse M ; il roule toujours sans glisser sur K et sur P, et la géométrie du système est telle que la ligne reliant les centres TP fait un angle θ au-dessus de l'horizontale. Quelle est l'accélération maximum $\alpha_{\max}$ que l'on peut donner à P sans que T perde le contact avec K ?

Figure 15.13



Exercice 15.22 Une baguette fine uniforme de longueur $2l$ tournant dans un plan horizontal avec une vitesse angulaire ω_0 autour d'un axe fixe, vertical, passant par son centre, est posée doucement sur une table horizontale de coefficient de frottement μ. Combien de temps t faut-il pour que la baguette cesse sa rotation ? On supposera que la baguette est uniformément portée par la table.

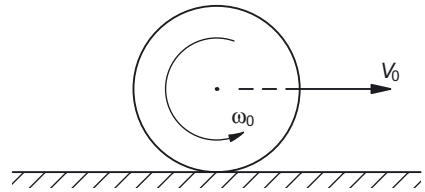
Exercice 15.23 Une balle de bowling uniforme de rayon R et de masse M est lancée de telle façon qu'elle glisse sans rouler à la vitesse V_0 sur une piste de coefficient de frottement μ.

(a) Quelle distance D parcourt la boule avant de rouler sans glisser ?

(b) Quelle est alors sa vitesse V ?

Exercice 15.24 Un exercice amusant consiste à appuyer avec le doigt sur une bille posée sur un dessus de table horizontal de telle façon que la bille soit projetée sur la table, comme le montre la figure 15.14, avec une vitesse linéaire initiale V_0 et une rotation vers l'arrière de vitesse angulaire ω_0 autour d'un axe horizontal perpendiculaire à V_0.

Figure 15.14



© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

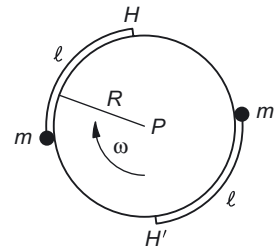
Si le coefficient de frottement par glissement entre la bille et la table est constant, et que la bille est de rayon R,

(a) Quelle relation doit-il y avoir entre V_0, R, et ω_0 pour que la bille glisse jusqu'à un arrêt parfait ?

(b) Quelle relation doit-il y avoir entre V_0, R, et ω_0 pour que la bille glisse, s'arrête, puis rebrousse chemin jusqu'à sa position de départ avec une vitesse finale de $3V_0/7$?

Exercice 15.25 Un disque uniforme circulaire de rayon R et de masse M tourne librement à une vitesse angulaire ω sur un plan horizontal autour d'un pivot P en son centre. Deux petites masses m sont épinglées sur son bord, attachées avec des fils de longueur l enroulés sur son pourtour, comme sur la figure 15.15. Pendant que le disque tourne, ces masses sont relâchées en même temps sans que l'on perturbe le moment cinétique de l'ensemble du système. Les masses s'écartent, et les fils de maintien se détachent des crochets H,H' lorsque les fils sont en direction radiale vers l'extérieur. Trouver la longueur l des fils telle que la rotation du disque cesse.

Figure 15.15



Note : Ce dispositif a été employé pour réduire le mouvement de rotation propre de satellites et vaisseaux spatiaux.

Exercice 15.26 Si Moe (coordonnées x',y') est en rotation par rapport à Joe (coordonnées x,y), qui est au repos,

(a) Trouver les équations des composantes apparentes de la force qui doit être appliquée à une particule de masse m d'après Moe.

(b) Montrer qu'elles sont la somme des composantes de la véritable force $\boldsymbol{F}$ vue par Joe, et de celles de deux pseudo forces : une force radiale centripète et une force de Coriolis à angle droit avec la vitesse.

Note : On supposera que la transformation entre les deux systèmes de coordonnées est donnée par :

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta, \end{aligned}$$

avec $\theta = \omega t$.

Exercice 15.27 Trouver le moment cinétique d'une planète de masse m se déplaçant sur une orbite circulaire de rayon R. Déduire de ce résultat que la distance entre la Terre et la Lune doit augmenter sur une période de temps longue à cause des effets de marée sur la rotation de la terre. Discuter également de la conservation de l'énergie dans le système Terre-Lune du point de vue de la possibilité que la Lune échappe ou non à son orbite terrestre.

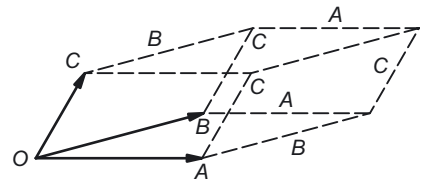
16. Rotations à trois dimensions

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1, Chap. 20.

Exercice 16.1 Trois vecteurs quelconques $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, et $\boldsymbol{C}$ peuvent être considérés comme définissant un corps solide ayant six faces parallèles deux à deux – un parallélépipède (voir la figure 16.1). Montrer que le volume intérieur de parallélépipède est

$$V = |\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})|.$$

Figure 16.1



Exercice 16.2 En écrivant les vecteurs à partir de leurs composantes, ou bien de tout autre façon, montrer les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \\
(\alpha \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} &= \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \\
\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} \\
\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \\
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} &= 0 \\
\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) &= 0
\end{aligned}$$

Exercice 16.3 Un corps solide indéformable tourne à une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ autour d'un axe fixe. Montrer que la vitesse d'un point P quelconque du solide est $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, où $\boldsymbol{r}$ est un vecteur reliant un point quelconque de l'axe au point P.

Exercice 16.4 Un ensemble de N particules de masses m_i, positions $\boldsymbol{r}_i$, et vitesses $\boldsymbol{v}_i$ a un certain moment cinétique

$$\boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i.$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Par ailleurs, si l'on se place dans un système de coordonnées se déplaçant avec leur centre de masse, elles ont un moment cinétique $\boldsymbol{L}_{\mathrm{CM}}$. Si $\boldsymbol{R}_{\mathrm{CM}}$ et $\boldsymbol{V}_{\mathrm{CM}}$ sont la position et la vitesse du CM, et $M = \sum m_i$ la masse totale des particules, montrer que :

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_{\mathrm{CM}} + M\boldsymbol{R}_{\mathrm{CM}} \times \boldsymbol{V}_{\mathrm{CM}}.$$

Exercice 16.5 Un solide indéformable est tourné d'un angle infinitésimal $\Delta\theta_1$ autour d'un certain axe. Il est ensuite tourné d'un angle infinitésimal $\Delta\theta_2$ autour d'un autre axe qui coupe le premier en un point O. Montrer que le déplacement total d'un point quelconque du corps est le même que s'il avait été tourné d'un seul angle infinitésimal autour d'un autre axe, et montrer comment l'on trouve cet axe et l'angle. Utiliser ce résultat pour montrer qu'un corps rigide soumis simultanément à des vitesses angulaires autour d'axes différents se déplace comme s'il avait une seule vitesse angulaire égale à leur somme vectorielle, en traitant chaque vitesse angulaire comme un vecteur de longueur ω dirigé suivant l'axe de rotation.

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2.$$

Exercice 16.6 Un parallélépipède ayant un sommet à l'origine, comme sur la figure 16.1, a trois sommets adjacents aux points $(10, -5, 3)$, $(3, -4, 7)$, et $(-5, -6, 3)$ mètres, en coordonnées rectangulaires (x,y,z). Quel est son volume V ?

Exercice 16.7 Si les calottes glaciales polaires fondaient, qu'arriverait-il à la période de rotation de la Terre ? Expliquer pourquoi.

Exercice 16.8 Comment peut-on distinguer un œuf dur d'un œuf frais (sans casser la coquille) ?

Exercice 16.9 Un avion à réaction dans lequel tous le moteurs tournent dans le sens positif par rapport la direction de vol, effectue un virage à gauche. Par effet gyroscopique, l'avion a-t-il tendance à :

(a) rouler à droite ?
(b) rouler à gauche ?
(c) tourner brusquement à droite ?
(d) tourner brusquement à gauche ?
(e) piquer vers le haut ?
(f) piquer vers le bas ?

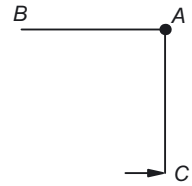
Pourquoi ?

Exercice 16.10 Deux masses égales sont reliées par une corde flexible de longueur l. Un expérimentateur tient l'une des masses dans la main et fait tourner l'autre masse, initialement au repos, de plus en plus vite sur un cercle horizontal jusqu'à ce qu'elle atteigne la vitesse angulaire ω_0 ; à ce moment, il lâche la masse qu'il tient dans la main.

(a) Si la corde se casse pendant l'expérience, se casse-t-elle avant ou après qu'il ait lâché les masses ?
(b) Si la corde ne se casse pas, décrire le mouvement des masses après qu'elles aient été lâchées.

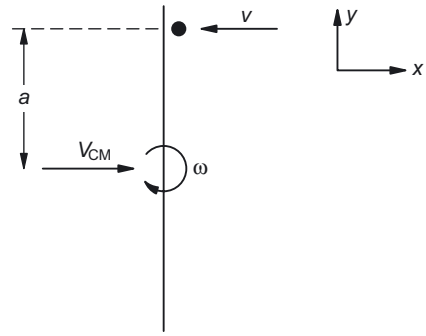
Exercice 16.11 Deux baguettes uniformes, identiques et raides AB et AC sont articulées en A et sont placées sur une table lisse horizontale avec $AC \perp AB$, comme sur la figure 16.2. On administre un coup horizontal perpendiculaire à AC en C. Trouver le rapport des vitesses linéaires des CM des deux baguettes, v_{AC}/v_{AB}, juste après le coup.

Figure 16.2



Exercice 16.12 Une baguette fine uniforme de masse M et de longueur L et un palet de masse m glissent sans frottement sur un plan horizontal. À un certain instant, la baguette est perpendiculaire à la direction de la vitesse de son centre de masse, qui est $\boldsymbol{V}_{CM} = +V\boldsymbol{i}$ et a une vitesse angulaire autour de son centre de masse $\boldsymbol{\omega} = -\omega\boldsymbol{k}$, comme sur la figure 16.3. À cet instant, elle entre en collision avec le palet qui, auparavant, se déplaçait à la vitesse $\boldsymbol{v} = -v\boldsymbol{i}$. Trouver v et la distance a entre le centre de la baguette et le point de contact tels que la baguette soit immobile après la collision. On considèrera que la collision est parfaitement élastique.

Figure 16.3



Exercice 16.13 Un cercle en bois mince de masse m et de rayon R repose sur un plan horizontal sans frottements. Un balle, de même masse m, se déplaçant à l'horizontale à la vitesse v, frappe le cercle et se plante dans le bois, comme sur la figure 16.4. Calculer :

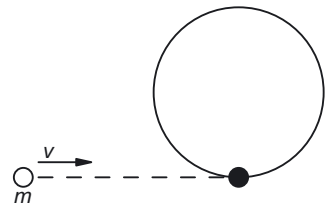
(a) la vitesse du centre de masse V_{CM} ;

(b) la vitesse angulaire L du système autour du CM ;

(c) la vitesse angulaire ω du cercle de bois ;

(d) et l'énergie cinétique T du système avant et après la collision.

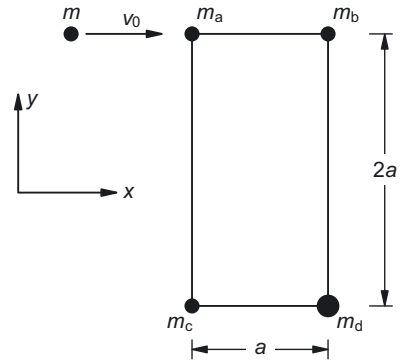
Figure 16.4



© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

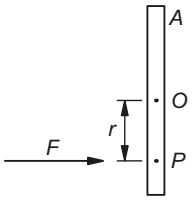
Exercice 16.14 Les quatre masses ($m_a = m_b = m_c = m_d/2$) de la figure 16.5 sont placées aux quatre coins d'un rectangle sur une surface horizontale sans frottements. Elles sont reliées par des tiges de poids négligeable. Une autre masse $m = m_a$ de vitesse v_0 dans la direction des x positifs entre en collision avec m_a et se colle à elle. Décrire le mouvement de l'objet après la collision.

Figure 16.5



Exercice 16.15 Une baguette uniforme de longueur L et de masse M est au repos sur une surface horizontale sans frottements. La baguette reçoit une impulsion $J = \int F dt$ de très courte durée appliquée à angle droit en un point P tel que $\overline{OP} = r$, comme sur la figure 16.6.

Figure 16.6



(a) Immédiatement après l'impulsion, quelle est la vitesse V_O du centre de masse O ?

(b) Quelle est la vitesse angulaire ω autour de O ?

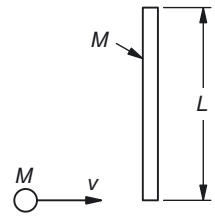
(c) Quelle est la vitesse instantanée V_A de l'extrémité A ?

(d) Déterminer la distance $\overline{AP}$ telle que la vitesse du point A soit nulle juste après l'impact.

(e) Si la baguette est tenue verticalement par un pivot en A, en quel point P doit-on exercer une impulsion sur la baguette de façon à la mettre en rotation autour de A sans exercer de force latérale sur le pivot ?

Exercice 16.16 Une baguette fine de masse M et de longueur L est au repos sur une surface horizontale sans frottements, comme sur la figure 16.7. Un petit morceau de pâte à modeler également de masse M, et de vitesse v dirigée perpendiculairement à la baguette, heurte une extrémité et s'y colle, faisant ainsi une collision inélastique de très courte durée.

Figure 16.7



(a) Quelle est la vitesse V_{CM} du centre de masse du système avant et après la collision ?

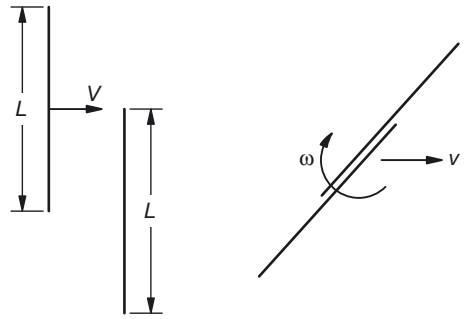
(b) Quel est le moment cinétique L du système juste avant la collision ?

(c) Quelle est la vitesse angulaire ω (autour du centre de masse) juste après la collision ?

(d) Quel pourcentage de l'énergie cinétique est perdu dans la collision ?

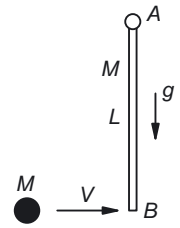
Exercice 16.17 Deux perches identiques, rigides de longueur L et de masse M sont libres de se déplacer sans frottements sur une surface horizontale. Au départ, l'une est au repos et l'autre en translation à la vitesse V suivant une droite perpendiculaire aux deux, comme sur la figure 16.8. Les perches entrent en collision de telle façon que le centre de l'une d'elles rencontre une extrémité de l'autre, et ensuite elles restent collées. Trouver la vitesse linéaire V_f et la vitesse angulaire ω_f de l'ensemble après collision.

Figure 16.8



Exercice 16.18 Un barreau uniforme AB de masse M et de longueur L est libre de tourner dans un plan vertical autour d'un axe horizontal placé à son extrémité A, comme sur la figure 16.9. Un morceau de pâte à modeler, également de masse M, est jeté horizontalement à la vitesse V à l'extrémité inférieure B alors que le barreau est au repos. La pâte se colle au barreau. Quelle doit être la vitesse minimale de la boule de pâte à modeler pour que le barreau fasse un tour complet autour de A ?

Figure 16.9

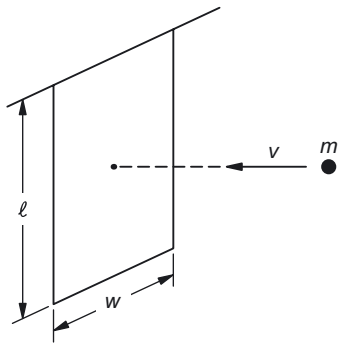


Exercice 16.19 Une planche rigide fine de masse M, d'épaisseur w et de longueur l, est suspendue verticalement à un axe horizontal sans frottements le long de son côté

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

supérieur, comme sur la figure 16.10. Une balle de masse m, de vitesse v perpendiculaire à la planche se fixe en son milieu.

Figure 16.10



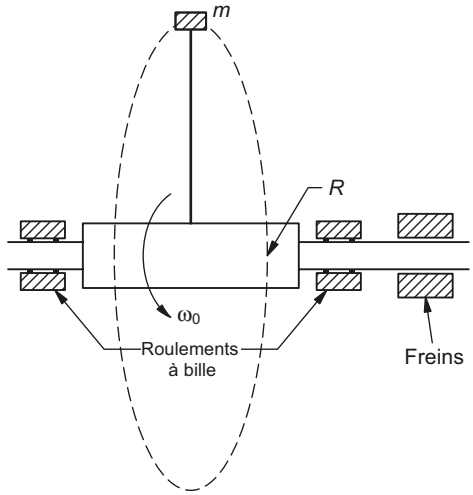
(a) Juste après l'impact, quelle est la vitesse v_f de la balle ?

(b) De quel angle θ le système va-t-il tourner ?

(c) Quelle impulsion J est ressentie par les roulements qui maintiennent l'axe ?

Exercice 16.20 Un fuseau horizontal, de rayon r et de moment d'inertie I_0 autour de son axe, supporte un fil qui lui-même est attaché à une masse m dont les dimensions sont petites par rapport aux autres dimensions du problème, comme le montre la figure 16.11. Initialement, on fait tourner le fuseau autour de son axe horizontal à une vitesse angulaire constante ω_0, et la masse m tourne avec la même vitesse angulaire sur un cercle vertical de rayon R. ω_0 est si élevé que l'effet de la pesanteur est négligeable. À $t = 0$ on exerce un frein qui stoppe le fuseau sur quelques degrés de sa rotation.

Figure 16.11



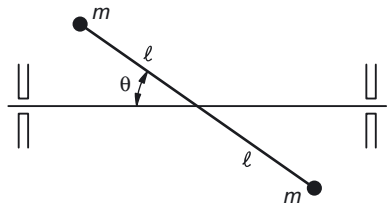
(a) Quelle impulsion angulaire J le frein a-t-il fourni ?

(b) Lorsque la corde a fait exactement dix tours autour du fuseau, elle casse. Quelle est sa force de rupture F ?

Attention : Le moment cinétique n'est pas conservé après l'arrêt du fuseau. Pouvez-vous voir pourquoi ?

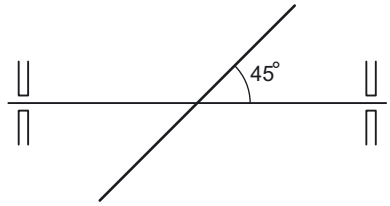
Exercice 16.21 Deux barreaux, chacun de longueur l, chacun ayant une masse m attachée à son extrémité, sont fixés à un angle θ par rapport à un arbre, comme sur la figure 16.12. (L'arbre et les barreaux sont dans le même plan.) Quel couple τ_{max} les roulements supportant l'arbre doivent-ils pouvoir supporter si l'angle de fixation θ peut avoir n'importe quelle valeur de 0° à 90°, et que la vitesse angulaire maximum est ω ? (On négligera la masse des barreaux et on traitera les masses m comme ponctuelles.)

Figure 16.12



Exercice 16.22 Un barreau fin et uniforme de masse M et de longueur l est monté en son centre de masse sur un axe incliné à 45° comme sur la figure 16.13.

Figure 16.13

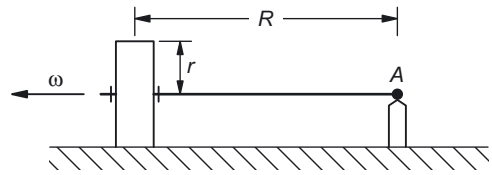


(a) Quel angle θ le vecteur moment cinétique fait-il avec l'axe de rotation ?

(b) Quel est le couple τ exercé par ce barreau lorsqu'il tourne à une vitesse angulaire ω ?

Exercice 16.23 Une roue mince solide montée sur un arbre vertical est contrainte à se déplacer sur un cercle de rayon R sur une table horizontale, comme sur la figure 16.14. L'axe pivote librement dans toutes les directions autour de A, qui est fixé sur l'arbre vertical. Si la masse de la roue est m, son rayon r, et sa vitesse angulaire autour de son axe ω, avec quelle force F appuie-t-elle sur la table ? On utilisera : $m = 1\,\text{kg}$, $R = 5\,\text{cm}$, $r = 10\,\text{cm}$, $\omega = 200\,\text{radian s}^{-1}$.

Figure 16.14

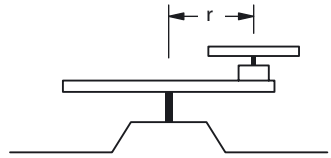


Exercice 16.24 Une table tournante T_1, au repos, est surmontée d'une autre table tournante T_2 qui tourne à la vitesse angulaire ω_2, comme sur la figure 16.15. À un certain instant un embrayage interne agit sur l'axe de T_2 pour l'arrêter par rapport à T_1, mais T_1 est libre de tourner. T_1 seule a une masse M_1 et un moment d'inertie I_1 autour d'un axe A_1 passant par son centre et perpendiculaire à son plan ; T_2 a une masse M_2 et un

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

moment d'inertie I_2 autour d'un axe semblablement disposé A_2 ; la distance entre A_1 et A_2 est r. Trouver la vitesse angulaire de T_1 après l'arrêt de T_2.

Figure 16.15



Exercice 16.25 Un homme se tient debout sur une plate-forme en rotation à une distance R du centre. Il lance une balle à une vitesse V à un autre homme diamétralement opposé à lui sur la plate-forme, également à une distance R du centre. Si la plate-forme tourne avec une vitesse angulaire ω,

(a) Quel est le rayon de courbure r de la trajectoire de la balle vue dans le système en rotation ?

(b) À quel angle θ par rapport au diamètre le lanceur doit-il viser ? (le montrer sur un diagramme.)

(c) À quoi ressemble la trajectoire pour un observateur au repos ?

Note : On supposera $V \gg \omega R$, de telle façon que la force centrifuge peut être ignorée.

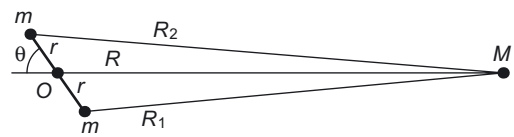
Exercice 16.26 Un certain vaisseau satellite de service est approximativement un cylindre circulaire uniforme de masse m, de rayon a, et de longueur L, avec $L = 6a$. Initialement, il tourne sur lui-même à une vitesse angulaire ω_0 autour de son axe long, mais, en raison de petites vibrations internes (dues à un petit mouvement de précession au départ), l'énergie est transformée en chaleur. Il en résulte que le satellite « ralentit ». Décrire le seul état de rotation final possible ; et trouver la vitesse angulaire correspondante ω_f, si le maximum possible d'énergie est transformée en chaleur. On suppose qu'il n'y a aucune influence extérieure.

Exercice 16.27 Si toute la glace sur Terre fondait, le niveau moyen des mers augmenterait d'environ 60 m. En choisissant 80° comme latitude moyenne des calottes glaciaires, et en négligeant la distribution irrégulière des océans, de quelle durée ΔT les journées augmenteraient-elles ?

Note : On supposera que la Terre est une sphère de rayon 6370 km et de moment d'inertie $8{,}11\ 10^{37}\ \mathrm{kg\,m^{-2}}$.

Exercice 16.28 Deux masses égales m sont fixées sur une tige sans masse à une distance $2r$, et sont attirées par la gravitation d'une masse M, située à une distance $R \gg r$ du centre O de la tige. La tige fait un angle θ avec R, comme sur la figure 16.16. Trouver la valeur approchée du couple τ au centre de la tige.

Figure 16.16



Exercice 16.29 Le couple élastique de rappel exercé par une fibre de torsion est proportionnel à l'angle de torsion : $\tau_{\text{fibre}} = -k\theta$.

(a) Montrer que l'énergie potentielle d'une telle fibre tordue d'un angle θ est $U = (1/2)k\theta^2$.

(b) Le couple de déflexion exercé sur le bobinage d'un galvanomètre est donné par l'expression

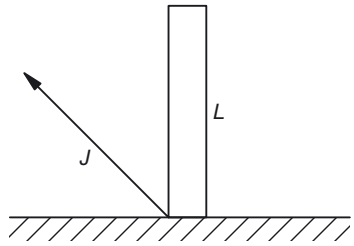
$$\tau = n\,AB\,i,$$

où
$i =$ courant dans la bobine,
$n =$ nombre de tours dans la bobine,
$A =$ aire transverse de la bobine
$B =$ champ magnétique produit par l'aimant permanent du galvanomètre.

Dans une expérience de laboratoire, la charge sur un condensateur est mesurée en le déchargeant dans le fil d'un galvanomètre et en notant la déflexion maximum. Ici $|i| = |dq/dt|$, et la décharge est si rapide que le galvanomètre ne bouge pratiquement pas de sa position initiale $\theta = 0$ durant l'écoulement du courant. En négligeant les frottements, montrer que la déviation maximum du galvanomètre est proportionnelle à la charge initiale du condensateur.

Exercice 16.30 Une tige verticale de masse M et de longueur L, comme sur la figure 16.17, reçoit une impulsion J à sa base, dirigée à 45° vers le haut par rapport à l'horizontale, qui envoie la tige en l'air. Quelle(s) valeur(s) doit avoir J de façon que le barreau atterrisse encore verticalement (C'est-à-dire verticalement, et posé sur l'extrémité où J a été appliquée.)

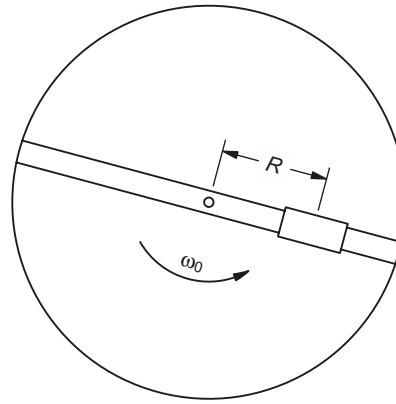
Figure 16.17



Exercice 16.31 Une table tournante de moment d'inertie I_0 tourne librement sur un axe vertical creux. Un chariot de masse m de déplace sans frottements sur une surface plane perpendiculaire à la table. Une corde attachée au chariot passe sur une petite poulie puis redescend à l'intérieur de l'axe creux, comme sur la figure 16.18. Initialement, le système tout entier tourne à une vitesse angulaire ω_0 et le chariot est à un rayon donné R de l'axe. Le chariot est alors tiré vers l'intérieur en appliquant une force supplémentaire à la corde, et arrive au rayon r, où on le maintient.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Figure 16.18



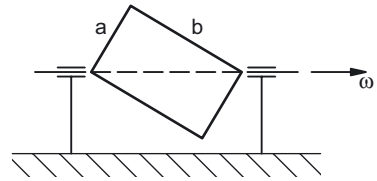
(a) Quelle est la nouvelle vitesse angulaire ω du système ?

(b) Montrer en détail que la différence d'énergie du système entre les deux situations est égale au travail de la force centripète.

(c) Si on relâche la corde, avec quelle vitesse radiale $\dot{r}$ le chariot passera-t-il au rayon R ?

Exercice 16.32 Une plaque rectangulaire fine de masse M, de côtés a, b, tourne autour d'un axe suivant sa diagonale à la vitesse angulaire ω, comme sur la figure 16.19.

Figure 16.19



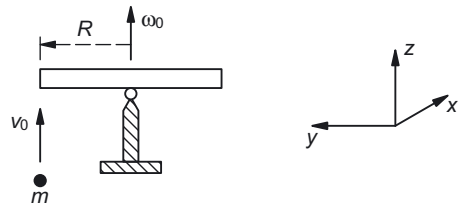
(a) Quelle est la fore F sur les supports ?

(b) Quelle est l'énergie cinétique T de la plaque en rotation ?

Exercice 16.33 Un volant de la forme d'une plaque mince circulaire uniforme de masse 10 kg et de rayon 1 m est monté sur un axe passant par son CM mais faisant un angle de 1° avec son plan. S'il tourne autour de cet axe avec une vitesse angulaire de 25 radian s^{-1}, quel couple τ doit être fourni par les supports de l'axe ?

Exercice 16.34 Un disque uniforme et mince de rayon R, de masse M est monté sur un support universel permettant une rotation autour d'un axe quelconque. Au début, il tourne sur lui-même autour d'un axe vertical (direction z) à la vitesse angulaire ω_0, comme sur la figure 16.20. Une petite masse m de vitesse v_0 dans la direction des z positifs entre en collision élastique avec le bord de la roue et rebondit dans la direction des z négatifs.

Figure 16.20

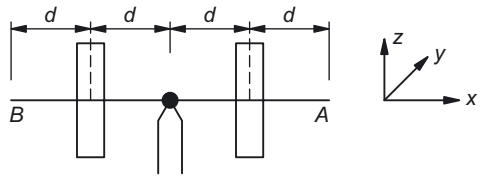


(a) Quelle est la direction du moment cinétique $\boldsymbol{L}$ du disque après la collision ?

(b) Décrire le mouvement de l'axe de la figure. Indiquer par un croquis la trajectoire du point d'intersection de l'axe de la figure avec une sphère de rayon unité vue d'en haut.

Exercice 16.35 Un paire de volants en forme de disques de 10 cm de rayon, de masse 2 kg, avec des supports sans frottements tournent à 1000 radian s^{-1} et sont portés à une distance $d = 15$ cm de chaque côté d'un support universel par une barre de petit diamètre AB de masse $M = 1$ kg et de longueur $4d$, comme sur la figure 16.21.

Figure 16.21



(a) Si une balle de masse $m = 10$ g est lâchée d'une hauteur $h = 5$ cm sur le bout A de la barre et rebondit vers le haut, donner les composantes du moment cinétique $\boldsymbol{L}$ des volants qui en résulte et dessiner le mouvement du bout de la barre dans la direction $+x$. Donner également la vitesse angulaire Ω_n de ce mouvement et le rayon r du cercle décrit par l'extrémité une fois que le mouvement circulaire est atteint.

(b) Si la même balle était attachée à l'extrémité A, quelle serait la vitesse angulaire de précession Ω_P, en négligeant la nutation ? Quel serait le moment cinétique L_P et l'énergie cinétique de rotation T_P associée Ω_P ? Combien d'énergie potentielle ΔE est perdue lorsque l'extrémité descend en dessous du plan xy ?

Exercice 16.36 La Lune et le Soleil exercent tous deux un couple sur la Terre à cause de l'aplatissement aux pôles de la Terre. Lequel des deux corps exerce le couple le plus important, et de quel facteur ?

Remarque 1 : On peut utiliser le fait, accidentel, que les deux corps, vus de la Terre, sous-tendent des angles presque égaux dans le ciel.

Remarque 2 : La densité moyenne du Soleil est de 1,41 g cm^{-3}, et celle de la Lune de 3,34 g cm^{-3}.

Exercice 16.37 Le rayon équatorial de la Terre est de 6378,388 km alors que son rayon polaire est de 6356,912 km. La pesanteur spécifique ρ à diverses profondeurs D sous la surface est montrée dans la table ci-dessous (* indique une discontinuité).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

D (km)	ρ
0	2,60
30*	3,0
	3.3
100	3,4
200	3,5
400	3,6
1000	4,7
2000	5,2
2900*	5,7
	9,4
3500	10,2
5000*	11,5
	16,8
6000	17,1

En utilisant ces valeurs, estimer :

(a) le moment d'inertie de la Terre I_{Terre},

(b) son moment cinétique de rotation L_{Terre},

(c) son énergie cinétique de rotation T_{Terre},

(d) le temps de précession T de l'axe de rotation de la Terre autour du pôle de l'écliptique dû au couples de la Lune et du Soleil.

Note : L'inclinaison de l'axe terrestre est de 23,5°.

17. L'OSCILLATEUR HARMONIQUE, ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1, Chap. 21.

Exercice 17.1 Montrer que les oscillations de faible amplitude d'un corps rigide suspendu à une distance D au-dessus de son centre de masse, comme sur la figure 17.1, sont décrites par :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{MgD}{I}\theta = 0,$$

et que la période d'oscillation T est donnée par :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}},$$

où M est la masse du corps et I son moment d'inertie par rapport à l'axe de suspension.

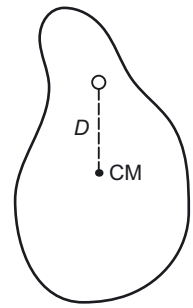


Figure 17.1

Exercice 17.2 Laquelle des masses de la figure 17.2 se déplace suivant un mouvement harmonique simple (c'est-à-dire sinusoïdal) ?

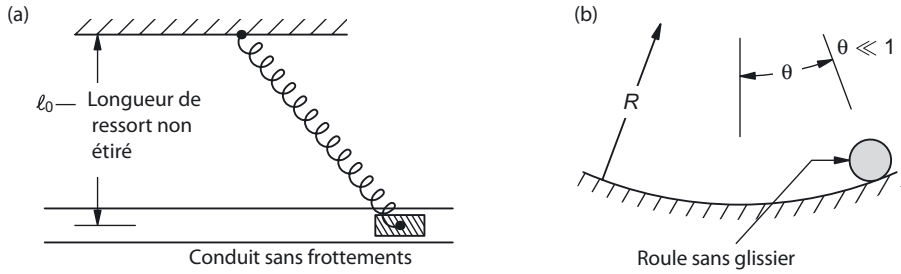
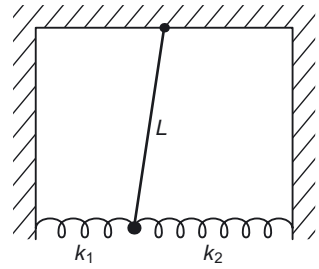


Figure 17.2

Exercice 17.3 Une baguette uniforme de masse M, de longueur L se balance comme un pendule avec deux ressorts horizontaux de masse négligeable et de constantes k_1 et k_2 agissant sur son extrémité inférieure, comme sur la figure 17.3. Les deux ressorts sont relâchés lorsque la baguette est verticale. Quelle est la période T des petites oscillations ?

Figure 17.3



Exercice 17.4 Soit un oscillateur harmonique simple, non amorti. À quelle distance x du point d'équilibre se trouve-t-il lorsque son énergie cinétique est égale à son énergie potentielle ? Exprimer le résultat en fonction de l'amplitude maximum A.

Exercice 17.5 Deux particules A et B exécutent des mouvements harmoniques de même amplitude 10 cm sur la même ligne droite. Pour la particule A, ω_A =20 radian s−1 ; pour B, $\omega_B = 21$ radian s^{-1}. Si à $t = 0$, elles passent toutes deux en $x = 0$ dans la direction des x positifs (et sont par conséquent « en phase »).

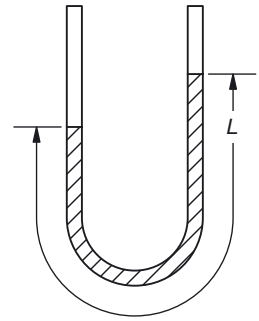
(a) À quelle distance, Δx, seront-elles l'une de l'autre à $t = 0{,}350$ s ?

(b) Quelle est la vitesse V de B par rapport à A à $t = 0{,}350$ s ?

Exercice 17.6 Le manomètre vertical en U de la figure 17.4 a une section transverse interne constante A et contient un liquide de longueur totale L. Trouver la période d'oscillation T du liquide. On négligera les frottements et on supposera que les oscillations sont telles que les deux surfaces liquides demeurent dans les portions verticales du tube.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

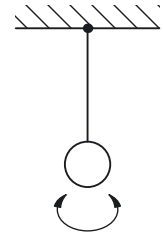
Figure 17.4



Exercice 17.7 À ses débuts, une colonie de bactéries croît à un taux proportionnel au nombre de bactéries présentes. Écrire l'équation différentielle qui exprime cette relation.

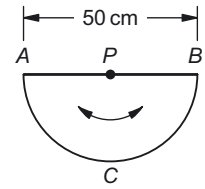
Exercice 17.8 Un disque plat de rayon R, de masse M, est suspendu par son bord à un fil métallique de torsion, comme sur la figure 17.5. Si le fil a une constante de torsion K, quelle est la période T des oscillations de torsion ?

Figure 17.5



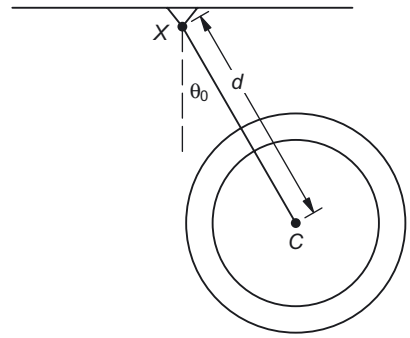
Exercice 17.9 Un cadre fait de fil métallique raide de section transverse et de densité uniformes consiste en un arc semi-circulaire ACB avec son diamètre AB, comme sur la figure 17.6. Il est pendu sur une épingle sans frottements P qui passe par un trou au milieu de son diamètre, et il est mis en vibration comme un pendule dans son propre plan. Si le diamètre du cadre $\overline{AB}$ est de 50 cm, quelle est la période T de l'oscillation pour de petits angles ?

Figure 17.6



Exercice 17.10 Soit une roue idéale de masse M, et de moment d'inertie I_c autour de son axe sans frottement. La roue est suspendue à un cintre de longueur d, de masse et de moment d'inertie négligeables, qui est libre de se déplacer dans le plan de la roue autour d'un point pivot en X, comme sur la figure 17.7. Le cintre et la roue sont relâchés au repos en même temps alors que le cintre fait un angle θ_0 avec la verticale passant par X. ($\theta_0 \ll 1$).

Figure 17.7



Dans les deux cas ci-dessous, A et B,

(a) trouver la période T du mouvement du cintre ;

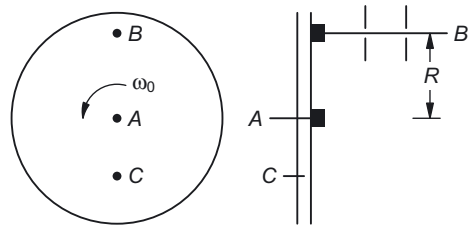
(b) trouver l'accélération $\ddot{\theta}$ lorsque $\theta = \theta_0$;

(c) et trouver la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ lorsque $\theta = 0$.

1. Lorsque la roue est libre de tourner sans frottement autour de l'axe C.
2. Lorsque la roue et le cintre sont liés et contraints de se déplacer autour de X comme un corps solide.

Exercice 17.11 Deux roues uniformes, planes et circulaires de même masse 1 kg pivotent toutes deux autour d'un axe horizontal A, perpendiculaire aux deux corps et passant par leurs centres de masse, comme sur la figure 17.8. Les rayons de giration[4] R des deux corps sont aussi égaux : $R = 0{,}20$ m. On fait tourner le corps 2 autour d'un axe horizontal fixe B, à un distance R de son CM. Au départ, le corps 2 est immobile et le corps 1 tourne à une vitesse angulaire ω_0 autour de l'axe commun. Une petite épingle de fixation C, dans le corps 1, tombe subitement dans un trou du corps 2, arrêtant leur mouvement relatif. On observe que le mouvement pendulaire résultant du système a une amplitude de 90° de chaque côté de la verticale. Trouver ω_0.

Figure 17.8

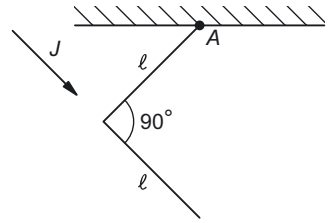


Exercice 17.12 Une barre rigide en forme de « L », de masse M, avec des pattes de même longueur l, pendue à son extrémité A, est axée pour se balancer librement dans son plan, comme sur la figure 17.9.

4. Le rayon de giration R, autour d'un axe, d'une masse M, ayant un moment d'inertie I par rapport à l'axe, est défini par $R = \sqrt{I/M}$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Figure 17.9



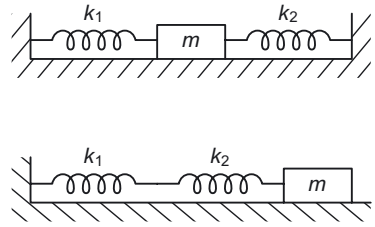
(a) À quel angle θ_0 (avec la verticale) pend-elle au repos ?

(b) Si une impulsion J, donnée à l'endroit du coude dans la direction indiquée, produit de petites oscillations pas amorties, trouver $\theta(t)$ si J a été appliquée à $t = 0$.

Exercice 17.13 La force gravitationnelle ressentie par une particule incorporée dans une sphère solide uniforme, et due à la seule masse de la sphère, est directement proportionnelle à la distance de la particule au centre de la sphère. Si la Terre était une sphère de ce genre, avec un petit trou creusé d'un pôle à l'autre, combien de temps T faudrait-il à un corps lâché dans le trou pour rejoindre le côté opposé de la Terre ?

Exercice 17.14 Une masse m se déplace en ligne droite sur un plan sans frottements sous l'influence de deux ressorts de constantes k_1 et k_2. (Les ressorts n'exercent aucune force au point d'équilibre.) Pour les deux systèmes de la figure 17.10,

Figure 17.10



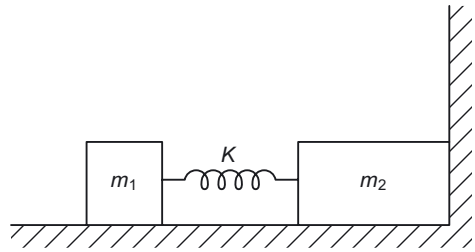
(a) Écrire les équations du mouvement.

(b) Trouver la période d'oscillation T.

Exercice 17.15 Deux particules de masse $3M/4$ et M, sont reliées par un ressort sans masse de longueur au repos L et de constante k. Ces masses sont initialement au repos à une distance L l'une de l'autre sur une table horizontale sans frottements. Une particule de masse $M/4$, se déplaçant à la vitesse v le long de la droite joignant les deux masses, entre en collision avec la masse $3M/4$ et reste collée à elle. Trouver l'amplitude A et la période T de la vibration du ressort entre les deux masses.

Exercice 17.16 Deux masses inégales, $m_1 = m$ et $m_2 = 2m$, reliées par un ressort (de constante K), sont au repos sur une table sans frottements, comme sur la figure 17.11. Si le ressort est comprimé d'une distance d, alors que m_2 est contre le mur, puis que le système est relâché,

Figure 17.11

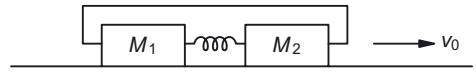


(a) Trouver à quelle distance x, la masse m_1 s'est déplacée avant que m_2 ne commence à bouger.

(b) Après que m_2 a perdu contact avec le mur, quelles sont la vitesse du centre de masse V_{CM} et l'amplitude A de l'oscillation ?

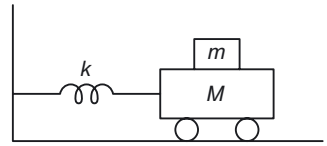
Exercice 17.17 Deux aéroglisseurs de masses différentes, $M_1 \neq M_2$, glissent sur une cuvette d'air horizontale à une vitesse v_0. Ils sont maintenus par une attache qui comprime un ressort sans masse de constante de rappel K placé entre eux, comme sur la figure 17.12. Le ressort est déplacé d'une quantité X par rapport à sa longueur d'équilibre. L'attache est retirée soudainement et le ressort comprimé écarte les deux masses. Trouver les vitesses finales v_1 et v_2 des aéroglisseurs.

Figure 17.12



Exercice 17.18 Étant donné l'oscillateur harmonique horizontal non amorti de la figure 17.13, trouver l'amplitude maximale d'oscillation, x_{max}, telle que la masse supérieure ne tombe pas de la masse inférieure. Le coefficient de frottement entre les masses est μ.

Figure 17.13



Exercice 17.19 Une masse de 200 g oscille sur un guide horizontal sous l'influence d'un ressort léger. Son énergie cinétique maximale est de 10^6 ergs, et sa période de 1 s.

(a) Quelle est l'énergie totale du système E ?

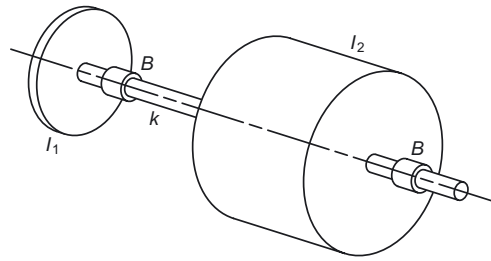
(b) Quelle est la constante de rappel k du ressort ?

(c) Quelle est l'amplitude x de l'oscillation ?

Exercice 17.20 L'élément tournant d'un moteur à réaction de la figure 17.14 consiste en un disque de turbine (avec des lames) qui a un moment d'inertie I_1 et un compresseur (avec des lames) qui a un moment d'inertie I_2 reliés par un arbre dont la raideur de torsion est k (le couple dans l'arbre est k fois le déplacement angulaire relatif entre la turbine et le compresseur). ($B =$ roulements à billes.)

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Figure 17.14



(a) Quelle est la fréquence ν des oscillations de torsion du rotor du moteur ?

(b) Quel est le rapport des amplitudes A_1/A_2 des oscillations de torsion de la turbine et du compresseur ?

Exercice 17.21 La position du point fluorescent sur l'écran d'un oscilloscope est souvent déterminée par deux voltages harmoniques appliqués le long des axes x et y, respectivement,

$$x = A_x \cos(\omega t + \delta_x),$$
$$y = A_y \cos(\omega t + \delta_y).$$

Dessiner et discuter la courbe définie par le mouvement du point fluorescent dans les cas suivants :

(a) $\delta_x = \delta_y$

(b) $\delta_x = \delta_y + \pi/2$ et $A_x = A_y$.

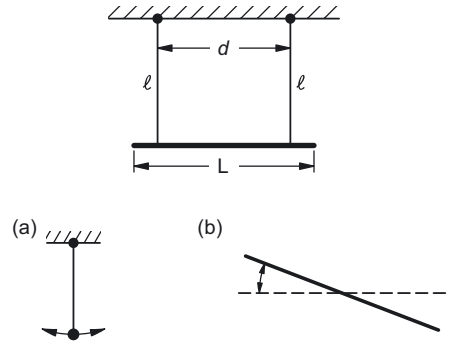
(c) $\delta_x = \delta_y + \pi/2$ et $A_x \neq A_y$,

(d) $\delta_x = \delta_y - \pi/4$ et $A_x = A_y$.

(e) $\delta_x = \delta_y - \alpha$ et $A_x \neq A_y$.

Exercice 17.22 Le pendule bifilaire de la figure 17.15 consiste en une perche de longueur L, une masse M, suspendus par deux fils de longueur l séparés d'une distance $d < L$. Trouver la période d'oscillation T pour de petites amplitudes,

Figure 17.15

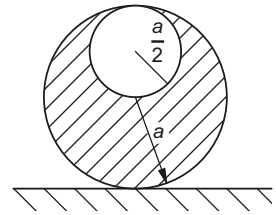


(a) si la perche se balance comme un pendule ordinaire, comme sur la partie (a) de la figure.

(b) si elle oscille autour de son CM, comme sur la partie (b) de la figure.

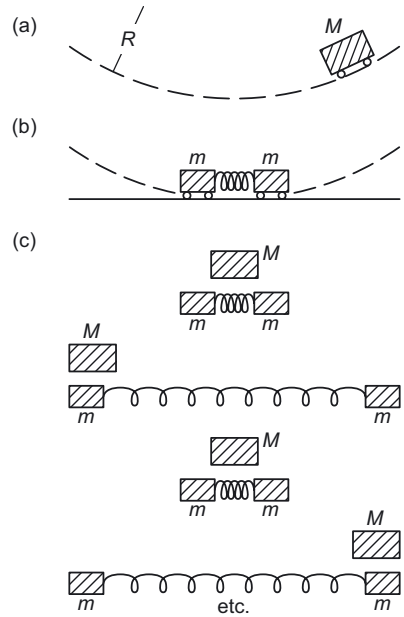
Exercice 17.23 Un cylindre circulaire solide de rayon a a un trou de rayon $a/2$ creusé parallèlement à son axe et à une distance $a/2$ de celui-ci, comme sur la figure 17.16. Le cylindre est placé sur un plan horizontal sur lequel il roule sans glisser. Trouver la période d'oscillation T pour de petits déplacements à partir de la position d'équilibre.

Figure 17.16



Exercice 17.24 Une masse M, sur de petites roues sans frottements, peut osciller transversalement dans une cuvette cylindrique de rayon R, avec une amplitude $A \ll R$, comme sur la figure 17.17(a). Deux masses identiques m, elles aussi montées sur de petites roues sans frottements, reliées par un ressort comprimé de masse nulle, et de constante K, sont alors disposées sur une surface horizontale adjacente et parallèle au trajet de M, comme sur la figure 17.17(b). À l'instant où M passe au fond de la cuvette, le ressort est relâché et le mouvement résultant de M est montré tous les quarts de cycle sur la figure 17.17(c). Quelle est la valeur de m ?

Figure 17.17



Exercice 17.25 Deux aéroglisseurs dans une cuvette à air sans frottement ont des masses m_1 et m_2. Ils sont reliés par un ressort sans masse de constante k, comme sur la figure 17.18. On les écarte d'une distance A par rapport à la longueur au repos du ressort, et on les relâche sans vitesse initiale.

Figure 17.18

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(a) Trouver les périodes d'oscillation T de m_1 et m_2.

(b) Comparer la période avec celle d'un oscillateur d'une seule masse. Quel concept physique, typique dans le mouvement de deux corps, venez-vous de découvrir ?

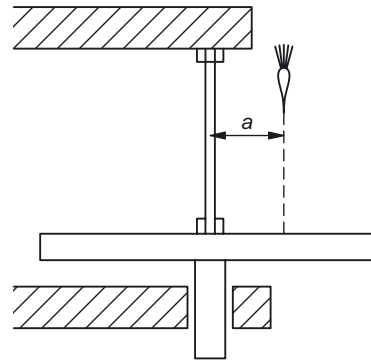
(c) Trouver l'énergie d'oscillation E.

(d) Comment m_1 et m_2 se partagent-ils cette énergie ?

Exercice 17.26 Un pendule simple est constitué d'une masse M au bout d'une tige de masse négligeable et de longueur L, librement suspendue de telle façon qu'elle puisse se balancer sur un tour complet de 360°. La période du pendule pour de petites oscillations est $2\pi\ s$. Si le pendule est soigneusement mis sur sa position supérieure d'équilibre instable, puis reçoit une petite impulsion de $1\,\text{mm}\,\text{s}^{-1}$, combien de temps T la masse mettra-t-elle à se déplacer de 10 cm ? (On supposera que les approximations habituelles d'un système linéarisé sont bonnes sur cette distance, même si elles ne le sont évidemment pas sur un tour complet.)

Exercice 17.27 L'extrémité d'une barre de torsion est attachée au centre d'une table tournante qui bouge sur des roulements sans frottements autour de son axe de symétrie. L'autre extrémité de la barre est fixée en un point de l'axe, comme sur la figure 17.19. La constante de torsion de la barre est K, le moment d'inertie total du système est I. Initialement, la table tournante fait un mouvement harmonique simple non amorti d'amplitude maximum θ_0. Une fléchette de masse m tombe verticalement sur la table à une distance a de l'axe lorsque la table passe par sa position d'équilibre. La pointe s'enfonce instantanément dans la table. Trouver la nouvelle amplitude maximum θ_0'. On négligera toute rotation de la fléchette sur elle-même, et on suppose que son épaisseur est petite par rapport à a.

Figure 17.19



Exercice 17.28 Un certain corps rigide de masse M est soutenu par un axe horizontal sans frottements qui se trouve à une distance d du CM. Le moment d'inertie autour de l'axe de rotation est I.

(a) Écrire l'équation différentielle qui décrit la variation de l'angle θ avec le temps, où θ est mesuré à partir de la position d'équilibre du corps.

(b) Si le corps fait de petites oscillations, de telle façon que $\sin\theta \approx \theta$, quelle est leur période ?

(c) Si le moment d'inertie du corps rigide autour de son CM est I_c, Trouver une expression pour la période de petites oscillations en fonction de d et I_c, et montrer ainsi :

1. qu'il y a deux valeurs de d, disons d_1 et d_2, qui correspondent à une période donnée ;
2. que la période est $t = 2\pi(d_1 + d_2)/g$ en fonction de d_1 et d_2 ;
3. que la période a une valeur minimum lorsque $d = \sqrt{I_c/M}$ (le rayon de gyration). Trouver cette valeur.

Exercice 17.29 Un certain ressort linéaire a une longueur au repos de D. Lorsqu'une masse m est suspendue à son extrémité, il a une longueur $D + A$. Alors qu'il pend immobile avec la masse m attachée, une deuxième masse m est lâchée d'une hauteur A sur la première, avec laquelle elle subit une collision inélastique. Trouver la période T, l'amplitude a, et la hauteur maximum H (au-dessus de la position d'équilibre initiale) qui est atteinte dans le mouvement résultant.

Exercice 17.30 Un cintre de 20 g portant un poids de 5 g est suspendu à un ressort vertical de masse négligeable. Lorsque le ressort est déplacé de l'équilibre le système vibre verticalement suivant un mouvement harmonique simple de période $\pi/3$ s. Si le poids de 5 g est remplacé par un poids de 25 g, à quelle hauteur z le ressort peut-il être déplacé par rapport à l'équilibre si le poids ne doit pas sauter du cintre ?

18. Algèbre

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1, Chap. 22.

Le type de nombre le plus général qui satisfasse les règles de l'algèbre élémentaire est un *nombre complexe*. Les nombres complexes peuvent être écrits comme la somme d'un nombre purement réel (positif ou négatif) et d'un *nombre imaginaire*. Un nombre imaginaire est un nombre réel (positif ou négatif) multiplié par $i = \sqrt{-1}$, le nombre imaginaire unité. (Le nombre réel unité est $1 = \sqrt{+1}$.)

(nombre complexe) u = (nombre réel) x + (nombre imaginaire) iy.

Toute équation algébrique reste vraie si on change le signe de i partout. Cela s'appelle prendre le *complexe conjugué*. Si $u = x + iy$, alors le complexe conjugué de u, écrit u^*, est $u^* = x - iy$.

Les règles de l'algèbre, appliquées aux nombres complexes, montrent que :

I. $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$.

II. $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

III. $|u| = \sqrt{uu^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$ est appelé la *grandeur* de u.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Un nombre réel élevé à une puissance imaginaire est complexe et a une grandeur égale à un. La partie réelle et la partie imaginaire se comportent comme des fonctions sinus et cosinus lorsque la grandeur de la puissance imaginaire s'accroît.
On a notamment,

IV. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Exercice 18.1 Dans l'équation

$$u + iv = (a + ib)(c + id)$$

soit $b/a = \tan\alpha$ et $d/c = \tan\beta$. en utilisant l'équation II ci-dessus et les formules de trigonométrie, montrer que :

(a) $\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{c^2 + d^2}$,

(b) $v/u = \tan(\alpha + \beta)$.

Exercice 18.2 Faire l'exercice 18.1 en utilisant l'équation IV ci-dessus.

Exercice 18.3 Montrer que :

$$\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2,$$
$$\sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i.$$

Exercice 18.4 Montrer que :

$$(a + ib)/(c + id) = [ac + bd + i(bc - ad)]/(c^2 + d^2).$$

Exercice 18.5 Les quantités $\cosh\theta$ et $\sinh\theta$, définies par

$$\cosh\theta = (e^{\theta} + e^{-\theta})/2,$$
$$\sinh\theta = (e^{\theta} - e^{-\theta})/2,$$

sont nommées cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique de θ. Montrer que :

$$\cos i\theta = \cosh\theta,$$
$$\sin i\theta = i\sinh\theta,$$
$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1.$$

Exercice 18.6 En employant la formule fondamentale de la différenciation

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

montrer que :

$$\frac{de^{\alpha x}}{dx} = \alpha e^{\alpha x}.$$

Exercice 18.7

(a) Par itérations successives, ou par d'autres méthodes, montrer que e^x peut être représentée par la série infinie

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots .$$

(b) Montrer que $\cos x$ et $\sin x$ peuvent être représentées par les séries infinies

$$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! \pm \cdots ,$$
$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! \pm \cdots .$$

(Ces séries sont d'un grand intérêt pour calculer e^x, $\cos x$, et $\sin x$ pour $x \ll 1$, même si elles convergent pour tout x.)

Exercice 18.8 Trouver la solution algébrique complète de

$$y = \sqrt[n]{1},$$

où n est un entier.

Exercice 18.9 En employant les propriétés de $e^{in\theta}$ et le théorème du binôme, montrer que :

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \frac{n(n-1)}{2!} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta \pm \cdots .$$

Exercice 18.10

(a) À partir de la relation $e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta} e^{i\phi}$, montrer les formules trigonométriques qui donnent le cosinus et le sinus d'une somme de deux angles.

(b) Interpréter géométriquement le résultat de la multiplication d'un nombre complexe $Ae^{i\theta}$, par un autre nombre complexe $Be^{i\phi}$.

Exercice 18.11 À partir de la table suivante des racines carrées successives de 11, trouver (avec trois chiffres significatifs) $\log_{11} 2$ et $\log_{11} 7$.

Racine r	$1/r$	$\sqrt[r]{11} = 11^{1/r}$
1	1,00000	11,0000
2	0,50000	3,3166
4	0,25000	1,8212
8	0,12500	1,3495
16	0,06250	1,1617
32	0,03125	1,0778
64	0,01563	1,0382
128	0,00781	1,0189

(Vérifier votre résultat avec $\log_a N = \log_a b \log_b N$ où a et b sont deux bases quelconques.)

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

19. Oscillations forcées avec amortissement

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 1 Chap. 23, 24, et 25.

Exercice 19.1 Dessiner le mouvement transitoire

(a) d'un oscillateur non amorti,

(b) d'un oscillateur trop peu amorti,

(c) d'un oscillateur trop amorti,

qui tous trois démarrent au repos de la même élongation.

Exercice 19.2 Quelle est la fréquence de résonance f d'un circuit LC d'inductance 10 millihenry et de capacité 1 picofarad ?

Exercice 19.3 Trouver l'impédance Z d'un inductance de 1 henry en série avec une résistance de 377 ohm, à une fréquence de 60 Hz.

Exercice 19.4 Un certain bobinage a une résistance de 20 ohm. Quand on la connecte à une source de voltage de 60 Hz et 10 volt d'amplitude, on observe qu'un courant de 0,3 ampère le traverse. Trouver l'inductance L du bobinage.

Exercice 19.5 Un circuit inductance-capacité en série doit résonner à une fréquence de 10^4 Hz. Si $L = 7{,}6\,10^{-2}$ henry, que doit être la valeur de C ?

Exercice 19.6 Trouver l'impédance $\hat{Z}$ d'une inductance L et d'une capacité C en fonction de la fréquence ω lorsqu'elle sont

(a) en série

(b) en parallèle.

Discuter qualitativement les résultats.

Exercice 19.7 Deux condensateurs, C_1 et C_2 sont reliés

(a) en série ;

(b) en parallèle.

Trouver la capacité totale C dans les deux cas.

Exercice 19.8 Deux inductances L_1 et L_2 sont reliées

(a) en série ;

(b) en parallèle.

Trouver l'inductance totale L dans les deux cas.

Exercice 19.9 Un circuit résonant se compose de deux inductances, L et $3L$, et deux condensateurs, C et $3C$, tous reliés

(a) en série ;

(b) en parallèle.

Trouver la fréquence de résonance ω_0 dans les deux cas.

Exercice 19.10 La « constante de temps » d'un circuit en série résistance-capacité est RC ; celle d'un circuit inductance-capacité est $\sqrt{LC}$; à partir de considérations dimensionnelles, qu'attendrait-on de la constante de temps T d'un circuit en série résistance-inductance ?

Exercice 19.11 Quelle est la valeur approchée de Q d'un diapason de 1000 Hz ? (faites usage de votre expérience.)

Exercice 19.12

(a) Montrer que l'équation différentielle du mouvement d'un masse m sur un ressort dont la constante est k, et qui a une force de frottement $-m\gamma v$ est

$$d^2x/dt^2 + \gamma dx/dt + \omega_0^2 x = 0,$$

où $\omega_0^2 = k/m$.

(b) Résoudre cette équation (en employant des variables complexes) en posant une solution de la forme $x = e^{\alpha t}$ et en trouvant que la solution générale pour $\gamma < 2\omega_0$, est

$$x = e^{-\gamma t/2}\,(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\,,$$

avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$.

(c) Quelle est la solution générale si $\gamma > 2\omega_0$?

(d) À $t = 0$, la position et la vitesse de la masse m sont $x = x_0$ et $\dot{x} = v_0$. Trouver les coefficients A et B.

Exercice 19.13 Des aéroglisseurs placés sur un rail linéaire perdent de la vitesse principalement à cause de la traînée de frottement du mince film d'air qui les soutient. Cette force de viscosité est proportionnelle à la vitesse.

(a) Écrire et résoudre l'équation différentielle du mouvement d'un aéroglisseur sur un rail de sustentation.

(b) En supposant que la position et la vitesse initiales d'un aéroglisseur se déplaçant dans la direction x sont, respectivement, x_0 et v_0, donner la vitesse de l'aéroglisseur en fonction du temps $v(t)$ et en fonction de la distance $v(x)$.

Exercice 19.14 Un glisseur sur une piste penchée possède un aimant, et cet aimant engendre des courants d'Eddy dans la piste qui réagissent à leur tour sur l'aimant, ce qui donne une force retardatrice, très précisément proportionnelle à la vitesse : $F = -m\gamma v$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Si le glisseur démarre au repos, trouver (en fonction de l'angle d'inclinaison de la piste, et du coefficient de résistance γ de l'aimant)

(a) la vitesse finale atteinte, v_∞ ;

(b) la vitesse en fonction du temps $v(t)$;

(c) la position en fonction du temps $x(t)$.

Exercice 19.15 Un touriste en croisière sur l'océan laisse choir par inadvertance sa caméra de 1 kg, sans vitesse initiale, d'une hauteur de 20 m au-dessus de la surface de l'eau (par temps calme). Lors de l'impact, la caméra perd la moitié de son énergie cinétique. Après être entrée dans l'eau, elle est sujette à une force d'Archimède égale à la moitié de son poids et à une force de résistance de l'eau de $1/3\,\mathrm{kg\,s^{-1}} \times v$, v étant sa vitesse dans l'eau. À quelle profondeur sous la surface la caméra est-elle 3 s après être entrée dans l'eau ?

Exercice 19.16 Le pivot d'un pendule simple d'une période naturelle de 1 s est déplacé latéralement de façon sinusoïdale avec une amplitude de 1 cm et une période de 1,10 s. Avec quelle amplitude A le balancier se balancera-t-il après qu'un mouvement régulier aura repris.

Exercice 19.17 Un objet de masse 5 kg oscille avec un amortissement négligeable lorsqu'il est suspendu à un ressort qui lui permet d'effectuer 10 cycles complets en 10 secondes. Puis, un petit amortissement magnétique lui est appliqué, proportionnel à la vitesse, et l'amplitude décroît de 0,2 m à 0,1 m en 10 cycles.

(a) Écrire l'équation du mouvement, avec les coefficients de d^2x/dt^2, dx/dt, et x représentés par des nombres en unités SI.

(b) Quelle est maintenant la période T du mouvement ?

(c) En combien de cycles, N, (en commençant avec une amplitude de 0,20 m) l'amplitude atteindra-t-elle

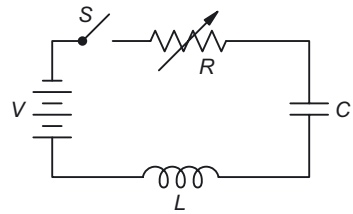
1. 0,05 m ?
2. 0,02 m ?

(d) Quel est approximativement le taux maximum de dissipation d'énergie P par amortissement pendant le premier cycle ?

Exercice 19.18 Un condensateur de capacité C est initialement chargé avec un voltage de V_0, et, à $t = 0$ il est connecté à une résistance R. Écrire l'équation différentielle pour V, la différence de potentiel dans le condensateur en fonction de t, et la résoudre en supposant que la solution est exponentielle

Exercice 19.19 Une capacité non chargée C, une inductance « pure » L, et une résistance variable R sont connectées à une batterie de différence de potentiel V, comme sur la figure 19.1. Écrire l'équation du courant dans le circuit et et dessiner le voltage de C en fonction du temps après la fermeture du circuit S, pour différentes valeurs de R.

Figure 19.1



Exercice 19.20

(a) Écrire et résoudre les équations différentielles qui décrivent le courant en régime stationnaire lorsqu'un voltage sinusoïdal de fréquence angulaire ω est appliqué à

1. une inductance L ;
2. une capacité C.

(b) Utiliser les résultats de la partie (a) pour trouver l'impédance (complexe)

1. Z_L d'une inductance L ;
2. Z_C d'une capacité C.

Exercice 19.21 Dessiner les diagrammes de phase (y compris $\hat{V}_{\text{dans}} = \hat{V}_0$, $\hat{I}$, $\hat{V}_R$, $\hat{V}_L$, $\hat{V}_C$) pour une série de circuits RLC à la résonance.

Exercice 19.22 Dessiner les diagrammes de phase pour les voltages et les courants dans le cas où un voltage $V_0 \cos \omega t$ est appliqué aux circuits suivants :

(a) une résistance R et une inductance L en série ;

(b) une résistance R et une inductance L in parallèle ;

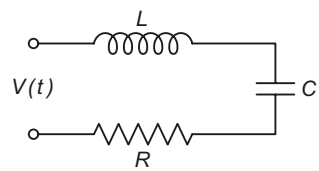
(c) une résistance R et une capacité C en série ;

(d) une résistance R et une capacité C en parallèle.

Exercice 19.23 Le circuit montré sur la figure 19.2 a les caractéristiques suivantes :

$$
\begin{aligned}
V(t) &= V_0 \cos \omega t, \\
V_0 &= 10 \,\text{volt}, \\
\omega &= 25\,10^3 \,\text{radian}\,\text{s}^{-1}, \\
L &= 4\,10^{-3} \,\text{henry}, \\
C &= 4\,10^{-7} \,\text{farad}, \\
R &= 160 \,\text{ohm}.
\end{aligned}
$$

Figure 19.2



On considère les oscillations de ce circuit en régime stationnaire.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

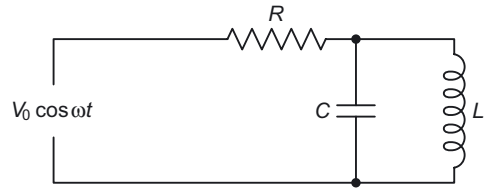
(a) Quelle est l'amplitude du courant I_0 ?

(b) Quel est le déphasage δ du courant par rapport au voltage appliqué ?

(c) Tracer un diagramme de phase montrant le voltage dans la résistance, la capacité et l'inductance.

Exercice 19.24 Dans le circuit montré sur la figure 19.3, la fréquence imposée est $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

Figure 19.3

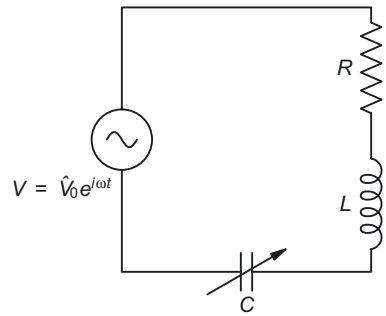


(a) Quel est le courant I_R dans R ?

(b) Quel est le courant maximum $I_{L,\max}$ dans L ?

Exercice 19.25 La série RLC montrée sur la figure 19.4 contient un générateur qui fournit un voltage alternatif de fréquence fixe ω. Le condensateur est variable.

Figure 19.4



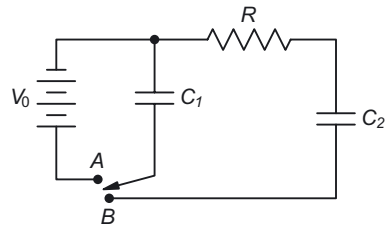
(a) Pour une valeur $C = C_1$, le courant I_1 est en phase avec le voltage appliqué. Quel est C_1, en fonction de L et ω ?

(b) La capacité est alors changée à $C = C_2$, de telle façon que le voltage précède le courant I_2 d'une phase de 45°. Quel est C_2 en fonction de C_1, R, et ω ?

(c) Quel était le rapport I_1/I_2 ?

Exercice 19.26 Dans le circuit montré sur la figure 19.5, à l'origine, l'interrupteur était en A, mais à $t = 0$ il est poussé en B.

Figure 19.5



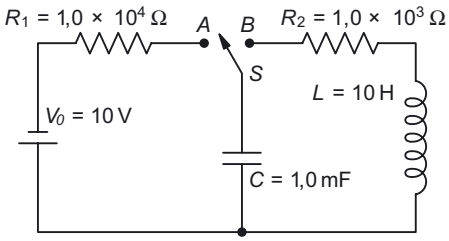
Après un temps assez long,

(a) Combien d'énergie ΔE a-t-elle été dissipée en chaleur dans la résistance ?

(b) Quels voltages V_1 et V_2, reste-t-il sur les condensateurs ?

Exercice 19.27 Sur le circuit montré sur la figure 19.6 avec l'interrupteur S ouvert à $t < 0$, le condensateur n'est pas chargé.

Figure 19.6

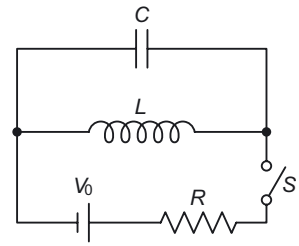


(a) Après que l'interrupteur ait été fermé A, combien de temps t faut-il pour que le voltage du condensateur atteigne 8,0 volts ?

(b) À l'instant où le voltage de C atteint 8,0 volts, l'interrupteur est basculé sur B. Quelle est la valeur du courant initial I_0 dans L ?

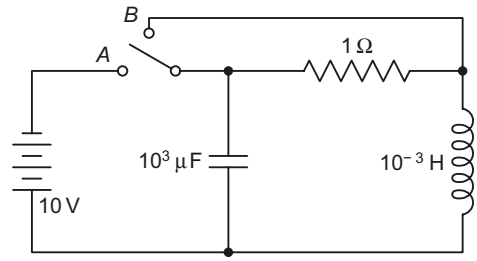
Exercice 19.28 Dans le circuit montré sur la figure 19.7, l'interrupteur S est initialement fermé et un courant stationnaire $I = V_0/R$ constant s'écoule. À $t = 0$, S est ouvert soudainement. Trouver le voltage maximum $V_{\max}$ que l'on observe sur le condensateur.

Figure 19.7



Exercice 19.29 Étant donné le circuit de la figure 19.8, avec l'interrupteur initialement en position A. Si l'interrupteur est brusquement changé et mis en B, quel voltage maximum $V_{\max}$ apparaîtra sur le condensateur ?

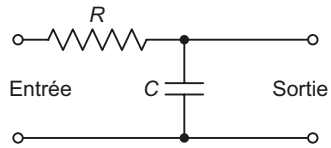
Figure 19.8



© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

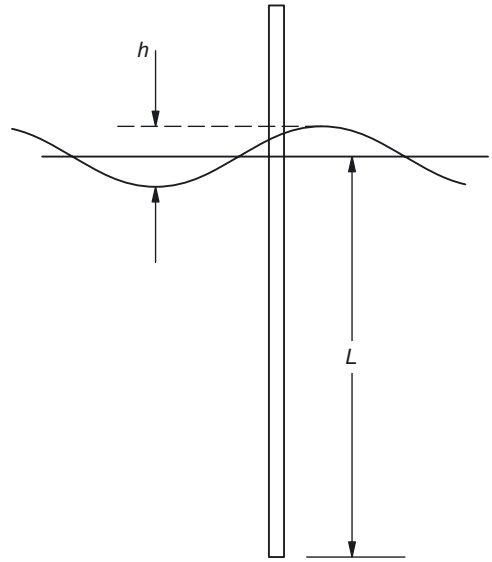
Exercice 19.30 Pour supprimer le bourdonnement à 120 Hz du redresseur d'un amplificateur, on emploie un « filtre adoucissant ». Dans sa forme la plus simple, il est constitué d'une résistance en série avec un condensateur, comme sur la figure 19.9. Si le voltage a une composante continue V_{DC} et une composante alternative de 120 Hz d'amplitude V_{AC}, trouver les voltages correspondants V'_{DC} et V'_{AC}, aux bornes du condensateur, pour $R = 10^3$ ohm et $C = 10$ microfarad.

Figure 19.9



Exercice 19.31 Une bouée à tige verticale de section transverse uniforme flotte en position verticale avec une longueur L immergée lorsqu'il n'y a pas de vagues sur la mer, comme sur la figure 19.10.

Figure 19.10



(a) Quelle est l'amplitude A (par rapport à la surface de la mer calme) du mouvement vertical de la bouée lorsqu'il y a des vagues sinusoïdales de hauteur h (de la crête au creux) et de période T sur la mer ? (on négligera les frottements fluides et les mouvements non-verticaux de la bouée.)

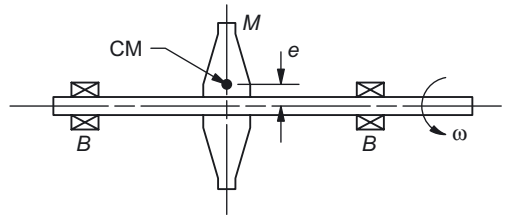
(b) Si la partie submergée non dérangée est de longueur 30 m, la hauteur des vagues h 30 m, et la période des vagues de 5 secondes quelle est l'amplitude du mouvement de la bouée ?

(c) Quelle doit-être la longueur totale D de la bouée telle que les crêtes des vagues de la partie (b) ci-dessus atteignent tout juste le sommet de la bouée ?

Exercice 19.32 La figure 19.11 montre l'élément tournant d'un compresseur de gaz centrifuge de haute vitesse. La roue à aubes de masse M est montée de façon rigide sur

un axe de masse négligeable et est située à mi-chemin entre les roulements à bille *B*. Lorsque le compresseur n'est pas en mouvement, le centre de masse de la roue à aubes est situé de façon excentrique par rapport à la ligne joignant les roulements d'une petite quantité *e* (très exagérée sur le diagramme). La rigidité élastique à la courbure de l'axe est *k* (une force transverse *F* appliquée au centre de l'axe produirait un déplacement transverse de $x = F/k$ en ce point de l'axe).

Figure 19.11



(a) Quelle est la fréquence circulaire, ω_0, des vibrations de courbure du système lorsque la machine n'est pas en marche ?

(b) Quelle est la déflexion de courbure x de l'axe lorsque la machine tourne à une vitesse angulaire ω ?

(c) Quelle est la vitesse angulaire critique ω_{crit} à laquelle le compresseur échouera ?

(d) Quelle est la vitesse critique ω'_{crit}, si l'excentricité est réduite d'un facteur deux ?

(e) Si, par une accélération rapide au-delà de la vitesse critique, une vitesse beaucoup plus élevée est atteinte sans causer de défaillance, où le CM se trouve-t-il situé par rapport à la ligne joignant les roulements ?

Exercice 19.33 *Oscillateur harmonique amorti :* une masse *m* est suspendue d'un ressort de constante de force *k* dans un milieu qui exerce un amortissement de la forme $-m\gamma\, dx/dt$.

(a) Dans le cas d'un mouvement sous-amorti, trouver la solution complète pour la position $x = x(t)$ de *m* à tout instant $t > 0$ pour les forces extérieures suivantes :

1. $F = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ F_0 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$
2. pas de force excitatrice, mais, à $t = 0$ une impulsion $J = J_x$ est donnée à la masse *m*.
3. $F = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ F_0 \cos \omega_0 t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$

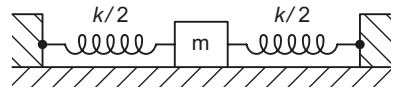
(b) Si l'oscillateur est entraîné par une force sinusoïdale $F = F_0 \cos \omega t$ et que nous considérons des temps longs, quelle est la fréquence ω^* pour laquelle l'amplitude atteint un maximum ?

Note : Se rappeler que la solution complète contient à la fois un mouvement permanent et un mouvement de transition, et que les conditions initiales déterminent les constantes d'intégration.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 19.34 Une masse m, attachée à deux ressorts horizontaux de constante $k/2$, comme sur la figure 19.12, glisse sur une table de coefficient de frottement μ, que l'on suppose constant. La masse est écartée d'une distance A du centre ($x = 0$) et est relâchée sans vitesse initiale.

Figure 19.12



(a) Écrire l'équation différentielle et la résoudre dans l'intervale de temps $0 < t < \pi\sqrt{m/k}$.

(b) En supposant que A est tel que la masse parvient à un état de repos permanent à une distance B du centre ($x = \pm B$), après être passée sur le centre exactement N fois.

1. Quelles sont les valeurs possibles de B ?
2. Trouver A pour $N = 0, 1, 2, \ldots$?

Exercice 19.35 Une particule de masse m et de charge électrique q est située dans un champ électrique alternatif le long de l'axe x,

$$E = E_0 \cos \omega t.$$

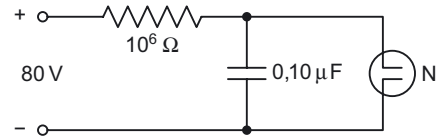
La particule subit aussi une force proportionnelle à la *troisième dérivée* de sa position x,

$$F_\alpha = +\alpha d^3x/dt^3.$$

Trouver l'amplitude A et la phase δ des oscillations de la particule dans un état stable. Ce modèle donne une description approchée de la diffusion du rayonnement par une particule chargée.

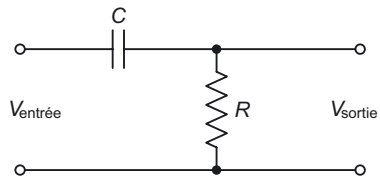
Exercice 19.36 Le circuit montré sur la figure 19.13 constitue ce qu'on appelle un *oscillateur de relaxation*. Il consiste en une ampoule au néon reliée, au travers d'un condensateur qui est chargé au travers d'un circuit résistant à partir d'une source de courant continu. Le tube de néon a une résistance infinie tant que le voltage est inférieur à 60 volts. Au-dessus de cette valeur, le tube cesse de résister puis a une résistance négligeable, ce qui décharge le condensateur. Le tube à néon s'éteint alors et redevient de résistance infinie. Si $C = 0.10$ microfarad, $R = 10^6$ ohm, et $V_0 = 80$ volts, trouver la fréquence f à laquelle le tube à néon clignote.

Figure 19.13



Exercice 19.37 Dans de nombreux cas, il est souhaitable d'avoir un circuit électronique qui va « prendre la dérivée » d'une fonction par rapport au temps. Un circuit simple de ce genre est montré sur la figure 19.14.

Figure 19.14



(a) Montrer que le voltage de sortie de ce circuit (si un courant négligeable peut passer dans la circuiterie externe) est

$$V_{\text{sortie}}(t) = RC\,\frac{dV_{\text{entrée}}}{dt}(t),$$

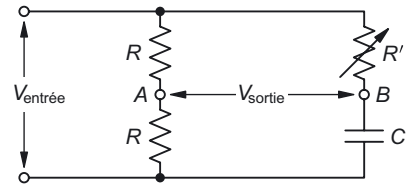
pourvu que $|V_{\text{sortie}}| \ll |V_{\text{entrée}}|$.

(b) Trouver V_{sortie} dans le circuit ci-dessus dans le cas où $V_{\text{entrée}} = V_0 \cos \omega t$, et vérifier ainsi la validité des résultats de la partie (a) ci-dessus, en fonction de ω.

Exercice 19.38 Inventer un circuit simple qui peut « intégrer » une fonction et discuter ses propriétés.

Exercice 19.39 Dans les circuits électroniques, on veut souvent produire un voltage sinusoïdal d'amplitude constante mais de phase variable. Un circuit qui effectue cela est appelé un *réseau de déphasage*. Un exemple, d'un tel circuit est montré sur la figure 19.15. Montrer que le voltage V_{sortie} mesuré entre les points de sortie A et B a la moitié de l'amplitude d'entrée $V_{\text{entrée}}$ et une phase δ qui peut être ajustée entre 0° et 180° en changeant la résistance R'.

Figure 19.15

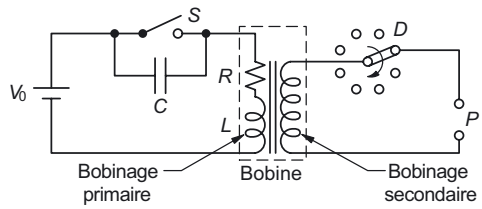


Conseil : Un diagramme de phase peut être utile.

Exercice 19.40 Le système d'allumage d'un moteur à essence est montré sur la figure 19.16. Lorsque les contacts du rupteur S sont fermés, la tension de la batterie V_0 produit un courant dans la bobine primaire qui a une inductance L et une résistance interne R. Le bobinage secondaire a cent fois plus de tours que le primaire si bien que le voltage dans l'intervalle des bougies P est cent fois supérieur à celui dans le primaire de la bobine. Les contacts du rupteur sont ouverts par la tête du distributeur (pas montré) à chaque fois que le bras D est en contact avec une bougie du circuit, comme indiqué. C est la capacité du condensateur qui est relié de part et d'autre des contacts du rupteur. Les valeurs typiques des constantes du circuit sont $V_0 = 12$ volt, $C = 0{,}25$ microfarad, $R = 6$ ohm, $L = 2$ millihenry.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Figure 19.16



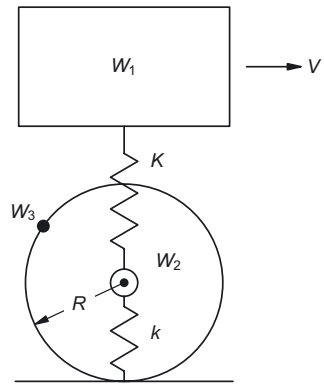
(a) Si le moteur a huit cylindres, qu'il tourne à 4 200 tours par minute, et que les contacts du rupteur sont ouverts 30 % du temps, quel est le courant I dans le primaire de la bobine à l'instant où les contacts du rupteur s'ouvrent ? On suppose qu'à chaque fois qu'une étincelle se produit, les courants dans le système décroissent à zéro avant que les contacts du rupteur ne se ferment. On rappelle également que chaque cylindre ne subit d'explosion qu'un tour sur deux du moteur.

(b) Lorsque contacts du rupteur s'ouvrent, quel voltage maximum $V_{\max}$ est produit dans l'intervalle de la bougie si l'étincelle ne se produit pas ?

(c) Combien de temps t s'écoule entre l'instant où les contacts du rupteur s'ouvrent et l'instant où voltage maximum des bougies est atteint ?

Exercice 19.41 Calculer la vitesse V d'une automobile à laquelle une de ses roues, mal équilibrée, va se mettre à sauter sur la route. En se reportant à la figure 19.17 : W_1 est la portion du poids de la voiture portée par la roue. W_2 est le poids qui ne saute pas (roue + pneu + freins + etc.). W_3 est le poids non en équilibré qu'on suppose petit devant W_2 et situé sur le pourtour du pneu de rayon R. (Par exemple, W_3 pourrait être le poids de caoutchouc arraché sur un côté du pneu pendant un arrêt brusque, toutes roues bloquées). K est la constante de rigidité du système de suspension donnée par $K = W_1/\delta_1$ où δ_1 est la déflexion statique de l'axe de la roue par rapport à la carrosserie de la voiture. k est la constante de rigidité du pneu, donnée par $k = (W_1 + W_2)/\delta_2$, où δ_2 est la déflexion statique de l'axe de la roue avec la route. On négligera l'influence des amortisseurs et le petit mouvement vertical de l'automobile (ces influences se révèlent négligeables pour des automobiles courantes). On prendra les valeurs numériques suivantes : $W_1 = 340\,\text{kg}$; $W_2 = 34\,\text{kg}$; $W_3 = 57\,\text{g}$; $R = 35\,\text{cm}$; $\delta_1 = 15\,\text{cm}$; $\delta_2 = 37{,}5\,\text{cm}$.

Figure 19.17



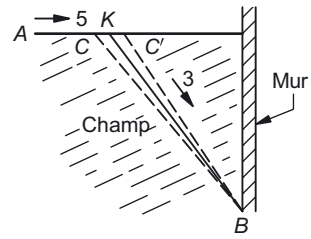
20. Optique géométrique

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2, Chap. 26 et 27.

Exercice 20.1 Lorsque nous sommes devant un miroir plan ordinaire, notre image apparaît renversée de gauche à droite. L'image de notre main droite est la main gauche de la « la personne » dans le miroir. Pourquoi le miroir ne renverse-t-il pas aussi le haut et le bas ? Qu'est-ce qui est renversé dans le miroir ?

Exercice 20.2 Un homme peut marcher à $1{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ sur un trottoir, mais seulement à $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ sur le terrain bosselé montré sur la figure 20.1. Il part du point A, à 40 m d'un mur, et veut aller en B, à 35 m au sud du trottoir le long du mur.

Figure 20.1



(a) Si cet homme marche sur le trottoir jusqu'en K, puis traverse le terrain en ligne droite jusqu'en B, quelle est la longueur de AK qui lui permet d'arriver en B dans le temps le plus court ?

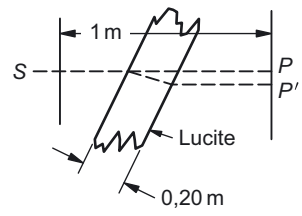
Note : Il est légitime de supposer la « loi de la réfraction » en résolvant ce problème. Toutefois, si vous êtes courageux, vous pouvez essayer de le résoudre sans cette hypothèse !

(b) Quel est son temps le plus court $t_{\min}$?

(c) Quel temps t faut-il en passant par d'autres voies ACB et $AC'B$, si $\overline{CK} = \overline{KC'} = 3\,\mathrm{m}$?

Exercice 20.3 La lumière émise par la source S envoie un rayon lumineux étroit perpendiculaire à un écran situé à 1 m, comme sur la figure 20.2. Le pinceau atteint l'écran en P. Si une plaque de lucite d'indice de réfraction 1,50 et d'épaisseur 0,20 m est introduite de telle façon que le pinceau l'atteigne avec un angle d'incidence de 30°,

Figure 20.2



(a) Trouver le déplacement latéral du rayon, $\overline{PP'}$.

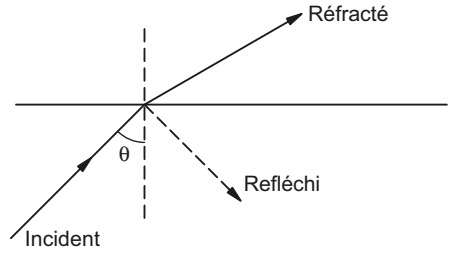
(b) Trouver l'augmentation du temps du chemin $SP' = t_0 + \Delta t$, par rapport au chemin dans l'air $SP = t_0$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 20.4 Un sportif affamé rencontre un tonneau d'eau de pluie de 80 cm de diamètre avec 100 cm d'eau dedans, et, en passant il remarque à l'intérieur un poisson contre le bord diamétralement opposé à lui. Le poisson est entre le fond et la surface du tonneau, et le rayon lumineux allant du poisson à l'œil du sportif sort de l'eau à l'endroit de l'axe du tonneau, en faisant un angle de 60° avec la verticale. Si l'œil de l'homme est juste au-dessus du bord du tonneau, à quel angle θ de cette ligne de visée doit-il tirer avec son fusil de façon à atteindre le poisson ? (On négligera la déviation de la balle lorsqu'elle pénètre dans l'eau.)

Exercice 20.5 Il est bien connu que lorsque de la lumière passe d'un milieu transparent à un autre, toute la lumière n'est pas réfractée, mais une partie est réfléchie (voir la figure 20.3) et très peu de lumière est absorbée ou diffusée. Qu'arrive-t-il lorsque un faisceau de lumière atteint l'interface entre deux milieux, si le faisceau initial provient du milieu le plus dense ? Discuter et dessiner la situation pour des angles divers θ.

Figure 20.3

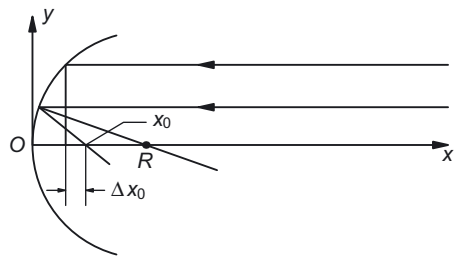


Exercice 20.6 Deux miroirs plans se croisent de façon à former un angle droit parfait, avec une ligne d'intersection verticale. Faire un dessin pour montrer pourquoi, dans un tel miroir, on se voit comme les autres nous voient.

Exercice 20.7 Trois miroirs mutuellement perpendiculaires se rejoignent pour former un coin à angles droits. Un rayon lumineux atteint l'un des miroirs, puis, peut-être l'un des deux autres ou les deux. Montrer qu'après toutes les réflexions (en supposant que les miroirs sont très larges) le rayon se propage dans la direction exactement opposée à sa direction d'incidence, mais avec un déplacement latéral. Connaissez-vous une application d'un tel « appareil à réfléchir en coin » ?

Exercice 20.8 Un faisceau de rayons lumineux, parallèle à un axe et proche de lui, tombe sur un miroir sphérique concave de rayon R, comme sur la figure 20.4.

Figure 20.4



(a) Trouver la position du point focal $X_0 = X_0(R)$ dans le cas $y \ll R$.

(b) Pour $y/R = 0{,}2$ (noter que $y \ll R$ n'est plus valable) trouver le point image $X = X_0 + \Delta X_0$ et déterminer la valeur de $\Delta X_0/X_0$, l'aberration relative du miroir.

Conseil : $(1 - a^2)^{-1/2} \approx 1 + a^2/2$.

Exercice 20.9 Le disque solaire sous-tend un angle d'environ 32 minutes vu de la Terre. Trouver la position x et le diamètre D de l'image du Soleil formée par un miroir concave sphérique de rayon $r = 400$ cm.

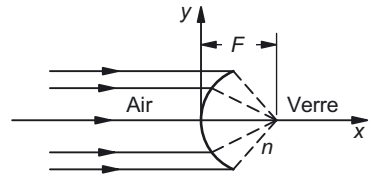
Exercice 20.10 Le télescope Hale de 5 mètres, utilisé dans l'un de ses multiples arrangements optiques, a une distance focale de 160 m. Quelle devrait être la distance x entre les plans focaux des étoiles lointaines et

(a) de la lune ?

(b) d'un satellite artificiel à une portée de 300 km ?

Exercice 20.11 Un faisceau de lumière parallèle dans l'air doit être focalisé en un point par une surface réfractrice unique qui entoure une région d'indice n, comme sur la figure 20.5. (y est la distance normale à l'axe.)

Figure 20.5



(a) Trouver la forme convenable de cette surface.

(b) Le lentilles sont souvent fabriquées de façon sphérique. Dans quelles conditions cela est-il acceptable ?

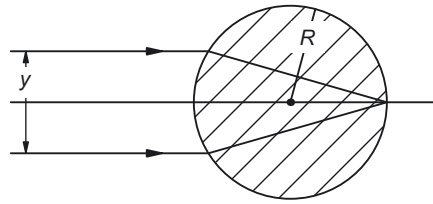
Exercice 20.12 Le diamètre externe d'un morceau de tube capillaire est D, et son indice de réfraction est n. Vu de côté, le petit conduit interne du tube paraît avoir une diamètre d'. Quel est son véritable diamètre d ?

Exercice 20.13 Une sphère de verre a un rayon de 2 cm et un indice de réfraction $n = 1{,}50$. Si une source de lumière ponctuelle est disposée à 12 cm du centre, où l'image se formera-t-elle ?

Exercice 20.14 Dans le calibrage d'un instrument photométrique, il est nécessaire de déterminer que deux rayons parallèles sont exactement à une distance y l'un de l'autre. Cela se réalise en faisant tomber les deux rayons perpendiculairement et symétriquement sur une baguette de verre de rayon R et d'indice de réfraction $n = 1{,}60$, puis en ajustant la séparation des rayons jusqu'à ce qu'ils se focalisent sur le bord opposé de la baguette, comme montré sur la figure 20.6. Exprimer y en fonction de R ?

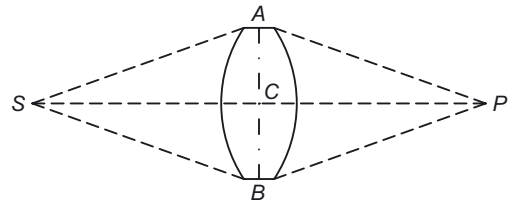
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Figure 20.6



Exercice 20.15 Sur la figure 20.7 S est une source de lumière, P est son image produite par une lentille, $\overline{SC} = \overline{CP} = 1\,m$, $\overline{AC} = \overline{BC} = 0{,}10\,\text{m}$. La lentille ACB a 3 mm d'épaisseur en son bord, avec un indice de réfraction $n = 1{,}6$. Pour que le rayon SCP mette exactement autant de temps que les rayons SAP et SBP, quelle doit être l'épaisseur d de la lentille en C ?

Figure 20.7



Exercice 20.16 Une lentille de distance focale F produit une image réelle d'un objet lointain, et cette image est regardée avec une loupe de distance focale f. Si l'œil est accommodé à l'infini, trouver le grandissement angulaire M du système.

Exercice 20.17 Deux lentilles minces L et L', de distances focales f et f', sont séparées d'une distance D. Trouver la distance focale équivalente F de cette combinaison, et les distances Δ, Δ' des plans principaux par rapport aux lentilles L et L' respectivement.

Exercice 20.18 L'œil humain moyen peut se focaliser sur des objets se trouvant à peu près entre 25 cm et l'infini. Une lentille mince simple et grossissante de distance focale $f = +5\,\text{cm}$ est placée devant l'œil.

(a) Entre quelles distances d un objet doit-il se trouver pour être vu distinctement ?

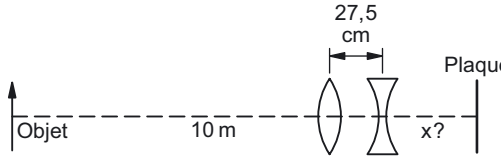
(b) Déterminer le grandissement angulaire M pour ces deux positions.

Exercice 20.19 Un téléobjectif comporte une lentille convergente de distance focale $f_1 = +30\,\text{cm}$ et une lentille divergente de distance focale $f_2 = -10\,\text{cm}$. La distance des deux lentilles est de 27,5 cm, comme sur la figure 20.8.

(a) Trouver la position x où une plaque photographique doit être placée de façon à photographier un objet à 10 mètres devant la première lentille.

(b) Faire un diagramme des rayons qui montre ce dispositif.

Figure 20.8

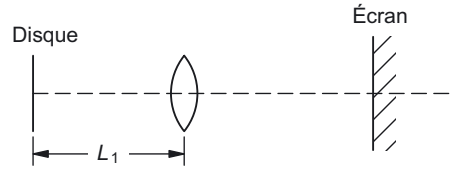


Exercice 20.20 Un télescope astronomique simple a un objectif de 4 cm de diamètre, une distance focale de 10 cm, et un oculaire de distance focale de 2 cm. Les deux lentilles sont placées sur le même axe à 12 cm l'une de l'autre. Le télescope doit voir des étoiles écartées de l'axe de 5,7° (arctan 0,1). Quel doit être le rayon r de l'oculaire pour recevoir toute la lumière de l'objectif ?

Note : Le remède consiste à placer une « lentille de champ » dans le plan focal.

Exercice 20.21 Un disque lumineux de diamètre D est tenu perpendiculairement à l'axe d'une lentille convexe, et son image réelle est focalisée sur un écran fixe, comme montré sur la figure 20.9. Lorsque le disque est à une distance L_1 de la lentille, le diamètre de l'image est d_1. Si on rapproche le disque à une distance L_2 de la lentille, et que l'écran est déplacé pour mettre au point l'image, le diamètre de la nouvelle image est d_2.

Figure 20.9



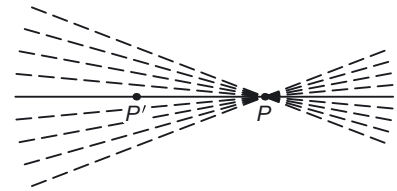
(a) Est-ce que $d_1 > d_2$ ou $d_2 > d_1$?

(b) L'écran doit-il être déplacé vers la lentille ou plus loin pour former une image dans le second cas ?

(c) Quelle est la distance focale f de la lentille ?

Exercice 20.22 Un certain faisceau lumineux converge en un foyer en un certain point P, montré sur la figure 20.10. On souhaite introduire une surface réfléchissante unique passant par un point axial donné Q qui va faire une nouvelle image de la lumière en un nouveau foyer en un point donné P'. Trouver la forme d'une telle surface. On notera la distance $\overline{QP'} = D$ et $\overline{QP} = d$. Noter qu'il y a deux cas à considérer lorsque le miroir intercepte les rayons :

Figure 20.10



(a) avant qu'ils passent par P ;

(b) ou après qu'ils sont passés par P.

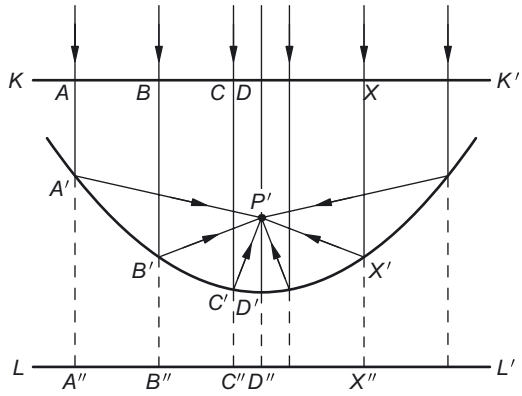
Exercice 20.23

(a) En se référant à la figure 20.11 : établir que l'équation d'une courbe parabolique de distance focale f est $y = x^2/4f$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(b) Un seau d'un fluide de densité ρ est en rotation uniforme avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical. Montrer que la surface supérieure du fluide prend une forme parabolique, et trouver la distance focale f du paraboloïde.

Figure 20.11



21. Rayonnement électromagnétique : interférences

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2, Chap. 28 et 29.

Exercice 21.1 Interpréter géométriquement les problèmes suivants de nombres complexes, et montrer que, dans chaque cas, la valeur absolue de A est bien celle donnée :

(a)

$$A = re^{i\theta/2} + re^{-i\theta/2}$$
$$|A| = 2r\cos(\theta/2)$$

(b)

$$A = \sum_{n=0}^{N} re^{in\theta}$$
$$|A| = r\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\theta\right)}{\sin(\theta/2)}$$

Exercice 21.2 Une charge q parcourt un chemin circulaire de rayon a à une vitesse angulaire ω.

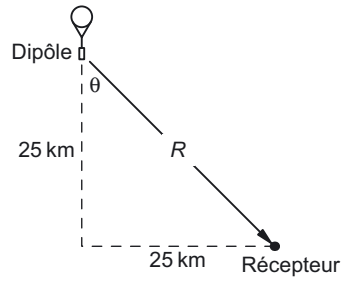
(a) Évaluer le champ électrique $\boldsymbol{E}(t)$ à grande distance R de la charge, à un angle θ par rapport à l'axe du cercle.

(b) Trouver l'intensité du rayonnement $I(\theta)$ à grande distance R sur l'axe ($\theta = 0$) et dans le plan du cercle ($\theta = \pi/2$).

On supposera $\omega a \ll c$ et $a \ll R$.

Exercice 21.3 La puissance par unité de surface fournie par une onde électromagnétique est proportionnelle à la moyenne du carré du champ.

Figure 21.1

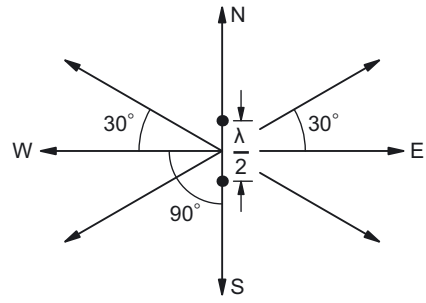


(a) Si la puissance totale rayonnée par une charge oscillante est P_{total}, combien de puissance P tombe sur une aire unité perpendiculaire au rayon vecteur $\boldsymbol{R}$ à un angle θ par rapport à l'axe d'oscillation ?

(b) Calculer P en W m^{-2} pour un dipole orienté verticalement et suspendu à une radiosonde de rayons cosmiques à un ballon à une altitude de 25 km et à une distance horizontale de 25 km du récepteur, comme sur la figure 21.1, si le transmetteur rayonne une puissance totale de 0,5 W.

Exercice 21.4 Deux antennes verticales sont disposées comme sur la figure 21.2 et sont alimentées en phase. Les antennes sont telles que si l'une, individuellement, rayonne une certaine intensité I_0 dans toutes les directions horizontales, l'autre rayonne une intensité $2I_0$. Quelle doit être l'intensité I émise dans les diverses directions de la figure ?

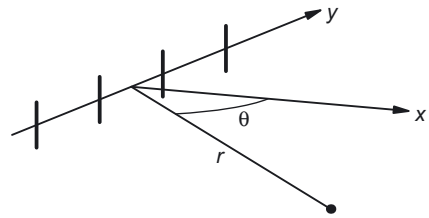
Figure 21.2



Exercice 21.5 Quatre dipôles rayonnants identiques sont alignés parallèlement et de façon équidistante le long d'une droite à 2,5 cm les uns des autres. Ils sont alimentés à une fréquence de 3×10^9 Hz et déphasés de telle façon qu'en commençant par une extrémité, chaque dipole est décalé du précédent de 90°. Trouver l'intensité du rayonnement $I(\theta)$ à grande distance dans le plan équatorial (perpendiculaire à l'axe des dipoles), et dessiner cette fonction en coordonnées polaires montrées sur la figure 21.3. Un tel diagramme est nommé la *figure de rayonnement* ou *forme de lobe* d'un système d'antennes.

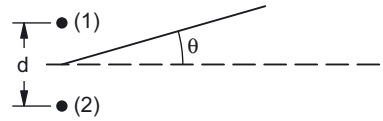
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Figure 21.3



Exercice 21.6 Deux dipôles parallèles sont à une distance $d = \lambda/2$ l'un de l'autre, et oscillent à la même fréquence avec la même amplitude (figure 21.4).

Figure 21.4



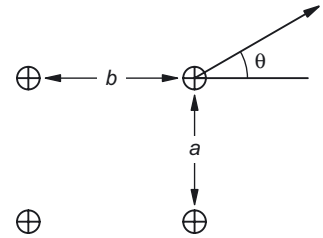
(a) Trouver $I = I(\theta)$ (la forme de lobe) dans le plan équatorial et dessiner cette forme dans un diagramme polaire si les oscillateurs sont en phase.

(b) Trouver de quel fraction de période l'oscillateur (2) doit être déphasé de l'oscillateur (1) pour qu'un observateur à $\theta = 210°$ obtienne un signal maximum. Dans ce cas, à quel angle θ le signal est-il nul ?

(c) Trouver et dessiner la forme de lobe de la partie (b) ci-dessus.

Exercice 21.7 Quatre dipôles verticaux sont situés aux coins d'un rectangle horizontal de côtés a et b comme sur la figure 21.5. S'ils sont alimentés en phase à une longueur d'onde λ, quelles valeurs minimum (> 0) doivent avoir a et b pour produire une intensité maximum dans la direction $\theta = 30°$ loin des dipôles ?

Figure 21.5



Exercice 21.8 Un observateur est à une distance R de deux charges identiques q qui passent toutes deux à l'origine àt $t = 0$. La première charge se déplace sur l'axe z, avec un mouvement $z(t) = d \sin \omega t$; La seconde suivant l'axe x, avec $x(t) = d \sin \omega t$. Quelle est la grandeur du champ électrique $E(t)$ aux deux points suivants :

(a) $x = R/\sqrt{2}$, $y = 0$, $z = R/\sqrt{2}$,

(b) $x = 0$, $y = R$, $z = 0$.

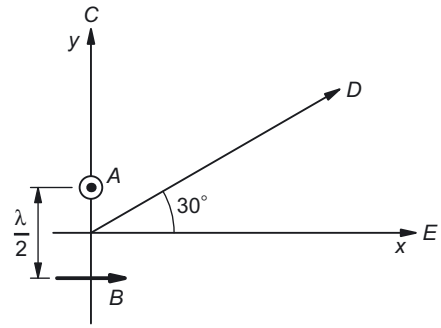
On supposera $R \gg c/\omega$ et $\omega d \ll c$.

Exercice 21.9 Un ingénieur de terrain, qui teste des profils de rayonnement, vole dans un hélicoptère à une vitesse de $200\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ par rapport au sol, à basse altitude suivant une trajectoire circulaire de 3 km de rayon autour du milieu de deux antennes dipolaires

verticales qui sont sur une ligne nord-sud. Pour la fréquence utilisée dans le test, les antennes sont à une demi longueur d'onde l'une de l'autre. D'ordinaire les antennes sont utilisées en phase. Mais l'opérateur de transmissions a décidé de faire une plaisanterie à l'ingénieur de terrain en changeant la relation de phase entre les antennes à un rythme tel qu'aucune variation de l'intensité rayonnée ne puisse être observée à bord de l'hélicoptère. S'il a commencé ce changement lorsque l'hélicoptère allait vers l'est des antennes, à quel taux $d\alpha/dt$ change-t-il la relation de phase lorsque l'hélicoptère est à $\theta°$ nord-est des antennes ?

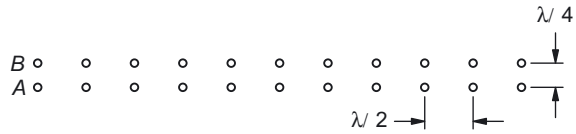
Exercice 21.10 Deux dipôles électriques, A et B, sont à une demi-longueur d'onde l'un de l'autre. Ils sont perpendiculaires l'un à l'autre et perpendiculaires à la droite qui relie leurs centres, comme sur la figure 21.6. Ils sont alimentés à la même fréquence et à la même phase, mais le dipole B a une amplitude double de celle du dipole A. Trouver l'intensité I et la direction du vecteur $\boldsymbol{E}$ rayonné à une grande distance des dipoles dans les directions C, D, et E (toutes dans le plan xy) indiquées sur la figure.

Figure 21.6



Exercice 21.11 Une ligne double de N dipôles oscillants également espacés est située comme sur la figure 21.7. Tous les dipôles de la ligne A sont alimentés en phase, et tous ceux de la ligne B ont un retard de phase de 90° par rapport à ceux de la ligne A. Dessiner le motif du rayonnement $I(\theta)$ dans le plan équatorial à une grande distance du dispositif.

Figure 21.7



Exercice 21.12 Les électrons de conduction dans un long fil droit et fin de longeur L oscillent tous avec une fréquence angulaire ω, une petite amplitude a, et la même phase. Trouver la grandeur du champ électrique $E(t)$ à grande distance R ($R \gg L$), à un angle θ par rapport au fil.

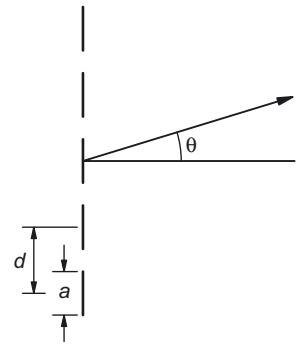
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

22. Rayonnement électromagnétique : diffraction

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2, Chap. 30.

Exercice 22.1 Soient n dipôles rayonnants, également espacés, chacun de longueur a séparés de d sur une ligne droite, comme sur la figure 22.1, qui oscillent le long de la ligne avec la même amplitude A et la même fréquence ω, mais avec des déphasages successifs α. Chaque dipôle est formé d'un grand nombre de dipôles atomiques. Montrer que le schéma de diffraction de l'intensité à grande distance et à un angle θ est donné par

Figure 22.1



$$I = I_0 \frac{\sin^2(\beta/2)}{(\beta/2)^2} \frac{\sin^2(n\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)},$$

où

$$\phi = \alpha + \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta, \qquad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}, \qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta,$$

et I_0 est l'intensité d'un dipôle unique à l'angle θ.

Exercice 22.2 Une certaine raie spectrale a une longueur d'onde de 5500 Å et une largeur de 10 Å. Quel est le facteur Q de l'oscillateur atomique ?

Exercice 22.3 Dans quelles conditions une fente éclairée produira-t-elle une ombre « géométrique » ? (C'est-à-dire telle que les effets de diffraction soient négligeables.)

Exercice 22.4 Une automobile avec les deux phares habituels (considérés comme des sources ponctuelles) approche de loin sur une route droite. Les phares sont situés à 120 cm l'un de l'autre.

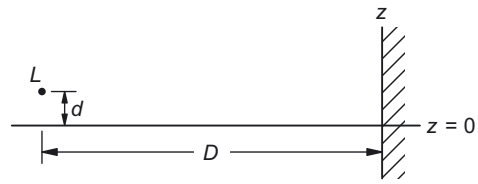
(a) À quelle distance d d'un observateur serait la voiture pour que ce dernier soit juste certain qu'il voit deux lumières et non une, en supposant que l'ouverture de son iris est de 0,5 cm et que la longueur d'onde effective de la lumière est 5500 Å ?

(b) Le fait que la lumière soit « blanche » (un mélange de longueurs d'onde) facilite-t-il ou non la résolution des sources ?

Exercice 22.5 Les deux longueurs d'onde de la raie-D (raie jaune) du sodium sont de 5889,95 Å et 5895,92 Å, respectivement. Quelle doit-être la longueur x d'un réseau de 600 lignes/mm pour qu'il puisse résoudre ces deux raies dans son spectre de premier ordre ?

Exercice 22.6 Une source ponctuelle de lumière L émettant une seule longueur d'onde λ est située à une *petite* distance d au-dessus d'un miroir plan idéal. Un écran se trouve au bout du miroir à une distance D de L, comme sur la figure 22.2. ($D \gg d$) Trouver $I(z)/I_0$, l'intensité relative de la lumière sur l'écran en fonction de z, le plan du miroir étant à $z = 0$. (*Note :* un miroir change la phase de la lumière qu'il réfléchit de 180°.)

Figure 22.2



Exercice 22.7 De la lumière parallèle de longueur d'onde λ est en incidence normale de la gauche sur un trou circulaire percé dans un écran et l'intensité résultante est observée en un point de l'axe du trou à $z = 10\lambda$ vers la droite.

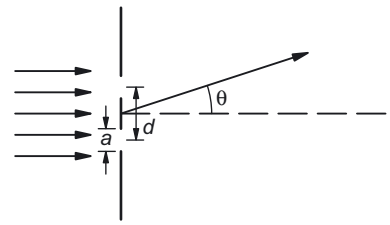
(a) Quel rayon r le trou doit-il avoir pour produire une intensité maximum au point d'observation ?

(b) Quelle est la fraction de l'intensité I/I_{max} qui est réduite si l'écran est enlevé ?

Exercice 22.8

(a) Calculer l'image de diffraction $I(\theta)/I_{max}$ pour un écran, comme sur la figure 22.3, qui a deux fentes parallèles de largeur $a = 6$ cm, séparées d'une distance $d = 12$ cm, exposé à un faisceau parallèle de rayonnement micro-onde de $\lambda = 3$ cm.

Figure 22.3



(b) Combien d'ordres de maxima principaux y a-t-il et pour quelles valeurs de θ ?

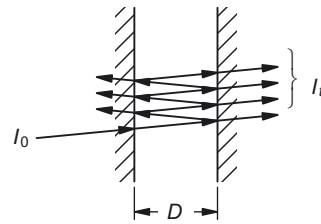
(c) Quel est la valeur de $I(\theta)/I_{max}$ aux positions des maxima principaux ?

Exercice 22.9 Les longueurs d'onde des raies spectrales sont habituellement mesurées à 0,001 Å avec des spectrographes dont le pouvoir de résolution peut n'être que de 0,010 Å. Est-ce que des lois fondamentales de la physique sont violées dans la procédure ? Expliquer pourquoi.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 22.10 Un interféromètre de Fabry-Pérot consiste en une paire de surfaces très exactement plates, parallèles à une distance D l'une de l'autre. Les surfaces sont revêtues de façon à réfléchir une fraction R^2 de l'intensité de la lumière incidente normalement et à transmettre une fraction T^2 de l'intensité. De la lumière d'intensité I_0 et de longueur d'onde λ est incidente sur une surface de la gauche (voir la figure 22.4). Une fraction de ce faisceau est transmise directement dans le système, mais une partie de de la lumière est réfléchie par la seconde surface, puis par la première surface, et est ensuite transmise. En général, le faisceau sortant est composé de lumière que a été réfléchie 0, 2, 4, 6, ... fois et transmise au travers de deux films, le tout additionné. De quelle façon l'intensité relative transmise I_t/I_0 doit-elle dépendre de D, λ, R, et T ?

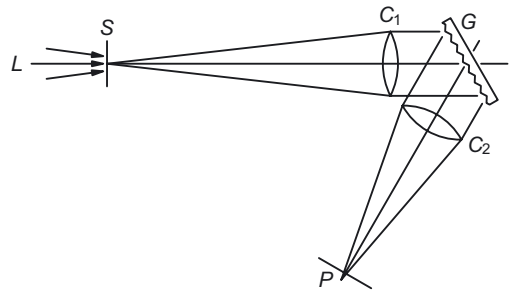
Figure 22.4



Note : Des filtres optiques à bande étroite, appelés filtres à interférences, fonctionnent sur ce même principe, mais les deux surfaces réfléchissantes sont faites en revêtant dans un vide poussé un morceau de verre de plusieurs couches, d'épaisseur très contrôlée, ou de matériaux transparents d'indices de réfraction variables.

Exercice 22.11 Un type de spectrographe à réseau habituel est construit comme sur la figure 22.5. De la lumière provenant d'une source L passe au travers d'une fente étroite S, puis dans une lentille de collimation (ou un miroir) C_1 qui la rend parallèle (de façon à atteindre le réseau comme une onde plane). Cette lumière parallèle est alors diffractée par le réseau G ; la lumière diffractée, qui se disperse dans certaines directions atteint une autre lentille C_2, qui la focalise sur un plan P, où apparaît le spectre sous forme d'une bande, parfois traversée par des raies spectrales étroites en divers endroits. Soit h et w la longueur et la largeur de la fente, les distances focales de C_1 et C_2 sont F_1 et F_2, les angles entre la normale au réseau et les axes de C_1 et C_2 sont θ_i et θ_d, et le nombre de traits par mm du réseau N.

Figure 22.5



(a) Quelle largeur h' aura la bande du spectre en P ?

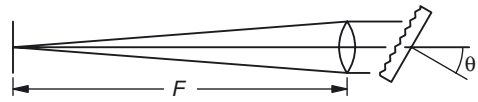
(b) Quelles longueur(s) d'onde λ_m apparaîtront sur l'axe de C_2 en P ?

(c) À quelle distance D dans le plan focal en P deux raies spectrales apparaîtront-elles si leurs longueurs d'onde diffèrent de 1 Å ? Cette grandeur est souvent appelée la *dispersion* de l'instrument.

(d) Si la largeur de la fente w est bien supérieure à la résolution $1{,}22\,\lambda F_1/A_1$ de la lentille du collimateur, où A_1 est l'ouverture, quelle largeur w' doit avoir une raie spectrale en P ?

Exercice 22.12 Le spectrographe du télescope solaire de 150 pieds de l'observatoire du Mont Wilson est du type Littrow, montré de façon schématique sur la figure 22.6. Dans cet arrangement, une lentille unique agit à la fois comme collimateur et comme focaliseur, et $\theta_i = -\theta_d$ (presque). Le spectre est formé sur une bande adjacente à la fente. La distance focale de l'instrument du Mont Wilson est $F = 23$ m, et le réseau a une surface rayée de 15 cm × 25 cm avec 600 traits/mm. On utilise couramment le cinquième ordre.

Figure 22.6



(a) À quel angle θ doit-on incliner le réseau pour amener la raie $\lambda = 5250{,}218$ Å du fer neutre en coïncidence avec la fente d'entrée dans le cinquième ordre du spectre ?

(b) Quelles autres longueurs d'onde dans la bande de 3600 Å–7000 Å coïncideront-elles également avec la fente ?

(c) Pouvez-vous suggérer une façon simple pour supprimer les ordres non désirés et ne laisser que le cinquième ?

(d) Quelle est la dispersion d de l'instrument au cinquième ordre $\lambda = 5250$ Å ?[5]

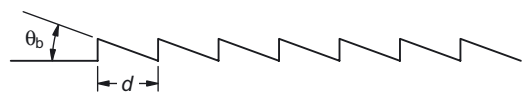
(e) Quelle est la valeur minimum de $\Delta\lambda$ qui peut théoriquement être résolue par cet instrument au cinquième ordre $\lambda = 5250$ Å ?

Exercice 22.13 Lorsque les rainures d'un réseau ont un forme qui projette la majeure partie du rayonnement incident dans une direction donnée, on dit que le réseau a un « angle de blaze ». En supposant qu'il serait possible de tailler les rainures de façon parfaite en dents de scie comme sur la figure 22.7, chaque surface étant inclinée d'un angle θ_b :

(a) utiliser la notion que le faisceau diffracté correspond au rayonnement émis par des oscillateurs dans le matériau, qui sont mis en mouvement en phase par le rayonnement incident, pour en déduire la direction dans laquelle le faisceau diffracté serait le plus intense si $\theta_i = 0$. (On supposera de la lumière blanche.)

(b) Estimer l'étendue angulaire d'une telle méthode.

Figure 22.7



5. Noter que, bien que $\theta_i = -\theta_d$ pour $\lambda = 5250$ Å, θ_i est fixe alors que θ_d dépend de λ.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

23. Rayonnement électromagnétique : réfraction, dispersion, absorption

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2, Chap. 31.

Exercice 23.1 Est-ce la lumière rouge ou la lumière bleue qui est la plus détournée par un prisme, et pour quelle raison physique ?

Exercice 23.2 Trouver l'indice de réfraction n de l'aluminium pour les rayons X de longueur d'onde $1{,}56\,10^{-8}$ cm. On supposera que tous les électrons de l'aluminium ont des fréquences propres très inférieures à la fréquence des rayons X.

Exercice 23.3 L'indice de réfraction de l'ionosphère pour les ondes radio de fréquence 100 MHz est $n = 0{,}90$. Trouver la densité ρ des électrons par centimètre cube dans l'ionosphère.

Exercice 23.4 En notant que le champ électrique d'une onde lumineuse traversant un milieu d'indice de réfraction n est $E = E_0 e^{i\omega(t-nz/c)}$,

(a) Montrer que, si $n = n' - in''$, $E = E_0 e^{-n''\omega z/c} e^{i\omega(t-n'z/c)}$.

(b) Utiliser l'équation (31.20) du volume I,

$$n - 1 = \frac{Nq_e^2}{2\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

pour établir le taux auquel l'intensité I d'un faisceau de rayonnement dont la fréquence est exactement égale à la fréquence naturelle ω_0 d'un atome est atténuée.

Exercice 23.5 Dans la Section 31-5 du volume I, on a déduit que le flux d'énergie d'une onde est $S = \epsilon_0 c E^2$ watts par mètre carré :

(a) Trouver le taux total P auquel l'énergie est rayonnée par un électron qui oscille avec une amplitude x_0 et une fréquence angulaire ω.

(b) Comparer l'énergie rayonnée par cycle avec l'énergie interne $m\omega^2 x_0^2/2$, et trouver ainsi la constante d'amortissement γ_R. Ce processus est appelé *l'amortissement par rayonnement*.

(c) Un atome excité produit un rayonnement de longueur d'onde λ. Calculer théoriquement la largeur attendue $\Delta\lambda$ de la raie spectrale, si la largeur ne provient que de l'amortissement par rayonnement. (Imaginer l'atome comme étant un petit oscillateur amorti de grand facteur Q.)

24. Rayonnement électromagnétique : amortissement par rayonnement, diffusion

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2, Chap. 32.

Exercice 24.1 Quelle est la dépendance en longueur d'onde de la diffusion de la lumière par des électrons libres ?

Exercice 24.2 Un faisceau de lumière traverse une région contenant N diffuseurs par unité de volume. Chacun diffuse la lumière avec une section efficace σ. Montrer que l'intensité de la lumière restant dans le faisceau, en fonction de la distance x traversée, est

$$I = I_0 e^{-N\sigma x}.$$

Exercice 24.3 En utilisant la formule pour la section efficace (équation (32.19) du volume I),

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2},$$

et la formule pour l'indice de réfraction d'un gaz, équation (31.19) du volume I, montrer que la quantité $N\sigma$ peut s'écrire

$$N\sigma = \frac{2}{3\pi}\frac{(n-1)^2}{N}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4,$$

où N est le nombre d'atomes par unité de volume du gaz. (C'est là une des premières méthodes pour estimer le nombre d'Avogadro, en utilisant la diffusion du ciel bleu.)

Exercice 24.4 La couronne interne du Soleil (appelée couronne-K) provient de la lumière solaire diffusée par des électrons libres. L'éclat apparent de la couronne-K à un rayon solaire du bord du Soleil est environ de 10^{-8} fois l'éclat du Soleil (par unité de surface). Estimer le nombre d'électrons libres N_e par cm^3 près du Soleil.

Exercice 24.5 De quel pourcentage f la lumière bleue du Soleil ($\lambda = 4500$ Å) est-elle atténuée en traversant l'atmosphère lorsque le Soleil est

(a) au zenith ?

(b) à 10° de l'horizon ?

Exercice 24.6 Un petit morceau de fil de cuivre droit placé dans un faisceau d'ondes électromagnétiques provenant d'une antenne radar, va diffuser une partie du rayonnement. Le champ électrique établit un mouvement des électrons dans le fil, et ce mouvement provoque un rayonnement de l'onde diffusée. Pour un fil court (longueur $\ll \lambda$) on peut supposer que le déplacement moyen se fait le long de l'axe du fil et qu'il est

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

proportionnel à la composante du champ électrique parallèle au fil. Autrement dit, s'il y a N électrons dans le fil et si d est leur déplacement instantané moyen, alors $d = \chi E_{\|}$, où $E_{\|}$ est la composante du champ électrique parallèle au fil. Nous voulons connaître (en fonction de χ et N) :

(a) Quelle est la section efficace maximum $\sigma_{\max}$ du fil, si le rayonnement incident a une amplitude E_0 et une fréquence ω ?

(b) De quelle façon la section efficace σ dépend-elle de l'orientation θ du fil ?

Exercice 24.7 Un nouveau rayonnement est découvert (appelé rayons X, du nom de l'inconnu mystérieux) qui est soupçonné d'être formé d'ondes transverses comme la lumière. La diffusion de ces rayons par des électrons dans la matière a été observée. Comment pourriez-vous prouver que ce sont des ondes transverses et qu'elles peuvent être polarisées ?

Exercice 24.8 Montrer que si on suppose que l'équation du mouvement d'un oscillateur chargé est

$$md^2x/dt^2 + \omega_0^2 x - (2e^2/3c^3)d^3x/dt^3 = F(t),$$

le terme de dérivée troisième va décrire correctement le taux de perte d'énergie par rayonnement (la résistance radiative) à toute fréquence.

Conseil : Supposer $F(t) = A\cos\omega t$ et trouver la puissance absorbée par la source du mouvement.

Exercice 24.9 On pense que l'espace interstellaire est peuplé de nuages de très petits grains de poussière composés de carbone, de glace, et de petites quantités d'autres éléments. Estimer ma masse minimum par unité de surface (des grammes par cm^2) d'une telle poussière qui puisse obscurcir notre vision des étoiles situées au-delà des nuages d'un facteur, disons, 100 (c'est-à-dire de 5 magnitudes stellaires). Noter que les grains de poussière peuvent diffuser la lumière stellaire ou simplement l'absorber.

25. Rayonnement électromagnétique : polarisation

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2, Chap. 33.

Exercice 25.1 La lumière réfléchie par un lac (par exemple au lever du Soleil ou de la Lune) est-elle polarisée, avec son champ électrique dans un plan vertical ou horizontal ?

Exercice 25.2 Les photographes utilisent souvent un filtre jaune, ou un filtre polaroid pour renforcer le contraste des nuages dans le ciel. Expliquer les raisons physiques de ces techniques dans les deux cas.

Exercice 25.3 Deux feuilles de polaroid sont disposées avec leurs axes à angle droit. Une troisième feuille est alors introduite entre les deux avec son axe à un angle θ de celui du premier polaroid. Si de la lumière non polarisée d'intensité I_0 tombe sous incidence normale sur cette combinaison, quelle intensité I_t doit être transmise ? On supposera que les polaroids sont idéaux (50 % de transmission de lumière non polarisée et pas de transmission au travers de polaroids croisés).

Exercice 25.4 Discuter l'intensité et la polarisation du rayonnement émis par un électron se déplaçant sur une orbite circulaire à vitesse constante, en particulier pour les points sur l'axe du cercle et dans le plan du cercle.

Exercice 25.5 Supposons que lorsqu'un faisceau de lumière plane polarisée atteint une feuille de polaroid, un fraction α^2 de l'intensité est transmise si l'axe du polaroid est parallèle à l'axe de polarisation et une fraction ϵ^2 est transmise si les deux axes sont à angle droit. (Si les polaroids étaient idéaux, α^2 serait égal à un et ϵ^2 à zéro.) De le lumière non polarisée d'intensité I_0 est en incidence normale sur une paire de feuilles de polaroid à un angle θ l'un de l'autre. Quelle intensité relative I_t/I_0 sera transmise ? (On ignorera les effets de réflexion.)

Exercice 25.6 Un jeune étudiant de Caltech en vacances, marchant avec une amie, voit la Lune à 10° au-dessus de l'horizon, qui se réfléchit sur un lac calme. Nostalgique, se souvenant du *Cours de Physique de Feynman*, Chapitre 33, il essaie de calculer la luminosité que devrait avoir l'image, par rapport à celle de la Lune elle-même. Il suppose que le rayonnement de la Lune est presque non polarisé. Quel résultat devrait-il s'attendre à trouver ? Montrer que l'intensité réfléchie I_R/I_{Lune} approche 100 % pour une incidence rasante.

Exercice 25.7 Montrer que l'angle de Brewster (l'angle d'incidence i pour lequel le rayon réfléchi est polarisé linéairement) est tel que $\tan i = n$, où n est l'indice de réfraction.

Exercice 25.8 Si de la lumière arrive perpendiculairement sur une facette plane d'un diamant (indice de réfraction $n = 2{,}40$),

(a) Quelle fraction f de la lumière incidente est réfléchie ?

(b) Quel est l'angle de Brewster β pour le diamant ?

Exercice 25.9 Considérons de la lumière plane polarisée traversant une série de n polariseurs, faisant chacun un angle θ/n avec le précédent et que le premier polariseur est à un angle θ/n dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport au plan de polarisation initial.

(a) Trouver l'intensité I_t de la lumière qui passe au travers des polariseurs si l'intensité initiale est I_0.

(b) Quelle est la polarisation de la lumière ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 25.10 De la lumière polarisée linéairement est envoyée sur une lame quart d'onde suivie d'un polaroid. La direction de la polarisation fait un angle θ avec l'axe optique de la lame quart d'onde. En *faisant tourner* le polaroid, on observe des maxima $I_{\max}$ et des minima $I_{\min}$ de l'intensité de la lumière sortante. Quel est le rapport $I_{\max}/I_{\min}$ pour $\theta < 45°$? L'incidence est normale.

Exercice 25.11 Un cristal de quartz d'indices de réfraction $n_o = 1{,}553$ (ordinaire) et $n_e = 1{,}544$ (extraordinaire) est fixé sur une feuille mince de 0,12 mm, de telle façon que son axe optique soit parallèle aux faces de la feuille. Si on le met en sandwich entre polariseurs croisés de façon que son axe optique soit à 45° de ceux des polaroids, quelles longueurs d'onde de lumière visible (4000–7500 Å) seront transmises par le dispositif avec une intensité maximum ?

Exercice 25.12 Les indices de réfraction du quartz cristallin pour de la lumière de longueur d'onde de 600 millimicrons sont $n_o = 1{,}544$ et $n_e = 1{,}553$, pour les rayons ordinaire et extraordinaire. Si un cristal de quartz est coupé parallèlement à son axe optique, on peut tirer profit de la différence de vitesse maximale entre les rayons ordinaire et extraordinaire qui entrent normalement et se propagent dans le cristal.

(a) Quelle épaisseur de cristal d est nécessaire pour déphaser les deux rayons de 90°, à cette longueur d'onde ?

(b) On suppose que les indices de réfraction pour de la lumière d'une longueur d'onde de 410 millimicrons sont $n_o = 1{,}557$ et $n_e = 1{,}567$, et que le cristal est coupé comme une lame quart d'onde pour une longueur d'onde de 600 millimicrons. Décrire complètement l'état de polarisation de la lumière émergente $\boldsymbol{E}$ de cette longueur d'onde plus courte qui est polarisée linéairement à l'entrée du cristal.

Exercice 25.13 On vous donne une plaque polie d'obsidienne noire et on vous demande d'en mesurer l'indice de réfraction. Comment vous y prendriez-vous, et quelle précision obtiendriez-vous ?

26. Rayonnement électromagnétique : effets relativistes

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2, Chap. 34.

Exercice 26.1 Un disque de rayon A roule sans glisser sur un plan horizontal. Trouver les équations de la trajectoire d'un point à un rayon $R \leqslant A$ du centre du disque en fonction de A, R, et de l'angle θ dont le disque a tourné. Si x est mesuré à partir du centre du disque verticalement et z horizontalement, montrer que

$$z = A\theta + R\sin\theta,$$
$$x = R\cos\theta.$$

Exercice 26.2 Discuter les propriétés de polarisation du rayonnement synchrotron et du bremsstrahlung.

Exercice 26.3 Si vous deviez faire des mesures du rayonnement électromagnétique émis par un objet astronomique, comme la nébuleuse du crabe, comment feriez-vous la distinction entre le rayonnement synchrotron et le bremsstrahlung ?

Exercice 26.4 Supposez que vous observiez une petite section de la nébuleuse du crabe le long de l'axe x de votre système de coordonnées, et que vous observiez du rayonnement synchrotron polarisé dans la direction z. Quelle est la direction du champ magnétique ? Discuter le résultat.

Exercice 26.5 Soit un électron sur une orbite circulaire avec une vitesse relativiste dans un champ magnétique uniforme. Dessiner la grandeur du champ électrique en fonction du temps (sur au moins deux cycles) pour un observateur regardant

(a) dans une direction le long du champ magnétique ;

(b) dans une direction perpendiculaire au champ magnétique.

Exercice 26.6 Est-ce que la pression de radiation d'une lumière donnée est plus élevée sur une surface noire ou sur un miroir ? Expliquer pourquoi.

Exercice 26.7 Bradley (1728) a observé l'aberration de la lumière des étoiles qui semblent se déplacer dans le ciel en raison du mouvement de la Terre sur son orbite. Le télescope doit être dirigé « vers l'avant » d'un maximum de 20,5″ d'arc pour les étoiles proches du pôle de l'écliptique. Si l'on considère la vitesse de la lumière comme connue : $3\,10^8\,\mathrm{ms}^{-1}$, à quelle valeur du rayon de l'orbite Terrestre R est-ce que cette observation mène ?

Exercice 26.8 Comme il est suggéré dans la Section 34-8 du volume I, démontrer l'expression $\sin\theta = v/c$ pour l'aberration de la lumière stellaire en utilisant la transformation de Lorentz.

Exercice 26.9 Un homme dans une fusée voyageant à $0{,}5c$ observe une étoile à exactement 90° par rapport à la direction de sa vitesse. Une certaine raie dans le spectre de l'étoile apparaît à la fréquence ν_0. Il fait alors demi-tour et reprend le même chemin à la même vitesse.

(a) À quel angle θ_1 voit-il l'étoile maintenant ?

(b) Quelle est la fréquence ν_1 de la raie spectrale ?

Exercice 26.10 Une sonde spatiale s'écarte en direction radiale d'un observateur. L'observateur envoie un faisceau radar de fréquence ν_0 vers la sonde et trouve que la fréquence du faisceau réfléchi est ν. Quelle est la vitesse du véhicule spatial par rapport à l'observateur ? (On supposera que dans le système au repos du véhicule le faisceau est réfléchi sans changement de fréquence.)

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 26.11 Des spectrogrammes du rayonnement provenant d'extrémités opposées du diamètre équatorial solaire montrent un décalage de 0,1 Å pour la raie H_α de 6564,7 Å. Quelle est la vitesse de la périphérie du Soleil à son équateur ?

Exercice 26.12 Les raies D du sodium (longueur d'onde en laboratoire 589,0 millimicrons) sont déplacées à 588,0 millimicrons dans le spectre d'une certaine étoile. Quelle est la vitesse de l'étoile $\boldsymbol{v}$ par rapport à l'observateur ? (La formule de Doppler non-relativiste est-elle suffisamment précise dans ce cas ?)

Exercice 26.13 L'astronome de Caltech M. Schmidt a mesuré les longueurs d'onde de certaines raies spectrales d'une étoile lointaine et a trouvé qu'elles étaient déplacées vers le rouge de $\Delta\lambda \approx 2\lambda$. Quelle est la vitesse v de récession probable du quasar ?

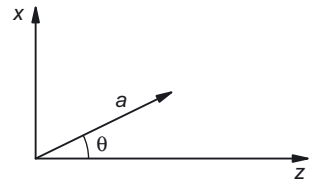
Exercice 26.14 Si $z = ct$ dans l'exercice 26.1, trouver l'accélération transverse d^2x/dt^2 du point. C'est l'accélération retardée nécessaire pour le calcul du rayonnement d'une charge en mouvement circulaire de rayon R.

(a) Exprimer le résultat en fonction des quantités observables R, v (la vitesse de la particule sur sa trajectoire), et x (la position transverse apparente de la particule au moment de l'observation).

(b) Trouver le rapport des intensités rayonnées maximum et minimum $I_{\max}/I_{\min}$ que l'on observera lorsque la particule se déplace vers l'observateur et en sens inverse sur son chemin circulaire.

Exercice 26.15 Un électron initialement au repos en $x = 0$, $z = 0$ reçoit (à des instants $t > 0$) une accélération $\boldsymbol{a}$ dans le plan xz à un angle θ par rapport à l'axe z, comme sur la figure 26.1. Calculer (de façon relativiste) le champ électrique $\boldsymbol{E}(t)$ en un point $z = R_0$, où R_0 est une « grande » distance. Exprimer le résultat en fonction de $\boldsymbol{a}$, la véritable accélération, θ, et $\beta = v/c$, où v est la véritable vitesse de l'électron.

Figure 26.1



Exercice 26.16 Un disque d'aire A et d'épaisseur d est éclairée en incidence normale par de la lumière de longueur d'onde λ et d'intensité I_0. Calculer la force F due à la pression de radiation dans les trois cas suivants.

(a) Le disque est opaque et non réfléchissant.

(b) le disque a un indice de réfraction $n = 1{,}5$. (une réponse à 10 % près est suffisante.)

(c) Le disque a un indice de réfraction complexe $n = 1 - in''$. (n'' est réel.)

Exercice 26.17 Un ballon sphérique d'un rayon de 30 m est presque parfaitement réfléchissant pour éviter l'échauffement solaire. Lorsque le ballon se déplace librement dans l'espace à 1 UA du Soleil, quelle force F provient de la réflexion du rayonnement solaire ?

Exercice 26.18 Dans un moyen de propulsion spatiale proposé, une fine feuille de plastique très réfléchissant aurait servi de « voile » à pression de radiation. Une feuille plane carrée de 100 m × 100 m est disponible, et la masse du vaisseau est de 10^3 kg. Si le vaisseau voyage initialement sur une orbite circulaire d'un rayon de 1 UA autour du Soleil,

(a) Décrire comment utiliser cette « voile » pour faire augmenter le rayon moyen de l'orbite.

(b) Trouver à quel taux dR/dt l'orbite va croître. (*Conseil :* Maximiser la puissance transférée au vaisseau par pression de radiation.)

Exercice 26.19 Supposons que l'espace interstellaire soit peuplé par de petits grains de poussière, de densité moyenne ρ et de forme à peu près sphérique de rayon R.

(a) Montrer que, quelle que soit la taille des grains, le rapport entre l'attraction gravitationnelle du Soleil et de la pression de radiation est indépendant de la distance au Soleil.

(b) Utilisant le fait que l'intensité du rayonnement solaire à l'orbite de la Terre est environ de 1 374 watts par mètre carré, et en supposant que la section efficace d'absorption soit πR^2, trouver à quel rayon R la pression de radiation et l'attraction gravitationnelle se compensent tout juste.

(c) En considérant les résultats du Chapitre 32 du volume I, est-ce que la section efficace effective d'un grain de poussière peut être nettement plus grande que πR^2 ?

27. Comportement quantique : ondes, particules et photons

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2, Chap. 37 et 38.

Exercice 27.1 Comparer qualitativement les figures de diffraction de rayons X sur deux cristaux de même taille est de mêmes cellules élémentaires mais où les arrangements atomiques de ces cellules sont différents.

Exercice 27.2 Un faisceau parallèle d'électrons d'impulsion p_0 traverse une fente de largeur W. Quel est approximativement l'étalement angulaire θ du faisceau après la fente ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 27.3

(a) Les neutrons thermiques ont une énergie cinétique $T \approx (1/40)\,\text{eV}$. Quelle est la longueur d'onde λ associée à de tels neutrons ?

(b) Quelle est la longueur d'onde associée à des électrons d'énergie cinétique

1. 1 keV ?
2. 1 MeV ?

(c) Quelle longueur d'onde serait associée à un objet de masse 50 g se déplaçant à $1000\,\text{m s}^{-1}$?

(d) Lequel a une longueur d'onde plus courte, un rayon X de 1 MeV ou un électron d'une énergie *totale* $E = 1\,\text{MeV}$?

Exercice 27.4 De la lumière de longueur d'onde 4100 Å produit des électrons d'une énergie cinétique maximum de 1,0 eV dans une cellule photoélectrique. Quelle est la longueur d'onde maximum λ_{max} à laquelle la cellule peut réagir ?

Exercice 27.5 L'énergie (cinétique plus potentielle) d'un électron dans l'état fondamental d'un atome d'hydrogène est de −13,6 eV. Si un électron libre est capturé par un proton pour faire un atome d'hydrogène dans son état fondamental,

(a) quelle est la longueur d'onde λ du photon émis dans ce processus ?

(b) le rayonnement émis tombe-t-il dans le visible, l'infrarouge ou l'ultraviolet ?

Exercice 27.6 Un muon μ^- et un proton peuvent former un « atome muonique » hydrogénoïde. Estimer le rayon de Bohr R de cet atome en angstroms. ($m_{\mu^-} = 206\,m_e$)

Exercice 27.7 On veut estimer l'énergie minimum possible d'un oscillateur harmonique pour lequel l'énergie est donnée par $E = p^2/2m + \beta x^2/2$. D'après le principe d'incertitude, l'impulsion p ne peut être diminuée qu'au prix d'une augmentation du déplacement moyen, et la condition que l'énergie soit minimum implique un compromis entre ces deux contributions. Quelle doit être cette énergie minimum E_{min} ?

Exercice 27.8 On observe qu'une raie spectrale ($\lambda = 5000$ Å) due à la transition d'un électron entre un état excité et l'état fondamental de l'atome a une extension en longueur d'onde de 0,01 Å. En moyenne, pendant combien de temps τ l'atome peut-il exister dans son état excité ?

Exercice 27.9 Les neutrons libres peuvent se désintégrer en des protons et des électrons. Un modèle possible pour un neutron serait que ce soit un état lié électron-proton. Si le neutron a un rayon d'environ 1×10^{-15} m, évaluer l'énergie cinétique approchée T (en MeV) pour un électron lié dans un tel modèle. Quelle est votre opinion sur un tel modèle ?

Exercice 27.10 Pendant de petits intervalles de temps, l'énergie au repos d'une particule peut être indéterminée à cause du principe d'incertitude. Par exemple, dans le noyau atomique, un proton peut émettre un méson π^0 (virtuel, $m_{\pi^0} = 270\, m_e$) qui est alors réabsorbé en un temps très court. Estimer la taille R d'un noyau en considérant la distance qu'un π^0 peut parcourir avant d'être réabsorbé (à l'intérieur du noyau). Assurez-vous que vos arguments soient cohérents.

Exercice 27.11 La section 32-3 du Volume I discute de la façon dont un atome excité peut rayonner son énergie à un certain taux, ce qui a pour effet de limiter la « durée de vie » d'un état excité et d'introduire une largeur finie pour la raie spectrale correspondante. Montrer que ces effets, si on les interprète comme des incertitudes sur l'énergie et le temps de mesure d'un photon (ou de la position et de l'impulsion) sont en cohérence avec le principe d'incertitude.

Exercice 27.12

(a) Vérifier par votre propre analyse dimensionnelle le « rayon de Bohr » de l'atome d'hydrogène.

(b) Montrer par le principe d'incertitude que l'énergie nécessaire pour extraire un électron du proton associé dans un atome d'hydrogène est de l'ordre de quelques électron-volts.

Exercice 27.13

(a) Un rayon X de longueur 500 Å est absorbé par un atome d'hydrogène dans son état fondamental. Trouver l'énergie cinétique T de l'électron éjecté en électron-volts.

(b) Quelle est la fréquence minimum $f_{\min}$ d'un rayonnement X qui peut ioniser de l'hydrogène non excité ?

Exercice 27.14 Un jardinier trouvait qu'il est simple de mettre deux arbres en ligne, mais plus difficile d'en mettre trois. Par la pratique et l'observation, il mit 64 petits arbres sur une grille carrée E-W, N-S, de 8 arbres par rang et 8 rangs, la structure de la grille reposant sur un carré élémentaire de 6 m × 6 m comportant quatre arbres. En se plaçant en un des quatre coins de son verger, il observa trois lignes de 8 arbres chacune, en comptant l'arbre du coin où il se trouvait, 2 lignes de 4 arbres et 4 lignes de 3 arbres.

(a) Quel était le plus petit angle $\theta_{\min}$ entre deux lignes adjacentes parmi les neuf ?

(b) Quelle était la plus grande distance $d_{\max}$ entre deux arbres successifs sur chacune de ces lignes ?

(c) Dans un « verger infini » fait à partir de cette grille de base, chaque ligne apparaitrait, vue d'en l'air, comme appartenant à d'un ensemble de lignes parallèles peuplées d'arbres régulièrement. La distance entre lignes adjacentes de n'importe quel ensemble peut être considérée comme la distance d'un réseau. Trouver la distance de réseau d pour des ensembles successifs depuis le bord sud du verger jusqu'à la ligne à 45°.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 27.15 Les atomes de chlore et de sodium d'un cristal NaCl sont espacés alternativement aux coins d'un réseau cubique où la plus proche distance Na–Cl est $d = 2{,}82$ Å.

(a) Trouver les cinq plus grand espacements entre plans d pour le cristal NaCl.

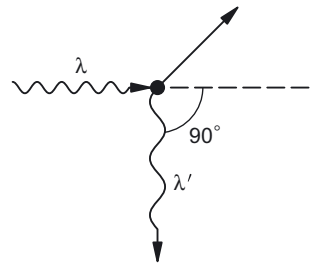
(b) Trouver à quels angles θ les réflexions de Bragg du premier ordre se produisent pour ces plans, si l'on fait usage de rayons X de longueur d'onde 1,50 Å.

Exercice 27.16 Dans le spectre ultraviolet de l'hydrogène on observe une série de raies nommée série de Lyman. Les raies de plus grande longueur d'onde correspondent à 1216 Å, 1026 Å, et 973 Å. Calculer les longueurs d'onde λ de trois autres raies possibles du spectre de l'hydrogène qui pouvaient être « prévues » à partir de cette information seule et du principe de combinaison de Ritz.

Note : deux de ces raies sont dans le visible (série de Balmer), et l'une dans l'infrarouge (la première de la série de Paschen).

Exercice 27.17 Un photon de longueur d'onde $\lambda = 3$ Å (rayon X) est diffusé à un angle de 90° par un électron libre, initialement au repos, comme sur la figure 27.1. Quelle est l'énergie cinétique T de l'électron de recul ?

Figure 27.1



Exercice 27.18 Un faisceau « monochromatique » de neutrons « thermiques » de (1/40) eV tombe sur un réseau cristallin d'espacement $d = 1{,}2$ Å entre les plans parallèles à la surface.

(a) À quels angles θ la réflexion de Bragg se produit-elle ?

(b) En dessous de quelle énergie critique E_c la diffraction ne se produira plus ?

Exercice 27.19 Soit la diffraction d'électrons par un cristal d'espacement de Bragg des plans $d = 1{,}2$ Å. Le dispositif de diffraction vous permet de faire usage de faisceaux d'électrons d'une énergie de

(I) $E_k = 10.0$ keV,

(II) $E_k = 0.5$ MeV.

(a) À quel angle θ le maximum du premier ordre de diffraction se produit-il dans chaque cas ?

(b) Si vous aviez à faire usage de ce dispositif pour déterminer très précisément l'espacement cristallin d, quel faisceau utiliseriez-vous, et pourquoi ?

Exercice 27.20 Un certain atome retombe d'un état excité E_1 vers son état fondamental E_0 en émettant un photon. L'atome émet ce photon dans un intervalle de temps typique de 10^{-8} s.

(a) Si le photon émis a une longueur d'onde de 5000 Å, quelle est la demi-largeur $\Delta\lambda$ du train d'onde qui représente ce photon ?

(b) La longueur d'onde du photon doit être déterminée par un réseau parfait placé perpendiculairement à sa direction de propagation. Si l'espacement du réseau est tel que le maximum du premier ordre est à 45°, quelle doit-être la largeur w (en mètres) du réseau pour permettre la mesure de la demi-largeur $\Delta\lambda$ trouvée en (a) ci-dessus ?

(c) Quelle est la différence en énergie $(E_1 - E_0)$ entre l'état excité et l'état fondamental de l'atome, en eV ?

Exercice 27.21 Dans un modèle simple non-relativiste de l'atome d'hydrogène, on suppose que :

(a) La force entre l'électron et le proton est donnée par

$$\boldsymbol{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\,\boldsymbol{r}.$$

où $\boldsymbol{r}$ est le rayon vecteur les joignant.

(b) L'électron se déplace sur une orbite circulaire autour du proton de telle façon que le produit de l'impulsion de l'électron par le rayon de l'orbite (moment cinétique) soit donné par

$$pr = n\hbar,$$

où $n = 1, 2, 3, \ldots$, et $\hbar$ = la constante de Planck/2π.

1. Calculer le rayon r_n de la $n^{\text{ième}}$ orbite et la vitesse angulaire ω_n de l'électron sur la $n^{\text{ième}}$ orbite.
2. Quelles sont l'énergie cinétique T_n, l'énergie potentielle U_n et l'énergie totale E_n de l'électron sur sa $n^{\text{ième}}$ orbite ?
3. Un électron atomique peut perdre de l'énergie en faisant un saut quantique d'une orbite plus haute n_i à une orbite plus basse n_f en émettant un photon. Qu'est-ce que ce modèle implique en ce qui concerne les énergies ΔE qu'un photon émis par l'atome d'hydrogène peut avoir ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

28. Théorie cinétique des gaz

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2, Chap. 39.

Exercice 28.1 Comment la pression P d'un gaz doit-elle varier avec N, le nombre volumique d'atomes, et $\langle v \rangle$, la vitesse moyenne d'un atome ? (P doit-elle être proportionnelle à N et/ou à $\langle v \rangle$, ou doit-elle varier plus rapidement, ou moins rapidement, que de façon linéaire ?)

Exercice 28.2 Si un gaz parfait est comprimé adiabatiquement, alors PV^γ = constante. D'un autre côté, dans toutes les conditions, PV/T = constante. Combiner ces deux formules pour en déduire la relation pendant une compression adiabatique,

(a) entre P et T,

(b) entre V et T.

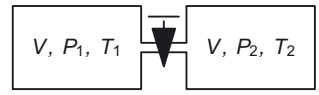
Exercice 28.3

(a) Deux échantillons de gaz, A et B, de même volume initial V_0, et à la même pression initiale P_0, sont soudain comprimés adiabatiquement, chacun à la moitié de son volume initial. Comment la pression finale de chacun des deux (P_A, P_B) se compare-t-elle avec sa pression initiale, si γ_A est 5/3 (monoatomique) et γ_B est 7/5 (diatomique) ?

(b) Trouver le rapport du travail W_A/W_B requis pour effectuer les deux compressions.

Exercice 28.4 Deux récipients de volume $V_1 = V_2 = V$ sont connectés par un petit tube avec une valve, comme sur la figure 28.1. Initialement, la valve est fermée et les deux volumes contiennent des gaz monoatomiques à des pressions P_1 et P_2 et des températures T_1 et T_2, respectivement. Après ouverture de la valve, quelle sera la pression finale P_f et la température T_f dans le volume total ? (On néglige la perte de chaleur du système.)

Figure 28.1



Exercice 28.5

(a) Soit une colonne élevée verticale de fluide gazeux ou liquide dont la densité varie avec la hauteur. Montrer que la pression suit, en fonction de la hauteur, l'équation différentielle $dP/dh = -\rho(h)g$.

(b) Résoudre cette équation différentielle dans le cas d'une atmosphère parfaite de poids moléculaire μ, dans laquelle la température est constante en fonction de h.

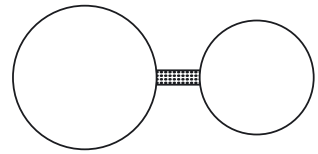
Exercice 28.6 Un cylindre avec un piston sans fuite, sans frottement, contient 1 m^3 d'un gaz monoatomique ($\gamma = 5/3$) de pression 1 atmosphère ($1{,}01 \times 10^5\ N\,m^{-2}$). Le gaz est lentement comprimé à température constante jusqu'à ce que le volume final soit de 0,4 m^3. Combien de travail W doit être effectué pour accomplir cette compression ?

Exercice 28.7 La pompe d'une bicyclette est employée pour gonfler un pneu à une pression de 3,63 $kg\,cm^{-2}$, en démarrant avec de l'air à la pression atmosphérique, 1,07 $kg\,cm^{-2}$ à 20 °C (293 K). Si $\gamma = 1{,}40$ pour l'air, à quelle température T est l'air quand il quitte la pompe ? Négliger les pertes de chaleur du côté de la pompe.

Exercice 28.8 Un récipient de 50 litres est connecté à un récipient de 15 litres par une tube court qui contient une valve de pression qui ne permet le passage de gaz que du plus gros récipient au plus petit si la pression du plus gros récipient dépasse celle du plus petit de 88 cm de mercure. Si à 17 °C le plus gros récipient contient du gaz à la pression atmosphérique et que le plus petit est vide, quelle sera la pression P dans le plus petit récipient lorsque les deux seront à 162 °C ?

Exercice 28.9 Deux ampoules de volume 200 cm^3 et 100 cm^3, comme sur la figure 28.2, sont connectées par un petit tube contenant un bouchon isolant qui permet l'égalisation de la pression mais pas de la température entre les deux ampoules. Le système est scellé à 27 °C lorsqu'il contient de l'oxygène à une pression de 760 mm Hg. La petite ampoule est immergée dans un bain de glace à 0 °C et la plus grosse est placée dans un bain de vapeur à 100 °C. Quelle est la pression finale P à l'intérieur du système ? On négligera la dilatation des ampoules.

Figure 28.2



Exercice 28.10 Une mole d'un gaz parfait monoatomique dans un récipient non isolé avec un piston mobile est au départ à P_1, V_1, et $T_1 = 27$ °C. Puis, le gaz est réchauffé lentement eu utilisant une quantité totale d'énergie de 8,31 watt-heure, et en même temps il peut se dilater à pression constante vers un nouvel état P_2, V_2, et T_2. En calculant le nouveau contenu en énergie du gaz et le travail effectué par le gaz pendant son expansion, trouver

(a) T_2,

(b) V_2/V_1.

Exercice 28.11 Deux récipients identiques contiennent une moitié d'hélium, l'autre moitié étant vide. Les deux moitiés de chaque récipient sont séparées par un piston qui a un petit robinet d'arrêt (comme sur la figure 28.3). Deux expériences sont effectuées :

(a) Le robinet d'un des pistons est ouvert et le gaz peut se détendre dans l'autre moitié jusqu'à atteindre l'équilibre. Le piston est alors déplacé très lentement jusqu'à une extrémité du récipient.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

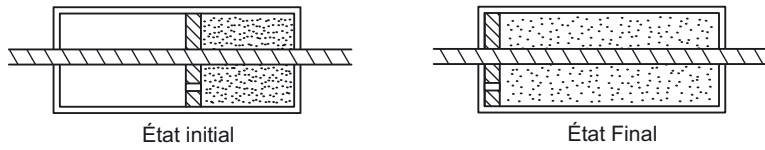


Figure 28.3

(b) Le piston de l'autre récipient est déplacé très lentement dans la partie vide du récipient, puis le robinet est ouvert.

Comparer quantitativement l'état final (T_f, P_f) du gaz dans les deux récipients, en supposant que l'hélium était initialement à la température T_0, et à la pression P_0.

Note : On utilisera $\gamma = 5/3$ pour l'hélium. On néglige la perte de chaleur au travers des enceintes, ainsi que les frottements.

Exercice 28.12 Une atmosphère dans laquelle la pression et la densité dépendent de la hauteur suivant la relation $P\rho^{-\gamma} =$ constante, est appelée une atmosphère adiabatique.

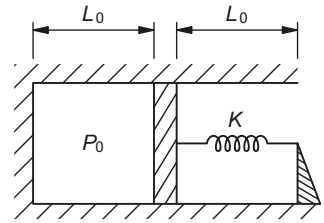
(a) Montrer que la température d'une telle atmosphère décroît linéairement avec la hauteur, et trouver la constante de proportionnalité. Ce gradient de température dT/dh est appelé le taux de décroissance adiabatique.

(b) Trouver le taux de décroissance adiabatique de l'atmosphère terrestre.

(c) Employer un argument reposant sur des considérations énergétiques pour montrer qu'une atmosphère ayant moins ou plus de gradient de température que le taux de décroissance adiabatique sera stable ou instable vis-à-vis de la convection.

Exercice 28.13 Un cylindre, rempli d'argon, est équipé avec un piston à ressort de masse m et d'aire A. À l'équilibre, l'argon est à une pression totale P_0, le piston est à la distance L_0 de chaque extrémité du système (comme sur la figure 28.4), et le ressort (de constante K) est comprimé de x_0 (sa longueur libre est $L_0 + x_0$). Trouver la fréquence angulaire ω de petites oscillations ($x \ll L_0$) du piston si le gaz se comprime de façon isotherme.

Figure 28.4



Conseil : On peut faire usage de $1/(1 + x) \approx 1 - x$ pour $x \ll 1$.

Exercice 28.14 À la température ordinaire le tétroxyde d'azote est partiellement dissocié en dioxyde d'azote comme suit :

$$N_2O_4 \leftrightarrow 2NO_2.$$

Dans un flacon sous vide d'un volume de 250 cm^3, 0,90 g de N_2O_4 liquide à 0 °C est introduit. Lorsque la température du flacon atteint 27 °C le liquide est complètement vaporisé et la pression est de 960 mm Hg. Quel pourcentage f_d de tétroxyde d'azote a été dissocié ?

29. Principes de la mécanique statistique

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2, Chap. 39 et 40.

Exercice 29.1 Quelle est la vitesse quadratique moyenne v_{rms} d'un objet de masse m dans un gaz à température T ?

Exercice 29.2 Dessiner les distributions maxwelliennes $f(v_x)$ en fonction de v_x, et $f(v)$ en fonction de v, pour deux températures T_1 et T_2, avec $T_2 > T_1$.

Exercice 29.3 On considère les molécules d'un certain gaz diatomique comme étant des haltères rigides, libres de tourner et de se déplacer mais pas de vibrer. Quelle est la chaleur spécifique (classique) C_V à volume constant ?

Exercice 29.4 La capacité calorifique molaire à volume constant d'une substance $C_{V,m}$ est la quantité d'énergie nécessaire pour élever la température d'une mole de cette substance d'un degré, en maintenant son volume constant. Quelle est la capacité calorifique molaire à volume constant

(a) d'un gaz parfait monoatomique ?

(b) d'un gaz parfait diatomique ?

Exercice 29.5 Dans la loi de pression atmosphérique

$$n = n_0\, e^{-mgh/kT},$$

$kT/mg = RT/\mu g = h_0$ est appelée *l'échelle de hauteur*, où μ est la masse moléculaire. Évaluer l'échelle de hauteur pour l'atmosphère terrestre et pour l'atmosphère du Soleil, étant donné que $\mu_{\text{Terre}} = 29\,\text{gmole}^-1$, $T_{\text{Terre}} = 300$ kelvin, $\mu_{\text{Soleil}} = 1{,}5\,\text{gmole}^-1$, $T_{\text{Soleil}} = 5500$ kelvin, $g_{\text{Soleil}} = 2{,}710^2\,\text{ms}^{-2}$.

Exercice 29.6 Soit un long cylindre fermé de longueur L, d'aire transverse A, dressé verticalement dans le champ gravitationnel terrestre. Il est rempli d'un gaz isotherme, homogène, diatomique de N molécules, chacune de masse m. Quelle est la pression aux deux extrémités du cylindre ?

Note : Manifestement, $P(h = 0) - P(h = L) = Nmg/A$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 29.7 Une atmosphère isotherme dans un champ de gravitation constant, confinée dans une colonne infiniment haute d'aire transverse uniforme A contient des nombres égaux N de deux types de molécules, l'une de masse m_1 l'autre de masse m_2 ($m_2 > m_1$).

(a) Trouver la fraction $f_1(h)$ de molécules de masse m_1 en fonction de la hauteur au-dessus du sol ($h = 0$).

(b) Quelles sont les valeurs maximum et minimum de $f_1(h)$ et à quelles valeurs de h se produisent-elles ?

(c) Soit une distance au-dessus du sol au-dessous de laquelle se trouvent à peu près 63,2 % ($1 - 1/e$) des molécules de masse m_2, quelle fraction f des molécules m_1 sont au-dessous de la même hauteur ?

Exercice 29.8 La distribution de Maxwell a la forme générale $dN/dv = Av^2e^{-bv^2}$. Cela peut être transformé en $y = x^2e^{-x^2}$.

(a) Dessiner cette fonction pour $0 \leqslant x \leqslant 3{,}0$ pour voir comment une courbe croissante $y = x^2$ est coupée par l'exponentielle.

(b) Trouver son ordonnée maximum.

(c) Voir comment la surface sous la courbe se rapproche de

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx.$$

Exercice 29.9 D'après la loi de distribution de Maxwell-Boltzmann, la fraction de molécules dans un volume donné ayant la vitesse v à dv près est donnée par

$$f(v)\,dv = Av^2e^{-mv^2/2kT}\,dv.$$

À partir de cette distribution, calculer la fraction $F(E)\,dE$ de celles qui ont l'énergie cinétique E à dE près.

Exercice 29.10 La distribution des vitesses pour un groupe de N particules est donnée par

$$f(v)\,dv = kv\,dv \quad (0 < v < V)$$
$$f(v)\,dv = 0 \qquad\qquad (v > V)$$

(a) Trouver k.

(b) Trouver la vitesse moyenne $\langle v\rangle$ et la vitesse quadratique moyenne v_{rms}.

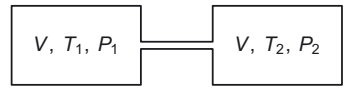
Exercice 29.11 Dans un gaz à l'équilibre thermique, quelle fraction f des molécules heurtant une surface ont une énergie cinétique

(a) moyenne ?

(b) trois fois plus grande que la moyenne ?

Exercice 29.12 Deux récipients de même volume ($V_1 = V_2 = V$) sont connectés par un tout petit tube, comme sur la figure 29.1. Les récipients sont maintenus à température constante T_1 and T_2, respectivement. Toutes les molécules de gaz ont la même masse m. Trouver $P_1/P_2 = f(T_1, T_2)$, le rapport des pressions à l'intérieur des récipients en fonction de T_1 et T_2 seuls.

Figure 29.1



Exercice 29.13 Un four à température T contient n atomes de masse m par unité de volume, dont certaines s'échappent par un petit trou d'aire A. (Le trou est suffisamment petit pour que l'équilibre dans le four ne soit pas perturbé.)

(a) Quel est le nombre dn d'atomes sortant par l'aire A par seconde, et ayant des vitesses comprises entre v et $v + dv$?

(b) Quelle est la vitesse quadratique moyenne v^e_{rms} des atomes qui s'échappent ? (Si elle est différente de la vitesse quadratique moyenne dans le four, v^i_{rms}, expliquer pourquoi.)

Exercice 29.14 La vapeur de sodium Na^{23} dans un tube à décharge émet une raie jaune intense à $\lambda = 5890$ Å. Si la vapeur est à la température ambiante, estimer la largeur $\Delta\lambda$ à laquelle cette raie va apparaître, en raison du déplacement Doppler causé par le mouvement thermique. (Information utile : pour Na^{23}, on a $mc^2 \approx 23\,10^9$ eV.)

Exercice 29.15 La possibilité d'observer un spectre d'absorption dépend du nombre d'atomes dans le plus bas niveau d'énergie de la série. Si le niveau d'énergie le plus bas de la série de Lyman de l'hydrogène est −13,6 eV, et que le niveau le plus bas de la série de Balmer est de −3,4 eV, à quelle température T du gaz est-ce que le nombre d'atomes disponibles pour produire un spectre d'absorption de Balmer sera égal à $1/e$ fois le nombre d'atomes pouvant produire l'absorption Lyman ? C'est là le principe d'une des méthodes d'estimation de la température des étoiles.

Exercice 29.16 L'état fondamental de l'atome d'hydrogène est clivé en quatre sous-états qui ont pratiquement la même énergie. De même, le premier état excité à 10,2 eV plus haut a 16 sous-états analogues. Quel est le rapport N_0/N_1 du nombre d'atomes dans ces deux états à la surface du Soleil où $T = 5700$ K ?

Exercice 29.17 Dans un radiomètre, les molécules d'un gaz à basse pression bombardent de très fines ailettes qui sont noires d'un côté et réfléchissantes de l'autre. Lorsque le rayonnement atteint ces ailettes, l'énergie absorbée est évacuée principalement par les molécules qui frappent la face noircie de chaque ailette, et les ailettes tournent en raison de ce déséquilibre des forces.[6] Soit un récipient dans lequel il y a

6. La face noircie est plus rugueuse, ce qui fait que les molécules qui la frappent sont piégées pendant un court instant avant de rebondir, alors que les molécules qui frappent la face brillante rebondissent immédiatement. Les molécules piégées ont donc tendance à atteindre l'équilibre thermique avec l'ailette, alors que celles qui rebondissent ne le font pas.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

N molécules de masse m par unité de volume, à une température absolue T. Une petite ailette d'aire unité dans le récipient absorbe de l'énergie de rayonnement à un taux de 11 watts, et cette énergie est emportée (de façon isotrope) par les molécules qui frappent un côté de l'ailette. Estimer la force non équilibrée F sur l'ailette à la température ambiante.

Exercice 29.18

(a) De l'air, dans des conditions normales de température et de pression, s'écoule à une vitesse v à l'intérieur d'un tuyau lisse d'aire transverse constante A. L'air arrive sur une grille qui ne freine pas le flot mais le chauffe. L'énergie fournie est W watts. L'air émerge finalement du tuyau à une vitesse v'. Écrire les équations de conservation de la masse, de l'énergie, et de l'impulsion lorsque l'air traverse le tuyau et trouver :

1. v' ;
2. la température finale T' ;
3. la poussée F.[7]

(b) Trouver une approximation pour la poussée F et discuter les performances d'un moteur à réaction d'avion à la lumière de la partie (a) ci-dessus, si le moteur consomme 100 kg d'air et 2 kg de kérosène par seconde. La chaleur de combustion du kérosène est environ de $4{,}65\ 10^7$ joule/kg. Quelles complications pourraient falsifier votre résultat ?

30. Applications de la théorie cinétique : équipartition

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2, Chap. 41 et 42.

Exercice 30.1 Calculer ce qui suit :

(a) La température T pour laquelle kT vaut 1 électron-volt ;

(b) La valeur de kT en électron-volts à la température habituelle ;

(c) La longueur d'onde λ d'un photon correspondant au saut quantique de 1 électron-volt.

Exercice 30.2 Les énergies d'activation, les chaleurs de vaporisation, les chaleurs de formation ou de dissociation etc., sont communément exprimées en joules par mole ou en électron-volts par atome. Combien de joules par mole vaut 1 électron-volt/atome ?

7. Cela est essentiellement un moteur à réaction. *Conseil :* pour simplifier, on peut considérer un moteur de « basse efficacité » avec des pressions égales à l'entrée et à la sortie.

Exercice 30.3 Au-dessus de la zone de température de 0 à 300°celsius, la chaleur de vaporisation du mercure ne change que de 3 %. Elle est d'environ 0,61 électron-volt/atome en moyenne. Quelle erreur fait-on en calculant la densité de vapeur de mercure à 0° celsius, si la chaleur de vaporisation à 300° celsius est employée au lieu de la valeur correcte à 0° celsius ?

Morale : Un petit changement en pourcentage dans un gros exposant peut avoir de gros effets.

Exercice 30.4 Pour deux sources de corps noir, à des températures $T_1 = 2000$ kelvin et $T_2 = 4000$ kelvin, trouver l'intensité relative I_1/I_2 de lumière de longueur d'onde $\lambda = 0{,}31$ microns.

Exercice 30.5

(a) Dessiner la densité de vapeur du mercure par rapport à l'inverse de la température $1/T$ sur du papier semi-log, et déduire de ce graphique la chaleur de vaporisation de mercure. Vérifier le résultat sur une table.

(b) Faire de même pour l'eau.

Note : Les chimistes font usage d'une énergie appelée *kilocalorie*. 1 kcal = 4186 J.

Exercice 30.6 La loi de distribution du rayonnement du corps noir est :

$$I(\omega) = \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 \left(e^{\hbar\omega/kT} - 1\right)}$$

En changeant de variable de ω à $z = \hbar\omega/kT$, montrer que :

(a) L'intensité totale rayonnée, intégrée sur toutes les fréquences est proportionnelle à la quatrième puissance de la température absolue.

(b) La fréquence ω_m à laquelle $I(\omega)$ est maximum est proportionnelle à la température absolue.

Exercice 30.7 Soit un oscillateur quantifié (par exemple un atome) qui peut avoir l'un des quatre états d'énergie suivants :

$$E$$
$$E + \Delta E - \epsilon$$
$$E + \Delta E$$
$$E + \Delta E + \epsilon$$

(Pour simplifier, on peut considérer que ϵ est négligeable, en disant que l'oscillateur a un état d'énergie E et trois états $E + \Delta E$.)

(a) Si l'on a N_0 oscillateurs de ce genre, quelle est la chaleur spécifique C_V du système à la température T ?

(b) Que vaut C_V pour $T \to \infty$? Donner une explication simple.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

31. Applications de la théorie cinétique : phénomènes de transport

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2, Chap. 43.

Exercice 31.1 Quel type de quantité physique moléculaire donne lieu, par son transport, à

(a) la conduction thermique ?

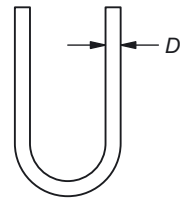
(b) la viscosité ?

Exercice 31.2 La section efficace de collision de neutrons lents sur l'hydrogène est d'environ $20 \times 10^{-24}\,\mathrm{cm}^2$. Quel est le libre parcours moyen l de tels neutrons sur de l'hydrogène dans des conditions normales ?

Exercice 31.3 Le « diamètre » d'une molécule d'oxygène est environ 3 Å. Estimer le libre parcours moyen l et le temps moyen entre collisions τ pour de l'oxygène dans des conditions normales.

Exercice 31.4 Un vase « Dewar » (bouteille thermos), comme on le voit sur la figure 31.1, est une chambre à double parois entre lesquelles on a fait le vide pour l'isolation thermique. On suppose que le critère pour une bonne isolation dans un vase Dewar avec une séparation des parois D est que $l > 10\,D$, où l est le libre parcours moyen du gaz résiduel dans le Dewar. Si $D = 1$ cm et que le gaz résiduel est de l'oxygène,

Figure 31.1



(a) quelle pression P peut être acceptable dans le vase Dewar à température ambiante ?

(b) Quel est le rapport des conductivités thermiques κ_1/κ_2 du vase Dewar pour les deux pressions $P_1 = 400\,\mathrm{mmHg}$ et $P_2 = 200\,\mathrm{mmHg}$?

Exercice 31.5 Deux gaz, A et B, ont des densités ρ_A et ρ_B à une certaine température T_0. Un ion particulier a une mobilité μ_a dans A et μ_b dans B. Quelle mobilité μ de l'ion attend-on dans un mélange de ces deux gaz à une densité $\rho_A + \rho_B$ et une température T_0 ?

Exercice 31.6 Quand il y a un gradient de température dans un matériau, un flux d'énergie proportionnel au gradient de température se produit. (On ne tient pas compte de la convection.) Le coefficient de proportionnalité ramené à une aire unité et un gradient de température unité, est appelé la conductibilité thermique κ. Ainsi

$dE/dt = \kappa A\, dT/dx$. Montrer qu'en l'absence de convection la conductibilité thermique d'un gaz est

$$\kappa = \frac{kn_0vl}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{kv}{\sigma}.$$

où n_0 est le nombre de molécules de gaz par unité de volume, v leur vitesse moyenne, l leur libre parcours moyen, σ leur section efficace de collision, et $(\gamma - 1)kT$ l'énergie moyenne d'une molécule à la température T.

Conseil : Interpréter la conductibilité thermique comme un transport d'énergie interne (chaleur) U au travers d'un plan, d'un libre parcours moyen d'un côté à l'autre.

Exercice 31.7 Quand un gradient de vitesse existe dans un fluide, de telle façon que la vitesse change avec la position à angle droit de la direction du flot, il en résulte une traînée appelée la *viscosité*. Dans un gaz, cela est dû au transfert d'impulsion au travers d'un plan, d'un libre parcours moyen d'un côté à l'autre. Si le flot est dans la direction x et qu'il y a un gradient de v_x dans la direction y, la force de traînée par unité de surface sur un plan perpendiculaire à y est

$$F/A = \eta\, dv_x/dy.$$

Montrer que pour un gaz, le coefficient de viscosité η est approximativement,

$$\eta = n_0vml = vm/\sigma,$$

où n_0 est le nombre de molécules de gaz par unité de volume, v leur vitesse moyenne, m leur masse, l leur libre parcours moyen, et σ leur section efficace de collision.

Exercice 31.8 On remarque que la conductibilité thermique et la viscosité d'un gaz sont toutes deux indépendants de la pression.

(a) Trouver une modification appropriée des formules pour le transfert d'énergie dE/dt entre deux surfaces dont les températures sont T et $T + \Delta T$, situées à une distance D l'une de l'autre, si (le libre parcours moyen) $l \gg D$. (Voir exercice 31.6.)

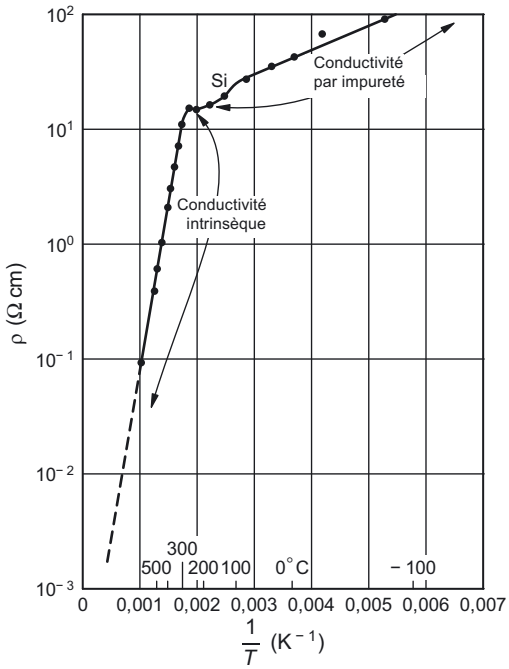
(b) Faire de même pour le transfert d'impulsion (force de traînée par unité de surface) F/A entre deux surfaces, se déplaçant aux vitesses U et $U + \Delta U$. (Voir exercice 31.7.)

Exercice 31.9 Un récipient contient 10^{24} molécules d'un gaz dont le libre parcours moyen est l. Pour quelle longueur de chemin L (approximativement) la probabilité qu'aucune molécule du récipient n'aille plus loin que L avant de subir sa prochaine collision sera 1/2 ?

Exercice 31.10 La variation de la résistivité du silicium presque pur en fonction de la température est montrée sur la figure 31.2. En déduire quantitativement la nature de l'écoulement du courant électrique dans cette substance au-dessus et au-dessous de 300 °C.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Figure 31.2



Exercice 31.11 Dans l'écoulement « laminaire », la viscosité d'un liquide est seule à déterminer la vitesse à laquelle il peut être transporté par un tuyau entre deux réservoirs à des pressions différentes ($P_1 > P_2$). Dans la figure 31.3, le liquide coule dans un tuyau cylindrique de rayon a, de longueur L. ($L \gg l$ = libre parcours moyen). Le liquide a un coefficient de viscosité η. Montrer qu'en régime permanent la quantité de liquide s'écoulant par seconde du réservoir 1 au réservoir 2 est donnée par :

$$V = \frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{P_1 - P_2}{L}.$$

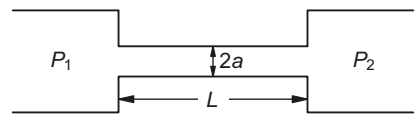


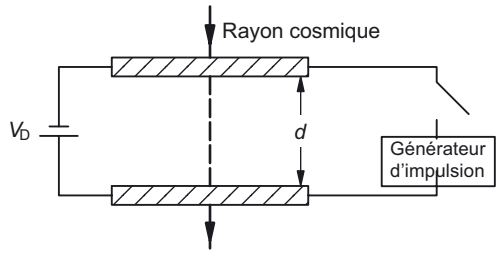
Figure 31.3

Conseil : les forces agissant sur un « fil » de liquide doivent avoir une résultante nulle. Cela donne $v = v(r)$. (Voir la figure ci-dessus.)

Exercice 31.12 La figure 31.4 montre une chambre à étincelle à un seul gap avec un écart d entre deux plaques en aluminium. Un rayon cosmique chargé ionise (une fois) les molécules de néon le long de son trajet. À un instant t ultérieur, un voltage important est

appliqué aux plaques et une étincelle apparaît sur le trajet de la particule. Pour éviter que la chambre soit polluée d'électrons et d'ions de rayons cosmiques antérieures, un voltage V_D alternatif est appliqué entre les plaques. Ce voltage de « nettoiement » enlève aussi les électrons et les ions de la trace qui nous intéresse.

Figure 31.4



(a) À quel voltage V_D, l'espace entre les plaques va-t-il être complètement nettoyé

1. des électrons ;
2. des ions de néon ;

lorsque l'impulsion se produit ?

(b) Une chambre à étincelle d'espacement $d = 0{,}63\,\text{cm}$ ne donne pas de traces pour un potentiel appliqué V_D de 80 V lorsque $t = 0{,}4 \times 10^{-6}\,\text{s}$. Les électrons sont-ils essentiels pour la formation d'une étincelle ? (Justifier sa réponse.)

Information utile : la section efficace géométrique du néon $\approx 4 \times 10^{-16}\,\text{cm}^2$, densité du néon $\approx 3{\times}10^{19}$ molécules/cm^3, $m_e c^2 \approx 5{\times}10^5$ eV, $m_{\text{néon}} c^2 \approx 2{\times}10^{10}$ eV, $kT \approx (1/40)$ eV à la température ambiante.

32. THERMODYNAMIQUE

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2, Chap. 44.

Exercice 32.1 Une machine de Carnot idéale et réversible fonctionne à l'envers pour servir de réfrigérateur. Si elle prend de la chaleur à 250 K et qu'elle l'éjecte à 350 K à l'extérieur, pour chaque joule de chaleur enlevé de l'instrument combien de joules, E, sont rejetés à l'extérieur ?

Exercice 32.2 Si un réfrigérateur doit être maintenu à $-3\,^\circ$C, et que l'air extérieur est à $27\,^\circ$C, quel est le travail minimum $W_{\min}$ que l'on doit fournir pour enlever un joule de chaleur de l'intérieur du réfrigérateur ?

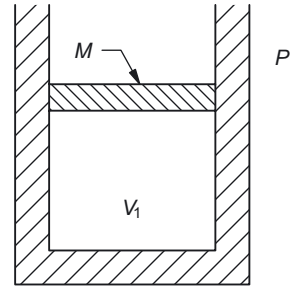
Exercice 32.3 Deux machines réversibles fonctionnent sur des cycles de Carnot entre les mêmes volumes maximum et minimum, pressions maximum et minimum, et températures maximum et minimum. L'une utilise de l'hélium, l'autre de l'air. Laquelle des deux produit le plus de travail par cycle ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 32.4 Dans une usine à vapeur qui utilise de la vapeur surchauffée, la température du générateur de vapeur est de 600° celsius. L'eau de la rivière qui refroidit le condenseur est à 20° celsius. Quel rendement maximum $\epsilon_{\max}$ une telle usine peut-elle avoir ?

Exercice 32.5 Un conteneur isolé avec un piston sans frottements de masse M et de surface A, contient N grammes de gaz d'hélium dans un volume V_1, comme sur la figure 32.1. La pression externe est P. Le gaz est chauffé *très lentement* par un circuit interne jusqu'à ce que le volume occupé par le gaz soit $2V_1$.

Figure 32.1



Quels sont :

(a) le travail W fait par le gaz ;

(b) la chaleur ΔQ fournie au gaz ;

(c) la variation ΔU d'énergie interne du gaz ;

(d) la température initiale T_i et finale T_f du gaz.

Exercice 32.6 Un gaz parfait, de coefficient γ, est initialement dans les conditions $P_0 = 1$ atmosphère, $V_0 = 1$ litre, $T_0 = 300$ K. Il est alors :

(a) Chauffé à V constant jusqu'à ce que $P = 2$ atmosphères.

(b) Détendu à pression constante P jusqu'à $V = 2$ litres.

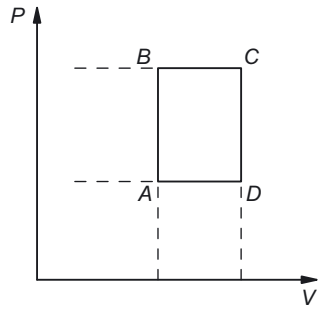
(c) Refroidit à V constant jusqu'à $P = 1$ atmosphère.

(d) Comprimé à P constant jusqu'à $V = 1$ litre.

1. Dessiner un diagramme P-V pour ce processus.
2. Quel travail W est effectué en un cycle ?
3. Quelle est la température maximale $T_{\max}$ atteinte par le gaz ?
4. Quelle est la chaleur totale ΔQ fournie au gaz dans les étapes 1 et 2 ?
5. Quel est le changement total d'entropie ΔS dans les étapes 1 et 2 ?

Exercice 32.7 Une machine thermique idéale fonctionne avec un gaz parfait de coefficient $\gamma = 4/3$, sur le cycle montré sur la figure 32.2 ($A \to B \to C \to D$). En A, $P = 1$ atmosphère, $V = 22{,}4$ litres, $T = 300$ K. En C, $P = 2$ atmosphères, $V = 33{,}6$ litres, $T = 900°$ K.

Figure 32.2



(a) Combien de travail W est fourni par cycle ?

(b) Quelle est la température T_B en B ?

(c) Combien de chaleur $\Delta Q_{A\to B}$ est nécessaire pour $A \to B$?

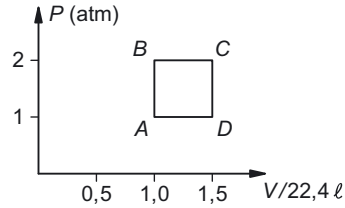
(d) Combien de chaleur $\Delta Q_{B\to C}$ est nécessaire $B \to C$?

(e) Si la machine fonctionne à partir de réservoirs de chaleur à 900° celsius et 300° celsius seulement, quel est le rendement maximum $\epsilon_{\max}$ avec lequel la machine peut être employée en utilisant le cycle donné ?

(f) Quel est le rendement maximum pour une machine quelconque fonctionnant entre ces deux températures ?

Exercice 32.8 Un échantillon de gaz parfait avec $\gamma = 4/3$ est porté successivement de la condition A (pression de 1 atmosphère, volume de 22,4 litre, à 300 K) à la condition C (pression de 2 atmosphères, volume de 33.6 litre, à 900 K) suivant deux chemins, ABC and ADC, montrés sur la figure 32.3.

Figure 32.3



(a) Montrer que le changement ΔS d'entropie est le même dans les deux cas.

(b) Calculer ΔS.

Exercice 32.9 Une machine thermique idéale réversible utilise 28 g d'azote comme substance de travail, ($\gamma = 7/5$) dans une opération cyclique *abcd* sans valve, la température de la source chaude est 400 K, celle de la source froide 300 K. Le volume initial du gaz au point a est de 6 litres et le volume en c de 18 litres.

(a) À quel volume V_b le rôle du cylindre doit-il être changé de celui de receveur de chaleur (détente isotherme) à celui d'isolant pour la détente adiabatique (de V_b à V_c) ?

(b) À quel volume V_d la compression adiabatique doit-elle commencer ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(c) Combien de chaleur $\Delta Q_{a\to b}$ est fournie le long de la partie $V_a \to V_b$ du cycle ?

(d) Combien de chaleur $\Delta Q_{c\to d}$ est extraite durant la partie $V_c \to V_d$?

(e) Quel est le rendement ϵ de la machine ?

(f) Quel changement d'entropie par gramme ΔS se produit pendant les phases $a \to b$ et $c \to d$?

Conseil : trouver que dans un cycle de Carnot pour un gaz parfait, les rapports d'expansion V_b/V_a et V_c/V_d sont égaux.

Exercice 32.10 Une mole de gaz dans un récipient est initialement à une température de 127° celsius. Elle est soudain détendue à deux fois son volume initial sans échange de chaleur avec l'extérieur. Puis elle est lentement comprimée, à température constante, jusqu'à son volume initial. On s'aperçoit que la température finale est −3° celsius.

(a) Quel est le coefficient γ du gaz ?

(b) Quel changement d'entropie ΔS s'est produit ?

Exercice 32.11 Un gaz de coefficient γ dans un cylindre de volume V_0 à la température T_0 et à la pression P_0 est comprimé lentement et de façon adiabatique à un volume $V_0/2$. Après être revenu à l'équilibre thermique (T_0) à ce volume, le gaz se détend lentement et de façon isotherme jusqu'à son volume initial V_0. En fonction de P_0, V_0, T_0, quel est le travail total W que le piston exerce sur le gaz ?

Exercice 32.12 Traduire le cycle idéal de Carnot *abcd* sur un diagramme *P*-*V* entre T_1 et T_2 et (P_a, V_a), (P_c, Vc) en un diagramme *T*-*S* (température-entropie) avec les points correspondants *ABCD*.

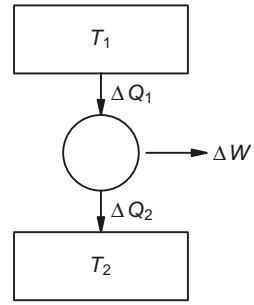
Exercice 32.13 Les premiers habitants de la Lune vont avoir de gros problèmes pour maintenir leurs locaux à une température convenable. Envisageons l'emploi de machines de Carnot pour contrôler le climat. Supposons que la température pendant le jour lunaire est de 100° celsius, et durant la nuit lunaire de −100° celsius. La température des locaux d'habitation doit être maintenue à 20° celsius. Le taux de conduction de la chaleur au travers des murs des quartiers d'habitation est de 0,5 kW par degré de différence de température. Trouver la puissance P_{jour} que l'on doit fournir à une machine de Carnot pendant le jour, et la puissance P_{nuit} que l'on doit fournir à une machine de Carnot pendant la nuit.

Exercice 32.14 Deux corps identiques, de capacité calorifique constante C_p, de températures initiales T_1 et T_2 sont employés comme réservoirs pour une machine de Carnot opérant en des cycles infinitésimaux réversibles, comme sur la figure 32.4. Si les corps restent à pression constante et ne subissent pas de changement de phase,

(a) montrer qu'après l'arrêt de la machine, la température finale est $T_f = \sqrt{T_1 T_2}$,

(b) trouver le travail totale W fourni par la machine.

Figure 32.4

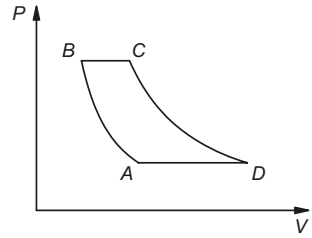


Conseil : se rappeler que ΔQ est relié à ΔT et considérer ce qui arrive à l'entropie sur un cycle réversible.

Exercice 32.15 Un expérimentateur étourdi laisse le robinet d'une bouteille d'hélium légèrement ouvert pendant le weekend. Le gaz, initialement à 200 atmosphères s'échappe lentement de façon isotherme à 20° celsius. Quel changement d'entropie par kg de gaz ΔS s'est produit ?

Exercice 32.16 La turbine à gaz idéale consiste en une compression adiabatique de A à B, une injection de chaleur à pression constante de B à C, une détente adiabatique de C à D, et un rejet de chaleur à pression constante de D à A, toutes faites de façon réversible. (Voir figure 32.5.) On suppose que le fluide de ce moteur est un gaz parfait avec un rapport de chaleurs spécifiques γ, et que $\dot{N}$ moles passent dans le moteur par unité de temps. On suppose, en outre, que la température maximale du gaz T_C est fixée par la température maximale que les parties chaudes du moteur peuvent supporter est que la température minimum du gaz, T_A, est fixée par la température de l'air ambiant.

Figure 32.5



(a) Trouver la puissance $\dot{W}$ produite par le moteur en fonction du rapport des pressions $p = P_B/P_A$.

(b) À quel rapport de pressions p_m la puissance est-elle maximum ?

(c) Quelle est la puissance maximum $\dot{W}_m$?

(d) Quel est le rendement à la puissance mawimum ϵ_m ?

(e) Quel est le taux de flot du volume d'air $\dot{V}_A$ ($\gamma = 7/5$) dans les conditions atmosphériques ($P_A = 1{,}013\,10^5$ pascal, $T_A = 300$ K), dans un tel engin, s'il produit 1 mégawatt de puissance et que la température maximum est $T_C = 1200$ K ?

(f) Quel est le rendement ϵ_e du moteur dans la partie (e) ci-dessus ?

(g) Quel est le rapport de puissance p_e du moteur dans la partie (e) ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

33. Illustrations de la thermodynamique

On ce référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2, Chap. 45 et 46.

Exercice 33.1 Comment l'intensité totale du rayonnement dans une cavité de corps noir dépend-elle de la température ?

Exercice 33.2 Dans un gaz moléculaire, le nombre de molécules présentes dans un récipient fermé est indépendant de la température. Est-ce la même chose pour un gaz de photons ? Expliquer.

Exercice 33.3 Calculer la chaleur spécifique C_V d'un gaz de photons à volume V et température T constants.

Exercice 33.4 Un courant continu de 10 A traverse une résistance de 10 Ω maintenue à une température constante de 10 °C.

(a) Quelle est le taux de changement d'entropie dS_R/dt de la résistance (en cal K^{-1} s^{-1}) ?

(b) Quelle contribution dS_U/dt est apportée à l'entropie de l'Univers ?

Exercice 33.5 Pour un gaz parfait, dont l'énergie interne ne dépend que de la température T, montrer que la différence entre les capacités calorifiques molaires à pression constante et à volume constant est égale à la constante des gaz R : $C_{P,m} - C_{V,m} = R$.

Exercice 33.6 La chaleur latente de vaporisation de l'eau est environ $2{,}44\times10^6$ J kg^{-1}, et la densité de vapeur à 100 °C est 0,598 kg m^{-3}. Utiliser l'équation de Clausius-Clapeyron pour trouver le taux de changement de la température d'ébullition de l'eau avec l'altitude, dT/dz, au niveau de la mer en °C km^{-1}. On supposera que la température de l'air est 300 K.

Exercice 33.7 Les couches superficielles d'un lac sont initialement à 0 °C. Un vent froid se met à souffler, maintenant la surface du lac à une température ΔT *au dessous de* 0 °C.

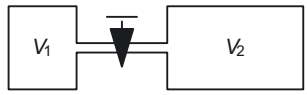
(a) Trouver le taux de croissance de l'épaisseur de la glace dz/dt, en supposant que la perte de chaleur requise pour abaisser la température de la glace déjà formée est bien inférieure à celle nécessaire pour former de la glace nouvelle. (On supposera aussi que la température de la glace change linéairement avec la profondeur.)

(b) En utilisant le résultat de la partie (a), calculer l'épaisseur z de la glace une heure après que la congélation commence si $\Delta T = 10$ °C.

Utiliser : conductivité thermique de la glace : $\kappa = 2{,}0$ W m^{-1} K^{-1}, chaleur latente de formation de la glace : $L = 3{,}3 \times 10^5$ J kg^{-1}.

Exercice 33.8 Deux volumes de gaz sont séparés par un petit robinet qui est ouvert à l'instant $t = 0$. $V_2 = 2V_1$. (Voir figure 33.1.) Quel est le changement d'entropie ΔS de (a) le gaz, (b) les environs, et (c) l'univers, après un temps très long dans les deux cas suivants :

Figure 33.1



(a) V_1 contient 1 mole d'hélium et V_2 contient 2 moles d'Argon,

(b) V_1 contient 1 mole d'hélium et V_2 contient 2 moles d'hélium.

Exercice 33.9 Calculer le changement d'entropie ΔS lorsque le rayonnement (gaz de photons) est :

(a) Détendu de façon isotherme d'un volume V_1 à V_2.

(b) Chauffé à volume constant élevant la température de T_1 à T_2.

(c) Utiliser les résultats des parties a et b ci-dessus pour trouver l'entropie $S(V,T)$ d'un gaz de photons initialement de volume V_0 et de température T_0.

Exercice 33.10 La lumière du Soleil frappe de façon perpendiculaire un champ large pavé et noir en Afrique équatoriale. Si la surface rayonne comme un corps noir, quelle est la température maximum T qu'elle atteint ? (Constante solaire : 1395 W m^{-2}).

Exercice 33.11 Le Soleil rayonne approximativement comme un corps noir de température 5700 K. Si une sphère de cuivre parfaitement noire est irradiée par la lumière solaire à une distance de 1 *UA* du Soleil, quelle température d'équilibre T atteindra-t-elle ? (Le diamètre du Soleil sous-tend un angle de 0,50° vu de la Terre.)

Exercice 33.12 Le rayonnement du corps noir dans une cavité isotherme de volume V_0 est comprimé à température constante jusqu'à ce que le volume soit réduit de moitié : $V_0/2$. De quel facteur f la pression de radiation a-t-elle changé ?

Exercice 33.13 Une coquille fine sphérique de capacité calorifique négligeable et de rayon R a un intérieur noir et une surface extérieure d'un coefficient d'absorption A pour le rayonnement du corps noir. La coquille flotte dans l'espace vide et, à l'instant $t = 0$, elle contient un « gaz de photons » à la température T_0. Trouver la température T pour des temps $t \geqslant 0$.

Exercice 33.14

(a) Soit une coquille fine, noire, sphérique de rayon R, contenant un gaz parfait monoatomique à la température T_0. Si la sphère se contractait adiabatiquement à un rayon $R/2$, de quel facteur f l'intensité de rayonnement changerait, vue par un observateur situé à très grande distance si l'on néglige les changements gravitationnels du gaz dans la compression ?

(b) Si dans la partie (a) ci-dessus, on incorpore les effets gravitationnels, est-ce que f est plus grand ou plus petit, et pourquoi ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 33.15 Soit une sphère fine noire (de capacité calorifique négligeable) de rayon R contenant du rayonnement du corps noir à la température T_0. Si la sphère se contracte adiabatiquement à un rayon $R/2$, de quel facteur f l'intensité du rayonnement change-t-elle, vue par un observateur très éloigné ?

Exercice 33.16 Un cylindre de cuivre solide, noirci de 2,0 cm de long et 10,0 cm^2 à sa base, est suspendu par un fil fin isolant au centre d'une cavité sphérique de 25,0 cm de rayon, où l'on a fait le vide, et dont les murs sont noircis. Les murs de la cavité sont maintenus à une température constante de 27 °C.

(a) Si le cylindre de cuivre est en équilibre thermique avec la cavité, à quel taux dE/dt rayonne-t-il de l'énergie sur les murs de la cavité ? Exprimer la réponse en $\mathrm{J\,s^{-1}}$.

(b) Si le cylindre est chauffé à 150 °C puis qu'il refroidit, quel est le taux de son refroidissement dT/dt lorsqu'il passe à la température $T = 127\,^\circ\mathrm{C}$? (On supposera qu'à tout moment toutes les parties du cuivre sont à la même température.)

Utiliser $\rho_{\mathrm{Cu}} = 8950\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $C_P(\mathrm{Cu}) = 390\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$.

Exercice 33.17 La densité au centre du Soleil est environ de $80\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ et la température centrale est d'environ 13×10^6 K. La matière est composée presque entièrement de protons et d'électrons. Trouver la pression du gaz P_G et la pression de radiation P_R au centre du Soleil.

Exercice 33.18 À 0 °C, le volume spécifique de la vapeur d'eau saturante est $206\,\mathrm{m^3\ kg^{-1}}$. Quelle est la chaleur latente de vaporisation L en $\mathrm{J\,kg^{-1}}$ à cette température ? (Déterminer dp/dT à partir de tables, calculer L, comparer avec les valeurs des tables.)

Exercice 33.19

(a) User d'un argument thermodynamique pour montrer que si une substance se dilate lorsqu'elle gèle, sa température de congélation doit diminuer lorsque la pression augmente.

(b) Estimer la température la plus basse de la glace d'une patinoire pour qu'on puisse patiner.

Exercice 33.20 Si un certain objet absorbe une fraction fixe A de tout le rayonnement incident sur sa surface et réfléchit le reste, montrer qu'à la température T il émet une quantité $A\,\sigma\,T^4$ par unité de surface, où σ est la constante de Stefan-Boltzmann pour le rayonnement du corps noir, démontrée en Section 45-3, volume I du *Cours de Physique de Feynman*

$$\sigma = \frac{k^4\pi^2}{60\hbar^3 c^3} = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}.$$

Exercice 33.21 Un corps noir de rayon r à la température T est entouré d'une fine coquille de rayon R, noire des deux côtés. Trouver de quel facteur f ce bouclier de rayonnement réduit le taux de refroidissement du corps. (On considérera que le vide a été fait dans l'espace de la sphère et qu'il n'y a pas de pertes par conduction.)

Exercice 33.22 Une coquille sphérique noire en un certain point de l'espace interplanétaire a une température d'équilibre T_0. Si le même objet était plaqué cuivre, sa température serait-elle plus haute, plus basse ou égale à T_0 ? Des valeurs typiques pour la réflexivité du cuivre en fonction de la longueur d'onde sont :

λ (micron)	0.305	0.385	0.450	0.550	0.600	0.700	1.00	3.0	9.0
$R(\lambda)$	0.25	0.29	0.37	0.48	0.72	0.83	0.90	0.97	0.98

$$R(\lambda) = \frac{I_{\text{réfléchi}}}{I_{\text{incident}}}$$

On considérera le Soleil comme une radiateur de corps noir de 5700 K. Voir aussi l'exercice 33.20.

34. L'équation d'onde, le son

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2, Chap. 47.

Exercice 34.1 L'élasticité d'un liquide par compression se mesure avec M, le module global, où M est défini par :

$$dP = -M\frac{dV}{V}.$$

dV/V est le changement relatif du volume apporté par un changement de pression extérieure dP. Par analyse dimensionnelle, déterminer la vitesse v de propagation du son en fonction de M.

Exercice 34.2 Deux cordes de petite masse pendues à un support sont étirées par des poids de 1 kg et 2 kg, respectivement. Quel est le rapport v_1/v_2 de la vitesse des ondes pour des ondes transversales le long des deux cordes ?

Exercice 34.3 Trouver le rapport de la vitesse du son dans l'hélium v_{He} et dans l'hydrogène v_{H} à la même température.

Exercice 34.4 On souffle dans deux sifflets, A et B, de même longueur. Dans A on souffle avec de l'air à la température de l'air liquide -180° Celsius, et dans B de l'air chauffé. Un des sifflets produit un son d'une octave exactement au-dessus de l'autre (deux fois la fréquence). Quelle doit-être la température T de l'air dans B ?

Exercice 34.5 Montrer que $u = Ae^{i(\omega t - kx)}$ satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

pourvu que ω et k satisfassent la relation $\omega = vk$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 34.6 Une corde uniforme, parfaitement flexible, de densité σ (en kg/m) est tendue avec une tension T.

(a) Démontrer l'équation d'onde qui gouverne le déplacement latéral y.

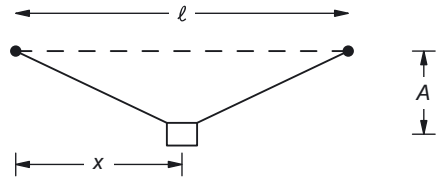
(b) Déduire la vitesse de propagation v de déplacements le long de la corde.

Supposer que $\partial y/\partial x \ll 1$, en tout point et tout instant, et ne considérer que des vibrations dans un plan.

Note : La composante de la tension de la corde dans le direction latérale est donnée en bonne approximation par $T\,\partial y/\partial x$.

Exercice 34.7 Un instrument de musique rudimentaire est construit en tendant un fil de masse négligeable sous une tension T entre deux points et en attachant fermement une masse m au fil à une distance x d'une extrémité, comme représenté sur la figure 34.1. La masse est déplacée de son point d'équilibre d'un petite distance A ($A \ll x$, $A \ll l - x$), puis on la laisse vibrer.

Figure 34.1



(a) Trouver la fréquence ν du son.

(b) Écrire l'équation du déplacement de la masse par rapport à son point d'équilibre en fonction du temps $y(t)$.

(c) Lorsque x varie, quelles sont les fréquences minimum et maximum disponibles ? On négligera les effets de gravité.

Exercice 34.8 Une onde sonore passe dans un gaz de densité ρ_0 et de pression P_0. Le déplacement des molécules de gaz est décrit par l'équation $\xi = \xi_m \cos(\omega t - kx)$.

(a) Trouver l'équation pour la pression P dans le gaz, en fonction de x et t.

(b) Trouver l'énergie cinétique de mouvement T due à l'onde sonore dans un volume de gaz d'aire A dans le plan yz, et de longueur λ le long de l'axe x.

Exercice 34.9 Un diaphragme léger et flexible est situé sur un nœud d'un tuyau d'orgue dans lequel le niveau du son est de 120 décibels à la fréquence de 100 Hz. Le milieu est de l'air dans des conditions normales de température et de pression.

(a) Quelle est l'amplitude χ_m du mouvement du diaphragme (en cm) ?

(b) Quelle est l'amplitude du changement de température ΔT dans le gaz ?

Exercice 34.10 Si l'on parle après avoir inhalé de l'hélium, la voix semble non naturelle et aiguë.

(a) Si toutes vos cavités résonantes (« les parties vides de votre tête ») étaient remplies d'hélium à la place de l'air, de quel facteur f chaque fréquence de résonance serait-elle augmentée ?

(b) Si l'on vous demandait de chanter un air, quel effet l'hélium aurait-il sur la clé dans laquelle vous chantez ? Discutez.

Exercice 34.11 Pincez un fil de caoutchouc d'environ 5 cm de long entre les ongles de vos deux mains ; faites-le vibrer pour entendre la hauteur. Puis allongez-le de 2, 3, 4, 5 fois sa longueur initiale sans changer la quantité de caoutchouc dans chaque main, et faites-le vibrer à chaque fois. Discuter le résultat. Pourquoi une corde de violon ne fait-elle pas la même chose si on augmente sa longueur ?

Exercice 34.12 Soit une onde plane sonore de fréquence 1000 Hz dans laquelle les pics de pression sont $\pm 0,1$ pascal par rapport à la pression atmosphérique ambiante de 10^5 pascal.

(a) Quel changement en densité ρ_e accompagne cette onde ?

(b) Quel est le déplacement maximum de particules χ_m ?

(c) Quel est l'intensité I de l'onde (en watts par m^2) ?

Note : Prendre comme vitesse du son 340 m/s.

35. Système d'ondes linéaires : battements, modes

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2, Chap. 46 et 49.

Exercice 35.1 Si l'on écrit l'équation d'onde de cette façon :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Quelles sont la vitesse de phase v_{ph} et la vitesse de groupe v_g en fonction de c ?

Exercice 35.2 Si, dans un milieu, la vitesse de phase diffère de la vitesse de groupe, on parle de dispersion. Y a-t-il de la dispersion dans :

(a) un son audible dans l'air ?

(b) un fil de cuivre tendu ?

(c) une onde dans l'eau ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 35.3 La vitesse de phase d'une onde dans l'eau de longueur d'onde λ est, en négligeant la tension superficielle et les effets de profondeur finie,

$$v_{ph} = \sqrt{g\lambda/2\pi}.$$

(a) Montrer que la vitesse de groupe v_g est moitié de la vitesse de phase.

(b) Quelles sont les vitesses de groupe et de phase d'une onde de longueur d'onde de 1000 m ?

Exercice 35.4 Six aéroglisseurs de masse m chacun, reliés par des ressorts identiques, sont contraints à se déplacer dans une cuvette, comme sur la figure 35.1. Combien y a-t-il de modes d'oscillation indépendants ?

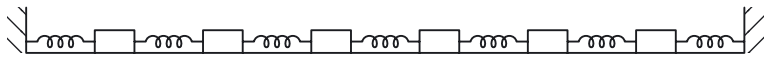
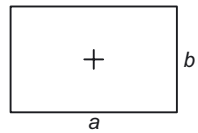


Figure 35.1

Exercice 35.5 Écrire la solution de l'équation d'onde, $u = u(x,y,t)$, qui décrit le mode vibrationnel d'une plaque rectangulaire illustrée sur la figure 35.2, qui est fixée sur le bord. On supposera que les vibrations se propagent dans cette plaque à la vitesse c, et que l'amplitude des vibrations est A.

Figure 35.2



Exercice 35.6 Imaginer des trains d'ondes périodiques infiniment longs, se propageant en directions opposées pour en déduire ce qui se passe si une corde idéale étirée de longueur L, maintenue fermement à ses deux extrémités est tirée latéralement d'une distance A (perpendiculaire à sa longueur) en son milieu puis relâchée. Dessiner quelques aspects de la corde à divers instants d'un demi-cycle du mouvement.

Exercice 35.7 Si la tension superficielle est incluse, la vitesse de phase de la surface d'un liquide de densité ρ et de tension superficielle T est

$$v_{ph} = \left(\frac{2\pi T}{\lambda\rho} + \frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{1/2},$$

si la profondeur est suffisante. Trouver la vitesse de groupe v_g d'une telle onde.

Exercice 35.8 Trouver la vitesse de phase v_{ph} d'ondulations de longueur d'onde 1,0 cm

(a) sur l'eau (tension superficielle 70 dyne cm^{-1}),

(b) sur l'alcool (tension superficielle 26 dyne cm^{-1}).

Exercice 35.9 Pour des ondulations sur l'eau qui avancent avec une vitesse *minimale*, trouver :

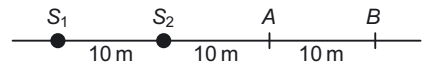
(a) la longueur d'onde λ ;

(b) la fréquence ν ;

(c) la vitesse c.

Exercice 35.10 Deux sources sonores S_1 et S_2 sont situées à 10 m l'une de l'autre, comme sur la figure 35.3. Sur la même ligne, en A et B il y a deux observateurs. S_1 émet une onde plane continue dont l'excès de pression est $p_e = A\cos(200t)$, et S_2 émet une onde plane continue pour laquelle $p_e = A\cos(210t)$. Les intervalles de distance, $\overline{S_1S_2}$, $\overline{S_2A}$ et $\overline{AB}$ sont chacun de 10 m. Pour les parties (a) et (b) ci-dessous, on prendra comme vitesse du son 340 m/sec.

Figure 35.3



(a) Combien de battements par seconde ν chaque observateur entend-il ?

(b) Quel est l'intervalle de temps Δt entre les sons les plus intenses entendus par A et ceux entendus par B ?

(c) S'il y avait de la dispersion dans le milieu de telle façon que les ondes de fréquence plus haute se propagent à 341 m/sec et celle de fréquence plus basse à 340 m/sec, avec quelle vitesse v les battements formés par les deux sons avanceraient-ils de A vers B ?

Exercice 35.11 Un long train de marchandises diesel remonte une colline à une vitesse de $5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ sur une voie droite. En approchant d'un tunnel, creusé dans un mur vertical et plat, l'ingénieur donne un long coup de klaxon, dont la fréquence principale est 340 Hz. Le son du klaxon et son écho sur le mur sont entendus à la fois

(a) par l'ingénieur ;

(b) par un ouvrier au sol près du wagon de queue.

Combien de battements par seconde ν chaque personne entend-elle ?

Exercice 35.12 Montrer que la fonction

$$f(x,y,z,t) = Ae^{i\omega t}\sin(l\pi x/a)\sin(m\pi y/b)\ \sin(n\pi z/c),$$

où $\omega^2 = v^2\pi^2(l^2/a^2 + m^2/b^2 + n^2/c^2)$, et l, m, n sont entiers ≥ 1,

(a) satisfait l'équation d'ondes à trois dimensions (avec une vitesse de propagation v),

(b) est égale à zéro à $x = 0$ et $x = a$, $y = 0$ et $y = b$, et $z = 0$ et $z = c$, et

(c) oscille de façon sinusoïdale en temps.

(d) Si $a : b : c = 1 : 2 : 3$ quelle est la fréquence ω_0 ?

(e) Évaluer les dix fréquences les plus basses en fonction de ω_0. Faites-en la liste par ordre croissant et dessinez-les sur une échelle verticale.

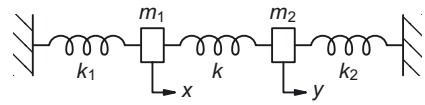
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 35.13 Sur un rail à coussins d'air (de frottement négligeable) des glisseurs de masse m_1 et m_2 sont attachés à deux murs opposés par des ressorts de raideur k_1 et k_2, respectivement, avec

$$k_1/m_1 = k_2/m_2 = \omega_0^2.$$

et sont également attachés l'un à l'autre par un autre ressort de raideur k, comme sur la figure 35.4.

Figure 35.4

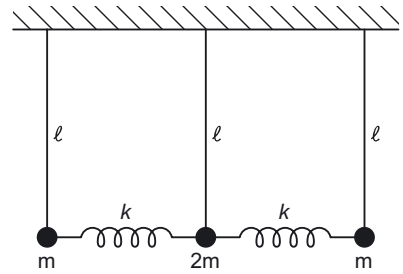


(a) Écrire les équations du mouvement des deux glisseurs.

(b) Substituer $x = Ae^{i\omega t}$ et $y = Be^{i\omega t}$ dans les équations ci-dessus et trouver les fréquences et les amplitudes des deux modes normaux de vibration.

Exercice 35.14 Trois pendules, tous de longueur l, sont arrangés de façon symétrique, comme sur la figure 35.5. L'objet central, de masse $2m$, est connecté par des ressorts idéaux de constante k aux objets externes, chacun de masse m. Quelles sont les fréquences ω et quels sont les déplacements relatifs (x_1, x_2, x_3) des pendules lorsqu'ils vibrent dans chacun des modes normaux du système ? On ne considérera que les vibrations dans le plan de la figure.

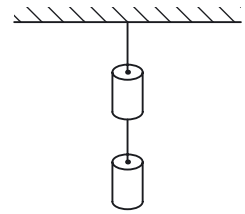
Figure 35.5



Attention : un peu de sens physique peut éviter de gros calculs dans ce problème.

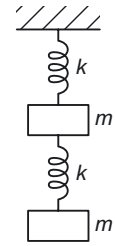
Exercice 35.15 Deux cylindres identiques, de moment d'inertie I, sont suspendus par des fils de torsion identiques, de constante de torsion K, comme sur la figure 35.6. Aucun mouvement pendulaire n'est permis. Combien de modes d'oscillation existe-t-il est quelles sont leurs périodes T ?

Figure 35.6



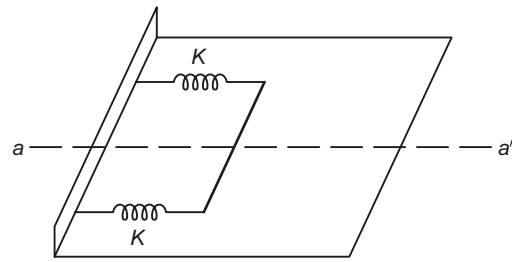
Exercice 35.16 Deux masses identiques m sont suspendues à des ressorts identiques de constante k, comme sur la figure 35.7. Trouver les fréquences angulaires ω des modes normaux. Il n'y a pas de mouvement pendulaire.

Figure 35.7



Exercice 35.17 Une baguette fine de masse M, de longueur L, se déplace sur une table sans frottement. Son CM est contraint de se déplacer sur une ligne droite a–a', comme sur la figure 35.8. Deux ressorts identiques (de constante K) sont reliés aux extrémités de la baguette, et agissent parallèlement à a–a'. Pour de petites amplitudes,

Figure 35.8



(a) trouver les fréquences des modes fondamentaux d'oscillation ;

(b) décrire le mouvement des modes fondamentaux.

Exercice 35.18 Dans une onde stationnaire sur une corde étirée, que l'on peut décrire par $y = A \sin(kx) \cos(\omega t)$, chaque élément de masse σdx le long de l'onde peut être traité comme un oscillateur harmonique infinitésimal ayant des oscillations autour de $y = 0$. Déterminer l'énergie totale E contenue dans une longueur d'onde λ de l'onde stationnaire.

Exercice 35.19 Un électron non relativiste de masse m est confiné entre deux plaques séparées d'une distance L.

(a) *Estimer* l'énergie cinétique minimum possible $T_{\min}$ en faisant usage du principe d'incertitude,

(b) Calculer cette énergie en utilisant la condition que la fonction d'onde qui décrit l'électron est une onde plane stationnaire sinusoïdale avec des nœuds aux bords.

(c) Quel est l'impulsion moyenne $\langle p \rangle$ de l'électron ? (*Attention :* considérer la grandeur *et* la direction.)

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

36. Analyse de Fourier des ondes

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2, Chap. 50.

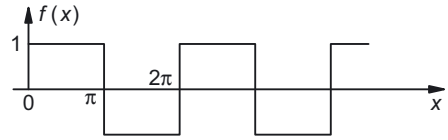
Exercice 36.1 Donner le développement de Fourier des fonctions

(a) $y =$ constante,

(b) $y = \sin x \ (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

Exercice 36.2 En partant de l'analyse de Fourier de l'onde carrée montrée sur la figure 36.1,

Figure 36.1



$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right),$$

Montrer que

(a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots = \pi/4$,

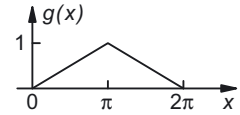
(b) $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \pi^2/8$,

(c) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = (4/3)\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots\right) = \pi^2/6$.

Exercice 36.3

(a) Analyser la fonction périodique $g(x)$, dont un cycle est dessiné sur la figure 36.2, en ses composantes de Fourier, et montrer que vos résultats concordent avec le résultat obtenu en intégrant la fonction de l'exercice 36.2.

Figure 36.2



(b) Utiliser le résultat précédent pour montrer que :

1. $1 + 1/3^4 + 1/5^4 + 1/7^4 + \cdots = \pi^4/96$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4 = \frac{2^4}{2^4-1}(1 + 1/3^4 + 1/5^4 + \cdots) = \pi^4/90$.

Exercice 36.4 Au Chapitre 45 du volume I, on a besoin d'évaluer

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

On peut le faire en multipliant le numérateur et le dénominateur par e^{-x} et en développant

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots ,$$

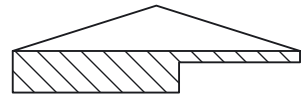
et en intégrant terme à terme. Ainsi, on doit obtenir

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int_0^\infty u^3 e^{-u}\, du \times \left(1 + 1/2^4 + 1/3^4 + \cdots\right)$$
$$= 6 \times \pi^4/90 = \pi^4/15.$$

Essayez !

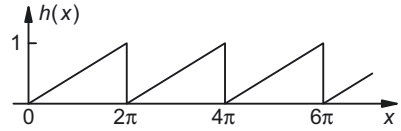
Exercice 36.5 Une corde de guitare est pincée au milieu de sa longueur, comme le montre la figure 36.3. Calculer les amplitudes des trois premières harmoniques A_1, A_2, A_3, par rapport à l'amplitude du fondamental A_0.

Figure 36.3



Exercice 36.6 Trouver la série de Fourier qui représente la fonction en dents de scie $h(x)$ montrée sur la figure 36.4, et utilisée dans le balayage horizontal d'un oscilloscope.

Figure 36.4



Exercice 36.7 Une corde de longueur L a une densité de masse linéaire σ et est soumise à une tension S. À l'instant $t = 0$, la forme est

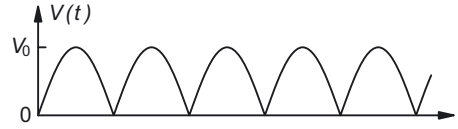
$$y(x) = 3 \sin \frac{\pi x}{L} + \sin \frac{3\pi x}{L}.$$

(a) Quelle est la période d'oscillation T ?

(b) Quelle est la forme à une demi-période ? ($t = T/2$)

Exercice 36.8 Un redresseur d'onde total est un dispositif qui transforme une onde sinusoïdale d'amplitude V_0 dans la forme montrée sur la figure 36.5.

Figure 36.5



(a) Évaluer la valeur moyenne de $V(t)$. Ce sera le voltage du courant continu de sortie.

(b) Trouver l'amplitude A_2 du second harmonique du courant de sortie.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 36.9 Un certain transformateur produit une tension de sortie proportionnelle à

$$V_{\text{sortie}} = V_{\text{entrée}} + \epsilon(V_{\text{entrée}})^3.$$

Analyser l'effet sur V_{sortie} introduit pas le terme cubique,

(a) sur une onde d'entrée sinusoïdale $\sin x$,

(b) sur la somme de deux ondes sinusoïdales (ou davantage) de fréquences différentes.

Exercices pour le volume II (*Électromagnétisme 1* et *Électromagnétisme 2*)

Introduction

Le présent recueil d'exercices est un ensemble de problèmes donnés en deuxième année au Caltech pendant la période 1962–64, c'est-à-dire pendant les deux premières années où le cours a été reconstruit en utilisant le *Cours de Physique de Feynman* du professeur Feynman. Les exercices présentés représentent des petits travaux de « *homework* » aussi bien que des problèmes d'examen, et ils couvrent un spectre large de difficulté. L'ordre dans lequel ils sont présentés à l'intérieur de chaque chapitre, est, *grosso modo*, un ordre de difficulté croissante. Comme pour les exercices du volume I, ceci n'est pas un ensemble « définitif » et doit être revu et complété parallèlement à l'évolution du cours lui-même.

Pour une bonne moitié de ces exercices, l'idée de départ a été suggérée par R. P. Feynman. Le reste est dû aux professeurs qui enseignaient en deuxième année : J. Blue, T. Caughey, G. Chapline, M. Clauser, R. Dashen, R. Dolen, R. Griffith, F. Henyey, W. Karzas, R. Kavanagh, P. Peters, J. Pine, M. Plesset, M. Sands, I. Tammaru, A. Title, et C. H. Wilts.

Une première édition de la plupart des problèmes a été faite par C. H. Wilts et moi-même après l'année scolaire 1962–63. Même si la plupart des problèmes sont inédits, des versions de problèmes classiques ont été empruntées à : *Introduction to Electricity and Optics*, deuxième édition, de N. H. Frank, McGraw-Hill 1950 ; et *Physics for Students of Science and Engineering*, de D. Halliday et R. Resnick, Wiley 1960. Nous remercions ces auteurs et leurs éditeurs pour nous avoir donné l'autorisation de publier leurs problèmes.

La frappe, tant dans ses premières et difficiles étapes que dans sa forme finale, est due à Madame F. L. Warren que nous remercions vivement.

G. Neugebauer

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

37. ÉLECTROMAGNÉTISME

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 1, Chap. 1.

Exercice 37.1

(a) Que serait la masse M d'un proton si la force gravitationnelle entre deux protons au repos était égale à la force électrique ? Faire la comparaison avec la masse du proton m_p ?

(b) Quelle serait la force électrique F entre deux pièces de dix centimes d'euro placées aux extrémités opposées d'un bureau d'amphithéâtre de 10 mètres de long si leurs charges nucléaire et électronique différaient en valeur absolue d'environ 1 % ? Pouvez-vous imaginer un objet dont le poids serait égal à cette force ? (On supposera qu'une pièce de dix centimes d'euro est faite de $4{,}1 \times 10^{-3}$ kg de cuivre pur.)

Exercice 37.2

(a) Faites une estimation grossière du travail W_{U} qui doit être fourni contre les forces électriques pour assembler un noyau d'uranium à partir de deux moitiés égales.

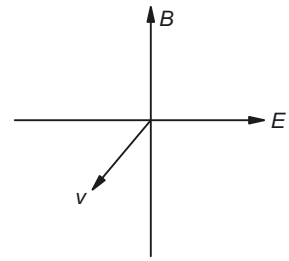
(b) Qu'en est-il du travail W_{He} nécessaire pour assembler deux deutérons afin d'en faire un noyau d'hélium ?

Exprimer vos résultats à la fois en joules par atome et en kilowatts heure par kilogramme.

Exercice 37.3 Dans le cuivre, il y a un électron de conduction par atome de cuivre. Lorsqu'un courant de 10 ampères parcourt un fil de cuivre de 0,13 cm de diamètre, et de 50 g par cm, quelle est la vitesse moyenne $\langle v \rangle$ des électrons de conduction ? Que vaut $\langle v \rangle^2/c^2$? (*Se rappeler :* le rapport des effets magnétiques aux effets électriques est à peu près de cet ordre.)

Exercice 37.4 Dans une certaine région de l'espace, il règne un champ électrique $\boldsymbol{E}$ de 10 000 volts par centimètre dans la direction $+x$. Dans la même région, il y a un champ magnétique $\boldsymbol{B}$ dans la direction $+y$. Un faisceau de muons de vitesse $v = c/3$ traverse cette région *en ligne droite* dans la direction $+z$, comme sur la figure 37.1. Le muon a une masse 207 fois supérieure à celle de l'électron et une charge égale en valeur absolue.

Figure 37.1



(a) Quelle est la valeur du champ magnétique ?

(b) Pouvez-vous dire d'après cette expérience si la charge des muons est + ou − ?

Exercice 37.5 Dans une certain région de l'espace il y a un champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B}$, tel que $B_x = 0$, $B_y = 0$, et $B_z = B_0$. Le champ est constant dans le temps, et il n'y a pas de courants ou de champs électriques dans la région considérée. Une particule de masse m et de charge positive $+q$ part de $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ avec une vitesse $\boldsymbol{v}$ dans la direction $+x$.

(a) Dessiner et décrire quantitativement en fonction de B_0, m, v, et q la trajectoire de la particule. (On supposera $v/c \ll 1$.)

(b) Supposons que $B_x = 0$, $B_y = 0$, mais $B_z = B_0 + ax$ avec $a > 0$. Pour ax toujours petit par rapport à B_0, mais pas complètement négligeable, montrer sur un dessin le comportement qualitatif de la trajectoire de la particule. (Voir Charpak *et al.*, *Physical Review Letters*, Vol. 6, 128 (1961) quant à l'utilisation d'un pareil champ dans une expérience importante.)

(c) Montrer que le champ postulé en partie (b) ne satisfait pas l'une des équations de Maxwell si le champ remplit un volume fini de l'espace et que, comme ci-dessus, on suppose qu'il n'y a pas de courants ou de champs électriques dans le volume.

Exercice 37.6 Une particule de masse m et de charge positive q est en $x = z = 0$, $y = a$, et se déplace à basse vitesse

$$\boldsymbol{v} = v_0 \boldsymbol{e}_x.$$

La charge est influencée par une charge négative $-Q$ fixe, située à l'origine, et par un champ magnétique uniforme B_0 dans la direction $+z$.

(a) Quelle doit être la valeur de B_0 pour que la charge en mouvement décrive un cercle de rayon a autour de la charge stationnaire ?

(b) Si la valeur du champ magnétique était différente, expliquer pourquoi la vitesse de la particule serait seulement fonction de la distance radiale.

(c) Esquisser qualitativement plusieurs cycles de la trajectoire suivie par la particule si elle part du point $x = z = 0$, $y = a$ avec une vitesse nulle.

38. Calcul différentiel de champs de vecteurs

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 1, Chap. 2.

Exercice 38.1 Un fil de cuivre de rayon a possède une gaine isolante concentrique de rayon externe b. Le fil transporte un courant électrique qui élève sa température à T_1 alors que la température externe de l'isolant reste à la température T_2, voisine de la température ambiante.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(a) Quel est $\boldsymbol{\nabla} T$ à l'intérieur de l'isolant ? Donner le résultat en fonction de a, b, T_1 et T_2.

(b) Quelle est la différence de température $(T_1 - T_2)$ si un courant de 20 A est envoyé dans un fil de cuivre recouvert d'une couche de caoutchouc de 0,2 cm d'épaisseur dont la conductibilité thermique est $1{,}6 \times 10^{-3}\ \mathrm{W\,cm^{-1}\,K^{-1}}$? (Le conducteur dans le fil de cuivre a un diamètre de 0,13 cm et une résistance d $1\,\Omega/300$ m.)

Exercice 38.2 Montrer par le calcul direct que :

(a) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = 0$.

(b) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$.

Exercice 38.3 Si $\boldsymbol{R}$ est le vecteur joignant l'origine et le point (x,y,z) monter que :

(a) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{R} = 3$.

(b) $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{R} = 0$.

Montrer que, sauf en $R = 0$,

(c) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{R}/R^3) = 0$.

(d) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{R}/R^3) = 0$.

(e) $\boldsymbol{\nabla}(1/R) = -\boldsymbol{R}/R^3$.

(f) De la partie (2) ci-dessus et de l'équation (2.46) du volume II on sait que $\boldsymbol{R}$ peut s'écrire comme $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\nabla}\varphi$. Que vaut φ ?

Exercice 38.4 Les équations de Maxwell sont

(a) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$,

(b) $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$,

(c) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$,

(d) $c^2\, \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \partial \boldsymbol{E}/\partial t + \boldsymbol{j}/\epsilon_0$,

et la conservation de la charge peut s'écrire

(e) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = -\partial\rho/\partial t$.

1. Montrer que l'équation (3) ci-dessus est cohérente avec la divergence de l'équation (2).
2. Montrer que l'équation (5) ci-dessus découle de la divergence de l'équation (4) (c'est-à-dire que les équations de Maxwell impliquent la conservation de la charge).
3. Montrer que dans l'espace vide ($\boldsymbol{j} = 0$, $\rho = 0$) $\boldsymbol{E}$ satisfait l'équation d'onde

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Conseil : prendre le rotationnel de l'équation (2).

4. Montrer que dans l'espace vide, $\boldsymbol{B}$ satisfait la même équation,

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0.$$

5. Montrer que l'équation (2) implique que $\boldsymbol{E}$ peut s'écrire

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},$$

où $\boldsymbol{A}$ est défini par $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$.

6. Pourquoi $\boldsymbol{B}$ peut-il s'écrire $\nabla \times \boldsymbol{A}$?

Exercice 38.5 La vitesse d'un objet solide tournant autour d'un axe est un champ $\boldsymbol{v}(x,y,z)$. Montrer que

(a) $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

(b) $\nabla \times \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$, où $\boldsymbol{\omega}$ = vitesse angulaire.

Exercice 38.6

(a) Démontrer par un calcul direct que si $\boldsymbol{A}$ est un vecteur constant et que $\boldsymbol{R}$ est le vecteur radial, alors

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{R}) = 2\boldsymbol{A}.$$

(b) Pour les vecteurs, nous savons que

$$\boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) - (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{C}.$$

ce qui pourrait nous mener à penser que

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{A}(\nabla \cdot \boldsymbol{R}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{R} = 3\boldsymbol{A}. \qquad \text{(Faux)}$$

Pourquoi la substitution de ∇ à la place de $\boldsymbol{B}$ donne-t-elle un résultat incorrect ?

Exercice 38.7 Une longue barre en acier est soumise à un traitement thermique original. À un certain temps t, quand elle refroidit, la distribution de température $T(x)$ est comme celle de la partie (a) de la figure 38.1, et les isothermes tous les intervalles de 10 °C sont montrés sur la partie (b). Nous supposons, dans tout ceci, que la température ne dépend que de x, la distance à une extrémité de la barre.

(a) Aux points A, B, et C dessiner des flèches dont la direction et la longueur représentent celles de ∇T.

(b) Auquel des cinq points marqués est-ce que la divergence du flux de chaleur $\boldsymbol{h}$ est le plus grand ?

(c) En combien des cinq points marqués est-ce que $\nabla \times \boldsymbol{h} = 0$?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

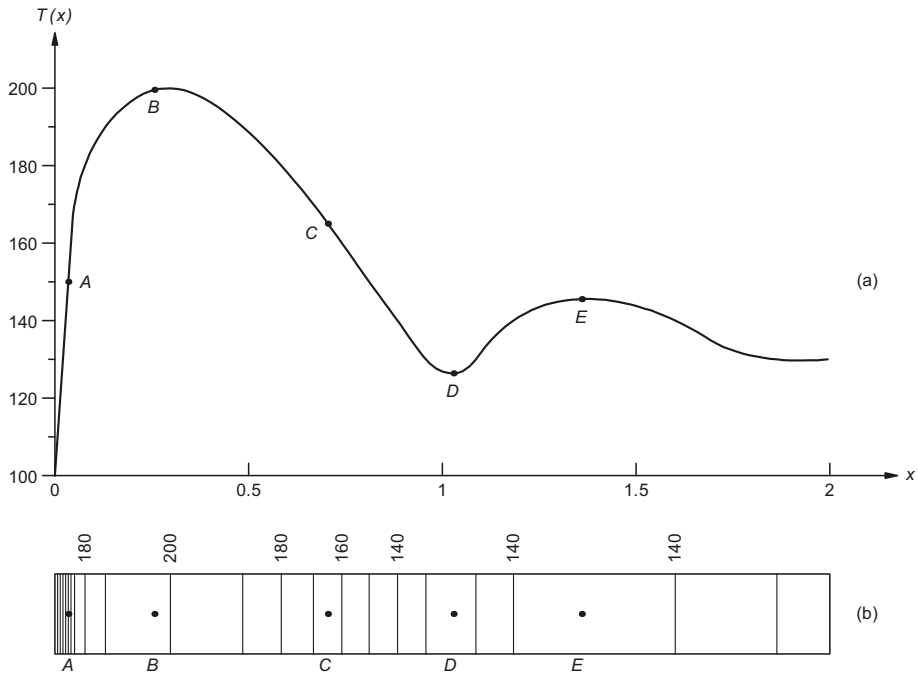


Figure 38.1

39. Calcul intégral vectoriel

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 1, Chap. 3.

Exercice 39.1

(a) Les équations de Maxwell ont été présentées comme un fait au chapitre 1 du volume II et dans leur forme différentielle au chapitre 2. Montrer que les deux formes sont équivalentes.

(b) Si ρ est la densité de charge et $\boldsymbol{j}$ la densité de courant électrique, montrer que l'équation

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

est équivalente à la conservation de la charge.

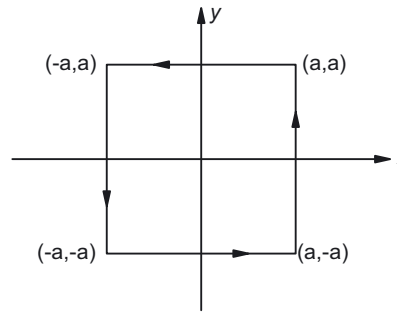
Exercice 39.2 Une couche de matériau radioactif est déposée sur la surface d'une sphère. Le matériau émet des particules α de haute énergie. Supposons que les particules soient émises en direction radiale de l'extérieur de la surface de la sphère. Il semblerait que ce jet de particules chargées constitue un courant électrique. Est-ce qu'un champ magnétique est produit par ce courant ?

Exercice 39.3 Le champ d'une charge ponctuelle située à l'origine est de la forme

$$\boldsymbol{E} = \frac{K}{r^3}\boldsymbol{r},$$

où $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, et K est une constante.

Figure 39.1



(a) Calculer le flux de $\boldsymbol{E}$ au travers de la surface sphérique S de rayon a centrée à l'origine.

(b) Utiliser le théorème de Gauss pour relier le flux de $\boldsymbol{E}$ au travers de la surface sphérique à l'intégrale de $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}$ sur le volume. Pouvez-vous expliquer votre résultat ?

(c) Calculer l'intégrale curviligne du vecteur $\boldsymbol{E}$ sur le chemin s dans le plan xy de la figure 39.1. Utiliser le théorème de Stokes pour vérifier le résultat.

Exercice 39.4

(a) En utilisant les résultats de l'exercice 38.3 partie (a), trouver une formule (sans intérêt) pour le volume V d'une région en termes d'une intégrale sur sa surface S.

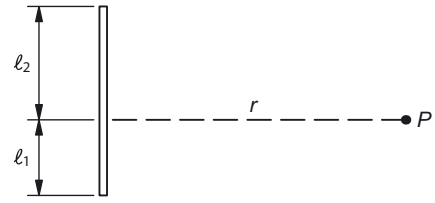
(b) Vérifier votre résultat dans la partie (a) pour une sphère et pour un bloc rectangulaire.

40. ÉLECTROSTATIQUE

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 1, Chap. 4.

Exercice 40.1 En se référant à la figure 40.1 :

Figure 40.1



(a) Trouver le potentiel ϕ en un point P à la distance r d'une ligne chargée de $(l_1 + l_2)$ mètres de long, qui contient une densité de charge λ coulombs/mètre.

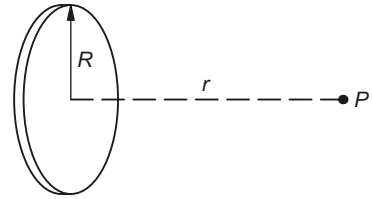
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(b) Comparer votre réponse à la question précédente (a) avec le potentiel attendu si $r \gg (l_1 + l_2)$.

(c) Vérifier votre résultat (a) dans la limite $r \ll (l_1 + l_2)$ en comparant le champ électrique $\boldsymbol{E}$ déduit de ϕ avec le champ calculé par la loi de Gauss.

Exercice 40.2 Calculer le champ électrique $\boldsymbol{E}$ au point P, à la distance r du centre et sur l'axe d'un disque mince de rayon R ayant une densité de surface uniforme σ, comme sur la figure 40.2.

Figure 40.2



Exercice 40.3 Une charge q' est placée sur la plus interne de deux sphères concentriques métalliques, comme le montre la figure 40.3 ; une charge q est placée sur la sphère externe.

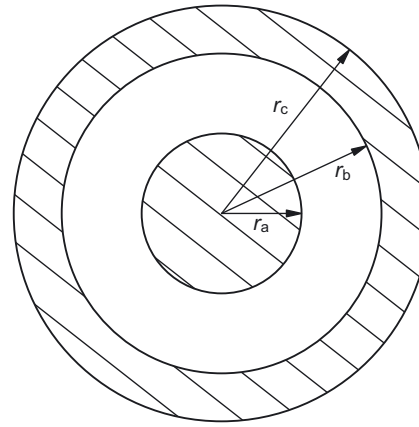
(a) Dessiner la composante radiale du champ électrique E_r en fonction de la distance radiale.

(b) Dessiner le potentiel par rapport à l'infini en fonction de la distance radiale.

(c) Quel est le potentiel ϕ à la surface de la sphère interne ?

(d) Si la sphère centrale est écartée du centre de la sphère extérieure, expliquer ce qui arrive au champ pour $r_b < r < r_c$ et pour $r > r_c$.

Figure 40.3



41. Applications de la loi de Gauss

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 1, Chap. 5.

Exercice 41.1 Montrer que le potentiel électrique ϕ a les propriétés intéressantes suivantes : la valeur moyenne de ϕ sur une surface sphérique imaginaire est la même que la valeur de ϕ au centre de la sphère s'il n'y a pas de charges dans la sphère. Voyez-vous une application où cette propriété est utile ?

Exercice 41.2 Trouver le champ électrique $\boldsymbol{E}$ à l'intérieur, mais loin des extrémités, d'un cylindre extrêmement long qui a une densité de charge uniforme ρ en tout point. Noter la différence entre ce résultat et le champ à l'intérieur d'une sphère uniformément chargée.

Exercice 41.3 Deux plaques métalliques larges sont maintenues parallèles et séparées d'une distance d. Elles sont reliées à leur bord par une bande métallique. Une feuille de plastique fine portant une charge de surface σ par unité d'aire est placée entre les plaques à une distance $d/3$ de la plaque supérieure, comme sur la figure 41.1. Calculer les champs électriques $\boldsymbol{E}_1$ et $\boldsymbol{E}_2$ près des plaques respectivement supérieure et inférieure.

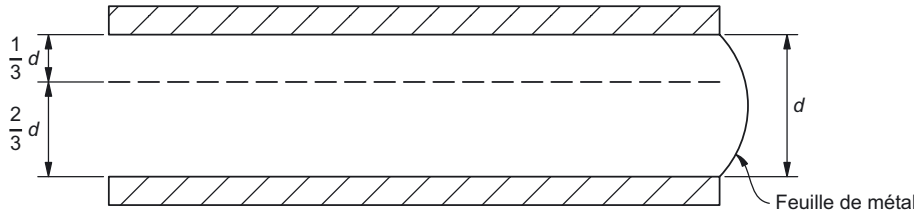


Figure 41.1

Exercice 41.4 Trouver la formule générale pour la composante x du champ électrique en x, E_x, si la densité de charge ρ ne varie qu'avec x dans tout l'espace.

Exercice 41.5 Dans un tube électronique, des électrons sont émis par une surface métallique plate et chaude, et sont collectés par une plaque métallique plane parallèle à l'émetteur, à une distance d, comme sur la figure 41.2. (La distance d est faible par rapport aux dimensions latérales des plaques.) Le potentiel électrique entre les plaques est donné par $\phi = kx^{4/3}$ où x est la distance de l'émetteur.

(a) Quelle est la charge surfacique σ_e sur l'émetteur ?

(b) Quelle est la charge surfacique σ_c sur le collecteur ?

(c) Quelle est la densité de charge volumique $\rho(x)$ pour $0 < x < d$?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

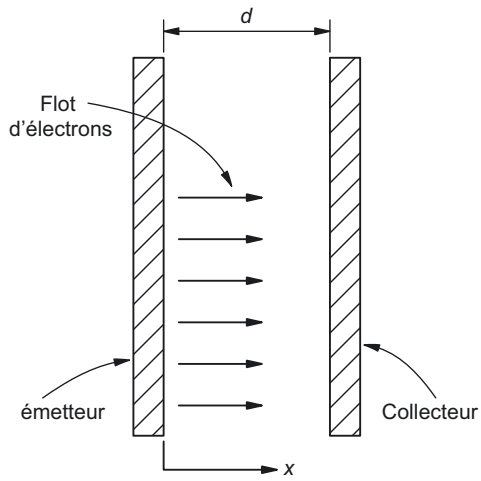


Figure 41.2

Exercice 41.6 Soit un conducteur avec une distribution de charge σ coulombs/m^2 sur sa surface ; σ n'est pas nécessairement constante. Montrer que la force exercée sur la charge dans un petit élément d'aire dA est normale à la surface et donnée par $(\sigma^2/2\epsilon_0)\, dA$. (Le facteur 1/2 est juste. Expliquer.)

Exercice 41.7 Le champ électrique maximum qui peut exister à la surface d'un conducteur dans le vide, avant qu'il n'y ait de décharge, est environ de 10^8 V/m. Si le conducteur est fait de cuivre (de masse $8.9\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$), et que la charge de surface est négative,

(a) comparer le nombre d'électrons en excès par unité d'aire N_e au nombre d'atomes par unité d'aire N_a.

(b) comparer la force F_e exercée sur un électron dans ce champ à la force F_a agissant sur un électron à une distance atomique typique d'un proton (≈ 0.5 Å).

Exercice 41.8 Le muon négatif est une particule qui a la même charge électrique qu'un électron mais une masse 207 fois plus grande. Lorsqu'un muon négatif est arrêté dans la matière, il est attiré par un noyau et peut remplacer un électron atomique pour former un atome « muonique ». À cause de sa plus grande masse, le muon s'approche davantage du noyau que l'électron et, pour les noyaux lourds, il peut même pénétrer le noyau dans son état d'énergie le plus bas. Le muon n'interagit pas avec la matière nucléaire par des forces nucléaires, mais seulement par des forces électriques, et il voit le noyau comme une sphère uniformément chargée. D'autres expériences de physique montrent que le rayon des noyaux est de la forme $R = R_0 A^{1/3}$ où R_0 est approximativement $1{,}2 \times 10^{-15}$ m et A est la somme du nombre de protons et de neutrons.

Soit un modèle d'atome muonique où le muon oscille suivant une ligne passant par le centre d'un noyau de plomb.

(a) Quelle est la fréquence naturelle ω de ces oscillations ?

(b) Quelle est la différence d'énergie entre les deux états de plus basse énergie de ce modèle d'atome muonique ? (On a dit au chapitre 41 du Vol. I que les états

d'énergie quantique d'un oscillateur harmonique sont séparés par une différence d'énergie $\hbar\omega$.)

(c) On observe expérimentalement que lorsque les atomes muoniques sont formés dans le plomb, des rayons X de 6 MeV sont émis. Comment interprétez-vous ce rayonnement ?

Exercice 41.9 Imaginons que la Terre soit de densité uniforme et que l'on creuse un tunnel le long d'un diamètre.

(a) Si un objet était lâché dans le tunnel, montrer qu'il oscillerait avec une période P égale à la période d'un satellite en orbite très proche de la surface de la Terre.

(b) Calculer P.

Exercice 41.10 On sait que la Terre fournit environ 8×10^{20} joules par an sous forme de chaleur. Avant d'étudier des modèles thermiques en détail pour expliquer ce phénomène, il est intéressant de considérer des modèles qui sont très simplifiés mais qui donnent des estimations d'ordres de grandeur. Par exemple, considérons la possibilité que toute la chaleur produite par les substances radioactives distribuées uniformément dans la Terre, qui se désintègrent et donnent des particules dont l'énergie cinétique est convertie en chaleur. On estime que la température au centre de la Terre est d'environ 2500 °C et que la conductibilité thermique de matériaux typiques est d'environ $0{,}03\,\mathrm{W\,cm^{-1}\,K^{-1}}$. Est-ce que ce modèle est cohérent avec ces estimations ?

Exercice 41.11 Deux longs cylindres conducteurs concentriques sont isolés l'un de l'autre et chargés. Loin des extrémités, le cylindre intérieure a une densité de charge de $+\lambda_1$, et le cylindre extérieur une densité de charge $+\lambda_2$ coulombs par unité de longueur. Le cylindre intérieur a des rayons interne et externe r_1 et r_2, le cylindre externe des rayons r_3 et r_4.

(a) Trouver $\boldsymbol{E}(r)$

1. en un point proche du centre (où les effets de bord peuvent être négligés),
2. juste en dehors du cylindre extérieur.

(b) Trouver la différence de potentiel $\Delta\phi$ entre les deux cylindres.

(c) Décrire qualitativement tout changement dans les champs et dans les potentiels si

1. r_1 est réduit ;
2. r_2 est aggrandi ;
3. l'aire transverse extérieure du cylindre interne est transformée en un carré de côtés $2r_2$ (on suppose $\sqrt{2}\,r_2 < r_3$).

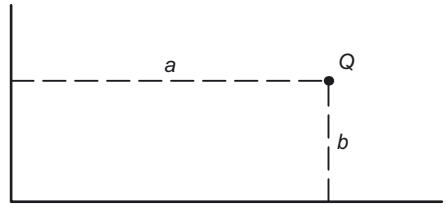
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

42. Le champ électrique dans diverses circonstances

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 1, Chap 6.

Exercice 42.1 Utiliser la méthode des images pour trouver la force $\boldsymbol{F}$ sur une charge Q située à des distances a et b de deux plans conducteurs semi-infinis à angle droit l'un de l'autre, comme sur la figure 42.1.

Figure 42.1



Exercice 42.2 Une particule de charge électrique q est lâchée (au repos) à une distance x_0 de la surface d'une grande plaque conductrice reliée à la Terre. La particule est attirée par la plaque et se déplace vers elle.

(a) Quelle est l'énergie cinétique de la particule en fonction de sa distance x à la plaque ? (On néglige toute perte par rayonnement.)

(b) Trouvez-vous quelque chose de non physique dans votre réponse à la question précédente ?

(c) Une véritable plaque métallique peut être considérée comme étant un plan conducteur idéal jusqu'à des distances de l'ordre de la distance interatomique, c'est-à-dire jusqu'à environ 1 Å. Estimer l'énergie cinétique avec laquelle un électron arriverait sur une plaque conductrice, s'il était lâché au repos à 1 cm de la plaque. Donner la réponse en électron-volts.

Exercice 42.3 Une boîte rectangulaire de plastique isolant de 1 cm par 10 cm par 100 cm est remplie d'une densité de charge uniforme de ρ coulombs par cm^3. Soit une ligne droite perpendiculaire à la face qui fait 10 cm sur 100 cm et qui passe par le centre de la boîte. Dessiner à peu près le graphe du potentiel ϕ le long de cette ligne en fonction de la distance au centre. Considérer le domaine de distances de 0,001 cm (dans la boîte) jusqu'à des distances beaucoup plus grandes que 100 cm ; un dessin log-log de ϕ en fonction de la distance est approprié. Sur le même graphe, dessiner une courbe qui donne la grandeur du champ électrique $\boldsymbol{E}$.

Exercice 42.4 La Terre est bombardée en permanence par des rayons cosmiques de haute énergie qui proviennent de l'extérieur du système solaire. On a déterminé par des mesures de haute altitude en ballons et en satellites, que les rayons cosmiques sont faits presque exclusivement de protons, même s'il y a quelques % de particules alpha, de noyaux plus lourds et d'électrons. L'énergie moyenne de ces protons est de quelques

milliards d'électron-volts ; l'intensité des protons arrivant sur l'atmosphère de la Terre est à peu près d'un proton par cm^2 par seconde.

On pourrait se demander combien de temps cela prendrait à une charge arrivant sur Terre pour élever le potentiel de la Terre au point que les protons suivants ne puissent plus atteindre la Terre. Comment se compare le temps T nécessaire pour réaliser ce programme, avec l'âge approximatif de la terre : 5 milliards d'années ? Si le temps est plus court, on fait face à la question : « Mais pourquoi donc les rayons cosmiques arrivent-ils encore ? »

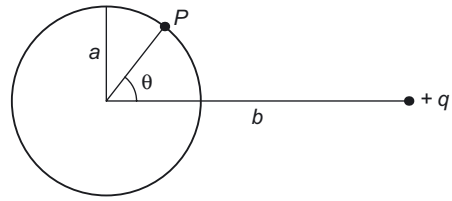
Exercice 42.5

(a) Trouver la capacité par unité de longueur C_l d'un long condensateur cylindrique constitué d'un cylindre conducteur de rayon a et d'un cylindre coaxial de rayon b.

(b) Qualitativement, qu'arriverait-il s'il y avait des imperfections dans la construction qui créeraient une protubérance externe aiguë dans la partie extérieure ?

Exercice 42.6 Une charge $+q$ est située à une distance b du centre d'une sphère conductrice isolée, non chargée, de rayon a, comme sur la figure 42.2.

Figure 42.2



(a) Quel est le potentiel ϕ de la sphère ?

(b) Quelle est la densité de charge surfacique $\sigma(\theta)$ induite sur la sphère au point P de la figure.

(c) Si la sphère est élevée à un potentiel V, quelle est la grandeur de la force $\boldsymbol{F}$ entre la charge et la sphère ?

Exercice 42.7 Au chapitre 6 du volume II on démontre qualitativement qu'il est possible de trouver le champ à l'extérieur d'une sphère avec une densité de charge surfacique variant comme $\cos\theta$, en superposant les champs de deux sphères de charge opposée déplacées l'une par rapport à l'autre. Faites la démonstration quantitativement et trouver le champ à la fois *hors et dans* une sphère avec une densité de charge superficielle $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$, où σ_0 est une constante et θ l'angle polaire.

Exercice 42.8 Le champ d'un dipôle $\boldsymbol{p}$ est donné dans les équations (6.14) et (6.15) du volume II.

(a) Trouver les composantes radiale et tangentielle du champ du dipôle $\boldsymbol{E}$ en un point (r,θ,φ) (coordonnées sphériques).

(b) Montrer que le champ électrique d'un dipôle pointe dans la même direction en tous les points d'une droite quelconque passant par le dipôle.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(c) À n'importe quelle distance du dipôle, quelles sont la direction et la grandeur relative de $\boldsymbol{E}$ pour des points à des angles de 0, $\pi/4$, et $\pi/2$ par rapport à la direction de $\boldsymbol{p}$?

Exercice 42.9 On considère un dipôle placé dans un champ électrique qui, avant qu'on ne mette le dipôle, était uniforme et de grandeur E_0.

(a) Si le moment dipolaire $\boldsymbol{p}$ pointe dans la direction du champ extérieur, il y aura une surface équipotentielle qui *entourera* le dipôle. Montrer que cette surface est une sphère.

(b) Trouver la grandeur du moment dipolaire pour laquelle la sphère aura un rayon a.

(c) Dessiner le champ électrique en dehors de la sphère.

(d) Si une coquille fine conductrice au même potentiel était amenée à coïncider avec la surface équipotentielle, comment les champs changeraient-ils ?

(e) Quelle serait la densité de charge superficielle $\sigma(\theta)$ sur la sphère (où θ est l'angle polaire) ?

(f) Quel serait le moment dipolaire de cette densité de charge ?

(g) Comment utiliseriez-vous les résultats ci-dessus ?

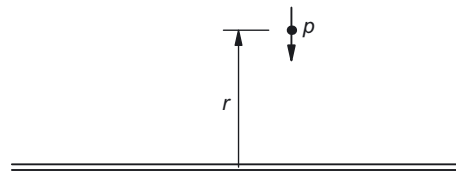
Exercice 42.10 Une particule avec un moment électrique dipolaire $\boldsymbol{p}$ est placée à une distance r d'un long fil électrique qui a une charge λ par unité de longueur (λ est constante). Le moment dipolaire se trouve dans le plan défini par le fil et la particule, comme sur la figure 42.3.

(a) Quelle est la force $\boldsymbol{F}$ et le couple $\boldsymbol{\tau}$ sur la particule,

1. si $\boldsymbol{p}$ est perpendiculaire au fil ?
2. si $\boldsymbol{p}$ est parallèle au fil ?

(b) Montrer qu'en général la force $\boldsymbol{F}$ sur un dipôle $\boldsymbol{p}$ dans un champ électrique $\boldsymbol{E}$ est $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E})$.

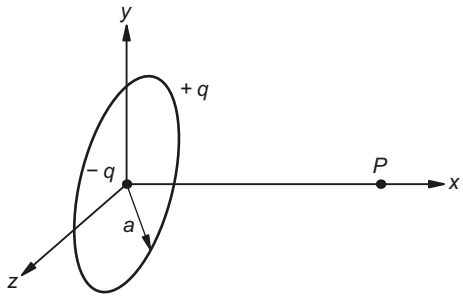
Figure 42.3



Exercice 42.11 Trouver le potentiel ϕ à la distance r d'une très grande feuille de dipôles. On supposera qu'il y a N dipôles par unité de surface et que chaque dipôle a un moment dipolaire $\boldsymbol{p}$ qui pointe perpendiculairement à la surface.

Exercice 42.12 Une charge électrique $+q$ est distribuée uniformément sur un anneau fin de rayon a. L'anneau est dans le plan yz avec son centre à l'origine. Une charge $-q$ est placée à l'origine, comme sur la figure 42.4.

Figure 42.4



(a) Trouver le potentiel ϕ au point $P = (x,0,0)$.

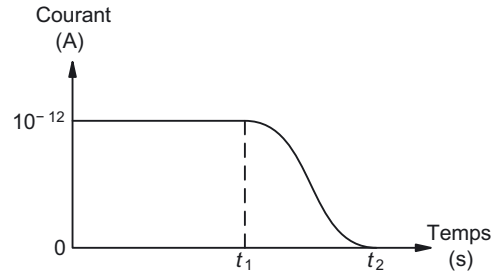
(b) Quel est le champ électrique $\boldsymbol{E}$ en P ?

(c) Comment le champ électrique varie-t-il avec x pour $x \gg a$?

(d) Comment le champ varie-t-il à grande distance, comparer avec le champ d'un dipôle ? Pouvez-vous l'expliquer ?

Exercice 42.13 Un condensateur à plaques parallèles, avec une capacité de 100 pF (1 pF = 10^{-12} farad) et une séparation de 1 cm, est chargé avec une batterie à une différence de potentiel de 10 volts. La batterie est alors déconnectée. On envoie de la lumière bleue sur la plaque du bas, ce qui fait que des électrons d'énergie cinétique de 0 à 1,5 eV sont émis. Le voltage de la batterie est tel que les électrons sont attirés par la plaque supérieure. Le courant total qui va à la plaque du haut varie comme sur la figure 42.5 en fonction du temps.

Figure 42.5



(a) Combien de temps faudra-t-il pour que la différence de potentiel entre les plaques s'annule (temps t_1 de la figure) ?

(b) Quelle est la différence de potentiel V à des temps beaucoup plus grands que t_2 ?

(c) Si on doublait la séparation des plaques *avant* de charger le condensateur, comment votre réponse à la question (a) changerait-elle ?

(d) Si la séparation des plaques était doublée *après* que le condensateur soit complètement chargé et après qu'on ait retiré la batterie, comment votre réponse à la question (a) changerait-elle ?

Exercice 42.14 Une baguette isolante de 1 mètre de long et 1 centimètre de rayon a son axe le long de l'axe x et ses extrémités en $x = -0{,}5$ mètre et $x = +0{,}5$ mètre. Elle a une densité de charge volumique donnée par $\rho = ar^2$, où r est la distance à l'axe de la baguette et a une constante positive, 2 C m^{-5}.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(a) Trouver la grandeur du champ électrique $\boldsymbol{E}$ aux quatre points $y = 0\,;\, 0{,}5\,;\, 1$ et $2\,\text{cm}\,;$ $x = z = 0$. Ici, nous supposons que la baguette a une longueur infinie.

(b) Faire une bonne estimation du potentiel à l'origine ($x = y = z = 0$) par rapport au potentiel nul à l'infini. Donner une barre d'erreur à votre estimation et justifiez-la.

(c) Est-ce que le potentiel à $x = 0{,}5$ mètre ; $y = z = 0$ est plus grand, plus petit ou le même que le potentiel à l'origine ?

43. Le champ électrique dans diverses circonstances (suite)

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 1, Chap. 7.

Exercice 43.1

(a) Montrer que les équipotentielles de deux fils droits chargés, parallèles, de signes opposés, sont des cylindres à base circulaire. On supposera une densité de $+\lambda$ et $-\lambda$ coulombs/mètre sur les deux fils séparés d'une distance d.

(b) Du résultat précédent, trouver la capacité par unité de longueur C_l de deux fils parallèles de rayon r dont les centres sont distants de d. On suppose $d \gg 2r$.

(c) Montrer que si $x, y \gg d$ le potentiel peut être obtenu à partir de la fonction complexe

$$f(z) \equiv U + iV = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}.$$

44. Énergie électrostatique

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 1, Chap. 8.

Exercice 44.1 Êtes-vous d'accord avec l'affirmation du chapitre 8 du Vol. II qu'un noyau qui contient Z protons distribués plus ou moins uniformément dans le volume d'une sphère de rayon r a une énergie électrostatique d'environ :

$$U = \frac{3}{5} Z(Z-1) \frac{e^2}{r}?$$

Exercice 44.2 Un condensateur de réglage d'une radio a une capacité maximum de 100 pF. En faisant tourner ses plaques mobiles, la capacité peut être réduite jusqu'à 10 pF. On suppose que le condensateur est chargé à une différence de potentiel de 300 volts à sa capacité maximum. Le bouton de réglage est alors tourné à sa capacité minimum, tandis que la charge des plaques reste la même.

(a) Quelle est la valeur finale de la différence de potentiel V_f ?

(b) Combien de travail mécanique W est effectué en tournant le bouton ?

Exercice 44.3 Deux condensateurs de capacité C_1 et C_2 sont initialement chargés avec les charges Q_1 et Q_2.

(a) Montrer, qu'hormis des cas particuliers, l'énergie électrostatique emmagasinée U décroît lorsque les deux condensateurs sont reliés en parallèle.

(b) Où apparaît l'énergie perdue ?

(c) Trouver les conditions dans lesquelles ils peuvent être reliés sans perte d'énergie.

Exercice 44.4

(a) Montrer que lorsqu'un dipôle de moment dipolaire $\boldsymbol{p}$ est placé dans un champ électrique $\boldsymbol{E}$, l'énergie électrostatique est donnée par

$$U = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}.$$

(b) Calculer le couple exercé sur le dipôle par le champ $\boldsymbol{E}$. Calculez le résultat directement et, également, en utilisant la relation énergétique précédente.

(c) L'énergie est-elle la même que si le dipôle était fabriqué en plaçant l'une après l'autre deux charges dans le champ ? Sinon, calculez la différence ; justifiez votre résultat physiquement.

Exercice 44.5 Montrer que les plaques d'un condensateur à plaques parallèles sur lesquelles il y a une charge Q s'attirent avec une force $F = Q^2/(2\epsilon_0 A)$, où A est l'aire des plaques.

Conseil : se pencher sur le travail nécessaire pour accroître la séparation des plaques de x à $x + dx$.

Exercice 44.6 Le méson π (ou pion) est une particule qui existe sous trois états de charge : il y a des pions positifs, négatifs et neutres. La masse (multiplée par c^2) des pions chargés est de 139,6 MeV alors que la masse des pions neutres est de 135,0 MeV. Dans un modèle du pion, la différence de masse est attribuée à une énergie électrostatique. Si l'on suppose en outre que les pions sont représentés par des sphères et que la charge d'un pion est uniformément répartie dans cette sphère, on peut calculer le « rayon » d'un pion. Dans ces hypothèses, calculer le rayon r_π d'un pion. (Votre résultat est-il compatible avec d'autres estimations des dimensions nucléaires ?)

Exercice 44.7 Une coquille métallique sphérique de rayon interne a et de rayon externe b est centrée à l'origine. Elle a un petit trou percé en un point.

(a) S'il n'y a pas de charge sur la coquille, combien de travail W_a est nécessaire pour amener une charge q_1 de l'infini, au travers du trou, jusqu'à l'origine ?

(b) Quel travail W_b est nécessaire pour que la coquille ait une charge totale q_2 ?

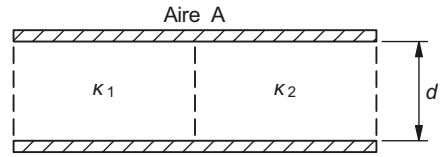
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

45. DIÉLECTRIQUES

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 1, Chap. 10.

Exercice 45.1 Un condensateur à plaques parallèles est rempli comme sur la figure 45.1 avec deux diélectriques de même taille mais de constantes diélectriques différentes κ_1 et κ_2.

Figure 45.1



(a) Avec un argument simple (en ignorant les effets de bord) montrer que la capacité est donnée par

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}\,\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2},$$

où A est l'aire des plaques et d leur séparation.

(b) Donner une démonstration plus approfondie en utilisant l'équation (10.26) du volume II,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\kappa \boldsymbol{E}) = \rho_{\text{free}}/\epsilon_0.$$

(c) Y a-t-il une autre démonstration en utilisant la densité d'énergie donnée dans l'Eq. (8.30) du Vol. II ?

Note : lorsque l'espace est rempli d'un diélectrique, la densité d'énergie électrostatique est $u = \kappa\epsilon_0 E^2/2$.

Exercice 45.2 Un condensateur a des plaques parallèles carrées de 20 cm de côté, séparées de 1 cm. Il est chargé à une différence de potentiel de 10 V puis déconnecté de la batterie. Une grande tranche carrée de diélectrique légèrement moins épaisse que 1 cm est insérée entre les plaques de façon qu'une aire du condensateur de 10 cm par 20 cm est remplie de diélectrique, comme sur la figure 45.2. La constante diélectrique est de 4.

Figure 45.2

(a) Quelle est la grandeur de la force attractive F entre les plaques ?

(b) Quel est le moment dipolaire par unité de volume P dans le diélectrique bien à l'intérieur des plaques (de façon à pouvoir négliger les effets de bord) ?

(c) On suppose que la tranche de diélectrique est faite d'un matériau de constante diélectrique 4,0 qui renferme une densité uniforme de petites sphères métalliques. Est-ce que la différence de potentiel entre les plaques est plus grande, plus petite ou tout simplement la même que celle du diélectrique initial homogène ?

Exercice 45.3 Un condensateur à plaques parallèles de séparation d a une capacité C_0 dans l'air. Un bloc isolant de constante diélectrique κ, d'épaisseur $t < d$, et d'aire égale à celle des plaques est inséré dans le condensateur, ses faces étant parallèles à celles du condensateur. En négligeant les effets de bord, montrer que la capacité est maintenant

$$C = \frac{C_0}{1 - ((\kappa - 1)/\kappa)(t/d)}.$$

Exercice 45.4 Une sphère métallique isolée de rayon a a une charge libre Q sur sa surface. La sphère est couverte d'une couche diélectrique uniforme de rayon interne a, de rayon externe b, et de constante diélectrique κ.

(a) Calculer la charge superficielle de polarisation σ_{pol} sur les surfaces interne et externe du diélectrique.

(b) Quelle est la densité de charge volumique de polarisation ρ_{pol} à l'intérieur du diélectrique ?

Exercice 45.5 Un condensateur à plaques parallèles est relié à une batterie qui maintient une différence de potentiel V entre ses plaques. Une tranche de constante diélectrique κ est insérée entre les plaques, remplissant complètement l'espace les séparant.

(a) Montrer que la batterie fournit un travail $W_{\text{batt}} = qV(\kappa - 1)$ pendant le processus d'insertion, si q est la charge sur les plaques du condensateur avant l'introduction de la tranche.

(b) Combien de travail $W_{\text{méc}}$ est effectué par les forces mécaniques sur la tranche lorsqu'elle est insérée entre les plaques ? Ce travail est il effectué sur l'opérateur qui insère la tranche ou par lui ?

(c) Si, au lieu d'insérer un diélectrique entre les plaques du condensateur, on change la séparation des plaques jusqu'à ce que la capacité soit la même que lors de l'insertion du diélectrique, quelle est alors la relation entre W_{batt} et $W_{\text{méc}}$?

Exercice 45.6 Deux tuyaux métalliques coaxiaux de rayons a et b ($a < b$) sont abaissés dans un grand bain d'huile. Si un voltage V est appliqué entre les tuyaux, montrer que le niveau d'huile entre les tuyaux s'élève de

$$H = \frac{V^2(\kappa - 1)\epsilon_0}{\ln(b/a)\rho(b^2 - a^2)g},$$

où κ est la constante diélectrique et ρ la densité de l'huile.

Exercice 45.7 Montrer que lorsqu'une ligne de champ électrique traverse une surface séparant deux diélectriques de constantes κ_1 et κ_2 elle fait des angles θ_1 et θ_2 avec la normale à la surface séparant les deux milieux donnés par la relation $\kappa_1 \cot\theta_1 = \kappa_2 \cot\theta_2$.

Conseil : supposer qu'il n'y a pas de charges libres sur la surface.

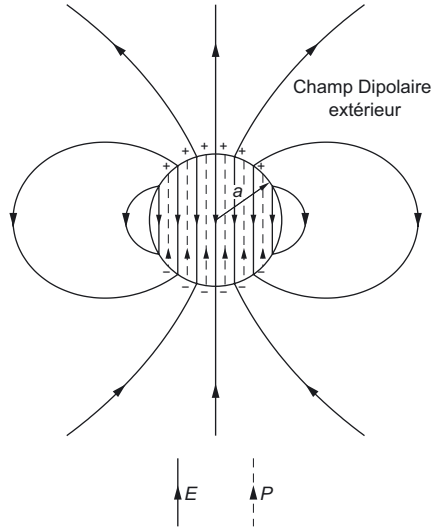
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

46. À L'INTÉRIEUR DES DIÉLECTRIQUES

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 1, Chap. 11.

Exercice 46.1 On considère une sphère d'un matériau diélectrique de rayon a uniformément polarisée avec une densité volumique de polarisation $\boldsymbol{P}$ comme sur la figure 46.1. Trouver le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

Figure 46.1



Exercice 46.2 La constante diélectrique de l'hélium à 0 °C et une pression de 1 atm est 1,000074. Trouver le moment dipolaire p induit dans chaque atome d'hélium lorsque le gaz se trouve dans un champ électrique d'intensité $100\,\mathrm{V\,m^{-1}}$.

Exercice 46.3 La vapeur d'eau est un gaz polaire dont la constante diélectrique a une dépendance en température importante. La table suivante donne les mesures expérimentales de cet effet.

T (K)	P (cmHg)	$(\kappa - 1) \times 10^5$
393	56,49	400,2
423	60,93	371,7
453	65,34	348,8
483	69,75	328,7

(a) En supposant que la vapeur d'eau obéit à la loi des gaz parfaits, calculer la polarisabilité moléculaire α en fonction de l'inverse de la température $1/T$ et dessinez-la.

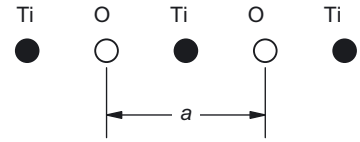
(b) D'après la pente de la courbe, déduire une valeur du moment dipolaire permanent p_0 de la molécule H_2O.

Exercice 46.4

(a) On considère un système de deux atomes séparés d'une distance fixe a, chaque atome ayant une polarisabilité α. Trouver la relation entre a et α pour qu'un tel système soit ferroélectrique.

(b) Si vous trouvez la question précédente trop facile, considérez une file d'atomes d'oxygène, espacés régulièrement d'une distance a les uns des autres. Supposons qu'il y ait un atome de titane à mi-chemin entre les atomes successifs d'oxygène, comme sur la figure 46.2. Soit α_O la polarisabilité de l'oxygène et α_T celle du titane. Trouver les conditions sur α_O et α_T pour que ce système soit ferroélectrique.

Figure 46.2



Note :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1.20$$

Exercice 46.5 Un matériau « diélectrique » est constitué d'un grand nombre de sphères en laiton de diamètre d, de centres espacés de $3d$, dans un réseau régulier. En supposant que chaque sphère n'est influencée que par le champ électrique extérieur appliqué (c'est-à-dire en négligeant les effets mutuels des sphères ou une redistribution des charges induites), trouver la constante diélectrique κ de ce matériau.

47. Analogues électrostatiques

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 1, Chap. 12.

Exercice 47.1 Un anneau de rayon a est fait d'un fil de cuivre de diamètre b beaucoup plus petit que a. L'anneau est incorporé au centre d'une sphère en plastique dont le rayon R est *très* grand comparé à celui a de l'anneau. Un champ magnétique alternatif induit un courant dans l'anneau. Le courant chauffe le fil, créant ainsi de l'énergie thermique à un taux de W (joules par seconde). La température en dehors de la grande sphère est T_R. Dans l'état stationnaire du système, quelle est la température T_0 au centre de l'anneau, si la conductibilité thermique du plastique est K ?

Exercice 47.2 Dans l'exercice 41.10, un modèle thermique simple de la Terre a été considéré. Un autre (encore une fois très simplifié) est qu'à l'intérieur de la Terre il existe un cœur sphérique de très grande conductibilité. Trouver quel doit être le rayon a de ce cœur si sa température est de 2500 °C, si la conductibilité thermique de la Terre

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

l'entourant est de 0,03 W/cm K, et si 8×10^{20} joules d'énergie thermique sont évacués par la Terre chaque année.

Exercice 47.3

(a) Dans certaines conditions géométriques et physiques, il est commode d'écrire le potentiel sous la forme $\varphi = f(r)\cos\theta = f(r)(z/r)$, où $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. (Cette forme a été utilisée par exemple au chapitre 12 du volume II pour résoudre le problème de l'écoulement de « l'eau sèche » autour d'une sphère.) Si l'on développe $f(r)$ en série entière

$$f(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n r^n,$$

seuls deux des coefficients b_n sont non nuls si φ satisfait l'équation de Laplace. Trouvez-les.

(b) Pour le problème analogue à deux dimensions, le potentiel peut s'écrire sous la forme

$$\varphi = g(\rho)\cos\theta = g(\rho)\,\frac{z}{\rho},$$

avec

$$g(\rho) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \rho^n,$$

où $\rho^2 = y^2 + z^2$. Trouver quelles valeurs de c_n sont non nulles si φ satisfait l'équation de Laplace.

Note : Faire les calculs en coordonnées cartésiennes.

Exercice 47.4 Deux minces tuyaux d'eau sont séparés d'une distance d l'un de l'autre et traversent perpendiculairement un grand mur d'épaisseur t, comme sur la figure 47.1. La conductibilité thermique du mur est K et la température loin des tuyaux est T_0. De l'eau chaude qui donne $+W$ watts aux murs coule dans le tuyau situé à $x = +d/2$ tandis que de l'eau froide qui absorbe W watts du mur coule dans l'autre tuyau. On considère que c'est un problème à deux dimensions et on néglige la taille finie des tuyaux. Trouver la température T_P en un point P situé à $x = 100d$, $y = 100d$. On suppose que $T_0 = 20\,^\circ$C, $d = 50$ cm, $K = 0{,}03$ W/cm K, $W = 200$ watts et $t = 10$ cm. Faire des approximations adaptées en donnant la réponse.

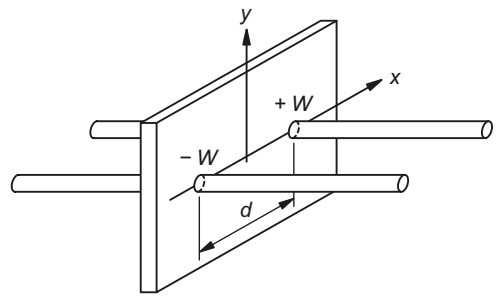


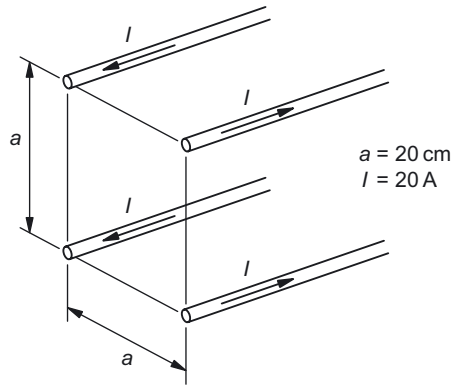
Figure 47.1

48. MAGNÉTOSTATIQUE

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 1, Chap. 13.

Exercice 48.1 Quatre long fils de cuivre sont parallèles, et forment, perpendiculairement, un carré de 20 cm de côté. Un courant de 20 amp est établi dans chaque fil dans les directions montrées sur la figure 48.1.

Figure 48.1



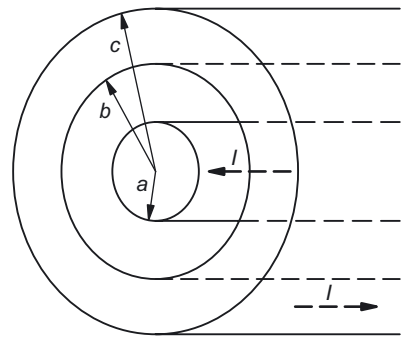
(a) Quelles sont la grandeur et la direction du champ magnétique $\boldsymbol{B}$ au centre du carré ?

(b) Quelle est la grandeur et la force par mètre $\boldsymbol{F}$ qui agit sur le fil du bas à gauche ?

Exercice 48.2 Un long cylindre diélectrique solide de rayon a a une polarisation *permanente* qui est partout dirigée de façon radiale vers l'extérieur, avec une grandeur proportionnelle à la distance par rapport à l'axe du cylindre, c'est-à-dire que le moment dipolaire par unité de volume est $\boldsymbol{P} = P_0\,\boldsymbol{r}/2$. Le cylindre tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de son axe. Quel est le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ sur l'axe du cylindre, en des points éloignés des extrémités ?

Exercice 48.3 Un long câble coaxial comporte deux conducteurs concentriques dont les dimensions sont indiquées sur la figure 48.2. Il y a, dans les conducteurs, des courants égaux et opposés I. On peut faire l'hypothèse que les courants sont distribués uniformément dans les conducteurs.

Figure 48.2



© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(a) Trouver le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ à une distance radiale r à l'intérieure du conducteur ($r < a$).

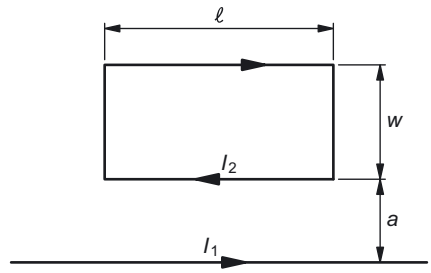
(b) Trouver $\boldsymbol{B}$ entre les deux conducteurs ($a < r < b$).

(c) Trouver $\boldsymbol{B}$ à l'intérieur du conducteur externe ($b < r < c$).

(d) Trouver $\boldsymbol{B}$ à l'extérieur du câble ($r > c$).

Exercice 48.4 Un long fil transporte le courant I_1, tandis qu'une boucle rectangulaire de fil de longueur et de largeur l et w transporte le courant I_2. Le fil est dans le plan de la boucle, parallèle à sa longueur, à une distance a, comme sur la figure 48.3.

Figure 48.3



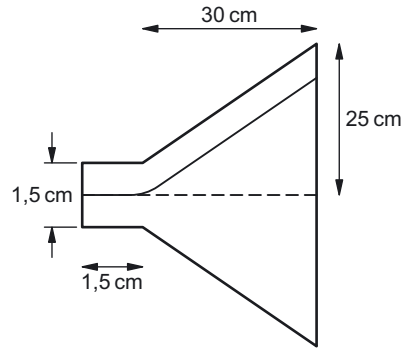
(a) Quelle est la force $\boldsymbol{F}_{\text{boucle}}$ sur la boucle ?

(b) Quelle est la force $\boldsymbol{F}_{\text{fil}}$ sur le fil ?

(c) Quel est le couple $\boldsymbol{\tau}_{\text{boucle}}$ sur la boucle ?

Exercice 48.5 L'image dans un tube de télévision est engendrée en déviant le faisceau d'électrons avec un champ magnétique qui provient d'un ensemble de bobines disposées autour du début du tube. Le électrons sont émis typiquement d'un canon (avant déviation) avec une énergie d'environ 3,0 keV ; ils sont ensuite accélérés après avoir été déviés.

Figure 48.4



En utilisant les dimensions de la figure 48.4,

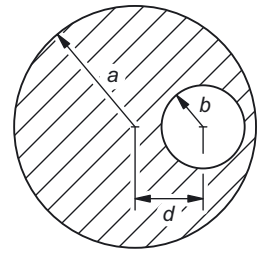
(a) estimer la grandeur du champ magnétique $\boldsymbol{B}$ sur le faisceau d'électrons au moment de la déviation maximum.

(b) estimer le nombre d'ampères-tours nI dans la bobine au même instant.

On peut négliger l'accélération après déviation en faisant cette estimation. (Dans quel sens votre réponse changerait-elle si vous la preniez en compte ?)

Exercice 48.6 Une très longue tige conductrice de rayon a a un trou décentré de rayon b d'axe parallèle mais décalé d'une distance d de l'axe de la tige comme sur la figure 48.5. Une densité de courant uniforme $+j$ traverse le conducteur. Quelle est la grandeur du champ magnétique sur l'axe du trou, loin des bords ?

Figure 48.5

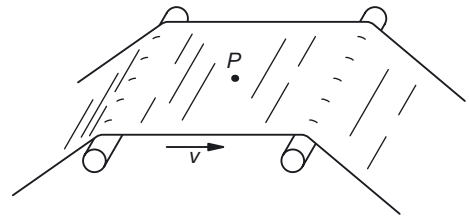


49. Le champ magnétique dans diverses situations

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 1, Chap. 14.

Exercice 49.1 Dans une usine de matières plastiques, une bande large de plastique fin passe par les rouleaux successifs à la vitesse v, comme sur la figure 49.1. Dans le processus de fabrication, le film de plastique a accumulé une charge électrique de surface uniforme σ.

Figure 49.1



(a) Quel est le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ près de la surface de la bande au milieu d'un long trajet plat ? (Près du point P de la figure.)

(b) Quel est le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ dans la même région ?

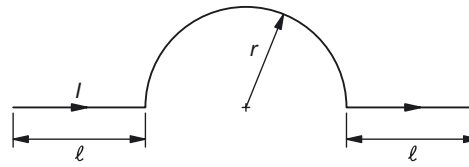
Exercice 49.2 Un fil métallique de la forme montrée sur la figure 49.2 transporte un courant I. Quel est le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ au centre du demi-cercle, provenant

(a) de chaque segment droit de longueur l ?

(b) du segment semi-circulaire de longueur πr ?

(c) du fil tout entier ?

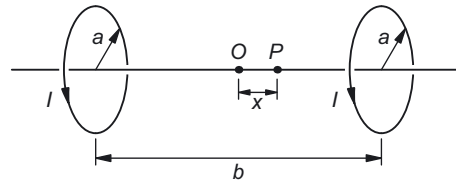
Figure 49.2



© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 49.3 Dans les structures magnétiques utilisées en pratique, des champs magnétiques uniformes sont fréquemment nécessaires. L'uniformité du champ produit par une bobine de Helmholtz ou par deux boucles coaxiales qui transportent des courants dans la même direction, sont une de leurs caractéristiques principales. Supposant que les boucles ont un rayon a, que leur axe est le long de l'axe x, qu'elles transportent un courant I chacune, et qu'elles sont séparées d'une distance b, comme sur la figure 49.3.

Figure 49.3



(a) Trouver le champ magnétique en un point P sur l'axe des boucles et à une distance x du milieu O.

(b) Développer l'expression du champ en série entière en retenant les termes jusqu'à l'ordre x^2.

(c) Quelle doit être la relation entre a et b pour que les termes en x^2 s'annulent ? Quel en est le sens ?

(d) Montrer que le champ créé par les bobines dans les conditions précédentes est donné par

$$B_x = \frac{8I}{5^{3/2} a \epsilon_0 c^2}.$$

Exercice 49.4 Une boucle de fil de côté a porte un courant I.

(a) En utilisant la loi de Biot et Savart montrer que la grandeur du champ en un point sur l'axe et à une distance x du centre est donnée par

$$B = \frac{4a^2 I}{\pi \epsilon_0 c^2 (4x^2 + a^2)(4x^2 + 2a^2)^{1/2}}.$$

(b) Retrouver ce résultat en utilisant le potentiel vecteur.

Conseil : laisser le potentiel vecteur sous sa forme intégrale et utiliser

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x,y)\, dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\, dy,$$
$$\lim_{x \to c} \int f(x,y)\, dy = \int \left[\lim_{x \to c} f(x,y) \right] dy.$$

Exercice 49.5 Utiliser le potentiel vecteur pour calculer le champ magnétique en tout point de l'axe d'une boucle circulaire de rayon a parcourue par un courant I.

Exercice 49.6 Soit une sphère conductrice de rayon a qui est élevée à un potentiel V. Si la sphère est mise en rotation autour d'un axe avec une vitesse angulaire ω, montrer que le champ magnétique extérieur correspond à celui d'un dipôle de moment

$$\mu = \epsilon_0 \omega V \left(\frac{4}{3}\pi a^3\right).$$

Montrer également que le champ à l'intérieur est donné par

$$B_{\text{int}} = \frac{2\omega V}{3c^2}.$$

Ces résultats sont exacts partout, à l'intérieur et à l'extérieur. Si vous ne pouvez pas le démontrer, montrer le premier résultat pour des distances très supérieures à a, et le second au centre.

Exercice 49.7 Il a été montré que la rotation de la Terre pourrait être mesurée en mesurant la différence de potentiel entre le centre et le bord d'un cylindre conducteur chargé placé au Pôle Nord, et dont l'axe serait dirigé vers le centre de la Terre.

(a) En supposant que le cylindre est très long par rapport à son rayon et que les mesures sont effectuées très près du centre, si bien que les effets de bord peuvent être négligés, montrer que la différence de potentiel peut s'écrire sous la forme

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{v}{c}\right)^2,$$

où v est la vitesse d'un point sur le bord externe du cylindre et λ la charge de surface par unité de longueur.

(b) Voyez si vous pouvez imaginer des paramètres raisonnables pour un équipement destiné à faire la mesure de cet effet.

Note : supposez que la plus petite différence de potentiel que l'on puisse mesurer est de l'ordre de 10^{-6} volts et que la grandeur maximum du champ électrique dans le vide est environ de 10^8 volts par mètre.

50. Le potentiel vecteur

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 1, Chap. 15.

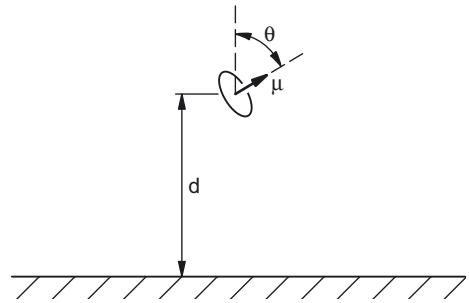
Exercice 50.1 Un métal supraconducteur a la propriété qu'en son intérieur, à la fois $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{E}$ sont nuls.

(a) Pour le champ $\boldsymbol{E}$ nous avons vu que la condition aux limites sur la surface d'un supraconducteur est que $\boldsymbol{E}$ doit être normal à la surface, ou encore que sa composante tangentielle doit être nulle. Quelle est la condition aux limites analogue pour le champ magnétique $\boldsymbol{B}$?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Une petite boucle de courant avec son moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ orienté à un angle θ de la normale, est située à une distance d d'une feuille infinie supraconductrice, comme sur la figure 50.1.

Figure 50.1



(b) Décrire en quelques phrases une méthode permettant de trouver le champ magnétique partout, en supposant que vous sachiez déjà ce qu'est le champ d'un dipôle magnétique.

(c) Trouver le couple $\boldsymbol{\tau}$ sur le dipôle en fonction de l'angle θ.

(d) En déduire les angles d'équilibre. Lesquels sont stables, lesquels sont instables ?

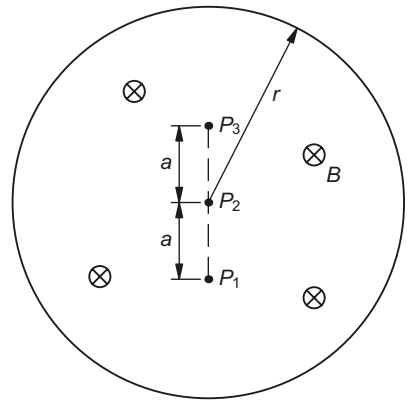
(e) Trouver la force, en fonction de θ, se dirigeant vers le supraconducteur ou en sens inverse.

51. Les lois de l'induction

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 1, Chap 17.

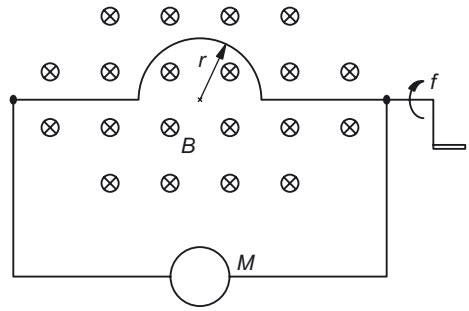
Exercice 51.1 La figure 51.1 montre un champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B}$ confiné dans un volume cylindrique de rayon r. Le champ $\boldsymbol{B}$ décroît en grandeur à un taux constant de 100 gauss/s. Quelle est l'accélération instantanée (direction et grandeur) subie par un électron placé en P_1, en P_2, et en P_3 ? On supposera que a vaut 5,0 cm.

Figure 51.1



Exercice 51.2 Un fil raide courbé en un demi-cercle de rayon r tourne à une fréquence angulaire f dans un champ magnétique uniforme comme sur la figure 51.2. Si la résistance interne de l'appareil de mesure M est R_M et que le reste du circuit a une résistance négligeable,

Figure 51.2



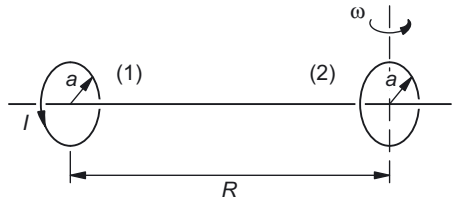
(a) Quelles sont l'amplitude V_0 et la fréquence ω_V de la force électromotrice induite ?

(b) Quelles sont l'amplitude I_0 et la fréquence ω_I du courant induit ?

Note : supposer que le courant est très faible si bien que le champ créé par le courant est faible devant $\boldsymbol{B}$.

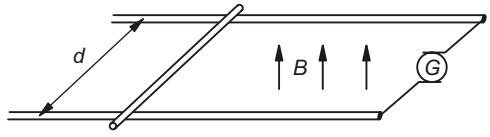
Exercice 51.3 Une petite boucle circulaire (1) de rayon a est parcourue par un courant continu I. Une autre boucle (2), également de rayon a, est placée sur l'axe central de la première boucle à une distance R, avec $R \gg a$. Les plans des deux boucles sont parallèles, comme sur la figure 51.3. La boucle (2) tourne à la vitesse angulaire ω autour d'un de ses diamètres. Si le circuit de la boucle (2) est ouvert si bien qu'aucun courant n'y passe, quelle est la fem $\mathcal{E}$ engendrée ?

Figure 51.3



Exercice 51.4 Un fil métallique de masse m glisse sans frottements sur deux rails parallèles à une distance d l'un de l'autre, comme sur la figure 51.4. Les rails sont dans un champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B}$ vertical.

Figure 51.4



(a) Un courant constant I venant du générateur G sur un des rails, parcourt le rail, le fil et l'autre rail. Trouver la vitesse $\boldsymbol{v}(t)$ (valeur et direction) du fil en fonction du temps en supposant qu'il est au repos à $t = 0$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(b) Le générateur est remplacé par une batterie de fem constante $\mathcal{E}$. La vitesse du fil approche maintenant une valeur finale constante. Quelle est cette vitesse finale ? Comment, en fonction du temps, la vitesse v approche-t-elle cette valeur ?

Conseil : on peut supposer que la résistance interne du circuit est seulement celle de la batterie, égale à R.

(c) Quel est le courant I, dans la question précédente, lorsque la vitesse finale a été atteinte ?

Note : supposer que le champ dû au courant I est très inférieur au champ $\boldsymbol{B}$.

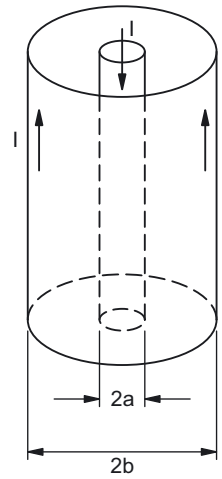
Exercice 51.5 Un circuit contient deux bobines d'inductance $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ respectivement, reliées en série. Ces bobines ont une inductance mutuelle $\mathcal{M}$.

(a) Trouver l'inductance résultante $\mathcal{L}$ du circuit.

(b) Si les câbles d'une bobine sont inversés, comment l'inductance changera-t-elle ?

Exercice 51.6 Un câble coaxial est constitué d'un fil entouré d'un cylindre coaxial qui porte le courant de retour. Le fil interne a un rayon a et la partie externe un rayon b, comme sur la figure 51.5.

Figure 51.5



(a) Montrer que si le courant passant dans le fil interne se propage à la surface du fil, la self-inductance par unité de longueur d'un tel câble est

$$\mathcal{L} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c^2}.$$

(b) Calculer la self-inductance par unité de longueur si le courant est distribué uniformément dans le fil central. Comparer les résultats pour voir l'importance de l'hypothèse sur la distribution du courant.

Exercice 51.7 Une bobine toroïdale de N tours a une section transverse carrée, chaque côté du carré étant d'une longueur a. Le tore a un rayon interne b (et un rayon externe $b + a$).

(a) Montrer que la self-inductance est

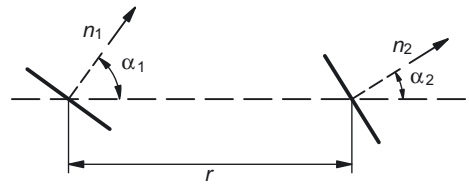
$$\mathcal{L} = \frac{N^2 a}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

(b) Exprimer dans des termes semblables l'inductance mutuelle $\mathcal{M}$ du système formé par la bobine et un fil très long suivant l'axe de symétrie de la bobine. On supposera que les conducteurs qui ferment le circuit dont fait partie le fil long sont situés loin de la bobine, de façon que leur influence puisse être négligée.

(c) Trouver le rapport de la self-inductance de la bobine et de l'inductance mutuelle du système.

Exercice 51.8 Deux boucles de courant planes, chacune d'aire A et parcourues par un courant I, sont à une distance r l'une de l'autre. Les normales aux boucles, $\boldsymbol{n}_1$ et $\boldsymbol{n}_2$ font des angles α_1 et α_2 avec la droite joignant les boucles. Les vecteurs $\boldsymbol{n}_1$ et $\boldsymbol{n}_2$ et la droite joignant les centres sont coplanaires, comme sur la figure 51.6.

Figure 51.6



(a) Trouver l'inductance mutuelle $\mathcal{M}$ de ce système de boucles de courant. On supposera que le rayon de chaque boucle est beaucoup plus petit que leur distance.

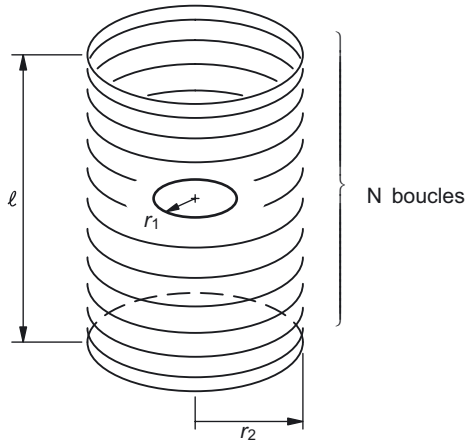
(b) En utilisant cette expression de $\mathcal{M}$, trouver la grandeur et la direction de la force $\boldsymbol{F}$ entre les deux boucles.

(c) De quelle façon la force changerait-elle si le courant était renversé dans l'une des boucles ou dans les deux ?

Exercice 51.9 On considère une bobine avec une boucle de rayon r_1 centrée et de même axe qu'un solénoïde de longueur l fait de N boucles de rayon r_2 où $r_2 \gg r_1$, comme sur la figure 51.7. Si la boucle est nommée « circuit 1 » et le solénoïde « circuit 2 », trouver les deux mutuelles inductances $\mathcal{M}_{12}$ et $\mathcal{M}_{21}$.

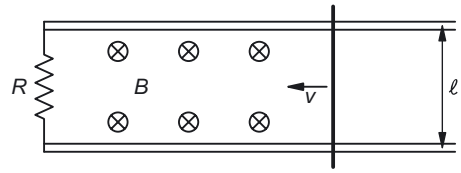
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Figure 51.7



Exercice 51.10 Un fil se déplace à une vitesse v en étant en contact avec deux rails reliés à une extrémité par une résistance R, comme sur la figure 51.8. Il y a un champ uniforme $\boldsymbol{B}$ (perpendiculaire à la figure et pointant vers elle).

Figure 51.8



(a) Si $v = 100\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$, $l = 10\,\mathrm{cm}$, $B = 0{,}1\,\mathrm{Wb\,m^{-2}}$ et $R = 10\,\Omega$, quel est le courant I dans R ? (On négligera la champ créé par le courant).

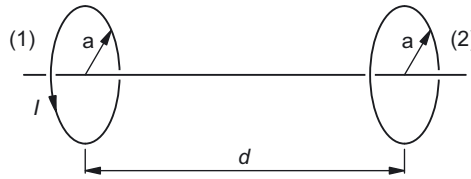
(b) Discuter comment votre estimation du courant induit changerait si le champ provenant du courant induit n'était pas négligé.

(c) Discuter comment vos réponses changeraient si l'aimant qui produit $\boldsymbol{B}$ se déplaçait à la même vitesse v que le fil.

(d) La self-inductance du circuit dans lequel passe le courant induit s'accroît-elle, diminue-t-elle ou reste-t-elle la même en fonction du temps ?

Exercice 51.11 On considère deux boucles coaxiales de rayon a séparées d'une distance d ; $d \gg a$. Un courant $I = K_0 t^2$ est envoyé dans une des boucles (1), comme sur la figure 51.9 ; la résistance de l'autre boucle (2) est R.

Figure 51.9



(a) En négligeant la self-inductance, quel est le couple τ sur la boucle (2) ?

(b) Montrer que, si on néglige la self-inductance, la force sur la boucle (2) est

$$F = \frac{24\pi^4 a^8 K_0^2 t^3}{(4\pi\epsilon_0 c^2)^2 d^7 R}.$$

(c) Quelle est la direction de la force ?

(d) De quelle façon (qualitativement) est-ce que la véritable force et le véritable couple diffèrent de votre résultat, c'est-à-dire comment la self-inductance affecte le couple et la force ?

(e) Expliquer ce qui se passerait dans les questions (a) et (b) ci-dessus si la boucle (2) était tournée de 90° autour d'un axe perpendiculaire à l'axe commun des boucles.

52. Solution des équations de Maxwell dans le vide

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 1, Chap. 20.

Exercice 52.1 Il est parfois commode de travailler avec des solutions complexes des équations différentielles.

(a) Si l'on suppose que les champs varient de façon sinusoïdale dans le temps et dans la variable d'espace x (pas de dépendance en y ou z), montrer que chaque composante de, par exemple,

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{+i(\omega t - kx)},$$

satisfait l'équation d'ondes. (On se souviendra que le véritable champ s'obtient en prenant la partie réelle de cette expression.)

(b) Persuadez-vous que la partie réelle de $\boldsymbol{E}$ correspond à une onde plane se propageant le long de l'axe x. Dans quelle direction ?

(c) Montrer que l'opération $\boldsymbol{\nabla}$ appliquée à une fonction comme celle de la question (a) devient

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} = \boldsymbol{e}_x(-ik),$$

où $\boldsymbol{e}_x$ est un vecteur unitaire le long de l'axe x et que i est $\sqrt{-1}$; autrement dit, nous pouvons remplacer l'opération $\boldsymbol{\nabla}$ par une simple multiplication.

(d) Quelle proposition semblable pouvez-vous faire à propos de la dérivée temporelle d'une fonction comme celle de la partie (a) ?

(e) En utilisant les résultats précédents, écrire comment les équations de Maxwell se présentent lorsqu'elles s'appliquent à des champs qui varient de façon sinusoïdale en x et t. Quelle relation doit exister entre k et ω ?

(f) Si le champ a la forme $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{+i(\omega t + kx)}$ comment vos résultats sont-ils modifiés ?

Exercice 52.2 Une onde plane électromagnétique de fréquence ω est réfléchie par un miroir qui se déplace à une vitesse v dans la même direction que l'onde.

(a) En utilisant les équations de Maxwell, calculer la fréquence ω' de l'onde réfléchie vue par un observateur au repos.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(b) Comparer ce résultat avec celui obtenu en section 34-6 du volume I en utilisant la relativité.

53. Solution des équations de Maxwell avec des courants et des charges

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 1, Chap. 21.

Exercice 53.1 Faites, dans tous ses détails, la démonstration de l'équation (21.26) du volume II.

Exercice 53.2 L'équation (21.1) du volume II donne une équation permettant de calculer le champ électrique dû à des charges en mouvement. Considérons un dipôle fait d'une charge positive et d'une charge négative qui oscillent autour de l'origine le long de l'axe z, comme sur la figure 53.1 ; le mouvement de la charge positive est $z_+ = (d/2)\cos\omega t$ celui de la charge négative $z_- = -(d/2)\cos\omega t$. Le moment dipolaire est défini comme étant $\boldsymbol{p} = d\cos\omega t\,\boldsymbol{e}_z$. Montrer que les équations précédentes permettent de calculer tout le champ du dipôle.

$$E_\varphi = 0,$$

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\sin\theta\left[\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r}+\frac{1}{r^3}\right)\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\frac{\omega}{cr^2}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right],$$

$$E_r = \frac{p}{2\pi\epsilon_0}\cos\theta\left[\frac{1}{r^3}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\frac{\omega}{cr^2}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right].$$

On supposera que le point P est à une distance $r \gg d$ du dipôle.

Conseils : $\boldsymbol{e}_{r_+} \approx +\boldsymbol{e}_r$, $d(\boldsymbol{e}_{r_+})/dt$ et $d^2(\boldsymbol{e}_{r_+})/dt^2$ sont des vecteurs presque dans la direction $\boldsymbol{e}_\theta$.

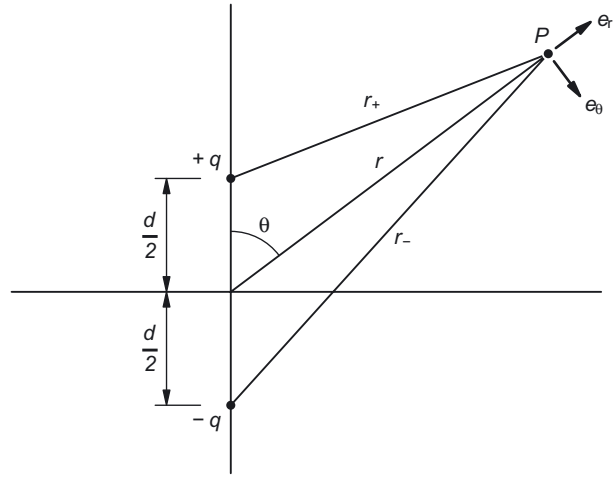
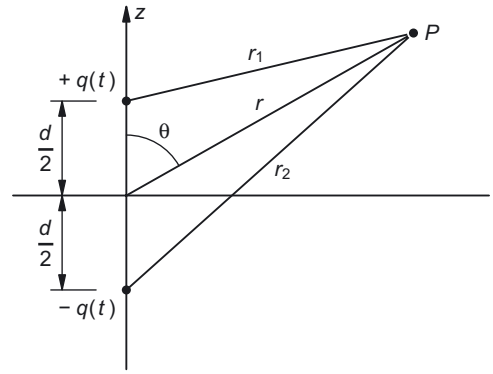


Figure 53.1

Exercice 53.3 À partir de la symétrie des équations de Maxwell et de la forme des champs électrique et magnétique d'un dipôle oscillant[1], déduire le champ d'un dipôle magnétique oscillant. Le champ proche doit ressembler au champ créé par une petite boucle de courant de rayon a ($a \ll c/\omega$) et de courant $i = i_0 \cos \omega t$.

Exercice 53.4 Dans l'exercice 53.2, un dipôle oscillant a été construit à partir de deux charges en mouvement. Une autre façon de faire est la suivante : le dipôle est fait de deux balles conductrices reliées par un fil de longueur d. On établit dans le fil un courant oscillant qui donne une charge nette $\pm q(t)$ aux extrémités mais laisse le fil neutre ; $q(t)$ peut être représenté par $Q_0 e^{i\omega t}$.

Figure 53.2



En n'importe quel point P, à la distance $r \gg d$ du dipôle, comme sur la figure 53.2, l'intégrale du potentiel retardé donne une expression exacte pour ϕ,

$$\phi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\cos\omega(t - r_1/c)}{r_1} - \frac{\cos\omega(t - r_2/c)}{r_2}\right).$$

(a) En supposant que $\omega d/2c \ll 1$ montrer que

$$\phi \approx \frac{Q_0 d \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\frac{1}{r}\cos\omega(t - r/c) - \frac{\omega}{c}\sin\omega(t - r/c)\right).$$

(b) Montrer en outre que

$$A_z \approx -\frac{Q_0 \omega d \, \sin\omega(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}.$$

(c) Persuadez-vous que ces potentiels donnent les mêmes champs rayonnés électrique et magnétique (la partie des champs qui est proportionnelle à $1/r$) que ce qui a été trouvé précédemment.

Exercice 53.5 Une antenne utilisée à la fréquence $\omega = 2\pi c/\lambda$ est faite de deux câbles colinéaires chacun d'un quart de longueur d'onde de long. Elle est alimentée à leur

1. Le champ électrique d'un dipôle électrique oscillant a été donné dans l'exercice 53.2 ; le champ magnétique correspondant est obtenu en utilisant l'équation (21.1) du volume II : $c\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_{r'} \times \boldsymbol{E}$.

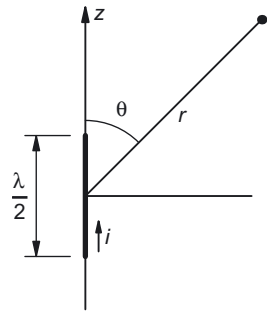
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

jonction par une tension sinusoïdale de fréquence appropriée. La distribution de courant dans les câbles est en très bonne approximation sinusoïdale,

$$i = -i_0 \sin \omega t \cos \frac{2\pi z}{\lambda},$$

avec $-\lambda/4 < z < \lambda/4$. (Comme sur la figure 53.3.) Pour trouver le rayonnement de cette antenne, on peut la considérer comme une superposition de plusieurs dipôles, chacun situé en un point z, de longueur Δz avec des intensités qui varient d'un dipôle à l'autre.

Figure 53.3



(a) Montrer que la bonne force de dipôle à utiliser est

$$\Delta p = \left(\frac{i_0}{\omega} \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \omega t\right) \Delta z.$$

(b) Montrer qu'à grande distance ($r \gg c/\omega$), le champ de l'antenne toute entière est

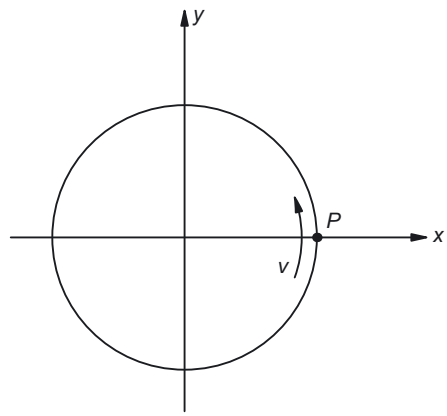
$$E_\theta = \frac{i_0}{2\pi\epsilon_0 c r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin\theta} \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$B_\varphi = \frac{1}{c} E_\theta$$

(c) Faites un croquis polaire simple de E_θ en fonction de θ, pour ce cas ainsi que pour celui d'un seul dipôle et comparez.

Exercice 53.6 Une particule de charge q se déplace sur un cercle de rayon a à une vitesse constante v, comme sur la figure 53.4.

Figure 53.4



Considérons les champs lorsque la particule est au point P :

(a) Trouver le potentiel ϕ au centre du cercle.

(b) Trouver le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ au centre.

(c) Déterminer le champ électrique $\boldsymbol{E}$ et le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ au centre en utilisant les potentiels et les équations (18.19) et (18.16) du volume II.

(d) Quelle est la direction du champ électrique par rapport au rayon vecteur au point P ?

(e) Calculer également ces champs en utilisant l'équation (21.1) du volume II.

Note : ce problème est relativiste. La vitesse v n'est pas nécessairement petite devant c.

54. Circuits en courant alternatif

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 2, Chap. 22.

Exercice 54.1 **Jeu**

Un réseau de forme cubique a des connexions à chaque coin et des résistances de 1 Ω sur chaque branche. Trouver la résistance effective entre tous les ensembles de connexions.

Exercice 54.2

(a) Trouver le courant I dans le circuit de la figure 54.1.

(b) Quel est le courant I s'il y a une inductance mutuelle $\mathcal{M}$ qui couple les deux inductances ?

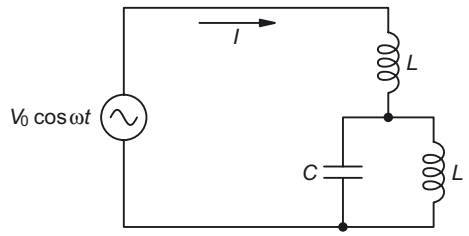


Figure 54.1

Exercice 54.3 Un réseau d'un système de haute fidélité est le circuit de la figure 54.2. La résistance effective des haut parleurs est R.

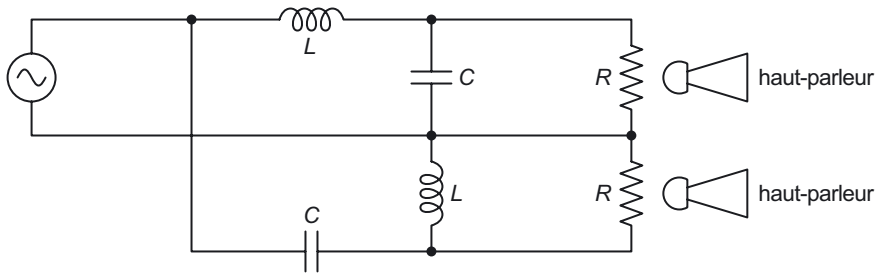


Figure 54.2

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(a) Montrer que si $R^2 = \mathcal{L}/2C$, l'impédance d'entrée Z (vue par le générateur) est purement une résistance égale à R.

(b) Montrer que la fréquence pour laquelle chaque haut parleur reçoit la moitié de la puissance totale est $\omega_c^2 = 1/\mathcal{L}C$.

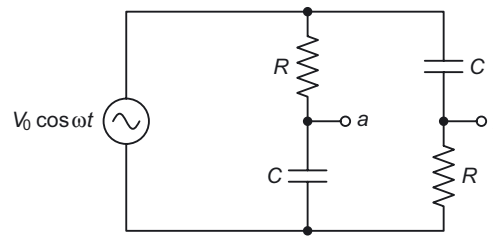
Exercice 54.4

(a) Montrer que pour le circuit de la figure 54.3 la différence de potentiel entre les points a et b a une valeur indépendante de ω.

(b) Dessiner une esquisse de la phase de ce potentiel en fonction de ω.

(c) Quel serait l'effet sur la valeur de la tension entre a–b et sur sa phase si la source avait une résistance interne de $R/10$?

Figure 54.3

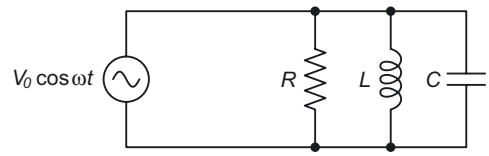


Exercice 54.5 Un circuit parallèle simple est le circuit de la figure 54.4.

(a) Dessiner l'amplitude du courant I en fonction de la fréquence ω pour des valeurs choisies de L, C, et R.

(b) Si $R \gg \sqrt{L/C}$ comparer le facteur de qualité[2] Q de ce circuit à celui d'un circuit contenant les mêmes éléments en série, mais où $R \ll \sqrt{L/C}$. Considérer spécifiquement le circuit parallèle avec $R = K\sqrt{L/C}$ et le circuit en série avec $R = (1/K)\sqrt{L/C}$.

Figure 54.4



Exercice 54.6 Le circuit de la figure 54.5 est un pont permettant de mesurer les inductances. Le générateur a une fem alternative à la fréquence ω. Lorsque le pont est équilibré, le courant dans le détecteur R_D est nul. Trouver $\mathcal{L}$ en fonction de R et C.

2. On rappelle que $Q = \omega_0/\Delta\omega$, où ω_0 est la fréquence de résonance et $\Delta\omega$ la largeur de la courbe de réponse en fréquence. (Voir le Chapitre 23 du volume I.) Pour le circuit parallèle on prendra $\Delta\omega$ entre les points où $|I| = \sqrt{2}I_{\min}$. Pour le circuit en série, on prendra $\Delta\omega$ entre les points où $|I| = I_{\max}/\sqrt{2}$.

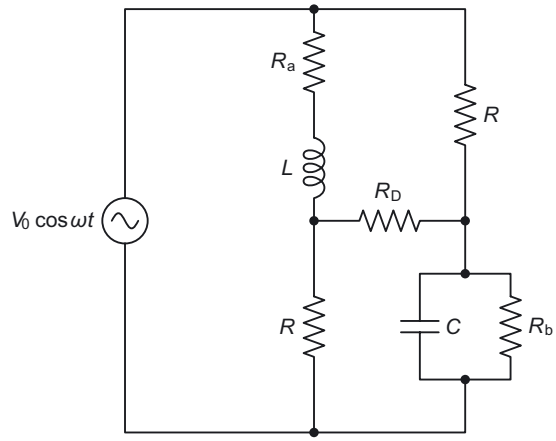


Figure 54.5

Exercice 54.7 Le circuit de la figure 54.6 est un pont de Wien, fréquemment employé dans les oscillateurs *RC*. On dit qu'il est équilibré lorsqu'aucun courant ne passe dans le détecteur *D*. Montrer que l'équilibre requiert que soient vérifiées simultanément les deux équations :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1},$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}.$$

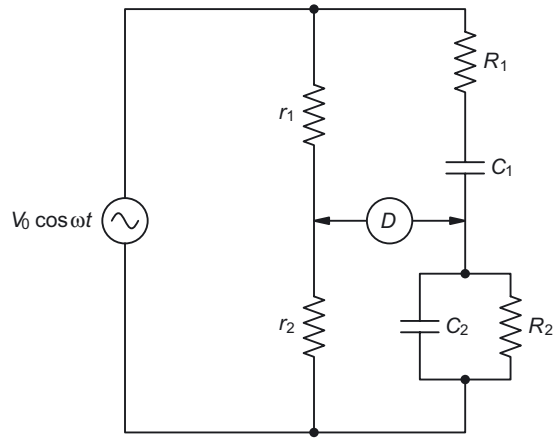


Figure 54.6

Exercice 54.8 Une source de tension $V(t) = V_0 \cos \omega t$ est appliquée au circuit de la figure 54.7.

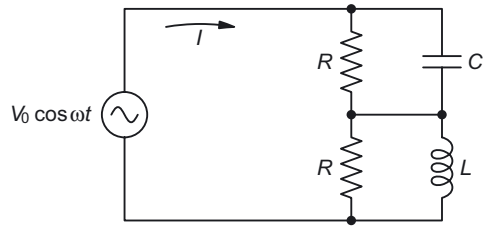


Figure 54.7

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(a) Montrer que si R, L, et C sont choisis de telle façon que $RC = L/R$ le courant I est indépendant de la fréquence.

(b) Quelle est la différence de phase ϕ entre le potentiel appliqué et la différence de potentiel au travers de la paire condensateur-résistance (pour $RC = L/R$) ?

Exercice 54.9 Le circuit de la figure 54.8 est arrangé de telle façon que la connexion au point P_3 peut être faite de n'importe quel point P_0, P_1, P_2, ..., P_n.

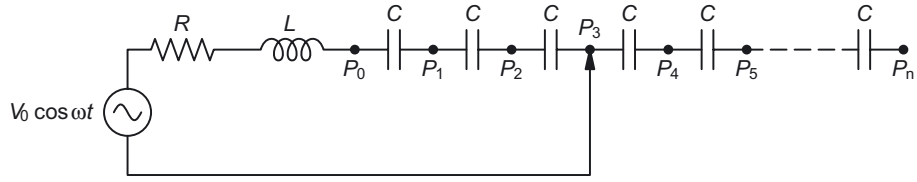


Figure 54.8

(a) Trouver une expression pour la puissance moyenne $\langle P \rangle$ dissipée dans R si la connexion est faite au point P_m, où $0 < m < n$.

(b) Si $R = 1.000\,\Omega$, $L = 10\,\mathrm{H}$, $C = 20\,\mu\mathrm{F}$, $\omega = 100\,\mathrm{rad/sec}$,

1. Pour quelle valeur de m la puissance est-elle maximum ?
2. Pour $m = 2$ et $V_0 = 100\,\mathrm{V}$, quels sont les tensions maximales $(V_{P_0P_2})_{\max}$ entre les points P_0 et P_2, et $(V_R)_{\max}$ dans R ?

Supplément : Transistors[3]

Un circuit de petit signal équivalent pour un transistor idéal est le circuit de la figure 54.9(a). La source I est une source de courant idéale et α est une constante caractéristique du transistor. Par « circuit de petit signal équivalent » on entend un circuit équivalent au transistor *seul* pour de petits changements de tension et de courants autour des tensions et courants alternatifs du transistor. Un tel circuit ne dit rien sur sur les tensions alternatives appropriées auxquelles le transistor doit être utilisé. Les résistances, qui sont essentielles pour fixer la valeur de ces tensions alternatives seront *omises* des figures de ce supplément et des exercices suivants, par simplicité.

Tout d'abord, nous allons montrer que les transistors sont essentiellement des amplificateurs de courant. Branchons une source de courant entre la base et l'émetteur et calculons le courant dans le collecteur, comme le circuit de la figure 54.9(b). En examinant le point A on voit que $i_E + i_B + i_C = 0$, et puisque $i_C = -\alpha i_E$, on a $-i_C/\alpha + i_B + i_C = 0$, ou

$$\frac{i_C}{i_B} = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

3. Ce supplément date des années 1980, il se peut que les développements de la microélectronique moderne le privent de sa saveur. NDT.

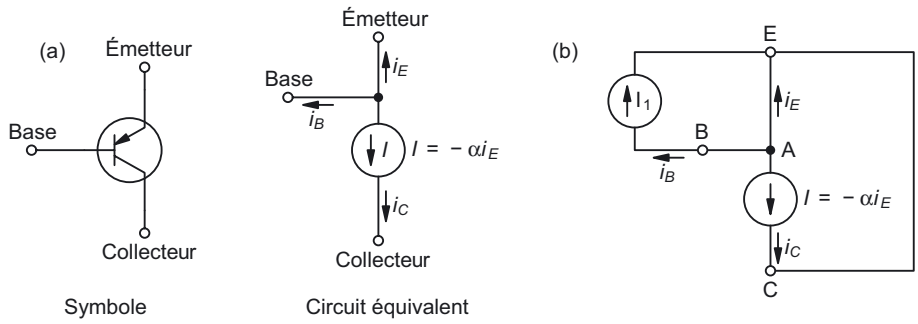


Figure 54.9

Ainsi, la quantité $\beta = \alpha/(1-\alpha)$ est le gain en courant entre le collecteur et la base lorsque l'émetteur est l'élément commun (cette configuration est appelée « l'émetteur de terre »). Typiquement α est voisin de 0,98 à 0,99 ; ainsi β est entre 50 et 100. Puisque α est si proche de l'unité, nous faisons l'approximation

$$\beta \approx \frac{1}{1-\alpha}.$$

Exercice 54.10 La configuration *suiveur d'émetteur* est montrée sur la partie (a) du circuit de la figure 54.10 et le circuit équivalent correspondant est montré sur la partie (b). R_L représente la charge conduite par le suiveur d'émetteur.

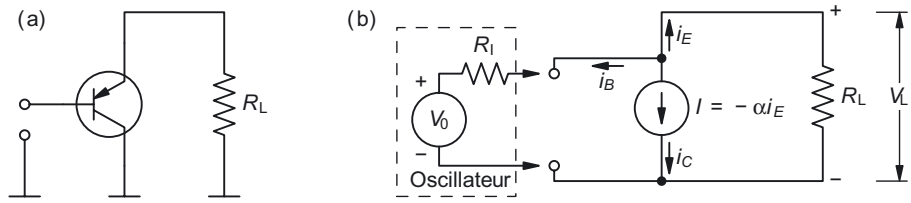


Figure 54.10

(a) Calculer la tension V_L au travers de la charge si un oscillateur sinusoïdal (représenté par la tension $V_0 \cos \omega t$ avec une résistance interne en série R_I) est connecté entre la base et le collecteur (voir la figure).

(b) Montrer que si $R_I/R_L \ll \beta$ le rapport V_L/V_0 est égal à un, indépendamment de β.

(c) Comparer V_L/V_0 au rapport V'_L/V'_0 lorsque l'oscillateur est connecté directement au travers de R_L, étant donné $R_I = 100\,\Omega$, $R_L = 10\,\Omega$ et $\beta = 100$.

(d) Remplacer R_L par un condensateur C_L. Calculer et dessiner $|V_L/V_0|$ en fonction de la fréquence dans le cas où l'oscillateur est connecté à C_L au travers du suiveur d'émetteur, et $|V'_L/V'_0|$ dans le cas où il est connecté directement par C_L. (Dessiner les deux rapports sur le même graphe et prendre $\beta \approx 10$.)

Exercice 54.11 La configuration *émetteur commun* est montrée avec son circuit équivalent sur le circuit de la figure 54.11(a).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(a) Calculer le rapport V_L/V_0.

(b) Comme on le verra, le rapport V_L/V_0 est proportionnel à β. C'est indésirable d'habitude car β dépend fortement de la température et varie fortement d'un transistor à l'autre. Au prix d'une perte de gain par adjonction d'une résistance R_E en série avec l'émetteur, comme sur le circuit de la figure 54.11(b), la dépendance en β est fortement réduite. Montrer que c'est le cas et que la condition pour que V_L/V_0 soit suffisamment indépendant de β est que $R_I/R_E \ll \beta$. (remarquer que $\alpha = 1/(1+1/\beta) \approx 1$, donc α dépend très faiblement de β. Ainsi, α est un paramètre stable pour les transistors.)

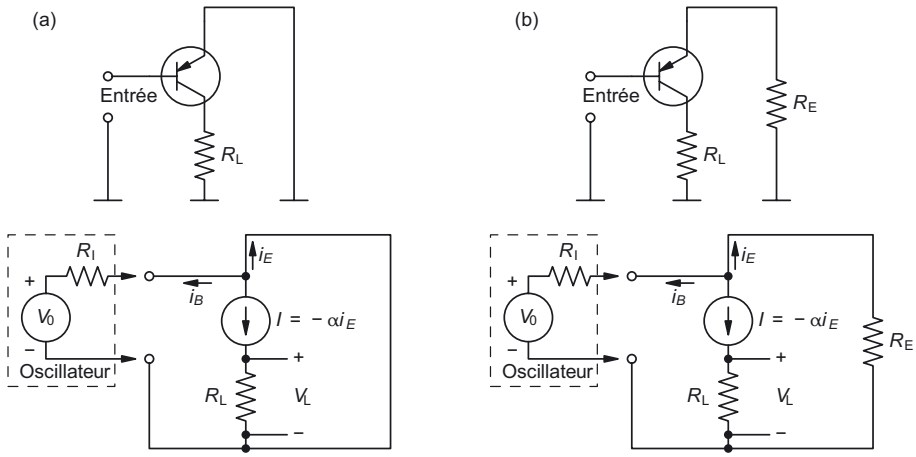


Figure 54.11

Exercice 54.12 La configuration de *base commune* est le circuit de la figure 54.12. Ce circuit est très utile quand on désire avoir un gain unité sur le courant et accroître l'impédance de la source.

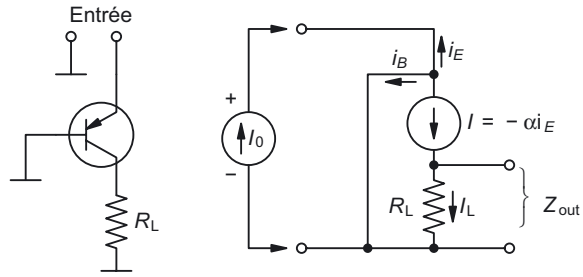


Figure 54.12

(a) Calculer le gain du courant I_L/I_0.

(b) Calculer l'inpédance Z_{sortie} vue par R_L (c'est-à-dire enlever R_L et calculer le rapport V_L/I_L).

(c) Si le circuit est alimenté par l'oscillateur sinusoïdal de l'exercice 54.10 donner le circuit équivalent vu par R_L, comme le circuit de la figure 54.13, et calculer la valeur de la source en fonction de V_0, R_I, et α.

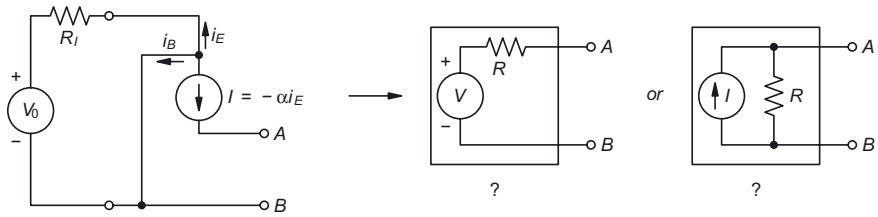


Figure 54.13

Résumé : Les caractéristiques des trois configurations de base des transistors sont résumées dans la table suivante :

Configuration	Gain de tension	Gain de courant	$Z_{\text{sortie}}/Z_{\text{entrée}}$
Suiveur d'émetteur	≈ 1	d'habitude > 1	< 1
Émetteur commun	d'habitude > 1	d'habitude > 1	
Base commune	d'habitude > 1	≈ 1	d'habitude > 1

Exercice 54.13 Une fois excité, le circuit montré sur la partie (a) de la figure 54.14 continuerait d'osciller pour toujours à sa fréquence de résonance. Toutefois, il y a toujours des pertes d'énergie dues à la résistance finie des câbles et au rayonnement électromagnétique. Un circuit physique ressemblerait beaucoup plus à celui de la partie (b) de la figure. À cause de la présence de résistances R, les oscillations ne seraient pas maintenues dans un tel circuit. D'un autre côté, si l'on ajoute une « résistance négative » $-R$ en série avec R, comme sur la partie (c) de la figure, alors les oscillation seront maintenues. La résistance négative fournit l'énergie dissipée dans R. Comme nous l'avons dit dans la section 22-8 du volume II, des circuits peuvent être faits avec des transistors (et d'autres dispositifs—tubes, diodes tunnel, etc.) dont l'impédance effective a une partie réelle négative. Ces circuits sont utiles pour fabriquer des oscillateurs. La partie (d) du circuit de la figure 54.14 montre un circuit dont les extrémités A et B peuvent présenter une résistance négative. (Le transformateur est un transformateur idéal dont le rapport de tours est 1 : n. Les tensions d'entrée et de sortie sont données par $V_{\text{sortie}} = nV_{\text{entrée}}$ et $i_{\text{sortie}} = i_{\text{entrée}}/n$.)

(a) Calculer l'impédance Z_{AB} entre A et B.

(b) Donner les conditions pour que la résistance entre A et B soit négative, et indiquer la polarité appropriée du transformateur.

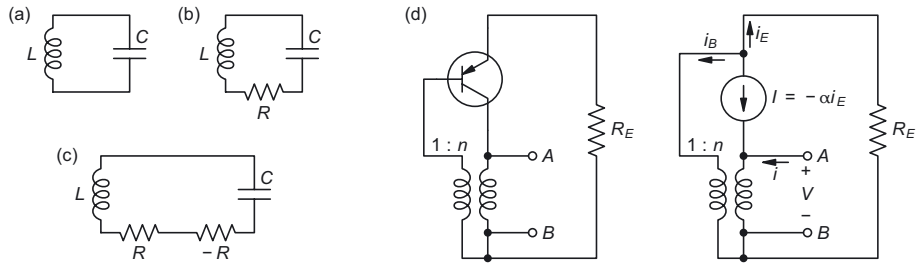


Figure 54.14

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

55. Cavités résonantes

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 2, Chap. 23.

Exercice 55.1

(a) Trouver approximativement la fréquence de résonance ω de la cavité montrée sur la figure 55.1. On supposera $d \ll a$ et $d \ll (b - a)$.

(b) Quels sont les effets principaux que vous avez négligés dans la question précédente ?

(c) Si la cavité est refroidie uniformément (c'est-à-dire de façon que la cavité toute entière soit à une température uniforme) est-ce que la contraction thermique entraîne un accroissement, une décroissance ou aucun changement de la fréquence de résonance ?

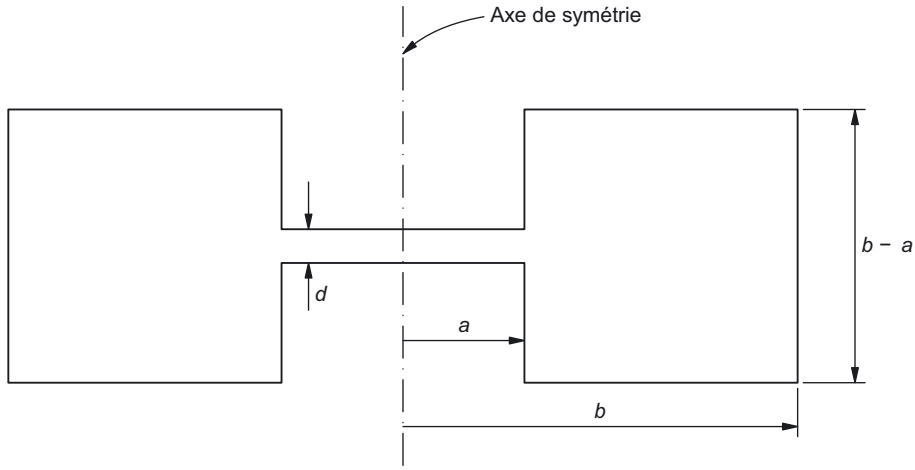


Figure 55.1

56. Guides d'ondes

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 2, Chap. 24.

Exercice 56.1 Une ligne de transmission a une inductance L_0 par unité de longueur et une capacité C_0 par unité de longueur. Si la différence de potentiel et le courant changent lentement (ce qui correspond à la transmission de signaux de longueur d'onde grande devant l'espacement des lignes),

(a) montrer que les équations de la transmission sont

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t},$$
$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t}.$$

(b) montrer ainsi que I et V satisfont tous deux les équations d'onde

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

avec

$$v^2 = \frac{1}{L_0 C_0}.$$

Note : l'hypothèse de signaux variant lentement n'est pas nécessaire, mais la démonstration complète sort du cadre de ce chapitre.

Exercice 56.2 L'impédance caractéristique d'une ligne de transmission est $z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$ où L_0 est l'inductance par unité de longueur et C_0 la capacité par unité de longueur. Montrer que pour une ligne de transmission formée de deux fils fins de largeur b distants de a ($a \ll b$),

$$z_0 \approx \frac{1}{\epsilon_0 c}\frac{a}{b}.$$

Exercice 56.3 Une cavité est fabriquée en posant des plaques conductrices sur les extrémités d'un segment de câble coaxial de longueur l et dont le conducteur central est de rayon a.

(a) Trouver la fréquence ω_1 du mode le plus bas pour lequel le champ électrique est toujours radial.

(b) Donner l'expression du $n^{\text{ième}}$ mode du champ électrique $\boldsymbol{E}$.

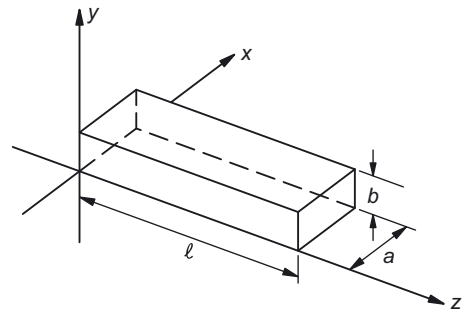
(c) Comparer la fréquence de résonance ω_1 à $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ où L et C sont l'inductance et la capacité par unité de longueur l de la ligne coaxiale.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 56.4 Un guide d'onde rectangulaire fait avec un matériau parfaitement conducteur, a des côtés de longueur a et b comme sur la figure 56.1. Les extrémités d'une section de longueur l sont recouvertes de plaques conductrices, c'est-à-dire que le guide d'ondes est en fait une cavité résonante. Si le champ électrique est donné par la partie réelle de

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = E_0(x,z)e^{i\omega t}\boldsymbol{e}_y,$$

Figure 56.1



(a) quel est $E_0(x,z)$ pour le mode de plus basse fréquence de résonance ?

(b) quelle est la plus basse fréquence de résonance ω_0 de la cavité ?

Exercice 56.5 Un câble coaxial est composé de deux cylindres concentriques. Une extrémité ($x = 0$) est connectée à un générateur qui produit une force électromotrice $V(t) = V_0 \cos \omega t$. L'autre extrémité du câble ($x = l$) est recouverte d'une plaque conductrice. L'inductance par unité de longueur est L_0 et la capacité C_0. La longueur du câble est $l = 5\pi c/2\omega$, où c est la vitesse de la lumière.

(a) Dessiner la différence de potentiel entre les conducteurs en fonction de la distance x.

(b) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la grandeur de la différence de potentiel est maximum.

(c) Écrire l'expression pour les ondes progressives directes et réfléchies, $V_f(x,t)$ et $V_r(x,t)$, qui créent la différence de potentiel entre les conducteurs.

(d) Quel est le courant $I(x,t)$ en $x = 0$, $x = l/2$, et $x = l$?

(e) Si la force électromotrice vient d'un générateur idéal dont l'arbre tourne à la vitesse angulaire ω, quel couple moyen $\langle\tau\rangle$ doit être appliqué au générateur ?

Exercice 56.6 Une ligne de transmission se termine en $x = l$ sur une impédance Z_T, comme sur la figure 56.2.

(a) Montrer que l'impédance de l'extrémité émettrice ($x = 0$) est donnée par

$$Z_S = iZ_0 \frac{\tan(\omega l\sqrt{LC}) - i(Z_T/Z_0)}{1 + i(Z_T/Z_0)\tan(\omega l\sqrt{LC})}$$

où $Z_0 = \sqrt{L/C}$ est l'impédance caractéristique de la ligne.

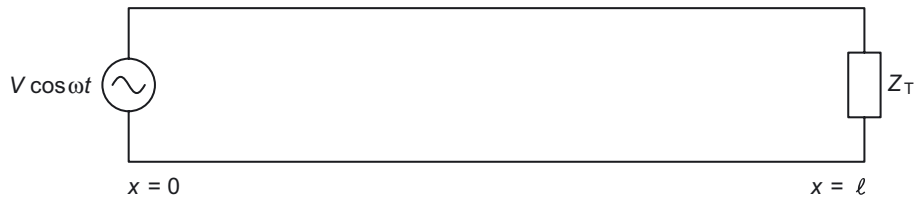


Figure 56.2

Que vaut Z_S si

(b) $Z_T = 0$?

(c) $Z_T = \infty$?

(d) $Z_T = Z_0$?

Exercice 56.7 Une ligne de transmission avec une impédance caractéristique Z_1 est connectée à une ligne de transmission d'impédance caractéristique Z_2. Si le système est alimenté par une différence de potentiel V_{incident} depuis un générateur connecté à la première ligne (Z_1) montrer que le « coefficient de réflexion » est donné par

$$\frac{V_{\text{réfléchi}}}{V_{\text{incident}}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2},$$

alors que le « coefficient de transmission » est

$$\frac{V_{\text{transmis}}}{V_{\text{incident}}} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Exercice 56.8 À la station de repérage JPL de Goldstone, la cage électronique est séparée de l'alimentation de l'antenne réceptrice de 25 mètres par un guide d'ondes de 12 mètres. Les dimensions internes du guide d'ondes sont de 14,4 cm par 29 cm. Si un signal porteur de 960 MHz est employé, comparer la vitesse de signal v_g avec la vitesse dans l'espace libre c.

Exercice 56.9 Les champs électriques à l'intérieur de guides d'ondes décrits au chapitre 24 du volume II ont la propriété que la composante du champ électrique dans la direction de propagation est nulle, c'est-à-dire que le champ électrique est transverse. (Ces modes de propagation sont appelés électriques transverses, TE.) Il y a aussi des modes TM où il n'y a pas de champ magnétique dans la direction de propagation. Pour le guide d'ondes rectangulaire montré dans les figures 24.3 et 24.4 du volume II, le potentiel vecteur des modes TM est donné par

$$A = \boldsymbol{e}_z \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, e^{i(\omega t - k_z z)},$$

où

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(a) Vérifier que les champs magnétiques donnés par cette expression sont vraiment transverses.

(b) Montrer que les champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ satisfont l'équation d'onde et les conditions aux limites.

Conseil : on demande que

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A},$$

où

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

(c) Montrer que le mode mn ne se propage pas si

$$\omega < c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

57. L'ÉLECTRODYNAMIQUE EN NOTATIONS RELATIVISTES

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 2, Chap. 25.

Dans les exercices suivants les unités sont telles que $c = 1$.

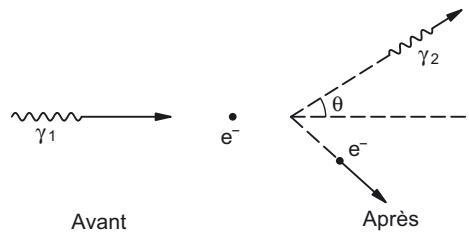
Exercice 57.1 Écrire sous forme de quadrivecteurs :

(a) $(\phi^2 - \boldsymbol{A}^2)$.

(b) $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j} - \rho\phi)$.

Exercice 57.2 Dans l'effet Compton, un électron au repos est percuté par un photon, ce qui provoque un changement d'impulsion des deux particules, comme sur la figure 57.1. Trouver l'énergie du photon émis E^{γ_2} en fonction de son énergie incidente E^{γ_1} et de l'angle de déviation θ par rapport à sa direction initiale.

Figure 57.1



Exercice 57.3 Un positron (e^+) peut être créé en bombardant un électron au repos (e^-) avec un photon (γ),

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-.$$

Quelle est l'énergie minimum du photon E^γ ? Utiliser des quadrivecteurs et des combinaisons invariantes partout où c'est possible.

Exercice 57.4 Une paire électron-positron peut être produite par un photon dans la réaction

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + (e^+ + e^-).$$

Il est impossible, toutefois, que la réaction

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^-$$

se produise pour un seul photon isolé même si son énergie est plus grande que deux fois l'énergie de masse de l'électron. Utiliser des quadrivecteurs pour montrer que c'est vrai.

Exercice 57.5 Une particule de masse m_a au repos est heurtée par une autre particule de masse m_b et d'impulsion p_b. Après une collision totalement inélastique, elles s'agrègent pour former une seule et unique particule nouvelle.

(a) Quelle est la masse m_c et la vitesse v_c de cette particule ?

(b) Comparer vos résultats avec les valeurs que l'on calculerait de façon non-relativiste.

58. Transformations de Lorentz des champs

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 2, Chap. 26.

Dans ces exercices, les unités sont telles que $c = 1$.

Exercice 58.1 Écrire et calculer

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu}$$

pour le tenseur du champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$.

Exercice 58.2

(a) Trouver le quadrivecteur f_μ dont la partie spatiale est

$$\rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}.$$

(b) Quelle est la signification des composantes à la fois spatiales et temporelle de ce quadrivecteur ?

Exercice 58.3

(a) Montrer que $\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2$ et $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}$ sont invariants sous les transformations de Lorentz.

Note : si $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ font un angle aigu dans un référentiel, ils le font également dans tout référentiel.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(b) Dans quel phénomène physique important ces deux invariants sont-ils tous deux nuls ?

Exercice 58.4 Si $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ sont les champs électrique et magnétique en un certain point de l'espace, dans un référentiel donné, déterminer la vitesse d'un autre référentiel dans lequel les champs électrique et magnétique sont parallèles. Plusieurs référentiels ont cette propriété–si on en a trouvé un, la même propriété sera vraie dans un autre référentiel de vitesse parallèle à la direction commune de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$. Par conséquent, on a le choix, et il est suffisant et commode de trouver le référentiel qui a une vitesse perpendiculaire aux deux champs.

Exercice 58.5 Dans le chapitre 26 du volume II, les champs dus à une charge en mouvement avec une vitesse uniforme ont été obtenus par transformation des champs depuis un référentiels au repos de la particule à un référentiel en mouvement. Les champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ étaient obtenus à partir de A_μ de la façon habituelle. Trouver maintenant les champs en commençant avec ceux produits par une charge au repos et en utilisant les lois de transformation des champs.

Exercice 58.6 Montrer que les champs électrique et magnétique d'une charge se déplaçant avec une vitesse uniforme $\boldsymbol{v}$ peuvent s'écrire

$$\boldsymbol{E} = \frac{q\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\,\frac{1-v^2}{(1-v^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,\frac{1-v^2}{(1-v^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

où $\boldsymbol{r}$ est le rayon vecteur entre la position présente de la particule et l'observateur et θ est l'angle entre $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{v}$.

Exercice 58.7 Un fil droit très long est parcouru par un courant I produit par des électrons se déplaçant à la vitesse $\boldsymbol{v}$. Des ions positifs au repos dans le fil assurent sa neutralité électrique.

(a) Trouver les champs à l'extérieur du fil dans un référentiel au repos par rapport au fil.

(b) Transformer les champs dans un référentiel se déplaçant avec les électrons.

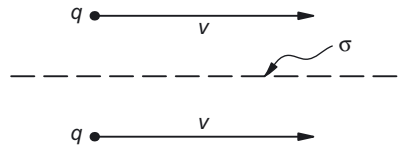
Conseil : dans le chapitre 13 du volume II le champ électrique observé dans ce référentiel en mouvement était obtenu par une autre méthode ; Voir l'équation (13.28).

Exercice 58.8 Deux électrons de vitesse égale $\boldsymbol{v}$ se déplacent l'un à côté de l'autre séparés par une distance a. À mi-chemin entre les deux se trouve une feuille infinie de charges positives avec une densité surfacique de charge σ, comme sur la figure 58.1.

(a) Quelle doit être la valeur minimum de σ pour que les électrons maintiennent la séparation a ?

(b) Comparer la densité de charge σ_h nécessaire si les électrons ont une énergie de 500 MeV à la densité σ_l nécessaire à très basse vitesse.

Figure 58.1

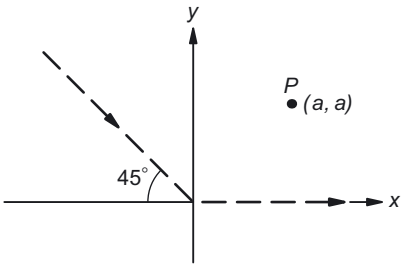


Exercice 58.9 Si f_μ est le quadrivecteur force agissant sur une particule, et u_μ le quadrivecteur vitesse, montrer que

$$f_\mu u_\mu = 0.$$

Exercice 58.10 Une particule de charge q se déplace dans le plan xy à une vitesse constante v, suivant la trajectoire montrée sur la figure 58.2. (Elle se diffuse à l'origine). La vitesse reste la même tout le temps. À $t = t_1$ elle est en $x = a$, $y = 0$.

Figure 58.2



(a) Le point P est à $x = y = a$. Trouver le champ électrique en P au temps t_1 si $v/c = 0{,}5$ (c est la vitesse de la lumière).

(b) Si, dans la question précédente, la trajectoire de la particule avant la collision était plus bas sur l'axe y, comment le résultat serait-il modifié ?

59. Énergie et impulsion du champ

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 2, Chap. 27.

Exercice 59.1 En utilisant la technique développée pour démontrer l'équation (27.11) du volume II, trouver des expressions équivalentes pour

(a) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$

(b) $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$

Exercice 59.2 Combien de mégatonnes d'énergie U sont contenues dans le champ magnétique de la Terre hors de la Terre elle-même ? On supposera que le champ de la Terre est un dipôle de valeur 2/3 gauss à l'équateur. Une mégatonne est l'énergie dégagée par l'explosion d'un million de tonnes de TNT ou encore $4{,}2 \times 10^{15}$ J. Au vu de

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

votre réponse, de combien pensez-vous que l'explosion d'une bombe à hydrogène d'une mégatonne explosant dans la haute atmosphère modifierait le champ de la Terre ?

Exercice 59.3 Pour un long fil droit de résistance R par unité de longueur, calculer le flux du vecteur de Poynting $\boldsymbol{S}$ à la surface du fil lorsque celui-ci est parcouru par un courant I. Comparer cela avec le chauffage calculé avec la loi d'Ohm.

Exercice 59.4 Un long câble coaxial est fait de deux cylindres concentriques, parfaitement conducteurs, de rayons a et b ($a < b$). Une extrémité du câble est connectée à une batterie dont le voltage terminal est V, et l'autre extrémité est connectée à une résistance R si bien qu'il y a un courant $I = V/R$. Calculer, en utilisant le vecteur de Poynting $\boldsymbol{S}$, le taux d'écoulement de l'énergie dU/dt.

Exercice 59.5 La puissance moyenne rayonnée par une station radio est de 10 kW.

(a) Quelle est la grandeur du vecteur de Poynting moyen $|\langle \boldsymbol{S} \rangle|$ en des points de la surface de la Terre distants de 10 km ?

Note : à cette distance, les ondes peuvent être considérées comme planes. Il est raisonnable de supposer que la puissance est rayonnée par une antenne quart d'onde ($\lambda/4$) au-dessus d'un plan parfaitement conducteur.

(b) Trouver le maximum des intensités électrique et magnétique, $|\boldsymbol{E}_{\max}|$ et $|\boldsymbol{B}_{\max}|$.

Exercice 59.6 Les champs de plus bas mode TE du guide d'onde rectangulaire montré sur les figures 24.3 jusqu'à 24.6 du volume II sont donnés par

$$\boldsymbol{E} = E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - k_z z)\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{B} = -E_0 \frac{k_z}{\omega} \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - k_z z)\boldsymbol{e}_x - E_0 \frac{\pi}{\omega a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - k_z z)\boldsymbol{e}_z$$

(a) Montrer que la solution donnée ci-dessus satisfait les conditions aux limites pour le problème.

(b) Calculer le vecteur de Poynting $\boldsymbol{S}$ et la densité d'énergie u.

(c) Calculer le flux moyen d'énergie $\langle dU/dt \rangle$ dans un plan quelconque perpendiculaire à l'axe z.

(d) Calculer la densité d'énergie moyenne $\langle u \rangle_{\text{moy(t)}}$ dans le guide d'onde.

(e) Faire usage des résultats des questions (c) et (d) ci-dessus pour calculer la vitesse moyenne de propagation de l'énergie, v_g. Montrer que ce résultat est le même que celui de la vitesse de groupe, équation (24.27) du volume II.

Exercice 59.7

(a) Trouver le taux d'écoulement d'énergie par unité d'aire d'un dipôle oscillant de moment $\boldsymbol{p} \cos \omega t$.

Conseil : ne garder que les termes de rayonnement, c'est-à-dire ceux qui décroissent en $1/r$.

(b) En intégrant sur la surface d'une grande sphère centrée sur le dipôle, montrer que la puissance moyenne rayonnée est

$$\langle P \rangle = \frac{1}{3} \frac{p^2}{(4\pi\epsilon_0 c^2)} \frac{\omega^4}{c}.$$

Exercice 59.8 Une lumière plane est incidente sur un électron libre. L'électron oscille sous l'influence du champ $\boldsymbol{E}$. Calculer le rapport entre l'énergie moyenne rayonnée par unité de temps par l'électron $\langle P_{\text{rad}} \rangle$ à l'énergie moyenne de la lumière par unité de temps et par unité de surface $\langle P_{\text{incident}} \rangle$.

Conseil : supposer que la lumière est de basse fréquence et négliger les effets du champ $\boldsymbol{B}$ sur l'onde de l'électron.

Exercice 59.9 Une poussière, dans le système solaire, est sujette à deux forces : la force gravitationnelle du Soleil, et la force de radiation de la lumière émise par le Soleil. Puisque la force de gravité est proportionnelle au volume de la particule alors que la force de radiation est proportionnelle à sa surface, il y aura une taille particulière pour laquelle ces deux forces se compenseront.

(a) En supposant une poussière sphérique de densité $\approx 10^3\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$ qui absorbe tout le rayonnement incident (qui l'atteint), trouver le rayon a pour lequel les forces s'équilibrent.

(b) Une proposition d'explication du fait que la queue d'une comète pointe du côté opposé au Soleil, repose sur ce phénomène. Elle suppose que la queue consiste de petites particules, peut-être des molécules de gaz. Est-ce un théorie raisonnable ?

Note : La masse du Soleil est $2 \times 10^{30}\,\text{kg}$, et il rayonne de l'énergie à un taux de $4 \times 10^{26}\,\text{W}$.

Exercice 59.10 Un tore dans l'air de rayon moyen R et de section transverse πr^2 est enroulé de N tours de fil ($r \ll R$). Un courant avec une dépendance en temps $I(t) = Kt$ est branché à $t = 0$.

(a) Directement à partir du champ magnétique, trouver l'énergie emmagasinée dans le champ magnétique $U_B(t)$.

(b) Trouver la direction et la grandeur du vecteur de Poynting en un point juste à l'intérieur du tore $\boldsymbol{S}(t)$.

(c) En utilisant le vecteur de Poynting, trouver le taux de changement de l'énergie à l'intérieur du tore dU/dt. Vérifier votre réponse en la comparant avec celle de la question (a).

Exercice 59.11 Le « paradoxe » posé en section 17-4 du volume II, en rapport avec la loi de Faraday a suscité beaucoup d'intérêt. En choisissant une géométrie simple, on peut le résoudre explicitement. Considérons un dipôle magnétique de moment $\boldsymbol{\mu}$ au centre d'un coquille sphérique non conductrice recouverte uniformément de charge.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(a) Si la sphère est portée à un potentiel V, montrer qu'après que le courant du dipôle a été débranché, la sphère a un moment cinétique.

$$\boldsymbol{L} = \frac{2}{3}\frac{\boldsymbol{\mu} V}{c^2}.$$

(Négliger le champ magnétique causé par la rotation de la sphère chargée.)

(b) Comparer $\boldsymbol{L}$ de la question ci-dessus avec le moment cinétique contenu dans le champ avant qu'on ne coupe le courant.

(c) Pensez-vous qu'il serait faisable de transformer cela en une expérience de laboratoire de deuxième année ?

(d) Est-ce que ça marcherait avec une sphère métallique ?

Conseil : en utilisant la loi de Faraday, il est très commode de calculer le flux magnétique avec le potentiel vecteur d'un dipôle, donné par l'équation (14.34) du volume II.

60. Masse électromagnétique

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 2, Chap. 28.

Exercice 60.1 Si l'on identifie la masse au repos d'un électron m_e comme étant l'énergie électrostatique de sa charge, et si la charge est uniformément distribuée dans le volume d'une sphère, calculer le rayon a. Comparer avec les résultats donnés par l'équation (28.2) du volume II.

Exercice 60.2 Il est bien connu qu'un électron a, en plus de sa charge q_e et de sa masse m_e, un moment cinétique propre (son spin) et un moment magnétique qui lui est associé par la relation

$$\frac{\text{moment cinétique}}{\text{moment magnétique}} = \frac{m_e}{q_e}.$$

C'est juste à 0,1 % près. Supposons que la masse soit donnée par l'équation (28.4) du volume II,

$$m_e = \frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2},$$

avec $e^2 = q_e^2/4\pi\epsilon_0$.

(a) Considérons une coquille sphérique uniformément chargée de charge q et de rayon a et plaçons un moment magnétique dipolaire de valeur μ en son centre. Montrer que le moment cinétique du champ électromagnétique est

$$L = \frac{2}{3}\frac{q\mu}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{1}{a}.$$

(b) Trouver le rapport du moment cinétique et du moment magnétique et comparer avec la valeur m/q mentionnée ci-dessus.

(c) Étant donné que μ_z pour un électron vaut $(\hbar q_e/2m_e)$, calculer la vitesse maximum de surface $v_{\max}$ de l'électron tournant sur lui-même pour obtenir ce moment magnétique. Faites tout commentaire que vous jugerez pertinent.

Note : la quantité $4\pi\epsilon_0 c\hbar/q_e^2 = 1/\alpha$ a la valeur approximative 137.

61. Le mouvement des charges dans des champs électriques et magnétiques

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 2, Chap. 29.

Exercice 61.1 Une particule chargée (charge q, masse m) est initialement au repos à l'origine. On lui fait subir un champ électrique constant dans la direction x.

(a) Calculer la vitesse $\boldsymbol{v}$ et la position (x,y,z) de la particule en fonction du temps (de façon relativiste).

(b) Si la particule a une vitesse initiale v_0 dans la direction y, comment ce résultat est-il modifié ?

Exercice 61.2 Dans un cyclotron à protons, les protons sont sur des orbites circulaires dans un champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B}$.

(a) Trouver la « fréquence cyclotron » ω, la vitesse angulaire du proton en fonction de sa charge q_p, sa masse m_p et la grandeur du champ B, à basse énergie.

(b) Comment change ω lorsque l'énergie totale s'accroît ?

(c) À quelle énergie *cinétique* T est-ce que ω a changé de 1 % ?

Exercice 61.3 À $t = 0$, une particule de masse m et de charge q est au repos à l'origine. Il y a un champ uniforme $\boldsymbol{E}$ dans la direction y et un champ uniforme $\boldsymbol{B}$ dans la direction z.

(a) Trouver le mouvement ultérieur de la particule, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ en supposant un mouvement non-relativiste. Quelles restrictions sur $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ cela implique-t-il ?

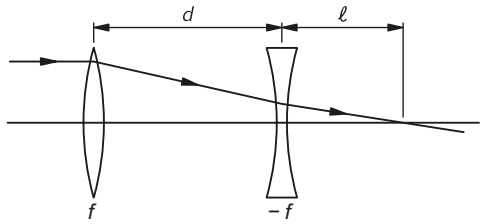
(b) Pouvez-vous suggérer ce que serait le mouvement relativiste ? Que se passe-t-il si $E/B > c$?

(c) Si l'on met une plaque dans la plan xz en $y = 0$ et une autre parallèle en $y = d$ avec une différence de potentiel $V_0 = Ed$ et que nous appliquons un champ magnétique parallèle aux plaques, on obtient ce qu'on appelle un magnétron. Si les électrons sont émis par la cathode négative, essentiellement au repos, quelle doit être l'intensité du champ magnétique B pour que les électrons ne puissent pas atteindre l'anode positive ?

Exercice 61.4 Le principe d'une focalisation par un gradient-alternatif peut être illustré par l'analogue optique de la figure 61.1. Même si les lentilles ont les mêmes distances focales, leur combinaison a une action convergente dans certaines circonstances.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Figure 61.1



(a) Pour de la lumière parallèle entrante, déterminer l en fonction de d.

(b) Sous quelles conditions, l'image est-elle réelle ou virtuelle ?

62. Indice de réfraction des milieux denses

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 2, Chap. 32.

Exercice 62.1 Montrer que dans un matériau non-polaire le carré de l'indice de réfraction n à basse fréquence est égal à la constante diélectrique κ.

Exercice 62.2 À une fréquence d'environ 6 MHz, l'ionosphère devient transparente. Estimer la densité d'électrons ρ en utilisant le modèle d'électrons libres.

Exercice 62.3 Un champ électrique appliqué à un métal est maintenu constant pendant longtemps, puis est soudainement débranché. En utilisant le modèle des électrons libres d'un métal, montrer que le temps de relaxation (le temps pour que la vitesse de dérive décroisse à $1/e$ de sa valeur initiale) est égal à 2τ, deux fois le temps moyen entre deux collisions.

Exercice 62.4 Dans un métal, il y a des solutions en ondes planes pour les équations de Maxwell de la forme

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)},$$

où k est un nombre complexe. Pour de basses fréquences

$$k = (1 - i)\sqrt{\frac{\sigma\omega}{2\epsilon_0 c^2}},$$

où σ est la conductivité du métal.

(a) Écrire une expression pour le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ associé à une telle onde.

(b) Quel est l'angle θ entre $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$?

(c) Quel est le rapport entre la valeur du pic de $\boldsymbol{B}$ à la valeur du pic de $\boldsymbol{E}$ en un point quelconque de z ?

(d) Quelle est la différence de phase ϕ entre $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$?

Conseil : si le maximum de $\boldsymbol{E}$ se produit à t_1 et le maximum de $\boldsymbol{B}$ à t_2, la différence de phase est définie par $\pm\omega(t_1 - t_2)$.

Exercice 62.5 L'équation (32.50) du volume II suggère que le cutoff ultraviolet d'un métal (La valeur de ω pour laquelle n passe de réel à imaginaire) est très brutal. L'expérience montre que le cutoff n'est pas défini de façon si aiguë. Montrer avec une meilleure approximation pour n^2 que ce résultat expérimental est en accord avec la théorie.

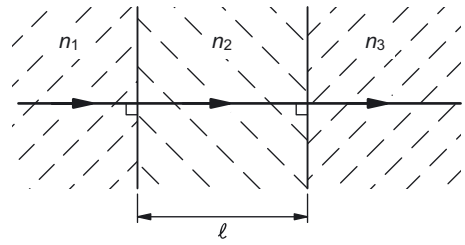
63. La réflexion sur des surfaces

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 2, Chap. 33.

Exercice 63.1

(a) Déterminer le coefficient de transmission I_t/I_i d'une onde plane électromagnétique passant au travers de trois milieux diélectriques comme sur la figure 63.1.

Figure 63.1



(b) Montrer que si $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ et $l = \lambda_2/4$ le rapport de transmission est un. (C'est la raison pour laquelle on met des couches sur les bonnes optiques : de photo, de cinéma, de jumelles.)

(c) Pour des jumelles destinées à être utilisées avec de la lumière blanche d'une longueur d'onde médiane de $\lambda_1 = 5500\,\text{Å}$, quelle devrait-être l'épaisseur l du revêtement ?

Note : on supposera que l'indice de réfraction du verre est is 1,5.

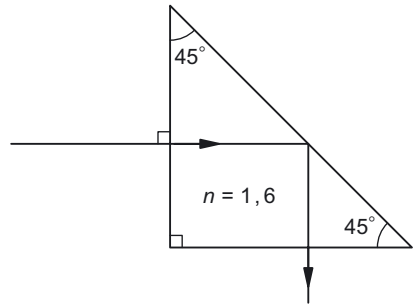
(d) S'il n'est possible que de recouvrir une seule face de la lentille, est-ce que ça a une importance de savoir quel côté est recouvert ? Pourquoi ?

Exercice 63.2 Un faisceau de lumière de longueur d'onde 4500 Å (dans le vide) tombe sur un prisme et est totalement réfléchi à 90°, comme sur la figure 63.2. L'indice de réfraction du prisme est 1,6.

(a) Calculer la distance d au-delà du côté le plus long du prisme où la valeur du champ électrique est réduite de $1/e$ par rapport à sa valeur à la surface, en supposant que la lumière est polarisée de façon que $\boldsymbol{E}$ soit perpendiculaire au plan d'incidence.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Figure 63.2



(b) Votre résultat est-il changé si $\boldsymbol{E}$ se trouve dans le plan d'incidence ?

64. Le magnétisme de la matière

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 2, Chap. 34.

Exercice 64.1 Une particule chargée de masse m se déplace dans un plan perpendiculaire à un champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B}$.

(a) Montrer que si $\boldsymbol{B}$ change lentement, le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ produit par le mouvement orbitale reste constant.

(b) Que veut dire « lentement » dans la question précédente ?

65. Paramagnétisme et résonance magnétique

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 2, Chap. 35.

Exercice 65.1 Dans un cyclotron de basse énergie, les protons parcourent leur orbite circulaire dans un temps T d'environ 0,13 microsecondes. Une expérience de résonance magnétique nucléaire avec des protons dans le *même* champ magnétique montre une résonance à 21 MHz. Trouver la valeur de la constante g du proton à partir de ces données.

Exercice 65.2 Démontrer l'équation (35.9) du volume II de la façon suggérée dans le texte. Pouvez-vous réconcilier dette démonstration avec la preuve au chapitre 34 qu'il ne peut y avoir de paramagnétisme reposant strictement sur la physique classique ?

Exercice 65.3 Un sel paramagnétique contient 10^{22} ions par cm^3, avec un moment magnétique de 1 magnéton de Bohr. Il est placé dans un champ d'induction magnétique uniforme de 10 000 gauss ($1\,\mathrm{Wb\,m^{-2}}$). Calculer le pourcentage d'excès de spins parallèles $(N_{\mathrm{haut}} - N_{\mathrm{bas}})/N$ à température ambiante (300 K) et à la température de l'hélium liquide (4.2 K).

Exercice 65.4 Trouver une équation pour le paramagnétisme quantique de particules de spin un, en suivant la démonstration du chapitre 35 du volume II pour le spin 1/2.

66. Ferromagnétisme

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 2, Chap. 36.

Exercice 66.1 Une sphère uniformément magnétisée a un moment magnétique total $\mu = (4/3)\pi a^3 M$, où a est le rayon, et M la magnétisation.

(a) Calculer le courant de surface équivalent par unité de longueur $\boldsymbol{K}$ qui peut remplacer cette sphère pour ce qui concerne les effets externes.

(b) Montrer que cette distribution de courant a le même moment magnétique.

Exercice 66.2 Le cadre magnétique montré dans la partie (a) de la figure 66.1 est entouré par 2 150 tours de fil parcouru par un courant de 5 A. Le fer a une largeur uniforme (hors de la page) de 28 cm et montre la courbe de B en fonction de H que l'on peut voir sur la partie (b) de la figure.

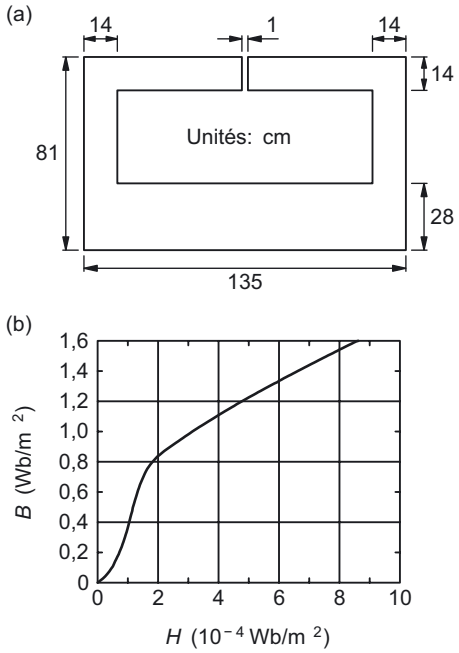


Figure 66.1

(a) Faire une estimation de la taille du champ magnétique B_{gap} dans l'entrefer d'air.

(b) Quels sont les effets principaux que vous avez négligés ?

Conseil : puisque la courbe B-H est empirique et non-linéaire, il ne faut pas s'étonner que le problème ne puisse être résolu de façon analytique ou exacte.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 66.3 Un flux magnétique est produit dans un entrefer d'air (gap) en utilisant une barre d'un matériau aimanté permanent et des pièces polaires de fer doux, comme on le montre dans la partie (a) de la figure 66.2. Les caractéristiques du matériau de l'aimant permanent sont montrées sur la partie (b). Le matériau est d'abord magnétisé jusqu'au point P en faisant passer un fort courant dans une bobine externe. En supposant que le fer doux a une perméabilité infinie et en négligeant les effets de bord du flux, trouver la densité de flux dans l'entrefer B_{gap} après que le courant a été débranché.

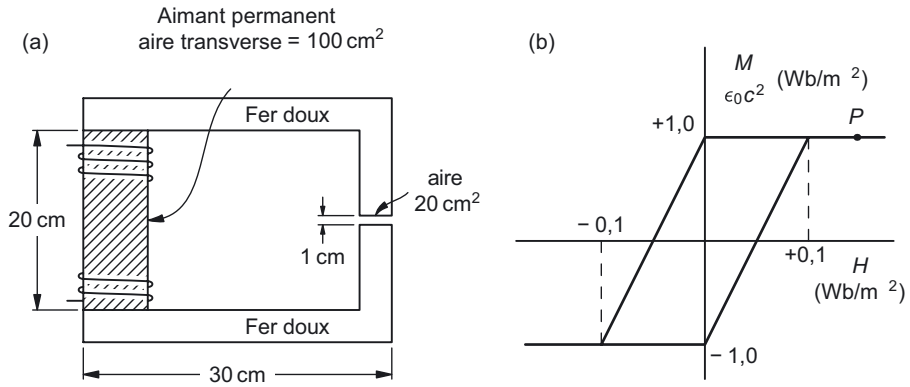


Figure 66.2

Exercice 66.4 Un très long barreau cylindrique de fer a une aimantation permanente dirigée selon l'axe du cylindre.

(a) En négligeant tout effet de bord, trouver $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$ dans le fer.

(b) S'il y a une longue cavité en forme d'aiguille le long de l'axe, quel sont $\boldsymbol{B}_{\text{cav}}$ et $\boldsymbol{H}_{\text{cav}}$ au centre de la cavité ?

67. ÉLASTICITÉ

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 2, Chap. 38.

Utiliser les données suivantes pour ces exercices :

	gravité spécifique	Module d'Young (10^{11} dynes/cm^2)
acier	7,83	20,01
aluminum	2,71	6,96

Exercice 67.1 Dans plusieurs applications des technologies spatiales, il est important de faire usage de matériaux qui ont un rapport résistance/poids maximum.

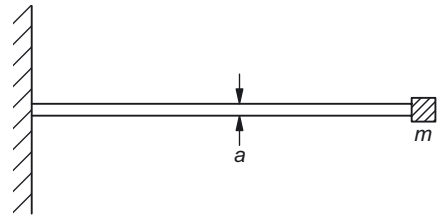
(a) Comparer les rayons r_{Al} et r_{acier} d'un support solide circulaire en aluminium et d'un support en acier de même rigidité et de même longueur L.

Note : la rigidité est définie comme le rapport de la force latérale appliquée et du déplacement résultant.

(b) Comment les masses de ces supports m_{Al} et m_{acier} se comparent-elles ?

Exercice 67.2 Une poutre en aluminium de longueur L de coupe transverse carrée est tenue de façon rigide en une extrémité comme sur la figure 67.1. Une masse m est attachée à l'autre extrémité de la poutre. Trouver la fréquence naturelle de vibration ω de ce système. On suppose que la poutre a des côtés transverses de longueur a, que sa masse est beaucoup plus petite que m, et que la masse m peut être considérée comme ponctuelle.

Figure 67.1



Exercice 67.3 Au chapitre 47 du volume I la vitesse du son dans un *fluide* est trouvée à partir du changement de pression avec la densité.

(a) Montrer que pour des ondes *longitudinales* dans un *solide* (ondes planes de compression) la vitesse de phase est donnée par

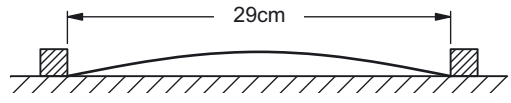
$$V_{\text{long}}^2 = \frac{(1-\sigma)Y}{(1-2\sigma)(1+\sigma)\rho},$$

où ρ, Y, σ sont, respectivement, la densité, le module d'Young et le rapport de Poisson du matériau solide. Cette vitesse s'applique aux ondes longitudinales dans un milieu « infini ». Dans ce cas, le mouvement de chaque particule est toujours parallèle à la direction de l'onde ; lorsque le matériau est comprimé par l'onde, il ne peut y avoir de mouvement sur le côté comme ce qui se passe dans un bâton qui devient plus gros lorsqu'il est comprimé.

(b) Quelle largeur les dimensions d'un bloc doivent-elles avoir pour que la formule de la partie (a) soit applicable ?

Exercice 67.4 Une règle en acier de 30 cm de long, de 1,25 cm de large, et de 8 mm d'épaisseur est coincée entre deux blocs mis sur une table à 28 cm l'un de l'autre, comme sur la figure 67.2.

Figure 67.2



En négligeant la masse de la règle (≈ 20 g),

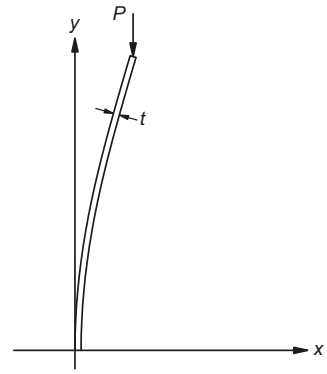
(a) dans quelle sorte de courbe, la règle est-elle tordue ?

(b) quelle est la force F exercée sur les blocs ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 67.5 Déterminer la charge de flambage P pour une poutre de longueur L, de module d'Young Y, bloquée à une extrémité et libre à l'autre, comme sur la figure 67.3. La poutre a une section transverse rectangulaire d'épaisseur t et de largeur w.

Figure 67.3



68. L'ÉCOULEMENT DE L'EAU SÈCHE

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 2, Chap. 40.

Exercice 68.1

(a) Démontrer, pour votre propre satisfaction, que l'affirmation faite au chapitre 40 du volume II selon laquelle si un fluide ne peut pas supporter une contrainte de cisaillement, la pression est la même dans toutes les directions.

(b) Comme exercice mathématique, démontrer l'identité vectorielle assez utile employée au chapitre 40

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}),$$

où $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})$.

Exercice 68.2 Le liquide dans un cylindre de section transverse circulaire tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe. Les particules à la distance r de l'axe tournent avec une vitesse $v = \omega r$.

(a) Trouver la forme de la surface au sommet du liquide.

(b) Montrer que, comme nous l'avions dit au chapitre 40, la circulation par unité d'aire, c'est-à-dire $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}$, est le double de la vitesse angulaire à laquelle l'eau tourne.

Exercice 68.3 Une sphère de rayon a et de masse m est en mouvement dans de l'eau « sèche » à une vitesse constante v.

(a) Montrer que l'énergie cinétique totale de la balle et du fluide est :

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)v^2,$$

où M est la masse du fluide déplacée par la balle.

(b) Quelle est l'impulsion totale $\boldsymbol{p}_{\text{totale}}$ de la balle plus le fluide ?

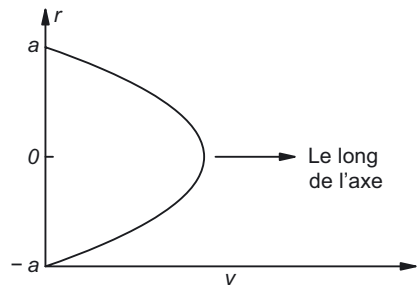
69. L'ÉCOULEMENT DE L'EAU MOUILLÉE

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Électromagnétisme 2, Chap. 41.

Exercice 69.1 Si une balle de rayon a est traînée avec une vitesse constante v dans un liquide visqueux suffisamment lentement pour que l'écoulement soit laminaire, la force appliquée est une mesure de la force de viscosité du liquide sur la balle. Bien que l'on *puisse* calculer cette force exactement, il est intéressant de trouver sa forme avec des arguments dimensionnels, après avoir fait la liste des paramètres dont elle peut dépendre. Faites-le. Pouvez-vous trouver par des arguments physiques qualitatifs *pourquoi* les paramètres entrent en jeu comme ils le font ?

Exercice 69.2 Si un fluide visqueux s'écoule dans un petit tuyau, l'écoulement peut être considéré comme laminaire, c'est-à-dire que des couches de fluide, dans des tubes cylindriques, s'écoulent les unes le long des autres (sans provoquer de turbulence). Pour un tuyau de rayon a le profil de vitesse dans le tuyau ressemblera à ce qui est montré sur la figure 69.1.

Figure 69.1



(a) Montrer que si r est la distance radiale du centre du tuyau, η la viscosité du fluide, et qu'il y a une décroissance de pression $(P_1 - P_2)/L$ par unité de longueur du tuyau, alors la vitesse est donnée par

$$v(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{P_1 - P_2}{L} (a^2 - r^2).$$

En analogie exacte avec la loi d'Ohm, le taux de décharge d'un fluide Q d'un tel tuyau peut être relié à la différence de pression $\Delta P = P_1 - P_2$ par une équation

$$\Delta P = QR,$$

où R est la « résistance » du tuyau.

(a) Trouver la résistance R d'un tuyau de rayon a et de longueur L.

(b) Quel serait l'analogue d'un condensateur ?

(c) Pouvez-vous imaginer des circonstances dans lesquelles une pareille analogie serait utile ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 69.3 Un grand plateau peu profond est partiellement rempli d'eau (un liquide incompressible avec viscosité η). Une mince couche plate de bois flotte sur l'eau. Sa surface inférieure est à une hauteur d au-dessus du fond du plateau. Les autres dimensions de la couche sont beaucoup plus grandes que d. La couche se déplace horizontalement à faible vitesse v. Quel est le taux de dissipation d'énergie dU/dt dans un volume unité de l'eau près du milieu de la couche ?

Exercices pour le volume III (*Mécanique quantique*)

Introduction

Ce recueil d'exercices est fait pour accompagner le volume III des *Cours de Physique de Feynman*. Comme celui qui accompagne le volume II, il comporte du travail à faire chez soi, et des problèmes d'examen proposés au Caltech dans les années 1963–64. Encore une fois, j'ai essayé de mettre les exercices *grosso modo* dans un ordre de difficulté croissante à l'intérieur de chaque chapitre.

Peut-être encore plus que dans le recueil précédent, cet ensemble ne représente pas le « dernier mot » sur le sujet. Il doit croître au fur et à mesure que le cours évolue. De fait, ces exercices ont été écrits et distribués avant que le volume III ne soit publié dans sa version finale. J'espère que toute différence de notation, qui existe certainement, sera considérée comme une indication supplémentaire de la nature préliminaire de ces exercices (ou problèmes).

La plupart des exercices ont été écrits par M. Sands, R. P. Feynman, J. Pine et moi-même. Pour les trois-quarts, les idées ont été suggérées par R. P. Feynman. Une édition préliminaire a été faite par C. Wilts et moi-même durant l'été 1963. La lecture et les corrections finales apportées à ce recueil ont été faites par I. Tammaru.

Encore une fois je veux remercier chaleureusement Madame F. L. Warren pour avoir tapé à la machine ces problèmes au fur et à mesure des étapes successives de leur préparation.

G. Neugebauer

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

70. AMPLITUDES DE PROBABILITÉ

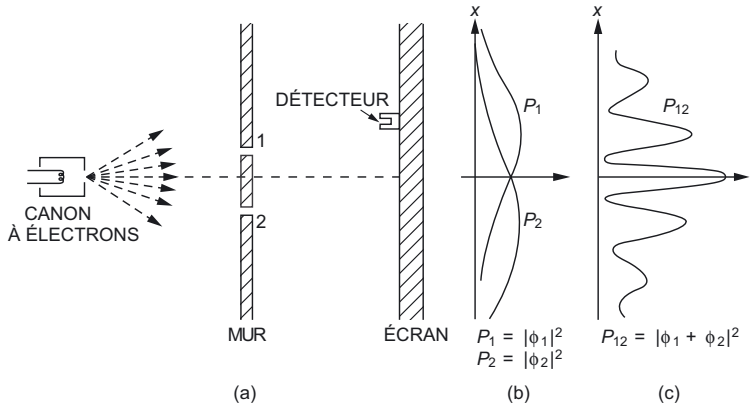
Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique quantique, Chap. 3.

Exercice 70.1 L'expérience imaginaire d'interférences d'électrons décrite au chapitre 3 du volume III est illustrée sur la figure 70.1. De la figure d'interférences P_{12} dessinée, on peut estimer la longueur d'onde λ qu'il faut associer aux fonctions d'amplitude ϕ_1 et ϕ_2. Appelons d la distance entre les fentes, et L la distance du mur à l'écran. Soit x le distance du centre de l'écran au premier minimum de P_{12}, toutes les autres dimensions dont on aurait besoin se mesurent sur la figure.

(a) Qu'attend-on de λ si $L \gg d$?

(b) En prenant les courbes de P_1 et P_2 sur la figure, calculer ce qu'on attend pour la valeur de P_{12} au centre, et au premier maximum suivant, ainsi qu'aux deux premiers minima de la figure d'interférence ? Comparer avec la courbe de P_{12} sur la figure. (*La figure est-elle suffisamment précise ?*)

Figure 70.1



Exercice 70.2 Considérons l'expérience d'interférence à deux fentes de l'exercice 70.1, en supposant que les distances du canon à électrons au mur et du mur à l'écran sont très grandes par rapport à la distance des fentes. Supposons aussi que la largeur des fentes est très petite par rapport à leur distance. Répondre aux questions suivantes aussi quantitativement que possible.

(a) Qu'arrive-t-il à la figure d'interférences de P_{12} si le canon à électron est déplacé vers le haut d'une distance D ?

(b) Qu'arrive-t-il à la figure d'interférences si la distance des fentes est multipliée par deux ?

(c) Qu'arrive-t-il à la figure d'interférences si la fente 1 est deux fois plus large que la fente 2 ?

Exercice 70.3 De la lumière monochromatique polarisée verticalement tombe sur un polaroid dont l'axe de transmission de la lumière est tourné d'un angle θ par rapport à la verticale. Classiquement, quel est le rapport de l'intensité transmise à l'intensité incidente ? Que fait le polaroid dans le cas d'un seul photon incident ?

Exercice 70.4 Un faisceau d'électrons de 20 000 eV traverse une feuille fine polycristalline d'or et atteint une plaque photographique. La plaque présente un noircissement sous la forme d'anneaux concentriques avec l'axe du faisceau d'électrons. Pourquoi ? Calculer le diamètre des anneaux pour une distance de 10 cm entre la feuille d'or et la plaque photographique.

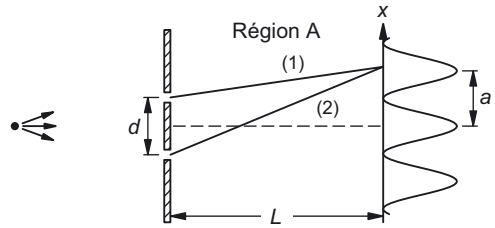
Exercice 70.5 Si l'on considère l'expérience classique d'interférence par deux fentes de l'exercice 70.1, il est possible de montrer qu'on peut prévoir l'ensemble de la figure d'interférences sur l'écran à partir de la connaissance des amplitudes pour que les électrons soient sur les fentes.

(a) Si a_1 et a_2 sont les deux nombres complexes qui donnent les amplitudes de trouver les électrons sur les fentes 1 et 2, quelle est la formule pour la distribution de l'intensité $I(x)$ sur l'écran, où x est la distance au centre ? On fera l'approximation que x et la séparation des deux fentes d sont toutes deux petites par rapport à la distance entre les fentes et l'écran d'observation L.

(b) Si la figure d'interférences ne dépend que des amplitudes sur les fentes 1 et 2, comment l'électron « sait-il » quelles longueurs d'onde utiliser derrière les fentes pour fabriquer la figure d'interférences ?

Exercice 70.6 Dans l'expérience de diffraction montrée sur la figure 70.2, la source émet des particules d'impulsion p_0, de masse m, et de vitesse v.

Figure 70.2



(a) Quel est l'espacement a entre le maximum central et les maxima voisins ? On supposera $L \gg d$, $L \gg a$.

(b) Si une quelconque influence altère la phase du chemin supérieur (1) de $\delta\phi_1$ et celle du chemin inférieur (2) de $\delta\phi_2$, montrer que le maximum central est déplacé d'une distance S donnée par :

$$S = +(\delta\phi_1 - \delta\phi_2)\,\frac{L}{d}\,\frac{\hbar}{p_0}.$$

Par conséquent, si $(\delta\phi_1 - \delta\phi_2)$ est le même pour tous les chemins donnant la figure de diffraction, alors toute cette figure est déplacée et l'on peut dire que les particules ont été déviées vers le haut d'une distance S.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(c) Supposons que dans la région A la particule a une petite énergie potentielle qui ne dépend que de sa position verticale. Alors, l'impulsion d'une particule à une hauteur x au-dessus de la ligne centrale, $p(x)$, va être légèrement différente de $p(0)$, sa valeur au centre. Montrer que

$$p(x) = p(0) + \frac{m}{p(0)}\,(V(0) - V(x)),$$

ou, dans les cas où $V(x)$ varie lentement,

$$p(x) = p(0) + \frac{Fx}{v},$$

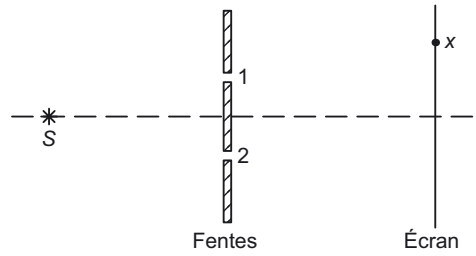
où F est l'opposé du gradient de potentiel $-\partial V/\partial x$.

(d) Dans les circonstances de la partie (c) ci-dessus, les impulsions sur les chemins (1) et (2) vont être différentes, et les longueurs d'onde aussi.

1. Montrer que la différence de phase entre les chemins supérieur et inférieur est :
$$(\delta\phi_1 - \delta\phi_2) = \frac{d}{2v}\,\frac{F}{\hbar}\,L.$$
(Noter que l'espacement vertical moyen entre les deux chemins est $d/2$.)
2. Montrer que la figure de diffraction est déplacée vers le haut de $\frac{1}{2}(F/m)t^2$, où $t = L/v$ est le temps classique qu'il faut pour aller de la fente jusqu'à l'écran. Commenter.

Exercice 70.7 Des électrons (de spin 1/2) sont émis par une source S placée devant un écran qui contient deux fentes, comme sur la figure 70.3. On suppose que lorsqu'un électron atteint une fente, il la traverse avec une amplitude α pour un spin qui n'a pas changé de composante verticale, et une amplitude β dans le cas contraire. On suppose de plus qu'il est impossible de distinguer la fente au travers de laquelle l'électron est passé.

Figure 70.3



(a) Si tous les électrons sont émis avec leur spin vers le haut, calculer la distribution d'intensité P au point x de l'écran à partir de α, β, et des amplitudes telles que $\langle 1 \,|\, S \rangle$ et $\langle x \,|\, 1 \rangle$.

(b) Comment cette distribution diffère-t-elle du cas où tous les électrons émis ont leur spin dirigé vers le bas et toutes les autres conditions sont les mêmes ?

(c) Si les électrons sont émis avec des spins distribués au hasard vers le haut ou vers le bas, trouver encore comment ce cas diffère de la partie (a) ci-dessus, toutes les autres conditions étant les mêmes.

Exercice 70.8 Curieusement, de grands effets d'interférences peuvent apparaître même lorsqu'une des voies entrant en interférence est peu probable. Dans l'expérience des deux fentes, si une des fentes est obstruée de façon que la probabilité de la traverser est réduite d'un facteur 100, Montrer que la probabilité d'arriver sur un maximum de la figure d'interférence est encore plus grande de 50 % que celle d'arriver sur un minimum.

Exercice 70.9 Le diamètre des étoiles les plus proches est trop « petit » pour être vu avec les meilleurs télescopes (l'angle sous-tendu est plus petit que la résolution du télescope). Le premier à avoir mesuré le diamètre d'une étoile est Michelson, qui utilisait un interféromètre optique. Cette méthode marche tout juste pour les étoiles les plus proches. Dans *Nature* 178, 1046 (1956), Robert Hanbury Brown et Richard Twiss ont proposé une nouvelle méthode, reposant sur la « corrélation d'intensité » pour de telles mesures, et l'ont testée sur Sirius. Ils avaient deux réflecteurs paraboliques (d'anciens miroirs de projecteurs) chacun muni d'un photomultiplicateur à son foyer. Les sorties des photomultiplicateurs étaient envoyées par des câbles coaxiaux à un circuit qui mesurait la valeur moyenne du *produit* des deux courants (ce qu'on appelle un « corrélateur »). À partir de la variation de ce produit avec la séparation des miroirs, ils déterminaient l'angle sous-tendu par l'étoile.

À l'époque, beaucoup de physiciens ont dit que cette méthode ne pouvait pas marcher. La raison mise en avant était que puisque la lumière venait de photons, ceux-ci allaient soit sur un miroir soit sur l'autre, et il ne pouvait pas y avoir de corrélation entre les deux courants.

On peut montrer que cet argument est faux en considérant l'expérience idéalisée suivante. Soit deux petites sources – des ampoules électriques – A et B, à très grande distance de deux photomultiplicateurs a et b avec la disposition géométrique montrée sur la figure 70.4. Des compteurs sont attachés aux détecteurs a et b et mesurent le nombre de photons par seconde p_1 et p_2 qui parviennent à chaque compteur. Les compteurs a et b sont aussi reliés à un circuit de « coïncidence » qui mesure p_{12}, le taux de comptage pour l'apparition *simultanée* (dans un intervalle de temps très bref τ) de deux photo-électrons.

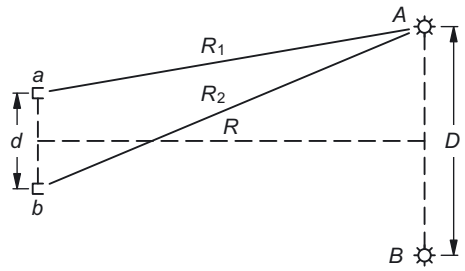


Figure 70.4

Soit $\langle a\,|\,A\rangle$ l'amplitude pour qu'un photon arrive en a depuis A dans n'importe quel interval de temps. Alors $\langle a\,|\,A\rangle$ est égalà $ce^{i\alpha_1}$ où c est un nombre complexe et α_1 est k fois la distance R_1 de A a. De même $\langle b\,|\,A\rangle = ce^{i\alpha_2}$ avec $\alpha_2 = kR_2$ où R_2 est la distance de A b.

(a) Montrer que le taux de comptage de coïncidence p_{12} est proportionnel à

$$2 + \cos 2k(R_2 - R_1).$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(b) Comment ce résultat peut-il être utilisé pour mesurer D si l'on connaît R ? Oublions le fait que le processus réel doit être représenté par une superposition de tels modèles car la lumière est issue de toutes les parties de la surface de l'étoile, et pas seulement de deux points sur celle-ci.

71. Particules identiques

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique quantique, Chap. 4.

Exercice 71.1 Une antenne de radiodiffusion rayonne 1000 kW à la fréquence de 1,0 MHz.

(a) Quelle est l'énergie E (en électron-volts) de chaque quantum rayonné ?

(b) Combien de quanta N sont émis dans chaque période d'oscillation du champ électromagnétique ? (La grande cohérence de ces photons est possible car ce sont des particules de Bose.)

Exercice 71.2 Dans un corps noir, $E(\omega)$ *l'énergie* par unité de volume dans le rayonnement à des fréquences entre ω et $\omega + \Delta\omega$, est donnée par la formule de rayonnement de Planck,

$$\Delta E(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)} \Delta\omega.$$

(a) Quel est le comportement de $E(\omega)$ pour de petites valeurs de ω ? Pour des grandes valeurs de ω ?

(b) À quelle fréquence $\omega_{E_{\max}}$ y a-t-il le plus d'énergie par intervalle de fréquence ?

(c) À quelle fréquence $\lambda_{E_{\max}}$ y a-t-il le plus d'énergie par unité de longueur d'onde ?

(d) Estimer la température T du Soleil en supposant que le maximum de son énergie rayonnée se trouve au milieu du spectre visible (≈ 5000 Å).

Exercice 71.3 Estimer la force du champ magnétique B nécessaire pour faire s'aligner les spins des deux électrons d'un atome d'hélium dans la même direction. (On simulera l'atome d'hélium par un oscillateur harmonique de fréquence correspondant à la lumière optique. Le niveau fondamental de l'hélium a, dans son état fondamental, deux électrons dont les spins sont opposés. En raison du principe d'exclusion, il faut monter au niveau suivant pour que les deux électrons aient des spins parallèles.)

Exercice 71.4 Dans un certain système, supposons que des « transitions » peuvent se produire entre certains niveaux d'énergie, comme sur la figure 71.1. C'est-à-dire que nous supposons que la population, ou le nombre d'atomes sur les niveaux d'énergie changent avec émission ou absorption de quanta. On admettra que les deux états excités et l'état fondamental sont en équilibre thermique mutuel lorsque le système global baigne dans un rayonnement de fréquence $\hbar\omega = \Delta E$. Des transitions directes d'énergie $2\Delta E$ sont interdites.

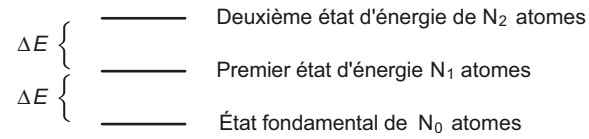


Figure 71.1

(a) Calculer N_1/N_0 et N_2/N_1 en fonction de $n(\omega)$, le nombre de quanta.

(b) Déduire une relation simple pour $n(\omega)$, le nombre de photons (bosons), ne faisant intervenir que $\Delta E/kT$.

(c) Trouver des expressions approchées pour $n(\omega)$ dans les limites,

(a) $\hbar\omega \gg kT$,

(b) $\hbar\omega \ll kT$.

Exercice 71.5 Avant la découverte du neutron, on pensait que les noyaux contenaient des protons et des électrons. Montrer que l'atome N^{14} atom (atome d'azote avec un noyau d'une masse voisine de 14 fois la masse du proton) serait une particule de Bose. L'expérience (spectre de la molécule N_2) montra que c'était une particule de Fermi. C'était là une des premières preuves qu'il fallait imaginer une nouvelle physique nucléaire. Montrer comment l'hypothèse du neutron résout ce problème.

Exercice 71.6 Dans un laser, un grand nombre d'atomes semblables sont élevés à un niveau excité. La présence d'une petite quantité de lumière d'une certaine espèce induit alors de l'émission jusqu'à ce que tous les atomes aient contribué, comme dans une avalanche, et crée ainsi un grand nombre de photons tous de même longueur d'onde et de même direction.

(a) Expliquer comment les atomes peuvent être « éduqués » pour émettre tous dans la même direction.

(b) Peut-on s'attendre à ce qu'un jour on fabrique un dispositif analogue pour les neutrinos (particules de masse nulle de spin 1/2) ?

Exercice 71.7

(a) Montrer que si deux particules qui ne sont pas identiques n'interagissent pas, la probabilité que l'une aille de a en b alors que l'autre va de c en d est le produit de deux facteurs $P_{ac\to bd} = P_{a\to b}P_{c\to d}$, où $P_{a\to b}$ est la probabilité que la première aille de a en b si la deuxième n'est pas là, et $P_{c\to d}$ est la probabilité que le deuxième aille de c en d si la première n'est pas là.

(b) La restriction de cette affirmation à des particules non identiques est-elle essentielle ?

Exercice 71.8 Le deutéron est une particule de Bose de spin un. Un faisceau de deutérons peut se trouver dans l'un des trois états +1, 0, −1. Une expérience est faite dans laquelle des deutérons son diffusés sur des deutérons. Quelle est la probabilité $P(\theta)$ de détecter des deutérons en fonction de l'angle de diffusion θ entre les deutérons incidents

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

et les deutérons-cibles dans le système du centre de masse. On supposera que les deutérons incidents sont non polarisées, qu'ils ne se dissocient pas et ne s'assemblent pas dans le processus de diffusion, qu'il n'y a pas de changement de spin pendant la diffusion et que $f(\theta)$ est l'amplitude pour une déviation de θ.

Exercice 71.9 Soit $f_1(\theta)$ l'amplitude de diffusion d'un méson π sur un proton et $f_2(\theta)$ l'amplitude de diffusion sur un neutron. Que pensez-vous que soit la *probabilité* qu'un méson π soit diffusé sur un noyau d'hélium à un angle θ en fonction de P_1 et P_2 les probabilités de diffusion par un proton ou un neutron ? (On supposera que le méson π n'interagit qu'avec un seul constituant du noyau, c'est-à-dire que les ordres supérieurs de collision peuvent être négligés.) Considérez deux cas :

(a) Que le recul du proton ou du neutron après la collision casse le noyau.

(b) Que le recul est si petit que le noyau reste intact.

(c) Pouvez-vous dire lequel de ces cas donne une plus grande probabilité de diffusion ? *Note :* votre réponse dépend des hypothèses faites pour décrire le processus (b).

Exercice 71.10 Un faisceau de neutrons est envoyé sur une cible de neutrons dans une expérience de diffusion de neutrons. Un détecteur est disposé pour mesurer les neutrons diffusés à un angle θ dans le système du centre de masse. Il y a une amplitude f pour qu'une particule incidente soit diffusée sans changement de spin. Il y a aussi une amplitude g qu'une particule du faisceau soit diffusée avec retournement du spin (en échangeant la direction de son spin avec celle de la particule cible.) Si l'on suppose que f et g sont indépendants de θ, à quelle probabilité de comptage vous attendez-vous si :

(a) le spin du neutron incident et celui du neutron cible ont tous deux la même direction $+z$.

(b) les spins des neutrons incidents sont alignés dans la direction $+z$ et ceux des neutrons-cibles dans la direction $-z$.

(c) le faisceau incident est non polarisé alors que les neutrons cibles sont polarisés dans la direction $+z$.

(d) ni les neutrons incidents ni les neutrons cibles ne sont polarisés.

(e) quelle serait la réponse à la question (a) si la cible était constituée de protons polarisés et que les amplitudes de diffusion neutron-proton étaient les mêmes que celles de neutron-neutron ? On supposera que le détecteur a la même efficacité de détection des protons et des neutrons.

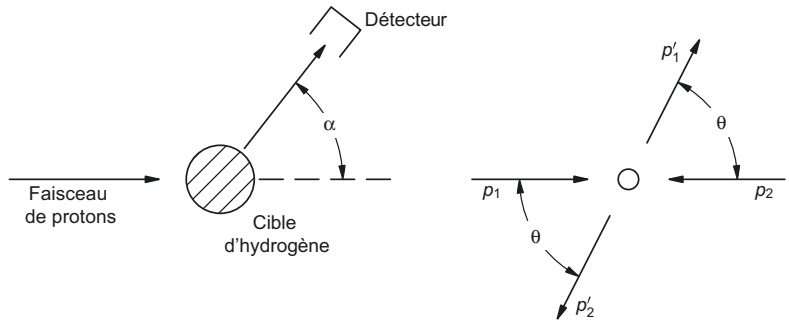
Conseil : l'amplitude g d'échange de spin ne s'applique que dans le cas où les deux spins initiaux sont différents, c'est-à-dire si « l'échage des spins » a un sens.

Exercice 71.11 Un faisceau de protons non relativistes passe dans une cible mince d'hydrogène liquide, comme sur la figure 71.2, et les protons diffusés sont comptés à un certain angle α par rapport à la direction du faisceau incident. La diffusion peut s'analyser dans le système du centre de masse comme montré sur la figure. Deux protons

p_1 et p_2 s'approchent avec des vitesses égales ; après la collision, deux protons p'_1 et p'_2 quittent la collision à l'angle θ. Si l'on définit l'axe z comme étant perpendiculaire au plan de la diffusion, chaque proton peut avoir J_z (composante z du moment cinétique de spin) égal à $\pm\hbar/2$. On dit que le spin pointe en haut ou en bas. Supposons que les deux protons pointent en haut, et que l'amplitude que p_1 soit diffusé dans un détecteur à l'angle θ est $f(\theta)$. Puisque nous ne pouvons pas dire *quel* proton est détecté, l'amplitude qu'*un* proton apparaisse à l'angle θ est $f(\theta) - f(\pi - \theta)$. Le signe moins est là car les protons sont des « fermions ». Nous pouvons dire que la probabilité qu'un proton soit observé dans le détecteur est

$$|f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2.$$

Figure 71.2



Supposons maintenant que p_1 a le spin vers le haut et p_2 vers le bas, et que l'amplitude que p_1 soit diffusé dans le détecteur *sans* changement de spin est $f'(\theta)$ et que l'amplitude qu'il soit diffusé *avec* changement de spin est $g(\theta)$ car l'amplitude de diffusion dépend de l'orientation relative des spins. Dans ce cas, l'amplitude qu'un proton vers le haut arrive dans le détecteur peut s'écrire $f'(\theta) - g(\pi - \theta)$.

(a) Quelle est la relation entre θ et α ?

(b) Quelle est l'amplitude du cas « haut-bas » qu'un proton soit diffusé dans le détecteur avec un spin vers le bas ?

(c) Supposons qu'un faisceau « naturel » de protons non polarisés est diffusé sur une cible naturelle non polarisée, et que le détecteur ne peut pas distinguer les deux états de polarisation. Quelle est la *probabilité* de diffusion à l'angle θ ?

(d) Montrer que si $f' = f$ et $g = 0$, la diffusion de protons de spins aléatoires est équivalente au mélange d'une diffusion de « fermions purs » pour lesquels l'amplitude est $f(\theta) - f(\pi - \theta)$ et de « bosons purs » pour lesquels l'amplitude est $f(\theta) + f(\pi - \theta)$,

$$P(\theta) = A|f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 + B|f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2.$$

(e) Trouver A et B dans la partie (d) ci-dessus.

Exercice 71.12 Supposons que N électrons sont dans une très grande boîte de volume V dans un état qui peut donner le moins d'énergie possible.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(a) Si l'on néglige l'interaction entre les électrons, montrer que chaque mode de la boîte est occupé par seulement deux électrons, pourvu que l'impulsion du mode $\hbar k = p$ a une grandeur inférieure à $p_{\max}$ où

$$N = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_{\max}} V \cdot 2 \cdot 4\pi p^2 \, dp.$$

(b) Quelle est l'énergie U de tous les électrons ? Exprimer cette énergie interne U en fonction du volume de la boîte.

(c) Trouver la pression exercée par ce « gaz d'électrons dégénéré ». Montrer que la relation pression-volume est de la forme $PV^\gamma =$ constante.

(d) Trouver γ.

Exercice 71.13 La matière dans les étoiles naines blanches est si hautement comprimée que la théorie de l'exercice 71.12 s'applique à elles. Soit ρ la densité de matière, $\rho/2M_p$ le nombre de protons par mètre cube, où M_p est la masse d'un proton, nous supposons que les noyaux ont autant de neutrons que de protons. (On pose donc $N/V = \rho/2M_p$ dans les équations de l'exercice 71.12.)

Les équations de l'équilibre d'une étoile faite d'une pareille matière maintenue par la gravitation sont données dans un livre d'astrophysique comme :

$$P = A\rho^{5/3},$$
$$dP/dr = -G\rho M(r)/r^2,$$
$$dM(r)/dr = 4\pi\rho r^2,$$

où r est la distance radiale au centre de l'étoile, $M(r)$ la masse à l'intérieur d'une sphère de rayon r, P la pression, et A une constante numérique.

(a) Pouvez-vous expliquer la raison d'être de ces équations ?

(b) Pouvez-vous donner une formule ou une valeur numérique pour la constante A ?

On peut supposer que toute la pression est exercée par les électrons dégénérés, les noyaux n'ayant pratiquement par d'effet (pourquoi ?).

72. Le spin un

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique quantique, Chap. 5.

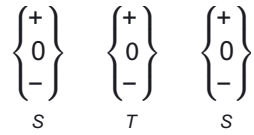
Exercice 72.1 Démontrer l'affirmation de la section 5.6 du volume III, selon laquelle si l'appareil de Stern et Gerlach C du spin 1 peut être divisé en deux parties, A et B, alors

$$\langle \chi | C | \phi \rangle = \sum_k \langle \chi | B | k \rangle \langle k | A | \phi \rangle$$

où $k = -, 0, +$ sont les états de base du spin 1.

Exercice 72.2 Trois appareils de Stern-Gerlach « améliorés », décrits au chapitre 5 du volume III, qui séparent un faisceau selon la valeur de la composante z du spin mais rendent son unité spatiale au faisceau, sont mis en série, et un faisceau de particules de spin un est envoyé dans le dispositif. Le premier et le troisième ont la même orientation alors que celui du milieu est à un angle arbitraire. Dans les notations du chapitre 5 cela se présente comme sur la figure 72.1.

Figure 72.1



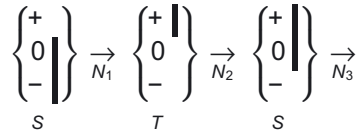
(a) Si une fente de T est « ouverte », est-ce que les proportions du faisceau dans chacun des trois états du système final S dépendent de l'état d'entrée, c'est-à-dire dans les proportions du faisceau dans $+S$, $0S$, ou $-S$. Pourquoi ?

(b) Que se passe-t-il si deux fentes de T sont « ouvertes » ?

(c) Que se passe-t-il si trois fentes de T sont « ouvertes » ?

Exercice 72.3 Un ensemble de trois expériences de Stern-Gerlach « améliorées » est constitué pour des particules de spin un comme sur la figure 72.2. Les trois appareils sont disposés le long d'une ligne droite, mais l'appareil T est tourné autour de cette ligne d'un angle de 9° par rapport aux deux appareils S. Un faisceau de particules de spin un entre de la gauche. Le faisceau qui quitte le premier appareil S a une intensité de N_1 particules par seconde.

Figure 72.2



(a) Quelles est N_2, l'intensité du faisceau qui quitte l'appareil T ?

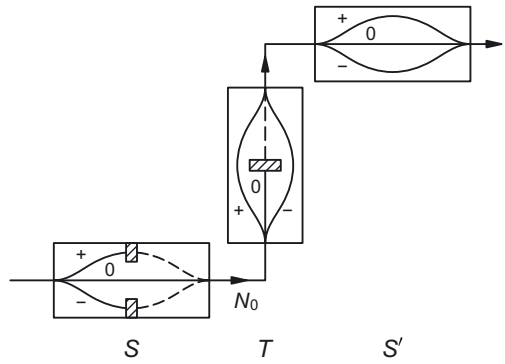
(b) Quelle est l'intensité N_3 du faisceau qui quitte le dernier appareil S ?

(c) Que sont N_2 et N_3 si tous les « stops » sont enlevés de l'appareil T ?

Exercice 72.4 Considérons une suite d'appareils de Stern-Gerlach modifiés S, T, S' utilisée avec des particules de spin 1, comme sur la figure 72.3. (T est tourné de 90° par rapport à S et S'. On suppose le faisceau incident non polarisé.)

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Figure 72.3



(a) Pour N_0 particules sortant de l'appareil S, trouver le nombre attendu de particules sortant de S' dans les états $|+S'\rangle$ et $|0S'\rangle$. (Les appeler $N_{+S'}$ et $N_{0S'}$.)

(b) Supposons qu'on possède des « détecteurs transparents » qui pourraient être mis sur les faisceaux + et − de l'appareil T. Supposons que ces détecteurs aient la propriété de donner un signal lorsqu'une particule les traverse, sans modifier son état de spin. De plus, l'impulsion de la particule n'est pas changée notablement, dans le sens où sa trajectoire dans l'appareil T peut être considérée comme inchangée, comme si le détecteur n'était pas là. Avec des détecteurs présents dans les états + et − de T (l'état 0 demeure bloqué), quel est le nombre probable de coups enregistrés pour N_{+T}, et N_{-T}, et pour $N_{+S'}$, et $N_{0S'}$, si un total de N_0 particules sort de l'appareil S ?

(c) Comment la réponse pour $N_{+S'}$ changerait-elle, dans l'expérience de la partie (b) ci-dessus, si on découvrait après l'expérience qu'aucun coup n'a été enregistré pour N_{+T} et N_{-T} parce que les signaux n'avaient pas été enregistrés ?

(d) Si chaque détecteur a une efficacité de seulement 50 % (c'est-à-dire que pendant 50 % du temps il n'y a pas d'interaction entre la particule et le détecteur) quelle est la réponse pour $N_{+S'}$ et $N_{0S'}$?

(e) Si les blocages des états + et − de S sont enlevés et que N_0 particules sont envoyées dans S, que sont $N_{+S'}$ et $N_{0S'}$? (Les détecteurs de T sont également retirés.)

73. Le spin 1/2

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique quantique, Chap. 6.

Exercice 73.1 Supposons que des atomes de spin 1/2 sont filtrés par une suite de deux appareils de Stern-Gerlach « améliorés ». On suppose que chaque appareil est arrangé de telle façon qu'il ne laisse passer qu'un seul faisceau, comme sur la figure 73.1. Pour chacun des huit arrangements montrés en (a)–(h) considérons que N atomes non polarisés entrent en P. Donner le nombre d'atomes attendus en Q.

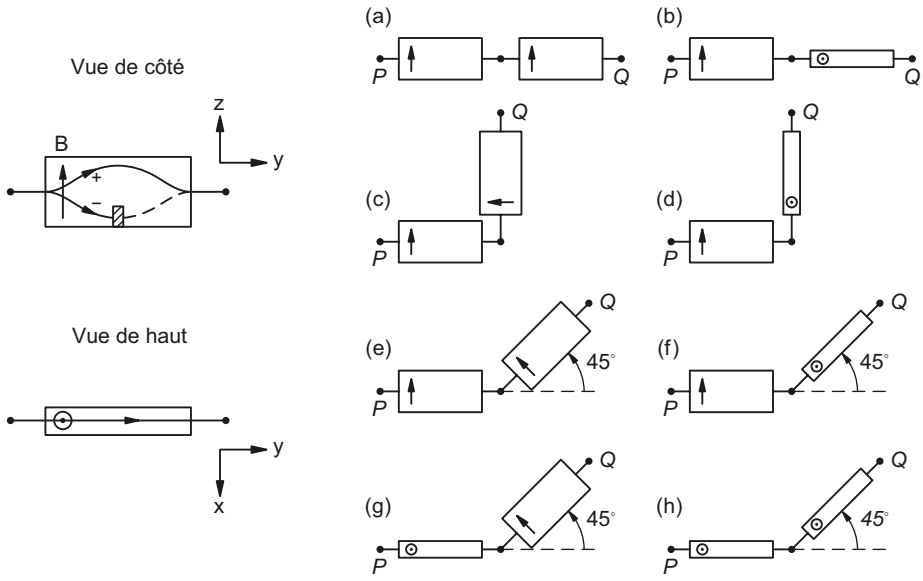


Figure 73.1

Exercice 73.2 Une particule de spin 1/2 entre dans un appareil avec des amplitudes a et b d'avoir le spin vers le haut ou vers le bas le long de l'axe z.

(a) Montrer que la probabilité pour que la particule arrive en un point quelconque de l'appareil est nécessairement de la forme $|aX + bY|^2$ où X et Y sont des nombres complexes caractéristiques de l'appareil.

En fonction de X, Y quelle est la probabilité d'arriver en un point donné si

(b) la particule entrante a son spin vers le haut le long de l'axe z ? vers le bas ?

(c) la particule entrante a son spin vers le haut le long de l'axe x ? vers le bas ?

(d) la particule entrante a son spin vers le haut le long d'un axe d'angles polaires θ, ϕ ?

Il y a plusieurs façons d'imaginer que les particules entrantes sont dans des états de spin aléatoires.

1. Dans certaines expériences, les spins des électrons sont vers le haut le long de z, pour d'autres vers le bas, on tire à pile ou face à chaque fois pour décider quel cas choisir.
2. Les mêmes circonstances qu'en (I) ci-dessus, sinon qu'elles sont vers le haut ou vers le bas de l'axe x.
3. Chacune est orientée dans une direction θ, ϕ mais toutes les directions sont tirées au sort (on moyenne alors sur l'angle solide $\sin\theta\, d\theta\, d\phi/4\pi$).

Pour chacune des circonstances « aléatoires » ci-dessus,

(e) trouver la probabilité moyenne $\langle P \rangle$ d'arriver dans l'appareil en un point quelconque, en montrant qu'elle est la même en toutes circonstances.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(f) supposons que les particules de spin 1/2 sortent d'un trou, étant préparées par une des méthodes (I), (II), (III) de l'autre côté. Pouvez-vous penser à une façon quelconque, en observant de votre côté du trou, telle que vous puissiez dire quelle méthode (I), (II), ou (III) a été utilisée ?

Exercice 73.3 Trois appareils de Stern-Gerlach pour spin 1/2, modifiés, S, T et U sont disposés en série comme sur la partie (a) de la figure 73.2.

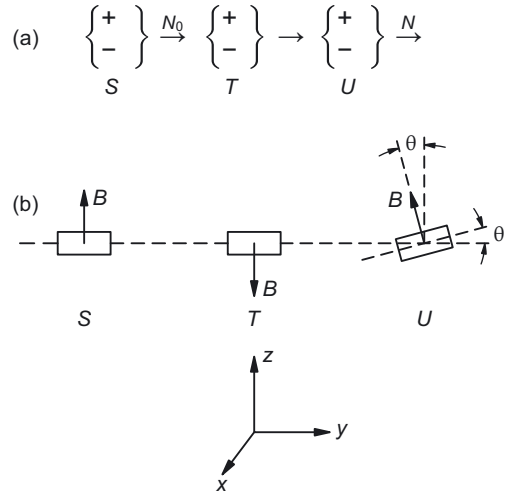


Figure 73.2

(a) Exprimer N, le nombre de particules de spin 1/2 sortant de U, en fonction de N_0, le nombre de particules sortant de S, et d'objets tels que $\langle +T \,|\, +U \rangle$, etc.

Considérons maintenant le même dispositif que précédemment, mais avec les orientations du champ $\boldsymbol{B}$ données dans la partie (b) de la figure 73.2. En particulier, le champ $\boldsymbol{B}$ de l'appareil T est tourné pour être anti-parallèle au champ $\boldsymbol{B}$ de l'appareil S, et le champ $\boldsymbol{B}$ de l'appareil U est tourné d'un angle θ de l'axe des z.

(b) Trouver $\langle +T \,|\, -S \rangle$ et $\langle -T \,|\, -S \rangle$ explicitement.

(c) Trouver explicitement $\langle +U \,|\, -S \rangle$ en utilisant, comme exercice, seulement la table de transformation pour les rotations autour des axes z et y.

(d) Trouver les formes limites de vos expressions (c) pour

1. $\theta = 0$.
2. $\theta = \pi$.

(e) Expliquer votre réponse pour $\theta = \pi$ dans la partie (d) en comparant avec $\langle +T \,|\, -S \rangle$ de la partie (b).

Exercice 73.4 Un morceau de calcite scinde un faisceau de lumière (allant dans la direction z) en deux correspondant à x et y. Un photon seul, entrant dans la calcite S a une amplitude d'être dans l'un ou l'autre de ces faisceaux, x, y. Un morceau semblable de calcite (retourné) peut être utilisé pour amener les deux faisceaux ensemble, etc.,

exactement comme dans l'appareil de Stern-Gerlach. Un autre morceau de calcite T peut avoir son axe penché d'un angle θ dans le plan xy, scindant dans des états x', y', ou xT, yT. Trouver les amplitudes $\langle xT \,|\, xS \rangle$, $\langle yT \,|\, yS \rangle$, etc., d'après vos connaissances sur la théorie classique de la lumière polarisée–en vous assurant que, dans chaque cas, l'intensité d'un faisceau d'un grand nombre de photons sera en accord avec le résultat classique. Considérez des rotations seulement autour de l'axe de propagation z, car la lumière ne peut pas être ramenée au repos (des rotations autour des autres axes peuvent être décrites par leur effet sur la direction de propagation plutôt que sur la polarisation–de cette façon la lumière, qui est un système à deux états, est très différente dans ses propriétés de transformation d'un électron, qui est également un système à deux états.)

Exercice 73.5 Trouver les quatre éléments de $\langle j \,|\, A \,|\, i \rangle$ où i et j sont x et y pour les appareils suivants que la lumière peut traverser :

(a) Un séparateur x-y en calcite et un cristal de recombinaison dont le faisceau y est bloqué.

(b) Un séparateur en calcite et un cristal de recombinaison placé à un angle θ avec un faisceau y bloqué.

(c) Un polaroid disposé pour laisser passer l'axe x.

(d) Un polaroid disposé suivant l'axe θ dans le plan xy.

(e) Un séparateur x-y en calcite et cristal de recombinaison avec un bloc de verre dans la faisceau x qui retarde la phase de ce faisceau d'un angle θ.

(f) Un séparateur x-y en calcite et cristal de recombinaison avec le même bloc de verre dans les deux faisceaux.

(g) Un séparateur en calcite et cristal de recombinaison orienté à 45° avec un bloc de verre dans le faisceau x qui retarde la phase de 90°.

(h) Une lame quart d'onde.

(i) Un matériau biréfringent, sur l'axe x (donner la formule générale en fonction de l'épaisseur).

(j) Une solution de sucre qui fait tourner le plan de polarisation vers la droite d'un angle θ.

(k) Un dispositif qui scinde le faisceau en des faisceaux x, y, puis change le faisceau x dans la direction y (en le mettant dans de l'eau sucrée qui fait tourner sa polarisation de 90°) et remet les deux faisceaux ensemble.

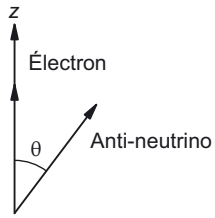
(l) Montrer que vous pouvez faire un mouvement perpétuel avec le dispositif de la partie (k) ci-dessus.

Exercice 73.6 Dans la théorie de la désintégration β, lors d'une certaine sorte de désintégration nucléaire (dans laquelle le noyau ne subit pas de modification de son moment cinétique ou de sa parité, et appelée « *Fermi allowed* ») un électron se déplaçant suivant l'axe z avec une vitesse v est émis avec une amplitude $\sqrt{1 - v/c}\,\sin\theta/2$ avec son spin

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

vers le haut de l'axe z, et une amplitude $\sqrt{1+v/c}\cos\theta/2$ avec son spin vers le bas de z. (Ici, θ est l'angle, à partir de z, où l'anti-neutrino est émis, comme sur la figure 73.3. Soit dit en passant, tous les anti-neutrinos ont toujours leur spin suivant leur direction de propagation).

Figure 73.3



(a) Quelle est la probabilité que le spin soit vers le haut de l'axe z ? Vers le bas ?

(b) Quelle est la probabilité que le spin soit dans la direction[1] $+x$ (si le neutrino est dans le plan xz) ? La direction $-x$?

(c) Quelles sont les probabilités dans les directions $\pm y$?

(d) Si, comme d'habitude, le (anti-)neutrino n'est pas observé (on moyenne sur toutes les directions des anti-neutrinos) quelle est votre réponse à la partie (a) ?

Exercice 73.7 Dans l'exercice 73.6, si l'on fait une transformation de Lorentz de vitesse v le long de z pour amener l'électron au repos, cela ne change pas les valeurs numériques des amplitudes pour avoir le spin vers le haut ou vers le bas selon cet axe. (Pouvez-vous trouver une raison à cela ?) Toutefois, la direction apparente de l'antineutrino est, bien entendu, changée. Montrer que les amplitudes de l'exercice 73.6 signifient que le spin de l'électron est aligné dans la direction opposée à celle de l'anti-neutrino, dans le système au repos de l'électron (et par conséquent la direction opposée à celle du spin de ce neutrino). (Cela est dû au fait que le noyau n'a pas perdu de moment cinétique.)

74. La dépendance en temps des amplitudes

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique quantique, Chap. 7.

Exercice 74.1 Une particule de spin un dans un champ magnétique $\boldsymbol{B}$ dirigé suivant la direction z a trois états (étiquetés $+$, 0, $-$) d'énergie $+\mu B$, 0 et $-\mu B$ respectivement.

(a) Montrer, en mécanique quantique, que dans un champ magnétique inhomogène un faisceau de telles particules serait scindé en trois faisceaux, et trouver les lois donnant la déviation $\Delta\theta$, supposée petite (en fonction de la longueur du champ L, de l'impulsion initiale des particules p_0, etc.).

1. À proprement parler, ceci se rapporte au système de coordonnées en mouvement avec l'électron. Utiliser simplement les formules standard pour combiner les amplitudes.

(b) Montrer, en mécanique quantique, qu'une telle particule va « précesser » (utiliser les coefficients de la section 5.7 du volume III, pour faire un raisonnement analogue à celui de la section 7.5.).

(c) Suggérer au moins deux moyens indépendants qui permettraient de mesurer μ expérimentalement.

75. L'Hamiltonien matriciel

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique quantique, Chap. 8.

- *Remarques sur la définition des états de base :*

Notre définition initiale des états « + » et « − » reposait sur la déviation par rapport à la direction de $\boldsymbol{B}$ et de $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}$ (qui étaient tous deux dans la direction $+z$) dans un appareil de Stern-Gerlach. Puisque, dans le plan de symétrie, $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot U = \mu_z(\partial B/\partial z)\boldsymbol{e}_z$, on voit que l'appareil de S-G mesurait la composante du moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$, et non du moment cinétique (ou spin) $\boldsymbol{J}$. Mais le moment cinétique $\boldsymbol{J}$ est, par beaucoup d'aspects, une quantité plus fondamentale que $\boldsymbol{\mu}$, et nous préférons définir nos états de base à partir de la valeur de $\boldsymbol{J}$. Par conséquent, nous devons redéfinir les états de base dans les systèmes où $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{J}$ sont antiparallèles (comme l'électron, et les systèmes atomiques). Mais nous ne sommes pas obligés de changer nos matrices de rotation, car elles provenaient des propriétés de l'espace à trois dimensions, et nous avions le choix des phases relatives de certains éléments. La convention consistant à définir les états de base suivant la valeur de J_z est, de fait, celle qui est utilisée plus tard dans le texte. Dans les tables du chapitre 12 du volume III, par exemple, les états sont définis à partir du signe du nombre $m = J_z/\hbar$. Dans la section 7.5, le muon négatif est considéré comme étant dans l'état $|+\rangle$ par rapport à l'axe x lorsque son spin pointe dans la direction de $+x$, même si son moment magnétique pointe alors dans la direction $-x$.

Avec cette convention, la direction de $\boldsymbol{\mu}$ par rapport à $\boldsymbol{J}$ n'entre pas en ligne de compte dans une rotation des coordonnées, mais elle doit être prise en compte lorsque nous considérons les forces et l'énergie.

Pour une particule dans un champ magnétique uniforme, par exemple, les états de base dans un système de coordonnées où l'axe z est parallèle à $\boldsymbol{B}$ sont aussi des états stationnaires (leur énergie est constante). La dépendance en temps des amplitudes est donnée par $e^{-iEt/\hbar}$, où $E = U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} = \mu_z B$. Il est clair que pour un état de J_z donné, le signe de l'exposant va dépendre du fait que $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{J}$ sont parallèles ou antiparallèles.

$(t, B\boldsymbol{e}_z)$	$\lvert+\rangle$	$\lvert-\rangle$
$\langle+\rvert$	$e^{i\gamma t}$	0
$\langle-\rvert$	0	$e^{-i\gamma t}$

$$\gamma = \begin{cases} +g_e B/2m & \text{pour le positron} \\ -g_e B/2m & \text{pour l'électron} \end{cases}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Par exemple, pour l'électron nous avons $\boldsymbol{\mu} = -(g_e/m)\boldsymbol{J}$ ($g_e = 2$), alors que pour un positron $\boldsymbol{\mu} = +(g_e/m)\boldsymbol{J}$. Les valeurs possibles de J_z sont $\pm\hbar/2$, et la dépendance en temps des amplitudes est donnée dans la Table .2, où $(t,\boldsymbol{Be}_z)$ représente le fait que notre « appareil » consiste à attendre un certain temps t dans le champ magnétique $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$.

Notons, comme cela a été dit dans un cours, que le signe des exposants de l'équation (7.36) du volume III doivent être inversés, car pour le muon négatif, comme pour l'électron, $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{J}$ sont antiparallèles.

Dans les problèmes suivants nous allons considérer des particules de spin 1/2 avec $|\mu_z| = \mu$ mais la direction relative de $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{J}$ n'est pas précisée. Pour que vos réponses soient en accord avec celles données dans l'appendice, il faut supposer dans vos solutions (comme nous dans les nôtres) que $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{J}$ sont parallèles. (S'ils étaient antiparallèles dans une situation donnée, on trouverait le bon résultat en remplaçant μ par $-\mu$.)

Exercice 75.1 Un faisceau de particules de spin 1/2 et de moment magnétique μ est envoyé dans un filtre de Stern-Gerlach qui ne laisse passer que les particules dans l'état $|+\rangle$ (spin vers le haut) par rapport à l'axe z. Les particules passent ensuite un temps T dans un champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B}_0$ qui est parallèle à l'axe x. Après avoir quitté le champ uniforme, les particules entrent dans un deuxième filtre de Stern-Gerlach qui ne laisse passer que les particules dans l'état $|-\rangle$ (spin vers le bas) par rapport à l'axe z.

(a) Quelle est la plus petite valeur de B_0 pour laquelle toutes les particules passent au travers du deuxième filtre ?

(b) Si les particules passent un temps deux fois plus court dans le même champ, quelle est la probabilité P qu'elles passent au travers du second filtre ?

Exercice 75.2 Un faisceau de particules de spin 1/2 et de moment magnétique μ est envoyé dans un filtre de Stern-Gerlach qui ne laisse passer que les particules dans l'état $|+\rangle$ (spin vers le haut) par rapport à l'axe z. Le faisceau va alors entrer dans un champ magnétique qui est à 45° de l'axe z dans le plan xz. À un instant t plus tard, quelles sont les probabilités $P_{+x}(t)$ et $P_{+y}(t)$ que les particules soient trouvées, respectivement, avec $J_x = \hbar/2$ ou avec $J_y = \hbar/2$?

Exercice 75.3 Une particule de spin 1/2 a un spin pointant dans la direction $+z$ à l'instant $t = 0$. La particule est située dan un appareil tel que l'amplitude par unité de temps de passer de l'état $+z$ à l'état $-z$ est la même que l'amplitude de passer de l'état $-z$ à l'état $+z$ et toutes deux sont égales à i fois une constante positive $(A/\hbar)$, c'est-à-dire que, $H_{12} = H_{21} = -A$. De plus, $H_{11} = H_{22}$ et ils peuvent tous deux être choisis égaux à zéro.

(a) Quelle est la probabilité $P_{+z}(t)$ de trouver la particule dans l'état $+z$ à un instant $t > 0$?

(b) Trouver les deux combinaisons d'amplitudes d'être dans les états $+z$ et $-z$ qui correspondent à des états stationnaires. Quelle sont les énergies de ces états ?

(c) À tout instant t, il existe un axe le long duquel la probabilité de trouver le spin vers le haut est égale à un. Quelle est la direction de cet axe ?

(d) Pouvez-vous imaginer un dispositif qui réaliserait cet effet ?

76. Le maser à ammoniac

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique quantique, Chap. 9.

Exercice 76.1 Au chapitre 9 du volume III, la probabilité qu'une molécule d'ammoniac fasse une transition de l'état $|II\rangle$ à l'état $|I\rangle$ en étant soumise à un rayonnement de micro-ondes a été calculée ; l'état $|II\rangle$ a une énergie plus basse que l'état $|I\rangle$ et cela correspond à l'absorption d'énergie de rayonnement.

(a) Développer à nouveau ces idées pour trouver la probabilité $P(I \to II)$ *par unité de temps* pour l'émission induite par la molécule.

(b) Comparer la probabilité d'absorption $P(II \to I)$ et celle d'émission (stimulée) $P(I \to II)$?

(c) Comment ces probabilités sont-elles reliées aux coefficients d'Einstein A et B définis au chapitre 42 du volume I ?

(d) Trouver le taux d'émission spontanée $A_{I,II}$ par la molécule d'ammoniac.

77. Autres systèmes à deux états

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique quantique, Chap. 10.

Exercice 77.1 Les protons (de moment magnétique μ) dans un récipient d'eau sont exposés à un champ magnétique uniforme. Si la grandeur du champ $\boldsymbol{B}$ reste constante, sa direction change dans le temps pour une expérience de résonance magnétique nucléaire (RMN).

$$\begin{aligned} B_x &= B\sin\theta\cos\omega t \\ B_y &= -B\sin\theta\sin\omega t \\ B_z &= B\cos\theta \end{aligned}$$

Initialement ($t = 0$), les spins des protons sont alignés le long du champ magnétique dans l'état $+1/2$. ON suppose que θ, l'angle avec l'axe z en coordonnées sphériques, est très petit.

(a) Quelle doit être la valeur de ω pour qu'il y ait résonance ?

(b) Quelle est la probabilité $P_{-z}(t)$ pour que la particule à l'instant t ait son spin vers le bas de l'axe z, lorsque ω est à la résonance ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 77.2 Une particule de spin 1/2 (moment magnétique μ) est placée dans un fort champ magnétique $\boldsymbol{B}_0$. Un champ magnétique oscillant $2\boldsymbol{B}_n \cos \omega t$ dont la grandeur est beaucoup plus faible que $\boldsymbol{B}_0$ est appliqué dans une direction perpendiculaire à $\boldsymbol{B}_0$. Si les spins des particules étaient initialement alignés dans une direction opposée à $\boldsymbol{B}_0$, quelle est la probabilité $P_{\|}(t)$ que les spins soient alignés parallèlement à $\boldsymbol{B}_0$ à au instant t ?

78. Davantage de systèmes à deux états

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique quantique, Chap. 11.

Exercice 78.1

(a) Montrer que les matrices de Pauli du spin peuvent être traitées comme les composantes d'un vecteur $\boldsymbol{\sigma}$ obéissant aux règles suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\sigma} = 2i\boldsymbol{\sigma}$$
$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Trouver σ_x, σ_y, et σ_z.

Exercice 78.2 Le dioxyde de carbone est une molécule linéaire (OCO) qui aime bien prendre un électron supplémentaire et devenir ainsi un ion négatif. Imaginons que cet électron ait l'énergie E_{O} s'il est lié à l'un quelconque des atomes d'oxygène, et l'énergie E_{C} s'il est lié à l'atome de carbone. Les états stationnaires, toutefois, n'ont pas nécessairement ces énergies car il y a une petite probabilité que l'électron saute entre un atome d'oxygène et un atome de carbone. (On supposera que la probabilité de faire un grand saut d'un oxygène à l'autre est négligeable.)

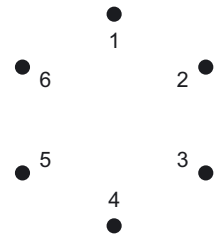
(a) Trouver les niveaux d'énergie possibles de l'ion CO_2 en termes de E_{O}, de E_{C}, et d'un autre paramètre.

(b) Donner une description physique de chaque état stationnaire, dans le cas où les énergies E_{O} et E_{C} sont égales.

Exercice 78.3 Dans la molécule de méthane, quatre atomes d'hydrogène sont placés aux quatre coins d'un tétraèdre avec un seul atome de carbone au centre. Dans l'ion méthane, un électron manque sur l'un des quatre liens, ce qui laisse un « trou » qui peut « sauter » de n'importe quel atome H à un autre. C'est là l'exemple d'un système à quatre états. En utilisant des arguments de symétrie pour réduire au maximum le nombre d'éléments de matrice différentes de l'Hamiltonien, prévoir le nombre de niveaux d'énergie différents que l'on s'attend à observer dans la structure électronique de l'ion méthane. Exprimer la séparation des niveaux à partir du plus petit nombre d'éléments de matrice possible.

Exercice 78.4 Considérons six atomes répartis de façon symétrique autour d'un cercle, comme sur la figure 78.1. Ajoutons un électron et définissons les états de base $|1\rangle, |2\rangle, \ldots |6\rangle$, où $|1\rangle$ signifie que l'électron est sur l'atome 1, $|2\rangle$ sur l'atome 2, etc. On suppose que l'électron supplémentaire a une amplitude par unité de temps bien définie $-iA/\hbar$ pour sauter de n'importe quel atome (sur lequel il se trouve) vers n'importe lequel de ses plus proches voisins ; et une amplitude nulle pour sauter plus loin.

Figure 78.1



(a) Montrer que $|I\rangle$ est un état stationnaire si les amplitudes $C_k = \langle k|I\rangle$, $|k\rangle$ étant $k^{\text{ième}}$ état de base, sont tous égaux à $(1/\sqrt{6})\exp(-\frac{i}{\hbar}E_I t)$.

(b) Trouver E_I dans la question précédente.

(c) Combien d'états staitonnaires y a-t-il ?
On peut montrer que si ψ est un état stationnaire, les amplitudes $C_k = \langle k|\psi\rangle$ sont reliées de la façon suivante pourvu que δ soit bien choisi :

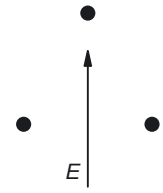
$$C_2 = C_1 e^{i\delta}$$
$$C_3 = C_2 e^{i\delta}$$
$$C_4 = C_3 e^{i\delta}$$
$$C_5 = C_4 e^{i\delta}$$
$$C_6 = C_5 e^{i\delta}$$

(d) Quelles sont les valeurs permises de δ ?

(e) Trouver le diagramme des niveaux d'énergie du système et donner l'espacement des niveaux.

Exercice 78.5 Une molécule est faite de trois atomes semblables placés aux sommets d'un triangle équilatéral. Dans l'ion négatif de cette molécule, un électron additionnel est ajouté qui peut sauter d'un atome à l'autre.

Figure 78.2



(a) Poser que l'élément de matrice de l'Hamiltonien pour sauter d'un atome quelconque à un autre est égal à $-A$ et calculer l'espacement des énergies de l'ion moléculaire.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(b) Un champ électrique est appliqué à l'ion dans le plan de l'ion et pointe vers un des sommets comme sur la figure 78.2. Si l'intensité du champ est telle que l'énergie potentielle de l'électron à ce sommet est accrue de $\epsilon A = 0{,}01A$ au-dessus de l'énergie potentielle aux autres coins, de combien et de quelle façon les espacements des niveaux d'énergie sont-ils changés ?

79. Le clivage hyperfin de l'atome d'hydrogène

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique quantique, Chap. 12.

Exercice 79.1 Calculer le clivage dans le niveau $j = 1$ d'un atome d'hydrogène placé

(a) dans l'espace interstellaire où le champ magnétique est de l'ordre de 10^{-5} gauss ;

(b) à la surface de la terre où le champ magnétique est environ 1/2 gauss ;

(c) dans les plus grands champs magnétiques qui ont été produits en laboratoire ; c'est-à-dire des champs d'environ 100 000 gauss.

Exprimer les résultats à la fois en longueurs d'onde et en fréquences.

80. Propagation dans un réseau cristallin

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique quantique, Chap. 13.

Exercice 80.1 On considère une chaîne infinie d'atomes également espacés de b, et on suppose qu'un électron peut être attaché à n'importe lequel de ces atomes dans deux configurations i et j avec des énergies différentes E_i et E_j, c'est-à-dire, que l'on considère comme convenable l'ensemble d'états de base suivant :

$$\left|\begin{array}{l}\text{électron sur l'atome } x_n \\ \text{dans la configuration } i\end{array}\right\rangle = |\,x_n, i\rangle,$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{électron sur l'atome } x_n \\ \text{dans la configuration } j\end{array}\right\rangle = |\,x_n, j\rangle.$$

On suppose en outre que l'électron peut sauter d'un atome à un de ses plus proches voisins avec des amplitudes :

$$-\frac{A_{ii}}{i\hbar} \text{ pour aller de } |\,x_n, i\rangle \text{ à } |\,x_{n+1}, i\rangle \text{ ou } |\,x_{n-1}, i\rangle,$$

$$-\frac{A_{jj}}{i\hbar} \text{ pour aller de } |\,x_n, j\rangle \text{à } |\,x_{n+1}, j\rangle \text{ ou } |\,x_{n-1}, j\rangle,$$

$$-\frac{A_{ji}}{i\hbar} \text{ pour aller de } |\,x_n, i\rangle \text{ à } |\,x_{n+1}, j\rangle \text{ ou } |\,x_{n-1}, j\rangle,$$

$$-\frac{A_{ij}}{i\hbar} \text{ pour aller de } |\,x_n, j\rangle \text{ à } |\,x_{n+1}, i\rangle \text{ ou } |\,x_{n-1}, i\rangle.$$

On considère le cas où $A_{ij} = A_{ji} = -A$ et $A_{jj} = A_{ii} = -B$.

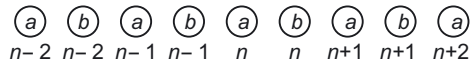
(a) En suivant la procédure décrite au chapitre 13 du volume III, trouver les valeurs permises pour l'énergie d'un tel système.

(b) Décrire la structure de bande dans les cas $|E_i - E_j| \ll 2B$, et $|E_i - E_j| \gg 2B$.

Vérifier ces résultats avec la solution trouvée au chapitre 13.

Exercice 80.2 On considère une ligne infinie d'atomes composée de deux types d'atomes, le type « a » et le type « b », comme sur la figure 80.1. Soit C_n^a l'amplitude pour qu'un électron se trouve sur le site n de type « a », et C_n^b celle qu'il se trouve sur le site n de type « b ». On suppose que l'énergie d'un électron sur un atome « a » est $E_0 + \Delta E$ alors que sur un atome « b » elle est $E_0 - \Delta E$. On suppose, en outre, que l'Hamitonien possède des éléments de matrice égaux à $-A$ pour les sauts entre plus proches voisins. L'espacement des atomes est b.

Figure 80.1



(a) Calculer et esquisser l'énergie d'un état stationnaire en fonction du nombre d'onde k de l'électron. (Il y aura deux énergies pour une valeur données de k.)

(b) Quelles limites peut-on mettre sur k, de façon à inclure chaque état une fois et une seule ?

Exercice 80.3 Diffusion sur une impureté. En se rapportant à l'exemple de la section 13.6 du volume III, on va faire que l'atome $n = 0$ soit différent d'une autre manière. Soit $H_{00} = E_0$, $H_{01} = H_{10} = H_{0(-1)} = H_{(-1)0} = -B$, où $B \neq A$.

(a) Trouver l'amplitude de transmission γ, et l'amplitude de réflexion (diffusion) β.

(b) Vérifier que $|\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$.

Exercice 80.4 Pour l'exercice 80.3 et pour l'exemple de la section 13.6 du volume III, $\gamma = 1 + \beta$. Il est facile de vérifier que $\gamma = 1 + \beta$ est également vrai dans le cas général qui combine les deux. « La conservation des particles » donne par conséquent, pour le cas général de la diffusion à une dimension :

$$|\beta|^2 + |1 + \beta|^2 = 1.$$

(a) Montrer que cela demande que $\mathrm{Re}\,[\beta/(1 + \beta)] = 0$.

(b) Montrer que β peu s'écrire :

$$\beta = ie^{i\eta} \sin \eta,$$

où η est réel.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

La quantité η est appelée « le déphasage de diffusion » et il nous donne à la fois la phase et la grandeur de l'onde diffusée. (Cela est vrai à trois dimensions comme à une dimension.)

Exercice 80.5 Considérons l'analogue à une dimension d'une interface où un cristal infini change ses propriétés, comme sur la figure 80.2. La particule incidente vient de la gauche, comme en section 13.6 du volume III. Dans la région I, on a les paramètres E_0, $-A$, b, et dans la région II, E_0', $-A'$, b'. L'amplitude analogue à A et A' qui s'applique au cas de deux atomes de chaque côté de l'interface, $n = 0$ et $n = +1$, est B. (On suppose A, A', B, réels.)

Figure 80.2

(a) Montrer que $\gamma = (B/A')(1 + \beta)$ à l'interface des atomes $n = 0$ et $n = +1$.

(b) Trouver β en fonction de A, A', B, kb, $k'b'$.

(c) Montrer que si $k'b'$ est imaginaire $|\beta| = 1$. Qu'est-ce que cela signifie physiquement ? (Quelles valeurs de $E - E_0'$ produisent une réflexion complète ?)

(d) Vérifier la conservation des particules en montrant que

$$|\beta|^2 + \frac{v_g'/b'}{v_g/b}\,|\gamma|^2 = 1,$$

où v_g et v_g' sont les vitesses de groupe dans les deux régions. Pouvez-vous expliquer le facteur qui multiplie $|\gamma|^2$?

81. Les semi-conducteurs

On se référera au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique quantique, Chap. 14.

Exercice 81.1 Les expériences de résonance cyclotron sont effectuées d'habitude comme montré schématiquement sur la figure 81.1, où $B = B_0$, un champ magnétique statique dans la direction z, et $E_{\text{rf}} = E_0 \cos \omega t$, le long de l'axe x. La résonance à ω_c, la fréquence de résonance cyclotron, est détectée par un changement de la puissance absorbée du champ E_{rf}. À partir de considérations élémentaires sur l'orbite d'une particule dans un champ magnétique, cette fréquence est :

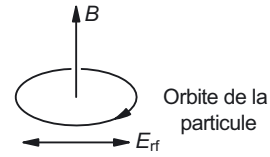
$$\omega_c = \frac{qB}{m^*},$$

où m^* est la masse effective. On supposera dans ce qui suit que m^* ne dépend pas de la direction de la particule en mouvement. Pour l'équation du mouvement d'un électron (ou d'un trou) dans un semi-conducteur, on prendra :

$$m^*\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\frac{1}{\tau}\boldsymbol{v}\right)=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}),$$

où τ est le temps moyen entre collisions. (Voir les sections 32.1 et 32.6 du volume II.)

Figure 81.1



(a) Soit $v_x = v_0 e^{i\omega t}$ et $E_x = E_0 e^{i\omega t}$, montrer que

$$\frac{v_x}{E_x}=\frac{q\tau}{m^*}\left[\frac{1+i\omega\tau}{1+(\omega_c^2-\omega^2)\tau^2+2i\omega\tau}\right].$$

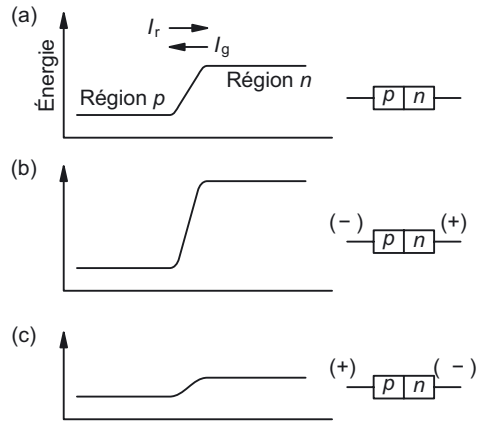
(b) Expliquer pourquoi l'absorption de puissance est proportionnelle à $\mathrm{Re}\,[v_x/E_x]$ ci-dessus.

(c) Décrire comment τ et m^* peuvent être obtenus à partir de données sur la résonance cyclotron.

(d) La détection exige que $\omega_c\tau > 1$. Quel est le sens physique de cette condition ?

Exercice 81.2 Le diagramme d'énergie pour les trous dans une jonction « p-n » typique (comme une diode) est montrée dans la partie (a) de la figure 81.2, lorsque aucun voltage externe n'est appliqué. À l'équilibre, il y a « génération thermique » d'un courant I_g de trous qui diffuse de la région n à la région p et est égal au courant de « recombinaison » I_r de trous qui va de la région p à la région n. Lorsqu'un biais de « voltage inverse » est appliqué, le diagramme d'énergie est comme dans la partie (b) de la figure, et quand un biais de « voltage direct » est appliqué, il change comme sur la partie (c).

Figure 81.2



© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(a) En considérant les courants d'abord en équilibre, puis avec des biais de voltage, montrer que le courant net a la forme

$$I(\text{trous}) = I_g(e^{qV_e/kT} - 1)$$

où V_e est le voltage appliqué à la jonction.

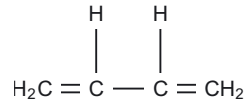
(b) Quelle est la relation pour le courant total ?

82. L'APPROXIMATION DES PARTICULES INDÉPENDANTES

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique quantique, Chap. 15.

Exercice 82.1 La structure de la molécule de butadiène peut être représentée comme sur la figure 82.1. Si l'on enlève (par la pensée) les quatre électrons des doubles liaisons, et qu'ensuite on les ajoute séparément, on peut traiter le problème avec le modèle des particules indépendantes. Très précisément, nous pouvons considérer un système à quatre puits avec les énergies habituelles E_0 et les élements d'Hamiltonien $-A$.

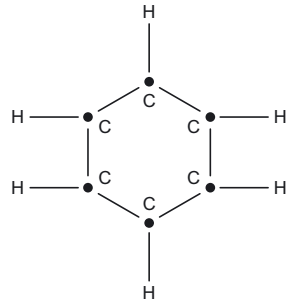
Figure 82.1



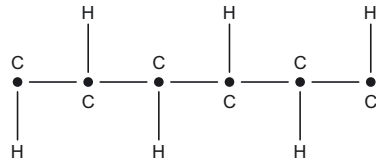
(a) Quel est la longueur d'onde du rayonnement λ émis lors de transitions de molécules de butadiène du premier état excité vers l'état fondamental ? On supposera que $A = 1\,\text{eV}$.

(b) Dans le butadiène ionisé une fois, seuls trois électrons des liaisons doubles sont présents. Que peut-on dire de la façon dont ces électrons sont distribués dans la molécule ?

Exercice 82.2 Estimer l'énergie nécessaire pour casser un anneau de benzène en utilisant la théorie orbitale moléculaire (dans l'approximation des particules indépendantes) pour calculer la différence d'énergie ΔE entre les configurations (a) et (b) de la figure 82.2. Trouver la réponse en électron-volts en utilisant le fait que la transition du premier état excité du benzène vers l'état fondamental produit un rayonnement de longueur d'onde d'environ 2 000 Å.



(a)



(b)

Figure 82.2

Exercice 82.3 Un matériau ferromagnétique à très basse température peut être discuté dans des termes semblables aux ondes de spin discutées au chapitre 15 du volume III. Très précisément, pour un mode quelconque K d'énergie $E_K \approx Ab^2K^2$, il y a une distribution de probabilité, reposant sur la thermodynamique, pour trouver soit aucun, soit un, soit deux, soit trois, etc., spins vers le bas dans un matériau ferromagnétique qui, à température nulle, a tous ses spins alignés vers le haut.

(a) Montrer que, pour le mode K, le nombre moyen d'atomes avec le spin vers le bas est proportionnel à

$$\frac{1}{e^{E_K/kt}-1}.$$

(b) Si on étend ces idées à trois dimensions, alors $E_K \approx Ab^2(K_x^2+K_y^2+K_z^2)$ et le nombre moyen total de spins vers le bas par unité de volume est donné par

$$\frac{\text{Nombre de spins en bas}}{\text{volume}} = \int \frac{d^3K/(2\pi)^3}{e^{E_K/kt}-1}.$$

Montrer pourquoi.

(c) Dans la limite où T tend vers zéro, la magnétisation tend vers la magnétisation de saturation, M_{sat}. Montrer qu'à basse température le rapport de la magnétisation à la magnétisation de saturation a la forme

$$\begin{aligned}\frac{M}{M_{\text{sat}}} &= 1 - \text{const}\, T^{3/2} \\ &= 1 - \left(\frac{kT}{4\pi A}\right)^{3/2}\left[\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{e^{x^2}-1}\right]\end{aligned}$$

(d) Évaluer l'intégrale dans la partie (c) ci-dessus en développant l'intégrand en série.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

83. La dépendance des amplitudes dans la position

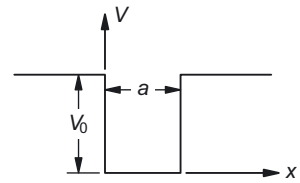
Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique quantique, Chap. 16.

Exercice 83.1 Considérons le mouvement à une dimension d'une particule de masse m liée dans un puits de potentiel carré, comme sur la figure 83.1, avec

$$V = \begin{cases} V_0, & x < 0 \text{ or } x > a \\ 0, & 0 < x < a. \end{cases}$$

Note : pour simplifier, faire $V_0 \to \infty$.

Figure 83.1



(a) Pour l'état stationnaire de plus basse énergie E_0, $\psi_0(x,t) = u_0(x)e^{-iE_0t/\hbar}$. On doit avoir $u_0(x) = 0$ hors du puits (c'est-à-dire en $x = -\epsilon$ ou $x = a + \epsilon$). Pourquoi ?

(b) Résoudre l'équation de Schrödinger dans le puits, avec la condition précédente.

(c) Trouver E_0 et dessiner $u_0(x)$. (Il n'est pas nécessaire de normaliser $u_0(x)$.)

(d) Trouver la différence d'énergie entre l'état fondamental et le premier état excité.

(e) Pour l'état fondamental, dessiner la distribution de probabilité de trouver la particule avec une impulsion p à dp près. Aucune intégration exacte n'est nécessaire. Ne pas se préoccuper de la normalisation. Mais indiquer l'échelle sur l'axe de l'impulsion.

Exercice 83.2 Considérons le mouvement d'une particule de masse m dans un potentiel à une dimension, comme sur la figure 83.2(a), défini par :

$$V = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 < x < a \\ V_0, & x > a \end{cases}$$

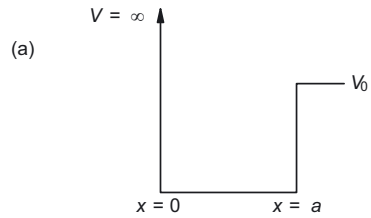
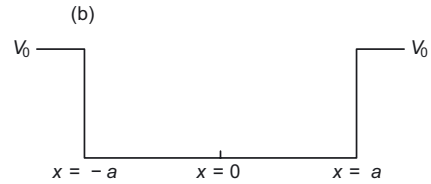


Figure 83.2



(a) Trouver la valeur de V_0 telle que l'énergie de la particule dans l'état fondamental de ce puits soit inférieure de 10 % à l'énergie dans l'état fondamental d'un puits avec $V_0 \to \infty$.

(b) On prend pour V_0 la valeur trouvée ci-dessus dans le puits de potentiel de la figure 83.2(b), défini par :

$$V = \begin{cases} V_0, & x < -a \\ 0, & -a < x < a \\ V_0, & x > a \end{cases}$$

Sans calcul détaillé, donner l'énergie du premier état excité de ce puits.

Exercice 83.3 Soit le problème à une dimension d'une particule de masse m liée dans un puits de potentiel rectangulaire :

$$V = \begin{cases} V_0, & |x| > a \\ 0, & |x| < a \end{cases}$$

(a) Montrer qu'on obtient les deux équations suivantes en imposant que les fonctions d'onde soient des solutions de l'équation de Schrödinger qui satisfont les conditions aux limites requises :

$$\alpha \cot(\alpha a) = -\beta,$$

or

$$\alpha \tan(\alpha a) = +\beta,$$

où

$$\alpha = + \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},$$

$$\beta = + \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(b) Si $V_0 a^2 = 4\hbar^2/2m$, estimer l'énergie de l'état fondamental et du premier état excité. Dessiner les fonctions d'onde de ces deux états.

(c) Combien y a-t-il d'états liés si $V_0 a^2 < \pi^2\hbar^2/8m$?

Exercice 83.4 Au chapitre 16 du volume III on a trouvé la dispersion en impulsion correspondant à une fonction d'onde gaussienne. En général, la dispersion spatiale ne restera pas constante au cours du temps, mais va s'étaler :

$$\psi(x) = Ke^{-[a(t)x^2+c(t)]}.$$

(a) En utilisant l'équation de Schrödinger, montrer que pour une particule libre,

$$\frac{1}{a(t)} = \frac{1}{a_0} + \frac{2i\hbar}{m}t,$$

où $a_0 = a(0)$.

(b) À quoi correspond $c(t)$?

(c) Si la fonction d'onde décrit un électron initialement confiné dans une région de largeur 1 Å, à quelle distance se sera-t-elle étalée en une seconde ?

(d) Transformer la fonction d'onde $\psi(x)$ dans l'espace des impulsions $\phi(p)$, et donner la probabilité de trouver la particule avec une impulsion définie p.

(e) Comment varie la largeur Δp de la fonction de probabilité de l'impulsion avec le temps ?

(f) Montrer que l'étalement en impulsion trouvé ici est en accord avec « l'étalement en vitesse » trouvé directement à partir de la dépendance en temps de la fonction d'onde spatiale.

84. Le moment cinétique

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique quantique, Chap. 18.

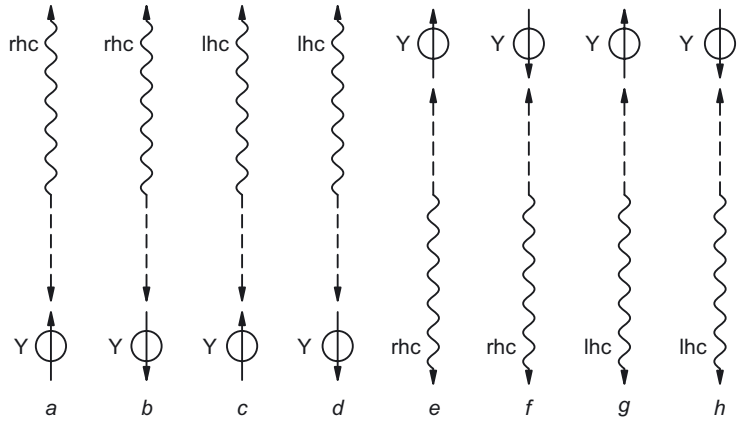
Exercice 84.1 Un certain état excité d'un atome a un spin un et peut perdre de l'énergie en émettant un photon et en se retrouvant dans un état de spin zéro. Considérons un certain état excité dont la composante du moment cinétique suivant un certain axe z est nulle, et soit $A(\theta)$ l'amplitude qu'il émette un photon polarisé circulairement dans un petit angle solide $\Delta\Omega$ autour d'une direction à un angle θ de l'axe z. Quelle est la dépendance de $A(\theta)$ en θ ?

Exercice 84.2 Le X, une particule de spin 1/2 et de parité positive, se désintègre suivant le schéma :

$$\mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y} + \gamma$$

où Y est une particule de spin 1/2 et de parité positive. Si le X était polarisé avec son spin dirigé vers le haut suivant l'axe z, il pourrait se désintégrer avec des produits de désintégration se déplaçant suivant l'axe z de huit façons, avec des amplitudes de a à h, comme le montre la figure 84.1 (les flèches ondulées représentent des photons qui se déplacent dans la direction de la flèche, et la flèche sur le Y indique la direction de son spin). Soit θ l'angle entre la polarisation du X et l'impulsion du Y.

Figure 84.1



(a) Lesquelles des amplitudes a–h sont nécessairement nulles ?

(b) Calculer la distribution angulaire $f^+(\theta)$ des Y polarisés dont les spins pointent dans la même direction que leur direction de propagation (« hélicité positive ») lorsqu'un ensemble de X polarisés vers le haut suivant l'axe z de désintègre.

(c) Calculer la distribution angulaire $f(\theta)$ de tous les Y, quelle que soit leur polarisation, lorsqu'un ensemble de X polarisés vers le haut suivant l'axe z se désintègre.

(d) Des expériences minutieuses n'ont pas pu détecter une distribution angulaire qui ne soit pas constante (uniforme) dans cette désintégration. Quelle pourrait en être la raison physique ?

Exercice 84.3 La réaction

$$\gamma + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p}^* \rightarrow \mathrm{p} + \pi^0$$

est étudiée au synchrotron de Caltech. Dans cette réaction, p^* est un état excité du proton qui se désintègre en un proton et un π^0. Dans une certain gamme d'énergie du photon, le p^* a un moment cinétique total $j = 3/2$. Supposons qu'un faisceau de photons de polarisation circulaire droite d'énergie calibrée pour donner un p^* avec $j = 3/2$ soit incident dans la direction $+z$ sur des protons non polarisés. La distribution angulaire de cette réaction peut être analysée de la façon suivante. Le photon et le proton ont une amplitude a pour former un p^* dans l'état $|\, j = 3/2, m = +1/2\rangle$ et une amplitude b pour former un p^* dans l'état $|\, 3/2, +3/2\rangle$. Puis, l'état excité du proton, p^*, se désintègre en un pion neutre de spin nul et un proton se déplaçant dans des directions opposées. Soit c l'amplitude pour que le proton aille le long de l'axe $+z$ avec son spin vers le haut et d l'amplitude qu'il aille le long de l'axe $-z$ avec son spin vers le haut.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(a) Expliquer pourquoi seules les valeurs $m = +3/2$ et $m = +1/2$ sont permises pour le p^* et pourquoi seules les valeurs $m' = +1/2$ et $m' = -1/2$ sont permises pour l'état final. (La projection m' fait référence à la direction d'émission.)

(b) Donner la distribution angulaire des π^0 à partir de a, b, c et θ. (On supposera que $c = d$, en donner la raison.)

Exercice 84.4 Soit la diffusion élastique de mésons $\pi+$ sur une cible non polarisée de protons. (Le méson a un spin nul ; la parité est conservée.) On suppose que la diffusion est dominée par un processus où le proton est excité dans un état de $j = 3/2$ par l'absorption du méson. (La valeur $j = 3/2$ ets le résultat de la combinaison du spin du proton et du moment cinétique orbital méson-proton.) Le méson est alors réémis, le proton retombant dans son état fondamental. Montrer que cette hypothèse prévoit une distribution angulaire des mésons diffusés proportionnelle à $(1 + 3\cos^2\theta)$.

Exercice 84.5 L'état fondamental d'un atome a un spin zéro et une parité positive. Le premier état excité a un spin un et une parité inconnue. On dispose d'un certain nombre d'atomes dans le premier état excité, tous de $m = +1$ dans la direction z, et on considère les photons émis dans des transitions vers l'état fondamental.

(a) Si les photons sont détectés indépendamment de leur polarisation, rechercher si leur distribution angulaire peut mener à une détermination de la parité du premier état excité.

(b) Montrer que la mesure de la distribution angulaire de photons polarisés suivant x' et y' peut déterminer la parité inconnue. (L'axe z' est choisi le long de la direction d'émission du photon, et il est dans le plan xz.)

85. L'atome d'hydrogène et la classification périodique

Se référer au *Cours de Physique de Feynman*, Mécanique quantique, Chap. 19.

Exercice 85.1 Un gaz d'hydrogène préparé dans l'état $3d$ peut se désexciter dans l'état fondamental avec émission de rayonnement. (Combien de raies y a-t-il ? Quelles sont leurs longueurs d'onde et leurs intensités relatives ?)

Exercice 85.2

(a) Montrer avec un argument classique que la distance r entre le noyau et l'électron dans un atome d'hydrogène dans l'état fondamental ne peut dépasser $R = 2r_B$ (où $r_B = \hbar^2/me^2$ est le rayon de Bohr).

(b) Utiliser la mécanique quantique pour trouver la probabilité $P(r > R)$ que l'électron dans l'état fondamental de l'atome d'hydrogène soit trouvé *plus loin* du noyau qu'à la distance distance $R = 2r_B$.

Exercice 85.3 L'interaction de muons lents avec la matière a été décrite comme constituée de trois étapes. D'abord, à cause de l'attraction électrostatique, le muon se met sur une orbite autour du noyau (une telle structure est appelée un « atome muonique »). Ensuite, l'orbite du muon décroît avec émission de rayonnement, jusqu'à ce que l'atome muonique se trouve dans son état fondamental. Finalement, le muon se désintègre par interaction faible avec le noyau.

Considérons un atome muonique de Radium G (^{206}Pb, $Z = 82$) :

(a) Trouver l'énergie de son état fondamental E_0.

(b) Trouver la longueur d'onde $\lambda_{1\to 0}$ des photons émis lors d'une transition du premier état excité vers l'état fondamental.

(c) Trouver la distance caractéristique r'_B de l'orbite du muon dans son état fondamental.

(d) Trouver une expression approchée pour la probabilité $P(r < R)$ que le muon dans l'état fondamental d'un atome muonique soit trouvé à une distance R autour du noyau.

(e) Comparer les probabilités pour qu'un électron et qu'un muon soient « à l'intérieur » du noyau. *Note :* pour l'électron, la distance caractéristique $r_B \gg R$ lorsque R est le rayon nucléaire ; dans ce cas, on peut supposer qu'à l'intérieur du noyau la fonction d'onde de l'électron $\psi(r)$ ne diffère pas significativement de sa valeur au centre du noyau $\psi(0)$.

Note : on prendra $m_\mu = 207 m_e$ pour la masse du muon.

Exercice 85.4 Un étudiant envoie la lumière d'un tube de gaz d'hydrogène incandescent sur un réseau, ce qui donne un certain nombre de raies spectrales discrètes.

(a) Une des raies mesurées a une longueur d'onde de 4430 Å, avec une largeur de 150 Å. Cela correspond à une énergie et une incertitude de $E = (2{,}80 \pm 0{,}09)$ eV. Quelle transition entre les niveaux de l'hydrogène peut produire cette raie ? Quelle énergie est nécessaire pour exciter l'atome d'hydrogène à partir de son état fondamental jusqu'au niveau qui produit cette transition ?

(b) La raie de la question précédente est une des raies de la série de Balmer. La série de Balmer est la série de raies produite par une transition d'un niveau supérieur jusqu'à l'état $n = 2$ de l'hydrogène. Quelles sont les longueurs d'onde les plus courtes et les plus longues de la série de Balmer ?

(c) Dans beaucoup d'applications en astrophysique, comme les raies d'absorption dans les atmosphères stellaires, le raies spectrales de l'hydrogène sont observées à côté d'autres raies provenant d'autres éléments. Une de ces séries est celle de l'atome d'hélium ionisé une fois. Quelle est l'énergie de l'état fondamental de l'hélium ionisé ?

(d) Quelle est la raie spectrale de plus courte longueur d'onde qui puisse être produite par transition jusqu'à l'état $n = 4$ de l'hélium ionisé une fois ? Comment se compare-t-elle avec la raie de plus courte longueur d'onde de la série de Balmer ?

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Annexes

UNITÉS ET DIMENSIONS

A

Unités et Dimensions	Symbole	Valeur	Remarques
MASSE [M]			
kilogramme	kg	1 kg	unité SI
gramme	g	10^{-3} kg	unité cgs
livre (US)	lb	0,4536 kg	
LONGUEUR [L]			
mètre	m	1 m	unité SI
centimètre	cm	10^{-2} m	unité cgs
millimètre	mm	10^{-3} m	
micron	μ	10^{-6} m	
ansgström	Å	10^{-10} m	
kilomètre	km	10^{3} m	
pouce(US)	in	2,54 cm	*Exact*
pied(US)	ft	0,3048 m	*Exact*
mile(US)	mi	1,6093 km	
unité astronomique	UA	$1{,}497 \times 10^{8}$ km	distance Terre-Soleil
année lumière		$9{,}5 \times 10^{12}$ km	
parsec	pc	206265 UA	3,263 années lumière ou 31×10^{12} km
TEMPS [T]			
seconde	s	1 s	unité cgs et SI
milliseconde	ms	10^{-3} s	
microseconde	μs	10^{-6} s	
nanoseconde	ns	10^{-9} s	
minute	^{m} ou min	60 s	$1^{m} = 60^{s}$
heure	^{h} ou h	3600 s	$1^{h} = 60^{m}$
jour (solaire)	^{jour} ou j	$8{,}64 \times 10^{4}$ s	$1^{jour} = 86400^{s}$
année		$3{,}16 \times 10^{7}$ s	$1^{année} = 365{,}25^{jours}$
VITESSE [LT^{-1}]			
m s^{-1}	m s^{-1}	1 m s^{-1}	unité SI
mi h^{-1}(US)	mi h^{-1}	(22/15) ft s^{-1}	mph
ACCÉLÉRATION [LT^{-2}]			
m s^{-2}	m s^{-2}	1 m s^{-2}	unité SI
FORCE [MLT^{-2}]			
newton	N	1 kg m s^{-2}	unité SI
dyne	dyn	10^{-5} N	unité cgs
IMPULSION [MLT^{-1}]			
kg m s^{-1}	kg m s^{-1}	1 N s	unité SI
ÉNERGIE/TRAVAIL [ML^2T^{-2}]			
joule	J	1 kg m^2 s^{-2}	unité SI
erg	erg	10^{-7} J	unité cgs
électron volt	eV	$1{,}602 \times 10^{-19}$ J	
PUISSANCE [ML^2T^{-3}]			
watt	W	1 J s^{-1} or 1 V A	unité SI

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Unités et Dimensions	Symbole	Valeur	Remarques
CHARGE [Q]			
coulomb	C	1 A s	unité SI
charge élémentaire	q_e	$1{,}602 \times 10^{-19}$ C	
COURANT [QT^{-1}]			
ampère	A	1 A	unité SI
milliampère	mA	10^{-3} A	
microampère	μA	10^{-6} A	
POTENTIEL [$ML^2T^{-2}Q^{-1}$]			
volt	V	1 J C^{-1}	unité SI
CHAMP ÉLECTRIQUE [$MLT^{-2}Q^{-1}$]			
volt par mètre	V m^{-1}	1 N C^{-1}	unité SI
CHAMP MAGNÉTIQUE [$MT^{-1}Q^{-1}$]			
tesla	T	1 N s m^{-1} C^{-1}	unité SI
weber par m^2	Wb m^{-2}	1 T	
gauss	gauss	10^{-4} T	
gamma	γ	10^{-9} T	
RÉSISTANCE [$ML^2T^{-1}Q^{-2}$]			
ohm	Ω	1 V A^{-1}	unité SI
INDUCTANCE [ML^2Q^{-2}]			
henry	H	1 V s A^{-1}	unité SI
CAPACITÉ [$M^{-1}L^{-2}T^2Q^2$]			
farad	F	1 C V^{-1}	unité SI
microfarad	μF	10^{-6} F	
picofarad	pF ou $\mu\mu$F	10^{-12} F	

B

CONSTANTES PHYSIQUES ET VALEURS APPROCHÉES

Se référer par exemple à :
C. W. Allen, *Astrophysical Quantities*, The Athlone Press, 1963.
E. R. Cohen, *Il Nuovo Cimento Series 10*, **6**, 110 (1957).
Physics Today **17**, 48 (1964).

1. CONSTANTES ASTROPHYSIQUES ET GÉOPHYSIQUES

Soleil :	
Masse (m_{Soleil})	$1{,}99 \times 10^{30}$ kg
	$= 3{,}33 \times 10^{5}\ m_{Terre}$
Rayon équatorial	$6{,}96 \times 10^{8}$ m
Densité moyenne	1,41 g/cm^3
Terre :	
Masse (m_{Terre})	$5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Rayon équatorial	$6{,}38 \times 10^{6}$ m
Densité moyenne	5,52 g/cm^3
Vitesse angulaire	$7{,}29 \times 10^{-5}$ rad s^{-1}
Vitesse orbitale moyenne	29,77 km s^{-1}
Surface émergée	$1{,}48 \times 10^{14}$ m^2
	$\approx$ 29 % de la surface
Surface océanique	$3{,}63 \times 10^{14}$ m^2
	$\approx$ 71 % de la surface
Profondeur moyenne des océans	3770 m
Lune :	
Masse (m_{lune})	$7{,}34 \times 10^{22}$ kg
	$= (1/81{,}31)\ m_{Terre}$
Rayon équatorial	$1{,}74 \times 10^{6}$ m
Densité moyenne	3,34 g/cm^3
Distance Terre-Soleil :	
Moyenne	$1{,}50 \times 10^{11}$ m = 1 UA
r_P	$1{,}47 \times 10^{11}$ m
r_A	$1{,}52 \times 10^{11}$ m
Distance Terre-Lune :	
Moyenne	$3{,}84 \times 10^{8}$ m
r_P	$3{,}63 \times 10^{8}$ m
r_A	$4{,}06 \times 10^{8}$ m
Vitesse de la lumière :	$c = 299\,792\,458$ m s^{-1}
Constante de gravitation universelle :	$G = 6{,}670 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
Constante solaire à 1 UA :	1347 W m^{-2}
Accélération de la pesanteur : (à la surface de la Terre ; varie avec la latitude et l'altitude)	$g = 9{,}81$ m s^{-2}

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

2. Constantes atomiques et nucléaires

Constante de Planck :	$h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J s
	$= 4{,}135 \times 10^{-15}$ eV s
	$\frac{h}{2\pi} = \hbar = 1{,}0544 \times 10^{-34}$ J s
	$= 6{,}58 \times 10^{-16}$ eV s
Rayon de Bohr :	$\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e q_e^2} = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = a_0 = 5{,}29 \times 10^{-9}$ cm
	$= 0{,}529$ Å
Rayon classique de l'électron :	$\frac{e^2}{m_e c^2} = \alpha^2 a_0 = r_0 = 2{,}82 \times 10^{-15}$ m
	$= 2{,}82$ fermi
Constante de structure fine :	$\frac{e^2}{\hbar c} = \alpha = \frac{1}{137}$
$-E_0$ de l'hydrogène :	$\frac{e^2}{2a_0} = 13{,}6$ eV
« Rayons » nucléaires :	$\approx 1{,}3 \times 10^{-13}$ cm $A^{1/3}$
(*A* est la masse atomique, c'est-à-dire le nombre de protons plus le nombre de neutrons)	$\approx 1{,}3 \times 10^{-5}$ Å $A^{1/3}$
« Rayon » atomique :	≈ 1 Å
« Rayon » moléculaire :	$\approx 1{,}5$ Å
Masse au repos de l'électron :	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
	$m_e c^2 = 0{,}51$ MeV
Masse au repos du proton :	$m_p = 1{,}67252 \times 10^{-27}$ kg
	$= 1836\, m_e$
	$m_p c^2 = 938{,}26$ MeV
Masse au repos du neutron :	$m_n = 1{,}67482 \times 10^{-27}$ kg
	$m_n c^2 = 939{,}55$ MeV
Unité de masse atomique ($\equiv \frac{1}{12}$ masse de C^{12}) :	1 uma $= 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg
	(1 uma) $\times c^2 = 931$ MeV
Longueur d'onde de Compton de l'électron :	$\frac{h}{m_e c^2} = 2\pi\alpha a_0 = \lambda_{C_e} = 2{,}43 \times 10^{-12}$ m
Section efficace d'électrons libres :	$\frac{8\pi}{3} r_0^2 = 6{,}65 \times 10^{-29}$ m^2

3. Constantes macroscopiques

ϵ_0	$8{,}854 \times 10^{-12}\ \mathrm{F\,m^{-1}}$
$1/4\pi\epsilon_0$	$9{,}00 \times 10^{9}\ \mathrm{m\,F^{-1}}$
μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H\,m^{-1}}$
$\mu_0\epsilon_0 c^2$	1
$1/\epsilon_0 c$	$377\ \Omega$
Resistivité du cuivre :	$\approx 10^{-8}\ \Omega\,\mathrm{cm}$
Indice de réfraction :	
n_{eau}	1,33
n_{verre}	$\approx 1{,}5$
n_{air}	1,0003
Vitesse du son (air à CNTP) :	$331\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
Densité de l'air (CNTP = 0 °C à 1 atm) :	$1{,}293\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ $\approx 10^{-3}\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$
Atmosphère standard :	$1\ \mathrm{atm} = 1{,}013 \times 10^{5}\ \mathrm{N\,m^{-2}}$ $= 760\ \mathrm{mmHg}$ $\approx 14{,}7\ \mathrm{lbs\,in^{-2}}$ (US)
Densité de l'eau (20 °C) :	$1{,}00 \times 10^{3}\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$
Nombre d'Avogadro :	$N_0 = 6{,}025 \times 10^{23}$ molécules/mole
Constante de Boltzmann :	$k = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$ $= 8{,}62 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV/K}$
Constante des gaz :	$R = 8{,}31\ \mathrm{J/(mol\,K)}$
Volume molaire a CNTP :	$22{,}41 \times 10^{3}\ \mathrm{cm^3/mol}$
Constante de Stefan-Boltzmann :	$\frac{\pi^2}{60}\frac{k^4}{\hbar^3 c^2} = \sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2\,K^4}$

$kT = 1\ \mathrm{eV}$ pour $T = 11{,}600\ \mathrm{K}$
$\approx \frac{1}{40}\ \mathrm{eV}$ à température ambiante

$1\ \mathrm{eV/atome} = 9{,}652 \times 10^{4}\ \mathrm{J/mol} = 23{,}1\ \mathrm{kcal/mol}$

$1\ \mathrm{CV} = 746\ \mathrm{W}$

4. Constantes numériques

$1^\circ = 1{,}745 \times 10^{-2}\ \mathrm{rad}$
$1' = 2{,}9089 \times 10^{-4}\ \mathrm{rad}$
$1'' = 4{,}8481 \times 10^{-6}\ \mathrm{rad}$

$e = 2{,}71828\ldots$
$\pi = 3{,}14159\ldots$
$\log_{10} e = 0{,}434$
$\ln 2 = 0{,}693$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

RÉPONSES C

CHAPITRE 1

1.9 (a) $n_G \approx 10^{19}\,\text{cm}^{-3}$, $n_L \approx 10^{22}\,\text{cm}^{-3}$
(b) $m \approx 10^{-23}\,\text{g}$
(c) $l \approx 10^{-5}\,\text{cm}$
(d) $P \approx 10^{-7}\,\text{atm}$

1.10 $A \approx 1{,}4 \times 10^{-14}\,\text{cm}^2$

1.11 $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$

1.12 (a) $N_H \approx 2{,}7 \times 10^{19}\,\text{cm}^{-3}$
(b) $N_A \approx 6{,}1 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$

1.13 $N_A \approx 10^{24}\,\text{mol}^{-1}$

1.14 $N_g \approx 0{,}7 \times 10^{19}\,\text{cm}^{-3}$

CHAPITRE 2

2.5 $W = (3/\sqrt{2})$ kg-poids

2.6 $F_W = (\tan\alpha)$ kg-poids, $F_P = (1/\cos\alpha)$ kg-poids

2.7 $W_2 = 0{,}25$ kg-poids

2.8 $A = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$ kg-poids, $B = (\sqrt{3/2})$ kg-poids

2.9 $T_1 = T_2 = (25/\sqrt{2})$ kg-poids

2.10 (a) Le mouvement de W est vers le bas.
(b) $F = W(y/x)$, en tension.

2.11 $F = W\sqrt{h(2R-h)}/(R-h)$

2.12 (a) $F_B = 0$ (mis à part la pesanteur)
(b) $\tau_O = FD$
(c) $\tau_P = FD$

2.13 $F = 20{,}7$ N à 45°, appliquée à 0,34 m à gauche du point O

2.14 $v = \sqrt{2gD\,\dfrac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2}\,\sin\theta}$

2.15 $v = \sqrt{gD(\sin\phi - \sin\theta)}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

2.16 (a) $a = \frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{2})g$
(b) M_2 va se déplacer vers le bas
(c) $t_1 = \sqrt{H/a}$
(d) M_1 ne heurtera pas la poulie

2.17 $T = \dfrac{L}{x}\left(W + \dfrac{w}{2}\right)\tan\theta$

2.18 (a) $F_R = 22{,}5$ kg-poids
(b) $F_h = 22{,}5$ kg-poids, $F_v = 45$ kg-poids

2.19 $\theta = 30°$

2.20 $\alpha = 30°$

2.21 $F = 0{,}6W$

2.22 $T = 2$ tonnes-poids

2.23 $T = 265$ g-poids, $\alpha = 79{,}1°$

2.24 $T = \sqrt{3}\,W/4$

2.25 $\theta = 30°$

2.26 $T = Wh/2\pi r$

2.27 $W = 4w/\sin\theta$

2.28 $F_1 = W/3$, $F_2 = 2W/3$, $F_{DF} = 4W/3\sqrt{3}$

2.29 (a) AC, CE, EG, BC, EF, et ED pourraient être remplacés par des câbles.
(b) $F_{BD} = W/2$, $F_{DE} = 5W/12$

2.30 $W = 3w/4$

2.31 $v = 196\,\text{cm s}^{-1}$

2.32 $v = \sqrt{2gH}$

2.33 $\theta = \arctan(1/3\sqrt{3}) \approx 10{,}9°$

2.34 $W = wr/(R - r)$

2.35 $A = 5$ m, $B = 11$ m, $T_{\max} \approx 34 \times 10^3$ kg-poids

2.36 (a) $F = WL/h$
(b) $\boldsymbol{F}_A = W\sqrt{1 + (L/h)^2}$, à un angle $\arctan(h/L)$

Chapitre 3

3.2 $T \approx 1{,}6$ h

3.3 $v_{\max}/v_{\min} = 1{,}033$

3.4 $g_{\text{Lune}} = 1{,}6\,\text{m s}^{-2} \approx g_{\text{Terre}}/6$

3.5 (a) $r_a \approx 35{,}2$ UA
(b) $v_{\max}/v_{\min} = 59$

3.6 $r \approx 5{,}9\, r_{\text{Terre}}$

3.8 (a) $\lambda = 0$

(b) $r_s = r_{\text{TerreLune}}/9$

3.9 (a) $m_{\text{Soleil}}/m_{\text{Terre}} = 3{,}33 \times 10^5$

(b) $m_{\text{Jupiter}}/m_{\text{Terre}} = 318$

3.10 $m_a + m_b = (R^3/T^2) m_{\text{Soleil}}$

3.11 La deuxième loi de Kepler serait inchangée, la troisième deviendrait $T^2 \propto R^{(3+a)}$, où T est la période orbitale du satellite.

Note : $T^2 = (4\pi^2/GM)R^{(3+a)}$

3.12 $\Delta g/g = 7 \times 10^{-6}$

3.13 $M = (1{,}02 \times 10^{-7}\ \text{jour}^{-1}\ \text{km}^{-3}\ \text{s}^3)\, TV^3\, m_{\text{Soleil}}$

3.14 (a) $R_c = 1{,}88 \times 10^6$ km

(b) $a = r_p^2/(2r_p - R_c) = 8{,}33 \times 10^6$ km

(c) $T_c = 2\pi a^{3/2} R_c/v r_p \approx 4{,}8$ jours

3.15 $T^2 = \dfrac{4\pi^2 (R + r)^3}{G(M + m)}$

3.17 (a) $M \approx 3{,}1\, m_{\text{Soleil}}$

Chapitre 4

4.5 (a) $t = 1843{,}8$ s

(b) $v \approx 415\ \text{m s}^{-1}$

4.6 $t \approx 155$ s

4.7 Il met plus de temps à redescendre.

4.8 (a) $v \approx 465\ \text{m s}^{-1}$

(b) $\omega \approx 7{,}3 \times 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$

(c) $a/g \approx 3{,}5 \times 10^{-2}$

4.9 (b) $H_{\max} = 74$ km

(c) $T = 2{,}7 \times 10^2$ s

4.10 $e \approx 0{,}98$

4.11 (a) $H_{\max} = (v_0^2/2g) \sin^2 \theta$, $R = (v_0^2/g) \sin 2\theta$

(b) $\theta = \pi/4$

4.12 $V = \dfrac{L}{\cos\theta} \sqrt{\dfrac{g}{2(L \tan\theta - h)}}$

4.13 (a) $v \approx 15\ \text{m s}^{-1}$

(b) $R \approx 2{,}5$ m

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

4.14 (a) $x = Vt - R\sin\dfrac{Vt}{R}$, $y = R(1 - \cos\dfrac{Vt}{R})$

(b) $v_x = V(1 - \cos\dfrac{Vt}{R})$, $v_y = V\sin\dfrac{Vt}{R}$

(c) $a_x = \dfrac{V^2}{R}\sin\dfrac{Vt}{R}$, $a_y = \dfrac{V^2}{R}\cos\dfrac{Vt}{R}$

4.15 $v = 14{,}8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

4.16 (a) $\theta = \arctan 3$

(b) $x = 14\,\mathrm{m}$

(c) $V = 19{,}8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

4.17 $d \approx 60\,\mathrm{m}$

4.18 (a) $v = 84\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

(b) $a = 0{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

4.19 $a_J/a_R = 8/9$

Chapitre 5

5.1 (b) $a = 2g/5$

(c) $T_1 = (2/5)$ kg-poids, $T_2 = (6/5)$ kg-poids

5.2 $T = 8{,}8m\,\mathrm{N}$

5.3 $T = 25\,\mathrm{N}$

5.4 $F = \dfrac{M_2}{M_1}(M + M_1 + M_2)g$

5.5 $F = 392\,\mathrm{N}$

5.6 $\boldsymbol{a} = g/9$ vers le haut, $T = 222$ g-poids

5.7 (a) $M_{\max} = \dfrac{(M_A + M_B)D - 2M_BL\cos\theta}{4L\cos\theta - D}$

(b) $t = \sqrt{\dfrac{8L\sin\theta}{g}}$

5.8 $g = \dfrac{v^2(2M + m)}{2mh}$

5.9 (a) $a_0 = \dfrac{F - (M_1 + M_2)g}{M_1 + M_2}$

(b) $T = \dfrac{M_1}{M_1 + M_2}F$

(c) $a = g - F/M_2$, $a' = g$

(d) $t = \sqrt{2M_2s/F}$

5.10 $\Delta t = 0{,}9\,\mathrm{s}$

5.11 $W = 2{,}7$ kg-poids

5.12 (a) $\boldsymbol{a} = g/3$ vers le haut
(b) $F = 127$ kg-poids

5.13 $m_B \approx 5{,}8\,\text{kg}$

5.14 $x_{\max} = 1$

5.17 $h_{\max} \approx 1{,}5 \times 10^3\,\text{m}$, $R \approx 4{,}8 \times 10^3\,\text{m}$

Chapitre 6

6.5 $m_2/m_1 = 3$

6.6 $E' = 0{,}71E$

6.7 (a) $v_E = 8{,}4 \times 10^{-22}\,\text{m s}^{-1}$
(b) $T_E/T_p = 1{,}7 \times 10^{-24}$

6.8 $V_\text{F} = 3{,}66\,\text{m s}^{-1}$

6.9 La plate-forme se déplace vers le Nord à $v = 5 \times 10^{-4}\,\text{m s}^{-1}$.

6.10 $\boldsymbol{a}(t) = \dfrac{(m_1 - m_0)g + r_0(v_0 + gt)}{m_1 + m_0 - r_0 t}$ vers le bas, pour $0 < t < \dfrac{m_0}{r_0}$.

6.11 $a = 4{,}0\,\text{m s}^{-2}$

6.12 $F = \mu v(v + gt)$

6.13 $V = x\left(\dfrac{m + M}{m}\right)\sqrt{\dfrac{g}{L}}$

6.14 (b) $\tau_0 = 2L\sqrt{\dfrac{Mm}{2T(M + m)}}$

6.15 $\Delta v \approx vf/4$

6.16 (a) $a = r_0 V_0/M_0$
(b) $r_0 = 490\,\text{kg s}^{-1}$
(c) $v = -V_0 \displaystyle\int_{M_0}^{M} \frac{dm}{m}$

6.17 (a) $F_R = 5{,}1 \times 10^{-3}\,\text{N}$
(b) $F_R \propto v^2$

Chapitre 7

7.5 $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$

7.6 (a) $5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$
(b) $\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$
(c) 3
(d) 3
(e) 3
(f) $15\boldsymbol{i} - 18\boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

7.7 (c) $R(1) \approx 4{,}6\,\text{m}$

7.8 (a) Il doit diriger son avion à 14,5° à l'Ouest du Nord.
(b) $T = 53{,}9\,\text{min}$

7.9 (a) Le vent souffle de 40,5° NE.
(b) Le vent paraît au cycliste venir de 35,6° SE au retour.

7.10 La méthode 2 est plus rapide, de 4,0 min.

7.11 (a) $t_V/t_A = V/\sqrt{V^2 - R^2}$
(b) $t_A/t_L = t_V/t_A$

7.12 $D = r_{\text{Terre}} \arccos[\sin\lambda_1 \sin\lambda_2 + \cos\lambda_1 \cos\lambda_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)]$

7.13 (a) $\boldsymbol{a} \approx 3{,}2 \times 10^{-3}\,\text{m s}^{-2}$, vers le Soleil
(b) $\boldsymbol{a} \approx 7{,}2 \times 10^{-3}\,\text{m s}^{-2}$, à $\approx 24°$
(c) $\boldsymbol{a} \approx 8{,}5 \times 10^{-3}\,\text{m s}^{-2}$, vers le Soleil

7.14 (a) $\boldsymbol{a}_1 = 2g$, vers la droite
(b) $\boldsymbol{a} = \sqrt{2}g$, à 45°
(c) $F_2 = 272\,\text{kg-poids}$

7.15 $T = 2\pi\sqrt{H/g}$

7.16 Pour $t \leqslant 3$, $\boldsymbol{r}_a(t) = (7+7t)\boldsymbol{i} + 3t\boldsymbol{j} + 4{,}9(1-t^2)\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_b(t) = (49-7t)\boldsymbol{i} + 3t\boldsymbol{j} + 4{,}9(1-t^2)\boldsymbol{k}$.
Pour $t \geqslant 3$, $\boldsymbol{r}_a(t) = \boldsymbol{r}_b(t) = 28\boldsymbol{i} + 3t\boldsymbol{j} + 4{,}9(1-t^2)\boldsymbol{k}$.

7.17 (a) Le trajet de l'autre bateau était vers le Nord.
(b) $T = 0{,}17\,\text{h}$

CHAPITRE 8

8.3 $\theta_{\max} = \arcsin(m/M)$

8.4 $\theta_1 = \arctan 3$, $v'_1 = v\sqrt{10}/4$, $v'_2 = v\sqrt{2}/4$

8.5 $\alpha = 120°$

8.6 (a) $\boldsymbol{v}_{\text{CM}} = (4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j})\,\text{m s}^{-1}$
(b) $u_1 = u_2 = 5\,\text{m s}^{-1}$
(c) $\boldsymbol{v}'_1 = (4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})\,\text{m s}^{-1}$

8.7 $\boldsymbol{v}'_1 = \sqrt{3}\,v_0/2$ à $-30°$, $\boldsymbol{v}'_2 = v_0/2$ à $+60°$

8.8 (a) $v_2 = \sqrt{3} \times 10^6\,\text{m s}^{-1}$
(b) $\boldsymbol{v}'_1 = \sqrt{73} \times 10^6\,\text{m s}^{-1}$, à 113°
(c) $\boldsymbol{u}'_1 = 9 \times 10^6\,\text{m s}^{-1}$, à 120°

8.9 $\boldsymbol{v}_1 = 50\sqrt{7}\,\text{cm s}^{-1}$, à $\arctan(-\sqrt{3}/2) = -41°$, $\boldsymbol{v}_2 = 50\,\text{cm s}^{-1}$, à $+60°$

8.10 $\left|\dfrac{\Delta T}{T}\right|_{\text{lab}} = \dfrac{(1-\alpha^2)m_2}{m_1 + m_2}$

8.11 (a) $\theta = \arctan \sqrt{\dfrac{M-m}{M+m}}$

(b) $\theta = \arctan \sqrt{\dfrac{\alpha^2 M^2 - m^2}{(M+m)^2}}$

8.12 $M = 9m_p$

8.13 (a) $\boldsymbol{v}'_2 = \sqrt{5}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, à $\arctan \frac{1}{2}$ NW

(b) $\alpha = 3/4$

(c) $\theta = 90°$

8.14 (a) $\boldsymbol{v} = (2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

(b) $T_{\mathrm{CM}} = 30\,\mathrm{J}$

CHAPITRE 9

9.2 $\boldsymbol{F} = -108\boldsymbol{e}_x\,\mathrm{N}$

9.3 $\boldsymbol{a} = g/8$ vers le bas

9.4 Voir exercice 9.1.

9.5 $x = \mu h$

9.6 $X = 32\,\mathrm{cm}$

9.7 $\mu_{\min} = t\frac{1}{2}(\cot\theta - 1)$

9.8 (a) $\Delta T = \mu T\,\Delta\theta$

(b) $T_2/T_1 = e^{\mu\alpha}$

9.9 $v_0 = 595\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

9.10 $v = 83\,\mathrm{km/h}$

9.11 $t = 2{,}2\,\mathrm{s}$

9.12 (a) $d = 0{,}68\,\mathrm{m}$

(b) $t = 1{,}1\,\mathrm{s}$

(c) $\Delta E = 2{,}3\,\mathrm{J}$

9.13 (a) $a = 75\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$

(b) $F = 200$ g-poids

9.14 Pour $0 \leqslant x < x_0$, $v(x) = v_0$. Pour $x_0 \leqslant x < x_0 + L$, $v(x) = v_0 - \dfrac{k}{m}(x - x_0)$. Pour $x \geqslant x_0 + L$, lorsque $v_0 > kL/m$, $v(x) = v_0 - \frac{k}{m}L$.

9.15 $\epsilon = (R/4)\Delta P$, $|\sigma/\epsilon| = 1$

9.16 Le bus accélère à $(g/\sqrt{3})\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

9.17 (b) $R = mv/qB$

(c) $T = 2\pi m/qB$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

9.18 (a) $W = 600$ g-poids
(b) $T = 800$ g-poids
(c) $\theta = 90°$

9.19 $F = mg(1 + \mu)/(1 - \mu)$

9.20 (a) $H_{\min} = \sqrt{3}W \sin\alpha$
(b) $\phi = 60°$

9.21 $R = 4{,}9 \times 10^{-5}$ cm

9.22 (a) $F_x = qv_yB_z$, $F_y = q(E_y - v_x)B_z$, $F_z = 0$
(b) $F'_x = qv'_yB_z$, $F'_y = -qv'_xB_z$
(c) Le mouvement d'une particule libre dans des champs électrique et magnétique croisés est cycloïdal.

CHAPITRE 10

10.1 $x = x_0 - v_0\sqrt{m/k}$

10.3 La particule sera en équilibre partout à l'intérieur.

10.4 $v \approx v_\infty = 6{,}2\,\text{km s}^{-1}$

10.5 $\phi = 1{,}4 \times 10^3$ V

10.6 $Q = 5{,}6 \times 10^{-5}$ C

10.7 $\phi = 310$ kV

10.8 (a) $v = 3{,}0\,\text{m s}^{-1}$, $a = 2{,}5\,\text{m s}^{-2}$, $P = 45$ W
(b) $v = 4{,}5\,\text{m s}^{-1}$, $a = 2{,}5\,\text{m s}^{-2}$, $P = 67{,}5$ W

10.9 (a) $\boldsymbol{F} = (4{,}5\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} - 2{,}6\boldsymbol{k})$ N
(b) $\boldsymbol{a} = (4{,}5\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} - 2{,}6\boldsymbol{k})\,\text{m s}^{-2}$
(c) $T = 2{,}5$ J
(d) $dT/dt = 21{,}4$ W

10.10 (a) $\boldsymbol{r} = (2{,}00\boldsymbol{i} + 3{,}02\boldsymbol{j} + 0{,}1\boldsymbol{k})$ m
(b) $\boldsymbol{v} = (0{,}045\boldsymbol{i} + 2{,}12\boldsymbol{j} + 0{,}97\boldsymbol{k})\,\text{m s}^{-1}$
(c) $T = 2{,}71$ J

10.11 (a) $W = 0$
(b) $W = 0$ et la force est conservative.

10.12 $H = R/2$

10.13 (a) $x = H\sin^2\theta + R\cos^2\theta - R\cos^3\theta$
(b) $F = mg(2H/R + 1)$

10.14 $d = mg/k - R/5$

10.15 $v = \sqrt{gL/2}$

10.16 $d = R/3$

10.17 $\theta = \arcsin 0{,}27$

10.18 $a = 7{,}2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

10.19 $W_{\text{poids}} \approx 625\,\mathrm{J}$, $W_{\text{disque}} \approx 570\,\mathrm{J}$, $W_{\text{javelot}} \approx 330\,\mathrm{J}$

10.20
$$\phi(r) = \begin{cases} -\dfrac{GM}{2R^3}(3R^2 - r^2) & \text{pour } r \leqslant R \\ -\dfrac{GM}{r} & \text{pour } r > R \end{cases}$$
$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} -\dfrac{GM}{R^3}\boldsymbol{r} & \text{pour } r \leqslant R \\ -\dfrac{GM}{r^3}\boldsymbol{r} & \text{pour } r > R \end{cases}$$

10.21 $\boldsymbol{a} = -\dfrac{4\pi}{3}\rho G\left(\dfrac{R^3}{(R+x)^2} - \dfrac{(R/4)^3}{(5R/4+x)^2}\right)$

10.22 $F_x = F_z = 0$ et
$$F_y = \begin{cases} m(-2\pi\rho dG + 4\pi r^3\rho G/3y^2) & \text{pour } y > d/2, \\ m(-4\pi\rho Gy + 4\pi r^3\rho G/3y^2) & \text{pour } d/2 > y > r, \\ m(-4\pi\rho Gy + 4\pi\rho Gy/3) & \text{pour } r > y \geqslant 0. \end{cases}$$

10.23 $E = -GmM/2a$

10.24 (a) $T^2 = 4\pi^2 a^3/GM$

(b) $T^2 = \pi^2 G^2 M^2/2(E/m)^3$

10.26 $H_{\min} = 19{,}2\,\mathrm{cm}$

10.27 $P = 25\,\mathrm{kW}$

10.28 $P = 4{,}60 \times 10^4\,\mathrm{atm}$

10.29 $W_{\min} = GMm'\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{D-r}\right) + Gmm'\left(\dfrac{1}{D-R} - \dfrac{1}{r}\right)$

10.30 Le satellite s'échapperait sur une orbite parabolique.

10.31 (a) $v_{\min} = 19\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

(b) $v_{\max} = 75{,}4\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

10.32 $v_0 = 40{,}8\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, $\alpha = 40{,}9°$

Chapitre 11

11.1 (a) MT^{-2}

(b) ML^2T^{-2}

(c) ML^2T^{-2}

(d) MT^{-2}

(e) 1 (sans dimension)

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(f) $ML^{-1}T^{-1}$

(g) LT^{-2}

(h) $MLT^{-2}Q^{-1}$

(i) $MT^{-1}Q^{-1}$

(j) LT^{-1}

11.2 $(\epsilon_0 c)^{-1} = 377\,\Omega$

11.3 $v' = \dfrac{\lambda}{\tau} v$

$a' = \dfrac{\lambda}{\tau^2} a$

$F' = \dfrac{\mu\lambda}{\tau^2} F$

$E' = \dfrac{\mu\lambda^2}{\tau^2} E$

11.4 $T \propto \sqrt{l/g}$

11.5 $GM_{\text{Soleil}} = 4\pi^2$

11.6 T est indépendant de k.

11.7 $T \propto \sqrt{m/k}$

11.8 $T \propto mv^2/l$, $a \propto v^2/l$

11.9 $R \propto (v^2/g) f(\theta)$, $T \propto (v/g) f'(\theta)$, pour les fonctions f et f' qui ne dépendent que de θ.

11.10 $T \propto \sqrt{m/\sigma}$

11.11 $\omega \propto (1/l)\sqrt{T/\sigma}$

11.12 $v \propto \sqrt{g\lambda}$

11.13 $p \propto f(N) mv^2/V$ pour une fonction f qui ne dépend que de N.

11.14 GM est constant, et les unités de $GM = Fr^2/m$ sont L^3T^{-2}. La seule distance et le seul temps sont la distance radiale r et la période orbitale t. Ainsi, $r^3/t^2 =$ constante.

Chapitre 12

12.1 $x = \gamma(x' + \beta ct')$

$y = y'$

$z = z'$

$t = \gamma(t' + \beta x'/c)$

avec $\beta = V/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

12.2 $v_x = \dfrac{v'_x + V}{1 + \beta v'_x/c}$

$v_y = \dfrac{v'_y/\gamma}{1 + \beta v'_x/c}$

12.3 $v'_x = \dfrac{v_x - V}{1 - \beta v_x/c}$

$a'_x = \dfrac{a_x/\gamma^3}{(1 - \beta v_x/c)^3}$

12.4 $L' \approx 4{,}5\,\text{m}$, $\theta' \approx 33{,}7°$

12.5 (a) $\Delta t = 16{,}8\,\mu\text{s}$, $\Delta t' = 2{,}37\,\mu\text{s}$

(b) $L' = 0{,}71\,\text{km}$

12.7 $F = mc^2/b$

12.8 (a) $M \approx 42\,\text{kg}$

(b) $H \approx 2\,\text{cm}^3\,\text{s}^{-1}$

12.9 $H \approx 6{,}3 \times 10^8\,\text{t}\,\text{s}^{-1}$

12.10 (a) $g = 1{,}03$ années-lumière année^{-2}

(b) $x = 4{,}15$ années-lumière, $v = 0{,}982c$

Chapitre 13

13.2 (a) $pc = T\sqrt{1 + 2mc^2/T}$

(b) $v/c = \sqrt{3}/2$

13.3 $\Delta t = 5\,\text{min}$

13.4 (a) $pc = 3 \times 10^{-2}\,BRZ$

(b) $R = 6{,}8 \times 10^3\,\text{km}$

13.5 (a) $R_{\text{min}} = 1{,}8\,\text{m}$

(b) $f = 15\,\text{MHz}$

(c) $\Delta f/f = 0{,}14$

13.6 $T_1 = \dfrac{(M - m_1)^2 - m_2^2}{2M}\,c^2$

$T_2 = \dfrac{(M - m_2)^2 - m_1^2}{2M}\,c^2$

13.7 $T_\mu = 4{,}1\,\text{MeV}$

$T_\nu = 29{,}7\,\text{MeV}$

$p_\mu = p_\nu = 29{,}7\,\text{MeV}/c$

13.8 $E_\gamma = \Delta E(1 - \Delta E/2mc^2)$

13.9 (a) $V = c/2$

(b) $M = (4/\sqrt{3})m$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

13.10 $T = 6m_pc^2 = 5{,}6\,\text{GeV}$

13.11 $T_e = 4004\,\text{GeV}$

13.12 $E_\gamma = 4m_pc^2 = 3{,}8\,\text{GeV}$

13.13 (a) $T_p \approx 2m_\pi c^2 = 279\,\text{MeV}$

(b) $T_\pi \approx m_\pi^2 c^2/2m_p = 10{,}4\,\text{MeV}$

13.14 Avec $\beta = v/c$,

(a) $E_\gamma = \dfrac{m_\pi c^2\sqrt{1-\beta^2}}{2(1-\beta\cos\theta)}$

(b) $E_{\max} = \dfrac{m_\pi c^2(1+\beta)}{2\sqrt{1-\beta^2}}$ lorsque $\theta = 0$,

$E_{\min} = \dfrac{m_\pi c^2(1-\beta)}{2\sqrt{1-\beta^2}}$ lorsque $\theta = \pi$

(c) $\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{2}(E_{\max} + E_{\min}) = \dfrac{m_\pi c^2}{2}$ $(= E_\gamma$, lorsque $v = 0)$

Chapitre 14

14.4 (a) $\tau = 140\,\text{N m}$

(b) $l = 2{,}8\,\text{m}$

(c) $F_\perp = 14\,\text{N}$

14.6 $\lambda \approx 66{,}6°$

14.7 $V = 2\pi^2R^3$

14.8 $T = M\omega^2R^2/3$

14.9 (a) $x = (2R^2/L)\sin(L/2R)$, $y = 0$

(b) $x = (4R/3\alpha)\sin(\alpha/2)$

14.10 $x = 1{,}7\,\text{cm}$, $y = 0$

14.11 $y = x/2$

14.12 (a) $F = 8{,}1\,\text{N}$

(b) $x = (3\sqrt{3}/2)\,\text{cm}$

14.13 $\alpha = \arctan(1/6\sqrt{3})$

14.14 $\overline{OP} = 1{,}5'$

14.15 $h = a(3 - \sqrt{3})/2$

14.16 $x = M_1L/(M_1 + M_2)$

14.17 $P = 16m\mu\pi^3f^3r^2$

14.18 $n = a$

14.19 $M = 1{,}8\,\text{kg}$

14.20 (a) $\Delta L = M\omega^2L/(2k - M\omega^2)$

(b) Équilibre stable possible seulement si $M\omega^2/k < 2$.

CHAPITRE 15

15.3 $I = ML^2/12$

15.4 $\omega = \sqrt{3g/l}$

15.5 $a = mg/(m + M/2)$

15.6 $I = 22Ma^2$

15.7 (a) $I = mL^2/3$
(b) $I = mL^2/12$
(c) $I = mr^2$
(d) $I = mr^2/2$

15.8 $F = Mg/4$

15.9 $W = 6mL^2\omega_0^2$

15.10 (a) $V_0 = r\sqrt{2Mgh/(I + Mr^2)}$

15.11 La boucle doit être accélérée de $2g \sin\theta$.

15.13 $I = \dfrac{8}{15}\pi\rho(R^5 - r^5) = \dfrac{2}{5}\,M\,\dfrac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$

15.14 $\mu_0 = (2/7)\tan\theta$

15.15 (b) $a = g/(1 + R^2/2r^2)$

15.16 $h = 3d/2 - 3r$

15.17 (a) $v_2 = (r_1/r_2)v_1$
(b) $W = \frac{1}{2}mv_1^2(r_1^2/r_2^2 - 1)$
(c) $F = mv^2/r$

15.18 (a) $a = FR(R\cos\alpha - r)/(I + MR^2)$

15.19 $h/r = 7/5$

15.20 $r_3^2 + r_1^2 = r_2^2$

15.21 $\alpha_{\max} = (2g/R)\cos\theta$

15.22 $t = 2l\omega_0/3\mu g$

15.23 (a) $D = 12V_0^2/49\mu g$
(b) $V = (5/7)V_0$

15.24 (a) $V_0 = (2/5)R\omega_0$
(b) $V_0 = (1/4)R\omega_0$

15.25 $l = R(\sqrt{1 + M/4m} - 1)$

15.26 (a) $F'_x = F_x\cos\theta + F_y\sin\theta + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2x'$
$F'_y = F_y\cos\theta - F_x\sin\theta - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2y'$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

CHAPITRE 16

16.6 $V = 406\,\mathrm{m}^3$

16.9 L'effet gyroscopique fait piquer l'avion vers le haut (e).

16.10 (a) Si la corde se casse, cela se passe avant que les masses soient relâchées.
(b) Si la corde ne se casse pas, la vitesse du CM des deux masses sera $l\omega_0/2$, et les masses tourneront autour de leur CM avec la vitesse angulaire ω_0.

16.11 $v_{AC}/v_{AB} = -7/2$

16.12 $v = \frac{1}{2}(M/m - 1)V - L^2\omega^2/24V$
$a = \omega L^2/12V$

16.13 (a) $V_{CM} = v/2$
(b) $L = mvR/2$
(c) $\omega = v/3R$
(d) $T_{avant} = mv^2/2$, $T_{après} = mv^2/3$

16.14 La vitesse du CM de l'objet est $v_0/6$, et il tourne autour de son CM à la vitesse angulaire $2v_0/15a$.

16.15 (a) $V_O = J/M$
(b) $\omega = 12Jr/ML^2$
(c) $V_A = (J/M)(1 - 6r/L)$
(d) $\overline{AP} = 2L/3$
(e) $\overline{AP} = 2L/3$ (encore)

16.16 (a) $V_{CM} = v/2$ (avant et après)
(b) $L = MvL/4$
(c) $\omega = 6v/5L$
(d) 20 % de l'énergie cinétique est perdue.

16.17 $V_f = V/2$, $\omega_f = 6V/7L$

16.18 $V = \sqrt{8gL}$

16.19 (a) $v_f = \dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{g}{L}\dfrac{m+M}{2(m/4+M/3)}}$

16.20 (a) $J = I_0\omega_0$
(b) $F = mR^2\omega_0^2/(R - (1 + 20\pi)r)$

16.21 $\tau_{max} = ml^2\omega^2$

16.22 (a) $\theta = 45°$
(b) $\tau = (Ml^2/24)\omega^2$

16.23 $F = 89{,}8\,\mathrm{N}$

16.24 $\omega_1 = I_2\omega_2/(I_1 + I_2 + M_2r^2)$

16.25 (a) $r = V/2\omega$
(b) $\theta \approx 2\omega R/V$

16.26 Le satellite tourne autour d'un axe perpendiculaire à sa longueur (et passant par son CM) avec une vitesse angulaire $\omega_f = 2\omega_0/13$.

16.27 $\Delta T \approx 1\,\text{ms}$

16.28 $\tau \approx (2GMm/R^3)r^2 \sin(2\theta)$

16.30 $J = M\sqrt{\pi g L n/3}$, avec $n \in \mathcal{Z}$.

16.31 (a) $\omega = \dfrac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2}\,\omega_0$

(c) $\dot{r} = \omega_0 \sqrt{\dfrac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2}(R^2 - r^2)}$

16.32 (a) $F = \dfrac{M\omega^2 ab(a^2 - b^2)}{12(a^2 + b^2)^{3/2}}$

(b) $T = \dfrac{M\omega^2 a^2 b^2}{12(a^2 + b^2)}$

16.33 $\tau \approx 27\,\text{N m}$

16.34 (a) $L_x/L_z = 4mv_0/MR\omega_0$
(b) $\omega_x/\omega_0 = 8mv_0/MR\omega_0$

16.35 (a) $\boldsymbol{L} = (20\boldsymbol{e}_x + 0{,}0119\boldsymbol{e}_y)\,\text{J s}$

$\Omega_n = 154\,\text{s}^{-1}$

$r = 1{,}77 \times 10^{-2}\,\text{cm}$

(b) $\Omega_P = 1{,}47 \times 10^{-3}\,\text{s}^{-1}$

$L_P = 1{,}91 \times 10^{-4}\,\text{J s}$

$T_P = 1{,}40 \times 10^{-7}\,\text{J}$

$\Delta E \approx 2{,}8 \times 10^{-7}\,\text{J}$

16.36 $\tau_{\text{Lune}} \approx 2{,}2\tau_{\text{Soleil}}$

16.37 (a) $I_{\text{Terre}} = 8{,}11 \times 10^{37}\,\text{kg m}^2$
(b) $L_{\text{Terre}} = 5{,}91 \times 10^{33}\,\text{kg m}^2\,\text{s}^{-1}$
(c) $T_{\text{Terre}} = 2{,}16 \times 10^{29}\,\text{J}$
(d) $T = 25{,}725$ années

Chapitre 17

17.3 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2LM}{3gM + 2L(k_1 + k_2)}}$

17.4 $x = A/\sqrt{2}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

17.5 (a) $\Delta x = 2{,}18\,\text{cm}$

(b) $V = -49{,}4\,\text{cm}\,\text{s}^{-1}$

17.6 $T = \pi\sqrt{2L/g}$

17.8 $T = \pi\sqrt{MR^2/K}$

17.9 $T \approx 1{,}4\,\text{s}$

17.10 (a) $T_\text{A} = 2\pi\sqrt{\dfrac{d}{g}}$, $T_\text{B} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_c + Md^2}{Mgd}}$

(b) $\ddot{\theta}_\text{A} = -\dfrac{g}{d}\sin\theta_0$, $\ddot{\theta}_\text{B} = -\dfrac{Mgd}{I_c + Md^2}\sin\theta_0$

(c) $\dot{\theta}_\text{A} = \sqrt{\dfrac{2g}{d}(1 - \cos\theta_0)}$, $\dot{\theta}_\text{B} = \sqrt{\dfrac{2Mgd}{I_c + Md^2}(1 - \cos\theta_0)}$

17.11 $\omega_0 = 28\,\text{s}^{-1}$

17.12 (a) $\theta_0 = \arctan(1/3)$

(b) $\theta(t) = \theta_0 - \dfrac{J}{M\sqrt{gl}}\sqrt[4]{\dfrac{288}{125}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}}\sqrt[4]{\dfrac{9}{10}}\,t\right)$

17.13 $T \approx 42\,\text{min}$

17.14 (b) $T_A = 2\pi\sqrt{m/(k_1 + k_2)}$, $T_B = 2\pi\sqrt{m(k_1 + k_2)/k_1k_2}$

17.15 $A = (v/4)\sqrt{M/2k}$, $T = 2\pi\sqrt{M/2k}$

17.16 (a) $x = d$

(b) $V_\text{CM} = (d/3)\sqrt{k/m}$, $A = d\sqrt{2/3}$

17.17 $v_1 = v_0 - X\sqrt{\dfrac{K}{M_1(1 + M_1/M_2)}}$

$v_2 = v_0 + X\sqrt{\dfrac{K}{M_2(1 + M_2/M_1)}}$

17.18 $x_\text{max} = (m + M)\mu g/k$

17.19 (a) $E = 10^6\,\text{ergs}$

(b) $k = 7{,}8 \times 10^3\,\text{g}\,\text{s}^{-2}$

(c) $x = 16\,\text{cm}$

17.20 (a) $\nu = (1/2\pi)\sqrt{k(1/I_1 + 1/I_2)}$

(b) $A_1/A_2 = -I_2/I_1$

17.22 (a) $T = 2\pi\sqrt{l/g}$

(b) $T = (2\pi L/\sqrt{3}d)\sqrt{l/g}$

17.23 $T = \pi\sqrt{29a/g}$

17.24 $m = KR/2g$

17.25 (a) $T = 2\pi\sqrt{m_1 m_2/k(m_1+m_2)}$

(b) Vous avez découvert la *masse réduite*.

(c) $E = \frac{1}{2}kA^2$

(d) $E_1/E_2 = m_2/m_1$

17.26 $T \approx 5{,}3\,\text{s}$

17.27 $\theta_0' = \sqrt{I/(I+ma^2)}\,\theta_0$

17.29 $T = 2\pi\sqrt{2A/g}$, $a = A\sqrt{2}$, $H = A(\sqrt{2}-1)$

17.30 $z = 49\,\text{cm}$

Chapitre 18

18.8 $y = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, avec $k = 0,1,2,\ldots,n-1$

18.11 $\log_{11} 2 = 0{,}289$, $\log_{11} 7 = 0{,}811$

Chapitre 19

19.2 $f = 10^4/2\pi\,\text{Hz}$

19.3 $Z \approx 377\sqrt{2}\,\Omega$

19.4 $L \approx 71\,\text{mH}$

19.5 $C \approx 3{,}3\times10^{-3}\,\mu\text{F}$

19.6 (a) $\hat{Z} = i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$

(b) $\hat{Z} = \dfrac{i\omega L}{1-\omega^2 LC}$

19.7 (a) $C = C_1C_2/(C_1+C_2)$

(b) $C = C_1 + C_2$

19.8 (a) $L = L_1 + L_2$

(b) $L = L_1L_2/(L_1+L_2)$

19.9 (a) $\omega_0 = 1/\sqrt{3LC}$

(b) $\omega_0 = 1/\sqrt{3LC}$ (encore)

19.10 $T = L/R$

19.11 $Q \approx 10^4$

19.12 (c) $x = Ae^{-\left(\gamma/2+\sqrt{\gamma^2/4-\omega_0^2}\right)t} + Be^{-\left(\gamma/2-\sqrt{\gamma^2/4-\omega_0^2}\right)t}$

(d) $A = x_0$

$$B = \frac{2v_0+\gamma x_0}{\sqrt{4\omega_0^2-\gamma^2}}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

19.13 (b) $v(t) = v_0 e^{-(\gamma/m)t}$

$$v(x) = v_0 - \frac{\gamma}{m}(x - x_0)$$

19.14 (a) $v_\infty = g\sin(\theta)/\gamma$

(b) $v(t) = v_\infty[1 - e^{-\gamma t}]$

(c) $x(t) = v_\infty[t + (e^{-\gamma t} - 1)/\gamma]$

19.15 $d = 42{,}8\,\text{m}$

19.16 $A = 5{,}75\,\text{cm}$

19.17 (a) $5d^2x/dt^2 + 0{,}693dx/dt + 20\pi^2 x = 0$

(b) $T = 1{,}00006\,\text{s}$

(c) 1. $N = 20$; 2. $N = 33$

(d) $P \approx 1{,}1\,\text{W}$

19.18 $V = V_0 e^{-t/RC}$

19.19 *Conseil :* oscillations non amorties, amorties et sur-amorties.

19.20 (b) 1. $Z_L = i\omega L$; 2. $Z_C = 1/i\omega C$

19.23 (a) $I_0 = (1/16)\,\text{A}$

(b) $\delta = 0$

19.24 (a) $I_R = 0$

(b) $I_{L,\max} = V_0\sqrt{C/L}$

19.25 (a) $C_1 = 1/\omega^2 L$

(b) $C_2 = C_1/(1 - \omega R C_1)$

(c) $I_1/I_2 = \sqrt{2}$

19.26 (a) $\Delta E = \dfrac{1}{2}\dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V_0^2$

(b) $V_1 = V_2 = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2} V_0$

19.27 (a) $t \approx 16{,}1\,\text{s}$

(b) $I_0 = 0$

19.28 $V_{\max} = (V_0/R)\sqrt{L/C}$

19.29 $V_{\max} = 10\sqrt{2}\,\text{V}$

19.30 $V'_{\text{DC}} = V_{\text{DC}}$, $|V'_{\text{AC}}| \approx |V_{\text{AC}}|/7{,}6$

19.31 (a) $A = h/(2 - 8\pi^2 L/gT^2)$

(b) $A = 39\,\text{cm}$

(c) $D = 31{,}9\,\text{m}$

19.32 (a) $\omega_0 = \sqrt{k/M}$

(b) $x = e\omega^2/(\omega_0^2 - \omega^2)$ dans la direction de e.

(c) $\omega_{\text{cr}} = \omega_0$

(d) $\omega'_{\text{cr}} = \omega_0$

(e) Le CM est situé sur la ligne du centre entre les roulements.

19.33 (a) Avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $\omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$,

1. $x = \dfrac{F_0}{k} + \left(x_0 - \dfrac{F_0}{k}\right) e^{-\gamma t/2} \times \left(\cos \omega_\gamma t + \dfrac{\gamma}{2\omega_\gamma} \sin \omega_\gamma t\right)$

2. $x = \dfrac{J}{m\omega_\gamma} e^{-\gamma t/2} \sin \omega_\gamma t$

3. $x = \dfrac{F_0}{\gamma \sqrt{km}} \sin \omega_0 t + e^{-\gamma t/2}\left[x_0 \cos \omega_\gamma t - \dfrac{1}{\omega_\gamma}\left(\dfrac{F_0}{m\gamma} - \dfrac{\gamma}{2} x_0\right) \sin \omega_\gamma t\right]$

(b) $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$

19.34 (a) L'équation du mouvement pour $0 < t < \pi\sqrt{m/k}$ est $m\ddot{x} + kx - mg\mu = 0$, avec la solution $x = (A - d)\cos(\omega t) + d$, où $\omega^2 = k/m$ et $d = mg\mu/k$.

(b) 1. $0 \leqslant B \leqslant d$; 2. $A = B + 2Nd$, ou $A = 2(N + 1)d - B$

19.35 $A = \dfrac{qE_0}{\omega^2 \sqrt{m^2 + \alpha^2\omega^2}}$

$\delta = \pi + \arctan \dfrac{\alpha\omega}{m}$

19.36 $f \approx 7{,}2\,\text{Hz}$

19.40 (a) $I = 2\,\text{A}$

(b) $V_{\max} = 16{,}9\,\text{kV}$

(c) $t = 35\,\mu\text{s}$

19.41 $V = 74{,}4\,\text{km/h}$

CHAPITRE 20

20.2 (a) $\overline{AK} = 15\,\text{m}$

(b) $t_{\min} = 60{,}0\,\text{s}$

(c) $t = 60{,}1\,\text{s}$

20.3 (a) $\overline{PP'} = 0{,}0387\,\text{m}$

(b) $\Delta t = 0{,}11 t_0$

20.4 $\theta \approx 11{,}2°$

20.8 (a) $X_0 = R/2$

(b) $\Delta X_0/X_0 = -0{,}02$

20.9 $x = 200\,\text{cm}$, $D = 1{,}86\,\text{cm}$

20.10 (a) $x = 6{,}7 \times 10^{-5}\,\text{m}$

(b) $x = 8{,}5 \times 10^{-2}\,\text{m}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

20.11 (a) $y = \pm\sqrt{2Fx(1 - 1/n) - x^2(1 - 1/n^2)}$

20.12 $d = d'/n$

20.13 L'image se forme à 4 cm du centre.

20.14 $y = 1{,}92R$

20.15 $d = 2{,}0\,\text{cm}$

20.16 $M = F/f$

20.17 $\dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{f} + \dfrac{1}{f'} - \dfrac{D}{ff'}$

$$\Delta = \frac{fD}{f + f' - D} \qquad \text{(vers } L' \text{ de } L\text{)}$$

$$\Delta' = \frac{f'D}{f + f' - D} \qquad \text{(vers } L \text{ de } L'\text{)}$$

20.18 (a) $4{,}167\,\text{cm} < d < 5\,\text{cm}$

(b) $M(4{,}167\,\text{cm}) = 6$, $M(5\,\text{cm}) = 5$

20.19 (a) $x = 5{,}2\,\text{cm}$

20.20 $r = 1{,}6\,cm$

20.21 (a) $d_2 > d_1$

(b) L'écran doit être éloigné de la lentille.

(c) $f = L_1 d_1/(D + d_1) = L_2 d_2/(D + d_2)$

20.22 Avec P à l'origine, x horizontal, le long de l'axe focal, et y vertical (la distance normale de l'axe focal au miroir),

(a) (hyperbole)

$$y^2 = \frac{4Dd}{(D-d)^2}\left[\left(x - \frac{D+d}{2}\right)^2 - \frac{(D-d)^2}{4}\right]$$

(b) (ellipse)

$$(2d + D)^2 y^2 + 4d(d + D)\left(x - \frac{D}{2}\right)^2 = 4d(d + D)\left[(d + D)d - \frac{D^2}{4}\right]$$

20.23 (b) $f = g/2\omega^2$

Chapitre 21

21.2 (a) $\boldsymbol{E}(t) = \dfrac{qa\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R}[\cos(\omega(t - R/c))\,\boldsymbol{e}_x + \sin(\omega(t - R/c))\cos\theta\,\boldsymbol{e}_y]$

(b) $I(0) = \left(\dfrac{qa\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R}\right)^2$, $I(\pi/2) = I(0)/2$

21.3 (a) $P = \dfrac{3}{8\pi}\dfrac{\sin^2\theta}{R^2}P_{\text{totale}}$

(b) $P = 2{,}4 \times 10^{-11}\ \text{W m}^{-2}$

21.4 $I = \begin{cases} 5{,}8I_0 & \text{E, W} \\ 0{,}17I_0 & \text{N, S} \\ 3{,}0I_0 & \text{autres directions montrées sur la figure} \end{cases}$

21.5 $I(\theta) = I_0 \dfrac{\sin^2[\pi(1+\sin\theta)]}{\sin^2\left[\frac{\pi}{4}(1+\sin\theta)\right]}$

21.6 (a) $I(\theta) = 2I_0[1+\cos(\pi\sin\theta)]$

(c) $I(\theta) = 2I_0[1+\cos(\pi/2+\pi\sin\theta)]$

21.7 $a = 2\lambda,\ b = 2\lambda/\sqrt{3}$

21.8 (a) $E(t) = 0$

(b) $E(t) = \dfrac{\sqrt{2}q\omega^2 d}{4\pi\epsilon_0 c^2 R}\sin(\omega(t-R/c))$

21.9 $d\alpha/dt = -(1/120)\cos\theta\ \text{Hz}$

21.10 $C : I = 5I_A$, $\boldsymbol{E}$ à 26,5° de l'axe x.

$D : I = I_A$, $\boldsymbol{E}$ de polarisation circulaire gauche.

$E : I = I_A$, $\boldsymbol{E}$ perpendiculaire au plan xy.

21.11 $I(\theta) = 2I_0\left[1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}(1-\cos\theta)\right)\right]\dfrac{\sin^2\left(\frac{N\pi}{2}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}$

21.12 $E(t) = \dfrac{qa\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R}\cos(\omega(t-R/c))\sin\theta$,
où q est la charge totale des électrons oscillants.

Chapitre 22

22.2 $Q \approx 5{,}5 \times 10^6$

22.4 (a) $d = 9{,}1\ \text{km}$

22.5 $x = 1{,}6\ \text{mm}$

22.6 Avec $r_1 = \sqrt{(z-d)^2+D^2}$ et $r_2 = \sqrt{(z+d)^2+D^2}$,
$\dfrac{I(z)}{I_0} = \dfrac{1}{r_1^2}+\dfrac{1}{r_2^2}-\dfrac{2}{r_1 r_2}\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}(r_1-r_2)\right)$.

22.7 (a) $r = \sqrt{10{,}25}\lambda$

(b) $I/I_{\max} \approx 1/4$

22.8 (a) $\dfrac{I(\theta)}{I_{\max}} = \dfrac{\sin^2(2\pi\sin\theta)\,(1+\cos(8\pi\sin\theta))}{8\pi^2\sin^2\theta}$

(b) Il y a six ordres de maxima principaux (voir (c) ci-dessous).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(c)

θ (rad)	0	0,23	0,44	0,60	0,84	1,20
$I(\theta)/I_{\max}$	1	0,44	0,01	0,006	0,045	0,002

22.10 $$\frac{I_t}{I_0} = \frac{T^4}{1 - 2R^2\cos(4\pi D/\lambda) + R^4} = \frac{T^4}{2R^2(1 - \cos(4\pi D/\lambda)) + T^4}$$

22.11 (a) $h' = h\,\dfrac{F_2}{F_1}$

(b) $\lambda_m = \dfrac{10^7\ \text{Å}}{mN}\,|\sin\theta_i - \sin\theta_d|$

(c) $D = 10^{-7}\ \text{mm}\,\dfrac{mNF_2}{\cos\theta_d}$

(d) $w' = w\,\dfrac{F_2}{F_1}\,\dfrac{\cos\theta_i}{\cos\theta_d}$

22.12 (a) $\theta = 51{,}9°$

(b) $\lambda = 3750\ \text{Å}, 4370\ \text{Å}, 6560\ \text{Å}$

(d) $d = 5{,}6\ \text{mm Å}^{-1}$

(e) $\min \Delta\lambda = 7 \times 10^{-3}$ Å

Chapitre 23

23.2 $n = 0{,}9999916$

23.3 $\rho \approx 10^7\ \text{cm}^{-3}$

23.4 (b) $I = I_0 e^{-Nq^2/\epsilon_0 m\gamma c}$, où I_0 est l'intensité du rayonnement incident.

23.5 (a) $P = q_e^2\omega^4 x_0^2/12\pi\epsilon_0 c^3$

(b) $\gamma_R = q_e^2\omega^2/6\pi\epsilon_0 mc^3$

(c) $\Delta\lambda = (2\pi c/\omega^2)\gamma_R = 1{,}2 \times 10^{-4}$ Å

Chapitre 24

24.4 $N_e \approx 10^7\ \text{cm}^{-3}$

24.5 (a) $f = 1{,}5\ \%$

(b) $f = 9\ \%$

24.6 (a) $\sigma_{\max} = \dfrac{N^2\chi^2 q_e^2\omega^4}{6\pi\epsilon_0^2 c^4}\left(\dfrac{E_\parallel}{E_0}\right)^2$

(b) $\sigma(\theta) = \sigma_{\max}\cos^2\theta$

Chapitre 25

25.3 $I_t = (I_0/8)\sin^2 2\theta$

25.4 Pour ce qui est de l'intensité, voir l'exercice 21.2, partie (b). Le long de l'axe du cercle le rayonnement est polarisé circulairement ; dans le plan du cercle, il est polarisé linéairement.

25.5 $I_t/I_0 = \frac{1}{2}(\alpha^4 + \epsilon^4)\cos^2\theta + \alpha^2\epsilon^2\sin^2\theta$

25.6 $I_R/I_{\text{Lune}} \approx 34{,}5\,\%$, et la petite amie s'en va dégoûtée !

25.8 (a) $f = 17\,\%$

(b) $\beta = 67{,}4°$

25.9 (a) $I_t = I_0\cos^{2n}(\theta/n)$

25.10 $I_{\max}/I_{\min} = \cot^2\theta$

25.12 (a) $d = 1{,}67\times10^{-2}$ mm

(b) $\boldsymbol{E}$ est polarisé elliptiquement :

$$E_x = E_0\cos\phi\cos\omega t,$$
$$E_y = E_0\sin\phi\cos(\omega t + 1{,}4\pi),$$

où ϕ est la direction de polarisation de la lumière incidente.

Chapitre 26

26.7 $R = 1{,}5\times10^8$ km

26.9 (a) $\tan\theta_1 = 0{,}75$

(b) $\nu_1 = 1{,}67\nu_0$

26.10 $v/c = (\nu_0 - \nu)/(\nu_0 + \nu)$

26.11 $v/c = 7{,}6\times10^{-6}$

26.12 $\boldsymbol{v} = 510\,\text{km s}^{-1}$, se rapprochant de l'observateur.

26.13 $v/c \approx 0{,}8$

26.14 (a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{v^2x}{R^2}\,\dfrac{1 + vR/cx}{(1 + vx/cR)^3}$

(b) $\dfrac{I_{\max}}{I_{\min}} = \dfrac{(1 + v/c)^4}{(1 - v/c)^4}$

26.15 $\boldsymbol{E}(t,R_0) = -\dfrac{q_e}{4\pi\epsilon_0c^2R_0}\,\dfrac{a\sin\theta}{(1 - \beta\cos\theta)^3}\,\boldsymbol{e}_x$, pour $t \geqslant R_0/c$.

26.16 (a) $F = I_0A/c$

(b) $F \approx 0{,}16(I_0A/c)[1 - \cos(6\pi d/\lambda)]$

(c) $F = (I_0A/c)[1 - e^{-4\pi n'' d/\lambda}]$

26.17 $F = 1{,}3\times10^{-2}$ N

26.18 (b) $dR/dt = 360\,\text{m s}^{-1}$

26.19 (b) $R \approx (6\times10^{-4}\,\text{kg m}^{-2})/\rho$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Chapitre 27

27.2 $\theta \approx \arcsin(h/p_0 W)$

27.3 (a) $\lambda = 1{,}8\,\text{Å}$

(b) 1. $\lambda = 0{,}39\,\text{Å}$; 2. $\lambda = 8{,}7 \times 10^{-3}\,\text{Å}$

(c) $\lambda = 1{,}3 \times 10^{-25}\,\text{Å}$

(d) Le rayon X a une longueur d'onde plus courte que celle de l'électron.

27.4 $\lambda_{\text{max}} = 6150\,\text{Å}$

27.5 (a) $\lambda = 910\,\text{Å}$

(b) Le rayonnement émis est ultraviolet.

27.6 $R \approx 2{,}6 \times 10^{-3}\,\text{Å}$

27.7 $E_{\text{min}} = h\sqrt{\beta/m}$

27.8 $\tau \approx 8 \times 10^{-10}\,\text{s}$

27.9 $T \approx 620\,\text{MeV}$

27.10 $R \approx 5 \times 10^{-13}\,\text{cm}$

27.13 (a) $T = 11{,}3\,\text{eV}$

(b) $f_{\text{min}} = 3{,}3 \times 10^{15}\,\text{Hz}$

27.14 (a) $\theta_{\text{min}} = 7{,}1°$

(b) $d_{\text{max}} = 21{,}6\,\text{m}$

(c) $d = 1{,}9\,\text{m}, 2{,}7\,\text{m}, 3{,}3\,\text{m}, 4{,}3\,\text{m}$

27.15 (b) $\theta = 15{,}7°, 22{,}2°, 27{,}4°, 32{,}2°, 36{,}5°$

27.16 $\lambda = 6560\,\text{Å}, 4860\,\text{Å}, 18{,}840\,\text{Å}$

27.17 $T = 33\,\text{eV}$

27.18 (a) $\theta \approx \pi/4$

(b) $E_c = 2{,}1 \times 10^{-21}\,\text{J}$

27.19 (a) $\theta_I = 3°$, $\theta_{II} = 0{,}3°$

27.20 (a) $\Delta\lambda = 8{,}3 \times 10^{-4}\,\text{Å}$

(b) $w = 3\sqrt{2}\,\text{m}$

(c) $E_1 - E_0 = 2{,}46\,\text{eV}$

27.21 (a) $r_n = \dfrac{4\pi\epsilon_0 n^2\hbar^2}{me^2}$

$$\omega_n = \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^3\hbar^3}$$

(b) $T_n = \dfrac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 n^2\hbar^2}$

$$U_n = -2T_n$$

$$E_n = -T_n$$

(c) $\Delta E \propto \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$

Chapitre 28

28.2 (a) $P^{\gamma-1}/T^{\gamma} = \text{constante}$
(b) $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$

28.3 (a) $P_A = 3{,}17P_0$, $P_B = 2{,}64P_0$
(b) $W_A/W_B = 1{,}1$

28.4 $P_f = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$
$T_f = \frac{T_1T_2(P_1 + P_2)}{T_1P_2 + T_2P_1}$

28.5 (b) $P = P_0e^{-\mu gh/RT}$

28.6 $W = 1{,}82 \times 10^5$ J

28.7 $T = 173\,^{\circ}\text{C}$

28.8 $P = 200$ mmHg

28.9 $P = 842$ mmHg

28.10 (a) $T_2 = 1740$ K
(b) $V_2/V_1 = 5{,}8$

28.11 (a) $T_f = T_0$, $P_f = P_0/2$
(b) $T_f = T_0/2^{2/3}$, $P_f = P_0/2^{5/3}$

28.12 (a) $\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}$, où μ est la masse molaire moyenne du gaz atmosphérique et R la constante des gaz parfaits.
(b) Sur Terre, $dT/dh \approx -0{,}01\ \text{K m}^{-1}$

28.13 $\omega = \sqrt{(P_0A/L_0 + K)/m}$

28.14 $f_d = 31\,\%$

Chapitre 29

29.3 $C_V = \frac{5}{2}R$

29.4 (a) $C_{V,m} = \frac{3}{2}R$ (monoatomique)
(b) $C_{V,m} = \frac{5}{2}R$ (diatomique)

29.5 $h_{\text{Terre}} = 8{,}8$ km, $h_{\text{Soleil}} = 113$ km

29.6 $P(h = 0) = \frac{Nmg}{A}\frac{e^{mgL/kT}}{e^{mgL/kT} - 1}$
$P(h = L) = \frac{Nmg}{A}\frac{1}{e^{mgL/kT} - 1}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

29.7 (a) $f_1(h) = m_1/\left(m_1 + m_2 e^{-(m_1+m_2)gh/kT}\right)$

(c) $f = 1 - e^{-m_1/m_2}$

29.9 $F(E)\,dE = A\sqrt{2E/m^3}\,e^{-E/kT}\,dE$

29.10 (a) $k = 2N/V^2$

(b) $\langle v\rangle = 2V/3$, $v_{\text{rms}} = V/\sqrt{2}$

29.11 (a) $f = 0{,}55$

(b) $f = 0{,}06$

29.12 $P_1/P_2 = \sqrt{T_1/T_2}$

29.13 (a) $dn = A\,\dfrac{n}{4}\,v f(v)\,dv$, avec

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

(b) $v_{\text{rms}}^{(e)} = \sqrt{4kT/m}$, $v_{\text{rms}}^{(i)} = \sqrt{3kT/m}$

29.14 $\Delta\lambda \approx 0{,}012$ Å

29.15 $T = 1{,}2 \times 10^5$ K

29.16 $N_0/N_1 \approx 10^{-9}$

29.17 $F \approx (W/3)\sqrt{2\pi m/kT}$ (dépend de l'approximation faite)

29.18 (a) Où P est la pression d'entrée et de sortie, et γ le rapport de chaleurs spécifiques de l'air,

1. $v' = -\dfrac{P}{(\gamma-1)\rho v} + \sqrt{\left(\dfrac{P}{(\gamma-1)\rho v} + v\right)^2 + \dfrac{2W}{\rho v A}}$
2. $T' = (v'/v)T$
3. $F = \rho v A(v' - v)$

(b) $F \approx 5{,}3 \times 10^4$ N

Chapitre 30

30.1 (a) $T = 11{,}600$ K

(b) $kT = (1/40)$ eV

(c) $\lambda = 12{,}400$ Å

30.2 $96{,}520\ \text{J mol}^{-1} = 1$ eV/atome

30.3 On se trompera d'environ 100 % !

30.4 $I_1/I_2 \approx 10^{-5}$

30.7 (a) $C_V = \dfrac{3N_0 k(\Delta E/kT)^2 e^{\Delta E/kT}}{(3 + e^{\Delta E/kT})^2}$

Chapitre 31

31.2 $l = 1{,}8 \times 10^3$ cm

31.3 $l \approx 10^{-7}$ m, $\tau \approx 0{,}2 \times 10^{-9}$ s

31.4 (a) $P = 11 \times 10^{-4}$ mmHg

(b) $\kappa_1/\kappa_2 = 1$

31.5 $\mu = \mu_a\mu_b/(\mu_a + \mu_b)$

31.8 Avec le nombre de molécules de gaz par unité de volume n_0, leur vitesse moyenne v, leur masse m, et le rapport γ des chaleurs spécifiques du gaz,

(a) $\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{1}{4}\dfrac{n_0 v k \Delta T}{\gamma - 1}$

(b) $\dfrac{F}{A} = \dfrac{1}{4} n_0 v m \Delta U$

31.9 $L \approx 56l$

31.12 (a) Avec

$$V_{\text{nettoie}}(m) = \frac{d^2}{lcq_e}\frac{\sqrt{3mc^2kT}}{t},$$

où l est le libre parcours moyen du gaz, l'espace sera complètement nettoyé

1. d'électrons au voltage $V_D = V_{\text{nettoie}}(m_e)$,
2. d'ions de néon au voltage $V_D = V_{\text{nettoie}}(m_{\text{Ne}})$.

(b) En comparant $t = 0{,}4 \times 10^{-6}$ s aux temps nécessaires pour vider complètement la chambre des électrons ($t_e \approx 4 \times 10^{-7}$ s), et des ions de néon ($t_{\text{Ne}} \approx 8 \times 10^{-5}$ s), on voit que les électrons sont essentiels pour former une étincelle.

Chapitre 32

32.1 $E = 1{,}4$ J

32.2 $W_{\min} = (1/9)$ J

32.3 L'hélium fournit davantage de travail par cycle.

32.4 $\epsilon_{\max} = 66\,\%$

32.5 (a) $W = (P + Mg/A)V_1$

(b) $\Delta Q = \frac{5}{2}W$

(c) $\Delta U = \frac{3}{2}W$,

(d) $T_i = 4W/NR$, $T_f = 2T_i$

32.6 (b) $W = 101$ J

(c) $T_{\max} = 1200$ K

(d) $\Delta Q = 102{,}3\,\text{J} \cdot (2\gamma + 1)/(\gamma - 1)$

(e) $\Delta S = 0{,}23\,\text{J K}^{-1} \cdot (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

32.7 (a) $W = 1{,}1 \times 10^3\,\text{J}$
(b) $T_B = 600\,\text{K}$
(c) $\Delta Q_{A\to B} = 6{,}8 \times 10^3\,\text{J}$
(d) $\Delta Q_{B\to C} = 9{,}1 \times 10^3\,\text{J}$
(e) $\epsilon_{\max} = 7\,\%$
(f) $\epsilon_{\max} = 66\,\%$

32.8 (b) $\Delta S = 27{,}8\,\text{J K}^{-1}$

32.9 (a) $V_b = 8{,}8\,\text{L}$
(b) $V_d = 12{,}3\,\text{L}$
(c) $\Delta Q_{a\to b} = 1{,}25 \times 10^3\,\text{J}$
(d) $\Delta Q_{c\to d} = 0{,}95 \times 10^3\,\text{J}$
(e) $\epsilon = 25\,\%$
(f) $\Delta S = 0{,}11\,\text{J K}^{-1}\,\text{g}^{-1}$

32.10 (a) $\gamma = 1{,}57$
(b) $\Delta S = -1{,}4\,\text{cal K}^{-1}$

32.11 $W = P_0 V_0 \left(\dfrac{2^{\gamma-1} - 1}{\gamma - 1} - \ln 2 \right)$

32.13 $P_{\text{jour}} = 10{,}9\,\text{kW}$, $P_{\text{nuit}} = 24{,}6\,\text{kW}$

32.14 (b) $W = C_p(T_1 + T_2 - 2T_f)$

32.15 $\Delta S = 11 \times 10^3\,\text{J K}^{-1}$

32.16 (a) $\dot{W} = \dot{N}R\,\dfrac{\gamma}{\gamma - 1}\Big(T_C + T_A - T_C p^{-(1-1/\gamma)} - T_A p^{-(1-1/\gamma)}\Big)$
(b) $p_m = \left(\dfrac{T_C}{T_A}\right)^{\gamma/2(\gamma-1)}$
(c) $\dot{W}_m = \dot{N}R\,\dfrac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\sqrt{T_C} - \sqrt{T_A}\right)^2$
(d) $\epsilon_m = 1 - \sqrt{T_A/T_C}$
(e) $\dot{V}_A = 2{,}8\,\text{m}^3\,\text{s}^{-1}$
(f) $\epsilon_e = 50\,\%$
(g) $p_e = 11{,}3$

Chapitre 33

33.3 $C_V = (16\sigma/c)VT^3$, où σ est la constante de Stefan-Boltzmann (obtenue en section 45.3 du volume I).

33.4 (a) $dS_R/dt = 0{,}85\,\text{cal K}^{-1}\,\text{s}^{-1}$
(b) $dS_U/dt = dS_R/dt$

33.6 $dT/dz = -2{,}9\,\mathrm{K\,km^{-1}}$

33.7 (a) $dz/dt = (\kappa/L\rho)(\Delta T/z)$ où ρ est la densité de la glace.
(b) $z(t = 1\,\mathrm{h}) = 2{,}1\,\mathrm{cm}$

33.8 (1) a. $\Delta S_{\mathrm{gaz}} \approx 16\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
b. $\Delta S_{\mathrm{alentours}} = 0$
c. $\Delta S_{\mathrm{univers}} = \Delta S_{\mathrm{gaz}}$
(2) (a) $\Delta S_{\mathrm{gaz}} = 0$
(b) $\Delta S_{\mathrm{alentours}} = 0$
(c) $\Delta S_{\mathrm{univers}} = 0$

33.9 (a) $(\Delta S)_T = (16\sigma/3c)T^3(V_2 - V_1)$
(b) $(\Delta S)_V = (16\sigma/3c)V(T_2^3 - T_1^3)$
(c) $S(V,T) = S(V_0,T_0) + (16\sigma/3c)(VT^3 - V_0T_0^3)$

33.10 $T = 122\,^{\circ}\mathrm{C}$

33.11 $T = 270\,\mathrm{K}$

33.12 $f = 1$

33.13 $T = T_0 e^{-(3Ac/16R)t}$

33.14 (a) $f = 64$
(b) f serait plus grand.

33.15 $f = 4$

33.16 (a) $dE/dt = 1{,}95 \times 10^{-4}\,\mathrm{J\,s^{-1}}$
(b) $dT/dt = 0{,}06\,\mathrm{K\,s^{-1}}$

33.17 $P_G = 1{,}7 \times 10^{16}\,\mathrm{Pa}$, $P_R = 7{,}2 \times 10^{-12}\,\mathrm{Pa}$

33.21 $f = R^2/(R^2 + r^2)$

CHAPITRE 34

34.1 $v \propto \sqrt{M/\rho}$, où ρ est la densité du liquide.

34.2 $v_1/v_2 = 1/\sqrt{2}$

34.3 $v_{\mathrm{He}}/v_{\mathrm{H}} = 0{,}77$

34.4 $T = 99\,^{\circ}\mathrm{C}$

34.6 (a) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\sigma}{T}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$
(b) $v = \sqrt{\dfrac{T}{\sigma}}$

34.7 (a) $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{T}{m}\dfrac{l}{x(l-x)}}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(b) $y(t) = A\cos(2\pi\nu t)$

(c) $\nu_{\max} = \infty$

$$\nu_{\min} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{T}{ml}}$$

34.8 (a) $P(x,t) = P_0 - (\omega^2\xi_m/k)\sin(\omega t - kx)$

(b) $T = \frac{1}{4}\rho_0 A\lambda\omega^2\xi_m^2$

34.9 (a) $\chi_m = 1{,}05 \times 10^{-2}$ cm

(b) $\Delta T = 2{,}18 \times 10^{-2}$ K

34.10 (a) $f = 2{,}95$

34.12 (a) $\rho_e = 8{,}7 \times 10^{-7}\ \text{kg m}^{-3}$

(b) $\chi_m = 3{,}6 \times 10^{-8}$ m

(c) $I = 1{,}1 \times 10^{-5}\ \text{W m}^{-2}$

CHAPITRE 35

35.1 $v_{ph} = v_g = c$

35.3 (b) $v_g = 19{,}7\ \text{m s}^{-1}$, $v_{ph} = 39{,}5\ \text{m s}^{-1}$

35.4 Il y a six modes d'oscillation.

35.5 $u(x,y,t) = Ae^{i\omega t}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)$,

$$\omega = c\sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}}$$

35.7 $v_g = \frac{1}{2}\left(v_{ph} + \frac{4\pi T/\rho\lambda}{v_{ph}}\right)$

35.8 (a) $v_{ph} = 24{,}4\ \text{cm s}^{-1}$

(b) $v_{ph} = 18{,}3\ \text{cm s}^{-1}$

35.9 (a) $\lambda = 1{,}7$ cm

(b) $\nu = 13{,}6$ Hz

35.10 (a) $\nu = 1{,}6$ battements par seconde.

(b) $\Delta t = 0{,}03$ s

(c) $v = 363\ \text{m s}^{-1}$

35.11 (a) $\nu_{\text{ingénieur}} \approx 10$ battements par seconde.

(b) $\nu_{\text{ouvrier}} = \nu_{\text{ingénieur}}$

35.12 (d) $\omega_0 = (7/6)(v\pi/a)$

35.13 (a) $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + k(x-y)/m_1 = 0$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y + k(y-x)/m_2 = 0$$

(b) 1. $\omega^2 = \omega_0^2$, avec $A/B = 1$
2. $\omega^2 = \omega_0^2 + k/m_1 + k/m_2$, avec $A/B = -m_2/m_1$

35.14 1. $\omega = \sqrt{g/l}$, avec $x_1 = x_2 = x_3$
2. $\omega = \sqrt{g/l + k/m}$, avec $x_1 = -x_3$ et $x_2 = 0$
3. $\omega = \sqrt{g/l + 2k/m}$, avec $x_1 = x_3$ et $x_2 = -x_3$

35.15 Il y a deux modes d'oscillation, de périodes (1) $T = T_0/\sqrt{2{,}62}$; (2) $T = T_0/\sqrt{0{,}38}$, avec $T_0 = 2\pi\sqrt{I/K}$.

35.16 Il y a deux modes normaux de fréquences (1) $\omega = \omega_0\sqrt{0{,}38}$; (2) $\omega = \omega_0\sqrt{2{,}62}$, avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

35.17 (a) Il y a deux modes fondamentaux, de fréquences (1) $\omega = \omega_0\sqrt{2}$; (2) $\omega = \omega_0\sqrt{6}$, avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

35.18 $E = \frac{1}{4}\sigma\omega^2 A^2\lambda$

35.19 (a) $T_{\min} \approx h^2/2mL^2$
(b) $T_{\min} = h^2/8mL^2$
(c) $\langle p\rangle = 0$

Chapitre 36

36.3 (a) $g(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\left(\cos x + \dfrac{1}{9}\cos 3x + \dfrac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right)$

36.5 $A_1/A_0 = 1$, $A_2/A_0 = 0$, $A_3/A_0 = 1/9$

36.6 $h(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi}\left(\sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x + \cdots\right)$

36.7 (a) $T = 2L\sqrt{\sigma/S}$
(b) $y(x, t = T/2) = -y(x, t = 0)$

36.8 (a) $\langle V\rangle = 2V_0/\pi$
(b) $A_2 = 4V_0/15\pi$

36.9 (a) $V_{\text{externe}} = (1 + 3\epsilon/4)\sin x - (\epsilon/4)\sin 3x$

Chapitre 37

37.1 (a) $M = 1{,}9 \times 10^{-9}$ kg $= 1{,}1 \times 10^{18} \cdot m_p$
(b) $F = 9{,}9 \times 10^{13}$ N $\approx 1{,}1 \times 10^{10}$ tonnes-poids

37.2 Deux modèles peuvent être utilisés pour calculer une approximation de l'énergie, un dans lequel les deux moitiés sont deux hémisphères, et l'autre dans lequel les moitiés sont des sphères adjacentes. La distance des centres de charge n'est pas la même dans les deux cas, et les énergies qui en résultent diffèrent d'environ 1,5. Nous utilisons le second, en concentrant les charges au centre de deux sphères égales.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(a) $W_U = 4{,}1 \times 10^{-11}$ J/atome $= 1{,}3 \times 10^7$ kWh lb^{-1}

(b) $W_{He} = 7{,}6 \times 10^{-14}$ J/atome $= 3 \times 10^6$ kWh kg^{-1}

37.3 $\langle v \rangle = 1{,}4 \times 10^{-4}$ m s^{-1}, $\langle v \rangle^2/c^2 = 2{,}2 \times 10^{-25}$

37.4 (a) $B = 10^{-2}$ Wb m^{-2} $= 100$ gauss

(b) On ne peut pas déterminer la charge du muon dans cette expérience car la direction des *deux forces*, électrique et magnétique, change lors d'un changement de signe de la charge.

37.5 (a) La trajectoire de la particule est un cercle de rayon $R = mv/qB_0$.

(c) D'après les équations de Maxwell, la circulation de $\boldsymbol{B}$ autour d'un chemin fermé est nulle. Supposons que $\boldsymbol{B}$ remplisse un volume fini autour de l'origine et considérons un chemin rectangulaire dans le plan xz avec un coin à l'origine (0,0,0) et et le coin diagonalement opposé en (Δx,0,Δz). La circulation de $\boldsymbol{B}$ sur ce rectangle est $(B_0 + a\,\Delta x)\Delta z - B_0\,\Delta z = a\,\Delta x\,\Delta z \neq 0$.

37.6 (a) $B_0 = \dfrac{mv_0}{aq} - \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2 v_0}$

(b) La force magnétique est toujours perpendiculaire à $\boldsymbol{v}$ et ne change pas sa grandeur. Le champ électrique dérive d'un potentiel, si bien que le changement d'énergie cinétique dû au champ électrique ne dépend que de la distance r entre les charges. Le changement d'énergie cinétique est égal à $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$, et puisque cela ne dépend que de r, v est une fonction de r.

CHAPITRE 38

38.1 (a) $\boldsymbol{\nabla} T$ a une symétrie radiale et pointe vers l'intérieur. Pour un cylindre de rayon r,

$$\boldsymbol{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial r}\boldsymbol{e}_r = -\frac{(T_1 - T_2)}{\ln(b/a)}\frac{\boldsymbol{e}_r}{r},$$

où $\boldsymbol{e}_r$ est un vecteur radial unitaire.

(b) $T_1 - T_2 = 1{,}2$ K

38.3 En notant que $\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$,

(a) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{R} = \partial x/\partial x + \partial y/\partial y + \partial z/\partial z = 1 + 1 + 1 = 3$

(b) $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{R} = (\partial z/\partial y - \partial y/\partial z)\boldsymbol{e}_x + (\partial x/\partial z - \partial z/\partial x)\boldsymbol{e}_x + (\partial y/\partial x - \partial x/\partial y)\boldsymbol{e}_x = 0$ (car chaque terme = 0).

(c) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{R}/R^3) = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{x}{R^3} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{y}{R^3} + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{z}{R^3}$

$$= \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3x^2}{R^5}\right) + \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3y^2}{R^5}\right) + \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3z^2}{R^5}\right)$$

$$= \frac{3}{R^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{R^5} = \frac{3}{R^3} - \frac{3R^2}{R^5} = 0$$

(d) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{R}/R^3)$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{R^3} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{R^3}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{R^3} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{R^3}\right)\boldsymbol{e}_y + \cdots$$

$$= \left(\frac{3yz}{R^5} - \frac{3yz}{R^5}\right)\boldsymbol{e}_x + \cdots = 0$$

(e) $\boldsymbol{\nabla}(1/R)$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\,\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{R}\,\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{R}\,\boldsymbol{e}_z$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{R^3} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{R^3}$$

$$= -\frac{x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z}{R^3} = -\boldsymbol{R}/R^3$$

(f) $\varphi = \boldsymbol{R}^2/2 + \text{constante}$

38.4 (a) Prenant la divergence des deux membres de l'équation (2),

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}),$$

mais la divergence d'un rotationnel est toujours nulle [voir l'équation (2.59d) dans le volume II], et le membre de gauche est 0, se qui est cohérent avec $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

(b) La divergence du membre de gauche de équation (4) est

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (c^2 \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = c^2 \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = 0,$$

qui doit être égal à la divergence du côté droit, donc

$$0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}}{\epsilon_0} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho/\epsilon_0) + \frac{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}}{\epsilon_0}.$$

(c) En utilisant l'équation (2.59e) du volume II, le rotationnel du membre de gauche de l'équation (2) est

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E},$$

qui doit être égal au rotationnel du membre de droite,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}\right),$$

alors que dans l'espace vide $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0 = 0$ et $\boldsymbol{j} = 0$.

(d) Pour $\boldsymbol{j} = 0$, le rotationnel de l'équation (4) donne

$$c^2 \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}).$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

En appliquant l'équation (2.59e) du volume II à gauche et l'équation (2) à droite,

$$c^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - c^2\nabla^2\boldsymbol{B} = -\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2},$$

mais de l'équation (3), $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$.

(e) En utilisant l'équation (2.59b) duvolume II et l'équation (2),

$$\begin{aligned}\nabla\times\left(-\nabla\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) &= -\nabla\times(\nabla\phi) - \nabla\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)\\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{A}) = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla\times\boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

(f) L'équation (3) dit que $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$. Par l'équation (2.51) du volume II, $\boldsymbol{B}$ peut donc s'écrire $\nabla\times\boldsymbol{A}$.

38.5 Soit z l'axe de rotation, alors

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= v\left[-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{e}_y\right]\\ &= \omega(-y\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y) \text{ pour un rayon constant } \boldsymbol{r}.\end{aligned}$$

(a) $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \omega\left[-\dfrac{\partial y}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial y}\right] = 0$

(b) $\nabla\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ -\omega y & \omega x & 0\end{vmatrix}$

$= 0\boldsymbol{e}_x + 0\boldsymbol{e}_y + (\omega - (-\omega))\boldsymbol{e}_z = 2\omega\boldsymbol{e}_z.$

38.6 (a) Avec $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$ et $\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{R} &= (zA_y - yA_z)\boldsymbol{e}_x + (xA_z - zA_x)\boldsymbol{e}_y\\ &\quad +(yA_x - xA_y)\boldsymbol{e}_z\\ \nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{R}) &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{R})_z - \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{R})_y\right]\boldsymbol{e}_x + \cdots\\ &= [A_x - (-A_x)]\,\boldsymbol{e}_x + \cdots\\ &= 2\left[A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z\right] = 2\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

(b) La preuve que $\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}$ demande que $A_x(B_xC_x) = C_x(A_xB_x)$ mais $A_x(\partial x/\partial x) \neq x(\partial A_x/\partial x)$. L'équation correcte est

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}.$$

38.7 (b) $\nabla\cdot\boldsymbol{h}$ est le plus grand au point B ; sa valeur absolue est maximum au point D.

(c) $\nabla\times\boldsymbol{h} = 0$ partout. ($\boldsymbol{h}$ est proportionnel à ∇T et le rotationnel d'un gradient est toujours nul.)

CHAPITRE 39

39.1 (b) Intégrer les deux membres de l'équation sur un volume fixe V délimité par une surface S et utiliser le théorème de Gauss.

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}\, dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV,$$
$$\int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\, da = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV,$$

ou [courant total quittant V] = −[Taux de changement de la charge totale à l'intérieur de V], la charge est conservée.

39.2 Aucun champ magnétique n'est produit ?

39.3 (a) $\displaystyle\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, da = 4\pi K$

(b) *Conseil :* pour éviter la singularité de $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}$ à l'origine, remplacer la charge ponctuelle par une sphère équivalente uniformément chargée à l'origine et faire tendre son rayon vers 0.

(c) $\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s}$ est antisymétrique autour de l'origine par conséquent des morceaux correspondants d'intégrale curviligne en des côtés opposés s'annulent, donc

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = 0.$$

Avec le théorème de Stokes,

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{n}\, da,$$

pour toute surface S bornée par le chemin Γ, mais $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$ en électrostatique, si bien que l'intégrale est encore nulle.

39.4 (a) $V = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_S \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{n}\, da$, où $\boldsymbol{n}$ est la normale à l'élément de surface da.

(b) 1. Pour une sphere de rayon r, $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{n} = r$, d'où

$$V = \frac{r}{3}\int_S da = \frac{r}{3}(4\pi r^2) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

2. Pour un bloc rectangulaire avec des longueurs de côtés L_1, L_2, L_3, si l'on considère une face, par exemple de côtés L_1 et L_2 ; sur cette face $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{n} = L_3/2$, et l'intégrale de la partie (a) donne $(1/3)(L_3/2)(L_1L_2) = L_1L_2L_3/6$. Par symétrie, l'intégrale est la même sur chacune des six faces et par conséquent $V = L_1L_2L_3$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Chapitre 40

40.1 (a) $\phi(P) = \dfrac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\dfrac{l_2 + \sqrt{r^2 + l_2^2}}{-l_1 + \sqrt{r^2 + l_1^2}}\right)$

(b) Pour $r \gg (l_1 + l_2)$,

$$\phi(P) \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r + l_2}{r - l_1}\right) \approx \frac{\lambda(l_1 + l_2)}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

où q est la charge totale

(c) Pour P très proche de la ligne de charge (mais loin des extrémités, la symétrie impose que le champ soit approximativement radial. Donc, pour $r \ll (l_1 + l_2)$,

$$\phi(P) \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2l_2}{r^2/2l_1}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{4l_1 l_2}{r^2}\right),$$

d'où

$$\boldsymbol{E}(P) = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\,\boldsymbol{e}_r.$$

En appliquant la loi de Gauss à une surface cylindrique entourant une longueur Δz de la ligne de charge,

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, da \approx 2\pi r\, \Delta z\, E_r = \frac{\lambda\, \Delta z}{\epsilon_0}.$$

Donc, $\boldsymbol{E}(P) \approx (\lambda/2\pi\epsilon_0 r)\boldsymbol{e}_r$, qui concorde bien.

40.2 $\boldsymbol{E}(P) = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}}\right)\boldsymbol{e}_r$

40.3 (a) Utiliser $E_r = \begin{cases} 0 & \text{pour } r < r_a \\ q'/4\pi\epsilon_0 r^2 & \text{pour } r_a < r < r_b \\ 0 & \text{pour } r_b < r < r_c \\ (q' + q)/4\pi\epsilon_0 r^2 & \text{pour } r > r_c \end{cases}$

(c) $\phi(r_a) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\dfrac{(q + q')}{r_c} - q'\left(\dfrac{1}{r_b} - \dfrac{1}{r_a}\right)\right]$

(d) La région $r_b < r < r_c$ est dans un conducteur où le champ est toujours nul. Les champs dans la région $r > r_c$, en dehors du conducteur, ne changent pas.

Chapitre 41

41.1 Avec l'origine au centre de la sphère S de rayon r, et en utilisant des coordonnées sphériques (r,θ,ψ), la valeur moyenne de ϕ sur S est

$$\begin{aligned} \langle\phi(r)\rangle_S &= \frac{1}{4\pi r^2}\int_S \phi(r,\theta,\psi)\, da \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \phi(r,\theta,\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\psi \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{d\langle\phi(r)\rangle_S}{dr} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial\phi}{\partial r}\sin\theta\, d\theta\, d\psi$$
$$= -\frac{1}{4\pi r^2}\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\, da = 0,$$

car il n'y a pas de charges à l'intérieur de la sphère. Ainsi, $\langle\phi(r)\rangle_S$ = constante = $\lim_{r\to 0}\langle\phi(r)\rangle_S = \phi(0)$.

41.2 $\boldsymbol{E}(r) = (\rho r/2\epsilon_0)\boldsymbol{e}_r$ à la distance radiale r de *l'axe* du cylindre. Pour une sphère $\boldsymbol{E}(r) = (\rho r/3\epsilon_0)\boldsymbol{e}_r$ à la distance r du *centre* de la sphère.

41.3 Avec les plaques parallèles au plan xy, $\boldsymbol{E}_1 = (2\sigma/3\epsilon_0)\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{E}_2 = -(\sigma/3\epsilon_0)\boldsymbol{e}_z$.

41.4 $E_x(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{\rho(\xi)\,d\xi}{2\epsilon_0} - \int_x^{\infty}\frac{\rho(\xi)\,d\xi}{2\epsilon_0}$

41.5 (a) $\sigma_e = 0$

(b) $\sigma_c = \frac{4}{3}k\epsilon_0 d^{1/3}$

(c) $\rho(x) = -\frac{4}{9}\epsilon_0 k x^{-2/3}$

41.6 Une densité de charge σ sur un élément de surface da produit un champ $\sigma/2\epsilon_0$ normal à da. Lorsque c'est un élément de surface d'un métal, le champ est σ/ϵ_0 hors du métal, et zéro à l'intérieur. Par principe de superposition, les charges sur le reste du métal (hormis da) doivent produire un champ $\sigma/2\epsilon_0$. Ce champ exerce une force sur da normale à da et égale en grandeur à $\sigma\, da\cdot\sigma/2\epsilon_0 = (\sigma^2/2\epsilon_0)\, da$.

41.7 (a) $N_e/N_a \approx 1/3000$

(b) $F_e/F_a \approx 1/6000$

41.8 (a) $\omega = 1{,}7\times 10^{22}\ \mathrm{s}^{-1}$ ($f = \omega/2\pi = 2{,}7\times 10^{21}$ Hz)

(b) $\hbar\omega = 1{,}8\times 10^{-12}$ J = 11 MeV

(c) 11 MeV est à peu près la même énergie que celle des rayons X émis lorsqu'un méson s'arrête dans du plomb et forme un atome muonique, ce qui suggère que les muons sont piégés dans le premier état excité puis font une transition à l'état fondamental.

41.9 (a) Un objet de masse m dans un tunnel le long d'un diamètre de la Terre subirait à une distance r du centre de la Terre une force dirigée vers le centre,

$$F = \frac{GMmr^3/R^3}{r^2} = \frac{mg}{R}\,r$$

où M est la masse de la Terre et R son rayon. Ainsi, l'objet a un mouvement harmonique régi par l'équation $m\ddot{r} = -(mg/R)r$, de fréquence angulaire $\omega = \sqrt{g/R}$. Un satellite en orbite rasante autour de la Terre doit avoir une fréquence angulaire $m\omega^2 R = mg$, donc $\omega = \sqrt{g/R}$ dans ce cas aussi.

(b) $P = 1{,}4$ h

41.10 Le modèle prévoit que la température à la surface de la Terre serait d'environ −50.000 °C, très inférieure à la réalité.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

41.11 (a) 1. $\boldsymbol{E}(r) = \dfrac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r}\,\boldsymbol{e}_r$ pour $r_2 \leqslant r \leqslant r_3$; 2. $\boldsymbol{E}(r_1) = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r_4}\,\boldsymbol{e}_r$, où $\boldsymbol{e}_r$ est un vecteur unitaire radial.

(b) $\Delta\phi = \dfrac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \dfrac{r_3}{r_2}$

(c) 1. Les champs et potentiels sont inchangés. (2) Le champ sera nul pour $r < r_2$ et le même qu'avant pour $r > r_2$. $\Delta\phi$ va décroître. (3) Le champ à l'intérieur du puits carré s'annule. Le champ entre les cylindres sera déformé (les lignes de champ doivent rester perpendiculaires aux deux surfaces). Le champ pour $r > r_3$ est inchangé.

Chapitre 42

42.1 La force est attractive :

$$F_x = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{4a^2} - \frac{a}{4(a^2+b^2)^{3/2}}\right]$$
$$F_y = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{4b^2} - \frac{b}{4(a^2+b^2)^{3/2}}\right]$$

42.2 (a) En. cin. $= \dfrac{q^2}{16\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}\right)$

(b) Non physique car il devient infini pour $x \to 0$. Incorrect à petit x à cause de la structure de la surface.

(c) En. cin. = 3,6 eV

42.4 $T = 2{,}6 \times 10^6$ s (un mois)

42.5 (a) $C_l = \dfrac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}$

(b) C_l décroîtrait dans la région de la protubérance.

42.6 (a) $\phi = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{b}$

(b) $\sigma(\theta) = \dfrac{q}{4\pi}\left[\dfrac{1}{ab} - \dfrac{b^2 - a^2}{a(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{3/2}}\right]$

(c) $F = \dfrac{a}{b^2}\,qV - \dfrac{ab}{(b^2-a^2)^2}\,\dfrac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$

42.7 À l'extérieur d'une sphère de charge uniforme, le champ est le même que si toute la charge était concentrée en son centre. Par conséquent, le champ en dehors des deux sphères de rayon a et de densité de charge $\pm\rho$ est un champ dipolaire avec moment $p = (4/3)\pi a^3 \rho d$, où d est la distance entre les centres des sphères. À l'intérieur d'une sphère de densité de charge uniforme $\pm\rho$ le champ au rayon r est $\boldsymbol{E}^{\pm} = (\pm\rho/3\epsilon_0)\boldsymbol{e}_r$. Le champ dipolaire est la somme $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^+ + \boldsymbol{E}^-$, qui est antiparallèle au dipôle. Par triangles semblables $E/E^+ = d/r$, donc $\boldsymbol{E} = -(\rho/3\epsilon_0)d\,\boldsymbol{e}_z$, où $\boldsymbol{e}_z$ est un vecteur unitaire parallèle au dipôle. Mais $\sigma_0 = \rho d$. Par conséquent, le

champ du dipôle à l'extérieur des sphères a un moment $p = (4/3)\pi a^3\sigma_0$, alors que le champ à l'intérieur des sphères est $\boldsymbol{E} = -(\sigma_0/3\epsilon_0)\,\boldsymbol{e}_z$.

42.8 (a) $E_r = \dfrac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3}\cos\theta$

$E_\theta = \dfrac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\sin\theta$

(b) Le points sur une ligne droite qui passe par le dipôle ont les mêmes coordonnées θ et φ (seul r varie). La direction du champ électrique est déterminée par le rapport $E_\theta/E_r = \frac{1}{2}\tan\theta$, il est donc le même en chaque point.

(c) Pour $\theta = 0$, $\pi/4$, et $\pi/2$ les angles entre $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{p}$ sont respectivement 0, arctan 3, et π, alors que les intensités relatives de $\boldsymbol{E}$ dans ces directions sont $4 : \sqrt{10} : 2$.

42.9 (a) Utiliser la superposition : en prenant le dipôle et le champ dans la même direction x, le potentiel total en (x,y,z) est

$$\phi = -E_0 x + \frac{px}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

En mettant $\phi = 0$ et en réarrangeant on obtient ,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0}\right)^{2/3},$$

qui est l'équation d'une sphère de rayon $a = (p/4\pi\epsilon_0 E_0)^{1/3}$.

(b) $p = 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3$

(d) Les champs ne changeraient pas.

(e) $\sigma(\theta) = 3\epsilon_0 E_0\cos\theta$

(f) $p = 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3$ (C'est comme dans l'exemple étudié en Section 6.4 du volume II, avec le même moment utilisé implicitement.)

(g) Tout problème qui a un potentiel analogue peut être résolu par cette méthode.

42.10 (a) 1. $\boldsymbol{F} \approx (p\lambda/2\pi\epsilon_0 r^2)\boldsymbol{e}_r$, et $\boldsymbol{\tau} = 0$. (2) $\boldsymbol{F} = 0$ et $\boldsymbol{\tau} = (p\lambda/2\pi\epsilon_0 r)$ perpendiculaire au plan du fil et de la particule.

(b) Soit $\boldsymbol{r}$ le rayon vecteur de la charge négative du dipôle $-q$, et $\boldsymbol{d}$ le déplacement de sa charge négative jusqu'à sa charge positive $+q$. La force totale sur le dipôle dans un champ électrique $\boldsymbol{E}$ est $\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})]$. Pour de petits déplacements $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = (\partial\boldsymbol{E}/\partial x)d_x + (\partial\boldsymbol{E}/\partial y)d_y + (\partial\boldsymbol{E}/\partial z)d_z = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{E})$. Ainsi $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\nabla}(q\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})$.

42.11 Hors de la feuille, le champ électrique est nul car les champs des charges positives et négatives se compensent, si bien que le potentiel est constant (indépendant de r). En prenant un potentiel nul au milieu de la feuille, $\phi = Np/2\epsilon_0$ d'un côté et $\phi = -Np/2\epsilon_0$ de l'autre.

42.12 (a) $\phi(P) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} - \dfrac{1}{x}\right)$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(b) $\boldsymbol{E}(P) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}} - \dfrac{1}{x^2}\right)\boldsymbol{e}_x$

(c) Pour $x \gg a$, $\boldsymbol{E} \approx -\dfrac{3qa^2}{8\pi\epsilon_0 x^4}\,\boldsymbol{e}_x$.

(d) Un dipôle à l'origine produirait un champ $E \propto 1/x^3$ (et non $E \propto 1/x^4$). Nous avons là une contribution d'ordre supérieur. Une façon de le voir (et de voir que le moment du dipôle de la configuration donnée est nul) est de constater que nous avons un effet de *dipôles qui se compensent* : chaque diamètre de l'anneau est comme deux dipôles égaux et opposés. L'ordre supérieur est un moment *quadrupolaire*.

42.13 (a) $t_1 = 1000\,\text{s}$

(b) $V = 1{,}5\,\text{V}$

(c) La capacité est réduite de moitié, il y a donc une charge moitié moindre sur les plaques, et ainsi $t_1 = 500\,\text{s}$.

(d) La charge est inchangée, donc t_1 est inchangé.

42.14 (a)

y (cm)	0	0,5	1,0	2,0
E (V/m)	0	$\dfrac{(0{,}005)^3}{2\epsilon_0}$	$\dfrac{(0{,}01)^3}{2\epsilon_0}$	$\dfrac{(0{,}01)^3}{4\epsilon_0}$

(b) $\phi(0{,}0{,}0) \approx \dfrac{(0{,}01)^4}{8\epsilon_0}(3 + 8\ln 10)\,\text{V}$

(C'est une borne supérieure.)

(c) $\phi(0{,}5{,}0{,}0) < \phi(0{,}0{,}0)$

CHAPITRE 43

43.1 (a) Supposons que les lignes de densité de charge $\pm\lambda$ sont parallèles à l'axe z, et coupent l'axe x en $x = \pm d/2$. Le potentiel à une distance r d'une ligne de densité de charge λ est $-(\lambda/2\pi\epsilon_0)\ln r$. Le potentiel total en un point du plan xy est donc

$$\phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\sqrt{(x-d/2)^2+y^2}}{\sqrt{(x+d/2)^2+y^2}}\right).$$

Les courbes de potentiel constant doivent donc satisfaire

$$(x-d/2)^2 + y^2 = c\left((x+d/2)^2 + y^2\right)$$

pour une certaine constante c. Cela peut se récrire

$$\left(x - \left(\frac{1+c}{1-c}\right)\frac{d}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{cd^2}{(1-c)^2}$$

qui est l'équation d'un cercle.

(b) $C_l \approx \dfrac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/r)}$

(c) pour $x,y \gg d$,

$$\frac{\sqrt{(x-d/2)^2+y^2}}{\sqrt{(x+d/2)^2+y^2}} \approx \sqrt{\frac{x^2+y^2+xd}{x^2+y^2-xd}} \approx \sqrt{1+\frac{2xd}{x^2+y^2}}.$$

En prenant le logarithme du membre de droite,

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2xd}{x^2+y^2}\right) \approx \frac{xd}{x^2+y^2}.$$

On note que $1/z = 1/(x+iy) = (x-iy)/(x^2+y^2)$,

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\sqrt{(x-d/2)^2+y^2}}{\sqrt{(x+d/2)^2+y^2}}\right)\\ &\approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{xd}{x^2+y^2} = \frac{\lambda d}{2\pi\epsilon_0}\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right).\end{aligned}$$

CHAPITRE 44

44.1 Vous *devriez* être d'accord !

44.2 (a) $V_f = 3000\,\mathrm{V}$

(b) $W = 4{,}05\times10^{-5}\,\mathrm{J}$

44.3 (a) $$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{(Q_1+Q_2)^2}{2(C_1+C_2)} - \left(\frac{Q_1^2}{2C_1}+\frac{Q_2^2}{2C_2}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\right)\left(\frac{Q_1}{C_1}-\frac{Q_2}{C_2}\right)^2 < 0\end{aligned}$$

(b) La plupart de l'énergie perdue se retrouve dans la chaleur formée par le courant qui s'écoule quand les charges se réajustent (une fraction infime est rayonnée).

(c) $\Delta U = 0$ seulement lorsque $V_1 = V_2$, où $V_1 = Q_1/C_1$ et $V_2 = Q_2/C_2$ sont les voltages initiaux des condensateurs. (Aucun courant ne circule si les voltages des condensateurs sont égaux.)

44.4 (a) Soit $\boldsymbol{r}$ le rayon vecteur de la charge négative du dipôle $-q$ et $d\boldsymbol{e}_z$ le déplacement de la charge négative à la charge positive du dipôle, si bien que le moment du dipôle est $\boldsymbol{p} = qd\boldsymbol{e}_z$. Posons que le potentiel ϕ du champ électrique $\boldsymbol{E}$ s'annule à l'infini. Alors, en déplaçant le dipôle depuis l'infini on effectue du travail $U = -q\phi(\boldsymbol{r}) + q\phi(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{e}_z) \approx q(d\,\partial\phi/\partial z) = (qd)(-E_z) = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$.

(b) Pour $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$, $\tau = q(\boldsymbol{d}/2)\times\boldsymbol{E} + (-q)(-\boldsymbol{d}/2)\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}$, qui vaut $pE\sin\theta$ lorsque l'angle entre $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{p}$ vaut θ. D'autre part, $U = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} = -pE\cos\theta$, et le couple est $\partial U/\partial\theta = pE\sin\theta$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(c) L'énergie n'est pas la même si le dipôle est formé de deux charge placées l'une après l'autre dans le champ. Dans ce cas, les charges exercent des forces l'une sur l'autre, et il y a un terme supplémentaire d'énergie $-q^2/4\pi\epsilon_0 d$, correspondant au travail nécessaire pour assembler le dipôle.

44.5 L'énergie dans le condensateur est $U = Q^2/2C$, alors que sa capacité est $C = \epsilon_0 A/x$, où x est la séparation des plaques. Donc $U = (Q^2/2\epsilon_0 A)x$. La force sur les plaques est $F = -\partial U/\partial x = -Q^2/2\epsilon_0 A$, qui est negative, ce qui implique une force attractive.

44.6 $r_\pi \approx 2 \times 10^{-14}\text{cm}$

44.7 (a) $W_a = \dfrac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)$

(b) $W_b = W_a + \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 b}$

CHAPITRE 45

45.1 (a) En négligeant les effets de bord, le champ électrique entre les plaques est uniforme et perpendiculaire aux plaques, la capacité totale est $C = (Q_1 + Q_2)/V = C_1 + C_2$, où Q_1 et Q_2 sont les charges libres sur chaque demi-plaque, C_1 et C_2 sont les capacités de chaque plaque, et V est le potentiel entre les plaques. L'aire de chaque demi-plaque est $A/2$, et $C_1 = \kappa_1\epsilon_0(A/2)/d$ et $C_2 = \kappa_2\epsilon_0(A/2)/d$. Donc $C = C_1 + C_2 = (\epsilon_0 A/d)\,(\kappa_1 + \kappa_2)/2$.

(b) Si les plaques sont maintenues à une différence de potentiel V, alors

$$V = \phi_{\text{bas}} - \phi_{\text{haut}} = -\int_{\text{haut}}^{\text{bas}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = E_1 d = E_2 d,$$

puisque l'intégrale curviligne peut être choisie dans chacune des régions. Si maintenant nous écrivons la relation entre le champ électrique (de grandeur V/d) à la charge surfacique sur les plaques, nous pouvons calculer la charge totale Q et ainsi obtenir la capacité totale C. Pour le faire, nous utilisons l'équation (10.26) du volume II, $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\kappa\boldsymbol{E}) = \rho_{\text{libre}}/\epsilon_0$, pour obtenir

$$\int_S \kappa\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,da = \int_V \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0}\,dV = \frac{Q_{\text{libre}}}{\epsilon_0}.$$

Dans le métal, $\boldsymbol{E} = 0$, et $\kappa_1 E_1\,da = (\sigma_1)_{\text{libre}}/\epsilon_0\,da$. Ainsi, $(Q_1)_{\text{libre}} = (\sigma_1)_{\text{libre}}(A/2) = \epsilon_0\kappa_1 E_1(A/2) = (\epsilon_0 A/d)(\kappa_1/2)V$. Donc, $C = [(Q_1)_{\text{libre}} + (Q_2)_{\text{libre}}]/V = (\epsilon_0 A/d)\,(\kappa_1 + \kappa_2)/2$.

45.2 (a) $F = 7{,}1 \times 10^{-8}\,\text{N}$

(b) $P = 1{,}1 \times 10^{-8}\,\text{C m}^{-2}$ (vers le bas en supposant que la plaque du haut est positive)

(c) La présence de sphères métalliques dans le diélectrique réduirait la différence de potentiel entre les plaques.

45.3 Si le champ dans la région vide entre les plaques est E_0, le champ dans le diélectrique est réduit, $E_d = E_0/\kappa$. Le voltage entre les plaques est la somme des voltages au travers des régions vides et des régions remplies de diélectrique, $V = E_0(d - t) + E_d t$. La charge sur les plaques est donc $Q = CV = C(E_0(d-t) + (E_0/\kappa)t)$. Toutefois, si le diélectrique est enlevé, le voltage entre les plaques devient $V_0 = E_0 d$, et $Q = C_0 V_0 = C_0 E_0 d$. Donc, $C_0 E_0 d = C(E_0(d - t) + (E_0/\kappa)t)$, et en résolvant pour C on obtient le résultat désiré.

45.4 (a) $\sigma_{\text{pol}}(\text{surface interne}) = -\left(\dfrac{\kappa - 1}{\kappa}\right)\dfrac{Q}{4\pi a^2}$

$$\sigma_{\text{pol}}(\text{surface externe}) = \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right)\frac{Q}{4\pi b^2}.$$

(b) À l'intérieur du diélectrique, $\rho_{\text{pol}} = 0$.

45.5 (a) Si la batterie fournit une charge Δq au condensateur au potentiel V, le travail fourni est $W_{\text{batt}} = \Delta q\, V$. Avant qu'on insère le diélectrique, la capacité est $C = q/V = \epsilon_0 A/d$, où d est la distance entre les plaques. Après l'insertion, la capacité devient $C' = q'/V = \kappa\epsilon_0 A/d$ (voir l'équation (10.10) du volume II), si bien que $q' = \kappa q$. Ainsi, $W_{\text{batt}} = (q' - q)V = qV(\kappa - 1)$.

(b) $W_{\text{mec}} = -\frac{1}{2}qV(\kappa - 1)$. Ce travail est fourni *à* l'opérateur.

(c) Dans tout processus où la différence de potentiel entre les plaques d'un condensateur est maintenue et la capacité change, $W_{\text{batt}} = -2W_{\text{mec}}$.

45.6 Lorsque l'équilibre a été atteint, la batterie peut être débranchée sans effet, nous considérons donc seulement le travail fait par la force électrique et la pesanteur : $\Delta U_{\text{grav}} = -\Delta U_{\text{el}}$. Le centre de masse de l'huile déplacée est à une hauteur de $H/2$, pour un petit déplacement du sommet de l'huile ΔH, le travail de la pesanteur est $\Delta U_{\text{grav}} = \Delta(mgH/2) = \pi(b^2 - a^2)H\rho g\Delta H$ (en supposant que le niveau du bas de l'huile n'a pas changé appréciablement). Puisque la charge Q sur les tuyaux reste constante, alors que leur capacité C change avec la présence de l'huile entre elles, le travail fait par la force électrique est $\Delta U_{\text{el}} = \Delta(Q^2/2C) = -(Q^2/2C^2)\Delta C = -(V^2/2)\Delta C$. La capacité par unité de longueur entre les cylindres coaxiaux avec un diélectrique entre eux est $C_l = 2\pi\epsilon_0\kappa/\ln(b/a)$ (comparer avec l'exercice 42.5), donc $\Delta C = 2\pi\epsilon_0(\kappa - 1)\Delta H/\ln(b/a)$. En mettant tout cela ensemble, on a

$$\pi(b^2 - a^2)H\rho g\,\Delta H = (V^2/2)2\pi\epsilon_0(\kappa - 1)\,\Delta H/\ln(b/a),$$

et en résolvant pour H on obtient le résultat désiré.

45.7 Nommons les composantes normale et tangentielle des champs électriques dans les deux régions, par rapport à leur surface, (E_{1n}, E_{1t}) et (E_{2n}, E_{2t}), tels que $\cot\theta_1 = E_{1n}/E_{1t}$ et $\cot\theta_2 = E_{2n}/E_{2t}$. Considérons un volume cylindrique d'aire transverse A et de hauteur h avec son axe normal à la frontière et le coupant. En appliquant le théorème de Gauss à l'équation (10.26) du volume II, $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\kappa\boldsymbol{E}) = \rho_{\text{libre}}/\epsilon_0$, on voit que le flux total de $\kappa\boldsymbol{E}$ au travers de la surface de ce volume doit être égale

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

à la densité de charge des charges libres à l'intérieur (divisée par ϵ_0). Avec h arbitrairement petit, le flux au travers de la surface du volume est $\kappa_1 E_{1n} A - \kappa_2 E_{2n} A$; puisqu'il n'y a pas de charges libres sur la frontière, cela doit être égal à zéro, donc $\kappa_1 E_{1n} = \kappa_2 E_{2n}$. Considérons maintenant une petite boucle rectangulaire de longueur l parallèle à la frontière et de hauteur h perpendiculaire à la frontière et la coupant. En appliquant le théorème de Stokes à l'équation de Maxwell pour l'électrostatique, $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$, on voit que la circulation de $\boldsymbol{E}$ sur la boucle doit être nulle. Avec h arbitrairement petit, la circulation sur la boucle est $E_{1t} l - E_{2t} l$, donc $E_{1t} = E_{2t}$. D'où, $\kappa_1 E_{1n}/E_{1t} = \kappa_2 E_{2n}/E_{2t}$, qui est la même chose que $\kappa_1 \cot\theta_1 = \kappa_2 \cot\theta_2$.

CHAPITRE 46

46.1 En prenant la sphère à l'origine et $\boldsymbol{P}$ dans la direction $+z$,

$$\boldsymbol{E}_{\text{dehors}} = \frac{a^3 P}{3\epsilon_0 r^5}\left(3xz\boldsymbol{e}_x + 3yz\boldsymbol{e}_y + (3z^2 - r^2)\boldsymbol{e}_z\right),$$

$$\boldsymbol{E}_{\text{interne}} = -\frac{P}{3\epsilon_0}\boldsymbol{e}_z,$$

où r est la distance du centre de la sphère au point du champ (x,y,z).

46.2 $p = 2{,}44 \times 10^{-39}\,\text{C m}$

46.3 (a) Prendre $\alpha = (\kappa - 1)kT/P$.
(b) $p_0 = 6{,}4 \times 10^{-30}\,\text{C m}$

46.4 (a) $\alpha = 2\pi a^3$
(b) $\alpha_{\text{T}} \approx \dfrac{2{,}62a^3 - \alpha_{\text{O}}}{1 + 18{,}33\alpha_{\text{O}}/a^3}$

46.5 $\kappa = 1 + \pi/54$

CHAPITRE 47

47.1 $T_0 = \dfrac{W}{4\pi K}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{R}\right) + T_R$

47.2 $a \approx 6250\,\text{km}$

47.3 (a) $b_n \neq 0$ pour $n = 1$ et $n = -2$ seulement
(b) $c_n \neq 0$ pour $n = 1$ et $n = -1$ seumlement

47.4 $T_P \approx 20{,}53\,^\circ\text{C}$

CHAPITRE 48

48.1 En prenant x horizontal et y vertical,
(a) $\boldsymbol{B} = (8 \times 10^{-5})\boldsymbol{e}_y\,\text{Wb m}^{-2}$
(b) $\boldsymbol{F} = (-6\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y)10^{-4}\,\text{N m}^{-1}$

48.2 $\boldsymbol{B} = 0$

48.3 $\boldsymbol{B}$ au rayon r est tangent au cercle de rayon r, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (par rapport à la figure), et sa grandeur est

(a) $B = \dfrac{Ir}{2\pi\epsilon_0 c^2 a^2}$ pour $r < a$,

(b) $B = \dfrac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}$ pour $a < r < b$,

(c) $B = \dfrac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}\left(\dfrac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}\right)$ pour $b < r < c$,

(d) $B = 0$ pour $r > c$.

48.4 (a) $\boldsymbol{F}_{\text{boucle}} = \dfrac{I_1 I_2}{2\pi\epsilon_0 c^2} l\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a+w}\right)$, haut (par rapport à la figure)

(b) $\boldsymbol{F}_{\text{fil}} = -\boldsymbol{F}_{\text{boucle}}$

(c) $\boldsymbol{\tau}_{\text{boucle}} = 0$

48.5 (a) $B \approx 7{,}9 \times 10^{-3}\ \text{Wb m}^{-2}$

(b) $nI \approx 1{,}6 \times 10^{4}$ ampère-tours

48.6 $B = dj/2\epsilon_0 c^2$ (le même que sans le trou)

CHAPITRE 49

49.1 Avec l'origine en P, prenant y dans la direction de v, et z perpendiculaire à la feuille (en haut par rapport à la figure),

(a) $\boldsymbol{A} = -\dfrac{\sigma v z}{2\epsilon_0 c^2}\boldsymbol{e}_y$

(b) $\boldsymbol{B} = \dfrac{\sigma v}{2\epsilon_0 c^2}\boldsymbol{e}_x$

49.2 Au centre du demi-cercle

(a) $\boldsymbol{B}$ des segments droits = 0,

(b) $\boldsymbol{B}$ du segment courbe = $(I/4\epsilon_0 c^2 r)$ dans la page (par rapport à la figure),

(c) $\boldsymbol{B}$ du fil tout entier est la somme de $\boldsymbol{B}$ de chaque contribution, égale à $\boldsymbol{B}$ du segment courbe.

49.3 Avec l'axe $+x$ vers la droite (par rapport à la figure),

(a) $\boldsymbol{B}(x) = \dfrac{Ia^2}{2\epsilon_0 c^2}\left[\dfrac{1}{\left(a^2 + (b/2 - x)^2\right)^{3/2}} + \dfrac{1}{\left(a^2 + (b/2 + x)^2\right)^{3/2}}\right]\boldsymbol{e}_x$

(b) Avec $r^2 = a^2 + b^2/4$

$$\boldsymbol{B}(x) \approx \frac{Ia^2}{2\epsilon_0 c^2}\left[\frac{2}{r^3} + \left(\frac{15b^2}{4r^7} - \frac{3}{r^5}\right)x^2\right]\boldsymbol{e}_x$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(c) Les termes en x^2 s'annulent lorsque $r = \sqrt{5}a/2 \rightarrow a = b$, c'est-à-dire lorsque les boucles sont séparées d'une distance égale à leur rayon. Ensuite, le champ près du centre est constant en x, sur l'axe, sauf pour des termes en $(x/r)^3$ et plus.
(d) Avec $r = \sqrt{5}a/2$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \frac{Ia^2}{2\epsilon_0 c^2}\left[\frac{2}{r^3}\right]\boldsymbol{e}_x = \frac{Ia^2}{\epsilon_0 c^2(\sqrt{5}a/2)^3}\,\boldsymbol{e}_x \\ &= \frac{8I}{5^{3/2}a\epsilon_0 c^2}\,\boldsymbol{e}_x\end{aligned}$$

49.5 Avec l'origine au centre de la boucle et z le long de son axe, on obtient le résultat :

$$\boldsymbol{B}(z) = \frac{Ia^2}{2\epsilon_0 c^2(a^2+z^2)^{3/2}}\,\boldsymbol{e}_z$$

49.7 (a) Le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ dans le cylindre est celui d'un solénoïde de densité de courant de surface σv, où $\sigma = \lambda/2\pi a$ est la densité de charge superficielle, et $v = \omega a$ (ω étant la vitesse angulaire du cylindre). Par conséquent, $\boldsymbol{B}$ est parallèle à l'axe du cylindre, et

$$B = \frac{\sigma v}{\epsilon_0 c^2} = \frac{\lambda\omega}{2\pi\epsilon_0 c^2}.$$

(Voir section 13-5 du volume II.) La différence de potentiel V entre le centre du cylindre et son bord est le travail fourni par unité de charge q déplacée d'un rayon $r = 0$ à $r = a$ contre la force $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$, et

$$V = \int_0^a \frac{\boldsymbol{F}}{q}\,dr = \int_0^a (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\,dr$$

Dans le cylindre $\boldsymbol{E} = 0$, $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = Bv$, et $v = \omega r$, et

$$V = \int_0^a \frac{\lambda\omega}{2\pi\epsilon_0 c^2}\,\omega r\,dr = \frac{\lambda\omega^2}{2\pi\epsilon_0 c^2}\left(\frac{a^2}{2}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

(b) Juste en dehors du cylindre, la grandeur du champ électrique est $E = \sigma/\epsilon_0$, donc $\lambda = 2\pi a\sigma = 2\pi a(\epsilon_0 E)$. En substituant $2\pi a(\epsilon_0 E)$ pour λ et ωa pour v dans le résultat obtenu pour la partie (a) ci-dessus, et en réarrangeant, on trouve que

$$a^3_{\text{min}} = \frac{2c^2 V}{E_{\text{max}}\omega^2},$$

où $\omega = 2\pi/(24\cdot 60\cdot 60\,\text{s})$ est la vitesse angulaire de la Terre. Avec $V = 10^{-6}\,\text{V}$ et $E_{\text{max}} = 10^8\ \text{V m}^{-1}$, cela donne $a \approx 7\times 10^3\,\text{m}$, donc l'expérience ne peut pas être faite.

Chapitre 50

50.1 (a) La composante normale de $\boldsymbol{B}$ doit être nulle.

(b) On doit satisfaire $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ et $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}/\epsilon_0 c^2$ dans la région en dehors du supraconducteur, plus la condition aux limites sur la composante normale $B_n = 0$ à la surface du supraconducteur. Pour trouver le champ hors du supraconducteur, on place un dipôle image dans le supraconducteur à une profondeur d sous la surface, orienté à un angle $(\pi - \theta)$ de la verticale. La condition aux limites $B_n = 0$ est alors automatiquement satisfaite. Le dipôle image n'a pas d'effet hors du supraconducteur où $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}_{\text{image}} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}_{\text{image}} = 0$. Par conséquent le champ hors du supraconducteur est celui du dipôle image plus du dipôle initial.

(c) En prenant l'axe y normal à μ, parallèle à la feuille supraconductrice et allant dans la page de la figure 50.1,

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{\mu^2 \sin 2\theta}{64\pi\epsilon_0 c^2 d^3}\,\boldsymbol{e}_y$$

(d) Équilibres stables : $\theta = \pi/2, 3\pi/2$. Équilibres instables : $\theta = 0, \pi$.

(e) $F = \dfrac{3\mu^2}{64\pi\epsilon_0 c^2 d^4}(3 + \cos 2\theta)$ *en s'éloignant* du supraconducteur.

Chapitre 51

51.1 Grandeur de l'accélération en P_2 : 0, en P_1 et P_3 : $4{,}4 \times 10^7\ \text{m s}^{-2}$, vers la droite en P_1 et vers la gauche en P_3 (par rapport à la figure).

51.2 (a) $V_0 = \pi^2 r^2 f B$, $\omega_V = 2\pi f$

(b) $I_0 = V_0/R_m$, $\omega_I = \omega_V$

51.3 $\mathcal{E} = \dfrac{\pi a^4 I \omega}{2\epsilon_0 c^2 R^3} \sin \omega t$

51.4 (a) $\boldsymbol{v}(t) = \dfrac{IBd}{m}\,t$ s'éloignant du générateur

(b) $v(t) = \dfrac{\mathcal{E}}{Bd}\left(1 - e^{-B^2 d^2 t/mR}\right)$, $v_{\text{terminale}} = \dfrac{\mathcal{E}}{Bd}$

(c) $I_{\text{terminale}} = 0$

51.5 (a) $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 2\mathcal{M}$

(b) $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + 2\mathcal{M}$

51.6 (a) L'énergie par unité de longueur du câble est $U = \mathcal{L}I^2/2$, où $\mathcal{L}$ est l'inductance par unité de longueur. Donc $\mathcal{L} = (2/I^2)U$. Le champ magnétique entre le fil et le cylindre conducteur est simplement le champ du fil, dont la grandeur est $B = I/(2\pi\epsilon_0 c^2 r)$–ailleurs le champ est nul. L'énergie totale du câble est $(\epsilon_0 c^2/2)\int B^2\,dV$ intégrées sur l'espace, donc l'énergie par unité de longueur

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

est $U = (\epsilon_0 c^2/2) \int B^2\, da$ prise sur un plan perpendiculaire au câble. Si le câble est de rayon r,

$$\mathcal{L} = \left(\frac{2}{I^2}\right)\frac{\epsilon_0 c^2}{2}\int_a^b \left(\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}\right)^2 2\pi r\, dr$$
$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2}\int_a^b \frac{1}{r}\, dr = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c^2}.$$

(b) $\mathcal{L} = \dfrac{\ln(b/a) + 1/4}{2\pi\epsilon_0 c^2}$.

51.7 (a) Le courant I passe dans les boucles du tore, considérons un chemin circulaire s, perpendiculaire à l'axe de symétrie du tore et à une distance $a < r < b$. Si B est la grandeur du champ magnétique le long de ce chemin, alors $\int B\, ds = 2\pi r B = NI/\epsilon_0 c^2$. Ainsi, $B = NI/2\pi\epsilon_0 c^2 r$. L'énergie magnétique totale U dans le tore est l'intégrale $(\epsilon_0 c^2/2)\int B^2\, dV$ prise sur son volume. Avec $dV = a(2\pi r)dr$,

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} 2\pi a \int_b^{b+a} \left(\frac{NI}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}\right)^2 r\, dr$$
$$= \frac{N^2 I^2 a}{4\pi\epsilon_0 c^2}\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

D'un autre côté, l'énergie dans une bobine de self-inductance $\mathcal{L}$ parcourue par un courant I est $U = \mathcal{L}I^2/2$. En égalant ces deux expressions pour U et en résolvant pour $\mathcal{L}$ on obtient le résultat.

(b) $\mathcal{M} = \dfrac{Na}{2\pi\epsilon_0 c^2}\ln\left(1 + \dfrac{a}{b}\right)$

(c) $\mathcal{L}/\mathcal{M} = N$

51.8 (a) $\mathcal{M} = \dfrac{A^2}{8\pi\epsilon_0 c^2 r^3}\left[3\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\right]$

(b) $\boldsymbol{F} = -(3\mathcal{M}/r)I^2\boldsymbol{e}_r$

(c) La direction de $\boldsymbol{F}$ est renversée si (seul) un des courants est inversé.

51.9 $\mathcal{M}_{12} = \mathcal{M}_{21} = \dfrac{N\pi r_1^2}{\epsilon_0 c^2 l\sqrt{1 + 4r_2^2/l^2}}$

51.10 (a) $I = 1{,}0\,\text{mA}$

(b) Le flux au travers de la boucle décroît, donc, par loi de Lenz la FEM induite tend à augmenter la grandeur de $\boldsymbol{B}$, ce qui résulte en un taux plus élevé de changement du flux, qui demande plus de courant induit. Donc, l'estimation du courant induit augmenterait si le champ provenant du courant induit n'était pas négligé.

(c) Si l'aimant se déplaçait avec le fil. Ce serait, par symétrie, la même chose que si le fil et le courant étaient tous deux fixes et que les rails bougeaient. On aurait la même chose pour le courant induit.

(d) La self-inductance du circuit est Φ/I où Φ est le flux magnétique au travers de l'aire couverte par le circuit ; il décroît car le courant est constant, le champ magnétique est constant, alors que l'aire couverte par la boucle décroît.

51.11 (a) $\tau = 0$

(c) $\boldsymbol{F}$ est le long de l'axe de la boucle ; la boucle (2) est repoussée par la boucle (1).

(d) La self-inductance réduit le courant induit dans la boucle (2), donc la force sur (2) est réduite, le couple restant nul.

(e) Il n'y aurait pas de flux de la boucle (1) au travers de la boucle (2), donc pas de courant induit dans (2), donc pas de force et de couple sur (2).

CHAPITRE 52

52.1 (a) Soit $\boldsymbol{E}_0 = E_x\boldsymbol{e}_x + E_y\boldsymbol{e}_y + E_z\boldsymbol{e}_z$ et considérons la composante x de $(\nabla^2 - \partial^2/\partial(ct)^2)\boldsymbol{E}$,

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_x e^{i(\omega t-kx)} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_x e^{i(\omega t-kx)} \\ &= \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)E_x e^{i(\omega t-kx)}.\end{aligned}$$

C'est une solution de l'équation d'onde si $k^2 = \omega^2/c^2$, c'est-à-dire, si $k = \pm\omega/c$. Les composantes y et z sont identiques.

(b) L'onde va vers $+x$ si $k > 0$, vers $-x$ si $k < 0$.

(c) Par définition, $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_x\partial/\partial x + \boldsymbol{e}_y\partial/\partial y + \boldsymbol{e}_z\partial/\partial z$. S'il n'y a pas de dépendance en y ou z des champs, alors $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_x\partial/\partial x$. Si les composantes des champs sont de la forme Ae^{-ikx}, alors $\boldsymbol{\nabla}Ae^{-ikx} = \boldsymbol{e}_x\partial(Ae^{-ikx})/\partial x = -ikAe^{-ikx}\boldsymbol{e}_x$, so $\boldsymbol{\nabla} = -ik\boldsymbol{e}_x$.

(d) $\partial/\partial t = i\omega$

(e)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0 &\rightarrow -ikE_x = \rho/\epsilon_0 \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 &\rightarrow B_x = 0 \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} &\rightarrow k\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{E} = \omega\boldsymbol{B} \\ c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}/\epsilon_0 + \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} &\rightarrow -ikc^2\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}/\epsilon_0 + i\omega\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

La relation entre k et ω dépend de ce que sont $\boldsymbol{j}$ et ρ. Dans l'espace libre où $\boldsymbol{j} = \rho = 0$, $k = \pm\omega/c$.

(f) Dans toutes les solutions ci-dessus, $k \rightarrow -k$.

52.2 (a) $\omega' = \omega(1 - v/c)/(1 + v/c)$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

CHAPITRE 53

53.3 En utilisant les notations et les variables données dans l'exercice 53.2, et en remplaçant p par μ où $\mu = \pi a^2 i_0$ est le moment magnétique du dipôle,

$$\begin{aligned} B_\varphi &= 0, \\ B_\theta &= \frac{1}{c^2}\,(E_\theta \text{ dipôle électrique}), \\ B_r &= \frac{1}{c^2}(E_r \text{ dipôle électrique}), \\ E_\varphi &= -(B_\varphi \text{ dipôle électrique}), \\ E_\theta &= E_r = 0. \end{aligned}$$

53.4 (c) Les champs produits par le dipôle sont

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\frac{Q_0 d\omega^2 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}\cos\omega(t - r/c)\boldsymbol{e}_\theta + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \\ \boldsymbol{B} &= \frac{1}{c}\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{E} \\ &= -\frac{Q_0 d\omega^2 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^3 r}\cos\omega(t - r/c)\boldsymbol{e}_\phi + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \end{aligned}$$

Ces résultats sont en accord avec ceux de l'ex. 53.2, avec $p = Q_0 d$.

53.5 (a) En considérant un court segment de fil de longueur Δz comme un dipôle vu dans l'ex. 53.4, la charge sur chaque extrémité du dipôle est $q = \int i\,dt$ et le moment du dipôle est

$$\begin{aligned} \Delta p &= \left(\int -i_0 \sin\omega t \cos\frac{2\pi z}{\lambda}\,dt\right)\Delta z \\ &= \left(\frac{i_0}{\omega}\cos\frac{2\pi z}{\lambda}\cos\omega t\right)\Delta z. \end{aligned}$$

(c) Le moment dipolaire total de l'antenne est $p = \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \Delta p/\Delta z\,dz = (2i_0 c/\omega^2)\cos\omega t$. Un seul dipôle avec ce moment donne le même effet.

$$\boldsymbol{E}' = -\frac{i_0}{2\pi\epsilon_0 c r}\sin\theta\cos\omega(t - r/c)\boldsymbol{e}_\theta + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Nous comparons $f(\theta) = \cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)/\sin\theta$ avec $g(\theta) = \sin\theta$:

	θ	0°	30°	60°	90°
antenne demi-onde	$f(\theta)$	0	0,418	0,816	1
simple dipôle	$g(\theta)$	0	0,500	0,867	1

Note : $\lim_{\theta\to 0} f(\theta)/g(\theta) = \pi/4$.

53.6 (a) $\phi = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$

(b) $\boldsymbol{A} = \dfrac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 a}\left(\sin\dfrac{v}{c}\,\boldsymbol{e}_x + \cos\dfrac{v}{c}\,\boldsymbol{e}_y\right)$

(c) $\boldsymbol{E} = -\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(\left[\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)\cos\dfrac{v}{c} + \dfrac{v}{c}\sin\dfrac{v}{c}\right]\boldsymbol{e}_x + \left[\dfrac{v}{c}\cos\dfrac{v}{c} - \left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)\sin\dfrac{v}{c}\right]\boldsymbol{e}_y\right)$

$\boldsymbol{B} = \dfrac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 a^2}\boldsymbol{e}_z$

CHAPITRE 54

54.1 Entre des terminaux adjacents $R = (7/12)\,\Omega$. Entre des terminaux diagonaux sur un carré $R = (3/4)\,\Omega$. Entre des terminaux diagonaux sur un cube $R = (5/6)\,\Omega$.

54.2 (a) $I = \dfrac{1-\omega^2\mathcal{L}C}{\omega\mathcal{L}[2-\omega^2\mathcal{L}C]}\,V_0\sin\omega t$

(b) $I = \dfrac{1-\omega^2\mathcal{L}C}{\omega(\mathcal{L}\pm\mathcal{M})[2-\omega^2(\mathcal{L}\mp\mathcal{M})C]}\,V_0\sin\omega t$

54.5 (a) Utiliser $|I| = E_0\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \dfrac{(\omega^2 LC-1)^2}{\omega^2 L^2}}$.

(b) Dans les deux cas,

54.6 $\mathcal{L} = R^2 C$

54.8 (a) $\hat{I} = \hat{V}/[Z_{\mathrm{RC}} + Z_{\mathrm{RL}}]$

$= \hat{V}/\left[\dfrac{1}{1/R + i\omega C} + \dfrac{1}{1/R + 1/(i\omega L)}\right]$

$= \dfrac{\hat{V}}{R}\left[\dfrac{1 + R(i\omega C + 1/(i\omega L)) + R^2 C/L}{2 + R(i\omega C + 1/(i\omega L))}\right]$

Manifestement, si $R^2C/L = 1$, alors $\hat{I} = \hat{V}/R$ indépendamment de ω.

(b) $\phi = -\arctan(\omega RC)$

54.9 (a) $\langle P\rangle = \dfrac{(V_0^2 R)/2}{R^2 + (\omega L - m/\omega C)^2}$

(b) 1. $m = 2$

2. $(V_{P_0P_2})_{\max} = 2V_0/(\omega RC)$, et $(V_R)_{\max} = V_0$

54.10 (a) $\dfrac{V_L}{V_0} = \dfrac{1}{(1-\alpha)(R_I/R_L) + 1}$

(b) Avec $\beta \approx 1/(1-\alpha)$, cela devient

$$\frac{V_L}{V_0} = \frac{1}{(R_I/R_L)/\beta + 1}.$$

Ainsi, si $R_I/R_L \ll \beta$, alors $V_L/V_0 \approx 1$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(c) $\dfrac{(V_L/V_0)}{(V'_L/V'_0)} \approx 10$

(d) Utiliser

$$\frac{V_L}{V_0} = \frac{1}{1 + j\omega R_I C_L/\beta}$$

et

$$\frac{V'_L}{V'_0} = \frac{1}{1 + j\omega R_I C_L}.$$

54.11 (a) $\dfrac{V_L}{V_0} = -\beta \dfrac{R_L}{R_I}$

(b) Substituant $i_0 = (i_E R_E - V_0)/R_I$ dans $i_0 + i_E(1 - \alpha) = 0$, et en réarrangeant,

$$i_E \left(\frac{R_E}{R_I} + (1 - \alpha) \right) = \frac{V_0}{R_I}.$$

Puisque $V_L = -\alpha i_E R_L$ et $\alpha \approx 1$,

$$\begin{aligned} \frac{V_L}{V_0} &= -\alpha \frac{R_L}{R_E} \frac{1}{1 + (1 - \alpha)(R_I/R_E)} \\ &\approx -\alpha \frac{R_L}{R_E} \frac{1}{1 + (R_I/R_E)/\beta}, \end{aligned}$$

Ainsi, si $R_I/R_E \ll \beta$, $V_L/V_0 \approx -\alpha(R_L/R_E)$.

54.12 (a) $I_L/I_0 = \alpha \approx 1$

(b) $Z_{\text{sortie}} = \infty$

(c) Le circuit équivalent est une source de courant, $I = \alpha V_0/R_I$.

54.13 (a) $Z_{AB} = \dfrac{n^2 R_E}{\alpha} \dfrac{1}{n + 1/\beta}$

(b) Pour que Z_{AB} soit négatif, on doit avoir $n < 0$ et $|n| > 1/\beta$. Le sens d'un n négatif est que la polarité du transformateur (un des enroulements) doit être inversée.

CHAPITRE 55

55.1 (a) $\omega = \dfrac{c}{a} \sqrt{\dfrac{2d}{(b - a) \ln (b/a)}}$

(c) Si la température décroît, la contraction thermique mène à un accroissement de la fréquence.

CHAPITRE 56

56.2 Pour une longueur Δx, la capacité est $C_0 \Delta x \approx \epsilon_0 (b \Delta x)/a$, et $C_0 \approx \epsilon_0 b/a$. Nous savons que $c = 1/\sqrt{L_0 C_0}$, donc $z_0 = \sqrt{L_0/C_0} = \sqrt{L_0 C_0/C_0^2} = 1/(c\, C_0) \approx a/\epsilon_0 cb$.

56.3 (a) $\omega_1 = \pi c/l$

(b) En prenant l'axe z suivant la ligne coaxiale, et en laissant $E_0 = |\boldsymbol{E}|$ à l'instant $t = 0$ au milieu de la ligne ($z = l/2$), à la surface du conducteur central (distance radiale $r = a$),

$$\boldsymbol{E} = E_0 \frac{a}{r} \sin(k_n z) e^{i\omega_n t} \boldsymbol{e}_r,$$

avec $k_n = n\pi/l$ et $\omega_n = n\pi c/l$.

(c) $\omega_1/\omega_0 \approx \pi$

56.4 (a) $E_0(x,z) = E_0 \sin \dfrac{\pi x}{a} \sin \dfrac{\pi z}{l}$

(b) $\omega_0 = \pi c \sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{l^2}}$

56.5 (a) Utiliser $V(x,t) = V_0 \cos(\omega t) \cos(kx)$ avec $k = 5\pi/2l$.

(b) La valeur du voltage est maximum en $x = 0$, $2l/5$, et $4l/5$ (chaque fois que $\cos(\omega t) > 0$).

(c) $V_f(x,t) = \dfrac{1}{2} V_0 \cos(\omega t - kx)$

$V_r(x,t) = \dfrac{1}{2} V_0 \cos(\omega t + kx)$

(d) $I(0,t) = 0$

$I(l/2,t) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{V_0}{z_0} \sin(\omega t)$

$I(l,t) = \dfrac{V_0}{z_0} \sin(\omega t)$

avec $z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$

(e) $\langle \tau \rangle = 0$

56.6 (b) $Z_S = iZ_0 \tan(\omega l \sqrt{LC})$

(c) $Z_S = -iZ_0 \cot(\omega l \sqrt{LC})$

(d) $Z_S = Z_0$

56.7 Considérons une forme d'onde incidente arbitraire V_{inc} dans la ligne 1, sa réflexion sur la jonction avec la ligne 2, V_{ref} (aussi dans la ligne 1), et la forme d'onde transmise dans la ligne 2, V_{trans}. À la jonction des lignes, les voltages et les courants doivent se correspondre. Donc, à cette jonction

$$V_{\text{inc}} + V_{\text{ref}} = V_{\text{trans}}$$
$$I_{\text{inc}} - I_{\text{ref}} = I_{\text{trans}}.$$

(Les courants incident et réfléchi sont ajoutés avec des signes opposés car les ondes correspondantes vont dans des directions opposées.) En divisant ces équations par V_{inc} tout en substituant $I_{\text{inc}} = V_{\text{inc}}/Z_1$, $I_{\text{ref}} = V_{\text{ref}}/Z_1$ et $I_{\text{trans}} = V_{\text{trans}}/Z_2$,

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

nous donne un couple d'équations linéaires,

$$1 + (V_{\text{ref}}/V_{\text{inc}}) = (V_{\text{trans}}/V_{\text{inc}}),$$
$$1 - (V_{\text{ref}}/V_{\text{inc}}) = \frac{Z_1}{Z_2}(V_{\text{trans}}/V_{\text{inc}}).$$

dont la solution nous donne le résultat recherché.

56.8 $v_g/c \approx 0{,}845$

56.9 (a) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times A = (\partial A_z/\partial y)\boldsymbol{e}_x - (\partial A_z/\partial x)\boldsymbol{e}_y$, puisque $\boldsymbol{A} = A_z\boldsymbol{e}_z$. Donc, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{e}_z = 0$.

(c) Le mode mn ne se propagera pas si k_z est imaginaire, car $e^{-ik_z z}$ est alors soit $e^{+|k_z|z}$, qui croît sans limite et est non physique, ou $e^{-|k_z|z}$ qui diminue exponentiellement. Pour que k_z soit imaginaire pur, on doit avoir $(\omega/c)^2 - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2 < 0$ qui est vrai chaque fois que $\omega < c\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$.

CHAPITRE 57

57.1 (a) $A_\mu A_\mu$

(b) $-A_\mu j_\mu$

57.2 $E^{\gamma_2} = \dfrac{E^{\gamma_1}}{1 + (E^{\gamma_1}/m_e)(1 - \cos\theta)}$

57.3 $E^\gamma = 4m_e$

57.4 Si la réaction $\gamma \to e^+ + e^-$ était possible, alors $p_\mu^\gamma = p_\mu^+ + p_\mu^-$. En prenant le carré des deux membres et en simplifiant, utilisant $(p_\mu^\gamma)^2 = 0$ et $(p_\mu^\pm)^2 = m_e^2$, donne $0 = m_e^2 + p_\mu^+ p_\mu^-$, qui doit être vrai dans tout système de référence. Considérons le système où le e^- est au repos, c'est-à-dire, $p_\mu^- = (m_e, \boldsymbol{0})$; alors $0 = m_e^2 + m_e E^+$ ou $E^+ = -m_e$, ce qui est non physique.

57.5 (a) En relativité l'énergie totale de la particule b est $E_b = \sqrt{m_b^2 + p_b^2}$, et

$$m_c = \sqrt{m_a^2 + 2m_a E_b + m_b^2}$$
$$v_c = \frac{p_b}{m_a + E_b}$$

(b) En physique non relativiste,

$$m_c = m_a + m_b$$
$$v_c = \frac{p_b}{m_a + m_b}$$

CHAPITRE 58

58.1 En se plaçant dans la jauge de Lorentz $\nabla_\mu A_\mu = 0$, et en utilisant l'équation (25.22) du volume II,

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\mu \nabla_\nu A_\mu = \Box^2 A_\nu - \nabla_\nu (\nabla_\mu A_\mu) = \frac{j_\nu}{\epsilon_0}.$$

58.2 (a) $f_\mu = j_\nu F_{\mu\nu} = (\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}, \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})$.

(b) La composante temporelle de f_μ est la puissance par unité de volume exercée par les champs sur les charges, et la composante spatiale donne la force par unité de volume.

58.3 (a) Si $F_{\mu\nu}$ est le tenseur électromagnétique correspondant à $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$. Alors $\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2 = (1/2)F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ et $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = F_{xt}F_{zy} + F_{yt}F_{xz} + F_{zt}F_{yx} = (1/8)\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$ (où $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le symbole de Levi-Civita) ; les deux sont des produits scalaires de quadri-tenseurs, donc des invariants de Lorentz.

(b) Ces quantités sont toutes deux nulles pour un rayonnement électromagnétique se propageant dans le vide.

58.4 $$\frac{\boldsymbol{v}}{1+v^2} = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2}$$

58.7 Prenant z dans le fil parallèle à $\boldsymbol{v}$, et le point du champ dans le plan xy.

(a) Dans un référentiel stationnaire par rapport au fil,

$$\boldsymbol{E} = 0,$$
$$\boldsymbol{B} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}\boldsymbol{e}_\phi,$$

où $\boldsymbol{r}$ est le rayon vecteur au point du champ et $\boldsymbol{e}_\phi$ est perpendiculaire au rayon vecteur et au fil ($\boldsymbol{e}_\phi = -\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\,\boldsymbol{e}_y$).

(b) Dans un référentiel au repos par rapport aux électrons,

$$E'_z = B'_z = 0,$$
$$\boldsymbol{E}' = \frac{\gamma v I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}\boldsymbol{e}_r,$$
$$\boldsymbol{B}' = \frac{\gamma I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}\boldsymbol{e}_\phi,$$

avec $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$.

58.8 (a) $\sigma = (q_e/2\pi a^2)\sqrt{1-v^2}$

(b) $\sigma_h/\sigma_l \approx 1/1000$

58.9 $u_\mu = \gamma(1,\boldsymbol{v})$ et $f_\mu = \gamma(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}, \boldsymbol{F})$. D'où

$$f_\mu u_\mu = f_t u_t - \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u} = \gamma^2(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} - \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}) = 0$$

58.10 (a) $$\boldsymbol{E} = \frac{q}{2\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^2}\boldsymbol{e}_y$$

(b) La réponse serait la même.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

CHAPITRE 59

59.2 $U = 960$ megatonnes

59.3 Le long du fil il y a une chute de tension de IR par unité de longueur, ce qui implique qu'il y a un champ $\boldsymbol{E}$ à la surface du fil de force IR (dans la direction du courant). À la surface du fil, le champ $\boldsymbol{B}$ a une grandeur $I/2\pi a\epsilon_0 c^2$, où a est le rayon du fil. Puisque $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ sont perpendiculaires, $\boldsymbol{S} = \epsilon_0 c^2 \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = -(I^2R/2\pi a)\boldsymbol{e}_r$. Le flux de $\boldsymbol{S}$ dans la surface du fil par unité de longueur est égal à $2\pi a|\boldsymbol{S}| = I^2R$, le même que le chauffage par unité de longueur.

59.4 En coordonnées cylindriques (z,ϕ,r) avec z le long de l'axe du câble, $\boldsymbol{B} = I\boldsymbol{e}_\phi/2\pi\epsilon_0 c^2 r$ et $\boldsymbol{E} = V\boldsymbol{e}_r/\ln(b/a)r$. Donc, $\boldsymbol{S} = IV\boldsymbol{e}_z/2\pi\ln(b/a)r^2$. Le taux total d'écoulement d'énergie est $dU/dt = \int_a^b |\boldsymbol{S}|2\pi r\,dr = (IV/\ln(b/a))\int_a^b 1/r\,dr = IV$.

59.5 (a) $|\langle\boldsymbol{S}\rangle| = 2{,}6\times10^{-5}\ \mathrm{W\,m^{-2}}$

(b) $|\boldsymbol{E}_{\max}| = 0{,}14\ \mathrm{V\,m^{-1}}$, $|\boldsymbol{B}_{\max}| = 5\times10^{-10}\ \mathrm{Wb\,m^{-2}}$

59.6 (a) Les conditions aux limites sont que les composantes normale de $\boldsymbol{B}$ et tangentielle de $\boldsymbol{E}$ sont nulles le long de la surface conductrice. Puisque $\sin(\pi x/a) = 0$ pour $x = 0$ et $x = a$, ces conditions sont satisfaites.

(b) $$\boldsymbol{S} = \epsilon_0 c^2 E_0^2\Big(\frac{k_z}{\omega}\sin^2\frac{\pi x}{a}\cos^2(\omega t - k_z z)\boldsymbol{e}_z - \frac{\pi}{4\omega a}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin 2(\omega t - k_z z)\boldsymbol{e}_x\Big)$$

$$u = \epsilon_0 E_0^2\Big(\sin^2\frac{\pi x}{a}\cos^2(\omega t - k_z z) + \frac{\pi^2 c^2}{4\omega^2 a^2}\left(\cos\frac{2\pi x}{a} - \cos 2(\omega t - k_z z)\right)\Big)$$

(c) $$\langle dU/dt\rangle = \epsilon_0 c^2 E_0^2\,\frac{k_z}{\omega}\,\frac{ab}{4}$$

(d) $$\langle u\rangle_{\text{moyenne en temps}} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}\left(\sin^2\frac{\pi x}{a} + \frac{\pi^2 c^2}{2\omega^2 a^2}\cos\frac{2\pi x}{a}\right)$$

(e) $$v_g = \frac{\text{taux d'écoulement moyen}}{\text{moyenne accumulée par unité de longueur}} = \frac{\langle dU/dt\rangle}{\int_0^b\int_0^a \langle u\rangle_{\text{moyenne en temps}}\,dx\,dy} = \frac{c^2 k_z}{\omega}$$

But, $k_z = \sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2/a^2}$, so $v_g = c\sqrt{1 - \pi^2c^2/a^2\omega^2} = c\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}$, avec $\omega_c = \pi c/a$.

59.7 Avec $\boldsymbol{p}$ à l'origine, orienté le long de l'axe z, et en utilisant des coordonnées sphériques pour le champ (r,θ,ϕ),

$$\boldsymbol{S} = \frac{p^2\omega^4}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta\cos^2\omega(t - r/c)\,\boldsymbol{e}_r.$$

(a) $\dfrac{\text{taux d'écoulement}}{\text{unité d'aire}} = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_r = \dfrac{p^2\omega^4}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta\cos^2\omega(t-r/c)$

(b) $\langle P\rangle = 2\pi r^2\displaystyle\int_0^\pi \langle \boldsymbol{S}\rangle\cdot\boldsymbol{e}_r\sin\theta\,d\theta$

$= 2\pi r^2\displaystyle\int_0^\pi\left[\frac{p^2\omega^4}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta\,\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_r\right]\cdot\boldsymbol{e}_r\sin\theta\,d\theta$

$= \dfrac{p^2\omega^4}{16\pi\epsilon_0 c^3}\displaystyle\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta$

$= \dfrac{p^2\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$

59.8 $\dfrac{\langle P_{\text{rad}}\rangle}{\langle P_{\text{incident}}\rangle} = \dfrac{8\pi}{3}\left(\dfrac{e^2}{m_e c^2}\right)^2$, avec $e^2 = q_e^2/4\pi\epsilon_0$

59.9 (a) $a \approx 6000$ Å

59.10 (a) $U_B(t) = (N^2K^2r^2/4\epsilon_0 c^2 R)t^2$

(b) $\boldsymbol{S}(t) = -(N^2K^2r/8\pi^2\epsilon_0 c^2R^2)t\,\boldsymbol{e}_r$

(c) L'aire de la surface d'un tore est $= (2\pi R)(2\pi r)$, si bien que $dU/dt = \int \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}\,da = 4\pi^2 Rr\boldsymbol{S}(t) = (N^2K^2r^2/2\epsilon_0 c^2R)\,t$. $dU/dt = d(U_B + U_E)/dt = dU_B/dt$, qui est cohérent car E à l'intérieur du tore n'évolue pas et l'énergie emmagasinée dans le champ électrique est constante.

Chapitre 60

60.1 En utilisant l'équation (8.7) du volume II pour une sphère solide de charge, $mc^2 = U_{\text{élec}} = \frac{3}{5}Q^2/(4\pi\epsilon_0 a) = \frac{3}{5}e^2/a$, ce qui donne $a = \frac{3}{5}e^2/(mc^2) \approx 1.7\times10^{-15}$ m. D'un autre côté, en utilisant l'équation (28.2) du volume II pour une coquille sphérique de charge, $U_{\text{élec}} = \frac{1}{2}e^2/a$, donne $a = \frac{1}{2}e^2/(mc^2) \approx 1{,}4\times10^{-15}$ m.

60.2 (b) $\dfrac{L}{\mu} = \dfrac{2}{3}\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\dfrac{1}{a} = \dfrac{m_e}{q_e}$, avec m_e comme donné.

(c) $v_{\max} = \frac{3}{2}\hbar/(ma)$. Cependant, si nous posons $a = \frac{1}{2}e^2/(mc^2)$, comme dans l'Ex. 60.1, alors $v_{\max} = 3\hbar c^2/e^2 \approx 3(137)c$, à peu près 400 fois la vitesse de la lumière !

Chapitre 61

61.1 En utilisant $\alpha = (qE/mc)$, $\beta = (\alpha/\gamma)$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$,

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(a) $v_x = \dfrac{\alpha c t}{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}$,

$v_y = v_z = 0$

$x = \dfrac{c}{\alpha}\left(\sqrt{1+\alpha^2 t^2} - 1\right)$,

$y = z = 0$

(b) $v_x = \dfrac{\beta c t}{\sqrt{1+\beta^2 t^2}}$,

$v_y = \dfrac{v_0}{\sqrt{1+\beta^2 t^2}}$,

$v_z = 0$

$x = \dfrac{c}{\beta}\left(\sqrt{1+\beta^2 t^2} - 1\right)$,

$y = \dfrac{v_0}{\beta}\ln\left(\beta t + \sqrt{1+\beta^2 t^2}\right)$,

$z = 0$

61.2 (a) À basse énergie, $\omega \approx q_p B/m_p$.

(b) La fréquence décroît lorsque l'énergie croît.

(c) $T = m_p c^2/100 \approx 9{,}4\,\text{MeV}$

61.3 (a) $x = \dfrac{E}{B}t - \dfrac{E}{B\omega_c}\sin\omega_c t$,

$y = \dfrac{E}{B\omega_c}(1 - \cos\omega_c t)$,

$z = 0$,

avec $\omega_c = qB/m$, la fréquence cyclotron. Cette solution n'est valable que si $E/B \ll c$.

(b) Pour le cas $E/B < c$, le mouvement est une cycloïde, comme dans la partie (a) ci-dessus, seulement elle est étirée dans la direction x par le facteur $\gamma = 1/\sqrt{1-(E/Bc)^2}$. Pour $E/B > c$, la solution est donnée en partie (b) de l'Ex. 61.1 si nous faisons la transformation au système S' de vitesse $V = Bc^2/E$ dans la direction $+x$, tel que $\boldsymbol{B}' = 0$, et que nous identifions les axes $+x$ et $+y$ avec, respectivement, axes $-y$ et $+x$ de l'Ex. 61.1, en choisissant $v_0 = -Bc^2/E$ comme vitesse initiale de la particule.

(c) En relativité,

$$B = \frac{\sqrt{2mV_0/q + (V_0/c)^2}}{d}$$

en non relativiste (aissant $c \to \infty$),

$$B = \frac{\sqrt{2mV_0/q}}{d}$$

61.4 (a) $l = f(f-d)/d$

(b) Image réelle pour $l > 0$ (or $f > d$), image virtuelle pour $l < 0$ (ou $f < d$).

CHAPITRE 62

62.1 Par définition, $\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \kappa\epsilon_0\boldsymbol{E}$. Ainsi $\kappa = (E + P/\epsilon_0)/E$. Pour une onde transverse de fréquence angulaire ω et de nombre d'onde k se propageant dans la direction z, l'équation (32.23) du volume II donne $-k^2E + (\omega^2/c^2)E = -(\omega^2/\epsilon_0 c^2)P$, qui peut être réarrangé en $n^2 = (E + P/\epsilon_0)/E$, avec l'indice de réfraction écrit comme $n = kc/\omega$. Ainsi $n^2 = \kappa$. [Les approximations utilisées ici sont exactement celles utilisées pour obtenir l'équation (32.23)].

62.2 $\rho \approx 4{,}5 \times 10^{11}\ \mathrm{m}^{-3}$

62.3 Avec $E = 0$, $\gamma = 1/\tau$ et $\omega_0 = 0$ (modèle de l'électron libre), l'équation (32.1) du volume II devient $0 = m(\dot{v} + v/\tau)$, avec comme solution $v = v_0 e^{-t/\tau}$; le temps de relaxation est τ. Toutefois, avec $E \neq 0$, (mais en négligeant B), la force sur les électrons est $q_e E = m(\dot{v} + v/\tau)$ ou, en prenant la dérivée, $\ddot{v} + \dot{v}/\tau = (q_e/m_e)\dot{E}$. Puisque nous prenons $B = 0$, $c^2(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{j}/\epsilon_0 + \dot{\boldsymbol{E}} = 0$. Donc, $\dot{E} = -j/\epsilon_0 = -Nq_e v/\epsilon_0$. D'où, $\ddot{v} + \dot{v}/\tau = (q_e/m_e)(-Nq_e v/\epsilon_0) = -\omega_p^2 v$, où ω_p est la fréquence de plasma. Ainsi, $\ddot{v} + \dot{v}/\tau + \omega_p^2 v = 0$. En posant $v = v_0 e^{i\omega t}$, on trouve $-\omega^2 + i\omega/\tau + \omega_p^2 = 0$, avec comme solutions $\omega = i/2\tau \pm \sqrt{\omega_p^2 - (1/2\tau)^2}$. Le temps de relaxation est l'inverse de la partie imaginaire de ω, qui vaut 2τ (puisque $\omega_p > 1/\tau$).

62.4 (a) $\boldsymbol{B} = (kE_x/\omega)\boldsymbol{e}_y$

(b) $\theta = 90°$

(c) $|\boldsymbol{B}|_{\max}/|\boldsymbol{E}|_{\max} = \sqrt{\sigma/\omega\epsilon_0 c^2}$

(d) $\phi = 45°$

62.5 De l'équation (32.42) du volume II,

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + \frac{\sigma/\epsilon_0}{i\omega(1 + i\omega\tau)} = 1 - \frac{\sigma/\epsilon_0}{\omega^2\tau(1 - i/\omega\tau)} \\ &\approx 1 - \frac{\sigma/\epsilon_0}{\omega^2\tau}(1 + i/\omega\tau) \\ &= 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - i\left(\frac{\omega_p^2}{\omega^3\tau}\right), \end{aligned}$$

où ω_p est la fréquence du plasma. Ainsi, n passe de réel à imaginaire lorsque ω change de plus que $1/\tau$ autour de ω_p. (Pour être plus précis, la phase de n est $3\pi/8$ lorsque $\omega = \omega_p - 1/2\tau$, et $\pi/8$ lorsque $\omega = \omega_p + 1/2\tau$.)

CHAPITRE 63

63.1 (a) $\dfrac{I_t}{I_i} = \dfrac{1 + (r_{12}r_{23})^2 - r_{12}^2 - r_{23}^2}{1 + (r_{12}r_{23})^2 + 2r_{12}r_{23}\cos(4\pi l/\lambda_2)}$, où $r_{ij} = (n_i - n_j)/(n_i + n_j)$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(b) Pour $I_t/I_i = 1$ on doit avoir $-r_{12}^2 - r_{23}^2 = 2r_{12}r_{23}\cos(4\pi l/\lambda_2)$, ou $|r_{12} + r_{23}e^{i4\pi l/\lambda_2}| = 0$, qui demande que $r_{12} = r_{23}$, et $4\pi l/\lambda_2 = n\pi$ avec n n'importe quel entier impair. $r_{12} = r_{23}$ est la même chose que $(n_1 - n_2)/(n_1 + n_2) = (n_2 - n_3)/(n_2 + n_3)$, qui est satisfait lorsque $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$. Alors que $4\pi l/\lambda_2 = n\pi$ est satisfait lorsque $n = 1$ et $l = \lambda_2/4$.

(c) $l \approx 1100$ Å

(d) Cela ne fait pas une grosse différence pour une lentille assez plate, où on est pratiquement en incidence normale, puisque l'équation pour (I_t/I_i) en partie (a) co-dessus est symétrique en (indices) 1 et 3.

63.2 (a) $d \approx 1350$ Å

(b) Non. (La réponse ne dépend pas de la polarisation de $\boldsymbol{E}$.)

Chapitre 64

64.1 (b) Il faut supposer que la particule est pratiquement sur une orbite circulaire, ce qui demande que $|dB/dt| \ll qB^2/2\pi m$.

Chapitre 65

65.1 $g = 5{,}5$

65.3 $(N_{\text{haut}} - N_{\text{bas}})/N \approx 0.22\,\%$ à température ambiante, 16 % à la température de l'hélium liquide.

Chapitre 66

66.1 Avec le centre de la sphère comme origine et en coordonnées sphériques, (a) $\boldsymbol{K} = M \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\phi$

(b) $$\mu = \int_0^\pi K\pi(a\sin\theta)^2 a\, d\theta = \int_0^\pi M\pi a^3 \sin^3\theta\, d\theta$$
$$= \frac{4}{3}\pi a^3 M.$$

66.2 (a) $B_{\text{gap}} \approx 1{,}2\ \text{Wb m}^{-2}$

(b) Cette estimation suppose que le flux de $\boldsymbol{B}$ est constant au travers de toute section transverse du dispositif, et il ignore les effets de bord dans le gap entre les pièces polaire.

66.3 $B_{\text{gap}} \approx 0{,}80\ \text{Wb m}^{-2}$

66.4 (a) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{M}/\epsilon_0 c^2$, $\boldsymbol{H} = 0$

(b) $\boldsymbol{B}_{\text{cav}} = \boldsymbol{H}_{\text{cav}} = 0$

CHAPITRE 67

67.1 (a) $r_{\text{Al}}/r_{\text{acier}} = 1{,}30$

(b) $m_{\text{Al}}/m_{\text{acier}} = 0{,}59$

67.2 $\omega = (1{,}32 \times 10^5) \cdot a^2/\sqrt{mL^3}$

67.3 (a) L'équation (38.20) du volume II donne la pression p que l'on doit appliquer sur les extrémités d'une barre de longueur L pour changer sa longueur de ΔL tout en maintenant constantes sa largeur et sa hauteur, $p = [(1-\sigma)Y/(1+\sigma)(1-2\sigma)]\Delta L/L$. Lorsque des ondes de compression sont transmises dans une substance, disons dans la direction z, le matériau en n'importe quel point ne ressent que la contrainte de compression locale $\partial L/\partial z$. La pression en z est donc

$$p(z) = \frac{(1-\sigma)Y}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial L}{\partial z}.$$

La force totale agissant sur un élément de volume $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ est $F(z+\Delta z) - F(z) = \Delta x\,\Delta y(\partial p/\partial z)\Delta z$, qui doit être égale à la masse de l'élément multipliée par son accélération, $(\rho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z)(\partial^2 L/\partial t^2)$, où ρ est la densité de matériau. Ainsi, $\partial p/\partial z = \rho\partial^2 L/\partial t^2$. En substituant $p(z)$, donné plus haut, on obtient l'équation d'onde avec une vitesse de l'onde $V_{\text{long}} = \sqrt{(1-\sigma)Y/(1-2\sigma)(1+\sigma)\rho}$,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} - \frac{1}{V_{\text{long}}^2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = 0.$$

(b) Parce que $p(z)$ dépend de ce que la largeur et de la hauteur du bloc ne changent pas, ces dimensions doivent être grandes par rapport à la longueur d'onde des ondes longitudinales.

67.4 (a) La règle est courbée en une demi-onde sinusoïdale de longueur d'onde $\approx 23''$.

(b) $F \approx 1{,}3\,\text{kg}$

67.5 $P = \dfrac{\pi^2}{48}\dfrac{Ywt^3}{L^2}$

CHAPITRE 68

68.2 En prenant pour z l'axe du cylindre, et r sur n'importe quel rayon,

(a) $z = (\omega^2/2g)r^2$

(b) (Voir l'Ex. 38.5.) Le champ des vitesses est $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, où $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$. Par conséquent $\boldsymbol{v} = \omega(-y\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y)$. Ainsi,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} = \omega \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \omega\boldsymbol{e}_z(1+1) = 2\boldsymbol{\omega}.$$

68.3 (b) $\boldsymbol{p}_{\text{total}} = m\boldsymbol{v}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

CHAPITRE 69

69.1 Avec les symboles M pour une masse, D pour une distance, T pour un temps. Pour l'écoulement permanent d'un liquide incompressible (petit nombre de Reynolds), on peut négliger la densité du fluide, et les paramètres qui déterminent la force de viscosité sur la balle proviennent de son rayon a [unité : D], sa vitesse v [unité : D/T], et la viscosité du fluide η [unité : $M/(DT)$]. On cherche des puissance entières x, y, et z telles que la force de viscosité sur la balle soit $F \propto a^x v^y \eta^z$. Les unités de force sont MD/T^2, on doit donc avoir $M^1D^1T^{-2} = [D]^x[D/T]^y[M/(DT)]^z = M^zD^{x+y-z}T^{-y-z}$, avec comme unique solution $x = y = z = 1$. Par conséquent $F \propto av\eta$.

69.2 (b) $R = 8\eta L/\pi a^4$

69.3 $dU/dt = \eta v^2/d^2$

CHAPITRE 70

70.1 (a) $\lambda = 2dx/L$

70.2 (a) Si le canon est déplacé vers le haut d'une distance D, P_1, P_2 et P_{12} descendent tous trois de $D(L/L')$, où L est la distance du mur à l'écran et L' est la distance du canon à électrons au mur.

(b) Si la distance entre les fentes est doublée, la distance entre les maxima de la figure d'interférences est diminuée de moitié. (c) Si la fente 1 est deux fois plus large que la fente 2, davantage d'électrons passeront par la fente 1 que par la fente 2, donc P_1 est deux fois plus grand que P_2, ce qui rend P_12 asymétrique, plus large à gauche, et déplace un peu la figure d'interférences vers la gauche.

70.3 Classiquement, le champ transmis est réduit d'un facteur $\cos\theta$ par rapport au champ incident, et puisque l'intensité est proportionnelle au carré du champ, l'intensité transmise est réduite de $\cos^2\theta$. De façon quantique, l'amplitude pour un photon d'être transmis (plutôt qu'absorbé) par le polaroid est réduite d'un facteur $\cos\theta$, et (en supposant que les photons sont toujours transmis lorsque l'axe du polaroid est vertical) la probabilité pour un photon d'être transmis devient $\cos^2\theta$, alors que la probabilité qu'il soit absorbé devient $\sin^2\theta$.

70.4 Le diamètre de l'anneau le plus interne sera approximativement 0,36 cm, et le suivant sera environ 0,72 cm.

70.5 (a) Avec des électrons incidents d'impulsion $\hbar k$, $a_1 = |a_1|e^{i\phi_1}$ et $a_2 = |a_2|e^{i\phi_2}$,

$$I(x) = \frac{1}{L^2}\Big(|a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1||a_2|\cos\left[\frac{kdx}{L} + (\phi_1 - \phi_2)\right]\Big).$$

(b) L'amplitude pour un électron d'arriver en x est $\phi = \langle x\,|\,1\rangle a_1 + \langle x\,|\,2\rangle a_2$. Comme exposé au volume III, Chapitre 7, des états d'énergie bien définie E ont une dépendance en temps $e^{-iEt/\hbar}$. Puisque les amplitudes $\langle x\,|\,1\rangle$ et $\langle x\,|\,2\rangle$ n'ont pas de dépendance en temps, celles de a_1 et a_2 déterminent E. $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ détermine l'impulsion p, et cela détermine la longueur d'onde $\lambda = h/p$.

70.6 (a) $a = \lambda L/d = hL/p_0 d$

(c) L'énergie totale des particules doit être conservée, par conséquent $p^2(x)/2m + V(x) = p^2(0)/2m + V(0)$, ou $p(x) = \sqrt{p^2(0) + 2m(V(0) - V(x))}$. Lorsque $V(x)$ varie lentement, $V(x) - V(0)$ sera petit, et $p(x) \approx p(0) + (m/p(0))(V(0) - V(x))$; de plus, $V(x) - V(0) \approx (\partial V/\partial x)x = -Fx$. Par conséquent, $p(x) \approx p(0) + (m/p(0))Fx$, qui est la même chose que $p(x) \approx p(0) + Fx/v$, puisque la vitesse initiale des particules est $v = p(0)/m$.

(d) 1. Si on fait l'approximation que les deux chemins sont de longueur L, la différence de phase entre les chemins est $\Delta\phi \approx \Delta kL = (\Delta p/\hbar)L$, où Δk la différence en nombre d'onde et Δp est la différence correspondante en impulsion. La différence moyenne de hauteur des deux chemins est $d/2$, donc, en utilisant le résultat donné pour la partie (c), la différence moyenne en impulsion est $\langle \Delta p\rangle = F(d/2)/v$. Par conséquent $\Delta\phi \approx (dF/2v\hbar)L$.

(d) 2. En substituant le résultat de la partie (1) ci-dessus, dans le résultat donné pour la partie (b), et utilisant $p_0 = mv$, le déplacement du schéma est

$$S = +(dF/2v\hbar)L\,\frac{L}{d}\,\frac{\hbar}{mv} = \frac{1}{2}\,\frac{F}{m}\left(\frac{L}{v}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{F}{m}t^2.$$

70.7 Notons l'amplitude pour que la particule aille de S à x (sans regarder son spin) $\phi = \langle x\,|\,1\rangle\langle 1\,|\,S\,\rangle + \langle x\,|\,2\rangle\langle 2\,|\,S\,\rangle$. Notons la probabilité totale pour qu'un électron passe au travers d'une fente (sans se préoccuper du spin) $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Notons les intensités des électrons de spin vers le haut et vers le bas en x comme P_+ et P_- respectivement, si bien que l'intensité totale des électrons en x est $P = P_+ + P_-$, alors

(a) $P_+ = \alpha^2\phi^2$, $P_- = \beta^2\phi^2$, $P = \gamma^2\phi^2$.

(b) $P_+ = \beta^2\phi^2$, $P_- = \alpha^2\phi^2$, $P = \gamma^2\phi^2$.

(c) $P_+ = P_- = \frac{1}{2}\gamma^2\phi^2$, $P = \gamma^2\phi^2$.

70.8 Pour réduire une probabilité d'un facteur 100 il faut réduire l'amplitude de probabilité correspondante d'un facteur 10. Donc l'amplitude de probabilité pour qu'une particule arrive en un point quelconque de l'écran, en étant passée par le point obstrué, est réduite d'un facteur 10. Si l'amplitude totale pour arriver par le trou intact est $ae^{i\phi_1}$, l'amplitude pour arriver en passant par le trou obstrué est $0{,}1ae^{i\phi_2}$. Les probabilités maximum et minimum d'arriver se produisent quand ces amplitudes s'ajoutent ou quand elle se soustraient (compte tenu de la phase). Ainsi, le rapport entre les probabilités maximum et minimum d'arriver sur l'écran est $|a + 0{,}1a|^2/|a - 0{,}1a|^2 = 1{,}21/0{,}81 \approx 1{,}49$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

70.9 (a) Le taux de comptage en coïncidence p_{12} est proportionnel à la probabilité d'une coïncidence aux compteurs. Il y a quatre façons d'avoir coïncidence aux compteurs : un photon de la source A va au compteur a tandis qu'un compteur de la source B va au compteur b, un photon de la source A va au compteur b pendant qu'un compteur de la source B va au compteur a, deux photons de la source A vont aux compteurs, ou bien deux photons de la source B vont aux compteurs. Les deux premiers cas sont indistinguables par conséquent leurs amplitudes s'ajoutent. Les deux dernières façons sont distinguables et leurs probabilités s'ajoutent. Par conséquent, la probabilité d'une coïncidence dans les compteurs est

$$P = |\langle a\,|\,A\rangle\langle b\,|\,B\rangle + \langle b\,|\,A\rangle\langle a\,|\,B\rangle|^2 + |\langle a\,|\,A\rangle\langle b\,|\,A\rangle|^2 + |\langle a\,|\,B\rangle\langle b\,|\,B\rangle|^2.$$

Il est donné que $\langle a\,|\,A\rangle = ce^{ikR_1}$ et $\langle b\,|\,A\rangle = ce^{ikR_2}$. Par symétrie, $\langle b\,|\,B\rangle = \langle a\,|\,A\rangle$ et $\langle a\,|\,B\rangle = \langle b\,|\,A\rangle$. En insérant ces amplitudes dans la formule pour P donnée ci-dessus, et en réarrangeant, on obtient

$$P = 2|c|^4(2 + \cos 2k(R_2 - R_1)).$$

(b) Si R est connu, D peut être trouvé en mesurant p_{12} pour diverses séparations d. En fonction de d, p_{12} varie de façon sinusoïdale.

Chapitre 71

71.1 (a) $E = 4{,}14 \times 10^{-9}$ eV
(b) $N = 1{,}51 \times 10^{27}$ quanta/cycle

71.2 (a) $\dfrac{\Delta E(\omega)}{\Delta\omega} = \dfrac{kT}{\pi^2c^3}\omega^2 + O(\omega^3)$ pour petit ω,
$\dfrac{\Delta E(\omega)}{\Delta\omega} \approx \dfrac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}e^{-\hbar\omega/kT}$ pour grand ω.
(b) $\omega_{E_{\max}} = (3{,}69 \times 10^{11}\ \mathrm{s^{-1}\,K^{-1}}) \cdot T$
(c) $\lambda_{E_{\max}} = (2{,}9 \times 10^{7}\ \text{Å K})/T$
(d) $T = 5800$ K

71.3 $B = 2{,}12 \times 10^{8}$ gauss

71.4 (a) $N_1/N_0 = N_2/N_1 = n(\omega)/\,(n(\omega) + 1)$
(b) $n(\omega) = 1/\left(e^{\Delta E/kT} - 1\right)$
(c) 1. $n(\omega) \approx e^{-\Delta E/kT}$; (2) $n(\omega) \approx kT/\Delta E$

71.5 Les protons, les neutrons et les electrons sont des fermions ; un atome ne contenant que ces particules est un boson si leur nombre total est pair, et un fermion si leur nombre total est impair. L'atome N^{14} a 7 électrons orbitaux autour d'un noyau de charge +7. Si le noyau n'était fait que de protons et d'électrons, il devrait contenir

14 protons et 7 électrons (pour avoir le bon nombre de masse et la bonne charge). En ajoutant cela aux électrons orbitaux, l'*atome* aurait 28 fermions et serait un boson. D'un autre côté si le noyau ne contient que des protons et des neutrons, il en a 7 de chaque espèce, si bien que l'*atome* a 21 fermions en tout ce qui en fait un fermion. Notons que le *noyau* est de l'autre sorte : fermion dans la première hypothèse, boson dans la seconde.

71.6 (a) Si un atome est excité, il a un certain taux de transition (probabilité par unité de temps) pour émettre un photon sous quelque forme que ce soit (fréquence, direction, polarisation). S'il y a n photons d'une espèce déjà présents, le taux d'émission de cette espèce-là est augmenté d'un facteur $n+1$. Cela explique l'effet d'avalanche. (Les atomes ne sont pas entraînés à émettre des photons de telle ou telle espèce ; c'est l'environnement en photons qui amplifie le taux.)

(b) Les neutrinos sont des fermions, parmi lesquels il ne peut y en avoir deux dans le même état (c'est-à-dire que s'il y a un neutrino sous une certaine forme, la probabilité d'en émettre un autre est nulle). Par conséquent, un laser à neutrinos ne peut pas exister.

71.7 (a) $P_{a\to b} = |\langle b\,|\,a\rangle|^2$ et $P_{c\to d} = |\langle d\,|\,c\rangle|^2$. Lorsque les particules ne sont pas identiques l'amplitude d'événements simultanés ($a \to b$ et $c \to d$) est le produit des amplitudes, $\langle bd\,|\,ac\rangle = \langle b\,|\,a\rangle\langle d\,|\,c\rangle$. Ainsi, $P_{ac\to bd} = |\langle b\,|\,a\rangle\langle d\,|\,c\rangle|^2 = |\langle b\,|\,a\rangle|^2|\langle d\,|\,c\rangle|^2 = P_{a\to b}P_{c\to d}$.

(b) Lorsque les particules sont identiques, les événements simultanés ($a \to b$ et $c \to d$) ne peuvent pas être distingués de ($a \to d$ et $c \to b$), si bien que les amplitudes s'ajoutent (avec possiblement une phase opposée), ainsi $P_{ac\to bd} = |\langle b\,|\,a\rangle\langle d\,|\,c\rangle \pm \langle d\,|\,a\rangle\langle b\,|\,c\rangle|^2 = P_{a\to b}P_{c\to d} + P_{a\to d}P_{c\to b} \pm 2\,\mathrm{Re}\,[\langle b\,|\,a\rangle^*\langle d\,|\,c\rangle^*\langle d\,|\,a\rangle\langle b\,|\,c\rangle]$.

71.8 $P(\theta) = |f(\theta)|^2 + \frac{2}{3}\,\mathrm{Re}\,[f(\theta)^* f(\pi-\theta)] + |f(\pi-\theta)|^2$

71.9 (a) $P(\theta) = 4P_1(\theta) + 4P_2(\theta)$

(b) $P(\theta) = 4P_1(\theta) + 4P_2(\theta) + 8\,\mathrm{Re}\,[f_1^*(\theta)f_2(\theta)]$

(c) La réponse dépend de la phase relative de f_1 et f_2 ; si f_1 et f_2 ont la même phase (ce qui est probablement le cas) alors le cas (b) donne davantage de diffusion.

71.10 (a) 0

(b) $2|f-g|^2$

(c) $|f-g|^2$

(d) $|f-g|^2$

(e) $2|f|^2$

71.11 (a) $\alpha \approx \theta/2$

(b) $g(\theta) - f'(\pi-\theta)$

(c) $P(\theta) = \dfrac{1}{2}|f(\theta) - f(\pi-\theta)|^2 + \frac{1}{2}|f'(\theta) - g(\pi-\theta)|^2 + \frac{1}{2}|g(\theta) - f'(\pi-\theta)|^2$

(e) $A = 3/4$, $B = 1/4$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

71.12 (b) $U = \dfrac{3(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2}{10m_e}\dfrac{N^{5/3}}{V^{2/3}}$

(c) $P = \dfrac{(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2}{5m_e}\left(\dfrac{N}{V}\right)^{5/3}$

(d) $\gamma = 5/3$

71.13 (a) $P = A\rho^{5/3}$ découle de la solution à l'Ex. 71.12. $dM(r)/dr = 4\pi\rho r^2$ donne simplement la quantité de masse dM dans une couche sphérique de rayon r et d'épaisseur dr. $dP/dr = -G\rho M(r)/r^2$ s'ensuit, en supposant la symétrie sphérique, l'équilibre hydrostatique de l'étoile sous la gravité requiert que $-\boldsymbol{\nabla}P - \rho\boldsymbol{\nabla}\phi = 0$ [Voir le volume II, équation (40.1)], où $\phi = -GM(r)/r$ est le potentiel gravitationnel par unité de masse.

(b) $A = \dfrac{(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2}{5m_e}(2M_p)^{-5/3}$

Chapitre 72

72.1 Si $C = A \cdot B$ nous pouvons insérer un appareil T complètement ouvert entre A et B sans qu'il ne produise d'effet, $C = A \cdot T \cdot B$. L'amplitude pour que le faisceau dans l'état ϕ traverse A en sortant dans l'état kT et sorte de B dans l'état χ est $\langle\chi\,|\,B\,|\,k\rangle\langle k\,|\,A\,|\,\phi\rangle$. Les processus correspondant aux trois états de T sont indistinguables et par conséquent l'amplitude $\langle\chi\,|\,C\,|\,\phi\rangle$ pour que le faisceau dans l'état ϕ traverse C et sorte dans l'état χ est la somme des amplitudes :

$$\langle\chi\,|\,C\,|\,\phi\rangle = \sum_k \langle\chi\,|\,B\,|\,k\rangle\langle k\,|\,A\,|\,\phi\rangle.$$

72.2 (a) Non.

(b) Oui.

(c) Oui.

72.3 (a) $N_2 = \frac{3}{4}N_1$

(b) $N_3 = \frac{1}{16}N_1$

(c) $N_2 = N_1$ et $N_3 = 0$

72.4 (a) $N_{+S'} = N_{-S'} = 0$ et $N_{0S'} = N_0$

(b) $N_{+T} = N_{-T} = \frac{1}{2}N_0$, $N_{+S'} = N_{-S'} = \frac{1}{4}N_0$ et $N_{0S'} = \frac{1}{2}N_0$

(c) Pas de changement.

(d) $N_{+S'} = N_{-S'} = \frac{1}{8}N_0$ et $N_{0S'} = \frac{3}{4}N_0$

(e) $N_{+S'} = N_{-S'} = \frac{1}{6}N_0$ et $N_{0S'} = \frac{1}{3}N_0$

Chapitre 73

73.1 (a) $N/2$

(b) $N/4$

(c) $N/4$

(d) $N/4$

(e) $(N/4)(1 + 1/\sqrt{2})$

(f) $N/4$

(g) $(N/4)(1 + 1/\sqrt{2})$

(h) $N/2$

73.2 (a) Si X et Y sont les amplitudes d'arriver au point considéré avec le spin en haut et en bas respectivement, l'amplitude totale pour arriver au point donné est $aX + bY$, et la probabilité $|aX + bY|^2$.

(b) $P = |X|^2$ pour en haut en z, $P = |Y|^2$ pour en bas en z

(c) $P = \frac{1}{2}|X + Y|^2$ pour en haut en x, $P = \frac{1}{2}|X - Y|^2$ pour en bas en x

(d) $P = |(\cos\theta/2)X - ie^{i\phi}(\sin\theta/2)Y|^2$

(e) $\langle P\rangle = \frac{1}{2}(|X|^2 + |Y|^2)$

73.3 (a) $N = N_0|\langle +U \,|\, -S\rangle|^2$

(b) $\langle +T \,|\, -S\rangle = 1$, $\langle -T \,|\, -S\rangle = 0$

(c) $\langle +U \,|\, -S\rangle = i\sin\theta/2$

(d) 1. $i\sin 0/2 = 0$; 2. $i\sin\pi/2 = i$

(e) La différence entre les amplitudes 1 et i est un facteur de phase sans importance ; toutes les probabilités restent les mêmes.

73.4 La calcite sépare la lumière en deux faisceaux polarisés linéairement dans des directions perpendiculaires, chacun de même intensité. Lorsque de la lumière polarisée linéairement d'intensité I_0 passe dans un polariseur dont l'axe est à un angle angle θ par rapport à la polarisation de la lumière, l'intensité transmise est $I = I_0\cos^2\theta$ (loi de Malus). De cela, nous pouvons deviner immédiatement que $\langle iT \,|\, jS\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Le même résultat peut être démontré en considérant le champ électrique $\boldsymbol{E}$ incident sur le premier cristal de calcite, qui le clive en deux champs polarisés linéairement E_x et E_y, qui passent tous deux dans un deuxième cristal de calcite dont les axes x' et y' sont tournés d'un angle θ, ce qui produit des champs $E_{x'} = E_x\cos\theta + E_y\sin\theta$ et $E_{y'} = -E_x\sin\theta + E_y\cos\theta$.

Vérification : pour $\theta = 0$ on a $\langle iT \,|\, jS\rangle = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et pour $\theta = \pi/2$ on a $\langle iT \,|\, jS\rangle = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, etc. dont on voit qu'un faisceau de pur xS traversera la voie x de T, mais sera bloqué dans la voie y si $\theta = 0$ et vice versa si $\theta = \pi/2$, etc. Nous pouvons obtenir la loi de Malus à partir des probabilités, par exemple, $|\langle xT \,|\, xS\rangle| = \cos^2\theta$.

73.5 Soit $x \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

(b) $\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$

(c) Même que (a).

(d) Même que (b).

(e) $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $e^{i\theta}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ -1+i & 1+i \end{pmatrix}$

(h) Même que (e) avec $\theta = \pi/2$: $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} e^{i\omega t n_x/c} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t n_y/c} \end{pmatrix}$,

où ω est la fréquence de la lumière incidente, n_x et n_y sont les indices de réfraction suivant les axes x et y, et t est l'épaisseur du matériau.

(j) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(k) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

73.6 (a) $P_{+z} = (1 - v/c)\sin^2\theta/2$, $P_{-z} = (1 + v/c)\cos^2\theta/2$

(b) $P_{\pm x} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta \pm \sqrt{1 - v^2/c^2}\sin\theta\right)$

(c) $P_{\pm y} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right)$

(d) Si on n'observe pas le neutrino $P_{\pm z} = \frac{1}{2}(1 \mp v/c)$.

Chapitre 74

74.1 (a) On doit trouver que

$$\Delta\theta \approx \frac{m\mu_z}{p_0^2}\frac{\partial B_z}{\partial z}L,$$

où m est la masse de la particule, et μ_z est quantifié et peut prendre les valeurs $+\mu$, 0, $-\mu$.

Chapitre 75

75.1 (a) $B_0 = \pi\hbar/2\mu T$

(b) $P = 1/2$

75.2 $P_{+x}(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin^2 \frac{\mu B}{\hbar}\, t\right)$

$P_{+y}(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{2\mu B}{\hbar}\, t\right)$

75.3 (a) $P_{+z}(t) = \cos^2(At/\hbar)$

(b) $C_I = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_{+z} + C_{-z}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{+iAt/\hbar}, \qquad E = -A$

$C_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_{+z} - C_{-z}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iAt/\hbar}, \qquad E = +A$

(c) $\alpha = 2At/\hbar$, $\beta = \pi$, γ = n'importe quels (angles d'Euler)

CHAPITRE 76

76.1 Où $g(\omega_0)$ est l'intensité du rayonnement à la fréquence de résonance ω_0, et μ est le moment électrique dipolaire de la molécule d'ammoniac.

(a) $P(I \to II$ par émission stimulée$) = (\pi\mu^2/\epsilon_0\hbar^2 c) g(\omega_0)$

(b) $P(II \to I$ par absorption$)$

$= P(I \to II$ par émission stimulée$)$

(c) $B_{I,II} = B_{II,I} = P(II \to I)/g(\omega_0)$ (et voir ci-dessous)

(d) $A_{I,II} = (\hbar\omega_0^3/\pi^2 c^2) B_{I,II}$

CHAPITRE 77

77.1 (a) $\omega = (2\mu B/\hbar)\cos\theta$

(b) $P_{-z}(t) = \sin^2[(\mu B/\hbar)\sin\theta\, t]$

77.2 avec $\omega_0 = 2\mu B_0/\hbar$, et $\omega_n = 2\mu B_n/\hbar$,

$$P_{\|}(t) = \frac{\omega_n^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_n^2} \sin^2\left(\frac{t}{2}\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_n^2}\right).$$

CHAPITRE 78

78.1 (a) *Conseil :* faire usage de la Table 11-2 dans le volume III.

(b) $\sigma_x\sigma_y\sigma_z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

78.2 (a) Ou bien $E = E_O$, ou $E = (1/2)(E_O + E_C \pm \sqrt{(E_O - E_C)^2 + 8A^2})$, où $-iA/\hbar$ est l'amplitude par unité de temps pour que l'électron saute entre les atome de O et C.

(b) Ou bien $E = E_O$ et il y a une amplitude nulle pour que l'électron soit sur l'atome de C, ou $E = E_O \pm A\sqrt{2}$ et la probabilité que l'électron soit sur l'atome de C est la même que celle pour qu'il soit sur *l'un ou l'autre* des atomes de O.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

78.3
$$\begin{vmatrix} A_0 - A_1 - E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 - A_1 - E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 - A_1 - E & 0 \\ A_1 & 2A_1 & 3A_1 & A_0 + 3A_1 - E \end{vmatrix} = 0,$$
où $-iA_1/\hbar$ et $-iA_0/\hbar$ sont, respectivement, les amplitudes par unité de temps pour que le trou saute et ne saute pas. $E_I = A_0 - A_1$, $E_{II} = A_0 + 3A_1$, $\Delta E = |E_I - E_{II}| = 4A_1$.

78.4 (b) $E_I = E_0 + 2A$, où E_0 est l'énergie de l'électron supplémentaire d'un atome quelconque.

(c) Il y a six états stationnaires.

(d) $\delta = 0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°$

(e) Niveaux d'énergie : $E_0 \pm A$, $E_0 \pm A$, $E_0 \pm 2A$; espacement des niveaux (énergies de transition) : A, $2A$, $3A$, $4A$.

78.5 (a) Niveaux d'énergie : $E_0 + A$, $E_0 + A$, $E_0 - 2A$, où E_0 est l'énergie de l'électron supplémentaire sur un atome quelconque ; espacement des niveaux : $3A$.

(b) Niveaux d'énergie : $E_0 + (1 + 2\epsilon/3)A$, $E_0 + A$, $E_0 - (2 - \epsilon/3)A$; espacement des niveaux : $(2\epsilon/3)A$, $(3 - \epsilon/3)A$, $(3 + \epsilon/3)A$

Chapitre 79

79.1 (a) $f_{I,II} = 28\,\text{Hz}$, $\lambda_{I,II} = 10^9\,\text{cm}$; $f_{I,III} = 14\,\text{Hz}$, $\lambda_{I,III} = 2 \times 10^9\,\text{cm}$

(b) $f_{I,II} = 1{,}4\,\text{MHz}$, $\lambda_{I,II} = 2 \times 10^4\,\text{cm}$; $f_{III,II} = 0{,}7\,\text{MHz}$, $\lambda_{III,II} = 4 \times 10^4\,\text{cm}$

(c) $f_{I,II} = 2{,}8 \times 10^5\,\text{MHz}$, $\lambda_{I,II} = 10^{-1}\,cm$; $f_{I,III} = 1130\,\text{MHz}$, $\lambda_{I,III} = 27\,\text{cm}$

Chapitre 80

80.1 (a) Soit la dépendance spatiale des amplitudes pour les configurations i et j, $e^{ik_i x}$ et $e^{ik_j x}$, respectivement. Les énergies permises au système sont :

$$E = \frac{1}{2}[E(i) + E(j)] \pm \frac{1}{2}\sqrt{[E(i) - E(j)]^2 + 16A^2 \cos k_i b \cos k_j b}$$

avec

$$E(i) = E_i - 2B\cos k_i b \quad \text{et} \quad E(j) = E_j - 2B\cos k_j b.$$

Note : si $A = 0$, et que les configurations i et j sont découplées, cela donne simplement les deux solutions $E = E(i)$ et $E = E(j)$.

(b) Le cas général où $k_i \neq k_j$ est difficile à analyser, considérons le cas de particules localisées (paquets d'onde) pour lesquelles un nombre d'onde caractéristique $k = k_i = k_j$ peut être associé à une vitesse (voir Section 13-3, du volume III). Alors $E = E_0 - 2B\cos kb \pm \frac{1}{2}\sqrt{|E_i - E_j|^2 + 16A^2\cos^2 kb}$. Lorsque $A = 0$, on a deux

courbes de cosinus d'amplitudes $2B$ séparées par $|E_i - E_j|$. Lorsque $A \neq 0$ les courbes sont écartées l'une de l'autre (sauf là où $kb = \pi/2$). Si $|E_i - E_j| \ll 2B$ les deux bandes se recouvrent ; si $|E_i - E_j| \gg 2B$ elles ne se recouvrent pas.

80.2 (a) $E = E_0 \pm \sqrt{(\Delta E)^2 + 4A^2 \cos^2 kb}$

(b) $-\pi/2b < k \leq \pi/2b$

80.3 (a) $\beta = -\dfrac{G}{G - iB^2 \sin kb}$, avec $G = \left(A^2 - B^2\right) \cos kb$

$\gamma = 1 + \beta$

(b) β est de la forme $\beta = -d/(d - ie)$, où d et e sont réels. Ainsi, $|\beta|^2 = d^2/(d^2 + e^2)$ et $|\gamma|^2 = |1 + \beta|^2 = |(d - ie - d)/(d - ie)|^2 = e^2/(d^2 + e^2)$. D'où, $|\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$.

80.4 (a) $1 = |\beta|^2 + |1 + \beta|^2 = 1 + 2|\beta|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,[\beta]$, donc $|\beta|^2 + \mathrm{Re}\,[\beta] = 0$. D'où,

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\beta}{1+\beta}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{\beta(1+\beta^*)}{|1+\beta|^2}\right] = \frac{\mathrm{Re}\,[\beta] + |\beta|^2}{|1+\beta|^2} = 0.$$

(b) Let $\beta = ce^{i\delta}$ avec c et δ réels. $|\beta|^2 + \mathrm{Re}\,[\beta] = 0$ implique $c^2 + c\cos\delta = 0$, et $c = -\cos\delta$. Soit $\eta = \delta - \pi/2$. Alors $c = -\cos(\eta + \pi/2) = \sin\eta$ et $e^{i\delta} = e^{i(\eta+\pi/2)} = ie^{i\eta}$. Donc, $\beta = i\sin\eta e^{i\eta}$.

80.5 (b) $\beta = -\dfrac{P - e^{ikb}}{P - e^{-ikb}}$, avec $P = \dfrac{B^2}{AA'} e^{ik'b'}$

(c) Si $k'b'$ est imaginaire, P est réel et β est de la forme $-(r + is)/(r - is)$ avec r et s réels. D'où $|\beta| = 1$. Les amplitudes a_n se comportent comme $e^{-|k'b'|n}$, ce qui signifie qu'il n'y a pas de transmission de particules dans la région II. L'énergie correspondante est $E = E_0' - 2A' \cosh|k'b'|$, d'où $E < E_0' - 2A'$; c'est-à-dire que l'énergie est inférieure à la « bande de transmission »dans la région II.

Chapitre 81

81.1 (b) La puissance moyenne est

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[qE_x^* v_x\right] = \frac{1}{2}\,q\,\mathrm{Re}\left[E_x^* E_x \frac{v_x}{E_x}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\,qE_0^2\,\mathrm{Re}\left[\frac{v_x}{E_x}\right].$$

81.2 (a) La solution est esquissée dans la section 14-5 du volume III : $I_g = CN_p(\text{côté n})$ et $I_r = CN_p(\text{côté p})e^{-qV/kT}$ pour une certaine constante de proportionnalité C. Lorsqu'un biais de voltage inverse V_e est appliqué, le courant de recombinaison devient $I_r' = CN_p(\text{côté p})e^{-q(V-V_e)/kT} = I_g e^{qV_e/kT}$. Le courant thermique n'est pas changé. Par conséquent, le courant total de trou (vers la droite, par rapport à la figure) est $I_g(e^{qV_e/kT} - 1)$.

(b) $I_{\text{totale}} = I_0(e^{qV_e/kt} - 1)$, où I_0 est la grandeur maximale du courant au travers de la jonction sous un biais de voltage inverse ($V \ll 0$).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Chapitre 82

82.1 $\lambda \approx 10^{-6}$ m

82.2 $\Delta E \approx 3{,}1$ eV/molécule

82.3 (a) Si la probabilité de trouver aucun spin vers le bas dans le mode K est C, la probabilité de trouver n spins vers le bas est $Ce^{-nE_K/kT}$. Le nombre moyen d'atomes avec spin en bas dans le mode K est alors

$$\bar{n}_K = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nCe^{-nE_K/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} Ce^{-nE_K/kT}} = \frac{Ce^{E_k/kT}/(e^{E_k/kT}-1)^2}{Ce^{E_k/kT}/(e^{E_k/kT}-1)}$$
$$= \frac{1}{e^{E_K/kT}-1}.$$

(b) Si les seuls états sont ceux où tous les spins en bas appartiennent au même mode, le nombre moyen de spins vers le bas à la température T est $\sum_K \bar{n}_K$, ce qui vaut $\int \bar{n}_K\, d^3K/(2\pi)^3$ par unité de volume, $d^3K/(2\pi)^3$ étant le nombre de modes par unité de volume avec K à d^3K près.

(d) $$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{e^{x^2}-1} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty x^2 e^{-nx^2}\,dx$$
$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{1}{n^{3/2}}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} = \zeta(3/2) \approx 2{,}61$$

Chapitre 83

83.1 (a) Pour $\psi(x,t) = u_0(x)e^{-iE_0t/\hbar}$, l'équation de Schrödinger donne $d^2u_0/dx^2 = (2m/\hbar^2)[V(x) - E_0]u_0(x)$. Dans les régions où $V(x) = V_0$ (avec $V_0 \to \infty$), $|u_0(x)|$ deviendrait infini lorsque $|x|$ tend vers l'infini et cela ne décrirait pas une particule liée.

(b) $$u_n(x) = A\sin\left(\frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}x\right)$$
$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n+1)^2$$
avec la constante A et $n = 0,1,2,\ldots$

(c) $E_0 = \pi^2\hbar^2/2ma^2$, et

$$u_0(x) = \begin{cases} A\sin(\pi x/a) & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{pour } x < 0 \text{ et } x > a \end{cases}$$

(d) $E_1 - E_0 = 3\pi^2\hbar^2/2ma^2$

83.2 (a) $V_0 \approx 35\pi^2\hbar^2/2ma^2$

(b) La fonction d'onde $u(x)$ du premier état excité de ce puits doit avoir un nœud, et être antisymétrique autour de $x = 0$. On peut satisfaire l'équation de Schrödinger et la condition aux limites avec la même énergie $E = (0{,}9)\pi^2\hbar^2/2ma^2$ qu'en partie (a) ci-dessus, si

$$u(x) = \begin{cases} u_a(x) & \text{pour } x \geqslant 0 \\ -u_a(-x) & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

où $u_a(x)$ est la fonction d'onde de la partie (a) ci-dessus lorsque $x > 0$.

83.3 (b) $E_0 \approx 0{,}27V_0$, et $E_1 \approx 0{,}90V_0$

(c) Si $V_0a^2 < \pi^2\hbar^2/8m$ il y a un seul état lié.

83.4 (a) En appliquant l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

à $\psi(x) = Ke^{-[a(t)x^2+c(t)]}$ et en simplifiant,

$$-i\hbar\left(\frac{da}{dt}x^2 + \frac{dc}{dt}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-2a + 4a^2x^2\right).$$

Ceci doit être vrai pour tout x, donc les coefficients des puissances de x peuvent être les mêmes. En particulier pour x^2,

$$-i\hbar\frac{da}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}4a^2,$$

avec la solution

$$\frac{1}{a(t)} = \frac{1}{a_0} + \frac{2i\hbar}{m}t.$$

(b) $c(t) = c_0 + \frac{1}{2}\ln[a_0/a(t)]$ où $c_0 = c(0)$.

(c) Elle va s'étendre sur une région d'une étendue d'environ 2300 km.

(d) $|\phi(p)|^2 = K^2\dfrac{\pi}{a_0}e^{-2c_0-p^2/2\hbar^2a_0}$

(e) $\Delta p = \sqrt{a_0}\hbar$. (Ne change pas avec le temps.)

(f) En substituant $c(t)$ et $a(t)$ des parties (a) et (b) ci-dessus dans $\psi(x)$, élevant au carré et en simplifiant,

$$|\psi(x)|^2 = K^2|a(t)/a_0|e^{-2c_0-x^2/(1/2a_0+2a_0\hbar^2t^2/m^2)}$$

La largeur de la fonction d'onde spatiale est donc $\Delta x = \sqrt{1/4a_0 + a_0\hbar^2t^2/m^2}$. Pour t grand, $\Delta x \approx (\hbar\sqrt{a_0}/m)t = (\Delta p/m)t = \Delta vt$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

CHAPITRE 84

84.1 $A(\theta) \propto \sin\theta$

84.2 (a) $a = c = d = e = f = g = 0$

(b) $f^+(\theta) = |b|^2 \sin^2(\theta/2)$

(c) $f(\theta) = |b|^2 \sin^2(\theta/2) + |h|^2 \cos^2(\theta/2)$

(d) La conservation de la parité implique $b = \pm h$, d'où $f(\theta) = |b|^2$.

84.3 (a) Les composantes initiales du moment cinétique suivant l'axe z sont $m = 1$ pour les photons et $m = \pm 1/2$ pour les protons initiaux, donc les seuls états de moment cinétique disponibles pour le p^* sont $m = 1 + 1/2 = 3/2$ et $m = 1 - 1/2 = 1/2$. Dans la direction d'émission, le moment cinétique total de l'état final est celui du proton initial, d'où $m' = \pm 1/2$.

(b) $c = d$ car les interactions fortes conservent la parité. La distribution angulaire des pions (et des protons) est

$$f(\theta) = \frac{1}{2}|c|^2\left(\frac{3}{4}(|b|^2 - |a|^2)\sin^2\theta + |a|^2\right).$$

84.5 (a) La distribution angulaire des photons lorsque la polarisation n'est pas mesurée est proportionnelle à $(1 + \cos^2\theta)$, indépendamment de la parité de l'état initial. Par conséquent, la parité du premier état excité ne peut pas être déterminée.

(b) La distribution angulaire des photons polarisés suivant x' est isotrope (elle ne dépend pas de θ) si l'état initial est de parité positive, mais elle est proportionnelle à $\cos\theta$ si l'état initial est de parité négative. Par conséquent, la parité du premier état excité est facile à déterminer.

CHAPITRE 85

85.1 Le spectre d'émission a deux raies de même intensité aux longueurs d'onde 1210 Å et 6560 Å.

85.2 (a) L'énergie de l'état fondamental est l'énergie de Rydberg $E = -me^4/2\hbar^2 = -e^2/2r_B$. Classiquement, la distance maximum possible R de l'électron est celle pour laquelle l'énergie cinétique est nulle, c'est-à-dire que l'énergie potentielle est égale à l'énergie totale, $-e^2/R = -e^2/2r_B$, d'où $R = 2r_B$.

(b) $P(r > R) = 0{,}238$

85.3 (a) $E_0 = 18{,}9\,\text{MeV}$

(b) $\lambda_{1\to 0} = 8{,}7 \times 10^{-4}$ Å

(c) $r'_B = 3{,}1 \times 10^{-5}$ Å

(d) $P(r \leqslant R) = 1 - (1 + 2s + 2s^2)e^{-2s}$, avec $s = R/r'_B$.

(e) $P(e$ dans le noyau$) \approx 1{,}8 \times 10^{-6}$; $P(\mu$ dans le noyau$) \approx 0{,}83$.

85.4 (a) La transition $n = 5 \rightarrow n = 2$ a une énergie $E_{5\rightarrow 2} = 2{,}86\,\text{eV}$, qui est dans le domaine demandé. Une énergie de 13,06 eV est nécessaire pour une transition de l'état fondamental jusqu'à l'état $n = 5$.

(b) La transition de plus courte longueur d'onde est la transition $n = \infty \rightarrow n = 2$, avec $\lambda = 3650\,\text{Å}$. La transition de plus grande longueur d'onde est celle de $n = 3 \rightarrow n = 2$, avec $\lambda = 6560\,\text{Å}$.

(c) L'énergie de l'état fondamental de l'hélium est $E = -4E_R = -54{,}4\,\text{eV}$.

(d) La transition de plus courte longueur d'onde vers l'état $n = 4$ est $n = \infty \rightarrow n = 4$, avec $\lambda = 3650\,\text{Å}$. Notons que c'est la même que la transition de plus courte longueur d'onde de la série de Balmer.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

72436 - (I) - (1,5) - OSB 80° - EPR - JME
Imprimerie CHIRAT - 42540 Saint-Just-la-Pendue
Dépôt légal : avril 2015

Imprimé en France