



D. FREDON, S. MARGAIL, D. MAGLOIRE

Toute la MP en fiches Maths · Physique · Chimie

CONFORME AU NOUVEAU PROGRAMME Toute l'année en fiches Résumés du cours, exemples, schémas Exercices d'entraînement corrigés Conseils, méthodes, erreurs à éviter



Crédits photographiques :

Portait de Carl Friedrich Gauss : lithographie de Siegfried Detlev Bendixen, in Astronomische Nachrichten, 1828

Portait de James Clerck Maxwell : Lewis Campbell and William Garnett, The Life of James Clerk Maxwel, 1882.

Portait de Michael Faraday : R. A. Millikan & H. G. Gale, A First Course in Physics, 1906.

Conception et création de couverture : Atelier 3+

Collaboration technique : Thomas Fredon, ingénieur à l'Université de Limoges

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que

représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autori-

sation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, 2014

DANGER

TUE LE LIVRE

5 rue Laromiguière, 75005 Paris www.dunod.com

ISBN 978-2-10-071854-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Avant propos

Pour chaque matière proposée dans cet ouvrage (mathématiques, physique, chimie), vous trouverez un résumé de cours pour vous aider dans vos révisions tout au long de l'année et, dans la dernière ligne droite, juste avant vos concours.

Ces résumés sont enrichis - non pas aux omega 3 comme dans la publicité -mais avec des conseils, des méthodes, des mises en garde, et des exercices types pour vous entraîner à manipuler les notions présentées.

Synthèse des programmes, ce livre vous accompagnera avant tout contrôle oral ou écrit. L'ordre de présentation des notions a été pensé en fonction de cet objectif. Ne soyez pas surpris que l'ordre pédagogique de votre cours puisse être différent : l'apprentissage n'est pas un processus linéaire. Mais il est normal que l'ordre pédagogique de votre cours puisse être différent : l'apprentissage n'est pas un processus linéaire.

Grâce au découpage en fiches et à la présence d'un index très détaillé, vous retrouverez facilement, et à tout moment, les notions que vous souhaitez réviser.

Le livre de la même série de première année vous sera utile car, rappelez-vous, le programme des concours que vous passerez porte sur les deux années de classes préparatoires.

Dans chaque des fiches, certaines parties sont mises en valeur par un fond tramé :

- pour mettre en évidence un résultat important,

– avec le pictogramme 🧠 (prenez note !) pour des commentaires, remarques, méthodes,

– avec le pictogramme (Attention, danger !) pour des mises en garde, des erreurs à éviter.

Un résumé de cours n'est pas un cours complet. Pour ceci, rien ne remplace le cours de votre professeur. Vous pouvez aussi consulter le catalogue Dunod, riche de nombreux manuels et ouvrages d'entraînement.

N'hésitez pas à nous communiquer vos critiques, vos propositions d'amélioration, et aussi vos encouragements.

Daniel Fredon	Didier Magloire	Sandrine Margail
daniel.fredon@laposte.net	didier.magloire@orange.fr	sandrine_margail@yahoo.fr
mathématiques	physique	chimie

Un grand merci à Claude Morin pour sa relecture minutieuse de la partie maths, Matthieu Daniel pour le suivi attentif de la réalisation de ce livre et à Thomas Fredon sans qui ce livre n'existerait pas.

Copyright © 2014 Dunod.

Table des matières

Avant-propos

Mathématiques

Algèbre

1. Compléments sur les groupes	page 11
2. Compléments sur les anneaux	page 14
3. Réduction des endomorphismes	page 20
4. Compléments sur les espaces euclidiens	page 26
Analyse	
5. Fonctions convexes	page 31
6. Topologie des espaces normés	page 34
7. Séries numériques et familles sommables	page 41
8. Suites et séries de fonctions	page 45
9. Séries entières	page 50
10. Fonctions vectorielles	page 55
11. Intégration sur un intervalle quelconque	page 59
12. Équations différentielles linéaires	page 64
13. Calcul différentiel	page 70
Probabilités	
14. Calcul des probabilités	page 77
15. Variables aléatoires discrètes	page 82
16. Espérance et variance	page 86
Corrigés des mathématiques	page 91

Physique

Mécanique

1. Référentiels non galiléens 1 : cinématique	page 131
2. Référentiels non galiléens 2 : dynamique	page 138
3. Complément de mécanique du solide	page 142
Traitement du signal	
4. Traitement des signaux analogiques	page 146
5. Introduction au traitement numérique du signal	page 153
6. Filtrage numérique du signal	page 159
Optique	
7. Modèle scalaire des ondes lumineuses	page 164
8. Sources et détecteurs de lumière	page 172
9. Superposition d'ondes lumineuses	page 179
10. Interférences par division du front d'onde	page 186
11. Interférences par division d'amplitude	page 194
Électrostatique	

12. Distributions de charge et champ électrostatique	page 203
13. Propriétés du champ électrostatique	page 212
14. Dipôles électriques	page 225

Magnétostatique

15. Distributions de charge et champ électrostatique	page 232
16. Propriétés du champ électrostatique	page 243
17. Les équations de Maxwell	page 248
18. Énergie du champ électromagnétique	page 263
19. Le champ électromagnétique dans le vide sans charges ni courants électriques	page 268

20. Propagation du champ électromagnétique dans un plasma	page 275
21. Champ électromagnétique en présence d'un milieu conducteur ohmique	page 281
22. Champ de rayonnement dipolaire	page 291
Thermodynamique	
23. Systèmes ouverts en régime stationnaire	page 300
24. Diffusion thermique	page 307
Physique quantique	
25. Fonctions d'onde et probabilités de présence	page 318
26. Puits, marches et barrières de potentiel	page 328
27. Thermodynamique statistique	page 337
Corrigés de la physique	page 348

7

Chimie

1. Application du premier principe
à la transformation chimiquepage 3792. Application du second principe
à la transformation chimiquepage 389Électrochimiepage 3893. Les courbes intensité-potentielpage 4004. Phénomènes de corrosion humidepage 4115. Les pilespage 4256. Les électrolyseurs et les accumulateurspage 432

Thermochimie

7. Récapitulatif sur les piles et les électrolyseurs	page 442
Corrigés de la chimie	page 443
Index des mathématiques	page 458
Index de la physique	page 461
Index de la chimie	page 464

8

Partie 1 Mathématiques

(4,4)

=Vaxb

 $x \pm a^2$

1-00

n=Q

cosX+tg

<u>30</u>

Copyright © 2014 Dunod

=2x2+3x

h/x(-Vx2)+C



e=2,79

m

Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

1

Mathématicien, astronome et physicien allemand, on le surnomme le prince des mathématiciens. Il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

À côté de lui, vous n'êtes que des enfants !

Copyright © 2014 Dunod.

1. Structure de groupe

1.1 Définitions

• Un ensemble non vide G, muni d'une loi de composition interne *, est un groupe si :

- ➤ la loi est associative ;
- ≻ il existe un élément neutre e;
- > tout élément de G possède un symétrique dans G.

Si, de plus, la loi est commutative, on dit que le groupe est commutatif, ou abélien.

• Dans un groupe, tout élément est régulier (ou simplifiable), c'est-à-dire que l'on a toujours :

 $x*y=x*z \Longrightarrow y=z \quad ; \quad y*x=z*x \Longrightarrow y=z \; .$

Généralement, un groupe est noté additivement ou multiplicativement. Le symétrique x' de x est alors noté -x dans le premier cas, x^{-1} dans le second.

• L'ordre d'un groupe fini est le nombre de ses éléments.

• Un produit fini de groupes est un groupe.

Faites l'exercice 1.

1.2 Sous-groupe

• Une partie stable H d'un groupe G est un sous-groupe de G si la restriction à H de la loi de G y définit une structure de groupe.

• Pour qu'une partie non vide H d'un groupe G soit un sous-groupe de G, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \forall x \in H & \forall y \in H & xy \in H; \\ \forall x \in H & x^{-1} \in H. \end{cases}$$

ou encore :

$$\forall x \in H \qquad \forall y \in H \qquad xy^{-1} \in H \,.$$

• Les sous-groupes du groupe additif $\mathbb Z$ sont les ensembles :

$$n\mathbb{Z} = \{nx \ ; \ x \in \mathbb{Z}\}$$
 où $n \in \mathbb{N}$.

• L'intersection d'une famille de sous-groupes est un sous-groupe de G.

La réunion de deux sous-groupes de G n'est un sous-groupe de G que si l'un est inclus dans l'autre.

2. Morphismes de groupes

2.1 Définitions

Soit G et G' deux groupes notés multiplicativement. Une application f, de G dans G', est un morphisme de groupes si, et seulement si :

 $\forall x \in G$ $\forall y \in G$ f(xy) = f(x) f(y).

12 Mathématiques

Si, de plus, f est bijective, on dit que f est un isomorphisme de groupes. Les deux groupes sont alors isomorphes.

Faites les exercices 2 et 3.

2.2 Exemples

• La signature qui, à toute permutation σ associe $\varepsilon(\sigma)$ est un morphisme du groupe symétrique S_n muni de la loi \circ dans le groupe {-1, 1} muni de la loi \times .

• Le déterminant est un morphisme du groupe $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ dans (\mathbb{K}^*, \times) .

2.3 Composition

Le composé de deux morphismes (resp. isomorphismes) de groupes est un morphisme (resp. isomorphisme) de groupes.

2.4 Images de sous-groupes

Soit G et G' deux groupes notés multiplicativement et f un morphisme de G dans G'. On a :

H sous-groupe de $G \Longrightarrow f(H)$ sous-groupe de G'.

H' sous-groupe de $G' \Longrightarrow f^{-1}(H')$ sous-groupe de G.

2.5 Noyau et image d'un morphisme

Soit G et G' deux groupes notés multiplicativement, d'éléments neutres respectifs e et e', et f un morphisme de G dans G'. On a :

$$e' = f(e)$$
 ; $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$.

• f(G) est un sous-groupe de G' appelé image de f et noté Im f.

• $N = f^{-1}(\{e'\}) = \{x : x \in G, f(x) = e'\}$ est un sous-groupe de G que l'on appelle le noyau du morphisme f. On le note Ker f.

f est injectif si, et seulement si, Ker $f = \{e\}$.

Exemple

Si on considère le morphisme *déterminant* appliqué au groupe orthogonal O(E), son noyau est l'ensemble des matrices orthogonales A telles que det A = 1. Il s'agit donc du groupe spécial orthogonal.

3. Sous-groupe engendré

3.1 Sous-groupe engendré par une partie

• Toute intersection de sous-groupes de G est un sous-groupe de G.

• L'intersection de la famille des sous-groupes de *G* contenant une partie *A* donnée est un sous-groupe de *G* appelé sous-groupe engendré par *A*.

C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-groupe contenant A.

• Le sous-groupe engendré par A est l'ensemble des composés d'éléments de A et d'inverses d'éléments de A.

3.2 Groupe monogène

• Si un groupe G est engendré par un seul élément a, il est dit monogène. On dit que a est un générateur de G.

• Le groupe G est alors commutatif. Il est de la forme :

 $G = \{pa : p \in \mathbb{Z}\}$ en notation additive,

 $G = \{a^p : p \in \mathbb{Z}\}$ en notation multiplicative.

• L'application, de \mathbb{Z} dans $G, p \mapsto pa$ en notation additive,

 $p \mapsto a^p$ en notation multiplicative, est un morphisme de groupes.

3.3 Groupe cyclique

Tout groupe monogène est isomorphe :

> à (Z, +) s'il est infini,

➤ à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ s'il est d'ordre *n*, ou à (U_n, \times) (groupe des racines n^e de l'unité).

Dans ce cas, on dit que G est un **groupe cyclique** d'ordre n.

Les générateurs de U_n sont les nombres complexes $u_k = (u_1)^k$ tels que k soit premier avec n.

3.4 Théorème de Lagrange

Dans un groupe fini, l'ordre de tout sous-groupe est un diviseur de l'ordre du groupe.

3.5 Ordre d'un élément

• Dans un groupe, on appelle ordre d'un élément x l'ordre du sous-groupe engendré par cet élément. Si le sous-groupe engendré est infini, on dit que x est d'ordre infini.

• Si x est d'ordre fini d et si e désigne l'élément neutre de G, alors :

 $\forall n \in \mathbb{Z} \qquad x^n = e \Longleftrightarrow d|n$

• L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.

Faites l'exercice 4.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Montrez qu'un groupe non commutatif contient au moins 6 éléments distincts.

Exercice 2 : Montrez que \mathbb{R} muni de la loi * définie par :

$$x * y = \sqrt[2015]{x^{2015} + y^{2015}}$$

est isomorphe à \mathbb{R} muni de l'addition.

Exercice 3 : Montrez que $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}^2, +)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 4: Montrez que tout groupe *G* d'ordre premier est cyclique.

1. Structure d'anneau

1.1 Définitions

• Anneau

Un ensemble A, muni d'une loi notée + (dite addition) et d'une loi notée \times (dite multiplication), possède une structure d'anneau pour ces opérations si :

➤ A possède une structure de groupe commutatif pour l'addition ;

- > la multiplication est associative et possède un élément neutre 1_A ;
- > la multiplication est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition.

Si la multiplication est commutative, l'anneau est dit commutatif.

Sous-anneau

On dit qu'une partie *B* d'un anneau *A*, stable pour + et \times , est un sous-anneau de *A*, si la restriction à *B* des deux lois de *A* y définit une structure d'anneau, avec le même élément neutre pour \times que dans *A*.

Pour qu'une partie *B* d'un anneau *A* soit un sous-anneau de *A*, il faut et il suffit que $1_A \in B$ et :

 $\forall x \in B \quad \forall y \in B \qquad x - y \in B \quad \text{et} \quad xy \in B \,.$

1.2 Morphismes d'anneaux

Définitions

A et B étant deux anneaux, une application f, de A dans B, est un morphisme d'anneaux si l'on a toujours :

f(x + y) = f(x) + f(y); f(xy) = f(x) f(y); $f(1_A) = 1_B$.

Vocabulaire

Un morphisme f de A dans B est

- > un isomorphisme si f est bijectif,
- ➤ un endomorphisme si A = B,
- > un automorphisme si A = B et f bijectif.

• Noyau et image d'un morphisme

> f(A) est un sous-anneau de *B* appelé image de *f* et noté Im *f*.

 $\succ N = f^{-1}(\{0_B\}) = \{x : x \in A, f(x) = 0_B\}$ est un sous-anneau de A que l'on appelle le noyau du morphisme f. On le note Ker f.

f est injectif si, et seulement si, Ker $f = \{0_A\}$.

1.3 Anneau intègre

Définition

Lorsqu'il existe, dans un anneau, des éléments a et b tels que :

 $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et ab = 0,

on dit que a et b sont des diviseurs de zéro.

Un anneau intègre est un anneau commutatif, non réduit à {0}, et sans diviseur de zéro.

Pour qu'un anneau commutatif, non réduit à {0}, soit intègre, il faut et il suffit que tout élément non nul soit simplifiable pour la multiplication.

Faites l'exercice 1.

1.4 Corps et sous-corps

• Un corps est un anneau non réduit à {0} dont tous les éléments, sauf 0, sont inversibles. On le suppose commutatif.

• On dit qu'une partie L d'un corps \mathbb{K} , stable pour + et \times , est un sous-corps de \mathbb{K} , si la restriction à L des deux lois de \mathbb{K} y définit une structure de corps, c'est-à-dire si c'est un sous-anneau, et si l'inverse d'un élément non nul de L reste dans L.

2. Idéaux d'un anneau commutatif

2.1 Définition et exemples

• Soit A un anneau commutatif. Une partie I de A est un idéal si I est un sous-groupe de (A, +) et si, pour tout $x \in I$ et tout $a \in A$, on a $xa \in I$.

• L'intersection $I \cap J$ et la somme I + J de deux idéaux sont des idéaux.

• Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.

Faites l'exercice 2.

2.2 Divisibilité dans un anneau commutatif intègre

• Idéaux de $\mathbb Z$

Les idéaux de \mathbb{Z} sont de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

• Divisibilité

Soit A un anneau commutatif intègre. On dit que a divise b, et on note a|b, si :

 $a|b \iff [\exists c \in A \quad b = ac] \iff bA \subset aA.$

3. Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

3.1 Congruences dans \mathbb{Z}

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation binaire dans \mathbb{Z} :

 $a \mathcal{R} b \iff a \text{ et } b$ ont le même reste dans la division par n

$$\iff n/(a-b)$$

est une relation d'équivalence.

On la note $a \equiv b \pmod{n}$; lire : $a \operatorname{congru} a b \mod n$.

On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence

$$\overline{a} = \{ b \in \mathbb{Z} \ ; a \equiv b \pmod{n} \}.$$

3.2 Propriétés algébriques de Z/nZ

Structure

Pour $n \ge 2$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni des deux lois :

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$$
; $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{a \times b}$

est un anneau commutatif.

Éléments inversibles

Un élément \overline{a} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible si, et seulement si, *a* et *n* sont premiers entre eux.

Cas particulier

 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si, et seulement si, *n* est premier.

3.3 Indicatrice d'Euler

Définition

C'est le nombre $\varphi(n)$ des entiers compris entre 1 et *n* et premiers avec *n*.

Cas particulier

Si *n* est premier, alors $\varphi(n) = n - 1$.

• Calcul de $\varphi(n)$

À partir de la décomposition en facteurs premiers de n : $n = \prod_{i=1}^{n} p_i^{k_i}$, on obtient :

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} (p_i - 1) p_i^{k_i - 1} = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i} \right).$$

Propriété

 $\varphi(n)$ est l'ordre du groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

• Théorème d'Euler

Si *a* et *n* sont premiers entre eux avec $n \ge 2$, on a :

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

En cryptologie, le code RSA se fonde sur le théorème d'Euler.

Faites les exercices 3 et 4.

3.4 Autres théorèmes

• Théorème chinois

➤ Premier énoncé

Si *m* et *n* sont premiers entre eux, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Application aux systèmes de congruences

Soit p et q des entiers premiers entre eux. Pour tous entiers a et b, le système d'inconnue x :

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{p} \\ x \equiv b \pmod{q} \end{cases}$$

admet des solutions entières.

Les chinois de la Haute Antiquité utilisaient ce théorème en astronomie, d'où son nom.

Petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier. Pour tout entier a, on a :

 $a^p \equiv a \pmod{p}$.

4. L'anneau $\mathbb{K}[X]$

On suppose ici que \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{C} .

4.1 Idéaux de $\mathbb{K}[X]$

 $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal, c'est-à-dire que tout idéal est principal.

Cela signifie que, si *I* est un idéal non réduit à $\{0\}$, il existe un polynôme unitaire unique *P* tel que $I = P \mathbb{K}[X]$. On dit que *P* engendre *I*.

4.2 pgcd

Définition

Soit A et B deux polynômes non nuls de K[X]. L'ensemble des polynômes unitaires qui divisent à la fois A et B admet un plus grand élément pour la relation d'ordre associée à la divisibilité.

C'est le plus grand commun diviseur de A et de B. On le note PGCD (A, B), ou $A \wedge B$.

Il s'agit du générateur unitaire de l'idéal $A \mathbb{K}[X] + B \mathbb{K}[X]$.

• Algorithme d'Euclide

Si Q_1 et R_1 sont le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B, on a :

$$A \wedge B = B \wedge R_1 \; .$$

On recommence avec B et R_1 . Le dernier reste non nul (normalisé) de ce processus est le PGCD de A et de B.

Polynômes premiers entre eux

Si PGCD (A, B) = 1, on dit que A et B sont premiers entre eux.

4.3 ppcm

Définition

Soit *A* et *B* deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. L'ensemble des polynômes unitaires qui sont multiples à la fois de *A* et de *B* admet un plus petit élément pour la relation d'ordre associée à la divisibilité.

C'est le plus petit commun multiple de A et de B. On le note PPCM (A, B), ou $A \vee B$.

Il s'agit du générateur unitaire de l'idéal $A \mathbb{K}[X] \cap B \mathbb{K}[X]$.

Théorème

Si A et B sont unitaires, on a :

$$PGCD(A, B) \times PPCM(A, B) = A B.$$

4.4 Théorèmes

Théorème de Bézout

Pour que deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$ soient premiers entre eux, il faut et il suffit qu'il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$A U + B V = 1.$$

Si *A* et *B* sont premiers entre eux et non tous deux constants, il existe des polynômes U_0 et V_0 de $\mathbb{K}[X]$ uniques tels que :

 $A U_0 + B V_0 = 1$ avec $d^{\circ} U_0 < d^{\circ} B$ et $d^{\circ} V_0 < d^{\circ} A$.

• Théorème de Gauss

Si A, B et C sont trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que A divise BC, et A premier avec B, alors A divise C.

4.5 Décomposition d'un polynôme

• Tout polynôme de degré ≥ 1 se factorise en un produit d'un élément de \mathbb{K}^* et de polynômes irréductibles unitaires.

Cette décomposition est unique, à l'ordre près.

• Dans C[X], les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.

Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1, et les polynômes $aX^2 + bX + c$ avec $b^2 - 4ac < 0$.

• Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on peut le considérer dans $\mathbb{C}[X]$, et si α est un zéro non réel de P, alors P admet aussi le conjugué $\overline{\alpha}$ pour zéro, avec le même ordre de multiplicité que α .

Faites l'exercice 5.

5. Structure d'algèbre

5.1 Définition

On dit qu'un ensemble E est une algèbre sur un corps K, ou K-algèbre, s'il est muni de deux lois internes, notées + et \times , et d'une loi externe sur K, notée . , avec les propriétés :

- (E, +, .) est un K-espace vectoriel,
- $(E, +, \times)$ est un anneau.
- $\forall \lambda \in K \quad \forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y).$

 $\mathbb{K}[X], \mathcal{L}, \mathcal{M}(\mathbb{K}) \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ sont des algèbres sur \mathbb{K} .

5.2 Sous-algèbre

Une partie d'une algèbre, stable pour les trois lois, est une sous-algèbre si elle possède une structure d'algèbre pour la restriction des lois de l'algèbre, c'est-à-dire si c'est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau.

5.3 Morphisme d'algèbre

E et F étant deux algèbres, une application f, de E dans F, est un morphisme d'algèbre si elle transporte les trois lois, c'est-à-dire si l'on a toujours :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad ; \quad f(xy) = f(x)f(y) \quad ; \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

et si $f(1_E) = 1_F$.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Soit x un élément d'un anneau intègre A. Démontrez que si x est inversible à droite, alors x est inversible à gauche.

Exercice 2 : Soit *A* un anneau commutatif et *I* un idéal de *A*. On appelle radical de *I*, et on note \sqrt{I} , l'ensemble des $x \in A$ pour lesquels il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \in I$.

Démontrez que \sqrt{I} est un idéal de A.

Exercice 3: Combien y a-t-il d'éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/4725\mathbb{Z}$?

Exercice 4 : Montrez que, pour tout entier $n \ge 3$, $\varphi(n)$ est un nombre pair.

Exercice 5 : Soit $P = X^4 - 4X^3 + 16X - 16$. Déterminez le PGCD de *P* et de *P'*. Déduisez-en la factorisation de *P* en polynômes irréductibles.

1. Éléments propres

Soit *E* un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1.1 Généralités

• Un sous-espace F de E est stable par u quand $u(F) \subset F$.

En restreignant à la fois le départ et l'arrivée, on définit l'endomorphisme induit :

$$u_F \left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array} \right.$$

• Soit F un sous-espace et considérons une base adaptée à F, c'est-à-dire une base de F complétée pour avoir une base de E.

La matrice de *u* dans une telle base peut s'écrire par blocs : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, F est stable par u si, et seulement si, C = 0. La matrice de l'endomorphisme induit u_F est alors A.

Un sous-espace stable ne possède pas toujours de supplémentaire stable.

• Si *u* et *v* commutent, le noyau et l'image de *u* sont stables par *v*.

Faites l'exercice 1.

1.2 Éléments propres d'un endomorphisme

• Un vecteur non nul $x \in E$ est un vecteur propre de u s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Le scalaire λ est la valeur propre associée à x.

• Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de *u* s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Le vecteur *x* est un vecteur propre associé à λ .

• L'ensemble $E_{\lambda} = \{x \in E ; u(x) = \lambda x\} = \text{Ker} (u - \lambda \text{Id}_E)$ est le sous-espace propre associé à λ .

• Si E est de dimension finie, le spectre de u est l'ensemble $S_p(u)$ des valeurs propres de u.

1.3 Éléments propres d'une matrice carrée

• Une matrice colonne non nulle X est un vecteur propre de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$. Le scalaire λ est la valeur propre associée à X.

• Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de *A* s'il existe une matrice colonne non nulle *X* telle que $AX = \lambda X$. Le vecteur colonne *X* est un vecteur propre associé à λ .

- L'ensemble $E_{\lambda} = \{X ; AX = \lambda X\}$ est le sous-espace propre associé à λ .
- Le spectre de A est l'ensemble $S_p(A)$ des valeurs propres de A.

1.4 Propriétés

• λ est une valeur propre de u si, et seulement si, Ker $(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{0\}$.

En particulier, 0 est valeur propre de u si, et seulement si, Ker $u \neq \{0\}$, soit u non injectif.

- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres toutes distinctes, est libre.
- La somme de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.

Attention, en général $E \neq \bigoplus_{k} E_{\lambda_k}$. Par exemple, si $u^2 = 0$ avec $u \neq 0$, alors 0 est la seule valeur propre possible et pourtant $E \neq \text{Ker } u$.

• Si deux endomorphismes *u* et *v* commutent, tout sous-espace propre pour l'un est stable par l'autre.

1.5 Polynôme caractéristique

Soit E de dimension finie et A une matrice carrée représentant un endomorphisme u dans une base fixée.

Définitions

Le polynôme $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ est le polynôme caractéristique de A.

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, ce qui permet de définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

Les zéros de χ_A sont les valeurs propres de A. Si λ est racine d'ordre m_{λ} de χ_A , on dit que λ est valeur propre d'ordre m_{λ} .

On a toujours $1 \le m_{\lambda} \le \dim(E_{\lambda})$ où E_{λ} est l'espace propre associé.

• Cas où χ_A est scindé

On a alors :

tr
$$A = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$
 et $\det A = (-)^n \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$.

• Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit u_F divise le polynôme caractéristique de u.

Faites l'exercice 2.

2. Diagonalisation

Soit E de dimension finie.

2.1 Définitions

• Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de *E* dans laquelle la matrice de *u* est diagonale, c'est-à-dire s'il existe une base de *E* formée de vecteurs propres de *u*.

• Une matrice carrée A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale D,

c'est-à-dire si elle s'écrit :

$$A = PDP^{-1}$$

où P est la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{K}^n à une base de vecteurs propres de A.

2.2 Condition suffisante

Si dim E = n et si u a n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

2.3 Conditions nécessaires et suffisantes

u diagonalisable

 \iff *E* est somme directe des sous-espaces propres ;

 $\iff E$ admet une base de vecteurs propres ;

 \iff le polynôme caractéristique de *u* est scindé et, pour toute valeur propre λ_k d'ordre m_k , on a :

 $\dim(E_{\lambda_k})=m_k.$

2.4 Application au calcul de A^m

Si A est diagonalisable, il existe une matrice de passage P telle que $A = PDP^{-1}$. On a alors $A^m = PD^mP^{-1}$.

Et si $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ alors $D^m = \text{diag}(\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m)$.

3. Trigonalisation

3.1 Définition

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable s'il existe une base de *E* dans laquelle la matrice de *u* est triangulaire supérieure.

Une matrice carrée A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

3.2 Théorème

Un endomorphisme u est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.

En particulier, tout endomorphisme est trigonalisable sur \mathbb{C} .

Les éléments diagonaux de la matrice triangulaire représentant u sont les valeurs propres de u.

3.3 Endomorphismes nilpotents

- Un endomorphisme *u* est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$.
- Le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de l'endomorphisme u.

Cet indice est majoré par la dimension de E.

• Les définitions sont analogues pour les matrices.

4. Polynôme d'un endomorphisme

4.1 Définition

Étant donnés un endomorphisme u d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E et un polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$ à coefficients dans \mathbb{K} , on note P(u) l'endomorphisme de E défini par :

 $P(u) = a_0 \operatorname{Id}_E + a_1 u + \dots + a_p u^p.$

N'oubliez pas le terme Id_E .

4.2 Propriétés algébriques

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

 $(P+Q)(u) = P(u) + Q(u) \quad ; \quad (\lambda P)(u) = \lambda P(u) \quad ; \quad$

 $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) .$

Cette dernière relation entraîne que tous les polynômes d'un même endomorphisme commutent entre eux.

On peut dire aussi que, pour *u* donné, l'application $P \mapsto P(u)$ est un morphisme de l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

Ce morphisme n'est pas surjectif puisque $\mathcal{L}(E)$ n'est pas commutatif.

4.3 Stabilité

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, Im P(u) et Ker P(u) sont stables par u.

4.4 Propriété des valeurs propres

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, si λ est une valeur propre de u, alors $\mathbb{P}(\lambda)$ est une valeur propre de P(u).

4.5 Théorème de décomposition des noyaux

Soit P_1, \ldots, P_r des éléments de $\mathbb{K}[X]$, deux à deux premiers entre eux, de produit égal à P, alors :

$$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_{i}(u)).$$

5 Polynôme annulateur

5.1 Définition

On dit que *P* est un polynôme annulateur de $u ext{ si } P(u) = 0$.

5.2 Polynôme minimal

• L'ensemble des polynômes annulateurs de u, c'est-à-dire le noyau du morphisme :

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto & P(u) \end{array}$$

est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. L'unique polynôme normalisé qui engendre cet idéal est le polynôme minimal de u.

24 Mathématiques

- Ce morphisme a pour image la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$.
- Si *d* est le degré du polynôme minimal, alors la famille $(u^k)_{0 \le k \le d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

5.3 Polynôme annulateur et diagonalisabilité

u est diagonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme scindé, annulateur de u, dont toutes les racines sont simples.

5.4 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème

Si E est de dimension finie, le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u.

Le polynôme minimal de *u* divise donc le polynôme caractéristique de *u*.

• Application au calcul de A^m

Si P est un polynôme annulateur de A, la division euclidienne

$$X^m = P(X) Q_m(X) + R_m(X)$$

entraîne $A^m = R_m(A)$.

Cette méthode reste valable même si A n'est pas diagonalisable.

5.5 Endomorphisme à polynôme minimal scindé

S'il existe un polynôme scindé annulant u, on peut décomposer E en somme directe de sousespaces stables par u et tels que, sur chacun, u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.



Faites les exercices 3, 4, 5 et 6.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Soit *E* un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0$.

1. Montrez que l'endomorphisme v induit par u sur Im (u) est un isomorphisme.

2. Démontrez que la dimension de Im(u) est paire.

Exercice 2: Soit *E* un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, *f* et *g* dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = g$.

1. Montrez que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad f \circ g^k - g^k \circ f = kg^k$$

2. En considérant l'application :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_f : & \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ & h & \mapsto & f \circ h - h \circ f \end{array}$$

démontrez qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^p = 0$.

Exercice 3 : Soit *E* un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et f_1 , f_2 , f_3 trois endomorphismes de *E* vérifiant :

 $f_1 + f_2 + f_3 = \text{Id}_E$ et $f_i \circ f_j = 0$ pour tous $i \neq j$

Montrez que $g = f_1 + f_2 - 2f_3$ est diagonalisable.

Exercice 4 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$. Démontrez que det A > 0.

Exercice 5: Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminez A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 : Soit *E* un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension *n* et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable. Montrez que l'endomorphisme φ :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ g & \mapsto & \varphi(g) = f \circ g \end{array}$$

est diagonalisable.

4 Compléments sur les espaces euclidiens

Revoir **Toute la MPSI en fiches**, fiche 34 (espaces préhilbertiens réels) et fiche 35 (isométries vectorielles) de la partie mathématiques.

1. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

1.1 Supplémentaire orthogonal

Deux sous-espaces vectoriels F et G sont dits supplémentaires orthogonaux s'ils sont supplémentaires et si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G. On note :

$$E = F \oplus \overline{G}.$$

1.2 Projection orthogonale

• Dans l'hypothèse précédente, le projecteur sur F parallèlement à G s'appelle projecteur orthogonal p_F sur F.

• Si (e_1, \ldots, e_p) est une base orthonormale de F, on a :

$$\forall x \in E$$
 $p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle e_i | x \rangle e_i.$

Cette expression simple du projeté orthogonal n'est vraie qu'en considérant une base orthonormale de F.

1.3 Distance d'un vecteur à un sous-espace

Définition

La distance d'un élément x de E au sous-espace de dimension finie F est le nombre :

$$d(x,F) = \inf_{z \in F} ||x - z||.$$

Théorème

d(x, F) est un minimum atteint en un point, et un seul, $z = p_F(x)$, et l'on a :

$$||x||^2 = ||p_F(x)||^2 + d(x, F)^2.$$

Il est important que F soit de dimension finie.

Inégalité de Bessel

Si (e_1, \ldots, e_p) est une base orthonormale de F, on a :

$$\forall x \in E$$
 $\sum_{j=1}^{p} < e_j \mid x >^2 \leq ||x||^2$.



Faites l'exercice 1.

2. Suites orthonormales de vecteurs

2.1 Suites totales

Soit E un espace préhilbertien réel. Une partie F de E est dite totale si l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de F est dense dans E.

Si $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite totale d'éléments de *E*, tout vecteur de *E* est limite d'une combinaison linéaire (finie) de vecteurs de cette suite. Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une combinaison linéaire finie $\sum_{j} \alpha_{j} e_{j}$ telle que :

$$\left\| x - \sum_{j} \alpha_{j} \, e_{j} \, \right\| < \varepsilon$$

🖄 Pour monter qu'une famille est totale, on montre que son orthogonal est réduit au vecteur nul, soit :

 $[\forall k \in \mathbb{N} \quad \langle e_k \mid x \rangle = 0] \Longrightarrow [x = 0]$

2.2 Exemples de polynômes orthogonaux

Polynômes de Legendre P_n

Soit E l'ensemble des fonctions de carré sommable sur [-1; 1] muni du produit scalaire :

$$< f \mid g > = \int_{-1}^{1} f(x)g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Les polynômes de Legendre P_n sont définis par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

Ils constituent une suite totale orthogonale. Sachant que $\langle P_n | P_n \rangle = \frac{2}{2n+1}$ il reste à diviser P_n par $||P_n||$ pour obtenir une suite totale orthonormale.

 Pour plus d'informations sur les propriétés des polynômes de Legendre, d'Hermite, de Laguerre, de Tchebychev, de Jacobi (sources d'écrits), voir

Daniel Fredon, Michel Bridier Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur, Dunod.

2.3 Suite de projecteurs

Si $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale d'éléments de E, et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n désigne le projecteur orthogonal de E sur Vect (e_0, \ldots, e_n) , alors, pour tout $x \in E$, $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x.

3. Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

3.1 Définition

 $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si :

1

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad < u(x) \mid y > = < x \mid u(y) >$$

Attention à ne pas confondre endomorphisme symétrique et symétrie.

3.2 Lien avec les matrices et exemples

• Si A est la matrice de u dans une base orthonormale \mathcal{B} , on a

u symétrique $\iff {}^{t}A = A$.

• Un projecteur p (c'est-à-dire p linéaire et $p^2 = p$) est un endomorphisme symétrique si, et seulement si, c'est un projecteur orthogonal, c'est-à-dire que Ker p et Im p sont supplémentaires orthogonaux.

• Une symétrie s (c'est-à-dire s linéaire et $s^2 = Id_E$) est un endomorphisme symétrique si, et seulement si, c'est une symétrie orthogonale, c'est-à-dire que $F = \{x : s(x) = x\}$ et $G = \{x : s(x) = -x\}$ sont supplémentaires orthogonaux.

3.3 Diagonalisation des endomorphismes symétriques

Soit *u* un endomorphisme symétrique de *E*.

- Le polynôme caractéristique de u est scindé sur \mathbb{R} .
- *u* est diagonalisable dans une base orthonormale.
- E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u.

• Corollaire

Si A est une matrice carrée symétrique, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que :

$$A = PDP^{-1} = PD^t P;$$

Le calcul de P^{-1} est immédiat puisque $P^{-1} = {}^{t}P$.

Faites l'exercice 2.

4. Isométries vectorielles d'un espace euclidien

4.1 Définitions et caractérisations

Définition

Dans un espace vectoriel euclidien E, un endomorphisme u est une isométrie vectorielle si u conserve la norme, soit :

 $\forall x \in E \qquad ||u(x)|| = ||x|| \qquad (1)$

Conditions équivalentes

 $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si, et seulement si, il vérifie l'une des conditions suivantes :

(2) u conserve le produit scalaire, soit :

 $\forall x \in E \qquad \forall y \in E \qquad < u(x) \mid u(y) > = < x \mid y > .$

On dit aussi que *u* est un automorphisme orthogonal.

- (3) il existe une base orthonormale \mathcal{B} telle que $u(\mathcal{B})$ soit une base orthonormale ;
- (4) pour toute base orthonormale \mathcal{B} , $u(\mathcal{B})$ est une base orthonormale.

Exemples

Les symétries orthogonales et les réflexions sont des automorphismes orthogonaux.

Mais une projection orthogonale distincte de l'identité n'en est pas un ;

si $x \in \text{Ker } p$ avec $x \neq 0$, on a ||p(x)|| < ||x||.

4.2 Matrices orthogonales

Définition

Une matrice carrée A est dite orthogonale si c'est la matrice de passage d'une base orthonormale \mathcal{B} à une base orthonormale \mathcal{B}' .

• Conditions équivalentes

> Une matrice carrée est orthogonale si, et seulement si, ses vecteurs colonnes vérifient :

$$\forall i \quad \forall j \qquad < C_i \mid C_j > = \delta_{ij}.$$

> Une matrice carrée d'ordre n est orthogonale si, et seulement si :

$${}^{t}AA = I_n \iff {}^{t}A = A^{-1}.$$

• Lien avec les endomorphismes

Soit \mathcal{B} une base orthonormale d'un espace euclidien E et A la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans \mathcal{B} . On a :

A orthogonale $\iff u$ isométrie

• Déterminant d'une matrice orthogonale

Si A est une matrice orthogonale, on a det $A = \pm 1$.

Attention, la condition est nécessaire mais non suffisante.

Faites les exercices 3 et 4.

4.3 Réduction d'une isométrie

Les seules valeurs propres réelles possibles d'une isométrie sont 1 et -1.

4.4 Rotations en dimension 3

Soit u un endomorphisme de E de dimension 3, et A sa matrice dans une base orthonormale.

• On montre que u est une isométrie, c'est-à-dire que A est orthogonale.

• On montre que det u = 1, c'est-à-dire que det A = 1.

Si u n'est pas l'identité, c'est alors une rotation de E.

L'axe de la rotation est la droite constituée par les vecteurs invariants par u

 $V = \operatorname{Ker}\left(u - \operatorname{Id}_{E}\right),$

Si on oriente l'axe et si on note son angle θ , sa matrice dans une base adaptée orthonormale *directe*, est :

$$\left(\begin{array}{ccc}
\cos\theta & -\sin\theta & 0\\
\sin\theta & \cos\theta & 0\\
0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

⁽¹⁾ L'angle θ est déterminé au signe près par : tr $A = 1 + 2\cos\theta$.

Faites l'exercice 5.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Déterminez : $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (\ln x - ax - b)^2 dx.$

Exercice 2: Soit *A* une matrice symétrique réelle d'ordre *n*. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrez que :

$$\sum_{i,j} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

Exercice 3: Soit
$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$
 telle que $\sum_{i=1}^n u_i^2 = 1$.

Montrez que la matrice $A = I_n - 2U^t U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale. Identifiez l'automorphisme de \mathbb{R}^n qu'elle définit.

Exercice 4 : Soit $S = (a_{ij})$ une matrice orthogonale réelle d'ordre *n*. Montrez que :

$$\left|\sum_{ij}a_{ij}\right|\leqslant n.$$

Exercice 5 : $E = \mathbb{R}^3$ étant rapporté à sa base canonique orthonormale, étudiez $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice est :

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 1 & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

1. Partie convexe d'un espace vectoriel réel

1.1 Barycentre

Soit A_1, \ldots, A_n des points de *E* et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels avec $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$.

Le barycentre du système des points pondérés $\{(A_i, \alpha_i); 1 \le i \le n\}$ est l'unique point G tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}.$$

On a alors, pour tout point P :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{PA_i} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\Big)\overrightarrow{PG}$$

1.2 Parties convexes

Segment

M et N étant des points distincts de E, le segment d'extrémités M et N est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de M et N, soit :

 $[MN] = \{\lambda M + (1 - \lambda)N \ ; \lambda \in [0, 1]\}.$

Partie convexe

Une partie A de E est convexe si, pour tout $(M, N) \in A^2$, le segment [MN] est inclus dans A.

2. Fonctions convexes d'une variable réelle

2.1 Définition

Une fonction f, définie sur un intervalle I, est **convexe** sur I si la partie du plan située audessus de la courbe (appelée épigraphe) est convexe; c'est-à-dire si tout arc de sa courbe représentative est situé au-dessous de la corde correspondante. Cette définition se traduit par :

 $\forall x_1 \in I \ \forall x_2 \in I \ \forall k \in [0,1] \quad f[kx_1 + (1-k)x_2] \leq kf(x_1) + (1-k)f(x_2) \,.$

Si -f est convexe, f est dite concave.

2.2 Inégalité de convexité

f étant convexe sur I, si x_1, \ldots, x_n appartiennent à I, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels positifs tels

que
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$
, alors :

$$f\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

2.3 Propriété des sécantes

Soit f une fonction convexe sur I, et x_0 un point fixé dans I. La fonction φ définie sur I par :

$$\varphi(x) = \text{pente}(M_0 M) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est croissante.

3. Fonctions convexes dérivables

- Soit f une fonction dérivable sur I. f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante.
- Si f est deux fois dérivable, cela correspond à f'' positive.
- Le graphique de toute fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes.

^(S) La convexité donne des inégalités globales : courbe au-dessous d'une corde sur un segment, courbe entièrement au-dessus de toute tangente.

Faites les exercices 1, 2, 3, 4 et 5.

4. Inégalités dues à la convexité

Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels positifs ; p > 0, q > 0 avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

4.1 Inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i} b_{i} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{i}^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Si p = q = 2, il s'agit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

4.2 Inégalité de Minkowski

$$\Big[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\Big]^{\frac{1}{p}} \leq \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big]^{\frac{1}{p}} + \Big[\sum_{i=1}^{n} b_i^p\Big]^{\frac{1}{p}}$$

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Démontrez l'encadrement :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \qquad \qquad \frac{2}{\pi} x \le \sin x \le x$$

Exercice 2 : Soit E un espace normé réel. Montrez que toute boule ouverte de E est une partie convexe.

Exercice 3: Soit f et g deux applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que f est convexe et que g est convexe et croissante.

Montrez que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 4 : Soit $\alpha > 1$. Montrez que, quels que soient les réels strictement positifs x_1, \ldots, x_n , on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{\alpha} \leq n^{\alpha-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\alpha}\right).$$

Exercice 5 : *a*, *b*, *x* et *y* étant des réels strictement positifs quelconques, montrez que :

$$x\ln\left(\frac{x}{a}\right) + y\ln\left(\frac{y}{b}\right) \ge (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right).$$

1. Normes

1.1 Définition

Soit *E* un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Une norme sur *E* est une application *N* de *E* dans \mathbb{R} qui vérifie :

- (1) $\forall x \in E$ $N(x) \ge 0$ et $N(x) = 0 \implies x = 0;$
- (2) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x);$
- (3) $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y).$

Le couple (E, N) est appelé espace vectoriel normé. On écrit souvent N(x) = ||x||.

1.2 Exemples

1 $E = \mathbb{R}^n$; pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, on définit :

$$N_1(x) = |x_1| + \dots + |x_n|$$
$$N_2(x) = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$
$$N_{\infty}(x) = \sup \{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

② $E = C([a, b], \mathbb{R})$ étant l'espace vectoriel des fonctions continues sur [a, b] et à valeurs dans \mathbb{R} , pour *f* ∈ *E* on pose :

$$N_1(f) = \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t \quad ; \ N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2} \, \mathrm{d}t.$$

 N_1 est la norme de la **convergence en moyenne**, N_2 la norme de la **convergence en moyenne** quadratique.

3 *E* étant muni d'un produit scalaire, $N(x) = \sqrt{(x|x)}$ définit une norme appelée norme euclidienne. Les normes N_2 des exemples **1** et **2** sont des normes euclidiennes.

 $\mathbf{O} E = \mathcal{B}(A, F)$ étant l'espace vectoriel des fonctions bornées définies sur un ensemble A et à valeurs dans un espace vectoriel normé F, on pose :

$$N_{\infty}(f) = \sup_{t \in A} ||f(t)||$$

où || || désigne la norme dans F.

 N_{∞} est la norme de la **convergence uniforme**.

6 Si $(E_1, N_1), \ldots, (E_p, N_p)$ sont des espaces vectoriels normés, on définit une norme sur le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_p$ en posant :

$$N(u_1,\ldots,u_p)=\sup_{1\leqslant i\leqslant p}N_i(u_i).$$

2. Distance associée à une norme

2.1 Définition et propriétés

• La distance entre deux éléments x et y de E est :

$$d(x, y) = ||y - x||.$$

• Propriétés d'une distance

 $\begin{aligned} \forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad d(x, y) \ge 0; \\ \forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad d(x, y) = 0 \iff x = y; \\ \forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad d(x, y) = d(y, x); \\ \forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \qquad d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$

• La distance entre deux parties A et B non vides de E est :

 $d(A, B) = \inf\{d(x, y) ; x \in A, y \in B\}.$

• Le diamètre d'une partie non vide A est :

diam $A = \sup\{d(x, y) ; x \in A, y \in A\}.$

Si diam A est fini, A est dite bornée .

Une application f définie sur un ensemble D et à valeurs dans E est dite bornée si f(D) est une partie bornée de E.

2.2 Boules

• La boule ouverte de centre a et de rayon r > 0 est :

 $B(a, r) = \{ x \in E \ ; \|x - a\| < r \}.$

• La boule fermée de centre a et de rayon r > 0 est :

 $B^*(a, r) = \{ x \in E \ ; \, ||x - a|| \le r \}.$

3. Suites d'éléments

3.1 Convergence

La définition est analogue au cas des suites dans \mathbb{R} (cf. § 6).

La suite (u_n) est convergente vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_0 \quad ||u_n - l|| < \varepsilon \,.$$

Une suite qui n'est pas convergente est divergente.

Beaucoup de théorèmes sur les suites numériques se généralisent : unicité de la limite, opérations algébriques, théorème de Bolzano-Weierstrass (en dimension finie) ...

Ne généralisez pas les notions qui utilisent la relation \leq comme : limites infinies, suites monotones, théorème d'encadrement.

3.2 Normes équivalentes

• Soit N et N' deux normes sur E. On dit qu'elles sont équivalentes si toute suite qui converge vers l pour une norme, converge aussi vers l pour l'autre norme.

• Pour ceci, il faut, et il suffit, qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

 $\forall x \in E \qquad \alpha \, N'(x) \leq N(x) \leq \beta \, N'(x).$

Pour montrer que N et N' sont équivalentes, montrez que les fonctions $\frac{N'}{N}$ et $\frac{N}{N'}$ sont bornées sur $E \setminus \{0\}$.

Pour montrer qu'elles ne sont pas équivalentes, montrez que l'un de ces quotients n'est pas borné.

3.3 Cas d'un espace vectoriel de dimension finie

Dans un espace vectoriel de dimension finie, deux normes quelconques sont toujours équivalentes.

4. Topologie d'un espace vectoriel normé

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

4.1 Voisinages d'un point

Une partie V est un voisinage de $a \in E$ s'il existe une boule ouverte centrée en a et incluse dans V.

4.2 Ouverts de E

• Une partie A de E est ouverte (ou est un ouvert) si elle est au voisinage de chacun de ses points, ce qui s'écrit :

 $\forall a \in A \qquad \exists r_a > 0 \qquad B(a, r_a) \subset A.$

Deux normes équivalentes définissent les mêmes ouverts.

• Un point a est un point intérieur de A si A est un voisinage de a.

L'ensemble des points intérieurs de A est l'intérieur A de A. On a $A \subset A$.

• Une partie A est ouverte si, et seulement si, A = A.

• La réunion d'une famille quelconque d'ouverts, l'intersection d'une famille finie d'ouverts sont des ouverts.

4.3 Fermés de E

- Une partie A est fermée (ou est un fermé) si son complémentaire est un ouvert.
- *a* est un point adhérent à *A* si toute boule B(a, r) avec r > 0 contient un point de *A*. L'ensemble des points adhérents à *A* est l'adhérence \overline{A} de *A*. On a $A \subset \overline{A}$.

Si $\overline{A} = E$, on dit que A est dense dans E.

• Une partie A est fermée si, et seulement si, $A = \overline{A}$.

• Une partie A est fermée si, et seulement si, pour toute suite d'éléments de A qui converge dans E, la limite appartient à A.
Fournir une suite d'éléments de A qui converge dans E vers une limite qui n'appartient pas à A, c'est donc démontrer que A n'est pas fermée.

• L'intersection d'une famille quelconque de fermés, la réunion d'une famille finie de fermés sont des fermés.

4.4 Frontière

La frontière d'une partie A est l'ensemble $\overline{A} \setminus A$.

C'est l'ensemble des points *a* tels que toute boule B(a, r) avec r > 0 contient au moins un vecteur de *A* et un vecteur qui n'appartient pas à *A*.

4.5 Point isolé

Un point *a* de *A* est isolé si l'on peut trouver une boule de centre *a* ne contenant pas d'autre point de *A* autre que *a*.

4.6 Point d'accumulation

• Un point *a* de *A* est un point d'accumulation de *A* si tout voisinage *V* de *a* contient au moins un élément de *A* distinct de *a*; ce qui entraîne que *V* contient une infinité d'éléments de *A*.

• *a* est un point d'accumulation de *A* si, et seulement si, il existe une suite injective (éléments tous distincts) d'éléments de *A* qui converge vers *a*.

• Un point adhérent de A qui n'est pas point d'accumulation est un point isolé de A.

4.7 Restriction à une partie

Soit A une partie d'un espace normé E.

Un ouvert relatif de A, un fermé relatif de A, un voisinage relatif de A, sont obtenus par intersection de A avec un ouvert de E, un fermé de E, un voisinage de E.

On munit ainsi A d'une topologie induite par celle de E.

Un ouvert de A pour la topologie induite n'est pas forcément un ouvert de E ; de même pour un fermé ou un voisinage.

5. Continuité

5.1 Limite

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, f une application de $D \subset E$ dans F, a un point adhérent à D et $l \in F$.

f admet la limite l au point a si :

 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \quad \|x - a\| < \eta \Longrightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon.$

Les normes dans E et dans F sont notées de la même façon pour ne pas alourdir les notations.

5.2 Continuité

f est continue en a si elle est définie en a et si $\lim f(x) = f(a)$.

f est continue sur $D \subset E$ si elle est continue en tout point de D.

38 Mathématiques

Les opérations algébriques sont analogues au cas particulier des fonctions numériques continues.

Deux fonctions continues de D dans F qui coïncident sur une partie dense de D sont égales.

5.3 Caractérisations de la continuité

• Caractérisation séquentielle

Pour que f soit continue en a, il faut et il suffit que, pour toute suite (u_n) qui converge vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers f(a).

Caractérisation topologique

f est continue sur D si, et seulement si, l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) de F est un ouvert (resp. fermé) de E.

Attention, si f est continue et si D est un ouvert (resp. fermé) de E, on ne peut rien dire de l'image directe f(D).

5.4 Continuité uniforme

f de $D \subset E$ dans F est uniformément continue sur D si :

 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in D \ \forall y \in D \ \|x - y\| < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$

5.5 Fonctions lipschitziennes

• Une fonction f de D dans F est lipschitzienne de rapport $k \ge 0$ si :

 $\forall x \in D \quad \forall y \in D \qquad \|f(y) - f(x)\| \le k \|y - x\|.$

- Si 0 < k < 1, on dit que f est contractante .
- Si f est lipschitzienne sur D, alors f est uniformément continue sur D.

5.6 Applications linéaires continues

• Critère de continuité

Si f est linéaire de E dans F, les propositions suivantes sont équivalentes :

- > f est continue sur E;
- > f est continue en 0;
- > f est uniformément continue ;
- $\succ \exists k \ge 0 \quad \forall x \in E \quad \|f(x)\| \le k \|x\|.$

Vérifiez bien que f est linéaire avant d'appliquer ce critère de continuité.

• Espace des fonctions linéaires continues

L'ensemble des fonctions linéaires et continues de *E* dans *F* est un espace vectoriel. On le note $\mathcal{L}_{c}(E, F)$.

Si E est de dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues. Mais ce n'est pas vrai si E est de dimension infinie.

6. Compacité

Soit E et F deux espaces vectoriels normés.

6.1 Définition

On dit qu'une partie A de E est une partie compacte ou est un compact si, de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergente dans A.

6.2 Propriétés

- Si A est un compact de E et B un compact de F, alors $A \times B$ est un compact de $E \times F$.
- Un fermé inclus dans un compact est un compact.
- Tout compact est fermé et borné.
- Si E est de dimension finie, on a :

A compact \iff A fermé et borné.

En dimension infinie, il existe des fermés, bornés, non compacts.

6.3 Fonction continue sur un compact

Soit f une fonction continue de E dans F et A un compact de E.

- f est uniformément continue sur A (théorème de Heine).
- f(A) est un compact de F.

7. Partie connexe par arcs

7.1 Définition

Une partie A de E est connexe par arcs si, pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe une fonction continue f de [0, 1] dans A telle que f(0) = a et f(1) = b.

Géométriquement, cela signifie que deux points de A peuvent toujours être joints par un arc continu inclus dans A.

7.2 Image par une fonction continue

Si A est connexe par arcs et f continue, alors f(A) est connexe par arcs.

7.3 Cas des fonctions réelles

• Les parties connexes par arcs de R sont les intervalles.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction à valeurs réelles, continue sur une partie connexe A, a et b deux vecteurs de A.

Pour tout réel x compris entre f(a) et f(b), il existe $c \in A$ tel que x = f(c).

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Soit *V* l'ensemble des fonctions *f* de classe C^1 sur [0, 1] telles que f(0) = 0. Pour $f \in V$, on pose :

$$N_1(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$
; $N_2(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|$.

 N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 2 : Soit *D* l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrez que *D* est dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 3 : Dans $\mathbb{R}[X]$, on définit la norme $||P|| = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$.

Démontrez que l'ensemble des polynômes tels que P(2) = 0 est dense dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 : Démontrez que l'ensemble des matrices inversibles d'ordre *n* est un ouvert. Son complémentaire est-il borné ?

Exercice 5 : Montrez que le groupe orthogonal est compact.

Exercice 6 : Soit K un compact convexe de \mathbb{R}^2 . Montrez qu'il existe un triangle inclus dans K d'aire maximale.

7 Séries numériques et familles sommables

1. Séries dans un espace normé de dimension finie

1.1 Définitions

Soit (u_n) une suite d'éléments d'un espace normé de dimension finie. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ les

sommes partielles.

On dit que la série de terme général u_n est convergente lorsque la suite (S_n) est convergente vers S, c'est-à-dire si $\lim_{n \to +\infty} ||S_n - S|| = 0$. Sinon, on dit qu'elle est divergente.

On dit que $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est le reste d'ordre n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S = S_n + R_n$ et il est équivalent de dire que la série $\sum u_n$ converge ou que $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$.

 $\sum_{n=0}^{\infty} En \ plus \ de \ E = \mathbb{R} \ ou \ \mathbb{C}, \ vous \ pouvez \ rencontrer \ E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ avec \ deux \ séries \ connues$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = \exp(A) \quad et \quad \sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_n - A)^{-1}.$

Faites l'exercice 1.

1.2 Condition nécessaire de convergence

Si la série $\sum u_n$ converge, alors le terme général u_n tend vers 0.

Si le terme général u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge. On parle alors de divergence grossière.

1.3 Linéarité de la somme

• Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent et ont pour sommes respectives U et V alors, pour tous scalaires a et b, la série $\sum (au_n + bv_n)$ est convergente et a pour somme aU + bV.

- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, la somme $\sum (u_n + v_n)$ est divergente.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, il n'y a pas de résultat général sur la nature de $\sum (u_n + v_n)$.

1.4 Lien suite-série

La suite (u_n) et la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

Les sommes partielles associées à la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$ sont $\sum_{k=0}^{n} v_k = u_n - u_0.$ Dans ce calcul, les termes s'annulent de proche en proche. On parle de sommes télescopiques (comme un télescopage sur autoroute) et non astronomiques comme déjà entendu !

1.5 Série absolument convergente

Définition

Si $\sum ||u_n||$ converge, on dit que $\sum u_n$ est absolument convergente.

• Théorème

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente et sa somme vérifie :

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\|u_n\|.$$

La réciproque est fausse.

2. Compléments sur les séries numériques

Revoir Toute la MPSI en fiches, fiche 13 Séries numériques de la partie maths.

2.1 Séries à termes positifs

• Règle de d'Alembert

Soit u_n une série à termes strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admette une limite l quand n tend vers $+\infty$.

Si l < 1, la série converge ; si l > 1, la série diverge.

 \bigotimes Cette règle exige l'existence de la limite du quotient, et cette limite est souvent 1. La règle de d'Alembert est surtout utile quand u_n comporte n!.

► Faites l'exercice 3.

Comparaison série-intégrale

Si *f* est une fonction continue par morceaux et décroissante de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , alors la série de terme général $\int_{-\infty}^{n} f(t) dt - f(n)$ converge.

Faites les exercices 4 et 5.

2.2 Séries alternées

Définition

Une série $\sum u_n$ à termes réels est alternée si son terme général change de signe alternativement.

En supposant $u_0 \ge 0$, on a donc $u_n = (-1)^n a_n$ où $a_n = |u_n|$.

Critère spécial des séries alternées

- Théorème (condition suffisante de convergence)

Si la suite de termes positifs (an) est décroissante et converge vers 0, alors la série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ est convergente.

- Exemple

La série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente, mais n'est pas absolument conver-

gente.

Majoration du reste

Dans les hypothèses du critère spécial des séries alternées, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Le reste $R_n = \sum_{k=-1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ et vérifie :

 $|R_n| \leq a_{n+1}$

Faites les exercices 6, 7 et 8.

3. Familles sommables

3.1 Définition

• La famille de réels positifs $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, pour tout n, la

série
$$\sum_{m} a_{m,n}$$
 converge et la série $\sum_{n} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right)$ converge.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \right).$$

• S'il s'agit d'une famille de nombres complexes, on vérifie l'hypothèse de sommabilité sur la famille des $|a_{m,n}|$.

3.2 Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

• Le produit de Cauchy de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général :

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0 = \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

• Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série $\sum w_n$ l'est aussi et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right).$$

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1: Soit
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
. Calculez $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!}$.

Utilisez le résultat de l'exercice 5 de la fiche 3 et le cours de la fiche 9 : ch $x = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Exercice 2 : Déterminez la nature de la série numérique de terme général :

$$u_n = \arccos\left(\frac{n^3 + 1}{n^3 + 2}\right).$$

Exercice 3 : Soit (u_n) une suite de réels positifs. On considère $v_n = \frac{1}{n} \sqrt{u_n}$. Montrez que, si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge. Étudiez la réciproque.

Exercice 4 : 1. Montrez que la série de terme général $\frac{1}{n \ln^2 n}$ converge. 2. Déterminez la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{\sum_{k=2}^{n} \ln^2 k}$.

Exercice 5: Pour s > 1, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \cdot \text{Calculez} \quad \lim_{s \to 1^+} (s-1) \zeta(s)$.

Exercice 6 : Étudiez la nature de la série de terme général :

$$u_n=\sin\left(\pi\sqrt{n^2+2n+2}\right).$$

Exercice 7 : On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \ge 2$ par : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \cdot$

Montrez que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Quelle est la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$?

Exercice 8 : Soit *f* une fonction de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} , continue, décroissante et telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Étudiez la nature de la série de terme général :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin t \, \mathrm{d}t \, .$$

1. Suites de fonctions

Soit *E* et *F* deux espaces normés de dimension finie et *A* une partie non vide de *E*. $(u_n)_{n \ge 0}$ désigne une suite de fonctions définies sur *A* et à valeurs dans *F*.

1.1 Convergence simple

La suite (u_n) converge simplement sur A vers une fonction u, de A dans F, si :

$$\forall x \in A \qquad \lim_{n \to +\infty} \|u_n(x) - u(x)\| = 0.$$

1.2 Convergence uniforme sur I

u étant la limite simple de la suite (u_n) , on dit que la convergence de (u_n) vers *u* est uniforme sur *A* si :

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| u_n - u \right\|_A = 0$$

où $||u_n - u||_A = \sup_{x \in A} ||u_n(x) - u(x)||$ est la norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Le nombre $||u_n - u||_A$ se calcule souvent avec l'étude des variations de la fonction $u_n - u$ quand il s'agit de fonctions numériques.

Quand ce calcul est trop difficile, cherchez à minorer ou à majorer.

La convergence uniforme de (u_n) vers u entraîne la convergence simple.

La réciproque est fausse.

1.3 Continuité de la limite

• Si les u_n sont continues en a et si la suite $(u_n)_{n \ge 0}$ converge uniformément vers u sur un voisinage de a, alors u est continue en a.

• Si la suite $(u_n)_{n \ge 0}$ converge uniformément vers u sur A, et si chaque u_n est continue sur A, alors u est continue sur A.

Si les u_n sont continues sur I, et si u n'est pas continue sur I, alors la convergence n'est pas uniforme.

• Il suffit que la convergence soit uniforme sur tout compact inclus dans A, pour que u soit continue sur A.

• Théorème de la double limite

Soit $(u_n)_{n \ge 0}$ une suite de fonctions de *A* dans *F* convergeant uniformément vers *u* sur *A* et *a* un point adhérent à *A*.

Si, pour tout $n \ge 1$, u_n admet une limite l_n en a, alors (l_n) admet une limite l et lim u(x) = l.

Ce résultat peut s'écrire :

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} u_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} u_n(x) \right)$$

ce qui explique le terme double limite, mais ne vous dispense pas de vérifier toutes les hypothèses.

1.4 Intégration de la limite

Soit $(u_n)_{n \ge 0}$ une suite de fonctions continues définies sur sur un intervalle *I* de \mathbb{R} et à valeurs dans *F*, et *a* un point de *I*.

On suppose que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de *I* vers une fonction *u*.

Pour
$$n \in \mathbb{N}^*$$
 et $x \in I$, on note : $U_n(x) = \int_a^x u_n(t) dt$ et $U(x) = \int_a^x u(t) dt$.

Alors $(U_n)_{n \ge 1}$ converge uniformément vers U sur tout segment de I.

1.5 Dérivation de la limite

Soit $(u_n)_{n \ge 0}$ une suite de fonctions de classe C^1 définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans F. On suppose que $(u_n)_{n \ge 0}$ converge simplement sur I vers une fonction u, que $(u'_n)_{n \ge 0}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v. Alors :

 $(u_n)_{n \ge 0}$ converge uniformément vers *u* sur tout segment,

u est de classe C^1 sur Iet u' = v.

1.6 Approximations uniformes

• Toute fonction u de [a, b] dans F, continue par morceaux peut être approximée uniformément par des fonctions en escalier, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier φ telle que :

$$\|u-\varphi\|_{[a,b]}<\varepsilon.$$

• Toute fonction continue u de [a, b] dans F peut être approximée uniformément par des fonctions polynomiale, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale g telle que :

$$\|u-g\|_{[a,b]}<\varepsilon.$$

Faites les exercices 1, 2 et 3.

2. Séries de fonctions

Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle *I*. On considère les sommes partielles définies par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x).$$

2.1 Convergence simple

On dit que la série $\sum_{n} u_n$ converge simplement sur *I* si la suite (*S_n*) converge simplement et on note :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x).$$

2.2 Convergence uniforme

• On dit que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur I si la suite (S_n) converge uni-

formément sur I.

• Une série converge uniformément si, et seulement si, elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0.

2.3 Propriétés

Pour une série $\sum u_n$ qui converge uniformément sur *I*, les théorèmes sur les suites de fonctions entraînent :

Continuité

Si les u_n sont continues sur I, alors la somme S est continue sur I.

Intégration

Si les u_n sont continues dans I et si $\sum_{n} u_n$ converge uniformément sur I, alors, pour tous a et b dans I, on a :

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_a^b u_k(x) \,\mathrm{d}x\right)$$

🖙 On dit que l'on a intégré terme à terme la série.

Dérivation

Si les u_n sont de classe C^1 dans I et si $\sum_n u'_n$ converge uniformément, alors la somme S est de classe C^1 et vérifie :

$$\forall x \in I \qquad S'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u'_k(x) \,.$$

Con dit aue l'on a dérivé terme à terme la série.

2.4 Convergence normale

Définition

On dit que la série $\sum_{n} u_n$ converge normalement sur *I* si la série des normes $\sum_{n} ||u_n||_I$ converge.

Condition nécessaire et suffisante

La série $\sum u_n$ converge normalement sur *I* si, et seulement si, il existe une série numérique à termes positifs a_n telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad |u_n(x)| \leq a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ convergente.}$$

La recherche de a_n peut se faire par majoration ou en étudiant les variations de u_n .

Théorème

La convergence normale de $\sum_{n} u_n$ entraîne la convergence uniforme de $\sum_{n} u_n$ et, pour tout $x \in I$, la convergence absolue de $\sum_{n} u_n(x)$.

Si vous êtes optimiste, pour étudier le monde de convergence d'une série de fonctions, commencez par la convergence normale.

C'est souvent facile à faire et, si ça marche, c'est un mode de convergence qui entraîne tous les autres.

Faites les exercices 4, 5 et 6.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur [0; 1] par :

$$\begin{cases} f_n(x) = n^2 x(1 - nx) & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ f_n(x) = 0 & \text{si } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

1. Montrez que (f_n) converge simplement sur [0; 1] vers une fonction f à déterminer.

2. Montrez que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur [0; 1].

Exercice 2 : On considère la suite de fonctions f_n de [0, 1] dans \mathbb{R} définies par :

$$f_n(x) = \frac{n(2x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1} \; \cdot \;$$

Montrez que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f à préciser. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 3 : On considère la suite de fonctions f_n de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{si } x \neq 0\\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Étudiez

1. la convergence simple de (f_n) sur \mathbb{R} ;

- **2.** la convergence uniforme de (f_n) sur un segment [a, b];
- **3.** la convergence uniforme de (f_n) sur \mathbb{R} .

Exercice 4 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $u_n(x) = \frac{1}{n^2 + \sin(nx)}$. Étudiez le mode de convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum u'_n$.

Exercice 5: Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \cos 2nx$.

1. Montrez que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est normalement convergente sur \mathbb{R} .

2. Calculez sa somme.

Exercice 6: Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $u_n(x) = \frac{\sin x^2}{\cosh nx}$.

- **1.** Montrez que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge simplement sur \mathbb{R} .
- **2.** Montrez que cette série converge normalement sur $[a, +\infty)$ pour tout réel a > 0.
- **3.** Montrez que sa somme est continue sur $_R$.

1. Convergence d'une série entière

1.1 Série entière

Une série entière est une série de fonctions de la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) \qquad \text{avec} \quad u_n(z) = a_n \, z^n$$

où z est la variable réelle ou complexe et les a_n des constantes réelles ou complexes.

1.2 Lemme d'Abel

Si la suite $(|a_n| r^n)$ est bornée, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge absolument pour tout z tel que |z| < r.

1.3 Rayon de convergence

- Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une série entière, elle vérifie une, et une seule, des trois propriétés :
- la série converge uniquement pour z = 0;

e il existe un nombre réel R > 0 tel que la série converge absolument pour tout z tel que |z| < R, et diverge pour tout z tel que |z| > R;

Ia série converge absolument pour tout z.

Le nombre R du deuxième cas est appelé rayon de convergence de la série entière.

Dans le premier cas, le rayon de convergence est nul.

Dans le troisième cas, on dit que le rayon de convergence est infini.

1.4 Détermination du rayon de convergence

• Le nombre R est la borne supérieure des ensembles :

$$\{r \in \mathbb{R}_+ ; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \text{ converge}\}; \{r \in \mathbb{R}_+ ; |a_n| r^n \text{ born} \in \mathbb{R}_+\}$$

• Soit R_a le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R_b celui de $\sum b_n z^n$; alors : > si $a_n = O(b_n)$, on a $R_a \ge R_b$; > si $a_n \sim b_n$, on a $R_a = R_b$.

- Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum na_n z^n$ ont même rayon de convergence.
- On détermine souvent R à partir de la règle de d'Alembert :
- Si $\lim_{n \to +\infty} \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = l |z|^k$, en écrivant :

$$l |z|^k < 1 \iff |z| < \sqrt[k]{\frac{1}{l}}$$

on obtient $R = \sqrt[k]{\frac{1}{l}}$.

Cette méthode suppose l'existence d'une limite, ce qui n'est pas toujours le cas.

Faites les exercices 1, 2 et 3.

1.5 Mode de convergence

• La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence *R* converge absolument dans l'intervalle (ouvert)

de convergence]-R, R[dans le cas réel ; dans le disque (ouvert) de convergence B(0, R) dans le cas complexe.

Pour |z| > R, la série diverge.

Si |z| = R, il n'y a pas de résultat général.

• La convergence est normale, donc uniforme, sur tout compact inclus dans le disque (ou l'intervalle) de convergence.

1.6 Opérations algébriques

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2 , et de sommes respectives f(z) et g(z).

• Linéarité

Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n$ a pour somme $\alpha f(z) + \beta g(z)$; son rayon de convergence *R* est tel que :

 $R = \min(R_1, R_2) \quad \text{si } R_1 \neq R_2$ $R \ge R_1 \qquad \qquad \text{si } R_1 = R_2$

• Produit de Cauchy de deux séries entières

Si l'on pose :

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ a pour somme f(z)g(z). Son rayon de convergence R est tel que $R \ge \min(R_1, R_2)$.

1.7 Continuité

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$ et de somme f(z).

La fonction f est continue sur son disque de convergence (cas complexe) ou son intervalle de convergence (cas réel).

2. Série entière d'une variable réelle

2.1 Dérivation

Si la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \neq 0$, alors f est dérivable dans] - R, R[et l'on a :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \, a_n \, x^{n-1}.$$

En poursuivant la dérivation, il en résulte que f est de classe C^{∞} sur] – R, R[.

Une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence. Mais, sur le bord de l'intervalle de convergence, les deux séries ne sont pas toujours de même nature.

2.2 Intégration

Si la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \neq 0$, pour tout $x \in [-R, R[$ on a :

$$\int_{0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

La série entière ainsi obtenue par intégration terme à terme a le même rayon de convergence que la série initiale.

3. Développement d'une fonction en série entière

3.1 Série entière associée à une fonction

Soit f une fonction d'une variable réelle, définie sur un intervalle ouvert U contenant l'origine.

On dit que f est développable en série entière s'il existe une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$ telle que :

$$\forall x \in] - R, R[\cap U \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On dit aussi que f est analytique en 0.

3.2 Condition nécessaire

Si *f* est développable en série entière avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors *f* est indéfiniment dérivable

et
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$
.

Donc, si le développement en série entière de f existe, il est unique.

La série
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
 est la série de Taylor de f en 0.

Plus généralement, f est analytique en x_0 s'il existe un intervalle ouvert contenant x_0 dans lequel la somme de sa série de Taylor en x_0 est égale à f(x), ce qui signifie qu'il existe R > 0 tel que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{pour} \quad |x - x_0| < R.$$

Attention, il peut arriver que f soit indéfiniment dérivable au voisinage de 0 et que sa série de Taylor diverge pour tout $x \neq 0$, ou qu'elle converge et que sa somme soit différente de f(x).

3.3 Condition suffisante

Si f est indéfiniment dérivable dans l'intervalle I défini par $|x - x_0| < R$ et s'il existe une constante M > 0 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \qquad |f^{(n)}(x)| \leq M$$

alors f est analytique en x_0 .

3.4 Développements de base

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	<i>R</i> = 1
$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	<i>R</i> = 1	$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
ch $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$	$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
sh $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$	$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	<i>R</i> = 1
$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	<i>R</i> = 1		



Faites les exercices 4 et 5.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Soit (a_n) une suite réelle.

Comparez les rayons de convergence de $\sum \alpha_n z^n$ et de $\sum \alpha_n^2 z^n$.

Exercice 2 : Déterminez le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n}$ où

$$a_n = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n}$$

Exercice 3 : Étudiez la convergence (rayon de convergence et étude aux bornes) de la série entière $\sum u_n x^n$ avec

$$u_n = \ln\left(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Exercice 4 : Développez en série entière la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 4)$. Étudiez la validité aux bornes.

Exercice 5 : Soit $\alpha \in]0; \pi[$. Développez en série entière la fonction définie par :

$$f(\alpha) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\tan\frac{\alpha}{2}\right).$$

1. Dérivation

1.1 Limite et continuité

• Les fonctions sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans un espace normé E de dimension finie p.

En choisissant une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ dans *E*, on a donc :

$$\forall t \in I$$
 $f(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t) e_i.$

Les fonctions f_i sont les fonctions coordonnées de f dans la base \mathcal{B} .

• La limite de f en a, la continuité de f en a, la continuité de f sur I, les opérations algébriques, se définissent de façon analogue au cas où $E = \mathbb{R}$. Il suffit de remplacer, pour les images, la valeur absolue par la norme de E.

On peut aussi faire intervenir les fonctions coordonnées, comme : f a une limite $l = (l_1, ..., l_p)$ en a si, et seulement si, toutes les f_i ont une limite l_i .

1.2 Dérivabilité en un point

Soit $a \in I$.

f est dérivable en *a* \iff la fonction $I \setminus \{a\} \rightarrow E$ $t \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ a u

 $\iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad f_i \text{ est dérivable en } a.$

La limite est alors notée f'(a) et l'on a $f'(a) = \sum_{i=1}^{p} f'_i(a) e_i$.

Les définitions des dérivées à droite, à gauche, les dérivées successives, sont analogues au cas des fonctions à valeurs réelles.

Faites l'exercice 1.

1.3 Opérations sur les fonctions dérivables en un point

• On considère des fonctions f et g de I dans E dérivables en a, λ un réel, φ une fonction de de I dans \mathbb{R} dérivable en a.

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$
; $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$; $(\varphi f)'(a) = \varphi'(a)f(a) + \varphi(a)f'(a)$

• Si E euclidien :

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

• Si E euclidien orienté, de dimension 3 :

$$(f \wedge g)'(a) = f'(a) \wedge g(a) + f(a) \wedge g'(a).$$

• Plus généralement :

Si *L* linéaire $(L \circ f)'(a) = (L \circ f')(a).$

Si *B* bilinéaire (B(f,g))'(a) = B(f',g)(a) + B(f,g')(a).

Composition

Soit f une fonction de I dans E, φ une fonction de J dans \mathbb{R} avec $\varphi(J) \subset I$. Si φ est dérivable en $a \in J$ et f dérivable en $\varphi(a)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et :

$$(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a) \times f'(\varphi(a)).$$

Faites l'exercice 2.

2. Intégration

2.1 Intégrale sur un segment

Soit f une fonction continue par morceaux de [a, b] dans \mathbb{R} .

Le vecteur $\sum_{i=1}^{p} \left(\int_{a}^{b} f_{i}(t) dt \right) e_{i} \in E$ est indépendant de la base \mathcal{B} choisie. On le note $\int_{a}^{b} f(t) dt$ ou $\int_{a}^{b} f$ ou $\int_{[a,b]} f$.

2.2 Propriétés

Beaucoup de propriétés de l'intégrale des fonctions de \mathbb{R} se prolongent, comme :

linéarité, relation de Chasles, majoration $\left\|\int_{a}^{b} f(t) dt\right\| \leq \int_{a}^{b} \|f(t)\| dt$ si a < b,

 $x \mapsto \int_{a}^{x} f(t) dt$ est une primitive de f quand f est continue,

intégration par parties, par changement de variables.

2.3 Accroissements finis

• Inégalité des accroissements finis

Si f est de classe C^1 sur [a, b] et s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $||f'|| \le k$, alors :

 $||f(b) - f(a)|| \le k |b - a|.$

• L'égalité des accroissements finis ne se prolonge pas, voir exercice 3.

Faites l'exercice 3.

3. Formules de Taylor

3.1 Formules à caractère global

• Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f de classe C^n $(n \ge 1)$ sur [a, b]. Alors :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t) dt$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit f de classe C^n $(n \ge 1)$ sur [a, b]. Notons $M_n = \sup_{t \in [a, b]} ||f^{(n)}(t)||$ (qui existe car $f^{(n)}$ continue sur le segment [a, b]). Alors :

$$\left\|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \dots - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)\right\| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} M_n.$$

Faites l'exercice 4.

3.2 Formule de Taylor-Young (caractère local)

Soit f de classe C^n sur un intervalle contenant 0; alors on peut écrire :

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{t^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(t^n).$$

où la notation $o(t^n)$ signifie que $\lim_{t\to 0} \frac{o(t^n)}{t^n} = 0$. On note aussi $t^n \varepsilon(t)$ avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

4. Arcs paramétrés

4.1 Définition

Définir un arc paramétré, c'est se donner un intervalle I de \mathbb{R} et une fonction f de I dans un espace euclidien E.

L'arc est de classe C^k si f est de classe C^k .

4.2 Interprétation cinématique

En choisissant une origine O, on munit E d'une structure affine. On note M(t) le point défini par $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)$.

L'arc paramétré est la trajectoire du point M(t) au cours du temps,

f'(t) est le vecteur vitesse et f''(t) le vecteur accélération du point M à l'instant t.

4.3 Interprétation géométrique

- Si $E = \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{R}^3 , l'ensemble des points M(t) est une courbe du plan ou de l'espace.
- On appelle **point régulier** un point $M(t_0)$ tel que $f'(t_0) \neq 0$.
- Dans ce cas $(f'(t_0) \neq 0)$, la formule de Taylor-Young nous donne pour t voisin de t_0 :

$$M(t) = M(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + o(t - t_0)$$

L'arc paramétré peut donc localement être confondu avec l'arc :

$$t\mapsto M(t_0)+(t-t_0)f'(t_0)$$

Il s'agit de la **droite tangente** à la courbe au point régulier $M(t_0)$. Elle est dirigée par le vecteur $\bar{f}'(t_0)$.

57

Solution On comprend pourquoi le point doit être régulier. Il faut $f'(t_0) \neq 0$ pour diriger une droite.

• Dans le cas où *E* est un plan, on a :

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad ; \qquad f'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

En un point régulier $M(t_0)$, le vecteur $\begin{pmatrix} -y'(t_0) \\ x'(t_0) \end{pmatrix}$ est orthogonal à $f'(t_0)$. Il dirige donc la **droite normale** en $M(t_0)$ à la courbe paramétrée.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Soit *E* un espace normé de dimension finie, a > 0 et *f* une fonction de [0, a[dans *E*, dérivable à droite en 0 et telle que f(0) = 0.

Déterminez $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$

Exercice 2 : Soit f une fonction de I dans E, dérivable en $a \in I$, avec $f(a) \neq 0$. Montrez que ||f|| est dérivable en a et déterminez $(||f||_2)'(a)$.

Exercice 3 : Soit f la fonction de [0; 1] dans \mathbb{R}^2 définie par :

$$f(t) = (t(1-t), t^2(1-t))$$

Avec ce contre-exemple, montrez que le théorème des accroissements finis ne se généralise pas aux fonctions vectorielles.

11 Intégration sur un intervalle quelconque

1. Fonction intégrable sur $[a, +\infty[$

1.1 Intégrale généralisée

Définition

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. Si la limite $\lim_{x \to +\infty} \int_{a}^{x} f(t) dt$ existe, on dit que l'intégrale $\int_{a}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente. On définit de manière analogue l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{a} f(t) dt$ pour une fonction continue sur $] - \infty, a]$.

Étudier la nature d'une intégrale généralisée, c'est préciser si elle est convergente ou divergente.

• Condition nécessaire de convergence sur $[a, +\infty[$

Soit *f* une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_{a}^{+\infty} f(t) dt$ converge et si $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existe, cette limite est nécessairement nulle.

Si f n'a pas de limite, on ne peut rien dire de l'intégrale.

• Caractérisation dans le cas de fonctions positives

Si f est à valeurs dans \mathbb{R}^+ , $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.

1.2 Fonction intégrable sur $[a, +\infty[$

• Définition

On dit que f est intégrable sur $[a, +\infty)$ si $\int_{a}^{+\infty} |f(t)| dt$ converge.

On dit aussi que l'intégrale est absolument convergente.

• Théorème

$$\int_{a}^{+\infty} |f(t)| \, dt \text{ converge } \implies \int_{a}^{+\infty} f(t) \, dt \text{ converge.}$$
Faites l'exercice 1.

La réciproque est fausse ; voir exercice 1.

Il peut donc arriver que l'intégrale d'une fonction existe, mais que la fonction ne soit pas intégrable (c'est le vocabulaire de votre programme). C'est pourquoi de nombreux auteurs préfèrent dire fonction sommable plutôt que fonction intégrable.

1.3 Règles d'intégrabilité (cas des fonctions positives)

So it f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty)$, à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

Comparaison

Supposons $0 \le f \le g \text{ sur } [a, +\infty[.$

➤ Si g est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

> Si f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

Domination

Si f(x) = O(g(x)), l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty]$ implique celle de f.

• Équivalence

Si $f(x) \underset{t \to \infty}{\sim} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty)$ équivaut à celle de f.

• Situations de référence

Pour a > 0, $x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha}}$ est intégrable sur $[a, +\infty)$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Pour $\alpha > 0$, $x \mapsto e^{-\alpha x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Faites les exercices 2, 3 et 4.

2. Intégration sur un intervalle quelconque

2.1 Cas des fonctions non bornées sur un intervalle borné • Définitions

> Soit f une fonction continue par morceaux sur]a, b] avec a < b. Si la limite $\lim_{x \to a^+} \int_{x}^{b} f(t) dt$

existe, on dit que l'intégrale $\int_{a}^{b} f(t) dt$ est convergente.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Si f possède une limite à droite en a, il n'y a aucun problème d'existence pour l'intégrale généralisée.

≻ Soit f une fonction continue par morceaux sur]a, b[avec a < b (c'est-à-dire avec un problème aux bornes) et $c \in]a, b[$. L'intégrale

$$\int_{a}^{b} f(t) dt = \int_{a}^{c} f(t) dt + \int_{c}^{b} f(t) dt$$

est convergente si, et seulement si, les deux intégrales du second membre sont convergentes.

Situations de référence

$$x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha}}$$
 est intégrable sur $[0, a]$ si, et seulement si, $\alpha < 1$.
Il en est de même pour $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}$ sur $[a, b]$ et $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^{\alpha}}$ sur $[b, a[$.

 $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur]0, 1].

2.2 Propriétés

• Les propriétés, vues dans le cadre de l'intégrale sur un segment, comme la linéarité et l'inégalité de la moyenne se prolongent.

• La relation de Chasles devient :

Si f est intégrable sur I et sur J, si $I \cup J$ est un intervalle et si $I \cap J$ est vide ou réduit à un point, on a :

$$\int_{I} f + \int_{J} f = \int_{I \cup J} f.$$

• Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, on a :

➤ Si f est intégrable et $f \ge 0$, alors $\int_I f \ge 0$.

≻ Si f et g sont intégrables et $f \leq g$, alors $\int_I f \leq \int_I g$.

> Si f est continue et positive :

$$\int_{I} f = 0 \iff \forall t \in I \quad f(t) = 0.$$

2.3 Intégration par parties

L'écriture brute de l'intégration par parties sur un intervalle quelconque (a, b):

$$\int_{a}^{b} u'v = \left[uv\right]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} uv'$$

comporte trois termes. Il faut justifier l'existence de deux d'entre eux pour que l'égalité soit correcte.

2.4 Changement de variable

Étant données une fonction f continue sur]a, b[et une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ bijective, strictement croissante et de classe C^1 , les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

3. Passage à la limite sous l'intégrale

3.1 Théorème de convergence dominée

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux sur *I*. Si (f_n) converge simplement sur *I* vers une fonction *f* continue par morceaux sur *I*, et s'il existe une fonction *g* continue par morceaux sur *I*, positive et intégrable sur *I*, telle que pour tout entier *n*, on ait $|f_n| \leq g$ (hypothèse de domination),

alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\int_{I} f = \lim_{n \to +\infty} \int_{I} f_n.$$

L'hypothèse la plus importante est la relation de domination.

3.2 Théorème de sommation L¹

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur *I*, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction *f* continue par morceaux sur *I* et telle que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors f est intégrable sur I et

$$\int_{I} \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{I} f_n.$$

Sur L'hypothèse la plus importante est la convergence de la série $\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_{i}} |f_{n}|$.

4. Intégrale à paramètre

On considère A une partie d'un espace normé de dimension finie,

I un intervalle de \mathbb{R} ,

f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans \mathbb{K} .

Lorsqu'elle existe, on considère la fonction g définie sur A par :

$$g(x) = \int_{I} f(x,t) \,\mathrm{d}t.$$

4.1 Existence et continuité

On suppose que f est continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde.

On suppose également qu'il existe une fonction φ , intégrable sur *I*, à valeurs dans \mathbb{R}^+ , telle que, pour tout *x* de *A*, on ait $|f(x, .)| \leq \varphi$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in A \qquad \forall t \in I \qquad |f(x,t)| \leq \varphi(t).$$

Alors g est définie et continue sur A.

4.2 Dérivabilité

Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur $J \times I$. On suppose que :

f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable,

pour tout x de J, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I,

 $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $J \times I$, continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde.

On suppose également qu'il existe une fonction φ intégrable sur *I*, à valeurs dans \mathbb{R}^+ telle

que, pour tout x de J, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)\right| \leq \varphi$.

Alors g est de classe C^1 sur J et vérifie :

$$\forall x \in J$$
 $g'(x) = \int_{I} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$

4.3 Remarques

• Le théorème précédent se généralise pour les dérivées successives de *g* avec des hypothèses de domination sur les dérivées partielles.

• Pour la continuité et les dérivabilités successives, il suffit d'établir les hypothèses de domination du type $|f(x, .)| \le \varphi$ sur tout segment de *J*.

Faites l'exercice 5.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : On considère l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

1. En utilisant une intégration par parties, montrez que cette intégrale est convergente.

2. En utilisant la minoration $|\sin x| \ge \sin^2 x$, montrez que l'intégrale n'est pas absolument convergente.

Exercice 2 : Étudiez la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - th^{\alpha} x) dx$.

Exercice 3 : Soit a > 0. Étudiez l'existence, et déterminez éventuellement la valeur, de :

$$\lim_{a \to 0} \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)(a^2-x^2)}}$$

Exercice 4 : Montrez que la fonction :

 $t \mapsto \ln(\sin t)$

est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculez son intégrale.

Exercice 5: Soit
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(1 - \cos xt)}{t^2} dt$$
.

Calculez f'(x) et f''(x). Déduisez-en une expression de f(x).

12 Équations différentielles linéaires

I désigne un intervalle et E un espace normé de dimension finie.

1. Généralités

1.1 Définitions

• Une équation différentielle est une relation entre une variable réelle *t* et les valeurs $x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ d'une fonction inconnue et de certaines de ses dérivées, de la forme :

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0 \qquad (E)$$

où F est une fonction continue.

• L'ordre *n* de l'équation différentielle est celui de la dérivée d'ordre le plus élevé qui figure dans (*E*).

- Si x est à valeurs dans \mathbb{K} , l'équation (E) est dite scalaire.
- Une équation différentielle est linéaire si sa forme résolue est :

$$x'(t) = a(t) x(t) + b(t)$$

où *a* est une application continue de *I* dans $\mathcal{L}(E)$ et *b* une application continue de *I* dans *E*.

• L'équation se présente souvent sous la forme non résolue :

$$\alpha(t) x'(t) + \beta(t) x(t) = \gamma(t)$$

que l'on cherche à résoudre sur un intervalle où α ne s'annule pas.

• Un problème de Cauchy est la résolution d'une équation différentielle avec des conditions initiales imposées $x(0) = x_0$.

1.2 Système différentiel linéaire

Lorsque $E = \mathbb{K}^p$ une équation scalaire linéaire d'ordre p peut se représenter par un système différentiel avec p équations d'ordre 1 et p inconnues :

(S)
$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11} x_1(t) + \dots + a_{1p} x_p(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x'_p(t) = a_{p1} x_1(t) + \dots + a_{pp} x_p(t) + b_p(t) \end{cases}$$

où les a_{ij} et les b_i sont des fonctions continues de I dans \mathbb{K} .

Avec
$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{pmatrix}$$
 $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1p}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}(t) & \dots & a_{pp}(t) \end{pmatrix}$ $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_p(t) \end{pmatrix}$

(S) s'écrit sous la forme matricielle :

$$X'(t) = A(t) X(t) + B(t) .$$

Si B(t) = 0, le système est dit homogène.

1.3 Solutions d'une équation différentielle linéaire

Théorème de Cauchy linéaire

Le problème de Cauchy

$$x'(t) = a(t) x(t) + b(t)$$
 $x(0) = x_0$

a une solution unique définie sur I. C'est le point fixe de l'équation intégrale en x :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [a(u) x(u) + b(u)] du.$$

Cas des équations homogènes

L'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E.

B Si vous résolvez une équation différentielle scalaire homogène d'ordre 2, vous devez obtenir un espace de dimension 2.

Si une méthode particulière vous donne un espace de dimension 2, vous savez que vous avez fini. S'il est de dimension 1, vous savez que vous n'avez pas fini.

Structure de l'ensemble des solutions

Dans le cas général, l'ensemble des solutions est un espace affine dont la direction est le sous-espace des solutions de l'équation homogène associée.

2. Exponentielle d'une matrice

2.1 Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K})$. On appelle exponentielle de A la somme de la série dans $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K})$, normalement convergente sur tout compact :

$$\exp(A) = e^{A} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^{k}.$$

⁽²⁾ Le choix de la norme dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est indifférent puisque, l'espace étant de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

2.2 Propriétés

Propriétés algébriques

 $e^0 = I_n$; $e^{\alpha A} e^{\beta A} = e^{(\alpha + \beta)A}$; $e^A e^{-A} = I_n$; $\det(e^A) = e^{trA}$.

O e^{A} est donc toujours inversible.

Si AB = BA $e^A e^B = e^{A+B}$

🖏 N'oubliez pas l'hypothèse.

Si *P* inversible, $e^{PAP^{-1}} = P e^A P^{-1}$.

66 Mathématiques

Deux matrices semblables ont des exponentielles semblables, ce qui permet de définir l'exponentielle d'un endomorphisme.

Dérivabilité

L'application $t \mapsto e^{tA}$ est dérivable et a pour dérivée Ae^{tA} .

2.3 Utilisation

• Le problème de Cauchy :

 $X'(t) = AX(t) \qquad X(0) = X_0$

a pour solution dans le cas A constant :

 $X(t) = e^{At}X_0$

• Dans le cas d'une équation non homogène, soit X'(t) = AX(t) + B(t), en multipliant les deux membres par e^{-At} , on se ramène à $\frac{d}{dt} \left[e^{-At}X(t) \right] = e^{-At}B(t)$.

Il s'agit du prolongement de la méthode du facteur intégrant (cf. Toute la MPSI en fiches fiche 12).

2.4 Calcul

• Si $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ est diagonale, alors $e^A = \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})$.

• Si A est nilpotente (c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$), il n'y a qu'un nombre fini de termes dans la série.

· Le cas général est hors programme.

Faites les exercices 1 et 2.

3. Résolution dans le cas d'une équation scalaire du second ordre

3.1 Généralités

• Ce sont des équations de la forme résolue :

$$x''(t) + a(t) x'(t) + b(t) x(t) = f(t)$$
 (1)

où a, b et f sont des fonctions données, continues sur un intervalle I.

• L'équation est dite à coefficients constants si elle est de la forme :

$$a x''(t) + b x'(t) + c x(t) = f(t)$$
 (2)

où a, b et c sont des constantes données, réelles ou complexes.

• Toute solution de (1) est de la forme :

$$x_P(t) + x_S(t)$$

où $x_P(t)$ est une solution particulière de (1), et $x_S(t)$ la solution générale de l'équation homogène associée :

$$x''(t) + a(t) x'(t) + b(t) x(t) = 0$$
 (1').

• L'ensemble des solutions de (1') est un K-espace vectoriel de dimension 2.

3.2 Résolution de l'équation homogène dans le cas des coefficients constants

cf. Toute la MPSI en fiches, fiche 12.

3.3 Résolution de (2) à coefficients constants dans quelques cas

cf. Toute la MPSI en fiches, fiche 12.

3.4 Méthodes générales de résolution de l'équation (1)

Variation de la constante

Si x_1 est une solution de (1'), ne s'annulant pas sur I, on peut chercher les solutions de (1) sous la forme :

$$x(t) = u(t) x_1(t)$$

où *u* est une fonction inconnue qui vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre en u' obtenue en reportant dans (1).

Faites l'exercice 3.

Système fondamental de solutions

Si x_1 et x_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (1'), on peut chercher la solution de (1) sous la forme :

$$x(t) = u(t) x_1(t) + v(t) x_2(t)$$

où u et v sont des fonctions inconnues soumises à la condition :

$$u'(t) x_1(t) + v'(t) x_2(t) = 0.$$

Les fonctions *u* et *v* sont obtenues en résolvant le système :

$$\begin{cases} u' x_1 + v' x_2 = 0 \\ u' x'_1 + v' x'_2 = f \end{cases}$$

dont le déterminant

$$w(t) = \left| \begin{array}{cc} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{array} \right|$$

appelé wronskien de x_1 et x_2 , ne s'annule pas sur *I* lorsque x_1 et x_2 sont linéairement indépendantes. On obtient :

$$u'(t) = -\frac{x_2(t) f(t)}{w(t)}$$
 et $v'(t) = \frac{x_1(t) f(t)}{w(t)}$.

Utilisation de séries entières

On peut chercher des solutions sous la forme d'un développement en série entière.

Cette méthode peut être envisagée quand a(t) et b(t) sont des polynômes simples. N'oubliez pas de vérifier que la (ou les) série entière obtenue a un rayon de convergence non nul.

Faites l'exercice 4.

4. Résolution dans le cas d'un système à coefficients constants

Reprenons l'écriture matricielle du système et du système homogène associé :

$$X'(t) = A X(t) + B(t)$$
 (S) et $X'(t) = A X(t)$ (S').

4.1 Cas où A est diagonalisable

Soit A diagonalisable; notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres et V_1, \ldots, V_p des vecteurs propres associés.

L'espace vectoriel des solutions du système homogène (S') admet pour base :

$$(V_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, V_p e^{\lambda_p t}).$$

4.2 Résolution de (S)

• Par réduction de A

On a $A = PRP^{-1}$ où R est diagonale ou triangulaire. Si l'on pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$ et $C(t) = P^{-1}B(t)$, le système s'écrit :

$$Y'(t) = RY(t) + C(t)$$

On résout ce système réduit et on en déduit X(t) = PY(t).

Si $B(t) \neq 0$, cette méthode nécessite le calcul de P^{-1} et peut être pénible.

• Par la méthode de « variation des constantes »

Si $(C_1(t), \dots, C_p(t))$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de (S'), on peut poser $X(t) = \sum_{i=1}^{p} u_i(t) C_i(t)$ où les u_i sont des fonctions de classe C^1 de I dans \mathbb{R} .

• Par la recherche d'intégrales premières indépendantes

Si λ est une valeur propre de A, comme det $(A - \lambda I_p) = 0$, il existe une combinaison linéaire, à coefficients non tous nuls, des lignes L_i de la matrice $A - \lambda I_p$ telle que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i L_i = 0$.

En utilisant cette combinaison linéaire à partir des lignes de

$$X' - \lambda X = (A - \lambda I_p)X + B$$

on obtient une équation différentielle ordinaire qui donne $y = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$.

Si A est diagonalisable, on obtient ainsi p combinaisons linéaires en x_i , d'où l'on déduit les x_i .

Faites l'exercice 5.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1: Soit $a \in \mathbb{K}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculez AB, BA, A^2 , B^2 , $e^A e^B$.

2. Calculez e^{A+B} . Que constatez vous ?

Exercice 2 : Soit *A* une matrice antisymétrique réelle. Montrez que $\exp(A)$ est une matrice orthogonale directe.

Exercice 3 : Résolvez l'équation différentielle :

$$(1+t)x'' - 2x' + (1-t)x = 0$$
 (1)

sur un intervalle ne contenant pas t = -1.

Exercice 4 : Résolvez l'équation différentielle :

$$tx''(t) + 2x'(t) + tx(t) = 0$$
(1)

sur un intervalle ne contenant pas 0.

Exercice 5 : Résolvez le système différentiel :

$$(S) \begin{cases} x' = 5x - 2y + e^{t} & (1) \\ y' = -x + 6y + t & (2) \end{cases}$$

Soit f une fonction de E dans F, espaces normés de dimensions finies sur \mathbb{R} .

1. Application différentiable

1.1 Dérivée selon un vecteur non nul

La dérivée de f au point $a \in E$ selon le vecteur non nul $v \in E$ est définie (si elle existe) par :

$$D_{v}f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

^(S) En physique, on obtient la vitesse de variation en un point d'un milieu perturbé (plasmas, soufflerie ...) d'une grandeur (température, pression ...), en considérant v unitaire.

1.2 Dérivées partielles d'ordre 1

Fixons une base (e_1, \ldots, e_n) dans *E*. On assimile alors *x* à $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

La dérivée de f selon le vecteur e_j est la dérivée partielle notée $D_j f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

1.3 Différentielle

Définition

f est différentiable au point $a \in E$ s'il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\forall h \in E \quad f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h),$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Une telle application linéaire L est alors unique. Elle est appelée différentielle de f en a et se note df(a). On dit aussi qu'il s'agit de l'application linéaire tangente à f en a.

Le vecteur $L(h) \in F$ sera noté $df(a) \cdot h$.

Comme E est de dimension finie, l'application linéaire L est continue.

Propriété

Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur v et $D_v f(a) = df(a) \cdot v$.

Cas particuliers

Une application constante est différentiable et sa différentielle est la fonction nulle.

La restriction d'une application linéaire à un ouvert est différentiable et égale à sa différentielle.

• Cas d'une fonction d'une variable ($E = \mathbb{R}$)

Si Ω est un ouvert de \mathbb{R} , la différentiabilité de f en $a \in \Omega$ est équivalente à la dérivabilité de f en a, et on a : $f'(a) = df(a) \cdot 1$.

• Cas d'une fonction numérique ($F = \mathbb{R}$)

En fixant une base dans *E*, on peut écrire $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$ et $L(h) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i$.

On a alors nécessairement $\alpha_i = D_i f(a)$.

Pour que f soit différentiable en a, il est nécessaire que les dérivées partielles existent. Mais ce n'est pas suffisant.

La *i* – *i*ème projection $(h_1, \ldots, h_n) \mapsto h_i$ est linéaire. Elle est donc différentiable et égale à sa différentielle. On peut la noter d h_i . On a donc :

$$\forall h \in E \qquad L(h) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) \, \mathrm{d} h_i \cdot h \quad \text{soit} \quad \mathrm{d} f(a) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) \, \mathrm{d} h_i$$

 $^{\otimes}$ Avec une approche différente, on aboutit bien à la forme vue en physique :

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x_i$$

Faites l'exercice 1.

• Matrice jacobienne

En fixant des bases dans E et dans F, on peut se ramener à une application f définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R}^m , soit :

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

On appelle matrice jacobienne de f au point a la matrice de sa différentielle en a :

$$J_{f}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{1}}{\partial x_{1}}(a) & \frac{\partial f_{1}}{\partial x_{2}}(a) & \cdots & \frac{\partial f_{1}}{\partial x_{n}}(a) \\ \frac{\partial f_{2}}{\partial x_{1}}(a) & \frac{\partial f_{2}}{\partial x_{2}}(a) & \cdots & \frac{\partial f_{2}}{\partial x_{n}}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{m}}{\partial x_{1}}(a) & \frac{\partial f_{m}}{\partial x_{2}}(a) & \cdots & \frac{\partial f_{m}}{\partial x_{n}}(a) \end{pmatrix}$$

1.4 Opérations sur les fonctions différentiables

• Différentielle d'une combinaison linéaire

Si f et g sont différentiables en a, et si α et β sont des réels, alors $\alpha f + \beta g$ et différentiable en a et on a :

$$d(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha df(a) + \beta dg(a).$$

• Différentielle de *B*(*f*, *g*)

Si B est bilinéaire et f et g des applications différentiables, B(f, g) est différentiable et :

$$dB(f,g)(a) = B(df,g)(a) + B(f,dg)(a)$$

72 Mathématiques

Différentielle d'une composée

So t $f: \Omega_1 \subset E \to F$ et $g: \Omega_2 \subset F \to G$ deux applications définies sur des ouverts tels que $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$.

Si f est différentiable en a et g différentiable en f(a), alors $g \circ f$ est différentiable en a et l'on a :

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a),$$

c'est-à-dire sous forme matricielle :

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a) .$$

Surveillez que les compositions que vous écrivez soient possibles.

• Cas dim *E* =1

Dans ce cas, f est un arc paramétré de F. On va écrire γ au lieu de f et noter $g \circ \gamma$ l'arc transformé de γ par g. On a alors :

$$(g \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

c'est-à-dire que la différentielle de g au point $\gamma(t)$ transforme la tangente à l'arc γ au point $\gamma(t)$ en la tangente à l'arc $g \circ \gamma$ au point $g \circ \gamma(t)$.

• Écriture des dérivées partielles (cas dim G =1)

Les dérivées partielles de la fonction composée :

$$u_1,\ldots,u_m)\mapsto f(x_1(u_1,\ldots,u_m),\ldots,x_n(u_1,\ldots,u_m))$$

s'écrivent :

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial u_i}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial u_i}(a) \times \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(a)).$$

Deur retrouver cette formule, représentez graphiquement la situation :

$$\begin{pmatrix} u_1\\ \vdots\\ u_m \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{f} f(x_1,\ldots,x_n)$$

et considérez les n chemins qui partent de u_i. Sur chaque chemin faites le produit des dérivées partielles rencontrées ; puis additionnez ces écritures.

2. Cas des applications numériques

2.1 Gradient

• Une base (e_1, \ldots, e_n) de E étant fixée, toute forme linéaire f sur E est de la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

où les $\alpha_i = f(e_i)$ sont des scalaires qui caractérisent f.

• La différentielle df(a) de f en a est donc de cette forme.
Si la base choisie est orthonormée, il existe donc un vecteur unique $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tel que :

$$\forall h \in E \qquad \mathrm{d}f(a) \cdot h = < A \mid h >.$$

Le vecteur A est appelé gradient de f en a. Il est noté $\nabla f(a)$.

Il s'exprime à l'aide des dérivées partielles sous la forme :

$$abla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i \right].$$

Interprétation du gradient

Si *f* est différentiable en *a*, la dérivée de *f* en *a* selon la direction définie par le vecteur unitaire \overrightarrow{v} est égale au produit scalaire : $\nabla f(a) \cdot v$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cette dérivée est maximale si $\nabla f(a) (\neq 0)$ et v sont colinéaires et de même sens.

Soit (x_1, x_2) le repérage d'un point sur une carte de géométrie et $f(x_1, x_2)$ son altitude. Le gradient en un point dirige la ligne de plus grande pente, c'est-à-dire la direction d'écoulement de l'eau en l'absence d'obstacle.

Faites l'exercice 2.

2.2 Extrémums

Définitions

Soit f une fonction numérique définie sur $D \subset E$.

f admet un maximum (resp. minimum) global (ou absolu) en $a \in D$ si

 $\forall x \in D$ $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$)

f admet un maximum (resp. minimum) local (ou relatif) en $a \in D$ s'il existe un voisinage V de a tel que :

 $\forall x \in V$ $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$)

• Existence d'un maximum et d'un minimum globaux

Si D est compact (c'est-à-dire fermé et borné puisqu'on est en dimension finie) et si f est continue, alors f admet un maximum et un minimum globaux atteints au moins une fois.

• Condition nécessaire d'existence d'un extrémum local

Si f présente un extremum local en a intérieur à D, et si f est différentiable en ce point, alors :

$$\nabla f(a) = \vec{0}$$

Un point vérifiant cette condition est appelé point critique , ou point stationnaire, de f.

De la point critique qui n'est pas un extrémum est dit point-col ou point-selle.

Le mot col vient de l'exemple de la fonction altitude et de la configuration (idéalisée) d'un col de montagne : minimum de la ligne de crête, maximum de la route, sans être un extrémum du paysage.

Le mot selle vient de l'exemple d'une selle de cheval.

74 Mathématiques

• Recherche des extrémums globaux

Les extrémums sont donc à chercher parmi les points critiques et les points où f n'est pas différentiable (le plus souvent les points frontière de D).

Sur la frontière, on considère une (ou plusieurs) restriction(s) de f.

Au voisinage d'un point critique, on étudie le signe de la différence f(x) - f(a) pour x voisin de a, ou, mieux, le signe de :

$$\Delta(h_1,\ldots,h_n) = f(a_1+h_1,\ldots,a_n+h_n) - f(a_1,\ldots,a_n)$$

avec les hi voisins de 0.

Vous devez observer que les termes de degré 1 en h_i disparaissent. Localement, c'est l'expression constituée par les termes de degré 2 qui va donner le signe de la différence.

Faites les exercices 3 et 4.

2.3 Vecteurs tangents à une partie

Définition

Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est **tangent** à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $] - \varepsilon, \varepsilon[$, dérivable en 0, à valeurs dans X, tels que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

• Cas $E = \mathbb{R}^3$

Soit X le graphe d'une application différentiable sur un ouvert de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire la surface d'équation cartésienne z = f(x, y).

Les vecteurs tangents à X en un point A constituent un plan si $\nabla f(A) \neq \vec{0}$. C'est le plan affine tangent \mathcal{P} à la surface en ce point. Il a pour équation :

$$M \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \nabla f(A) = 0.$$

Le gradient $\nabla f(A)$ est donc orthogonal à la ligne de niveau de f passant par A.

Dans l'exemple de la fonction altitude, le gradient en un point est orthogonal à la ligne de niveau passant par ce point.

3. Applications de classe C^1

• Une application f est dite de classe C^1 sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si df est continue sur Ω .

• Une application f est de classe C^1 sur Ω si, et seulement si, les dérivées partielles relatives à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω .

• Les propriétés des opérations sur les applications de classe C^1 sont les mêmes que pour les applications différentiables.

• Si f est une application de classe C^1 de Ω dans F si γ est une application de classe C^1 de [0; 1] dans Ω , si $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \,\mathrm{d}t.$$

• Si Ω est connexe par arcs, f est constante sur Ω si, et seulement si, f est de classe C^1 et df(a) = 0 pour tout $a \in \Omega$.

0 Rappelez-vous le cas des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} : f' = 0 entraîne f constante sur un intervalle. Si f est définie sur une réunions d'intervalles il n'y a aucune raison que la constante soit la même d'un intervalle à l'autre.

4. Applications de classe C^k

4.1 Dérivées partielles d'ordre k

• Si les fonctions dérivées partielles d'ordre 1 admettent elles-mêmes des dérivées partielles en a, ces dérivées sont appelées dérivées partielles secondes, ou dérivées partielles d'ordre 2, de f en a. On les note :

$$D_{i^{2}}f(a) = D_{i}(D_{i}f)(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}^{2}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\right)(a)$$
$$D_{ij}f(a) = D_{i}(D_{j}f)(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}\partial x_{j}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\right)(a).$$

Les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 se définissent par récurrence de façon analogue.

• Si toutes les dérivées partielles d'ordre k sont continues sur Ω , on dit que f est de classe C^k sur Ω .

Si les dérivées partielles de tous ordres existent, f est dite de classe C^{∞} .

• Les propriétés des opérations sur les applications de classe C^k sont les mêmes que pour les applications de classe C^1 .

4.2 Théorème de Schwarz

Si les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ sont continues en *a*, alors elles sont égales :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Faites l'exercice 5.

4.3 Exemples d'équations aux dérivées partielles

Aucune théorie concernant les équations aux dérivées partielles n'est à votre programme. En cas d'exercice sur le sujet, vous devez effectuer un changement de variables, utiliser la formule dérivation des fonctions composées, et obtenir une équation réduite par rapport aux nouvelles variables.

Sans indication, vous êtes en dimension 2 et vous passez en coordonnées polaires :

 $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$.

Les dérivées partielles qui vous sont nécessaires sont à lire dans les matrices jacobiennes :

$$J = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} ; \qquad J^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}$$



Faites l'exercice 6.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

Étudiez la différentiabilité de f.

Exercice 2 : Soit *f* la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{2x^3 + 3xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Calculez la dérivée de f en (0, 0) selon un vecteur unitaire quelconque, puis le gradient $\nabla f(0)$. f est-elle différentiable en (0, 0)?

Exercice 3: Soit *f* la fonction de $\Omega = (\mathbb{R}^*_+)^2$ dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$$

1. Déterminez les points critiques de f.

2. Quelle est la nature de ces points critiques ?

3. a) En utilisant la convexité d'une fonction, montrez que :

$$\forall (a, b, c) \in \left(\mathbb{R}^*_+\right)^3 \qquad \frac{a+b+c}{3} \ge (abc)^{1/3}$$

b) Montrez que *f* admet un minimum global.

Exercice 4 : Soit *f* la fonction définie

par
$$f(x, y) = (y - x)^3 + 6xy$$
 sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; -1 \le x \le y \le 1\}$.

Étudiez les extrémums de f.

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\begin{cases} f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Montrez que f admet des dérivées partielles secondes en tout point.

Que pouvez-vous déduire du calcul de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$?

Exercice 6 : Soit $U =]0, +\infty[\times\mathbb{R}]$. Déterminez toutes les fonctions f, C^1 sur U, qui vérifient :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x} \quad (1)$$

1. Tribu des événements

1.1 Événements liés à une expérience aléatoire

Comme en première année, on associe à une expérience aléatoire un univers Ω . Un événement est une partie de Ω et vous connaissez déjà les opérations sur les événements.

Avant de définir une probabilité, on sélectionne les événements qui seront probabilisés, et ce n'est pas toujours $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier, mais une tribu \mathcal{T} .

1.2 Tribu des événements

• Dans le cas où Ω est dénombrable, on retient $\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{T}$ comme ensemble des événements liés à \mathcal{E} .

• Dans le cas où Ω est infini non dénombrable, on retient comme ensemble des événements liés à \mathcal{E} , une partie \mathcal{T} de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(1) $\Omega \in \mathcal{T}$

(2) $A \in \mathcal{T} \implies \overline{A} \in \mathcal{T}$ (stabilité de \mathcal{T} par passage au complémentaire)

(3) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{T} , $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est encore un élément de \mathcal{T} (stabilité

de \mathcal{T} par réunion dénombrable)

• On dit que \mathcal{T} est une **tribu** sur Ω . Les trois axiomes de définition de \mathcal{T} entraînent les autres propriétés :

(4) $\emptyset \in \mathcal{T}$

(5) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{T} , $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est encore un élément de \mathcal{T} (stabilité

de \mathcal{T} par intersection dénombrable)

• Dans tous les cas, on appelle **espace probabilisable** lié à l'expérience aléatoire \mathcal{E} , le couple (Ω, \mathcal{T}) où Ω est l'univers des résultats possibles et \mathcal{T} la tribu des événements liés à \mathcal{E} .

2. Probabilités

2.1 Définition et premières propriétés

 (Ω, \mathcal{T}) étant un espace probabilisable associé à une expérience aléatoire \mathcal{E} , on appelle probabilité définie sur Ω toute application \mathbb{P} de \mathcal{T} dans [0; 1] qui vérifie les axiomes suivants :

 $(\mathbf{A}_1) \ \mathbb{P}(\Omega) = 1$

(A₂) Pour toute réunion finie ou dénombrable d'éléments de \mathcal{T} , deux à deux incompatibles,

on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i} A_{i}\right) = \sum_{i} \mathbb{P}(A_{i}).$$

On appelle alors **espace probabilisé** le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Les propriétés vus en première année se prolongent.

Revoir dans la même collection : Toute la MPSI en fiches, fiche 37 des maths.

2.2 Propriétés de limite monotone d'une probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Continuité croissante

Si (A_n) est une suite croissante (au sens de l'inclusion) d'événements de \mathcal{T} , la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ converge et :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Continuité décroissante

Si (A_n) est une suite décroissante (au sens de l'inclusion) d'événements de \mathcal{T} , la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ converge et :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Sous-additivité

Si (A_n) est une suite d'événements de \mathcal{T} , alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2.3 Conséquence

Pour toute suite (A_n) d'événements, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \qquad ; \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

2.4 Événement négligeable (pour une probabilité)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Si *A* est un événement tel que $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que *A* est **négligeable**.
- Si *A* est un événement tel que $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que *A* est **presque sûr**.

• Soit *p* une propriété et *A* l'ensemble des résultats ω qui réalisent *p*. Si $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que la propriété est vraie presque sûrement.

Une curiosité de votre programme : les variables à densité ne sont pas au programme, alors que c'est dans ce cas qu'on rencontre le plus souvent des événements qui ne sont pas impossibles et dont la probabilité est nulle. Mais vous avez un exemple : si on lance indéfiniment une pièce non truquée, l'événement « n'obtenir que des piles » n'est pas impossible mais a une probabilité nulle.

Pour une première idée, pensez à la mesure des intervalles par leurs longueurs : un point (théorisé) n'est pas vide et pourtant sa longueur est nulle.

3. Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

3.1 Définition

Soit *A* un événement tel que P(A) > 0. En posant, pour tout événement *B* :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

on définit une probabilité appelée probabilité conditionnelle relative à A.

 $\mathbb{P}_A(B)$ se note aussi $\mathbb{P}(B|A)$ et se lit « probabilité de *B* sachant *A*. »

La notation \mathbb{P}_A est la plus correcte pour désigner une probabilité. La notation $\mathbb{P}(B|A)$ est la plus pratique, surtout lorsque l'écriture de A se complique. Mais ne croyez surtout pas que (B|A) est un événement.

3.2 Propriétés

 \mathbb{P}_A est une probabilité ; elle en a donc toutes les propriétés. Avec l'autre écriture en ligne, on a donc :

$$\mathbb{P}(\overline{B}|A) = 1 - \mathbb{P}(B|A)$$

 $\mathbb{P}(B \cup C|A) = \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(C|A) - \mathbb{P}(B \cap C|A)$

Veillez à avoir toujours le même conditionnement A. N'inventez pas de formule du type : $\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(B|\overline{A}) = ??$

3.3 Formule des probabilités composées

C'est la définition de la probabilité conditionnelle écrite en ligne :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B|A)$$

et sa généralisation qui commence par :

 $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(C|A \cap B).$

3.4 Formule des probabilités totales

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet dénombrable d'événements, c'est-à-dire que les événements

sont tous de probabilité non nulle, deux à deux incompatibles. et que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$.

Pour tout événement B, la série ci-dessous converge et on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}(B|A_n).$$

3.5 Formule de Bayes

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet dénombrable d'événements et *B* un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}(B|A_n)} \cdot$$

Les A_n sont des hypothèses pour l'événement B. La formule de Bayes donne les probabilités des hypothèses après réalisation de B.

4. Indépendance en probabilité

4.1 Événements indépendants

• Définition

On dit que deux événements A et B sont indépendants si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Si $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, cela correspond à la fois :

- $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$, soit A ne dépend pas de B;
- $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)$, soit *B* ne dépend pas de *A*.

L'indépendance de deux événements dépend de la probabilité choisie.

Propriété

Si A et B sont indépendants, alors il en est de même pour A et \overline{B} , pour \overline{A} et B et pour \overline{A} et \overline{B} .

4.2 Indépendance mutuelle de n événements

Des événements A_1, \ldots, A_n sont mutuellement indépendants, ou indépendants dans leur ensemble, si pour toute partie I de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i).$$

Cette notion est plus forte que l'indépendance deux à deux.

Par exemple, il peut arriver que trois événements A, B, C soient deux à deux indépendants, mais ne vérifient pas la condition supplémentaire $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$ pour l'indépendance d'ensemble.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Sur un stock de 100 dés, 25 sont pipés. La probabilité d'obtenir 6 sur un dé pipé vaut $\frac{1}{2}$.

1. On choisit un dé, on le lance et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé?

2. On le relance et on obtient à nouveau 6. Quelle la probabilité qu'il soit pipé?

Exercice 2 : Dans une urne U_1 sont déposées b_1 boules blanches et n_1 boules noires.

Dans une urne U_2 sont déposées b_2 boules blanches et n_2 boules noires.

On prélève une boule dans U_1 et on la met dans U_2 ; puis on tire une boule dans U_2 et on constate qu'elle est blanche.

Quelle est la probabilité que la première boule l'était aussi.

Exercice 3 : Le paradoxe de Monty Hall

Vous êtes candidat à un jeu télévisé. Vous êtes face à trois portes A, B, C. Derrière l'une se trouve une voiture ; derrière les deux autres, se trouvent une chèvre. La répartition des chèvres et de la voiture est équiprobable, et le présentateur la connaît.

Le présentateur vous demande de choisir une porte.

Sans révéler ce qui se trouve derrière votre porte choisie, le présentateur ouvre une des deux autres portes et révèle une chèvre. Il vous offre alors la possibilité de conserver votre choix ou d'en changer.

Que faites-vous ? Pour ceci, déterminez la probabilité de chacune des deux stratégies « conserver », « changer ».

Exercice 4 : Des personnes A_1, \ldots, A_n se communiquent successivement une information du type vrai-faux. Chaque individu A_k transmet l'information à A_{k+1}

- de façon correcte avec la probabilité $\alpha \in]0, 1[,$

- en la transformant en son contraire avec la probabilité $1 - \alpha$.

Calculez la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit celle qui a été émise par A_1 .

Quelle est la limite de p_n quand *n* tend vers l'infini?

15 Variables aléatoires discrètes

Soit $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{T})$ un espace probabilisé.

1. Généralités

1.1 Variable aléatoire réelle

Définition

Une variable aléatoire réelle X est une application de Ω dans \mathbb{R} .

Si A est une partie de \mathbb{R} , on définit sa probabilité par :

$$P_X(A) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right)$$

à condition que l'image réciproque $X^{-1}(A)$ appartienne à \mathcal{T} .

Cette probabilité se note $\mathbb{P}(X = a)$ si $A = \{a\}, \mathbb{P}(a < X < b)$ si $A =]a, b[\ldots$

Opérations algébriques

X et Y étant deux variables définies sur le même espace probabilisé et λ un réel, les opérations sur les fonctions permettent de définir :

$$\lambda X$$
 ; $X + Y$; XY .

1.2 Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire X est discrète quand son univers-image $\Omega_1 = X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

Dans ce cas, connaître la loi de probabilité (ou distribution de probabilité) de *X*, c'est connaître les probabilités élémentaires :

$$\forall x_i \in \Omega_1 \qquad \mathbb{P}(X = x_i) = p_i.$$

Il est toujours utile de vérifier que $p_i \ge 0$ et $\sum_i p_i = 1$.

 $\sum_{i} p_{i} \text{ est une somme ordinaire dans le cas où } \Omega_{1} \text{ est fini et une série numérique dans la cas où } \Omega_{1} \text{ est infini dénombrable.}$

ou s21 est infini denombrable.

La loi de probabilité de X est l'ensemble des couples (x_i, p_i) des valeurs possibles et de leurs probabilités élémentaires.

Pour dire que X et Y ont la même loi, ou que X suit une loi \mathcal{L} on peut utiliser la notation $X \sim Y$ et $X \sim \mathcal{L}$ ou des variantes comme $X \rightsquigarrow \mathcal{L}$. Mais c'est tout aussi clair de le dire en français !

1.3 Fonction d'une variable aléatoire

Soit g une fonction de $\Omega_1 \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} . Alors Y = g(X) est une variable aléatoire dont l'univers-image (fini) est $Y(\Omega) = g(\Omega_1)$ et les probabilités élémentaires :

$$\forall y_i \in g(\Omega_1)$$
 $\mathbb{P}(Y = y_i) = \sum_{g(x_k) = y_i} \mathbb{P}(X = x_k).$

0 On regroupe tous les x_k dont l'image par g est égale à y_i .

2. Variable aléatoire vectorielle

2.1 Couple de variables aléatoires

Soit X et Y deux variables discrètes définies sur le même espace probabilisé. Connaître la loi du couple, c'est connaître les probabilités élémentaires :

$$\forall x_i \quad \forall y_j \qquad \mathbb{P}(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = p_{ij}.$$

On peut en déduire les lois marginales

de X:
$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_j p_{ij} = p_{i.}$$

de Y: $\mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_i p_{ij} = p_{.j}$

Mais, en général, les lois marginales ne permettent pas de reconstituer la loi du couple (X, Y).

2.2 Lois conditionnelles

Loi de X pour $Y = y_i$ fixé :

$$\mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i \text{ et } Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

Loi de *Y* pour $X = x_i$ fixé :

$$\mathbb{P}(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i \text{ et } Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}} \cdot$$

2.3 Indépendance de deux variables aléatoires

$$f(i,j) \qquad p_{ij} = p_{i.} p_{.j}.$$

2.4 Extension à n variables aléatoires

Loi conjointe

Soit X_1, \ldots, X_n *n* variables discrètes définies sur le même espace probabilisé.

La définition du vecteur aléatoire (X_1, \ldots, X_n) et de sa loi de probabilité sont analogues au $\cos n = 2.$

Indépendance mutuelle

Les variables aléatoires X_1, \ldots, X_n sont mutuellement indépendantes si, et seulement si :

$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}$$
 $\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$

Propriété

Si X_1, \ldots, X_n sont mutuellement indépendantes, toute sous-famille l'est aussi.

Théorème

Si $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_p$ sont mutuellement indépendantes, alors les variables aléatoires $f(X_1, \ldots, X_n)$ et $g(X_{n+1}, \ldots, X_p)$ sont indépendantes.

3. Lois usuelles

3.1 Loi géométrique

Situation modélisée

Dans les hypothèses qui conduisent à la loi binomiale (répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli), on obtient la loi géométrique quand la variable aléatoire X désigne le temps d'attente de l'événement A, c'est-à-dire le rang de la première réalisation de A.

• Loi de probabilité

X suit la loi géométrique de paramètre $p \in [0, 1[$, notée $\mathcal{G}(p)$, si l'univers-image est \mathbb{N}^* et si :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad P(X = k) = p q^{k-1}.$$

Espérance mathématique et variance

$$E(X) = \frac{1}{p}$$
; $V(X) = \frac{q}{p^2}$.

Loi sans mémoire

La loi géométrique est l'unique loi discrète dont le processus modélisé est sans mémoire, c'est-à-dire que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbb{P}(X > m + n \mid X > m) = \mathbb{P}(X > n)$$

3.2 Loi de Poisson

Situation modélisée

La loi de Poisson est utilisée pour modéliser le nombre d'apparitions d'un événement rare, par exemple dans la désintégration atomique.

Les humoristes apprécieront aussi son usage pour décrire la répartition des taches de rouille sur la coque d'un bateau de pêche !

• Loi de probabilité

X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si l'univers-image est \mathbb{N} et si :

$$\forall k \in \mathbb{N}$$
 $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

• Espérance mathématique et variance

$$E(X) = \lambda$$
; $V(X) = \lambda$.

• Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suive la

loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim_{n \to \infty} n p_n = \lambda$ (avec $\lambda > 0$).

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \, \frac{\lambda^k}{k!} \, \cdot \,$$

Ce théorème donne une limite lorsque *n* tend vers l'infini. Mais on ne va pas attendre l'infini pour s'en servir ! On peut adopter les conventions :

Lorsque $n \ge 30$, $p \le 0, 1$ avec $np \le 10$, on peut remplacer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson de même espérance, soit $\mathcal{P}(np)$.

Si $n p_n$ a une limite finie quand n tend vers l'infini, c'est que p_n devient voisin de zéro, ce qui fonde la modélisation par une loi de Poisson du nombre d'apparitions d'un événement rare.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé, qui suivent la même loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère la matrice $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$.

Quelle est la probabilité pour qu'elle soit inversible ?

Exercice 2 : Deux joueurs lancent une pièce de monnaie parfaitement équilibrée n fois chacun.

Calculez la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de fois pile.

Exercice 3 : Dans une station de ski, on peut se rendre aux départs respectifs des pistes A et B par deux remontées mécaniques qui partent du même point D de la station.

Le nombre de skieurs qui se présentent en D pendant une heure est une variable aléatoire N qui suit la loi de Poisson de paramètre λ .

On admet d'autre part qu'on a atteint un régime stable tel que chacun des skieurs choisit, indépendamment des précédents, A ou B avec des probabilités fixes p et q = 1 - p.

On note X la variable aléatoire égale au nombre des skieurs qui choisissent A pendant une heure.

1. Déterminez la loi conjointe du couple (X, N).

2. Déterminez la loi marginale de X. De quelle loi s'agit-il?

3. Calculez le nombre moyen de skieurs se présentant pendant une heure au départ de la piste *A*.

1. Espérance

1.1 Définition

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^+ , l'espérance de X est la somme, dans $[0, +\infty]$, de la famille $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. On la note E(X).

Si X est une variable aléatoire réelle, X est d'espérance finie si la famille $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. La somme de la famille est l'espérance de X.

Dans le cas où $X(\Omega) = \mathbb{N}$, cela revient à définir l'espérance par la somme de la série $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp_k$ en exigeant que cette série soit absolument convergente.

En effet, pour que la somme d'une série convergente ne dépende pas de l'ordre des termes (convergence commutative), il faut et il suffit qu'il y ait convergence absolue.

Pour une série semi-convergente, certains résultats défient l'intuition. Par exemple, on peut modifier l'ordre des termes de sorte que la nouvelle série soit convergente vers n'importe quel nombre choisi à l'avance !

1.2 Propriétés de l'espérance

Soit X et Y définies sur le même espace probabilisé.

Linéarité

Si a et b sont réels, on a :

E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).

Croissance

Si $X \leq Y$ presque sûrement, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Par conséquent, si $X \ge 0$, alors $E(X) \ge 0$;

si $|X| \leq Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

1.3 Théorème du transfert

Soit X une variable aléatoire discrète et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans \mathbb{R} . f(X) est d'espérance finie si, et seulement si, la famille $(f(x)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. On a alors :

$$E[f(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x).$$

2. Variance, covariance

2.1 Variance

Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, on appelle variance de X le réel :

$$V(X) = E[(X - E(X))^{2}] = E(X^{2}) - (E(X))^{2}$$

L'écart type est défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

2.2 Variable centrée réduite

Pour a et b réels, on a toujours :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$
; $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Si $V(X) \neq 0$, en posant $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ on obtient E(Y) = 0 et V(Y) = 1.

Y est la variable centrée réduite associée à X.

2.3 Moments d'ordre k

Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit les moments m_k d'ordre k et les moments centrés μ_k d'ordre k par :

$$m_k = E(X^k) = \sum_x x^k \mathbb{P}(X = x)$$
; $\mu_k = E[(X - E(X))^k]$

2.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie et

$$\left[E(XY)\right]^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2)$$

Ø Il s'agit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz associée au produit scalaire défini sur l'espace des variables aléatoires définies sur Ω et admettant un moment d'ordre 2 par :

$$\langle X \mid Y \rangle = E(XY).$$

cf. Toute la MPSI en fiches, fiche 34 des maths

2.5 Covariance

La covariance de X et de Y est définie par :

$$Cov(X, Y) = E | (X - E(X))(Y - E(Y)) | = E(XY) - E(X) E(Y).$$

On a: Cov(X, Y) = Cov(Y, X) et Cov(X, X) = V(X).

2.6 Somme et produit de deux variables aléatoires

Cas général

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$
$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{Cov}(X, Y)$$

• Cas où X et Y sont indépendantes

$$Cov(X, Y) = 0$$
$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$
$$E(XY) = E(X) E(Y)$$

La réciproque est fausse : on peut avoir Cov(X, Y) = 0 sans que X et Y soient indépendantes.

2.7 Cas de n variables aléatoires

• Espérance d'une somme

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n).$$

Variance d'une somme

$$V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i < j} Cov(X_i, X_j).$$

Dans le cas où les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes, on a :

 $V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n).$

3. Loi faible des grands nombres

3.1 Inégalité de Markov

Si X ne prend que des valeurs positives :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|X| \ge \varepsilon) \le \frac{E(X)}{\varepsilon} \ \cdot$$

3.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(\left|X - E(X)\right| \ge \varepsilon) \le \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \ \cdot$$

 $^{\textcircled}$ La majoration fournie est assez médiocre. Mais c'est une étape préliminaire pour démontrer des résultats plus importants.

3.3 Loi faible des grands nombres

Soit (*X_n*) une suite de variables aléatoires indépendantes admettant la même espérance μ et la même variance σ^2 .

En notant
$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$
 leur moyenne, on a :
 $\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|M_n - \mu| > \varepsilon) = 0.$

4. Fonction génératrice

4.1 Définition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . La fonction génératrice G_X de X est définie sur \mathbb{R} par :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) t^k.$$

Cette série entière a un rayon de convergence $R \ge 1$.

4.2 Propriétés

• Si X et Y ont la même fonction génératrice, elles suivent la même loi de probabilité.

• La variable aléatoire X admet une espérance E(X) si, et seulement si, G_X est dérivable en 1, et on a alors :

$$E(X) = G'_X(1).$$

• La variable aléatoire X admet une variance si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1. On a alors :

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2.$$

• Si X et Y sont indépendantes, on a :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)$$

4.3 Fonctions génératrices des lois usuelles

• Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

 $G_X(t) = 1 - p + pt$ $R = +\infty$

• Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

 $G_X(t) = (1 - p + pt)^n$ $R = +\infty$

• Loi géométrique G(p)

$$G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1 - p)t}$$
 $R = \frac{1}{1 - p} > 1$

• Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$$
 $R = +\infty$

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Soit *X* une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Soit Y la variable de Bernoulli qui vaut 0 lorsque X prend une valeur impaire et 1 lorsque X prend une valeur paire.

Quelle est l'espérance de Y?

Exercice 2 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans \mathbb{N} . On suppose que toutes les variables X_i suivent la même loi de probabilité qui possède une espérance μ .

Soit *N* une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , ayant une espérance, et indépendante des variables X_i .

On pose $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Calculez l'espérance de S.

Exercice 3 : Soit *X* une variable aléatoire discrète bornée, admettant un moment d'ordre 2, *a* un réel et β un nombre tel que $|X(\omega)| \leq \beta$ pour tout $\omega \in \Omega$. Montrez que :

$$\mathbb{P}(|X| > a) \ge \frac{E(X^2) - a^2}{\beta^2} \cdot$$

Exercice 4 : Soit *X* et *Y* des variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement les lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.

Démontrez que X + Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

La méthode la plus rapide utilise les fonctions génératrices.

Exercice 5 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, deux à deux indépendantes, qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1[$, soit $\mathcal{B}(1, p)$.

Pour $n \ge 1$, on pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$.

- **1.** Déterminez la loi de Y_n , puis $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
- **2.** Calculez $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
- 3. Montrez que :

$$\forall \varepsilon > 0$$
 $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2p\right| \ge \varepsilon\right) = 0.$

1. Compléments sur les groupes

Exercice 1

Soit G un groupe dont l'élément neutre est noté 1. Comme il est non commutatif, il existe deux éléments a et b de G tels que $ab \neq ba$, ce qui entraîne $a \neq 1$, $b \neq 1$ et $a \neq b$.

D'autre part, $ab \neq 1$, sinon on aurait $b = a^{-1}ab = a^{-1}$ et $ba = a^{-1}a = 1 = ab$.

De même, $ba \neq 1$, $ba \neq a$ et $ba \neq b$.

G contient donc au moins 5 éléments distincts 1, a, b, ab, ba.

Il reste à démontrer par disjonction des cas que a^2 est différent des éléments précédents.

Si $a^2 \neq 1$, alors a^2 est le sixième élément de G.

Si $a^2 = 1$, alors le sixième élément est, par exemple, *aba*.

Dans tous les cas, G contient au moins 6 éléments.

Exercice 2

Pour k entier impair, l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = x^k$ est une bijection, en particulier pour k = 2015.

Par ailleurs, on a : f(x * y) = f(x) + f(y).

f transporte donc la structure de groupe abélien de $(\mathbb{R}, +)$ et les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}, *)$ sont isomorphes.

Exercice 3

Il s'agit de mettre en évidence une propriété qu'un groupe possède et pas l'autre et qui serait transportée par un isomorphisme.

 $(\mathbb{Z}, +)$ est monogène, engendré par 1.

Démontrons par l'absurde que $(\mathbb{Z}^2, +)$ n'est pas monogène. Pour ceci, supposons que $(\mathbb{Z}^2, +)$ soit monogène, engendré par (a, b). Alors :

$$\exists n \in \mathbb{Z} \quad (1,0) = n(a,b) = (na,nb)$$
$$\exists p \in \mathbb{Z} \quad (0,1) = p(a,b) = (pa,pb)$$

De na = 1 et nb = 0 on déduit $n \neq 0$ puis b = 0. Ce résultat est contradictoire avec pb = 1. On rejette donc l'hypothèse. Par conséquent (\mathbb{Z}^2 , +) n'est pas monogène et les deux groupes ne sont pas isomorphes.

Exercice 4

Soit *a* un élément différent de l'élément neutre de *G*. L'ordre du sous-groupe engendré par *a* est ≥ 2 . C'est un diviseur de l'ordre de *G* d'après le théorème de Lagrange.

Comme l'ordre de G est un nombre premier, l'ordre du sous-groupe engendré par a est égal à l'ordre de G. Donc G est engendré par a.

2. Compléments sur les anneaux

Exercice 1

Comme x admet un symétrique à droite, il existe $x' \in A$ tel que xx' = 1. On a :

$$(x'x-1)x' = x'xx' - x' = x' - x' = 0.$$

Puisque xx' = 1, on a $x' \neq 0$ car sinon on aurait 0 = 1 et l'anneau A serait réduit à $\{0\}$. Comme (x'x - 1)x' = 0 et $x' \neq 0$ dans un anneau intègre, on obtient x'x - 1 = 0, soit x'x = 1.

x admet donc aussi un symétrique à gauche.

Exercice 2

• Pour montrer que \sqrt{I} est un sous-groupe pour l'addition, considérons deux éléments quelconques x et y de \sqrt{I} , et montrons que $x - y \in \sqrt{I}$.

Il existe alors des entiers *m* et *n* tels que $x^n \in I$ et $y^m \in I$.

Dans l'anneau commutatif A, nous pouvons utiliser la formule du binôme :

$$(x - y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^{n+m-k} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k}$$

Dans la suite du calcul, attention à ne pas introduire une puissance négative car x et y ne sont pas supposés inversibles.

Pour
$$0 \le k \le n$$
, on a : $x^k y^{n+m-k} = y^m (x^k y^{n-k}) \in I$ car $y^m \in I$.
Pour $n \le k \le n+m$, on a : $x^k y^{n+m-k} = x^n (x^{k-n} y^{n+m-k}) \in I$ car $x^n \in I$.

Comme I est un sous-groupe pour l'addition, la somme de termes qui appartiennent tous à I appartient aussi à I.

On a donc $(x - y)^{n+m} \in I$, ce qui démontre que $x - y \in \sqrt{I}$.

• Soit $x \in \sqrt{I}$ et $a \in A$; alors $(xa)^n = x^n a^n$ car l'anneau est commutatif.

Comme $x^n \in I$, on a $(xa)^n \in I$ ce qui signifie que $xa \in \sqrt{I}$.

• \sqrt{I} est donc un idéal de A.

Exercice 3

Comme \overline{a} est inversible si, et seulement si, *a* et 4725 sont premiers entre eux, il s'agit de déterminer $\varphi(4725)$.

De la décomposition en éléments simples $4725 = 3^3 \times 5^2 \times 7$, on déduit :

avec la première formule : $\varphi(4725) = 2 \times 3^2 \times 4 \times 5^1 \times 6 \times 7^0 = 2160$,

avec la deuxième formule : $\varphi(n) = 4725(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{7}) = 2160.$

Exercice 4

Si *m* est un entier compris entre 1 et *n* et premier avec *n*, il en est de même de n - m.

En effet s'il existe des entiers *u* et *v* tels que un+vm = 1 (Bézout), on alors (u+v)n-v(n-m) = 1.

L'application $m \mapsto n - m$ est donc une bijection entre les entiers premiers avec *n* compris entre 1 et $\frac{n}{2}$ et ceux compris entre $\frac{n}{2}$ et *n*.

Comme $\frac{n}{2}$ peut être entier, mais pas premier avec *n*, on en conclut que $\varphi(n)$ est la somme de deux entiers égaux, donc est pair.

Exercice 5

On calcule le PGCD de P et P' à l'aide de l'algorithme d'Euclide, ce qui conduit à réaliser des divisions euclidiennes successives :

$$P = P'Q_1 + R_1 \quad \text{avec} \quad Q_1 = \frac{1}{4}X - \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad R_1 = -3X^2 + 12X - 12,$$

$$P' = R_1Q_2 + R_2 \quad \text{avec} \quad Q_2 = -\frac{4}{3}X - \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad R_2 = 0.$$

Le pGCD de P et P' est le polynôme unitaire associé au dernier reste non nul, soit $X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$.

2 est racine double de P et de P'. C'est donc une racine d'ordre au moins trois de P. En mettant $(X - 2)^3$ en facteur dans P, il vient :

$$P = (X - 2)^3 (X + 2) .$$

3. Réduction des endomorphismes

Exercice 1

1. Im (u) est toujours stable par u.

Si $x \in \text{Im}(u)$, il existe $a \in E$ tel que x = u(a), ce qui entraîne $u(x) = u^2(a)$ puis $u^2(x) = u^3(a) = -u(a) = -x$.

On a donc $v^2 = -Id_{Im(u)}$ et v est bien un isomorphisme et $v^{-1} = -v$.

2. De
$$det(v^{-1}) = \frac{1}{det v}$$
 et $det(-v) = (-1)^{\dim \operatorname{Im}(u)} det v$ on déduit alors :
 $(det(v))^2 = (-1)^{\dim \operatorname{Im}(u)} > 0$

La dimension de Im(u) est donc paire.

Exercice 2

1. Notons $\mathcal{P}(k)$ la propriété à démontrer. $\mathcal{P}(1)$ est vraie par hypothèse. Supposons $\mathcal{P}(k)$. On a alors :

$$f \circ g^{k+1} = (f \circ g^k) \circ g = g^k \circ f \circ g + kg^{k+1}$$
d'après $\mathcal{P}(k)$

$$g^{k+1} \circ f = g^k \circ (g \circ f) = g^k \circ f \circ g - g^{k+1}$$
d'après $\mathcal{P}(1)$
d'où $\mathcal{P}(k+1)$ par différence.

2. φ_f est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. D'après **1.** on a $\varphi_f(g^k) = kg^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Si $g^k \neq 0$, k est une valeur propre de φ_f . Comme E est de dimension finie, φ_f ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs propres. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^p = 0$.

Exercice 3

On a : $f_1 = f_1 \circ Id_E = f_1 \circ f_1 + f_1 \circ f_2 + f_1 \circ f_3 = f_1^2$. f_1 est donc un projecteur. Il en est de même pour f_2 et pour f_3 . On a : $g^2 = f_1 + f_2 + 4f_3 = g + 6f_3$. Comme $g = Id_E - 3f_3$, on en déduit $g^2 + g - 2Id_E = 0$. Le polynôme $P = X^2 + X - 2$ est donc annulateur de g. Puisque P = (X - 1)(X + 2) est scindé à racines simples, g est diagonalisable.

Exercice 4

Vérifiez d'abord que la seule racine réelle de $X^3 - X - 1$ est telle que $\alpha > 0$ (faites le tableau de variation de la fonction polynomiale).

• Première solution

A annule $P = X^3 - X - 1$. Ce polynôme a trois racines distinctes :

 $\alpha \in \mathbb{R}^*$; β et $\overline{\beta}$ complexes non réelles

A est donc diagonalisable sur \mathbb{C} .

En notant p, q et r les ordres de multiplicité respectifs des valeurs propres, on a q = r car le polynôme est à coefficients réels.

On en déduit : det $A = \alpha^p \times \beta^q \times \overline{\beta}^q = \alpha^p \times |\beta|^{2q} > 0$.

Deuxième solution

Considérons le polynôme P :

$$P(x) = (-1)^n \chi_A(x) = \det(A - xI) = (-x)^n + \cdots$$

On a donc $\lim_{x \to -\infty} P(x) = +\infty$. Si on avait $P(0) \le 0$, par continuité de P, il existerait $x_0 \in \mathbb{R}_-$ tel que $P(x_0) = 0$, ce qui serait en contradiction avec l'étude initiale sur α .

Par conséquent det A = P(0) > 0.

Exercice 5

• Recherche des valeurs propres

Le polynôme caractéristique de A est tel que :

$$-\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -1 - x & 1 & 1 \\ 1 & -1 - x & 1 \\ 1 & 1 & -1 - x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - x & 1 - x & 1 - x \\ 1 & -1 - x & 1 \\ 1 & 1 & -1 - x \end{vmatrix}$$
$$= (1 - x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 - x & 1 \\ 1 & 1 & -1 - x \end{vmatrix} = (1 - x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 - x & 0 \\ 1 & 0 & -2 - x \end{vmatrix}$$
$$= -(x - 1)(x + 2)^2$$

• Diagonalisation de A

Espace propre associé à la valeur propre 1

 $X \in E_1 \iff AX = X \iff x = y = z$ donc $E_1 = \operatorname{Vec}\{V_1\}$ avec $V_1 = (1, 1, 1)$

Espace propre associé à la valeur propre -2

 $X \in E_{-2} \iff AX = -2X \iff x + y + z = 0$

Comme E_{-2} est de dimension 2, A est diagonalisable. On peut choisir comme vecteurs de base $V_2 = (1, -1, 0)$ et $V_3 = (1, 0, -1)$.

🖄 Avec la fiche suivante, A est diagonalisable car c'est une matrice symétrique réelle.

On peut donc écrire $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

puis on en déduit :

$$A^{n} = PD^{n}P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2(-2)^{n} & 1-(-2)^{n} & 1-(-2)^{n} \\ 1-(-2)^{n} & 1+2(-2)^{n} & 1-(-2)^{n} \\ 1-(-2)^{n} & 1-(-2)^{n} & 1+2(-2)^{n} \end{pmatrix}$$

Variantes

- Avec la formule du binôme en partant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2I_3.$

 Avec le théorème de Cayley-Hamilton : très compliqué car racine double et donc nécessité de dériver.

Exercice 6

Avec un polynôme annulateur

Comme f est diagonalisable, il existe un polynôme P annulateur de f, dont toutes les racines sont simples.

De $\varphi(g) = f \circ g$, on déduit $\varphi^k(g) = f^k \circ g$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, égalité vraie aussi pour k = 0.

Pour tout g, on a donc $0 = P(f) \circ g = P(\varphi)(g)$; puis $P(\varphi) = 0$.

Comme P est scindé à racines simples, φ est diagonalisable.

Avec une base de vecteurs propres

Comme f est diagonalisable, il existe une base (e_1, \ldots, e_n) de E formée de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres λ_i .

Notons ω_{ij} l'endomorphisme de *E* dont la matrice dans cette base est la matrice élémentaire E_{ij} , c'est-à-dire : $\omega_{ij}(e_k) = \delta_{jk}e_i$ pour tout *k*.

On a alors pour tout k:

$$(f \circ \omega_{ij})(e_k) = f(\delta_{jk}e_i) = \delta_{jk}f(e_i) = \delta_{jk}\lambda_i e_i = \lambda_i\omega_{ij}(e_k).$$

Donc $f \circ \omega_{ij} = \lambda_i\omega_{ij} = \varphi(\omega_{ij}).$

corrigé

Mathématiques

 ω_{ij} est vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ_i .

Comme $(\omega_{ij})_{i,j}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$, φ est diagonalisable.

4. Compléments sur les espaces euclidiens

Exercice 1

Dans l'ensemble E des fonctions continues de carré sommable, de [0, 1] dans \mathbb{R} , on sait que

 $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) \, dx$ définit un produit scalaire. $\int_0^1 (\ln x - ax - b)^2 \, dx$ est alors le carré de la distance de ln x à ax + b.

^(S) In *x* n'existe pas en 0, mais toutes les intégrales qui apparaissent sont absolument convergentes.

Cette valeur sera minimale pour les valeurs a_0 et b_0 correspondant à la projection orthogonale de ln x sur le plan F = Vect(1, x).

Si vous voulez utiliser l'expression de la projection orthogonale, il faut d'abord obtenir une base orthonormale de F avec la méthode de Schmidt.

On peut écrire que $\ln x - a_0 x - b_0$ est orthogonal à F :

$$<\ln x - a_0 x - b_0 | 1 > = \int_0^1 (\ln x - a_0 x - b_0) dx = -1 - \frac{a_0}{2} - b_0 = 0$$

$$<\ln x - a_0 x - b_0 | x > = \int_0^1 (x \ln x - a_0 x^2 - b_0 x) dx = -\frac{1}{4} - \frac{a_0}{3} - \frac{b_0}{2} = 0$$

En résolvant le système, le minimum est atteint pour :

$$a_0 = 3$$
 ; $b_0 = -\frac{5}{2}$

La valeur du minimum peut se calculer avec le théorème de Pythagore :

$$\int_0^1 (\ln x - a_0 x - b_0)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x - \int_0^1 (a_0 x + b_0)^2 \, \mathrm{d}x$$
$$= 2 - (\frac{a_0^2}{3} + a_0 b_0 + b_0^2) = \frac{1}{4} \cdot$$

Exercice 2

Révisez l'exercice 1 de la fiche 34 de Toute la MPSI en fiches.

Pour une matrice A quelconque, on a : $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = tr({}^tA A)$. Comme A est symétrique, on a : $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = tr(A^2)$.

A étant symétrique et réelle est diagonalisable, c'est-à-dire semblable à la matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

 A^2 est donc semblable à la matrice diagonale $D^2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$. Comme deux matrices semblables ont la même trace, on a donc :

$$\sum_{i,j} a_{ij}^2 = \operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(D^2) = \sum_i \lambda_i^2.$$

Exercice 3

Observons tout d'abord que A est symétrique puisque :

$${}^{t}A = I_{n} - 2^{t}(U {}^{t}U) = I_{n} - 2U {}^{t}U = A.$$

On a donc :

$${}^{t}AA = A^{2} = (I_{n} - 2U^{t}U)(I_{n} - 2U^{t}U) = I_{n} - 4U^{t}U + 4(U^{t}U)(U^{t}U).$$

Le produit de matrices étant associatif, on a :

$$(U^{t}U)(U^{t}U) = U(^{t}UU)^{t}U = U^{t}U$$
 puisque $^{t}UU = \sum u_{i}^{2}$

Par conséquent, ${}^{t}AA = I_{n}$, ce qui prouve que A est orthogonale.

A symétrique et orthogonale est la matrice d'une symétrie orthogonale.

On a $AU = U - 2U^{t}UU = U - 2U = -U$.

D'autre part, si V est orthogonal à U, soit ${}^{t}UV = 0$, alors AV = V.

L'automorphisme de \mathbb{R}^n représenté par A dans la base canonique est donc la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à U.

Exercice 4

Notons C_1, \ldots, C_n les matrices colonnes de A, que l'on peut considérer comme des vecteurs de \mathbb{R}^n . Leur somme est le vecteur dont les composantes sont $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$.

Pour obtenir $\sum_{ij} a_{ij}$, il reste à considérer le vecteur U de \mathbb{R}^n dont toutes les composantes sont

égales à 1 et le produit scalaire :

$$(C_1 + \ldots + C_n) \cdot U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left|\sum_{ij}a_{ij}\right| \leq \left\|\sum_{j=1}^{n}C_{j}\right\| \|U\|.$$

On a $||U|| = \sqrt{n}$. De plus, on a supposé A orthogonale, c'est-à-dire que les vecteurs C_j sont deux à deux orthogonaux et unitaires, ce qui entraîne :

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} C_{j}\right\|^{2} = \sum_{j=1}^{n} ||C_{j}||^{2} = n \text{ soit } \left\|\sum_{j=1}^{n} C_{j}\right\| = \sqrt{n}.$$

on obtient donc :

$$\Big|\sum_{ij}a_{ij}\Big|\leqslant n$$

corriges

Copyright © 2014 Dunod

Autre solution

 $\left|\sum_{ij} a_{ij}\right| = \left|{}^{t}UAU\right| \le ||U|| ||AU|| = ||U||^{2} = n \operatorname{car} A \operatorname{conserve} \operatorname{la norme}.$

Exercice 5

Désignons par C_1 , C_2 , C_3 les vecteurs colonnes de M. On a :

$$0 = < C_1 | C_2 > = < C_1 | C_3 > = < C_2 | C_3 >$$

$$1 = < C_1 | C_1 > = < C_2 | C_2 > = < C_3 | C_3 >$$

La matrice M est donc orthogonale et f est une isométrie de E.

Un vecteur
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
 est invariant par f si, seulement si :

$$\begin{cases} x + (1 - \sqrt{3})y + (1 + \sqrt{3})z = 3x \\ (1 + \sqrt{3})x + y + (1 - \sqrt{3})z = 3y \\ (1 - \sqrt{3})x + (1 + \sqrt{3})y + z = 3z \end{cases} \iff x = y = z$$

L'ensemble des vecteurs invariants par f est la droite D dont (1; 1; 1) est un vecteur directeur. f est donc une rotation d'axe D.

Son angle θ vérifie : $\operatorname{tr} M = 1 = 1 + 2\cos\theta \,\mathrm{d'où}\,\theta = \pm \frac{\pi}{2}$.

Solution II faut orienter D pour choisir le signe de θ . Par exemple, orientons D par U = (1;1;1) et choisissons V(1;1;0) orthogonale à D.

En calculant le produit vectoriel $V \wedge f(V) = \frac{2}{3\sqrt{3}} U$ on obtient $\theta = +\frac{\pi}{2}$.

5. Fonctions convexes

Exercice 1

La fonction $x \mapsto \sin x$ est concave dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ puisque sa dérivée seconde est négative.

Son graphe est au dessous de sa tangente à l'origine, d'équation y = x,

et au dessus de la sécante joignant les points (0,0) et $(\frac{\pi}{2}, 1)$, d'équation $y = \frac{2}{\pi}x$.

L'encadrement annoncé en résulte.

Exercice 2

Soit B(a, r) la boule ouverte de centre *a* et de rayon *r*. Considérons deux éléments de B(a, r) et montrons que tout point du segment [x, y] appartient à B(a, r).

Comme tout point de [x, y] est de la forme :

$$tx + (1 - t)y$$
 avec $0 \le t \le 1$

il s'agit en fait de démontrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$||x - a|| < r$$
 et $||y - a|| < r \implies ||tx + (1 - t)y - a|| < r$.

On peut écrire : tx + (1 - t)y - a = t(x - a) + (1 - t)(y - a) avec $t \ge 0$ et $1 - t \ge 0$. D'après les propriétés des normes, puis l'hypothèse, on a : $||tx + (1 - t)y - a|| \le t||x - a|| + (1 - t)||y - a|| ,$ ce qui démontre que <math>B(a, r) est convexe.

🕲 La propriété est aussi vraie pour les boules fermées.

Exercice 3

Considérons deux réels quelconques x_1 et x_2 et $k \in [0; 1]$. Nous devons vérifier que :

 $(g \circ f)(kx_1 + (1 - k)x_2) \leq k (g \circ f)(x_1) + (1 - k) (g \circ f)(x_2).$

Comme f est convexe, nous avons :

$$f(kx_1 + (1-k)x_2) \leq k f(x_1) + (1-k) f(x_2).$$

Comme g est croissante, on en déduit :

$$g[f(kx_1 + (1-k)x_2)] \leq g[k f(x_1) + (1-k) f(x_2)].$$

Comme g est convexe, on a aussi :

$$g[k f(x_1) + (1-k) f(x_2)] \le k (g \circ f)(x_1) + (1-k) (g \circ f)(x_2)],$$

et la transitivité de ≤ permet de conclure.

Exercice 4

Soit f la fonction, de $I =]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} , définie par $f(x) = x^{\alpha}$. Elle est de classe C^2 et $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} > 0$.

La fonction f est donc convexe sur I.

Soit x_1, \ldots, x_n des réels quelconques de I et $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ des réels positifs dont la somme est bien égale à 1. L'inégalité de convexité s'écrit :

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\right)^{\alpha} \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{\alpha}}{n} \cdot$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par n^{α} , il vient :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{\alpha} \le n^{\alpha-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\alpha}\right).$$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x$. Comme elle est deux fois dérivable, sa convexité correspond à f'' positive, ce qui est le cas puisque :

$$\forall x \in]0; +\infty[$$
 $f'(x) = 1 + \ln x$ $f''(x) = \frac{1}{x} > 0.$

L'inégalité à démontrer s'écrit :

$$af\left(\frac{x}{a}\right) + bf\left(\frac{y}{b}\right) \ge (a+b)f\left(\frac{x+y}{a+b}\right)$$

corrige

Elle fait penser à l'inégalité de convexité, appliquée à f entre les points $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$, avec les coefficients $\frac{a}{a+b}$ et $\frac{b}{a+b}$ qui appartiennent à [0; 1] et dont la somme est bien égale à 1. Il reste à calculer :

$$\frac{a}{a+b} \times \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \times \frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b}$$

et l'inégalité de convexité s'écrit :

$$f\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leq \frac{a}{a+b} f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b} f\left(\frac{y}{b}\right)$$

inégalité équivalente à celle qu'il fallait démontrer.

6. Topologie des espaces normés

Exercice 1

• N_1 et N_2 sont des normes sur V. La seule condition non évidente est :

 $N_2(f) = 0 \iff f' = 0$, soit f constante, puis f = 0 avec la condition f(0) = 0 dont on comprend l'utilité.

• Soit $f \in V$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$|f(t) - f(0)| \le |t - 0| \times \sup_{u \in [0,t]} |f'(u)| \le \sup_{u \in [0,1]} |f'(u)| = N_2(f).$$

On obtient :

$$\forall f \in V \qquad N_1(f) \leq N_2(f).$$

• Pour démontrer que l'autre constante n'existe pas, un contre-exemple suffit.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la fonction f_n définie sur [0, 1] par $f_n(t) = t^n$. On a : $f \in V$, $N_1(f_n) = 1$, $N_2(f_n) = n$.

 $\frac{N_2(f)}{N_1(f)}$ n'est donc pas majoré. Les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 2

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, choisissons la norme $||A|| = \max_{i,j} |a_{ij}|$.

Pour montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense, on considère $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

une matrice non diagonalisable quelconque et on montre que c'est la limite d'une suite de matrices diagonalisables.

On a $(b, c) \neq (0, 0)$. Supposons $c \neq 0$.

Le polynôme caractéristique de A a une racine double, sinon A serait diagonalisable, soit : $\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = 0.$

Considérons la matrice $D_n = \begin{pmatrix} a & b + \frac{1}{n} \\ c & d \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique a un déterminant

 $\Delta_n = \frac{4c}{n} \neq 0$. Ses valeurs propres sont donc simples et D_n est diagonalisable.

Et enfin, comme $||A - D_n|| = \frac{1}{n}$, la suite (D_n) converge vers A.

Exercice 3

Soit $H = \{Q \in \mathbb{R}[X] ; Q(2) = 0\}$. Il s'agit de montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe une suite (Q_n) d'éléments de H qui converge vers P.

La suite définie par $Q_n = P - P(2) \left(\frac{X}{2}\right)^n$ convient car on a bien $Q_n \in H$ et $||P - Q_n|| = |P(2)|\frac{1}{2^n}$.

Exercice 4

• L'application f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans \mathbb{C} définie par $f(A) = \det A$ est continue car c'est une fonction polynomiale.

L'ensemble des matrices inversibles est l'image réciproque par f de l'ouvert \mathbb{C}^* . C'est donc un ouvert.

• Son complémentaire est donc fermé. Mais il n'est pas borné. En effet, soit A une matrice non inversible et différente de la matrice nulle. On a alors det A = 0, ce qui entraîne det $(\lambda A) =$ $\lambda^n \det A$. Pour tout λA est donc non inversible λ \in C, et $\|\lambda A\| = \text{tend vers} + \infty \text{ quand } |\lambda| = \text{tend vers} + \infty.$

Exercice 5 Le groupe orthogonal O_n d'ordre *n* est constitué par les matrices *A* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales, c'est-à-dire qui vérifient ${}^{t}A A = I_{n}$. Choisissons dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la norme $||A|| = \max |a_{ij}|$.

La fonction f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A \mapsto f(A) = {}^{t}AA$$

est continue car les coefficients de f(A) sont des polynômes en les coefficients de A.

 O_n , image réciproque du fermé $\{I_n\}$ est un fermé.

Les coefficients d'une matrice orthogonales sont compris entre -1 et 1 car chaque colonne a pour norme 1. O_n est donc borné.

 O_n partie fermée et bornée d'un espace de dimension finie est donc un compact.

Exercice 6 Comme K est convexe, pour qu'un triangle ABC soit dans K, il faut et il suffit, que les trois sommets appartiennent à K.

 K^3 est un compact de \mathbb{R}^6 et la fonction :

$$(A, B, C) \in K^3 \mapsto \operatorname{aire}(A, B, C) = \frac{1}{2} \left| \det \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) \right| \in \mathbb{R}$$

est continue car le déterminant est une fonction polynomiale des coordonnées de A, B et C.

Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc un triangle inclus dans K d'aire maximale.

7. Séries numériques et familles sommables

Exercice 1

On a vu (fiche 3 exercice 5) que $A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1}$

102 Mathématiques

avec
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
 et $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

On a donc (en utilisant la fiche 9) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!} = P \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 1 & 0 & 0\\ 0 & \operatorname{ch}(-2) & 0\\ 0 & 0 & \operatorname{ch}(-2) \end{pmatrix} P^{-1}$$
$$= \frac{1}{3} \operatorname{ch} 1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \operatorname{ch}(-2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < \frac{n^3 + 1}{n^3 + 2} < 1$, ce qui entraîne $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$. Il s'agit donc d'une série à termes positifs.

Comme $\lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + 1}{n^3 + 2} = 1$, on a $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$. La condition nécessaire de convergence de la série $\sum u_n$ est donc vérifiée.

De
$$\cos u_n = \frac{n^3 + 1}{n^3 + 2}$$
 on déduit : $1 - \cos u_n = \frac{1}{n^3 + 2}$

Lorsque *n* tend vers $+\infty$, on a :

$$1 - \cos u_n \sim \frac{u_n^2}{2}$$
 et $\frac{1}{n^3 + 2} \sim \frac{1}{n^3}$.

Par conséquent

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot$$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ étant convergente, la série à termes positifs $\sum u_n$ est donc convergente.

Exercice 3

🕲 Vous devez savoir que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

inégalité qui se démontre par équivalences successives :

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \iff 2ab \leq a^2 + b^2 \iff 0 \leq (a - b)^2.$$

• On a : $v_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + u_n \right)$. Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge car v_n est positif et majoré par le terme général d'une série convergente.

• Pour démontrer que la réciproque est fausse, il suffit de fournir un contre-exemple : $u_n = \frac{1}{n}$.

Exercice 4

1. La fonction définie sur $[2, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t \ln^2 t}$ est continue, décroissante. La série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t) dt - f(n)$ est donc convergente.

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t \ln^2 t} \, \mathrm{d}t = \int_{\ln(n-1)}^{\ln(n)} \frac{1}{u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{\ln(n-1)} - \frac{1}{\ln n}$$

est le terme général d'une série convergente : les sommes partielles se simplifient de proche en proche.

La série $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$ est donc convergente.

2. L'application définie sur
$$[1, +\infty)$$
 par $g(t) = \ln^2 t$ est croissante. Pour tout $k \ge 2$, on a donc :

$$\ln^2 k \ge \int_{k-1}^k \ln^2 t \, \mathrm{d}t$$

ce qui entraîne :

$$\sum_{k=2}^n \ln^2 k \ge \int_1^n \ln^2 t \, \mathrm{d}t \, .$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\int_{1}^{n} \ln^{2} t \, \mathrm{d}t = \left[t \ln^{2} t \right]_{1}^{n} - 2 \int_{1}^{n} \ln t \, \mathrm{d}t = n \ln^{2} n - 2n \ln n + 2n - 2 \, .$$

On a donc :

$$\forall n \ge 2$$
 $u_n \le v_n$ avec $v_n = \frac{1}{n \ln^2 n - 2n \ln n + 2n - 2}$

Lorsque *n* tend vers $+\infty$, v_n est équivalent à $\frac{1}{n \ln^2 n} cdot$

La série de terme général $\frac{1}{n \ln^2 n}$ est convergente d'après **1.** et il en est de même de la série $\sum u_n$.

Exercice 5

Soit s > 1 fixé. La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^s}$ est décroissante ; d'où :

$$\int_{n}^{n+1} \frac{1}{x^{s}} \, \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n^{s}} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^{s}} \, \mathrm{d}x$$

puis en additionnant :

$$\int_{1}^{N+1} \frac{1}{x^{s}} \, \mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{s}} \leq 1 + \int_{1}^{N} \frac{1}{x^{s}} \, \mathrm{d}x$$

c'est-à-dire :

Mathématiques corrigés

$$\frac{(N+1)^{1-s}-1}{1-s} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leqslant 1 + \frac{N^{1-s}-1}{1-s}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ et en multipliant par s - 1 > 0, on obtient :

$$1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq s \, .$$

D'après le théorème d'encadrement, on a donc :

$$\lim_{s \to 1^+} (s - 1) \zeta(s) = 1 \; .$$

Exercice 6

On peut écrire :

$$\pi \sqrt{n^2 + 2n + 2} = \pi \sqrt{(n+1)^2 + 1} = \pi(n+1) \sqrt{1 + \frac{1}{(n+1)^2}}$$
$$= \pi(n+1) \left[1 + \frac{1}{2(n+1)^2} + o(\frac{1}{n^3}) \right]$$
$$= \pi(n+1) + \frac{\pi}{2(n+1)} + o(\frac{1}{n^2})$$
muis :

puis :

$$u_n = (-1)^{n+1} \sin\left[\frac{\pi}{2(n+1)} + o(\frac{1}{n^2})\right] = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2(n+1)} + o(\frac{1}{n^2})$$

La série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2(n+1)}$ vérifie les hypothèses du critère spécial puisque la suite $\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$ est décroissante et tend vers 0. Elle est donc convergente.

La série $\sum o(\frac{1}{n^2})$ est absolument convergente, donc convergente. On en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 7

Comme $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right] = 1$, on a bien l'équivalence $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Comme la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante et converge vers 0, la série $\sum u_n$ est convergente d'après le critère spécial des séries alternées.

On peut écrire :

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right] = u_n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

La série $\sum \left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$, de même nature que la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n}$, est divergente.

La série $\sum v_n$ étant la somme d'une série convergente et d'une série divergente est donc di-vergente.

 \mathbb{C} Cet exercice montre que l'équivalence $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ n'entraîne pas que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature lorsque u_n et v_n ne sont pas de signe constant à partir d'un certain rang.

Vous pouvez aussi remarquer que la série de terme général v_n est alternée et ne vérifie pas les hypothèses du critère spécial puisque $|v_n| = \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ n'est pas décroissante.

Les hypothèses du critère spécial, suffisantes pour que la série converge, ne sont donc pas nécessaires.

Exercice 8

Comme f est décroissante et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, la fonction f est à valeurs positives.

Il en résulte que $\sum u_n$ est une série alternée.

On peut préciser avec le changement de variable $t = u + n\pi$ qui donne :

$$u_n = \int_0^{\pi} f(u + n\pi) \sin(u + n\pi) \, du = (-1)^n \int_0^{\pi} f(u + n\pi) \sin u \, du$$

Montrons que la série $\sum u_n$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. La fonction *f* étant décroissante, on a, d'une part :

$$|u_n| \leq \int_0^{\pi} f(u + n\pi) \,\mathrm{d}u \leq \pi f(n\pi)$$

d'où l'on déduit $\lim_{n \to \infty} |u_n| = 0$ car $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$; et d'autre part :

 $\forall u \in [0,\pi] \qquad f(u+(n+1)\pi) \leq f(u+n\pi)$

ce qui entraîne $|u_{n+1}| \leq |u_n|$.

La suite ($|u_n|$) est décroissante et converge vers 0. La série alternée $\sum u_n$ est donc convergente.

8. Suites et séries de fonctions

Exercice 1

1. Pour tout x fixé dans]0, 1], on a $f_n(x) = 0$ dès que n vérifie $n > \frac{1}{x}$; et, par conséquent, $\lim_{n \to +\infty} f(x) = 0$.

Pour x = 0, on a toujours $f_n(0) = 0$, d'où $\lim_{n \to +\infty} f(0) = 0$.

La suite converge donc simplement sur [0, 1] vers la fonction f = 0.

2. Étudions les variations de la fonction $f_n - f = f_n$. Si $0 < x < \frac{1}{n}$ on a $f'_n(x) = n^2(1 - 2nx)$ et on obtient le tableau de variation :



On a donc $||f_n - f|| = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{n}{4}$. Comme $||f_n - f||$ ne tend pas vers 0 quand *n* tend vers l'infini, la convergence de (f_n) vers *f* n'est pas uniforme.

Exercice 2

• Pour x fixé dans [0, 1], on a $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = (2x^2 + 1)e^{-x}$ et pour x = 0, $f_n(0) = 0$. La suite (f_n) converge donc simplement vers la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (2x^2 + 1)e^{-x} & \text{si } x \in]0, 1] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

• Les fonctions f_n sont continues sur (0, 1]. La limite simple f n'est pas continue car $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq f(0)$.

La convergence n'est donc pas uniforme.

Exercice 3

Solution $V_{0,u}$ Wous devez savoir que, pour tout u réel, on a $|\sin u| \le |u|$ (démonstration possible avec l'inégalité des accroissements finis).

Pour tout réel x, on a : $|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n}$ ce qui entraîne que $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'està-dire que la suite (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction nulle f = 0.

2. Un segment [a, b] étant donné, on peut poser $M = \max(|a|, |b|)$ et la majoration de la question précédente donne :

$$\forall x \in [a, b]$$
 $|f_n(x)| \leq \frac{M}{n}$

soit $||f_n - f||_{\infty}^{[a,b]} \leq \frac{M}{n}$. On a donc $\lim_{n \to +\infty} ||f_n - f||_{\infty}^{[a,b]} = 0$, ce qui prouve la convergence uniforme de (f_n) vers f sur [a, b].

3. On a $||f_n - f||_{\infty}^{\mathbb{R}} \ge |f_n(n)|$ par définition d'une borne supérieure.

Comme $f_n(n) = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \to +\infty} n^2 \times \frac{1}{n^2} = 1$ tend vers 1 quand *n* tend vers 1'infini, la convergence de (f_n) vers *f* n'est pas uniforme sur \mathbb{R} .

Exercice 4

Les fonctions u_n sont définies pour $n \ge 2$ et elles sont C^1 sur \mathbb{R} .

On a :
$$u'_n(x) = \frac{-n\cos(nx)}{(n^2 + \sin(nx))^2}$$

On a les majorations :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2 - 1} \qquad |u'_n(x)| \leq \frac{n}{(n^2 - 1)^2} \ .$$

Comme les séries numériques de termes généraux $\frac{1}{n^2 - 1} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\frac{n}{(n^2 - 1)^2} \sim \frac{1}{n^3}$ sont convergentes, les deux séries de fonctions sont normalement convergentes sur \mathbb{R} .

Exercice 5

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $|u_n(x)| \leq \frac{1}{2^{2n}}$. La série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ est une série géométrique convergente. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est donc normalement convergente sur \mathbb{R} . 2. Posons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. On a : $u_n(x) = \operatorname{Re}\left(\frac{(-1)^n}{2^{2n}} e^{2inx}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{-e^{2inx}}{4}\right)$. Dans \mathbb{C} , la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-e^{2ix}}{4}\right)^n$ est convergente puisque $\left|\frac{-e^{2ix}}{4}\right| = \frac{1}{4} < 1$ et a pour somme $\frac{1}{1 + \frac{e^{2ix}}{4}}$. On a donc :

$$S(x) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 + \frac{e^{2ix}}{4}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{4}{(4 + \cos 2x) + i\sin 2x}\right) = \frac{16 + 4\cos 2x}{17 + 8\cos 2x}$$

Exercice 6

1. Comme toutes les fonctions u_n sont paires, on peut limiter l'étude de la convergence simple à $x \ge 0$.

Pour x = 0, on a $u_n(0) = 0$ pour tout *n* et la série converge.

Pour x > 0, on choisit la majoration :

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{\operatorname{ch} nx} \leq \frac{2}{\operatorname{e}^{nx}}.$$

La série géométrique de terme général $\frac{1}{e^{nx}} = (e^{-x})^n$ est convergente puisque $0 < e^{-x} < 1$ pour x > 0.

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est donc absolument convergente pour tout *x* réel. Notons S(x) sa somme. **2.** Soit a > 0. Pour tout $x \ge a$, on a $|u_n(x)| \le \frac{2}{e^{na}} \cdot La$ série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{na}}$ est une série

géométrique convergente. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est donc normalement convergente sur $[a, +\infty[$.

3. Comme toutes les fonctions u_n sont continues, la question précédente entraîne que la somme S est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout a > 0.

Du fait de la parité, on a donc la continuité de S sur \mathbb{R}^* . Il reste à étudier la continuité en 0.

En utilisant la majoration $|\sin u| \le |u|$, on obtient pour x > 0:

(

$$0 \leq |u_n(x)| \leq \frac{2x^2}{\mathrm{e}^{nx}} \ .$$

Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{nx}} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$ on obtient donc :

$$0 \le |S(x)| \le \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(x)| \le \frac{2x^2}{1 - e^{-x}}$$

On a $1 - e^{-x} \underset{0}{\sim} x$, ce qui entraîne $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{1 - e^{-x}} = 0$ et par conséquent $\lim_{x \to 0} S(x) = 0$. S est donc continue à droite en 0. Elle est continue en 0 du fait de la parité.

9. Séries entières

Exercice 1

Soit R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et de $\sum a_n^2 z^n$.

[®] Rappelez-vous R est, entre autres, la borne supérieure des r > 0 tels que $|a_n|r^n$ soit borné.

Soit z tel que $|z| < R_1$. $|a_n||z|^n$ est alors borné, ce qui entraîne que $|a_n|^2 |z^2|^n$ soit borné, c'est-àdire que $|z|^2 \le R_2$. On vient de démontrer que :

 $\forall z \qquad |z| < R_1 \Longrightarrow |z| \le \sqrt{R_2} \qquad \text{c'est-à-dire que } R_1 \le \sqrt{R_2}.$

De la même manière, si z est tel que $|z| < R_2$, alors $|a_n|^2 |z|^n$ est borné, de même que $|a_n| \sqrt{|z|}^n$, ce qui entraîne $\sqrt{|z|} \le R_1$ puis $|z| \le R_1^2$. On obtient ainsi $R_2 \le R_1^2$.

En conclusion : $R_2 = R_1^2$.

Exercice 2

 $a_n = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n}$ est défini pour $n \ge 0$ et on a l'équivalent :

$$a_n = \frac{2(e^n + e^{-n})}{(e^n - e^{-n})^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{e^n}$$

On en déduit :

 $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{e^{n+1}} \frac{e^n}{2} = \frac{1}{e}$ puis le rayon de convergence : $R = \sqrt{e}$.

6
\otimes Avant de déterminer R par la règle de d'Alembert, on cherche un équivalent de $|u_n|$. Pour ceci, mettez en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur.

$$\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + 1 \right]}{\sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + 1 \right] \left[1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$
$$= 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Avec le développement limité de ln, on obtient : u_n

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}).$$

Rayon de convergence

Comme $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$, on $\lim_{n \to +\infty} \frac{|u_{n+1}| |x|^{n+1}}{|u_n| |x|^n} = |x| \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = |x|$ puis R = 1.

• Étude pour x = -1

On a $u_n(-1)^n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$: la série est divergente.

• Étude pour x = 1

On a
$$u_n(1)^n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées.

 $v_n = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)_{+\infty} - \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série divergente.

La série est donc divergente pour x = 1.

Exercice 4

La fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 4)$ est définie sur \mathbb{R} . La méthode la plus classique consiste à calculer f'(x), puis développer la fraction rationnelle obtenue.

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+4} = \frac{2x+2}{(x-2j)(x-2j^2)} = \frac{1}{x-2j} + \frac{1}{x-2j^2}$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-j^2}{1-\frac{j^2x}{2}} + \frac{-j}{1-\frac{jx}{2}} \right) = -\frac{j^2}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{j^2x}{2})^n - \frac{j}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{jx}{2})^n \quad \text{avec } |x| < 2$$
$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \frac{(j^2)^n + j^{n+1}}{2^n} = -2\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \frac{\cos(n\frac{2\pi}{3})}{2^n}$$

Pour $x \in \alpha$,] – 2; 2[, on obtient par intégration terme à terme :

$$f(x) = \ln 4 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n+1)\frac{2\pi}{3}}{2^{n+1}(n+1)} x^{(n+1)} = \ln 4 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\frac{2\pi}{3})}{2^n n} x^n \cdot$$

Exercice 5

Avec une expression de f(x) aussi compliquée, soyez optimiste et calculez f'(x).

Pour
$$x \neq 1$$
, on a : $f'(x) = \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{1 + (\frac{1+}{1-x})^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}$

Deur les formules de trigonométrie, revoir si nécessaire Toute la MPSI en fiches fiche 6

On peut décomposer la fraction f'(x) en éléments simples sur \mathbb{C} :

$$f'(x) = \frac{\sin \alpha}{(x - e^{i\alpha})(x - e^{-i\alpha})} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x - e^{i\alpha}} - \frac{1}{x - e^{-i\alpha}} \right) = \frac{i}{2} \left(\frac{e^{-i\alpha}}{1 - xe^{-i\alpha}} - \frac{e^{i\alpha}}{1 - xe^{i\alpha}} \right)$$

Vous pouvez utiliser la série géométrique $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ à condition que |z| < 1.

Si |x| < 1, on a donc :

$$f'(x) = \frac{i}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-(n+1)i\alpha} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{(n+1)i\alpha} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin((n+1)i\alpha).$$

Cette série, somme de deux séries de rayon 1, a un rayon de convergence $R \ge 1$. La divergence étant grossière pour x = 1, on a R = 1.

Par intégration terme à terme, on obtient pour $x \in]-1; 1[:$

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \sin(n+1)\alpha = \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sin n\alpha.$$

10. Fonctions vectorielles

Exercice 1

Comme $\lim_{x \to 0^+} \left\| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - f'_d(0) \right\| = 0, \text{ on a }:$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in [0, \delta] \quad \|f(x) - xf'_d(0)\| < \varepsilon x$ Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_0} < \delta$. Pour $n \ge n_0$ et $k \in [[1, n]]$ on a $: \frac{k}{n^2} \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \delta$, d'où : $\left\| f(\frac{k}{n^2}) - \frac{k}{n^2} f'_d(0) \right\| < \varepsilon \frac{k}{n^2}$

puis en additionnant les n inégalités :

$$\begin{split} \left\|\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^{2}}) - \frac{k}{n^{2}} f'_{d}(0)\right\| &\leq \sum_{k=1}^{n} \left\|f(\frac{k}{n^{2}}) - \frac{k}{n^{2}} f'_{d}(0)\right\| < \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \frac{k}{n^{2}} \\ \text{Comme} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \frac{k}{n^{2}} &= \varepsilon \frac{1}{n^{2}} \sum_{k=1}^{n} k = \varepsilon \frac{1}{n^{2}} \frac{n(n+1)}{2} \leq \varepsilon, \text{ on a donc :} \\ \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^{2}}) - \frac{k}{n^{2}} f'_{d}(0)\right) &= 0 \\ \text{Comme} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^{2}} f'_{d}(0) &= \frac{f'_{d}(0)}{n^{2}} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} f'_{d}(0) \quad \text{ on a :} \\ \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^{2}} f'_{d}(0) &= \frac{f'_{d}(0)}{2} \quad \text{puis} \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^{2}}) = \frac{f'_{d}(0)}{2} \\ \end{split}$$

Comme $||f|| = \sqrt{f \cdot f}$, on peut appliquer le théorème de dérivation des fonctions composées avec $f \mapsto f \cdot f$ suivie de $u \mapsto \varphi(u) = \sqrt{u} \operatorname{car} \varphi$ est dérivable pour u > 0.

On a alors :

$$||f||'(a) = \frac{1}{2\sqrt{f(a) \cdot f(a)}} \times 2f(a) \cdot f'(a) = \frac{f(a) \cdot f'(a)}{||f(a)||} \cdot \frac{f(a) \cdot f'(a)}{||f(a)||}$$

Exercice 3

On a bien f(0) = f(1) = 0. Et pourtant, il n'existe pas de réel $t_0 \in [0; 1[$ tel que $f'(t_0) = 0$ car f'(t) = (1 - 2t, t(2 - 3t)).

11. Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice 1

Copyright © 2014 Dunod

1. Pour la borne 0, il n'y a pas de problème d'existence puisque la fonction à intégrer est prolongeable par continuité.

On peut donc se ramener à l'étude de la convergence de $\int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

En intégrant par parties, on obtient :

$$\int_{1}^{X} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_{1}^{X} - \int_{1}^{X} \frac{\cos x}{x^{2}} \, \mathrm{d}x.$$

Lorsque X tend vers $+\infty$, $\frac{-\cos X}{X}$ tend vers 0 puisque c'est le produit d'une fonction bornée et d'une fonction qui tend vers 0.

D'autre part, $\lim_{X \to +\infty} \int_{1}^{X} \frac{\cos x}{x^2} dx$ existe puisque, de $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$, on tire la convergence absolue, donc la convergence, de $\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$.

corrigés

2. L'inégalité $|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ entraîne :

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} \, \mathrm{d}x \ge \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x} - \int_{1}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} \, \mathrm{d}x.$$

L'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2x}$ diverge vers $+\infty$. L'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ converge, ce qui se démontre comme pour l'intégrale en sinus. L'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ est donc divergente, ce qui prouve que l'intégrale proposée n'est pas absolument convergente.

On a donc un exemple de fonction dont l'intégrale existe et qui n'est pas intégrable.

Exercice 2

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction définie par $f_{\alpha}(x) = 1 - \text{th}^{\alpha}(x)$ est continue et positive pour x > 0. Comme $f_0 = 0$ conduit à une intégrale nulle, nous supposerons $\alpha \neq 0$.

• Étude au voisinage de 0⁺

Si $\alpha > 0$, on a $f_{\alpha}(x) \underset{0}{\sim} 1$. La fonction f_{α} est prolongeable par continuité en 0. Il n'y a pas de problème de convergence.

Si $\alpha < 0$, on a $f_{\alpha}(x) \underset{0}{\sim} -x^{\alpha}$. L'intégrale $\int_{0}^{1} (1 - th^{\alpha}(x)) dx$ est donc de même nature que $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^{-\alpha}} dx$. Elle converge si, et seulement si, $\alpha > -1$.

Étude au voisinage de +∞

th $x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est de la forme 1 + u avec u au voisinage de 0. On a donc : th^{α} $x = 1 + \alpha u + o(u)$ puis $1 - th^{\alpha} x \underset{+\infty}{\sim} -\alpha u \underset{+\infty}{\sim} 2\alpha e^{-2x}$ ($\alpha \neq 0$)

L'intégrale
$$\int_{1}^{+\infty} (1 - th^{\alpha}(x)) dx$$
 est donc toujours convergente.

Conclusion

L'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - th^{\alpha}(x)) dx$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > -1$.

Exercice 3

• Existence

La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{a - x}\sqrt{a + x}}$ est continue et positive sur] - a, a[. Elle tend vers l'infini aux bornes. Au voisinage de *a*, on a $f(x) \approx K \frac{1}{\sqrt{a-x}}$ avec $K = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{2a}}$.

Comme l'intégrale de Riemann $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = \int_0^a \frac{du}{\sqrt{u}}$ existe, il en est de même pour $\int_0^a f(x)dx$. Au voisinage de -a, la démonstration est analogue.

Finalement, pour a > 0, on a démontré l'existence de l'intégrale :

$$\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)(a^2-x^2)}}$$

Calcul

Avec 0 < b < a, considérons l'intégrale $I(b) = \int_{-b}^{b} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(a^2-x^2)}}$ et utilisons (pour fixer les bornes) le changement de variable x = at qui conduit à :

$$I(b) = \int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{b}{a}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+a^2t^2)(1-t^2)}}$$

Lorsque *t* varie de $-\frac{b}{a}$ à $\frac{b}{a}$ alors $\sqrt{1 + a^2t^2}$ est compris entre 1 et $\sqrt{1 + b^2}$. On en déduit un encadrement de I(b):

$$\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{b}{a}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \leq I(b) \leq \int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{b}{a}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

ce qui donne :

$$\frac{2}{\sqrt{1+b^2}} \arcsin\left(\frac{b}{a}\right) \le I(b) \le 2 \arcsin\left(\frac{b}{a}\right)$$

puis en faisant tendre b vers a :

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}} \le I(a) \le \pi$$

Lorsque *a* tend vers 0, les deux fonctions de *a* qui encadrent I(a) ont la même limite π . Par conséquent :

$$\lim_{a \to 0} I(a) = \pi$$

Autre méthode : posez $x = a \sin t$ et appliquez le théorème de continuité sous le signe intégral.

Exercice 4

Intégrabilité

La fonction proposée est continue, de signe constant, sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. Au voisinage de 0, on a $\ln(\sin t) = O(|\ln t|)$. Comme ln *t* est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, il en est de même pour $\ln(\sin t)$.

Calcul

Posons
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$$
. Le changement de variable $t = 2u$ donne :

corrigés

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2u) \, du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\ln 2 + \ln(\sin u) + \ln(\cos u) \right] du$$
$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin u) \, du + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u) \, du.$$

En posant $u = \frac{\pi}{2} - v$ dans la dernière intégrale, il vient :

$$I = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin u) \, du + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin v) \, dv$$
$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u) \, du = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I.$$

On obtient donc :

$$I=-\frac{\pi}{2}\,\ln 2.$$

Exercice 5

• La fonction g définie par :

$$g(x,t) = \frac{e^{-t}(1-\cos xt)}{t^2}$$
 si $t \neq 0$ et $g(x,0) = \frac{x^2}{2}$

est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

On a toujours : $|1 - \cos u| = \left|2\sin^2 \frac{u}{2}\right| \le 2\left|\frac{u}{2}\right|^2$, ce qui entraîne :

$$|g(x,t)| \le \mathrm{e}^{-t} \frac{x^2}{2}$$

Pour tout a > 0 et pour tout $(x, t) \in [-a, a] \times [0, +\infty[$, on a $|g(x, t)| \le e^{-t} \frac{a^2}{2}$ et cette fonction majorante est sommable sur $[0, +\infty[$.

On en déduit l'existence et la continuité de sur tout [-a, a], donc sur \mathbb{R} .

• Pour la dérivée première et seconde, la fonction :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{e^{-t}}{t}\sin xt \quad \text{si } t \neq 0 \qquad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,0) = x$$

se majore sur tout [-a, a] par une fonction sommable sur $[0, +\infty[: |\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)| \le ae^{-t}$ et la fonction :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = e^{-t} \cos xt \text{ si } t \neq 0 \qquad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,0) = 1$$

par $\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \le e^{-t}$, fonction sommable sur $[0, +\infty[$.

• On a donc $f''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos xt \, dt$, ce qui donne successivement (en tenant compte des valeurs en 0) :

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
; $f'(x) = \arctan x$; $f(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

12. Équations différentielles linéaires

Exercice 1

$$\mathbf{1.} AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix} ; BA = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; A^2 = 0 ; B^2 = 0$$
$$\mathbf{e}^A = I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{e}^B = I_2 + B = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{e}^A \mathbf{e}^B = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 - a^2 \end{pmatrix}$$

2. Pour le calcul des puissances de A + B, distinguons les puissances paires et impaires.

$$(A+B)^{2n} = a^{2n} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2n} = a^{2n} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-a^2)^n & 0 \\ 0 & (-a^2)^n \end{pmatrix}$$
$$(A+B)^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -a(-a^2)^n \\ a(-a^2)^n & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$e^{A+B} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \neq e^A e^B \quad \text{ce qui confirme que } AB \neq BA.$$

Exercice 2

• Comme *A* est antisymétrique, on a ${}^{t}A = -A$, d'où $\exp({}^{t}A) = \exp(-A)$.

Comme $\exp(-A) = [\exp(A)]^{-1}$, on a donc $\exp({}^{t}A) = [\exp(A)]^{-1}$, c'est-à-dire que $\exp(A)$ est orthogonale.

• On sait det $(\exp(A)) = \exp(trA)$. Comme A est antisymétrique, on a tr(A) = 0.

Comme $\exp(0) = 1$, on obtient que det $(\exp(A)) = 1$, c'est-à-dire que $\exp(A)$ est une matrice orthogonale directe.

Exercice 3 :

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Comme la somme des coefficients est nulle, l'équation homogène associée admet e^t comme solution particulière.

La méthode de variation de la constante consiste à introduire une nouvelle fonction inconnue u telle que $x(t) = u(t) e^t$ soit solution de (1).

En calculant x'(t), x''(t) et en reportant il vient :

$$(1+t)\,u'' + 2tu' = 0.$$

Il s'agit d'une équation linéaire du premier ordre par rapport à la fonction z = u'. Elle a pour solution générale sur I (avec $-1 \notin I$):

$$z(t) = A \exp\left(-\int \frac{2t}{1+t} dt\right) = \exp\left(-2t + 2\ln|t+1|\right) = A(1+t)^2 e^{-2t}.$$

À l'aide de deux intégrations par parties, on obtient :

Mathématiques

$$u(t) = \int A(1+t)^2 e^{-2t} dt = -\frac{A}{2} e^{-2t} (t^2 + 3t + \frac{5}{2}) + B$$

puis :

$$x(t) = -\frac{A}{2}e^{-t}\left(t^2 + 3t + \frac{5}{2}\right) + Be^{t}$$

Exercice 4:

 $^{(1)}$ L'équation étant linéaire, homogène et du second ordre, sur un intervalle où le coefficient de x'' ne s'annule pas, les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2. Mais attention à ne pas introduire une équation caractéristique car les coefficients ne sont pas constants.

• Cherchons des solutions développables en séries entières :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \qquad ; \qquad x'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \qquad ; \qquad x''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

En reportant dans (1) et en effectuant les changements d'indices nécessaires pour avoir partout t^n , on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}t^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}t^n = 0.$$

Tous les coefficients doivent être nuls, soit :

$$a_1 = 0$$
 et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $(n+2)(n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0.$

On en déduit, en distinguant les indices pairs et impairs :

$$a_{2p+1} = 0 \qquad ; \qquad a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} a_0$$

soit $x(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} a_0 t^{2p} = a_0 \frac{\sin t}{t} \qquad \text{avec} \quad R = +\infty.$

[®] Les calculs ont été faits avec l'hypothèse implicite que la série entière a un rayon de convergence non nul. Il faut donc valider cette hypothèse.

On obtient ainsi un espace de dimension 1 : il manque donc des solutions.

• La méthode de variation de la constante consiste à introduire une fonction auxiliaire *u* de sorte que $x(t) = u(t) \frac{\sin t}{t}$ soit solution de (1). On calcule :

$$\begin{aligned} x'(t) &= u'(t) \,\frac{\sin t}{t} + u(t) \,\frac{t\cos t - \sin t}{t^2} \\ x''(t) &= u''(t) \,\frac{\sin t}{t} + 2u'(t) \,\frac{t\cos t - \sin t}{t^2} + u(t) \,\frac{-t^2\sin t - 2t\cos t + 2\sin t}{t^3} \end{aligned}$$

En reportant et en simplifiant, il reste :

$$u''(t)\sin t + 2u'(t)\cos t = 0$$

ce qui donne successivement (avec K_1 et K_2 réels quelconques) :

$$u'(t) = \frac{K_1}{\sin^2 t}$$
; $u(t) = -K_1 \frac{\cos t}{\sin t} + K_2$

et enfin la solution générale de (1) sur *I* :

$$x(t) = -K_1 \frac{\cos t}{t} + K_2 \frac{\sin t}{t} \cdot$$

Remarque : un œil perspicace remarquerait que l'équation à résoudre peut s'écrire y'' + y = 0en posant y(t) = tx(t), ce qui rend l'exercice trivial.

Exercice 5:

Voici 4 méthodes différentes pour cet exercice : à vous de choisir !

Utilisation d'une équation du second ordre (n = 2 seulement)

En dérivant (1) par rapport à t, on obtient :

$$x'' = 5x' - 2y' + e^{t} = 5x' + 2x - 12\left[\frac{x' - 5x - e^{t}}{-2}\right] - 2t + e^{t}$$

soit :

 $x'' - 11x' + 28x = -5e^{t} - 2t$

La résolution de cette équation différentielle donne :

$$x(t) = 2K_1 e^{4t} + K_2 e^{7t} - \frac{5}{18} e^t - \frac{1}{14}t - \frac{11}{392}$$

En reportant dans (1), on obtient alors :

$$y(t) = K_1 e^{4t} - K_2 e^{7t} - \frac{1}{18} e^t - \frac{5}{28}t - \frac{27}{784}$$

Écriture matricielle et éléments propres

(S) s'écrit sous forme matricielle X'(t) = AX(t) + B(t) avec :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 7$, et les espaces propres associés Vect (V_1) et Vect(V_2) avec $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• Recherche d'intégrales premières indépendantes (n = 2 conseillé)

Avec $\lambda_1 = 4$: $\begin{cases} x' - 4x = x - 2y + e^t \\ y' - 4y = -x + 2y + t \end{cases} \implies (x + y)' - 4(x + y) = e^t + t.$

Avec $\lambda_2 = 7$:

$$\begin{cases} x' - 7x = -2x - 2y + e^t \\ y' - 7y = -x - y + t \end{cases} \implies (x - 2y)' - 7(x - 2y) = e^t - 2t.$$

Ces deux équations différentielles permettent de calculer x + y et x - 2y; puis on en déduit x et y.

corrigés

Mathématiques

Variation des constantes

La solution générale du système homogène X'(t) = AX(t) s'écrit :

$$X = K_1 e^{4t} V_1 + K_2 e^{7t} V_2 \text{ avec } (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour résoudre (S), on peut introduire deux fonctions u et v, de classe C^1 , telles que

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = u(t) e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v(t) e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
soit solution de (S).

En reportant, et en simplifiant, on obtient :

$$u'(t) = \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{t}{3}e^{-4t} \quad ; \quad v'(t) = \frac{1}{3}e^{-6t} - \frac{2}{3}te^{7t}.$$

Par calcul de primitives, on obtient u(t) et v(t), puis x(t) et y(t).

• Diagonalisation de A

Avec la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, on peut écrire : $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

En posant X(t) = PU(t) avec $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ le système (S) devient $U'(t) = DU(t) + P^{-1}B(t)$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} u'(t) = 4u(t) + \frac{1}{3}(e^{t} + t) \\ v'(t) = 7v(t) + \frac{1}{3}(e^{t} - 2t) \end{cases}$$

Il s'agit de deux équations différentielles linéaires du premier ordre. Leur résolution et le report du résultat dans X(t) = PU(t) donne à nouveau x(t) et y(t).

• Autre méthode : demander poliment à Maple de fournir la réponse.

13. Calcul différentiel

Exercice 1

• En $(x, y) \neq (0, 0)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \; \cdot \;$$

Ces dérivées partielles sont continues comme composées de fonctions continues. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la fonction *f* est de classe C^1 . Elle y est donc différentiable.

• En (0, 0), on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

D'autre part, $\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = 2^{-\frac{3}{2}} \neq 0$ montre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en (0,0). Il en est

corrigés

Mathématiques

corrigés

de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$. f n'est donc pas de classe C^1 en (0, 0).

• Étudions la différentiabilité de f en (0, 0). L'égalité de définition conduit à poser :

$$\varepsilon(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[f(0+x,0+y) - f(0,0) \right] = \frac{xy}{x^2 + y^2} \cdot$$

Cette fonction ne tend pas vers 0 quand (x, y) tend vers (0, 0) puisque $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x, x) = \frac{1}{2}$. f n'est donc pas différentiable en (0, 0).

Exercice 2

Soit $\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ un vecteur unitaire. La dérivée de f en (0, 0) selon le vecteur \vec{v} est :

$$D_{\nu}f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t} = 2\cos^3\theta + 3\cos\theta\sin^2\theta$$

D'autre part, $\nabla f(0,0) = \overrightarrow{0}$ car :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$

Si *f* était différentiable en (0,0), on aurait $D_v f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$ pour tout \vec{v} . Comme ce n'est pas le cas, *f* n'est pas différentiable en (0,0).

Exercice 3

Il est préférable d'écrire : $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} + \frac{1}{x}$.

1. f est de classe C^{∞} sur Ω comme composée de fonctions C^{∞} .

Ses points critiques vérifient :

$$\nabla f = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} D_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{x^2} = 0\\ D_2 f = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{2y\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{y} = x^2\\ x = y \end{cases} \iff x = y = 1 \end{cases}$$

Il y a donc un seul point critique A(1, 1), c'est-à-dire un seul point pouvant être un extrémum.

2. On étudie le signe de la différence :

$$D(h,k) = f(1+h,1+k) - f(1,1) = \frac{1+h}{\sqrt{1+k}} + \sqrt{1+k} + \frac{1}{1+h} - 3$$

avec h et k voisins de 0.

En utilisant des développements limités :

$$D(h,k) = (1+h)(1-\frac{1}{2}k+\frac{3}{8}k^2) + 1 + \frac{1}{2}k - \frac{1}{8}k^2 + 1 - h + h^2 - 3 + o(||(h,k)||^2)$$
$$= h^2 - \frac{1}{2}hk + \frac{1}{4}k^2 + o(||(h,k)||^2)$$

🖄 La disparition des termes de degré 1 confirme le calcul du point critique.

Localement, D(h,k) est du signe de : $h^2 - \frac{1}{2}hk + \frac{1}{4}k^2 = (h - \frac{1}{4}k)^2 + \frac{3}{16}k^2 > 0.$

Le point A est donc un minimum (local à ce stade de la démonstration).

3. La fonction définie sur $\Omega =]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x$ est deux fois dérivable.

Comme $f''(x) = -\frac{1}{r^2} < 0$, la fonction f est concave sur Ω .

Pour tout a, b, c > 0 on a donc : $\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \ge \frac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c),$

ce qui entraîne (car la fonction exponentielle est croissante) :

$$\frac{a+b+c}{3} \ge (abc)^{1/3}.$$

Avec $a = \frac{x}{\sqrt{y}}$, $b = \sqrt{y}$ et $c = \frac{1}{x}$, on obtient $f(x, y) \ge 3$, soit $f(x, y) \ge f(1, 1)$, ce qui prouve que le point *A* est un minimum global.

Exercice 4



• La fonction f est polynomiale, donc continue sur le compact D. Elle est donc bornée et atteint ses bornes.

Attention avant de foncer sur le calcul des dérivées partielles, pour ceci il faut être sur un ouvert.

• Si une borne est atteinte en un point de l'intérieur $\overset{\circ}{D}$, elle vérifie :

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -3(y-x)^2 + 6y = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3(y-x)^2 + 6x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=0\\ 12x^2+6x=0 \end{cases}$$

Deux points du plan vérifient ce système. Mais un seul est dans $\overset{\circ}{D}$, le point $A\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Pour savoir si A est un minimum, un maximum, ou un point-col, étudions le signe de la différence pour h et k voisins de 0 :

$$D(h,k) = f\left(-\frac{1}{2} + h, \frac{1}{2} + k\right) - f\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = (1 + k - h)^3 + 6\left(-\frac{1}{2} + h\right)\left(\frac{1}{2} + k\right) + \frac{1}{2}$$
$$= 3h^2 + 3k^2 + o(||(h,k)||^2)$$

Comme, localement, on a toujours D(h, k) > 0, le point A est un minimum, local à ce stade de la démonstration.

• Il reste à étudier f sur la frontière. Pour ceci, on étudie la restriction de f à chaque segment.

Sur [*BC*], $f(x, x) = 6x^2$, avec $x \in [-1, 1]$, varie de 0 à 6.

Sur [DC], $f(x, 1) = (1 - x)^3 + 6x$, avec $x \in [-1, 1]$, varie de $6 - 4\sqrt{2} \approx 0, 34$ à 6.

Sur [BD], $f(-1, y) = (y + 1)^3 - 6y$, avec $y \in [-1, 1]$, varie de $6 - 4\sqrt{2} \approx 0, 34$ à 6.

• En comparant les diverses valeurs obtenues, la fonction f admet un minimum global, de valeur $-\frac{1}{2}$, en A et deux maximums globaux, de valeur 6, en B et C.

Exercice 5

Si l'on considère un point M_0 distinct de l'origine, il existe une boule de centre M_0 dans laquelle f est donnée seulement par la première expression. Comme il s'agit d'une composée de fonctions dérivables autant de fois que l'on veut, f admet des dérivées partielles secondes en M_0 .

Dans tout voisinage de (0,0), les deux expressions de f interviennent et on doit revenir aux définitions :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$

On va avoir aussi besoin du calcul pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x-0}{x} = 1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{-y-0}{y} = -1$$

Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, le théorème de Schwarz permet de conclure que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en (0,0).

[®] Le théorème de Schwarz a été publié en 1873. L'exemple de l'exercice est dû à Peano (1858-1932).

corrigés

L'introduction des coordonnées polaires conduit à considérer la fonction g définie sur] 0, + ∞ [×] - $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ [par :

$$g(\rho, \theta) = f(x, y)$$

Dour déterminer l'équation vérifiée par les dérivées partielles de g, il est préférable de calculer les dérivées partielles de f pour pouvoir substituer dans l'équation donnée.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

La fonction f vérifie (1) si, et seulement si, la fonction g vérifie :

$$\rho\cos\theta\Big[\cos\theta\frac{\partial g}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\theta}\Big] + \rho\sin\theta\Big[\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\theta}\Big] = \tan\theta,$$

soit après simplification :

$$\rho \frac{\partial g}{\partial \rho} = \tan \theta \qquad (2)$$

En intégrant l'équation (2) par rapport à ρ , on a :

$$g(\rho, \theta) = \ln \rho \times \tan \theta + \varphi(\theta)$$

où φ est une fonction quelconque de classe C^1 . En revenant à f, on obtient la solution générale de (1) :

$$f(x, y) = \frac{y}{2x} \ln(x^2 + y^2) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

où ψ est une fonction C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

14. Calcul des probabilités

Exercice 1

Notons les événements S_1 « obtenir le six lors du premier lancer », S_2 « obtenir le six lors du deuxième lancer », P « le dé est pipé ».

1 1

On sait que :
$$\mathbb{P}(P) = \frac{1}{4}$$
; $\mathbb{P}(S_1|P) = \mathbb{P}(S_2|P) = \frac{1}{2}$; $\mathbb{P}(S_1|\overline{P}) = \mathbb{P}(S_2|\overline{P}) = \frac{1}{6}$

et on demande :

$$\mathbf{1.} \ \mathbb{P}(P|S_1) = \frac{\mathbb{P}(P) \times \mathbb{P}(S_1|P)}{\mathbb{P}(P) \times \mathbb{P}(S_1|P) + \mathbb{P}(\overline{P}) \times \mathbb{P}(S_1|\overline{P})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbf{2.} \ \mathbb{P}(P|S_1 \cap S_2) = \frac{\mathbb{P}(P) \times \mathbb{P}(S_1 \cap S_2|P)}{\mathbb{P}(P) \times \mathbb{P}(S_1 \cap S_2|P) + \mathbb{P}(\overline{P}) \times \mathbb{P}(S_1 \cap S_2|\overline{P})}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{$$

Si ce n'est pas déjà fait, révisez la formule de Bayes vue en première année, et n'hésitez pas à utiliser un arbre pour visualiser ce qui suit.

Notons S_1 l'événement « obtenir une boule blanche lors du premier tirage », A l'événement « obtenir une boule blanche lors du deuxième tirage ».

D'après l'énoncé on a :

$$\mathbb{P}(S_1) = \frac{b_1}{n_1 + b_1} \quad ; \quad \mathbb{P}(\overline{S_1}) = \frac{n_1}{n_1 + b_1}$$
$$\mathbb{P}(A|S_1) = \frac{b_2 + 1}{b_2 + n_2 + 1} \quad ; \quad \mathbb{P}(A|\overline{S_1}) = \frac{b_2}{b_2 + n_2 + 1}$$

On demande :

$$\mathbb{P}(S_1|A) = \frac{\mathbb{P}(S_1) \times \mathbb{P}(A|S_1)}{\mathbb{P}(S_1) \times \mathbb{P}(A|S_1) + \mathbb{P}(\overline{S_1}) \times \mathbb{P}(A|\overline{S_1})}$$
$$= \frac{\frac{b_1}{n_1 + b_1} \times \frac{b_2 + 1}{b_2 + n_2 + 1}}{\frac{b_1}{n_1 + b_1} \times \frac{b_2 + 1}{b_2 + n_2 + 1} + \frac{n_1}{n_1 + b_1} \times \frac{b_2}{b_2 + n_2 + 1}} = \frac{b_1(b_2 + 1)}{b_1(b_2 + 1) + n_1b_2}$$

Exercice 3

Copyright © 2014 Dunod

Supposons que le candidat choisisse la porte A.

• Si la voiture est derrière la porte A (probabilité $\frac{1}{3}$), le présentateur ouvre indifféremment B ou C. Si le joueur conserve son choix, il gagne la voiture. S'il change son choix, il perd.

• Si la voiture est derrière la porte B, ou la porte C, (probabilité $\frac{2}{3}$), le présentateur ouvre la porte C, ou la porte B. Si le joueur conserve son choix, il perd. S'il change son choix, il gagne la voiture.

Dans la stratégie de conservation du choix, la probabilité que le joueur gagne la voiture est :

$$\frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{1}{3}$$

Dans la stratégie de changement systématique de choix, la probabilité que le joueur gagne la voiture est :

$$\frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$
.

Dans cet ancien jeu de la télévision américaine, il valait donc mieux avoir le réflexe de changer de choix.

Pour que A_{n+1} reçoive la bonne information, il faut :

- soit que A_n ait reçu la bonne information et la transmette correctement ;

- soit que A_n ait reçu la mauvaise information et la change en la transmettant. On a donc (formule des probabilités totales) :

$$p_{n+1} = \alpha p_n + (1 - \alpha)(1 - p_n)$$

La suite (p_n) vérifie la relation de récurrence :

$$p_{n+1} = (2\alpha - 1) p_n + 1 - \alpha.$$

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique (*cf.* **Toute la MPSI en fiches,** fiche 7 des maths)

Avec le premier terme $p_1 = 1$, le terme général est :

$$p_n = \frac{1 + (2\alpha - 1)^{n-1}}{2}$$
.

Comme $\alpha \in]0, 1[$, on a $|2\alpha - 1| < 1$, ce qui entraîne :

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{2} \cdot$$

 $^{\textcircled{0}}$ Remarquez que la limite ne dépend pas de α .

15. Variables aléatoires discrètes

Exercice 1

Déterminons la probabilité de l'événement contraire.

 $M(\omega)$ non inversible $\iff \det M = 0 \iff X^2 = Y^2 \iff X = Y$ car l'univers est \mathbb{N}^* .

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X = k) \text{ et } (Y = k))$$

= $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}(Y = k)$
= $\sum_{k=1}^{+\infty} (pq^{k-1})^2 = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1}$
= $p^2 \frac{1}{1-q^2} = \frac{p}{1+q}$

car X et Y sont indépendantes

car série géométrique convergente

La probabilité demandée est donc : $1 - \frac{p}{1+q} = \frac{2q}{1+q}$.

Exercice 2

Soit X et Y les variables aléatoires égales au nombre de piles obtenues par chacun des deux joueurs au cours des n lancers. Dans les conditions de l'exercice, X et Y suivent la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\Big[(X = k) \cap (X = k)\Big]$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}(X = k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {\binom{n}{k}}^{2} \frac{1}{2^{n}} \frac{1}{2^{n}} = \frac{1}{2^{2n}} {\binom{2n}{n}}.$$

en décomposant l'événement X = Y

car X et Y indépendantes

🕲 La dernière transformation utilise la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

qui se démontre en égalant les coefficients de X^n dans $(X + 1)^{p+q} = (X + 1)^p (X + 1)^q$.

Voir Toute la MPSI en fiches fiche 39 exercice 5

Exercice 3

1. loi du couple (X, N)

L'univers-image de X et de N est N. Soit k et n dans N. Pour que l'événement (X = k et N = n) ne soit pas impossible, il est nécessaire que $k \le n$. Dans ce cas on peut écrire :

$$\mathbb{P}(X = k \text{ et } N = n) = \mathbb{P}(N = n) \times \mathbb{P}(X = k | N = n)$$

Comme *N* suit $\mathcal{P}(\lambda)$, on a : $\mathbb{P}(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$.

Si on sait que N = n, comme chacun des *n* skieurs qui se présentent en *D* a une probabilité *p* de choisir *A* et qu'il y a indépendance entre les skieurs, on a :

$$\mathbb{P}(X = k | N = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad \text{(loi binomiale)}.$$

On a donc : $\mathbb{P}(X = k \text{ et } N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \text{ avec } k \le n.$

2. Loi marginale de X

Soit $k \in \mathbb{N}$. On cherche $\mathbb{P}(X = k)$. Dans la loi du couple, on peut prendre toutes les valeurs entières *n* telle que $n \ge k$. On a donc :

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k \text{ et } N=n) = \frac{e^{-\lambda}}{k!} (\lambda p)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} (\lambda p)^k e^{\lambda q} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

X suit donc la loi de Poisson de paramètre λp .

3. Valeur de *E*(*X*)

Comme X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$, on a $E(X) = \lambda p$.

16. Espérance et variance

Exercice 1 *Y* a pour univers-image $\{0, 1\}$. On a donc :

$$E(Y) = 0 \times \mathbb{P}(Y = 0) + 1 \times \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 1)$$
$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(X = 2k\right)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X = 2k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$$

Avec la fiche 9 (séries entières), on sait que $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$.

En fait la fiche 9 comporte aussi le d.s.e. de ch x qui donne directement le résultat.

^(S) C'est ce résultat (indispensable à connaître) qui permet de démontrer que la somme (au sens des séries) des probabilités élémentaires de $\mathcal{P}(\lambda)$ est bien égale à 1.

En écrivant
$$e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!}$$
 on en déduit : $e^{\lambda} + e^{-\lambda} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$

ce qui entraîne : $E(Y) = e^{-\lambda} \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}$.

Exercice 2

S est à valeurs dans \mathbb{N} . Comme $(N = n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet, on a, pour tout $s \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(S = s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}(S = s | N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = s)$$

Sous réserve de la convergence de la série, on a donc :

$$E(S) = \sum_{s=0}^{+\infty} s \mathbb{P}(S = s) = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} s \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = s)$$

La sommation portant sur des réels positifs, on peut modifier l'ordre de sommation sans changer ni la nature, ni la valeur en cas de convergence. On peut donc écrire :

$$E(S) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathbb{P}(N=n) \sum_{s=0}^{+\infty} s \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = s) \right)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n) E(X_1 + \dots + X_n)$$

On a : $E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = n\mu$

puis :
$$E(S) = \mu \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbb{P}(N = n)$$

On reconnaît l'espérance de N qui existe par hypothèse. Par conséquent, S possède une espérance et l'on a : $E(S) = \mu E(N)$.

En notant Ω_1 l'univers-image de X, on a :

$$E(X^{2}) = \sum_{x \in \Omega_{1}} x^{2} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{|x| \le a} x^{2} \mathbb{P}(X = x) + \sum_{|x| > a} x^{2} \mathbb{P}(X = x).$$

En majorant x^2 par a^2 dans la première somme et par β^2 dans la deuxième somme, on obtient :

$$E(X^2) \leq a^2 \sum_{|x| \leq a} \mathbb{P}(X = x) + \beta^2 \sum_{|x| > a} \mathbb{P}(X = x)$$

soit :

$$E(X^2) \leq a^2 \mathbb{P}(|X| \leq a) + \beta^2 \mathbb{P}(|X| > a) \leq a^2 + \beta^2 \mathbb{P}(|X| > a)$$
Par conséquent :

$$\mathbb{P}(|X| > a) \ge \frac{E(X^2) - a^2}{\beta^2} \cdot$$

Exercice 4

Calculons la fonction génératrice de X + Y. Comme X et Y sont indépendantes, on a :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t)$$

soit :

 $G_{X+Y}(t) = e^{\lambda(t-1)} \times e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$

qui est la fonction génératrice de $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

X + Y suit donc la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Exercice 5

1. Vous avez vu en première année (et vous devez le savoir) que :

Si X suit la loi $\mathcal{B}(n_1, p)$ et Y la loi $\mathcal{B}(n_2, p)$ et si X et Y sont indépendantes, alors X + Ysuit $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$

Voir Toute la MPSI en fiches, fiche 39 des maths.

 Y_n suit donc $\mathcal{B}(2, p)$, et on a $E(Y_n) = 2p$ et $V(Y_n) = 2p(1-p)$.

2. L'espérance d'une somme est toujours égale à la somme des espérances, donc :

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(Y_k) = 2np.$$

Mais ce n'est pas toujours vrai pour les variances.

On peut aussi écrire $S_n = X_1 + 2 \sum_{k=2}^n X_k + X_{n+1}$ et comme les X_k sont deux à deux indépendantes, on en déduit :

$$V(S_n) = V(X_1) + 4 \sum_{k=2}^n V(X_k) + V(X_{n+1}) = (4n-2) p (1-p).$$

3. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(\frac{S_n}{n})\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2} V(\frac{S_n}{n})$$

soit

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2p\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{(4n-2) p (1-p)}{n^2}$$

On en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - 2p \right| \ge \varepsilon \right) = 0.$$

Plus tard, vous direz que la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)$ converge en probabilité vers la variable constante égale à 2p.

Mg (*H+L* Partie 2 *Physique*

2 = ± orccosa +2

Vmax = Vag(H+L) + mg



a b = 1a1

M+

James Clerk Maxwell, 1831-1879

Physicien et mathématicien écossais, il est connu pour sa théorie de l'électromagnétisme (énoncée dans ses quatre célèbres équations) et pour avoir interprété la lumière comme phénomène électromagnétique. De l'incompatibilité de ses découvertes avec la théorie mécanique de Newton a surgi la théorie de la relativité.

A = (x1-x2)/2

Un café s'il vous plait !

(M + m)U

copyright © 2014 Dunod

Copyright © 2014 Dunod.

1 Référentiels non galiléens 1. cinématique

En première année, nous avons étudié les lois de la dynamique du point matériel dans les référentiels dits « galiléens », dans lesquels elles s'expriment de la manière la plus simple. Cependant, les mouvements sont souvent perçus et décrits dans des référentiels dépourvus de ce caractère galiléen. Comment est-il alors possible de les relier aux forces auxquelles on sait par ailleurs le point matériel soumis ?

1. Changement de référentiel

1.1 Présentation de la situation

• Soit deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' , c'est-à-dire deux solides auxquels sont attachés deux repères de projections (O, \mathcal{B}) et (O', \mathcal{B}') : O et O' sont les origines respectives de chaque repère et \mathcal{B} et \mathcal{B}' les bases de leur repère de projection, constituées chacune de trois vecteurs orthonormés.

• Le cadre général d'étude est celui de la mécanique classique. Les espaces sont supposés euclidiens et le temps est le même pour tous les observateurs, quels que soient leurs états de mouvement, contrairement aux conceptions qui prévalent en relativités restreinte et générale où la simultanéité des évènements et « l'écoulement »du temps sont toujours relatifs à l'observateur.

• Le référentiel \mathcal{R}' est en mouvement par rapport au référentiel \mathcal{R} si O' est en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} ou/et si les vecteurs de la base \mathcal{B}' sont des fonctions du temps lorsqu'on les exprime dans la base \mathcal{B} .

[®] Le caractère du mouvement étant relatif, si \mathcal{R}' est en mouvement par rapport à \mathcal{R} , \mathcal{R} est en mouvement par rapport à \mathcal{R}' : O est en mouvement par rapport à \mathcal{R}' ou/et les vecteurs de la base \mathcal{B} sont des fonctions du temps lorsqu'on les exprime dans la base \mathcal{B}' .

1.2 Exemples

• \mathcal{R}' est en **translation** par rapport à \mathcal{R} (cf. fig. 1a) : O' est en mouvement par rapport à \mathcal{R} et les trois directions de l'espace définies par les vecteurs des bases sont fixes les unes par rapport aux autres. Par conséquence, les vecteurs de l'une des bases sont constants lorsqu'on les exprime par rapport aux vecteurs de l'autre base.

• \mathcal{R}' est en **rotation autour d'un axe fixe** dans \mathcal{R} (cf. fig. 1b) : O' est fixe par rapport à \mathcal{R} , un des vecteurs de \mathcal{B}' est constant dans \mathcal{B} et les deux autres tournent avec une vitesse angulaire, constante ou non, autour de cette direction fixe en lui demeurant perpendiculaires.

• \mathcal{R}' est en **rotation autour d'un axe fixe de direction fixe** dans \mathcal{R} : O' est en mouvement dans \mathcal{R} , un des vecteurs de \mathcal{B}' est constant dans \mathcal{B} et les deux autres tournent avec une vitesse angulaire, constante ou non, autour de cette direction fixe en lui demeurant perpendiculaires.



FIGURE 1 - Référentiels en mouvement relatif

• \mathcal{R}' est en **rotation autour d'un point fixe** dans \mathcal{R} (cf. fig. 2) : O' est pris comme le point fixe de \mathcal{R}' dans \mathcal{R} et les trois vecteurs de \mathcal{B}' sont fonctions du temps dans \mathcal{B} .



FIGURE 2 - Référentiel en rotation autour d'un point fixe

1.3 Démarche

• Un même phénomène physique conduisant au déplacement d'un point matériel ou du centre d'inertie d'un système, notés tous deux G, peut être étudié indifféremment dans les deux référentiels \mathcal{R} ou \mathcal{R}' . Son mouvement est alors décrit de manière différente dans chacun d'eux et des trajectoires et des lois horaires différentes dans les deux référentiels en résultent.

• Or, les lois horaires de *G* exprimées dans un référentiel galiléen découlent de la connaissance des forces extérieures qui s'exercent sur ce point ou ce système et de l'application du principe fondamental de la dynamique.

D'après ce principe, c'est l'accélération qui est proportionnelle à la résultante des forces (cf. **Toute la MPSI en fiches**, fiche 16). Pour obtenir les lois horaires dans un autre référentiel selon une démarche approchante, nous devons connaître la relation entre les accélérations de G et donc celle entre ses vitesses dans les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' .

2. Le vecteur rotation et la dérivation composée

2.1 Le vecteur rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R}

• Les vecteurs de la base \mathcal{B}' sont en général fonction du temps lorsqu'ils sont exprimés dans

la base \mathcal{B} . Il existe à tout instant *t* un vecteur noté $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t)$ appelé le vecteur rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} servant à exprimer le taux horaire de changement de position (la dérivée par rapport au temps) des vecteurs de la base \mathcal{B}' dans le référentiel \mathcal{R} .

• Si $\overrightarrow{e}'_{\alpha}$ avec $\alpha = x', y'$ ou z' est l'un des vecteurs orthonormés de la base \mathcal{B}' , sa dérivée par

rapport au temps s'exprime à l'aide de $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t)$ par :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}'_{\alpha}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{B}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \vec{e}'_{\alpha} \qquad (1-1)$$

(1-1) exprime la constance de la norme du vecteur \vec{e}'_{α} , bien que ce dernier change de position dans \mathcal{R} . Ceci impose que la dérivée temporelle de \vec{e}'_{α} dans \mathcal{B} soit orthogonale à \vec{e}'_{α} .

 $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t)$ doit être homogène à l'inverse d'un temps T^{-1} pour que (1-1) soit elle-même homogène. L'unité de ses composantes et de sa norme est le radian par seconde : rad.s⁻¹.

 $^{\textcircled{M}}$ L'évolution au cours du temps de \mathcal{B}' dans \mathcal{R} reflète celle de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} .

• Le vecteur rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} s'exprime sous la forme :

$$\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) = \sum_{i=1}^{3} \dot{\alpha}_{i}(t) \overrightarrow{\mathfrak{u}}_{i}$$

La famille des trois vecteurs $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est libre dans \mathbb{R}^3 . Elle rassemble les vecteurs normés directeurs des trois axes instantanés autour desquels il faut faire successivement tourner, dans \mathcal{R} , la base \mathcal{B}' du repère de projection de \mathcal{R}' à l'instant *t* pour l'amener en coïncidence avec sa nouvelle position à l'instant *t* + d*t*, toujours dans \mathcal{R} .

L'angle de la rotation infinitésimale autour de l'axe dirigé par \vec{u}_i est $d\alpha_i = \dot{\alpha}_i dt$ de sorte que les $\dot{\alpha}_i$ est la vitesse angulaire de rotation autour de cet axe, à l'instant *t*.

2.2 Exemples importants

• Si \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} , les vecteurs de \mathcal{B}' conservent en fait leurs directions et leurs sens respectifs dans \mathcal{R} . On en déduit que les dérivées exprimées par (1-1) sont nulles et que $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) = \overrightarrow{0}$.

• Si \mathcal{R}' est en rotation par rapport à un axe fixe de \mathcal{R} , on choisit comme vecteur commun aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' l'un des deux vecteurs directeurs normés de l'axe de rotation, notons-le \overrightarrow{e}_z . Alors, les deux autres vecteurs de \mathcal{B}' peuvent s'exprimer dans \mathcal{B} :

$$\overrightarrow{\mathbf{e}}'_{x} = \cos\alpha \overrightarrow{\mathbf{e}}_{x} + \sin\alpha \overrightarrow{\mathbf{e}}_{y}$$
$$\overrightarrow{\mathbf{e}}'_{y} = -\sin\alpha \overrightarrow{\mathbf{e}}_{x} + \cos\alpha \overrightarrow{\mathbf{e}}_{y}$$

On déduit de (1-1) que $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) = \dot{\alpha}(t) \vec{e}_z$.

2.3 Propriétés des vecteurs rotation

•
$$\hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) = -\hat{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}(t)$$

•
$$\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}^{\prime\prime}/\mathcal{R}}(t) = \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}^{\prime\prime}/\mathcal{R}'}(t) + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t)$$

traduit la composition des mouvements des référentiels les uns par rapport aux autres.

2.4 Formule de dérivation composée

Les dérivées temporelles de n'importe quel vecteur \vec{U} dans les deux bases sont liées par la

formule de dérivation composée :

$$\frac{d\vec{U}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}(\mathrm{ou}\,\mathcal{B})} = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{\mathcal{R}'(\mathrm{ou}\,\mathcal{B}')} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \vec{U}$$
(1-2)

^{So} Dans le membre de gauche, la dérivée de \vec{U} se calcule plus simplement si \vec{U} est exprimé dans la base \mathcal{B} , alors que, dans celui de droite, le calcul est plus simple si \vec{U} est exprimé dans la base \mathcal{B}' .

• Si le référentiel \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} , les dérivées des vecteurs sont identiques dans les deux bases.

3. La composition des vitesses

3.1 Notations

• Les vecteurs position du point M dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont notés :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$$
 et $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{r}'$

 \overrightarrow{r} est exprimé dans la base \mathcal{B} des vecteurs du repère de projection de \mathcal{R} ; \overrightarrow{r}' est exprimé dans celle \mathcal{B}' des vecteurs du repère de projection de \mathcal{R}' .

Les vecteurs vitesse de M dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' désignent les dérivées par rapport au temps des vecteurs position dans chacun des référentiels. Ils sont notés :

$$\overrightarrow{\mathrm{v}}_{\mathcal{R}}(M) = \left. \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} \right|_{\mathcal{R}} \qquad \text{et} \qquad \left. \overrightarrow{\mathrm{v}}_{\mathcal{R}'}(M) = \left. \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}'}{\mathrm{d}t} \right|_{\mathcal{R}'}$$

 \textcircled Les indices rappelant les référentiels signifient que les dérivations temporelles ne portent que sur les composantes des vecteurs position dans chacune des bases des repères de projection, mais n'atteint pas les vecteurs des bases eux-mêmes. \mathcal{B}' est peut-être fonction du temps, exprimée dans \mathcal{B} , mais elle est naturellement constante par rapport à elle-même.

3.2 Loi de composition des vitesses

• La loi de composition des vitesses se déduit de la relation de Chasles, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ à laquelle on applique (1-2) :

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}}(O') + \overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}'}(M) + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \overrightarrow{O'M}$$
(1-3)

• On appelle vitesse d'entraînement de \mathcal{R}' par rapport à $\mathcal{R}, \vec{v}_e(M)$, la vitesse dans \mathcal{R} du point fixe de \mathcal{R}', M^* , qui coïncide avec M à l'instant t et appelé **point coïncident** :

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}_{e}(M) = \overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}}(M^{*}) = \overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}}(O') + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \overrightarrow{O'M}$$
(1-4)

• La loi de composition des vitesses s'en déduit :

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{\mathbf{v}}_{e}(M) + \overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}'}(M)$$
(1-5)

3.3 Exemples

• \mathcal{R}' en translation par rapport \mathcal{R} : le vecteur rotation est nul. Les points coïncidents ont tous la même vitesse dans \mathcal{R} , égale à celle, $\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(O')$, de l'origine O' du référentiel \mathcal{R}' .

La vitesse d'entraînement est donc indépendante de la position de M dans \mathcal{R}' . La composition des vitesses donne :

$$\overrightarrow{\mathrm{v}}_{\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{\mathrm{v}}_{\mathcal{R}}(O') + \overrightarrow{\mathrm{v}}_{\mathcal{R}'}(M)$$

Ceci ne signifie pas que la vitesse d'entraînement soit indépendante du temps, la vitesse de O' dans R n'étant pas nécessairement constante.

• \mathcal{R}' en rotation autour d'un axe fixe dans $\mathcal{R} : O'$ est en général prise sur cet axe et confondue avec O. Sa vitesse est donc nulle dans \mathcal{R} . $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) = \Omega(t)\overrightarrow{e}_z$. La vitesse d'entraînement devient :

$$\overrightarrow{v}_e(M) = \Omega(t) \overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{O'M}$$

Elle est orthogonale au plan passant par M et contenant l'axe de rotation ; sa norme est égale à $|\Omega(t)|.HM$, où HM représente la distance de M à l'axe de rotation ; H est le projeté orthogonal de M sur l'axe. La loi de composition des vitesses est alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{v}}_{\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{\mathrm{v}}_{\mathcal{R}'}(M) + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \overrightarrow{O'M}$$

Si M est fixe dans \mathcal{R}' , autrement dit si M est solidaire de \mathcal{R}' , on reconnaît dans l'expression précédente la loi de distribution des vitesse des points d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (cf Toute la MPSI en fiches, relation (15-10)).

4. Composition des accélérations

4.1 Notations

• Les vecteurs accélération de M dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' désignent les dérivées par rapport au temps des vecteurs vitesse de M dans chacun des référentiels :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\vec{v}_{\mathcal{R}}(M)) \right|_{\mathcal{R}} \qquad \text{et} \qquad \left. \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)) \right|_{\mathcal{R}'} \right|_{\mathcal{R}'}$$

Les indices rappelant les référentiels signifient que les dérivations temporelles ne portent que sur les composantes des vecteurs vitesse dans chacune des bases, mais n'atteignent pas les vecteurs des bases eux-mêmes.

• L'accélération de O' dans le référentiel \mathcal{R} est notée :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(O') = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\vec{v}_{\mathcal{R}}(O')) \right|_{\mathcal{R}}$$

4.2 Loi de composition des accélérations

• La loi de composition des accélérations se déduit de (1-3) et de la formule de dérivation composée (1-2) :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$
$$\dot{\vec{A}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}(t) \wedge \overrightarrow{O'M} + 2 \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \vec{\nabla}_{\mathcal{R}'}(M)$$
(1-6)

• On appelle accélération d'entraînement de M, notée $\overrightarrow{a}_e(M)$:

$$\overrightarrow{a}_{e}(M) = \overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(O') + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$
(1-7)

 \square L'accélération d'entraînement de M est différente de la dérivée dans \mathcal{R} de sa vitesse d'entraînement.

• On appelle accélération de Coriolis de M (ou accélération complémentaire), notée $\overrightarrow{a}_c(M)$:

$$\overrightarrow{a}_{c}(M) = 2 \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(M)$$
 (1-8)

Si le point M est au repos dans le référentiel \mathcal{R}' , l'accélération de Coriolis s'annule.

• La loi de composition des accélérations s'en déduit :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}'} + \vec{a}_{e}(M) + \vec{a}_{c}(M)$$
(1-9)

4.3 Exemples

• Le référentiel \mathcal{R}' est en translation par rapport au référentiel $\mathcal{R}: \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}$.

Il n'y a pas d'accélération de Coriolis et l'accélération d'entraînement se réduit à l'accélération de O' dans \mathcal{R} .

• Le référentiel \mathcal{R}' est en rotation uniforme par rapport à un axe fixe du référentiel \mathcal{R} : $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) = \Omega \overrightarrow{e}_z$ avec $\Omega = cste$.

L'accélération d'entraînement de M se réduit alors à :

$$\overrightarrow{a}_{e}(M) = \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = -\Omega^{2} \overrightarrow{HM}$$
(1-10)

où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Un point matériel *M* possède dans un référentiel \mathcal{R} de repère de projection $(O, \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$ les lois horaires suivantes :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{vmatrix} R(\omega t + \sin(\omega t)) \\ R\cos(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

1. Quelles sont les dimensions de *R* et ω ?

2. Déterminez les lois horaires de *M* dans un référentiel \mathcal{R}' en translation rectiligne par rapport à \mathcal{R} à la vitesse $v_r \overrightarrow{e}_x$, les origines des deux repères étant confondues à l'instant de référence t = 0.

3. Existe-il un référentiel dans lequel le mouvement de *M* soit circulaire uniforme ? Si oui, caractérisez-le.

Exercice 2: Soit une tige passant par le point O et tournant dans un plan autour de O à la vitesse angulaire constante Ω dans un référentiel \mathcal{R} . Soit un point matériel M se déplaçant sur la tige le long de laquelle il est repéré par l'abscisse x' à partir de O avec la loi horaire $x'(t) = R \cos(\omega t)$.

1. Déterminez la vitesse d'entraînement du point matériel M dans la référentiel \mathcal{R} .

2. Déterminez les accélérations d'entraînement et de Coriolis du point M dans le référentiel \mathcal{R} .

3. Déterminez la trajectoire du point matériel lorsque $\omega = \Omega$.

Référentiels non galiléens 2. Dynamique

1. Lois de la dynamique en référentiel non galiléen

1.1 Rappel (Revoir **Toute la MPSI en fiches** fiche 16)

Si le référentiel \mathcal{R} est galiléen, alors le principe fondamental de la dynamique lie la résultante des forces qui s'exercent sur un point matériel M de masse m ou le centre d'inertie G d'un système matériel de masse M_S à leur accélération dans \mathcal{R} :

$$m \overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(M) = \sum \overrightarrow{f}$$
 ou $M_{\mathcal{S}} \overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(G) = \sum \overrightarrow{f}_{ext}$

1.2 Loi de la dynamique en référentiel non galiléen

• \mathcal{R} est un référentiel supposé galiléen; \mathcal{R}' est supposé non galiléen. Un point matériel M de masse m (ou le centre d'inertie G d'un solide) est soumis à une résultante des forces (extérieures) appliquées $\sum \vec{f}$. La loi de composition des accélérations (1.9) multipliée par m s'écrit :

$$m \overrightarrow{a}_{\mathcal{R}'}(M) = \sum \overrightarrow{f} - m \overrightarrow{a}_e(M) - m \overrightarrow{a}_c(M)$$
(2-1)

Cette égalité est similaire à ce que l'on avait dans le référentiel galiléen : deux termes ayant eux aussi la dimension d'une force s'ajoutent à la résultante des forces établie dans \mathcal{R} . On les appelle les **forces d'inertie**.

• L'égalité (2-1) est souvent utilisée pour déterminer des positions d'équilibre en référentiel non galiléen. On suppose le point matériel au repos dans \mathcal{R}' :

 $\vec{v}_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$ et $\vec{a}_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$. L'accélération de Coriolis s'annule et (2-1) devient :

$$\vec{0} = \sum \vec{f} - m \vec{a}_e(M)$$
 (2-2)

Comme $\overrightarrow{a}_e(M)$ dépend à priori de la position de *M* dans l'espace, il est concevable que (2-2) permettent de déterminer les endroits où le point matériel sera au repos.

Mais (2-2) exprime exactement le principe fondamental de la dynamique tel qu'on l'écrirait dans le référentiel galiléen \mathcal{R} car, d'après la composition des accélérations et avec les hypothèses posées sur l'immobilité de M dans \mathcal{R}' , on a : $\overrightarrow{a}_e(M) = \overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(M)$.

1.3 Les forces d'inertie

• Les forces d'inertie ne traduisent aucune interaction entre points matériels. Elles apparaissent comme une conséquence du seul changement de point de vue.

Un observateur dans un référentiel supposé galiléen qui connaîtrait de manière certaine les forces de champ ou de contact auxquelles la particule serait soumise n'aurait pas besoin de faire intervenir les forces d'inertie pour constater la coïncidence entre ses observations et les prévisions qu'il tirerait de l'application du principe fondamental de la dynamique à la particule, dans son référentiel, en ne recensant que ces forces de champ ou de contact.

En revanche, l'observateur dans \mathcal{R}' qui essaierait de comparer les prédictions établies en procédant de même, constaterait une différence entre elles et ses observations. Il serait obligé d'imaginer l'existence de forces supplémentaires dans son bilan des forces, les forces d'inertie, pour faire à nouveau coïncider les lois horaires calculées et celles observées.

• On appelle force d'inertie d'entraînement le terme :

$$\overrightarrow{f}_{ie} = -m\overrightarrow{a}_e(M) \qquad (2-3)$$

Elle participe toujours à la loi de la dynamique en référentiel non galiléen $(\vec{v}_{\mathcal{R}}(O'))$ n'est pas constante ou/et $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$). Elle est systématiquement opposée à l'accélération d'entraînement.

• Cas où \mathcal{R}' est en translation non uniforme par rapport à \mathcal{R} : $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{a}_e(M) = \overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(O')$. La force d'inertie d'entraînement est la même pour tous les points du référentiels.

Exemple : une voiture qui accélère sur une route droite : tous les passagers sont identiquement plaqués contre les dossiers de leurs sièges. Le plaquage ressenti vient du déséquilibre que l'accélération vers l'avant du véhicule introduit par rapport à ce que les corps auraient tendance à faire, c'est-à-dire poursuivre avec la vitesse qui était la leur lorsque l'accélération a débuté. Or cette vitesse est moindre que celle des sièges sur lesquels ils sont assis ; ceux-ci pressent donc leurs dos.

Mais la sensation perçue par les passager est celle d'une force qui les pousse vers l'arrière. En effet, spontanément, le regard prend ses repères dans le proche voisinage, donc dans la voiture (tableau de bord, console, portières...) par rapport à laquelle ils demeurent fixes, d'où l'impression d'être soumis à cette force vers l'arrière.

• Cas où \mathcal{R}' est en rotation uniforme par rapport à un axe fixe de \mathcal{R} : $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \Omega \overrightarrow{e}_z$; $\overrightarrow{a}_e(M) = -\Omega^2 \overrightarrow{HM}$ (cf. (1-10)); $\overrightarrow{f}_{ie} = m\Omega^2 \overrightarrow{HM}$, H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation.

La force a la direction de la radiale par rapport à l'axe, de ce dernier vers l'extérieur, d'où son caractère centrifuge. Elle augmente comme le carré de la vitesse et croît proportionnellement à la distance HM, de M à l'axe.

Exemple : une voiture qui prend un virage à vitesse linéaire constante. Les passagers sont alors déportés de leurs sièges vers l'extérieur du virage. Aucune force supplémentaire n'intervient; seul le changement par rapport à la direction donnée par le principe d'inertie et la manière dont nos perceptions sensorielles se forment conduisent à l'impression d'une force agissant sur nous.

• On appelle force d'inertie de Coriolis le terme :

$$\overrightarrow{f}_{ic} = -m \overrightarrow{a}_e(M) \qquad (2-4)$$

Elle ne participe à la loi fondamentale que si le vecteur rotation du référentiel \mathcal{R}' par rapport au référentiel \mathcal{R} n'est pas nul et s'il s'agit d'étudier le mouvement et non le seul équilibre du point M dans \mathcal{R}' . La force d'inertie de Coriolis est toujours orthogonale au déplacement de M dans \mathcal{R}' .

1.4 Classe des référentiels galiléens

• Le principe de relativité galiléenne postule que ≪ les lois de la mécanique sont identiques dans tous les référentiels galiléens ou inertiels ≫.

Il en résulte que deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont galiléens si le principe fondamental y prend la même forme :

$$\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(M) = \sum \overrightarrow{f}$$
 et $\overrightarrow{ma}_{\mathcal{R}'}(M) = \sum \overrightarrow{f}$

140 Physique

puisque les deux observateurs font la même analyse des forces auxquelles sont soumis le point matériel de masse m et supposent chacun son référentiel galiléen.

• Il découle de la loi de composition des vitesses que les accélérations d'entraînement et de Coriolis doivent être nulles ; donc que $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ et $\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(O')$ doivent être nuls.

Ainsi, le référentiel \mathcal{R}' ne peut être qu'en translation par rapport à \mathcal{R} et cette translation doit être de plus rectiligne uniforme, $\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(O')$ est constante.

0 Tous les référentiels galiléens sont en translations rectilignes uniformes les uns par rapport aux autres.

2. Caractère galiléen des principaux référentiels

2.1 Le référentiel de Copernic

Défini comme le référentiel \mathcal{R}_{C} dont l'origine est le centre de masse du Système solaire, et dont les axes pointent vers trois étoiles « fixes », il est pour nous la meilleure approximation possible de ce que peut être un référentiel galiléen testable.

Cependant, le Système solaire n'est qu'une infime partie de la Voie lactée, en rotation autour du centre de notre galaxie, à mi-distance entre celui-ci et sa périphérie.

Et la Voie lactée n'est elle-même qu'un des constituants de l'Amas local, ...

On perçoit à travers cette structuration vaguement auto-similaire que son caractère galiléen ne peut être absolu.

2.2 Le référentiel géocentrique

• Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ a pour origine le centre d'inertie G_T de la Terre et ses axes de référence sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic.

La trajectoire de G_T est approximativement circulaire, de rayon $R_{ST} \approx 150 \times 10^9$ m. Elle est parcourue en une année ($T \approx 31, 6 \times 10^6$ s). Sa translation par rapport au référentiel de Copernic \mathcal{R}_{C} est approximativement circulaire uniforme. Son vecteur rotation est nul.

L'accélération de G_T dans \mathcal{R}_C est centripète, d'intensité $R_{ST} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \approx 5,93 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$, soit

moins d'un millième de l'accélération de la pesanteur g.

• Or, les phénomènes qui se déroulent dans le proche voisinage de la Terre sont placés dans son champ de pesanteur. Et la faiblesse de la force d'inertie d'entraînement devant le poids des objets considérés rend légitime l'ignorance du caractère non galiléen de \mathcal{R}_G .

2.3 Le référentiel terrestre

• Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ a comme origine n'importe quel point de la Terre et ses trois axes sont solidaires de cette dernière, considérée comme un solide indéformable. La rotation de notre planète sur elle-même autour de l'axe des pôles géographiques et autour du centre d'inertie du système solaire empêche clairement qu'il soit galiléen.

Le vecteur rotation de $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ par rapport à $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ est, à notre échelle de durées, pratiquement constant si l'on fait abstraction de la précession des équinoxes, c'est-à-dire de la rotation

de $\hat{\Omega}_{\mathcal{R}_{\mathcal{T}}/\mathcal{R}_{G}}$ autour d'une direction fixe dans \mathcal{R}_{G} .

• Parmi les effets de cette rotation propre, citons :

> la rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault par rapport à $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ quand il conserve sa direction par rapport à \mathcal{R}_G ;

➤ la déviation vers l'Est des corps en chute libre, due à la force de Coriolis ;

➢ le décalage de la direction du poids par rapport à la direction de la force d'attraction gravitationnelle terrestre à cause de la force d'inertie d'entraînement : la force gravitationnelle est dirigée vers le centre de la Terre, pas le poids. En effet,

$$\overrightarrow{g}(M) = \overrightarrow{\mathcal{G}}(M) + \Omega_{\mathcal{R}_{\mathcal{T}}/\mathcal{R}_{C}}^{2} \overrightarrow{HM}$$

où *M* est un point au voisinage de la surface de la Terre, *H* son projeté orthogonal sur l'axe polaire, $\vec{g}(M)$ l'accélération de la pesanteur en *M*, $\vec{G}(M)$ le champ de gravitation de la Terre en *M* et $\Omega \approx 7,29 \times 10^{-5}$ rad.s⁻¹ sa vitesse angulaire de rotation propre (cf. fig. 3).



FIGURE 3 - Poids et gravité

➤ La rotation propre de la Terre est à l'origine de l'enroulement des dépressions atmosphériques sur elles-mêmes dans le sens trigonométrique dans l'hémisphère nord et en sens inverse dans l'hémisphère sud;

➤ la rotation propre de la Terre et la force de Coriolis qu'elle génère sur les écoulements fluides entraînent la loi de Baer : dans l'hémisphère Nord, les rives droites des fleuves sont plus érodées que les rives gauche alors que c'est l'inverse dans l'hémisphère Sud.

• Malgré ces preuves évidentes du caractère non galiléen de $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$, il constitue une approximation couramment admise de référentiel galiléen pour des phénomènes spatialement peu étendus et se déroulant sur un laps de temps petit devant la durée du jour sidéral (86 164 s).

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Un véhicule se déplace sur une route droite et horizontale avec une accélération constante *a*. Un pendule simple de masse *m* est suspendu au plafond du véhicule.

1. Déterminez l'angle que fait à l'équilibre le pendule avec la verticale de son point de suspension.

2. La pulsation des petites oscillations autour de sa position d'équilibre dépend-elle de la valeur de *a* ?

Exercice 2 : On lâche sans vitesse initiale un corps *C* assimilé à son centre d'inertie, de masse *m*, d'un point *A* de latitude λ à la surface de la Terre supposée sphérique et d'altitude *H*. On néglige les frottements auxquels il est soumis.

Montrez qu'il atterrit à l'Est de la verticale du point A. Ne pas hésiter à évaluer les ordres de grandeurs des différents termes afin de simplifier le système d'équations différentielles tiré de l'application de la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre non galiléen.

3 Complément de mécanique du solide

Ce complément s'intéresse au lois de Coulomb du frottement de glissement d'un solide en translation.

1. Le frottement solide de glissement

1.1 Nature du contact

Un solide *C* de centre d'inertie *G* est en contact avec une surface plus ou moins rugueuse (support ou sol) S; *C* et S sont supposés indéformables. Ce contact peut être de trois sortes selon l'étendue de la (ou des) surface(s) de contact :

• si la surface de contact entre C et S a ses deux dimensions principales petites devant les dimensions caractéristiques du solide de sorte que l'on puisse l'assimiler à un point, on parle de **contact ponctuel**. Exemple : une sphère sur un plan, en acier très dur (donc peu déformable);

• si la surface de contact entre C et S a une seule de ses deux dimensions principales petites devant les dimensions caractéristiques du solide, le contact peut être modélisé par une ligne géométrique (droite ou courbe). Exemple : un cylindre droit, ou un tore, posé sur un plan en acier. Le contact est dit **linéique**;

• si les deux objets sont en contact l'un avec l'autre par une surface dont aucune des deux dimensions caractéristiques n'est négligeable devant les dimensions du plus petit des deux corps, le contact est dit **surfacique**. Exemple : un cube sur un plan.

1.2 Modélisation des forces de contact

• Des forces électromagnétiques se développent entre les constituants du solide et du support. Il est hors de question de les recenser et de les décrire au niveau atomique ou moléculaire. Bien que les forces électromagnétiques entre les molécules de C et de S soient des forces de champ, leur résultante est de très courte portée et s'annule en pratique lorsque le solide cesse d'être en contact avec le support.

• Les forces de contact résultantes se prêtent à une étude phénoménologique qui vaut pour tous les contacts.



FIGURE 4 – Forces de contact

Elle repose sur la décomposition de la force de contact, $\overrightarrow{f}_{S \to C}$, que le support S exerce sur le corps C en sa composante perpendiculaire à la surface de contact ou perpendiculaire au plan tangent au point de contact M, \overrightarrow{R}_n , et sa composante parallèle au plan de contact, \overrightarrow{R}_t (cf. fig. 4):

$$\overrightarrow{f}_{S \to C} = \overrightarrow{R}_t + \overrightarrow{R}_n \qquad (3-1)$$

Pour qu'il y ait contact entre le corps et le support, la composante normale doit être non nulle et dirigée du support vers le corps.

1.3 Lois de Coulomb du frottement de glissement

Deux situations, exclusives l'une de l'autre, peuvent survenir :

1 soit le corps *C* est au repos dans le référentiel \mathcal{R}_S lié au support *S*. Alors, les composantes normale et tangentielle de la résultante des forces de contact sont liées par :

$$\tan \alpha \leq f_s$$
 où $\tan \alpha = \frac{\|\vec{R}_t\|}{\|\vec{R}_n\|}$ (3-2)

 f_s est le **coefficient de frottement statique** entre le support et le corps.

Cette situation doit s'accompagner pour le corps C de l'une des deux conditions :

- (1) $\sum \vec{f} = \vec{0}$, si $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ est galiléen;
- (2) $\sum \vec{f} \vec{f}_{ie} = \vec{0}$ (2), si \mathcal{R}_S ne l'est pas,

 $\sum \vec{f}$ représente la somme des forces extérieures s'exerçant sur le corps *C*.

À l'équilibre dans \mathcal{R}_S , la composante tangentielle possède une orientation quelconque dans le plan tangent, celle qui permet d'avoir avec les autres forces (1) ou (2);

2 soit le corps *C* est en mouvement par rapport à \mathcal{R}_S . Alors, les composantes normale et tangentielle de la résultante des forces de contact ont les propriétés :

$$\overrightarrow{R}_t \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_S}(M \text{ ou } G) \| \overrightarrow{R}_n \|$$
 (3-3)

où $\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}}}(M \text{ ou } G)$ est la vitesse instantanée de translation du corps dans $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ et f_d le **coefficient de frottement dynamique** entre le support et le corps.

Solution Les coefficients de frottement statique et dynamique sont des quantités positives, sans dimension et sans unité. Elles dépendent non seulement de la nature des matériaux en contact mais aussi de leurs états de surface, c'est-à-dire de la rugosité des surfaces en contact; $f_d < f_s$.

2. Aborder un problème avec frottement solide de glissement

Deux manières de procéder se présentent selon que l'on suppose le mouvement ou non dans le référentiel d'étude :

2.1 Faire l'hypothèse de l'équilibre dans le référentiel d'étude

- Appliquer (1) ou (2) selon la nature supposée du référentiel.
- En déduire les composantes de la force de contact.
- Vérifier si les données numériques font que la condition (3-2) est satisfaite.

2.2 Si (3-2) n'est pas satisfaite, faire l'hypothèse du mouvement dans un sens donné

• Orienter convenablement la composante tangentielle de sorte que la première condition (3-3) soit satisfaire.

• Exprimer la composante normale de la force de contact.

• Exprimer l'intensité de la composante de la force tangentielle à l'aide de la seconde partie de (3-3).

- Introduire son expression dans l'équation du mouvement.
- Intégrer l'équation du mouvement si possible.

• Vérifier que les conditions numériques ne conduisent pas à des incompatibilités par rapport au choix du sens de mouvement ; sinon reprendre la démarche en changeant le sens du mouvement.

• Délimiter éventuellement le champ des conditions à satisfaire pour que le cadre choisi demeure valide.

• Le mouvement cesse dans le référentiel d'étude si la vitesse de M ou de G s'annule et si la force de contact à cet instant-là satisfait à (3-2).

Les mouvements à frottement solide nécessitent souvent d'être étudiés par phases successives puisque les équations du mouvement changent avec le sens de ce dernier.

3. Bilan énergétique

3.1 Hypothèses

• Le référentiel \mathcal{R} lié au support sur lequel un point matériel M ou un corps C frotte est supposé galiléen.

• *M* ou le centre d'inertie *G* du solide *C* en translation dans *R* est supposé soumis à des forces dérivant d'une énergie potentielle \mathcal{E}_p et au contact solide avec le support, occasionnant une force de frottement \overrightarrow{R}_1 .

• \mathcal{E}_c est l'énergie cinétique de M ou du corps C dans le référentiel \mathcal{R} .

3.2 Bilan

• D'après (17-23) de Toute la MPSI en fiches, la dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique du point matériel ou du corps en translation dans le référentiel est égale à la puissance des forces non conservatives dans le même référentiel.

Or, la seule force supposée non conservative est la composante tangentielle de la force de contact, due au frottement :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \right) = \mathcal{P}(\overrightarrow{R}_t) = \overrightarrow{R}_t \cdot \overrightarrow{\nabla}_{\mathcal{R}}(M \text{ ou } G)$$
• D'après (3.3), le membre de droite est négatif. L'énergie mécanique décroît au fil du temps jusqu'à ce que le corps s'arrête et les composantes des forces de liaison satisfassent (3.2).

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Un solide de masse *m*, de centre d'inertie *G* est initialement au repos sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Le coefficient de frottement statique entre le solide et le plan est f_s . Le coefficient de frottement dynamique est f_d .

1. Déterminez la valeur maximale α_m de l'angle α pour que le solide demeure à l'équilibre.

2. On suppose cette valeur très légèrement dépassée. Caractérisez le mouvement ultérieur du solide.

Exercice 2 : On reprend la situation de l'exercice précédent, mais le solide est attaché à l'extrémité d'un ressort sans masse de raideur k et de longueur à vide l_0 , dont l'autre extrémité est attachée à un point situé fixe au-dessus de G, le ressort demeurant parallèle à la ligne de plus grande pente du plan incliné. À l'instant initial, le ressort est détendu.

1. Analysez le mouvement ultérieur du solide en supposant que $\alpha > \alpha_m$.

2. Tracez qualitativement dans le plan de phase $(x, \dot{x} | a \text{ trajectoire de phase du centre d'inertie, } <math>x(t)$ étant la position du centre d'inertie le long de la ligne de plus grande pente, l'origine étant prise à la position initiale du point *G*, et l'axe étant dirigé vers le bas.



1. Représentations des signaux périodiques

1.1 Définitions

• Un signal caractérisé par une grandeur s(t) est **périodique** s'il existe une durée T > 0 telle que pour tout t, s(t + T) = s(t). La plus petite durée non nulle satisfaisant à cette propriété s'appelle la **période** du signal. Sa **fréquence** s'en déduit : $f = \frac{1}{T}$.

Exemples : les grandeurs sinusoïdales pures, les tensions carrées ou triangulaires délivrées par un générateur de signaux basses fréquences.

- La donnée de *s*(*t*) sur sa période fondamentale est la **représentation temporelle** du signal.
- La valeur moyenne \overline{s} et la valeur efficace S_e du signal s(t) sont définies par :

$$\overline{s} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \, \mathrm{d} t \qquad \text{et} \qquad S_e^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (s(t))^2 \, \mathrm{d} t \qquad (4-1)$$

• Les signaux périodiques fondamentaux sont les signaux sinusoïdaux. Leur expression générale est : $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$, où ω est la pulsation (en rad.s⁻¹), liée à la fréquence f (en Hz) et à la période T (en s) par : $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ et où S_m est l'amplitude du signal ; $\overline{s} = 0$ et $S_e = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$.

1.2 Décomposition en série de Fourier

• Un signal s périodique, de période T (et de fréquence f) peut s'écrire comme une somme infinie de composantes sinusoïdales de fréquences multiples de f:

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$$
 (4-2)

où S_n est l'amplitude maximale de la composante sinusoïdale de fréquence nf et φ_n sa phase à l'origine. On appelle cette décomposition une **décomposition en série de Fourier**.

La série décrite dans le membre de droite existe et converge presque partout vers s pour les signaux que nous considérons : continus et dérivables par morceaux sur la période possédant au plus un nombre fini de discontinuités de première espèce. Aux points de discontinuités, selon le théorème de Dirichlet, elle converge alors vers la moyenne des limites de s à droite et à gauche de la discontinuité.

La composante S_0 est la **composante continue** ou **valeur moyenne** du signal sur une période. Elle décrit si le signal est globalement positif ou négatif au cours du temps.

[•] Le signal s est traduit par une superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples d'une fréquence f fondamentale.

Celle de rang n = 1 est appelée la **composante fondamentale** de s : elle donne en général la variation principale du signal au cours du temps.

Les autres composantes sont désignées comme les **harmoniques** de s, chacune étant caractérisée par son rang *n*.

• La valeur moyenne sur sa période du signal décomposé en série de Fourier est égale à S_0 : $\overline{s} = S_0$. Sa valeur efficace est donnée par :

$$S_e^2 = S_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} S_n^2 = S_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_{n,e}^2$$
 (4-3)

où $S_{n,e} = \frac{S_n}{\sqrt{2}}$ est la valeur efficace de l'harmonique de rang *n* non nul.

Exemple : une tension carrée u(t) symétrique, égale à U_m pendant une demie-période et $-U_m$ sur l'autre, se développe comme suit :

$$u(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4U_m}{(2p+1)\pi} \sin\left(2\pi(2p+1)ft\right)$$

• Les coefficients S_n et les phases φ_n de la série sont obtenus grâce aux expressions :

$$S_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N}^*, \ S_n e^{i\varphi_n} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{-i2\pi nft} dt \qquad (4-4)$$

La parité du signal (obtenue éventuellement avec un changement d'origine des temps) simplifie souvent les résultats.

2. Représentation spectrale

2.1 Spectre des signaux périodiques

• Le développement en série de Fourier (4-2) d'un signal conduit directement à sa **repré**sentation spectrale, c.-à-d. à sa décomposition en signaux sinusoïdaux. Cette représentation consiste en la donnée des amplitudes et des phases de toutes les composantes sinusoïdales qui constituent le signal : { $(S_n, \varphi_n)/n \in \mathbb{N}$ }.

Cette représentation nécessite la donnée d'une infinité d'informations, heureusement synthétisée par les expressions mathématiques issues de (4-4) donnant les S_n et les φ_n , tout comme la représentation temporelle nécessite l'infinité des valeurs { $s(t)/t \in [0; T[$ }, elles aussi résumées par la fonction s.

• Le spectre de s est un spectre de raies (cf. **Toute la MPSI en fiches**, physique fiche 2). Les raies existent *a priori* à chaque fréquence nf, multiple entière de la fréquence fondamentale f; elles ont respectivement pour intensité S_n .

Ainsi, la composante moyenne du signal - fréquence nulle, n = 0 - est représentée par la raie d'intensité S_0 , à la fréquence nulle, sa composante fondamentale - à la fréquence f, n = 1 - par la raie d'intensité S_1 , etc...

Le seul spectre est insuffisant pour reconstituer le signal : il y manque les informations sur les phases des composantes pour ce faire.

• Les composantes spectrales de rangs élevés participent aux variations rapides du signal, notamment si ce dernier possède des discontinuités, tel un signal « carré ».

2.2 Généralisation aux signaux non périodiques

En fait, de nombreux autres signaux, même non périodiques, ont une représentation spectrale.

Une condition, assez forte mais suffisante, est que $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt$ ait une valeur finie.

• Elle ne donne pas les amplitudes et les phases pour une seule suite discrète de fréquences (les multiples de la fréquence fondamentale), mais à toutes les fréquences. La représentation spectrale décrit le signal par une fonction complexe $\underline{S}(v)$ telle que $2|\underline{S}(v)|$ ait une signification voisine de « l'amplitude » avec laquelle la composante sinusoïdale de fréquence v participe au signal *s* et telle que son argument à la même fréquence soit la phase de sa contribution.

• <u>S</u> est la transformée de Fourier de s donnée par :

$$\underline{S}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i2\pi v t} dt$$

Alors, le signal s est reconstitué à partir de sa transformée de Fourier grâce à :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(\nu) \,\mathrm{e}^{i\,2\pi\nu t} \,\mathrm{d}\nu$$

La transformation de Fourier projette (au sens d'un produit scalaire sur un espace de fonctions) le signal s sur un signal « sinusoïdal » à travers l'exponentielle d'Euler. La transformation inverse traduit la composition du signal comme une somme continue de signaux sinusoïdaux de toutes fréquences *a priori*.

• Le signal *s* est donné par des valeurs réelles, il en découle la propriété de symétrie hermitienne :

$$\underline{S}(-\nu) = \overline{\underline{S}(\nu)}$$

• Le spectre du signal s non périodique est alors la représentation de $|\underline{S}(\nu)|$.

À cause de la propriété de symétrie hermitienne, elle est une fonction paire de ν , que l'on peut se contenter de représenter sur l'intervalle $[0; +\infty]$. Elle est éventuellement à support borné s'il existe une fréquence positive ν_M telle que : $\forall \nu / |\nu| > \nu_M$, $\underline{S}(\nu) = 0$. On dit alors que le signal est à **spectre borné**.

[®] De même que S_n ne contient pas toute l'information sur le signal périodique, $|\underline{S}(v)|$ ne contient pas toute celle sur s non périodique. Il manque dans les deux cas l'information sur les phases.

3. Filtrage linéaire des signaux périodiques

3.1 Définitions

• Un système est **linéaire** si, répondant par un signal s_1 (resp. s_2) à un signal d'entrée e_1 (resp. e_2), il répond au signal $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ par le signal $\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2$.

• Un système est **invariant** si, répondant par un signal *s* à un signal d'entrée *e*, il répond au signal retardé de t_r , e_r défini par $\forall t, e_r(t) = e(t - t_r)$ par le signal retardé de t_r par rapport à *s*, s_r tel que $\forall t, s_r(t) = s(t - t_r)$.

• Un filtre linéaire est un système linéaire invariant.

3.2 Propriété fondamentale

La réponse d'un filtre linéaire à un signal d'entrée sinusoïdal de fréquence f et d'amplitude E est un signal sinusoïdal de même fréquence, d'amplitude S proportionnelle à E et éventuellement déphasé par rapport au signal d'entrée.

3.3 Traduction mathématique

Nous avons introduit (cf. **Toute la MPSI en fiches**, physique fiche 14) la notion de fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ ou $\underline{H}(\nu)$. Son formalisme permet d'écrire la réponse *s* d'un filtre linéaire au signal d'entrée $e(t) = E_m \cos(\omega_0 t + \varphi_e)$. Cette réponse est :

$$s(t) = |\underline{H}(\omega_0)| E_m \cos(\omega_0 t + \varphi_e + \arg \underline{H}(\omega_0))$$

Le signal de sortie est sinusoïdal de même pulsation ω_0 .

Son amplitude est égale à l'amplitude du signal d'entrée E_m multipliée par le module de la fonction de transfert à la pulsation ω_0 , $|\underline{H}(\omega_0)|$.

Sa phase à l'origine est celle du signal d'entrée à laquelle s'ajoute l'argument de la fonction de transfert à la pulsation ω_0 , arg <u> $H(\omega_0)$ </u>.

3.4 Réponse d'un filtre linéaire à un signal périodique

• La réponse d'un filtre linéaire à un signal périodique peut s'effectuer de deux manières :

➤ soit en résolvant directement l'équation (les équations) différentielle(s) liant l'entrée et la sortie du filtre ;

➤ soit en traduisant les caractères linéaire et invariant du filtre sur la décomposition en série de Fourier.

• Considérons un signal d'entrée du filtre périodique de fréquence f_0 . Il est décomposable en série de Fourier selon (4-2) et (4-4).

• Le filtre linéaire répond à la composante $S_n \cos(2\pi nft + \varphi_n)$ par le signal :

$$|\underline{H}(\omega_n)| S_n \cos(\omega_n t + \varphi_n + \arg \underline{H}(\omega_n))$$

où $\omega_n = 2\pi n f$.

Son caractère linéaire lui fait répondre à $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\underline{H}(\omega_n)| S_n \cos(\omega_n t + \varphi_n + \arg \underline{H}(\omega_n))$$
(4-5)

Le filtre traite indépendamment chaque composante sinusoïdale constitutive du signal d'entrée. Le signal de sortie apparaît comme une série de Fourier de même fréquence fondamentale f que celle d'entrée. Il est donc périodique de période T.

^(Q) (4-5) est valide quelle que soit la répartition des pulsations ω_n ; ce n'est pas la régularité de leur répartition qui est en jeu, mais le caractère linéaire du filtre.

Ainsi,

$$e(t) \qquad \xrightarrow{\text{résolution équa. diff.}} s(t)$$

1 série de Fourier

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n) \quad \xrightarrow{\text{linéarité, invariance}} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} R_n \cos(\omega_n t + \varphi_n + \psi_n)$$

avec $R_n = |\underline{H}(\omega_n)| S_n$ et $\psi_n = \arg \underline{H}(\omega_n)$ où $\omega_n = 2\pi n f$.

La recherche de s(t) par la résolution de l'équation différentielle avec e(t) comme entrée se réduit à celle d'une solution particulière (la solution de régime permanent), de période T comme l'entrée.

4. Actions des filtres sur les signaux périodiques

4.1 Filtres passe-bas

• Un filtre passe-bas atténue les composantes sinusoïdales de fréquences supérieures à la fréquence de coupure f_c . Par conséquence, le poids relatif de ces dernières dans le signal de sortie diminue par rapport à ce qu'il est dans le signal d'entrée.

Il en découle une diminution des variations très rapides qui se traduisent par la diminution voire l'élimination d'éventuelles discontinuités du signal d'entrée.

• Si la fréquence de coupure du filtre est très petite par rapport à la fréquence fondamentale f, le filtre isole la composante continue du signal d'entrée, si cette dernière est non nulle, et en réalise ainsi sa moyenne.

Ce procédé est utilisé par les appareils de mesures (voltmètres, ampèremètres) pour fournir les valeurs moyenne ou efficace d'un signal périodique. L'extraction de la composante continue sera plus efficace avec un filtre passe-bas du second ordre que du premier ordre. On dit que filtre se comporte comme un « **moyenneur** ».

• Si le signal ne possède pas de composante continue, que $f \gg f_c$ et que le filtre soit un passe-bas du premier ordre, alors le filtre délivre en sortie un signal proportionnel au résultat de l'intégration par rapport au temps du signal présent en entrée. On dit qu'il se comporte comme un **intégrateur** du signal d'entrée.

• Si la fréquence de coupure est grande devant la fréquence fondamentale du signal d'entrée, un grand nombre de ses composantes sinusoïdales traversent le filtre sans être beaucoup modifiées. Le signal de sortie du filtre est alors très voisin du signal d'entrée.

4.2 Filtres passe-haut

• Un filtre passe-haut, du premier ou du second ordre, élimine toujours la composante continue du signal d'entrée si cette dernière est non nulle. En effet, leur fonction de transfert s'annule toujours aux basses fréquences : $\underline{H}(j0) = 0$.

L'élimination de la composante continue est plus efficace avec un filtre passe-haut du second ordre que du premier ordre. Si l'on souhaite conserver à peu près intacte la partie variable du signal, il suffit de choisir une fréquence de coupure du filtre très petite (si possible) devant la fréquence fondamentale du signal d'entrée. Le filtre est dit « **réjecteur du continu** ».

• Si le filtre est un passe-haut du premier ordre, avec $f \ll f_c$, alors les composantes « qui comptent » pour former le signal d'entrée fournissent des contributions au signal de sortie

qui sont proportionnelles à leurs dérivées par rapport au temps. Comme le signal de sortie est la somme de ces contributions, ce dernier est pratiquement proportionnel au signal dérivé par rapport au temps du signal d'entrée. On dit que le filtre se comporte comme un « dérivateur ».

4.3 Filtre passe-bande

Un filtre passe-bande est principalement utilisé pour isoler une composante sinusoïdale de fréquence donnée au sein d'un signal, ainsi que les fréquences qui lui sont voisines. Pour ce faire, nous choisissons la fréquence de résonance - on dit aussi de « fréquence centrale » - du filtre passe-bande égale à la fréquence de la composante que nous désirons conserver. Si le filtre est suffisamment sélectif, les autres composantes spectrales seront fortement atténuée et la sortie du filtre sera pratiquement constituée de la seule composante sinusoïdale sélectionnée.

4.4 Synthèse

	1er ordre	2nd ordre
Filtre passe-bas	moyenneur	moyenneur***
$f \gg f_c$	intégrateur	
Filtre passe-haut	réjecteur du continu	réjecteur*** du continu
$f \ll f_c$	dérivateur	

5. Systèmes non linéaires

5.1 Définition et critère pratique de détection

Un système de traitement du signal est **non linéaire** si sa réponse à un signal d'entrée sinusoïdal n'est pas sinusoïdale de même fréquence. La définition emporte le critère expérimental qui permet de savoir si un système est linéaire ou non.

5.2 Exemples

• Nous distinguons habituellement les systèmes qui sont marginalement non linéaires de ceux qui le sont intrinsèquement. Ainsi, un amplificateur doit délivrer normalement un signal proportionnel à son entrée. Cependant, si le signal d'entrée a une amplitude trop élevée, l'amplificateur l'écrête et le signal de sortie cesse d'être proportionnel à celui d'entrée.

D'une manière générale tous les dispositifs actifs fonctionnant hors de leurs domaines linéaires respectifs deviennent non linéaires ; ceci demeure cependant une anomalie d'usage.

• Les procédés de transposition de fréquence - modulation d'amplitude, de fréquence ou de phase - sont intrinsèquement non linéaires. Ils modifient en effet sciemment les fréquences des signaux d'entrée, afin de transposer leurs spectres dans toute la bande passante du canal de transmission et faciliter ainsi leur transmission, optimisant de la sorte l'utilisation du canal de transmission.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Soit la tension d'entrée d'un filtre passif passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure $f_c = 600$ Hz et constituée des trois composantes spectrales suivantes :

a - une composante de fréquence $f_1 = 450$ Hz et d'amplitude 4, 5 V ;

b - une composante de fréquence $f_2 = 900$ Hz et d'amplitude 6, 5 V ;

c - une composante de fréquence $f_3 = 1800$ Hz et d'amplitude 3, 5 V ;

1. Rappelez la forme canonique de la fonction de transfert du filtre.

2. Déterminez les amplitudes relatives des composantes spectrales de sortie du filtre.

Exercice 2 : Soit une tension carrée d'amplitudes $+V_0$ et $-V_0$, de fréquence f_0 . On filtre la tension par un filtre passe-bande passif de gain maximal égal à 1 pour la fréquence centrale $5f_0$ et de facteur de qualité Q.

1. Rappelez la forme canonique de la fonction de transfert du filtre.

2. Quelle valeur de Q doit-on choisir pour que toutes les raies spectrales du signal de sortie du filtre aient une amplitude au moins dix fois inférieure à l'amplitude de la raie de fréquence $5f_0$?

5 Introduction au traitement numérique du signal

Depuis le début des années 1980, les technologies numériques de traitement du signal se sont imposées dans l'industrie (les machines-outils numériques, les processus contrôlés de production et de mesure, ...), les télécommunications (réseaux de téléphonie numériques, télévisions et radiodiffusion numériques) et l'électronique de loisirs (lecteurs CD, DVD, lecteurs MP3, ...). Au cœur de l'emploi de ces technologies, des dispositifs : les calculateurs numériques et les ordinateurs ; et un principe : l'échantillonnage.

1. L'échantillonnage

1.1 Introduction

• Nous avons vu (cf. fiche 4) que nous disposions de deux représentations des signaux, périodiques ou non : la représentation temporelle décrite par s(t) et la représentation fréquentielle ou spectrale donnée par $\underline{S}(v)$ ou $\{S_n, \varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

• Cependant, tous les signaux rencontrés ont des variations temporelles limitées par les lois physiques qui les gouvernent. Il existe donc un intervalle de prédictibilité à l'intérieur duquel le signal *s* prendra sa valeur à un instant t_2 , si l'on connaît sa valeur à un instant antérieur t_1 . Cet intervalle est d'autant plus réduit que t_2 est proche de t_1 .

La connaissance des valeurs $\{s(t)/t \in I\}$, I étant un intervalle de \mathbb{R} apparaît redondante et donne son sens à l'échantillonnage.

1.2 Définition

• L'échantillonnage d'un signal *s* est le prélèvement de ses valeurs pour une suite d'instants discrets $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, qui conduit à l'ensemble $\{s(t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

• L'échantillonnage du signal est périodique si les instants d'échantillonnage sont de la forme : $t_n = t_0 + n.T_e$, avec $n \in \mathbb{Z}$; t_0 est un instant arbitraire et T_e est la **période d'échantillonnage**; son inverse f_e , est la **fréquence d'échantillonnage**. (cf. fig. 5).



FIGURE 5 – Échantillonnage périodique

1.3 Réalisation matérielle

• L'échantillonnage d'un signal est réalisé par un **échantillonneur-bloqueur**. Son symbole est donné ci-après.



• Il fonctionne à la période T_e d'échantillonnage. Il capte à l'instant t_n la valeur $s(t_n)$ et la conserve pendant T_e pour qu'un convertisseur analogique - numérique (C.A.N.) traduise pendant ce laps de temps la valeur $s(t_n)$ en un code binaire, adapté à l'unité de calcul qui exploitera la donnée pour la filtrer ou l'utiliser pour commander ou corriger numériquement un processus.

• Le signal échantillonné-bloqué, $s^*(t)$ est décrit par :

$$s^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t_n) \psi(t - t_n) \quad \text{où} \quad \psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, T_e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
(5-1)

Une fonction en escalier le représente (cf. fig. 5).

• Soit le signal *s* converti par un capteur idoine en une tension électrique s(t); le montage électronique simple de la fig. 6 permet de réaliser la fonction échantillonneur-bloqueur :



FIGURE 6 – Électronique d'un échantillonneur-bloqueur

Les deux interrupteurs sont ouverts ou fermés en opposition l'un de l'autre : quand l'interrupteur (1) est ouvert, l'interrupteur (2) est fermé et inversement.

Ainsi, quand (1) est fermé par le signal de commande \ll Int \gg à l'état H, le condensateur se charge très rapidement sous la tension présente en entrée si la constante de temps rC est très petite devant la durée de fermeture.

Lorsqu'on ouvre (1), le premier condensateur conserve la tension acquise ; l'interrupteur (2) est fermé et le premier montage suiveur transmet cette tension au second condensateur. La sortie du circuit délivre un signal voisin de s^* .

Sen réalité, le signal de sortie du montage précédent n'est pas rigoureusement égal à s^* défini par (5-1), mais égal à s^* retardé de la durée de fermeture de (1).

2. Le théorème d'échantillonnage de Shannon

2.1 Objet du théorème

• Le montage précédent échantillonne n'importe quel signal analogique préalablement trans-

formé en une tension qui en est l'image. Cependant, sans précautions particulières, le signal échantillonné-bloqué s^* peut se révéler extrêmement différent de s, sans même en refléter l'allure générale.

• Le théorème de Shannon ou théorème d'échantillonnage définit la condition sur la fréquence d'échantillonnage f_e pour que l'ensemble des échantillons $\{s(t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ issus d'un échantillonnage périodique constitue une représentation du signal *s*, au même titre que ses représentations temporelle ou spectrale (cf. fiche 7), c'est-à-dire pour que *s* puisse être reconstitué sans perte d'information à partir de la donnée des échantillons.

2.2 Théorème d'échantillonnage

L'ensemble des échantillons $\{s(t_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *du signal s est une représentation de s si les deux conditions suivantes sont remplies :*

1. le signal s est à spectre borné (cf. fiche 4 § 2) de fréquence maximale v_M ;

2. l'échantillonnage est périodique de période T_e ou de fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$ telle que $f_e > 2 v_M$,

appelée condition de Shannon.

2.3 Justification qualitative

• Soit un signal sinusoïdal pur de fréquence f_0 (de période T_0), $s(t) = S_m \cos(\omega_0 t)$. Son échantillonnage périodique aux instants $t_n = n.T_e$, avec $n \in \mathbb{Z}$, fournit la suite des échantillons : $s(t_n) = S_m \cos(n\omega_0 T_e)$.

D'après le théorème de Shannon, les $\{s(t_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ constituent une représentation de *s* uniquement si $2T_e < T_0$.

• Si la période T_e d'échantillonnage est suffisamment petite de sorte qu'il y ait plusieurs échantillons par période du signal, alors, en supposant une variation monotone du signal d'un échantillon au suivant, leur suite reconstitue convenablement la sinusoïde initiale.



FIGURE 7 – Échantillonnage correct

• Si la période d'échantillonnage est trop grande, de sorte qu'il y ait moins de trois échantillons par période de la sinusoïde, alors le signal reconstitué en supposant une variation monotone d'un échantillon à l'autre ne correspond plus au signal initial.



FIGURE 8 - Échantillonnage incorrect

156 Physique

Le signal reconstitué se confond avec celui qui résulterait de l'échantillonnage périodique d'un signal sinusoïdal de fréquence apparente beaucoup plus basse que celle du signal initial, échantillonnage qui respecterait, lui, la condition de Shannon.

• On conçoit à partir de ces deux exemples simples qu'un échantillonnage effectué à une fréquence f_e non conforme au théorème d'échantillonnage dégrade de manière irréversible l'information transportée par *s*.

Il est par conséquence nécessaire d'avoir une idée de l'étendue spectrale des grandeurs physiques qui évoluent au cours d'un processus, si l'on entend en faire des grandeurs de pilotage ou de contrôle au sein d'une chaîne numérique. Cela détermine le choix de la fréquence d'échantillonnage satisfaisant à la condition de Shannon afin que ces grandeurs échantillonnées nous renseignent avec pertinence sur le processus en cours.

L'exemple de la sinusoïde nous fait pressentir que pour traduire la variation globale du signal qui, sur une période, possède deux variations de nature opposées (décroissant puis croissant par exemple), il est nécessaire d'avoir au moins trois points régulièrement répartis dans le temps à l'intérieur de la période pour enregistrer ces variations.

2.4 Repliement du spectre

• Le phénomène précédent de modification de la fréquence apparente d'un signal sinusoïdal échantillonné-bloqué ou, plus généralement, de modification du spectre d'un signal quelconque lors d'un échantillonnage non conforme à la condition de Shannon s'appelle le phénomène de **repliement du spectre**.

• Le repliement du spectre provient de ce que, pour une fréquence d'échantillonnage donnée

 f_e , tous les signaux sinusoïdaux de fréquence $f_0 + kf_e$ où $f_0 \in [0; \frac{f_e}{2}]$ et $k \in \mathbb{N}$ ayant la même phase à l'origine génèrent les mêmes ensembles d'échantillons.

Soit le signal $s_k(t) = S_m \cos(2\pi(f_0 + kf_e)t + \varphi)$; son échantillonnage à la fréquence f_e donne l'ensemble des échantillons :

$$s_k(t_n) = S_m \cos(2\pi (f_0 + kf_e)T_e n + \varphi) = S_m \cos(2\pi (f_0T_e + k)n + \varphi)$$
$$s_k(t_n) = S_m \cos(2\pi f_0T_e n + \varphi)$$

Les échantillonnages périodiques de ces signaux sont donc interprétés de manière identique : celui du signal sinusoïdal de fréquence f_0 , le seul à satisfaire la condition de Shannon.

• L'important dans la condition de validité de l'échantillonnage est que le spectre de *s* soit borné. Nous devons nuancer ce qu'énonce la condition de Shannon.

Soit le signal *s* dont la transformée de Fourier serait non nulle dans les intervalles de fréquences $[-v_0 - v_M; -v_0 + v_M]$ et $[v_0 - v_M; v_0 + v_M]$ (cf. fig. 9).

Un tel signal est issu de la modulation à une fréquence porteuse v_0 d'un signal basse fréquence s_b dont la transformée de Fourier $\underline{S}_b(v)$, dans la bande $[-v_M; v_M]$, est la translation de $-v_0$ de la partie de $\underline{S}(v)$ comprise dans la bande $[v_0 - v_M; v_0 + v_M]$.



FIGURE 9 – Spectres de s et s_b

Si l'on applique rigoureusement la condition de Shannon, la fréquence minimale d'échantillonnage devrait être $2(v_0 + v_M)$.

Un échantillonnage à une fréquence minimale égale à $2 \frac{v_0 + v_M}{m}$ où *m* est le plus grand entier inférieur où égal à $\frac{v_0 + v_M}{2 v_M}$ convient cependant pour reconstituer *s*, à condition de connaître et de tenir compte de ce décalage de $-f_0$.

Si $v_0 \gg v_M$, la fréquence minimale d'échantillonnage tend vers $4 v_M$ ce qui peut demeurer encore très intéressant par rapport à $2(v_0 + v_M)$.

• En fait, l'échantillonnage à la fréquence f_e d'un signal *s* de transformée de Fourier $\underline{S}(\nu)$ provoque une translation des composantes de $\underline{S}(\nu)$ supérieure en valeur absolue à $\frac{f_e}{2}$ dans la bande de fréquence $\left[-\frac{f_e}{2}; \frac{f_e}{2}\right]$. La figure 10 ci-après montre les deux situations :



FIGURE 10 – Effet de l'échantillonnage sur le spectre de s

1. un échantillonnage conforme à la condition de Shannon : $\underline{S}(v)$ est prise comme motif de base d'une fonction $\underline{\tilde{S}}(v)$ périodique dans l'espace des fréquences, de période f_e ; si $f_e > 2v_M$, le motif de base ne se chevauche pas avec lui-même et, sur l'intervalle $\left[-\frac{f_e}{2}; \frac{f_e}{2}\right]$, $\underline{\tilde{S}}(v) = \underline{S}(v)$;

2. un échantillonnage non conforme à la condition de Shannon : dans la même opération que précédemment, le motif de base vient se chevaucher avec lui-même. Dans l'intervalle

 $\left[-\frac{f_e}{2}; \frac{f_e}{2}\right]$, on a $\underline{\tilde{S}}(v) \neq \underline{S}(v)$. Le spectre du signal est dégradé : il y a perte d'information sur ce dernier.

• Il est souvent nécessaire de borner artificiellement le spectre d'un signal, quitte à lui faire perdre un peu d'information. On le filtre à l'aide d'un filtre passe-bas qui limite sa bande spectrale de façon à ce que l'on puisse fixer une fréquence d'échantillonnage conforme à la condition de Shannon, pour les fréquences restantes inférieures à la fréquence de coupure du filtre.

2.5 Formule d'échantillonnage

La formule qui permet de passer de l'ensemble des échantillons recueillis dans les conditions de Shannon, $\{s(t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, au signal *s* est :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\nu_M}{f_e} s(t_n) \operatorname{sinc} (2\pi\nu_M(t-t_n))$$

où sinc désigne la fonction sinus cardinal définie par : sinc $(u) = \frac{sinu}{u}$.

De même que les représentations temporelle et fréquentielle nécessite de connaître tout le signal, s(t) avec $t \in]-\infty$; $+\infty[$ ou toute sa transformée de Fourier $\underline{S}(v)$ avec $v \in]-\infty$; $+\infty[$, le signal s ne peut être rigoureusement reconstruit à l'aide de ses échantillons que si ces derniers sont tous connus.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Le standard international pour une audition en haute fidélité (HiFi) impose que la bande passante de l'ensemble de la chaîne soit 20 Hz - 20 kHz.

La fréquence d'échantillonnage des disques compacts enregistrés actuellement ou « remastérisés » est de 44, 125 kHz.

1. La restitution d'un enregistrement numérique effectuée avec cette fréquence d'échantillonnage peut-elle avoir une qualité HiFi ? expliquez pourquoi.

2. Sachant que la numérisation d'un échantillon s'effectue sur trois octets (symbole o) par échantillons, évaluer le temps d'enregistrement audio que l'on peut mettre sur un disque compact de 700 Mo.

Exercice 2 : La résolution angulaire moyenne de l'œil humain, α_m , est d'environ 2' d'arc.

1. Déterminez la distance maximale entre les centres de deux pixels d'un écran d'ordinateur placé à D = 50 cm de l'œil.

2. Un écran de 34, 4 cm \times 19, 5 cm comportant une matrice de pixels au nombre de 1366 \times 768 exploite-t-il au mieux l'acuité visuelle de l'œil moyen ?

3. La rémanence de l'œil humain est de 1/24 - 1/25 s. La couleur et l'intensité lumineuse de chaque pixel étant codées sur 3 octets, déterminer le flux mesuré en Mo.s⁻¹ que doit pouvoir gérer la carte graphique de l'ordinateur.

1. Introduction

1.1 Description d'une chaîne de traitement numérique

Une chaîne de traitement numérique d'un signal est constituée :

- d'un capteur qui convertit le signal en une tension qui lui est proportionnelle ;
- d'un échantillonneur bloqueur, qui échantillonne et bloque la valeur échantillonnée ;

• d'un convertisseur analogique/numérique (C.A.N.) qui transforme la valeur échantillonnée en un nombre binaire sur N bits (constitué au total de N symboles, 0 ou 1, représentant dans un code adapté au calculateur la valeur échantillonnée. La conversion doit s'effectuer en moins de T_e , la période d'échantillonnage;

• d'un calculateur qui utilise les nombres de *N* bits pour les intégrer aux calculs à réaliser pour filtrer ou contrôler un processus. Souvent, le calculateur est l'organe qui pilote et coordonne les diverses opérations accomplies par la chaîne;

• d'un convertisseur numérique/analogique (C.N.A.) qui convertit les nombres binaires délivrés par le calculateur en une tension à la fin de chaque période d'échantillonnage. Le signal de sortie du C.N.A. ressemble à un signal échantillonné-bloqué ;

• éventuellement un filtre passe-bas d'atténuation des discontinuités de la fonction en escalier résultant de la conversion numérique/analogique peut suivre avant qu'un organe sous piloté par la tension.



FIGURE 11 – Synoptique d'un traitement numérique du signal

1.2 Caractères des signaux - terminologie

• La tension image *s*, comme le signal d'entrée, sont continus, définis sur un intervalle de temps $I \subset \mathbb{R}$, nommé **support** du signal et de la tension associée. Les ensembles des valeurs prises par le signal et *s* sont des intervalles homothétiques de \mathbb{R} . Ce sont des grandeurs **analogiques**.

• La tension échantillonnée-bloquée s^* est théoriquement une fonction en escalier; dans la réalité, une tension quasi-constante par morceau avec des variations très rapides.

Si la durée de I est finie, notée T_I , alors le nombre des échantillons de s est fini : pour une

période d'échantillonnage T_e , il est égal à $N_e = E(\frac{T_I}{T_e})$ (à une unité près éventuellement).

160 Physique

L'ensemble des valeurs est **discret**. s^* est décrite par l'ensemble $\{s(t_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ou $\{s(t_n)\}_{n=0,...,N_e-1 \text{ ou } N_e}$.

s* est une grandeur échantillonnée.

• mb_{s^*} est la suite des nombres $\{mb_{s^*,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ou $\{mb_{s^*,n}\}_{n=0,\dots,N_e-1 \text{ ou } N_e}$ qui sont la traduction en binaire des valeurs des échantillons $s(t_n)$.

Le nombre de bits employés (nombre de symboles 0 ou 1 utilisés pour les traduire) est fini. Donc, pour une conversion sur N bits, le nombre de niveaux que nous pouvons différencier est 2^N . Cette opération de conversion entraîne donc une perte d'information sur les valeurs exactes des échantillons car il est peu probable que ces dernières soient toutes exactement égales à l'un des 2^N niveaux distinguables.

La tension échantillonnée-bloquée a été **quantifiée**. mb_{s^*} est une grandeurs échantillonnée et quantifiée. Elle est dite **numérique**.

• rb_{s^*} est un ensemble de même nature que mb_{s^*} ; c'est une suite de nombres binaires sur N' bits qui sont les résultats de calculs opérés par le calculateur sur les mb_{s^*} et/ou sur les valeurs antérieures de rb_{s^*} .

Somme mb_{s^*} , rb_{s^*} est une grandeur **numérique**.

2. Filtre numérique

2.1 Problème et notations

• Le filtrage numérique est un moyen de modifier certaines caractéristiques d'un signal d'entrée à l'aide d'un procédé tel que celui décrit au § 1.

• Le signal d'entrée du filtre numérique est l'ensemble $\{mb_{s^*,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ou $\{mb_{s^*,n}\}_{n\in[0;N_e-1 \text{ ou} N_e]}$ si le signal est de durée finie, des valeurs converties en binaires du signal échantillonné-bloqué obtenu par échantillonnage périodique de période T_e .

Il est noté par la suite $\{x_n\}$, sans mention de l'ensemble des indices *n*, qu'il soit \mathbb{Z} ou un intervalle de \mathbb{N} , $[[0; N_e - 1]]$ ou $[[0; N_e]]$.

• Le signal de sortie du filtre numérique est l'ensemble $\{rb_{s^*,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ou $\{mb_{s^*,n}\}_{n \in [0; N'_e - 1 \text{ ou } N'_e]}$ si le signal est de durée finie. Il est noté y_n , avec la même omission tacite que précédemment.

Un même indice *n* affecté aux valeurs de *x* et *y*, x_n et y_n , désigne idéalement un même instant $t_n = n T_e$ de prise en compte de l'entrée et de production de la sortie par le calculateur. Ceci suppose implicitement une durée négligeable des calculs.

2.2 Définition

Un filtre numérique ou discret linéaire est un protocole de calcul, gouverné par un ensemble de nombres réels fixés $\{h_n\}$ caractérisant l'action du filtre, qui lie les signaux d'entrée et de sortie par une relation de la sorte :

$$\forall n \qquad y_n = \sum_m x_m h_{n-m} = \sum_m x_{n-m} h_m \qquad (6-1)$$

2.3 Propriétés

• Les filtres numériques sont des objets causaux : la sortie ne peut pas précéder le début de l'injection dans le calculateur du signal d'entrée.

• Soit le signal d'entrée impulsionnel, noté δ , défini par :

$$x_n = \delta_{n0} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq 0\\ 1 \text{ si } n = 0 \end{cases}$$

(6.1) impose que pour tout $n, y_n = h_n$; donc que $h_{n'} = 0$ si n' < 0.

Sa seconde forme montre que seules les valeurs des entrées prélevées aux instants antérieurs à celui auquel on détermine la sortie peuvent intervenir dans le calcul de la valeur de cette dernière.

Ainsi,

$$\forall n \qquad y_n = \sum_{m \ge 0} x_{n-m} h_m \qquad (6-2)$$

De manière pratique, on exige que le filtre produise une nouvelle valeur de sortie à chaque période d'échantillonnage. Cette limitation de la durée des calculs implique que seul un nombre fini de termes non nuls interviennent dans la somme (6-2).

• L'ensemble des $\{h_n\}$ est la **réponse impulsionnelle** du filtre. C'est la réponse qu'il donne du signal particulier différent de 0 au seul instant fixé comme origine.

2.4 Réponse à un signal sinusoïdal

• Nous avons étudié l'importance des signaux sinusoïdaux dans la compréhension de l'action des filtres linéaires analogiques (cf. *Toute la MPSI en fiches*, fiche 14). De même, l'action des filtres numériques est bien saisie par l'étude de leur impact sur les signaux d'entrée qui sont des échantillonnages conformes à la condition de Shannon de signaux sinusoïdaux de fréquence v.

• Soit x un signal d'entrée issu d'un tel échantillonnage : $x_n = X \cos(2\pi \nu n T_e)$ où $2\nu T_e < 1$ et X une amplitude réelle positive.

On lui associe le signal d'entrée complexe $\underline{x}_n = X_m e^{j 2\pi v n T_e}$, avec $j^2 = -1$.

La réponse du filtre numérique à ce signal est :

$$y_n = \sum_{m \ge 0} X h_m \cos(2\pi \, \nu \, (n-m) \, T_e) = X \left(\sum_{m \ge 0} h_m \cos(2\pi \, \nu \, (n-m) \, T_e) \right)$$

En appliquant (6-2) au signal complexe associé à l'entrée, on obtient un signal de sortie complexe dont la partie réelle est la réponse du filtre $y_n = \Re(y_n)$ avec :

$$\underline{y}_n = \sum_{m \ge 0} X h_m \mathrm{e}^{\mathrm{j} \, 2\pi \, \nu \, (n-m) \, T_e)} = X \left(\sum_{m \ge 0} h_m \mathrm{e}^{\mathrm{j} \, 2\pi \, \nu \, (n-m) \, T_e} \right)$$

soit :

$$\underline{y}_n = X e^{j 2\pi \nu n T_e} \left(\sum_{m \ge 0} h_m e^{-j 2\pi \nu m T_e} \right) = \underline{x}_n \left(\sum_{m \ge 0} h_m e^{-j 2\pi \nu m T_e} \right)$$

• L'expression précédente montre l'utilité d'introduire $\underline{T}(v)$, appelée **transmittance** du filtre, qui joue un rôle analogue à la fonction de transfert.

$$\underline{T}(\nu) = \sum_{m \ge 0} h_m \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi\,\nu\,m\,T_e} \tag{6-3}$$

Le signal de sortie réel à l'instant $t_n = n T_e$ est ainsi :

$$y_n = |\underline{T}(v)| X \cos(2\pi v n T_e + \arg \underline{T}(v))$$

L'expression précédente s'interprète comme le résultat de l'échantillonnage aux instants t_n de la tension sinusoïdale de même fréquence ν que la tension d'entrée :

 $y(t) = |\underline{T}(v)| X \cos(2\pi v t + \arg \underline{T}(v)).$

La sortie est donc proportionnelle à l'amplitude du signal d'entrée. Elle est \ll sinusoïdale \gg de même fréquence que la tension d'entrée échantillonnée. Les filtres numériques linéaires possède donc sur les signaux « sinusoïdaux » discrets une action très semblable à celle des filtres analogiques linéaires étudiés en 1^e année sur les signaux sinusoïdaux continus.

2.5 Détermination des {*h_m*}

• Une fois fixée l'action que le filtre doit exécuter sur les signaux d'entrée (passe-bas, passehaut, passe-bande, etc, ...), il s'agit de déterminer les N coefficients h_m , m = 0, ..., N - 1 qui traduirons cette action dans l'algorithme (6-2).

Un compromis apparaît : un grand nombre de coefficients satisfera sans doute mieux la requête mais ralentira les calculs. De même, la précision avec laquelle leurs valeurs pourront être données est limitée par le nombre de bits sur lequel le codage de ces valeurs est effectué : un grand nombre de bits améliore la précision des valeurs mais ralentit les calculs.

• La valeur approchée du coefficient h_m non nul, pour m = 0, ..., N - 1, que nous conservons pour caractériser le filtre est fournie par l'expression :

$$h_m = \frac{1}{2L} \sum_{k=-L}^{L} \underline{T}(k\Delta \nu) e^{j 2\pi m T_e \Delta \nu k}$$

où $\underline{T}(\nu)$ est, par exemple, une fonction de transfert de type connu, du premier ou second ordre, et $\Delta \nu$ un intervalle de fréquence tel que la fréquence extrême $2 L \Delta \nu$ satisfasse la condition de Shannon : $2 L \Delta \nu T_e = 1$.

$$h_m = \frac{1}{2L} \sum_{k=-L}^{L} \underline{T}(k\frac{f_e}{2L}) e^{j\pi m \frac{k}{L}}$$

Remarque 1 : h_m pour m = 0, ..., N - 1 doit être réel ; il importe donc que la fonction de transfert <u>T</u> choisie possède la symétrie hermitienne : $\underline{T}(-\nu) = \overline{T(\nu)}$.

Remarque 2 : La manière de calculer h_m revient à discrétiser la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire analogique. Il est très fréquent de calculer un nombre pair de coefficients et de prendre 2L = N pour calculer les coefficients $\{h_m\}$.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : On souhaite fabriquer un filtre passe-bande numérique de gain dans la bande passante égal à 1 et de fréquence centrale $f_c = 250Hz$ de bande passante $\Delta f = 5$ Hz qui devra filtrer convenablement des signaux de fréquences comprises de 0 à 500 kHz.

1. Donnez l'expression de la fonction de transfert analogique caractérisant le filtre.

2. Quelle est l'équation différentielle associée à la fonction de transfert du filtre ?

3. Calculez la réponse du filtre à un signal impulsionnel $u_e(t) = \frac{1}{\tau}$ pour $t \in [0; \tau]$, sinon nul.

Le nombre de coefficient h_m non nuls à prendre doit être un échantillonnage convenable de la

réponse précédente tant que le signal possède une amplitude encore notable.

4. Quel doit être le nombre minimal de coefficient de la réponse impulsionnelle à prendre ?

5. Quelle doit être la fréquence d'échantillonnage minimale pour que le dispositif puisse fonctionner sans repliement du spectre ? On prend une fréquence d'échantillonnage 10% plus élevée que la limite strictement requise.

7 Modèle scalaire des ondes lumineuses

Nous avons présenté (cf. fiche 2 de **Toute la MPSI en fiches**) les grandeurs caractéristiques des ondes sinusoïdales se propageant dans un milieu homogène. Nous allons rappeler dans cette fiche et les suivantes consacrées à l'optique ondulatoire comment les propriétés des phénomènes vibratoires permettent de rendre compte de certains phénomènes lumineux.

1. Ne pas perdre de vue que...

• L'optique géométrique ne disserte pas sur la nature de la lumière. Elle se fonde sur la notion de **rayons lumineux** dont elle suggère qu'ils sont idéalement les courbes de l'espace le long desquelles se propage l'énergie lumineuse, sans dire non plus ce qu'est cette dernière. Elle poursuit l'objectif d'en prévoir leurs trajets à travers les milieux transparents ou réfléchissants utilisés pour en infléchir les parcours.

• Les travaux en électromagnétisme de J.-C. Maxwell dévoilèrent la notion d'ondes électromagnétiques et prévit l'identité de leur vitesse de propagation dans le vide, mesurée ensuite par Hertz avec celle de la lumière, qui venait de l'être par Fizeau et Foucauld. Il devint alors naturel d'affirmer que la lumière n'était autre qu'une composition d'ondes électromagnétiques dans un spectre de fréquences particulier.

• Les considérations à venir recouvriront d'un contenu ondulatoire, quantitativement plus précis, la notion de rayon lumineux. Elles établiront une passerelle entre

la description des phénomènes lumineux par le trajet des rayons lumineux, pour ce qu'elle est simple et pratique,

et la théorie ondulatoire électromagnétique, pour ce qu'elle est plus proche de l'idée que, dans le cadre d'un modèle continu, nous nous sommes forgés de la lumière.

2. Le milieu de propagation

• Un milieu transparent, linéaire, homogène et isotrope (milieu t.l.h.i.) est un milieu :

• dans lequel les ondes électromagnétiques peuvent se propager sans être atténuées (caractère transparent);

Odont les propriétés vis-à-vis de cette propagation sont indépendantes du point du milieu où l'on se place (caractère homogène) et de la direction de l'espace envisagée à partir de ce point (caractère isotrope);

O dans lequel le théorème de superposition est valide (caractère linéaire).

Soit deux ondes O_1 et O_2 se propageant séparément dans le milieu, associées respectivement aux champs scalaires $g_1(\vec{r}, t)$ et $g_2(\vec{r}, t)$; la propagation simultanée des deux ondes O_1 et O_2 , avec les caractéristiques qu'elles possédaient dans le milieu lorsqu'elles se propageaient seules, est alors associée au champ scalaire $g_1(\vec{r}, t) + g_2(\vec{r}, t)$.

• Un tel milieu est caractérisé pour l'optique géométrique comme pour l'optique ondulatoire par son **indice optique** $n \ge 1$. La propagation de la lumière y est rectiligne : les rayons lumineux y sont donc des droites.

Si les milieux habituels de propagation sont bien d'indice $n \ge 1$, il existe cependant des milieux exotiques dans lesquels les propriétés de la propagation des ondes sont rendues par un indice n < 0!

• Un milieu de propagation transparent, linéaire, isotrope mais inhomogène est caractérisé par un indice optique dépendant du point M du milieu, n(M), fonction des coordonnées du point M. La propagation de la lumière cesse d'y être rectiligne et les rayons lumineux n'y sont plus nécessairement droits, ce qui n'exclut pas que certains puissent l'être.

3. Modèles de propagation

3.1 Onde plane scalaire

• Le modèle d'onde lumineuse le plus simple est celui de l'**onde plane scalaire** monochromatique (cf. **Toute la MPSI en fiches**, fiche 2, §3) se propageant dans un milieu t.l.h.i. d'indice *n*. Il s'agit d'une vibration caractérisée par une grandeur physique scalaire *a* variant sinusoïdalement au cours du temps à la fréquence v (pulsation $\omega = 2\pi v$), d'amplitude A_m et se propageant selon une direction et un sens donnés par un vecteur unitaire \vec{u} . La valeur de *a* en un point \vec{r} de l'espace à un instant *t* est alors donnée par une fonction de la forme :

$$a(t) = A_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)$$
 (7-1)

où \vec{k} est le vecteur d'onde :

$$\vec{k} = k \vec{u}$$
 avec $k = \frac{\omega}{v} = n \frac{\omega}{c}$ (7-2)

v est la célérité de la lumière dans le milieu en question, c étant celle dans le vide. φ_0 est la phase de l'onde au point origine O du repère de projection, à l'instant t = 0. Un choix judicieux de l'origine des temps ou de l'espace peut aisément l'annuler.

• $\varphi(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0$ est la **phase instantanée** de l'onde au point \vec{r} à l'instant t.

• Chaque plan affine perpendiculaire à \vec{u} est le lieu de points en lesquels la phase instantanée $\varphi(\vec{r}, t)$ de la grandeur *a* prend une même valeur à l'instant *t*; un tel plan est appelé **plan** équiphase. C'est aussi ce que l'optique désigne comme un **plan d'onde**.

• On associe à cette grandeur réelle la grandeur complexe $\underline{a}(t)$, dont a(t) est la partie réelle :

$$\underline{a}(t) = A_m e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)} = A_m e^{j\varphi(\vec{r},t)} \qquad \text{où} \qquad j^2 = -1$$
(7-3)

3.2 Onde sphérique scalaire

• Un second modèle simple dans un milieu t.l.h.i. d'indice *n* est celui de l'**onde sphérique** scalaire monochromatique.

La vibration caractérisée par la grandeur physique scalaire *a* varie sinusoïdalement au cours du temps à la fréquence ν (pulsation $\omega = 2\pi\nu$). Elle s'y propage de manière isotrope selon toutes les directions de l'espace autour de sa source ou converge de manière isotrope de toutes les directions de l'espace vers un point.

La valeur de *a* en un point \overrightarrow{r} de l'espace, à la distance $||\overrightarrow{r}|| = r$ du centre de l'onde, à un instant *t* est donnée par une fonction de la forme :

166 Physique

$$a(t) = A_m \frac{\cos(\omega t - kr + \varphi_0)}{r} \quad \text{ou} \quad A_m \frac{\cos(\omega t + kr + \varphi_0)}{r}$$
(7-4)

selon que l'onde est émise par O (onde sortante ; signe – devant kr) ou converge vers O (onde entrante ; signe + devant kr) avec $k = n \frac{\omega}{c}$.

• La phase instantanée de l'onde sphérique est $\varphi(\vec{r}, t) = \omega t - kr + \varphi_0$ pour une onde sortante ; $\omega t + kr + \varphi_0$ pour une onde entrante.

• On associe à cette grandeur réelle la grandeur complexe $\underline{a}(t)$, dont a(t) est la partie réelle :

$$\underline{a}(t) = A_m \frac{e^{j(\omega t \mp kr + \varphi_0)}}{r} = A_m \frac{e^{j\varphi(\vec{r},t)}}{r} \qquad \text{où} \qquad j^2 = -1$$
(7-5)

• Le lieu des points ayant une même phase instantanée à un instant *t* donné sont les surfaces où *kr* est constant : ce sont, pour notre cas, les sphères centrées sur *O*, que l'onde soit entrante ou sortante.

Ainsi, les surfaces équiphases ou surfaces d'onde d'une onde sphérique sont les sphères centrées sur la source ou le point de convergence.



FIGURE 12 - Surfaces équiphases des ondes scalaires plane et sphériques

3.3 Énergétique des ondes scalaires

Ces ondes occupent tout l'espace et une énergie infinie devrait leur être théoriquement associée : il s'agit donc de fictions physiques. Cependant, elles sont commodes par la simplicité des représentations qu'elles suggèrent et constituent néanmoins des modèles acceptables pour les ondes lumineuses dans des domaines limités de l'espace.

3.4 Limites des modèles scalaires

• Ils ignorent la nature vectorielle du champ électromagnétique décrit par le couple champ électrique, champ magnétique $(\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t),\vec{\mathbf{B}}(\vec{r},t))$, que l'on devrait, selon la théorie classique continue, associer à une onde lumineuse.

• Ils ne peuvent donc rendre compte avec exactitude et de manière complète des phénomènes d'interférence et de diffraction à l'interprétation desquels ils sont pourtant dédiés. Cependant, leur relative simplicité les rend utile de préférence à tous les autres modèles pour aborder en première instance ces problèmes car ils permettent d'en dégager les caractères fondamentaux, tant qualitatifs que quantitatifs.

• Il en est de même des phénomènes dans lesquels intervient la polarisation de l'onde lumineuse, fondamentalement liée à son caractère vectoriel.

• Enfin, modèles donnant une description continue de la lumière, ils ignorent le caractère quantifié à son transport et à ses échanges d'énergie avec la matière, dès qu'il y a pénétration d'un milieu, fût-il transparent, ou réflexion sur un obstacle physique.

4. Des rayons lumineux aux ondes scalaires

4.1 Association d'une onde scalaire aux rayons lumineux

• La construction des images en optique géométrique exploite des faisceaux de rayons lumineux qui sont :

➤ parallèles entre eux pour traduire la lumière émise par des objets ou participant à la formation des images à très grandes distances du système optique, à la limite infinie;

➤ divergents ou convergents pour exprimer l'émission de lumière à partir des points appartenant à l'objet, considérés comme des sources, ou la focalisation des rayons aux points images, ceux-ci et ceux-là se situant à distances finies du système optique.

• Les faisceaux de rayons lumineux parallèles sont considérés comme manifestant la propagation d'une onde scalaire plane : leur direction et leur orientation communes fournit la direction et le sens de propagation de l'onde, \vec{u} . Les plans qui leur sont perpendiculaires sont ainsi les plans équiphases de l'onde scalaire plane sous-jacente.

• Les faisceaux de rayons lumineux divergents ou convergents sont considérés comme manifestant la propagation d'une onde scalaire sphérique à partir d'une source ou vers un point de convergence S: Les sphères centrées sur S sont perpendiculaires aux rayons lumineux et sont ainsi les sphères équiphases de l'onde scalaire sphérique sous-jacente.

4.2 Effet des lentilles sur les ondes

À la traversée d'une lentille, sous-jacentes aux propriétés des rayons lumineux, apparaissent des transformations d'ondes scalaires.

• Une onde plane (faisceau de rayons parallèles) se transforme en une portion d'onde sphérique convergeant vers le foyer image avant d'en émerger si la lentille est convergente ; ou en une portion d'onde sphérique divergeant à partir du foyer image si la lentille est divergente.



FIGURE 13 - Transformations des ondes par des lentilles

• Une onde sphérique émise à partir d'un point du plan focal objet d'une lentille convergente est transformée en une onde plane. Une onde sphérique convergeant vers un point du plan focal objet d'une lentille divergente est aussi transformée en une onde plane.

• Hors des cas particuliers précédents, une onde sphérique émise par un point quelconque objet est transformée en une autre onde sphérique convergeant vers le point image qui lui est conjugué par la lentille.

4.3 Théorème de Malus

Le **théorème de Malus** généralise aux cas des milieux seulement transparents et isotropes dont la variation d'indice optique est négligeable à l'échelle de quelques longueurs d'onde de la vibration considérée.

Dans les milieux transparents et isotropes, les rayons lumineux sont normaux aux surfaces équiphases ou surfaces d'onde.

5. Déphasage et chemin optique

5.1 Déphasage entre points et entre surfaces d'onde

• Soit une onde scalaire de fréquence ν se propageant dans un milieu transparent homogène et isotrope (t.h.i.). Soit deux points M_1 et M_2 caractérisés respectivement à un instant t donné par leurs phases instantanées, $\varphi(\vec{r}_1, t)$ et $\varphi(\vec{r}_2, t)$ où $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM}_1$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM}_2$.

Le **déphasage** du point M_2 par rapport au point M_1 à l'instant *t* est égal à la différence des phases les caractérisant :

$$\varphi_{M_2/M_1} = \varphi(\vec{r}_2, t) - \varphi(\vec{r}_1, t)$$
 (7-6)

• Cas de l'onde scalaire plane, de fréquence v, de direction et de sens de propagation \vec{u} , dans un milieu t.h.i. d'indice n:

$$\varphi_{M_2/M_1} = -k\vec{u} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -n\frac{\omega}{c}\vec{u} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$
(7-7)

Il est indépendant de l'instant considéré. Chacun des points appartient à l'instant t à un plan d'onde, respectivement Π_1 et Π_2 , perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. $\varphi_{2/1}$ est négatif si Π_2 est situé après Π_1 en suivant le sens de propagation de l'onde.

• Cas de l'onde scalaire sphérique divergeant à partir de O :

$$\varphi_{M_2/M_1} = -k(r_2 - r_1) = -n \frac{\omega}{c}(r_2 - r_1)$$
 (7-8)

Chacun des points appartient à l'instant t à une sphère d'onde, respectivement $S p_1$ et $S p_2$, centrée sur O. φ_{M_2/M_1} est négatif si le rayon de la sphère $S p_2$ est supérieur à celui de $S p_1$.

• Cas de l'onde scalaire sphérique convergeant au point O :

$$\varphi_{M_2/M_1} = k(r_2 - r_1) = n \frac{\omega}{c}(r_2 - r_1)$$
 (7-9)

 $\varphi_{2/1}$ est négatif si le rayon de la sphère $S p_2$ est inférieur à celui de $S p_1$.



FIGURE 14 – Déphasage et chemin optique

• La notion de déphasage instantané entre deux points s'étend au déphasage instantané entre deux surfaces d'ondes.

Soit S_1 et S_2 deux surfaces d'onde d'une onde scalaire.

Le déphasage φ_{S_2/S_1} à l'instant *t* de S_2 par rapport à S_1 est égal au déphasage, au même instant, d'un point quelconque de S_2 par rapport à un point quelconque de S_1 car il n'y a pas de déphasage au même instant entre deux points appartenant à une même surface d'onde. Ainsi (cf. fig. 14) :

$$\varphi_{S_2/S_1} = \varphi_{M_2/M_1} = \varphi_{P_2/P_1}$$

5.2 Chemin optique

• Les expressions (7.7), (7.8) et (7.9) s'écrivent aussi, en tenant compte de la relation entre la pulsation et la fréquence $\omega = 2\pi v$ et de la définition de la longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = \frac{c}{v}$:

$$\varphi_{M_2/M_1} = 2\pi \frac{n \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1)}{\lambda_0} \quad \text{ou} \quad 2\pi \frac{n(r_2 - r_1)}{\lambda_0} \quad \text{ou} \quad -2\pi \frac{n(r_2 - r_1)}{\lambda_0}$$

• Les quantités $n\vec{u} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$, $n(r_2 - r_1)$ ou $-n(r_2 - r_1)$ sont appelées, pour chacune de ces ondes, **chemin optique** de la surface d'onde S_1 à la surface d'onde S_2 dans un milieu t.h.i. D'après la position des rayons lumineux par rapport aux surfaces d'ondes (théorème de Malus), les chemins optiques décrits dans les trois cas simples s'interprètent aisément.

Ce sont les produits des distances entre les surfaces d'ondes ou de leur opposé, une distance étant toujours positive, par l'indice optique *n*, supposé constant, du milieu de propagation.

Ces distances, ou leur opposé, sont directement accessibles si les points sur S_1 et S_2 appartiennent au même rayon lumineux, comme c'est le cas des points P_1 et P_2 (cf. fig 14).

• Le chemin optique entre deux points est toujours une donnée dépendante des caractéristiques de l'onde qui se propage dans le milieu au moins transparent et isotrope.

5.3 Généralisation

• Définition

Soit un milieu transparent, isotrope éventuellement inhomogène (t.i.i.);

une onde scalaire se propageant dans ce milieu d'indice optique éventuellement fonction de la position, n(M);

une portion de rayon lumineux délimitée par M_1 sur la surface d'onde S_1 et M_2 sur la surface d'onde S_2 (cf. fig. 15);

M un point quelconque sur cette portion de rayon et $d_s(M)$ la longueur d'un élément de ce rayon, centré sur M;

n(M) l'indice optique du milieu au voisinage de M.

Le chemin optique élémentaire le long de cet élément est n(M)ds(M).

Le chemin optique total de M_1 à M_2 , noté $L_{M_1M_2}$, est la somme des chemins optiques élémentaires :

$$L_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} n(M) \,\mathrm{d}s(M) \tag{7-10}$$



FIGURE 15 - Rayons lumineux et surfaces d'onde

• Propriétés des chemins optiques

Le chemin optique $L_{M_1M_2}$ est une grandeur algébrique. Il est compté positif si M_2 est après M_1 le long du rayon lumineux orienté dans le sens de propagation de l'onde, sinon il est compté négatif.

$$L_{M_1M_2} = -L_{M_2M_1}.$$

Les chemins optiques sont nuls entre deux points quelconques d'une même surface d'onde. Ainsi $L_{M_1N_1} = L_{M_2N_2} = 0$ (cf. fig. 15).

Le chemin optique suit la relation de Chasles : $L_{AB} = L_{AC} + L_{CB}$.

Les chemins optiques entre deux points quelconques appartenant chacun à une surface d'onde sont tous identiques. Ainsi, $L_{M_1M_2} = L_{N_1N_2} = L_{M_1N_2} = L_{N_1M_2}$ (cf. fig. 15).

Le chemin optique est le même le long de tous les rayons lumineux entre deux points conjugués l'un de l'autre par un système optique.

• Le déphasage et le chemin optique entre deux points M_1 et M_2 d'un milieu au moins transparent et isotrope dans lequel se propage une onde lumineuse sont liés, pour cette onde, par :

$$\varphi_{M_2/M_1} = -2\pi \frac{L_{M_1M_2}}{\lambda_0}$$
 (7-11)

5.4 Interprétation physique du chemin optique

• Le chemin optique entre deux points M_1 et M_2 est aussi égal à :

$$L_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} n(M) \,\mathrm{d}s(M) = \int_{M_1}^{M_2} n(M) \,v(M) \,\mathrm{d}t = c \,\int_{M_1}^{M_2} \mathrm{d}t$$

où $v(M) = \frac{c}{n(M)}$ est la vitesse de propagation de l'énergie lumineuse au voisinage de M. Le chemin optique prend ainsi la signification d'une longueur équivalente que parcourrait

dans le vide une onde lumineuse qui se propagerait pendant la durée $\int_{M_1}^{M_2} dt$.

• Cette durée est celle nécessaire pour que, dans le milieu de propagation effectif de l'onde, la surface d'onde S_1 passant par M_1 vienne coïncider avec la surface S_2 passant par M_2 . Cette dernière assertion signifie que, si la phase des points de la surface d'onde S_1 à l'instant t vaut C^{M_2}

 φ_1 , la phase des points de S_2 à l'instant $t + \int_{M_1}^{M_2} dt$ vaut aussi φ_1 . Vous devez imaginer la transformation continue de la surface d'onde S_1 en la surface d'onde S_2 afin que, au cours du temps, la phase sur cette surface mouvante demeure constante.

• La notion de chemin optique est à l'origine du principe de Fermat :

Le chemin optique ou le temps de propagation est minimal entre deux points donnés par lesquels passe un rayon lumineux.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Deux sources cohérentes d'ondes lumineuses sphériques de même longueur d'onde $\lambda = 600$ nm et de même amplitude émettent respectivement des points S_1 et S_2 , distants entre eux de d = 1 mm, de coordonnées $(\frac{d}{2}, 0, 0)$ et $(-\frac{d}{2}, 0, 0)$.

1. Exprimez la différence de chemin optique en un point M de coordonnées (d, 0, D) où D = 1, 5 m.

2. Exprimez la différence relative des amplitudes émises par chacune des sources.

Exercice 2: Une onde plane de longueur d'onde λ se propage d'un milieu incident d'indice optique n_1 vers un milieu de réfraction d'indice optique n_2 , les deux milieux étant séparés par un dioptre plan. L'onde arrive en faisant un angle *i* avec la normale du dioptre de séparation.

1. Rappelez les lois de Snell-Descartes de la réfraction.

2. Montrer en prenant un point dans chacun des milieu, appartenant au même rayon lumineux que le chemin optique le long de ce rayon entre les deux points est minimal.

Les concepts et les méthodes de l'optique s'étendent en deçà et au delà des seules fréquences du spectre visible. Il n'en demeure pas moins que cette science reste foncièrement celle des phénomènes liés à la vision et au visible. Les nombreuses sources lumineuses dont elle use sont en priorité classées en fonction de leurs propriétés spectrales, c'est-à-dire de leur composition en ondes sinusoïdales pures.

1. Les sources lumineuses

1.1 La transformée de Fourier

• Elle est l'instrument mathématique par excellence de l'analyse spectrale. Soit la vibration lumineuse donnée par sa **représentation temporelle** en un point P de l'espace, a(t).

Sa **représentation spectrale** ou **fréquentielle** est une fonction de v, $\underline{a}(v)$ liée à a(t) par les relations :

$$\underline{a}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) \mathrm{e}^{-i2\pi\nu t} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{a}(\nu) \mathrm{e}^{i2\pi\nu t} \mathrm{d}\nu \tag{8-1}$$

a(v) est la transformée de Fourier de a(t).

• La seconde relation de (8-1) fait apparaître la vibration lumineuse a(t) en P comme la superposition de vibrations lumineuses sinusoïdales pures. La variable v de la fonction <u>a</u> a donc le statut d'une fréquence.

1.2 Monochromatisme

• Une vibration lumineuse sinusoïdale pure de fréquence v_0 au point *P* est représentée par son amplitude instantanée $a(t) = A_m(P)\cos(2\pi vt + \varphi(P))$ où l'amplitude $A_m(P)$ et la phase $\varphi(P)$ contiennent les informations sur la nature plane, sphérique ou autre de l'onde lumineuse qui se propage dans l'espace et est interceptée au point *P*.

• Sa représentation spectrale ne peut pas être donnée par sa transformée de Fourier car la première intégrale de (8-1) ne converge pas au sens des fonctions.

Cependant, la description même de la vibration dit sa composition spectrale : une seule fréquence v_0 participe au façonnage de *a* et son importance en *P* est fixée par l'amplitude $A_m(P)$ de la vibration.

On a donc dans ce cas (cf. **Toute la MPSI en fiches**, fiche 2, §1) une **raie spectrale** à la fréquence v_0 , d'amplitude $A_m(P)$.

• La lumière est dite **monochromatique**. Elle n'est cependant qu'une fiction simplificatrice car elle signifie une vibration qui existe quel que soit $t \in] -\infty; +\infty[$.

1.3 Quasi-monochromatisme

• Les sources lumineuses ne fonctionnement pas en permanence et surtout, le processus même d'émission de la lumière rend fini la durée pendant laquelle la vibration *a* est non nulle, créant ce que l'on appelle un **train d'ondes**. Il en résulte que le signal n'est plus sinusoïdal pur.

• On modélise une telle vibration lumineuse par un train d'ondes : $a(t) = A_m(P) \sin(2\pi\nu_0 t)$ pour $t \in [0; \tau]$ où τ est la durée du train d'ondes, traduisant le processus d'émission de la source. τ est appelée **durée de cohérence temporelle**.

• La composition spectrale du train d'onde déduite du module de sa transformée de Fourier possède la forme suivante, pour $\nu \in [0; +\infty[$:



FIGURE 16 - Spectre du train d'ondes

Les composantes spectrales qui contribuent essentiellement à la vibration *a* sont comprises dans l'intervalle $\left[\nu_0 - \frac{1}{\tau}; \nu_0 + \frac{1}{\tau}\right]$.

• La raie spectrale est élargie et son élargissement fréquentiel vaut $\Delta v = \frac{2}{\tau}$. Plus la portion de sinusoïde « dure », plus τ est grand et plus faible est l'élargissement de la raie.

• Cette propriété est générale à tous les modèles de trains d'ondes chargés de traduire l'atténuation plus ou moins prononcée de la vibration dans un horizon de temps limité.

Par exemple, pour les trains d'ondes gaussiens $a(t) = A_m(P) e^{-(t/\tau)^2} \cos(2\pi v t + \varphi(P))$ ou lorentziens $a(t) = \frac{A_m(P)}{1 + (t/\tau)^2} \cos(2\pi v t + \varphi(P))$, leur élargissement spectral Δv autour de v_0 est toujours de l'ordre de l'inverse de la durée τ de cohérence temporelle du train d'ondes :

$$\Delta \nu \sim \frac{1}{\tau} \qquad (8-2)$$

• Une lumière réelle, nous apparût-elle d'une seule « couleur », est en réalité la superposition d'une infinité de sinusoïde autour de la fréquence moyenne v_0 attachée à ce que notre cortex, décodant et interprétant les signaux reçus par nos nerfs optiques, désignera comme sa « teinte ». On parle alors de lumière **quasi-monochromatique**.

• Réciproquement, tout élargissement de raie Δv constaté par un spectroscope autour d'une valeur moyenne v_0 peut s'interpréter comme résultant d'un processus d'émission d'un train d'ondes de durée limitée $\tau \sim \frac{1}{\Delta v}$ et de fréquence moyenne v_0 , même si d'autre phénomènes

créent en réalité cet élargissement.

1.4 Durée et longueur de cohérence temporelle d'un train d'ondes

• Une fois émis, un train d'ondes se propage. S'il le fait dans le vide, il s'étale sur une longueur l égale à $c\tau$ où c est la célérité de la lumière dans le vide. l est la **longueur de cohérence** temporelle du train d'ondes.

• L'élargissement fréquentiel Δv entraîne un élargissement de longueur d'onde $\Delta \lambda$ autour de λ_0 , la longueur d'onde à la fréquence v_0 , donné par :

174 Physique

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda_0}{\nu_0} \Delta \nu \sim \frac{\lambda_0^2}{c\tau}$$

D'où :

$$l = c\tau \sim \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$
 (8-3)

La longueur de cohérence fait apparaître le nombre approximatif $\frac{\lambda_0}{\Delta \lambda}$ de longueurs d'onde λ_0 qui constituent le train d'ondes. Ce nombre de longueurs d'onde est aussi le nombre de périodes $1/\nu_0$ que dure l'émission du train d'ondes.

La notion de longueur de cohérence temporelle fournit une indication précieuse sur la possibilité de faire interférer des ondes lumineuses entre elles de manière visible, comme nous le verrons ensuite.

1.5 Principales sources de lumières rencontrées

• Les sources thermiques (lampes à incandescence) ont des spectres continus dont les distributions d'intensité spectrale sont voisines de celle d'un corps noir porté à une température de l'ordre de 2800 K pour les lampes ordinaires et 3200 K pour les lampes à incandescence quartz-halogène.

Les arcs électriques au carbone ont, eux, des spectres voisins de celui de la lumière du jour.

Lampes et arcs étant polychromatiques, les notions de cohérences temporelles sont hors de propos pour eux.

• Les lampes spectrales haute et basse pression émettent des spectres de raies caractéristiques de l'élément enfermé dans leur ampoule, à l'état de vapeur. Les collisions entre les électrons émis une cathode chauffée et les atomes de la vapeur excitent ces derniers, les portant vers des niveaux d'énergie plus élevés. En se désexcitant, ils émettent les vibrations lumineuses que nous percevrons.

Leur analyse spectrale montre qu'il s'agit de raies plus ou moins fines.

Leur largeur caractéristique est de $\Delta \lambda \approx 10^{-1}$ nm pour les lampes haute pression et de $\Delta \lambda \approx 10^{-2}$ nm pour celles à basse pression.

• Les tubes fluorescents, improprement appelés tubes au néon, contiennent en fait des vapeurs de mercure à très basse pression. Leur spectre est la superposition d'un spectre continu de fluorescence dû à la poudre fluorescente qui recouvre l'intérieur de la paroi de l'ampoule et d'une partie du spectre de raies du mercure.

Les ultraviolets du spectre du mercure excitent la poudre et de ce fait sont absorbés et disparaissent du spectre émis par la poudre. L'essentiel de l'énergie lumineuse se retrouve dans le spectre visible.

La largeur des raies du spectre du mercure est celle des lampes spectrales basse pression.

• Les diodes électroluminescentes (D.E.L. en français et L.E.D. en anglais) sont des jonctions semi-conductrices p-n où les recombinaisons des électrons et des trous créent des photons.

Leur largeur spectrale est de l'ordre de $\Delta \lambda \approx 25$ nm quelle que soit leur « couleur »dans le visible (du rouge au bleu).

• Les lasers et les diodes lasers sont les sources les plus « monochromatiques »avec, pour le laser He-Ne à $\lambda = 632, 8 \text{ nm}$ fréquemment rencontré au laboratoire, des émissions de raies aussi étroites que $\Delta \lambda \approx 10^{-6}$ nm, mais leur dérive en fréquence provoque en fait un étalement $\Delta \lambda \approx 10^{-3}$ nm.

Leur différence réside dans la directivité de leur émission : alors que l'émission du laser est extrêmement directive, celle de la diode conduit à un faisceau lumineux tout aussi monochromatique, mais beaucoup plus ouvert.

2. Les détecteurs de lumière

2.1 Flux, éclairement et exitance énergétiques

• Le flux énergétique Φ est la puissance émise, transportée ou reçue sous forme de rayonnement électromagnétique.

Elle a pour dimension $M.L^2.T^{-3}$. Son unité est le watt (W).

• L'éclairement énergétique *E* en un point *P* est le rapport du flux énergétique élémentaire $d^2\Phi$ reçu par un élément de surface d^2S autour de *P* à l'aire de cet élément de surface : $d^2\Phi$

$$E = \frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}^2 S} \cdot$$

Sa dimension est celle d'une puissance ramenée à une surface soit $M.T^{-3}$. Son unité est le watt par mètre au carré ($W.m^{-2}$).

• Lorsque ce flux énergétique élémentaire est émis par l'élément de surface autour du point P, on parle de l'**exitance énergétique** M du point P. La grandeur M a même dimension et même unité que l'éclairement E.

2.2 Éclairement énergétique perçu

• Dans le cadre du modèle scalaire de la lumière, l'éclairement énergétique au point P à un instant t, E(P, t), est proportionnel au carré de l'amplitude a(P, t) de l'onde lumineuse scalaire atteignant ce point :

$$E(P,t) = k'a^2(P,t)$$
 (8-4)

Cependant, la fréquence élevée des vibrations lumineuses, entre 10^{14} et 10^{15} Hz, et la « lenteur »relative des détecteurs de lumière dont les temps de réponse sont systématiquement plusieurs ordres de grandeur fois plus élevés que les périodes de ces vibrations font que ce qui sera finalement perçu est une valeur moyenne de l'éclairement énergétique instantané E(P, t).

Plus précisément, c'est la moyenne sur un intervalle de temps égal au temps de réponse τ_r du détecteur. Ainsi, ne nous intéresserons-nous plus qu'à l'éclairement énergétique moyen au point P:

$$\langle E \rangle(P) = \frac{1}{\tau_r} \int_{\tau_r} E(P, t') dt' = \frac{1}{\tau_r} \int_{\tau_r} k' a^2(P, t') dt'$$

où $\tau_r \gg \frac{1}{\nu}$.

• Lorsque la vibration est sinusoïdale d'amplitude complexe $\underline{a}(P, t)$, cet éclairement moyen vaut, en posant $k = \frac{k'}{2}$:

$$\langle E \rangle(P) = k |\underline{a}(P,t)|^2$$
 (8-5)

2.3 Caractéristiques des détecteurs

• La sensibilité globale R : elle exprime le rapport du signal électrique généré par le capteur

176 Physique

S (un courant ou une tension électriques) au flux énergétique lumineux qu'il a reçu Φ .

Plus sa valeur en $A.W^{-1}$ ou $V.W^{-1}$ est élevée, plus le capteur est sensible aux faibles intensités lumineuses.

• Le **temps de réponse** : c'est le temps caractéristique mis par le capteur pour attester d'une variation brusque du signal lumineux. Il est exprimé en seconde. Sa petitesse est un gage de rapidité du capteur.

• La **réponse** ou **sensibilité spectrale** $R(\lambda)$: c'est la même caractéristique que la sensibilité globale mais obtenue lorsque la lumière est monochromatique de longueur d'onde λ . Son unité est celle de R. On peut souhaiter avoir une sensibilité spectrale la plus indépendante possible de la longueur d'onde au moins sur un intervalle $[\lambda_{min}; \lambda_{max}]$ donné de celle-ci.

• La **linéarité** : elle exprime la proportionnalité du signal électrique généré par le capteur au flux énergétique reçu. Cette propriété n'est en général vraie que pour une plage de flux énergétique $[\Phi_{min}; \Phi_{max}]$ donnée.

• Le **rendement quantique** η : il représente, pour les détecteurs photoniques, le nombre moyen d'électrons excités par photon de longueur d'onde λ reçu. On souhaite un rendement le plus proche de 1 possible.

2.4 Principes de détection

• Détection thermique : le capteur absorbe le rayonnement, traduit l'énergie qu'il en reçoit par une élévation de température, qu'il transforme en un signal électrique.

• Détection photonique : elle repose sur l'effet photoélectrique. Un électron d'un matériau absorbe un photon du rayonnement et passe dans un état excité. Si l'électron est éjecté du matériau, on a un effet photoélectrique externe ; s'il y reste, un effet photoélectrique interne.

2.5 Exemples de détecteurs

• Détecteurs thermiques : la thermopile et le détecteur pyroélectrique.

Une **thermopile** est constitué d'un élément noirci pour absorber le rayonnement auquel on accole des thermocouples en série pour générer une tension image de la différence de température entre l'élément absorbant et le boitier de la thermopile.

La capacité thermique C et la conductance thermique G de l'élément absorbant déterminent

la sensibilité (l'élévation de température est $\frac{\Phi}{G}$) et la rapidité (le temps de réponse est $\tau = \frac{C}{G}$).

Le noircissement permet d'avoir une sensibilité spectrale à peu près constante dans le visible. Le temps de réponse d'une thermopile est de l'ordre de la seconde, ce qui en fait un détecteur lent.

Un **détecteur pyroélectrique** repose sur la variation de la polarisation diélectrique des matériaux ferroélectriques, décroissante avec la température. Si un rayonnement d'intensité énergétique croissante atteint un cristal ferroélectrique noirci, celui-ci l'absorbe, sa température s'élève et sa polarisation diminue.

Il en résulte un courant de polarisation détectable qui suit la variation de l'intensité énergétique.

Comme le courant électrique n'existe que s'il y a variation de l'intensité lumineuse, le détecteur ne fonctionne qu'en régime variable, créé artificiellement par un obturateur périodique du faisceau lumineux par exemple.

• Détecteurs photoniques : photodiode et photorésistance (à effet photoélectrique interne), photomultiplicateur (à effet photoélectrique externe).

Une photodiode est une jonction semi-conductrice p-n polarisée en inverse. Un courant

d'électrons et de trous la traverse si ces porteurs de charges ont été initialement créés par l'absorption d'un photon.

Si le flux énergétique est Φ et la longueur du rayonnement λ , le nombre de photons transportés chaque seconde par le faisceau lumineux est $\frac{\Phi\lambda}{hc}$ avec *h* la constante de Planck et *c* la célérité de la lumière dans le vide. Le nombre de ceux qui créeront une paire électron-trou participant à la conduction est $\eta \frac{\Phi\lambda}{hc}$ où η est le rendement quantique du matériau.

Il en résulte un courant électrique, appelé photocourant, d'intensité $I = \eta e \Phi \frac{\lambda}{hc}$, e étant la charge élémentaire.

Ceci suppose que la longueur d'onde du rayonnement soit inférieure à la longueur d'onde de seuil, au-delà de laquelle l'énergie des photons est insuffisante pour créer les porteurs car inférieure à la largeur de bande interdite du semi-conducteur.

Ces détecteurs sont rapides : leur temps de réponse intrinsèque est de l'ordre de quelque nanosecondes. Ce sont les temps de réponse des montages dans lesquels ils sont insérés qui déterminent de fait leur rapidité.

Une **photorésistance** est un semi-conducteur homogène dans lequel le nombre de porteurs de charges augmente avec le flux énergétique par une création de paires électrons-trous similaire à la photodiode. La résistance du matériau diminue ainsi quand la photorésistance est éclairée. Elle est plus sensible que la photodiode, mais n'est pas linéaire.

Un **photomultiplicateur** est un détecteur de lumière à effet photoélectrique externe : un photon pénètre par une fenêtre transparente dans l'appareil où il parvient à éjecter un électron d'une photocathode portée à un potentiel V_0 .

Cet électron est ensuite accéléré vers la plaque appelée dynode, portée au potentiel $V_1 > V_0$, ce qui l'accélère et lui donne suffisamment d'énergie pour arracher deux électrons qui vont être accélérés vers la dynode portée au potentiel $V_2 > V_1$ et ainsi de suite.

Le dispositif se comporte comme un multiplicateur d'électrons qui finissent par constituer un courant électrique d'intensité *i* détectable, dès qu'un photon possède l'énergie de seuil au moins pour extraire le premier électron de la photocathode.



FIGURE 17 - Schéma de principe du photomultiplicateur

Le photomultiplicateur est un appareil extrêmement sensible qui est surtout utilisé lorsque les éclairements, donc le nombre de photons reçus par unité de temps et de surface, sont très faibles.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Le sodium possède un spectre d'émission qui présente deux raies jaune orange intenses à des longueurs d'onde $\lambda_1 = 589, 0$ nm et $\lambda_2 = 589, 6$ nm. Ces raies sont émises lors de la désexcitation de l'electron 3s passé sur l'orbitale 3p où son énergie dépend de son moment magnétique de spin et donc du moment cinétique total.

Calculez la longueur de cohérence temporelle du doublet jaune du sodium.

Exercice 2: Une source spectrale émet de manière isotrope une puissance $\mathcal{P}_1 = 0, 1$ W à la longueur d'onde $\lambda_1 = 0, 56$ nm et $\mathcal{P}_2 = 0, 8$ W à $\lambda_2 = 0, 67$ nm. Un photodétecteur de surface active S = 1 cm² est placé à une distance D = 0, 8 m de la source; son rendement quantique à chacune des deux longueurs d'onde est $\eta(\lambda_1) = 0, 8$ et $\eta(\lambda_2) = 0, 65$.

On suppose qu'un photon actif génère un électron de conduction qui participe au courant électrique dans le circuit dans lequel le photodétecteur est inséré.

1. Calculez les nombres de photons \dot{n}_1 et \dot{n}_2 reçus par le détecteur à chaque seconde.

2. Déduisez-en le courant électrique i dans le circuit.

1. Superposition de deux ondes cohérentes

1.1 Cadre de l'étude

• Nous étudions le résultat de la superposition de deux vibrations lumineuses monochromatiques cohérentes entre elles en un point P de l'espace de propagation supposé linéaire. v_0 est la fréquence commune aux deux vibrations. Elles ont entre elles une relation de phase bien déterminée.

• Cette superposition est une situation d'interférence des deux ondes et le domaine de l'espace où il se produit son champ d'interférences.

• Les vibrations sont modélisées par des ondes scalaires, respectivement décrites en *P* à l'instant *t* par :

 $a_1(P,t) = A_1(P) \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi_1(P))$ et $a_2(P,t) = A_2(P) \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi_2(P)).$

Les ondes étant monochromatiques et cohérentes entre elles, la différence des phases instantanées des vibrations au point *P* est constante.

• Selon (8-4), les éclairements moyens produits séparément en *P* par chacune des deux ondes sont :

 $\langle E \rangle_1(P) = kA_1^2(P) \text{ note } I_1 \text{ et } \langle E \rangle_2(P) = kA_2^2(P) \text{ note } I_2.$

1.2 Superposition des ondes - éclairement moyen en P

• Le milieu étant supposé linéaire, son état de vibration en P, lorsque les deux vibrations lumineuses s'y propagent simultanément, est décrit par la grandeur scalaire a(P, t) telle que :

$$a(P,t) = a_1(P,t) + a_2(P,t)$$

• D'après (8-4), l'éclairement instantané en P est :

$$E(P,t) = k' \left(a_1^2(P,t) + a_2^2(P,t) + 2a_1(P,t) a_2(P,t) \right)$$

Selon (8-5), l'éclairement moyen perçu en P, $\langle E \rangle (P)$, est alors :

$$\langle E \rangle(P) = k \left(A_1^2(P) + A_2^2(P) + 2 A_1(P) A_2(P) \cos(\varphi_2(P) - \varphi_1(P)) \right)$$

En notant *I* cet éclairement et $\Phi(P) = \varphi_2(P) - \varphi_1(P)$, on obtient la **formule de Fresnel** :

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Phi(P))$$
 (9-1)

1.3 Commentaires

• *P* appartient à deux surfaces équiphases, une pour chaque onde et les déphasages en *P* sont comptés par rapport à une surface ou un point de référence, où la phase instantanée de la vibration vaut $2\pi v_0 t$. $\varphi_i(P)$ avec i = 1 ou 2 expriment chacun le déphasage de l'onde en *P* par rapport à un plan ou un point de référence. Selon (7-11), il correspond à chacun de ces déphasages un chemin optique : $\varphi_i(P) = -2\pi \frac{L_i(P)}{\lambda_0}$.

La différence des déphasages en P des deux ondes traduit ainsi une différence de chemin optique $L_1(P) - L_2(P)$, appelée la **différence de marche**.

• L'éclairement moyen dû à la superposition des deux ondes est fonction du point d'observation P: du fait de la variation de la différence des chemins optiques pour chacune des ondes ou du fait de celle de leurs éclairements moyens (par exemple, si l'une des ondes est sphérique).

• Toutefois au voisinage d'un point *P* donné, la variation de l'éclairement dû à la variation de $\Phi(P)$ est beaucoup plus rapide que la variation des éclairements moyens I_1 ou I_2 des ondes.

En effet, dans l'expression de $\Phi(P)$, la petitesse de la longueur d'onde λ_0 (0, 4 à 0, 8 μ m dans le visible) fait qu'un déplacement minime du point *P* peut aisément provoquer une différence de marche correspondant à un déphasage $\Phi(P)$ de plusieurs π alors que les changements d'éclairements des ondes au cours du déplacement envisagé sont négligeables, voire nuls si les ondes sont planes.

• L'éclairement moyen autour d'un point *P* varie entre $I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}$ et $I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}$. À la limite, lorsque $I_1 = I_2 = I_0$, $I_{min} = 0$ et $I_{max} = 4I_0$.

• Lorsque les éclairements moyens des ondes sont peu sensibles à la position de P, il est possible de définir les lieux d'égal éclairement moyen I autour de P. Ces lieux sont *a priori* des surfaces définie par $\Phi(P) = \text{cste soit } L_2(P) - L_1(P) = \text{cste'}$.

L'interception par un écran de projection de ces surfaces donne des lignes plus ou moins sombres et plus ou moins contrastées dont l'ensemble forme la **figure d'interférences** des ondes dans ce plan. La figure d'interférence est fonction de la position de l'écran de projection dans le champ d'interférences.

1.4 Facteur de contraste

• La variation de l'éclairement moyen autour de *P* est quantifiée par le **facteur de contraste** ou **facteur de visibilité** γ :

$$\gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$
(9-2)

• Il est compris entre 0 et 1 ; égal à 1 lorsque les éclairements en *P* des deux ondes sont égaux. Un bon contraste de la figure d'interférence est lié à des interférences d'ondes ayant des éclairements à peu près égaux entre eux, ce qui correspond à un facteur de contraste voisin de 1.

• Si I_1 et I_2 sont fonction de P, γ est lui-même fonction de P. Cependant, comme le déphasage entre les ondes varie beaucoup plus rapidement que les éclairements respectifs de chacune d'elles, le facteur de contraste varie spatialement beaucoup plus lentement que l'éclairement lui-même.

2. Superposition de deux ondes incohérentes

2.1 Définition de l'incohérence

• Deux ondes scalaires sinusoïdales sont **incohérentes** si la différence de leurs phases instantanées en un point *P* est une fonction du temps.

• Ceci peut résulter soit d'une différence de fréquence des deux ondes, soit, à supposer qu'elles aient « même fréquence », d'une absence de relation stable de phase entre elles. Dans ce second cas, on posera que la différence de leurs phases instantanées est une fonction aléatoire du temps.

En fait, cette seconde situation suppose que la seconde onde soit seulement quasi-monochromatique par rapport à la première. Elle consiste en réalité en l'émission successive de trains d'ondes de fréquence moyenne v_0 et de durée moyenne τ avec des phases à l'origine aléatoires pour chacun des trains émis.
2.2 Cadre de l'étude

Nous étudions le résultat de la superposition de deux vibrations lumineuses monochromatiques incohérentes entre elles en un point P de l'espace de propagation supposé linéaire, dans les deux cas d'incohérence.

• Les vibrations sont considérées comme des ondes scalaires et respectivement décrites en *P* à l'instant *t* par :

 $a_1(P,t) = A_1(P) \cos(2\pi v_0 t + \varphi_1(P))$ dans tous les cas

et $a_2(P, t) = A_2(P) \cos(2\pi\nu_1 t + \varphi_2(P))$ pour des ondes rigoureusement monochromatiques de fréquences différentes ou $a_2(P, t) = A_2(P) \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi_2^{(a)}(P, t))$ si la seconde onde est quasimonochromatique de fréquence ν_0 , $\varphi_2^{(a)}(P, t)$ étant une fonction aléatoire du temps lorsqu'on cherche à exprimer les grandeurs scalaires qui les caractérisent avec une même origine des temps. Un modèle possible de $\varphi_2^{(a)}(P, t)$ est celui d'une fonction en escalier à valeurs denses dans $] - \pi; \pi]$ dont les paliers auraient une durée moyenne de τ , la durée d'émission des trains d'ondes.

• On note I_1 et I_2 les éclairements moyens au point P des deux vibrations.

2.3 Superposition des ondes - éclairement moyen en P

• Le milieu étant supposé linéaire, son état de vibration en P, lorsque les deux vibrations lumineuses s'y propagent simultanément, est toujours décrit par la grandeur scalaire a(P, t) telle que :

$$a(P,t) = a_1(P,t) + a_2(P,t)$$

• L'éclairement instantané en P est, d'après (8-4) :

$$E(P,t) = k' \left(a_1^2(P,t) + a_2^2(P,t) + 2a_1(P,t) a_2(P,t) \right)$$

• L'éclairement moyen en P, $I = \langle E \rangle \langle P \rangle$, dans le cas où les ondes sont rigoureusement monochromatiques de fréquences distinctes donne :

$$I = k \left(A_1^2(P) + A_2^2(P) + 2A_1(P) A_2(P) \frac{1}{\tau_r} \int_{\tau_r}^{\infty} \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi_1(P)) \cos(2\pi\nu_1 t + \varphi_2(P)) dt \right)$$

Lorsque le temps de réponse τ_r du capteur est grand devant les périodes des vibrations, l'intégrale tend vers 0 et l'éclairement moyen en *P* est, de fait, égal à :

$$I = I_1 + I_2$$
 (9-3)

• Dans le cas où l'une des ondes est rigoureusement monochromatiques de fréquence v_0 et l'autre seulement quasi-monochromatique de fréquence moyenne v_0 , l'éclairement moyen en P, I, vaut :

$$I = k \left(A_1^2(P) + A_2^2(P) + 2A_1(P) A_2(P) \frac{1}{\tau_r} \int_{\tau_r}^{\infty} \cos\left(2\pi\nu_0 t + \varphi_1(P)\right) \cos\left(2\pi\nu_0 t + \varphi_2^{(a)}(P, t)\right) dt \right)$$

La durée du temps de réponse du capteur et la répartition peu ou prou uniforme de la phase aléatoire dans l'intervalle $] - \pi; \pi]$ font tendre l'intégrale vers 0 et l'éclairement moyen en *P* est encore égal à :

$$I = I_1 + I_2$$
 (9-3)

Ainsi, dans les deux cas d'incohérence étudiés, l'éclairement moyen qui résulte de la superposition des ondes est la somme des éclairements moyens de chacune d'elles. Il n'y a plus de figure d'interférences.

3. Superposition de *N* ondes cohérentes

3.1 Cadre de l'étude

• Nous étudions le résultat de la superposition de N vibrations lumineuses monochromatiques, de même amplitude, cohérentes entre elles en un point P de l'espace de propagation supposé linéaire. v_0 est la fréquence commune aux N vibrations et elles ont entre elles des relations de phase bien déterminées en progression arithmétique.

• Les vibrations sont modélisées par des ondes scalaires et respectivement décrites en *P* à l'instant *t* par les *N* grandeurs scalaires : $a_k(P,t) = A_0(P) \cos(2\pi v_0 t + \varphi_0(P) + k\Phi)$ pour k = 0, ..., N - 1.

• Les éclairements moyens produits séparément en *P* par chacune des *N* ondes sont identiques : $\langle E \rangle_k(P) = k A_0^2(P)$, notés I_0 .

3.2 Superposition des ondes - éclairement moyen en P

• Le milieu étant supposé linéaire, son état de vibration en P, lorsque les deux vibrations lumineuses s'y propagent simultanément, est décrit par la grandeur scalaire a(P, t) telle que :

$$a(P,t) = \sum_{k=0}^{N} a_k(P,t)$$

Les vibrations étant sinusoïdales de même fréquence, l'amplitude résultante se calcule en passant par les amplitudes complexes :

$$\underline{a}(P,t) = \sum_{k=0}^{N-1} A_0(P) e^{j(2\pi\nu_0 t + \varphi_0(P) + k\Phi)} = A_0(P) e^{j(2\pi\nu_0 t + \varphi_0(P))} \sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\Phi}$$

• Le résultat est sinusoïdal de même fréquence v_0 que chacune des ondes sommées. L'éclairement moyen perçu en P, $\langle E \rangle (P)$, est alors, selon (8.5) :

$$\langle E \rangle(P) = kA_0^2(P) \left| \sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\Phi} \right|^2 = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{N\Phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)} \right)^2$$
(9-4)

L'allure de la courbe de $\langle E \rangle (P)$ en fonction de Φ est tracée pour N = 10:



FIGURE 18 – Éclairement en fonction de Φ pour N = 10

Lorsque $\Phi = 2p\pi$ où $p \in \mathbb{Z}$, le numérateur et le dénominateur s'annulent simultanément. L'éclairement moyen en P vaut alors $N^2 I_0$. Entre deux de ces maxima principaux consécutifs, l'éclairement s'annule N - 1 fois : pour $\Phi = \frac{2q\pi}{N}$ où $q \in \mathbb{Z}$, $\Phi \neq 2p\pi$. Il y a donc N - 2 maxima secondaires entre eux. • Les maxima secondaires sont si peu intenses qu'ils ne sont, en pratique, pas perçus, ce d'autant que N est souvent beaucoup plus élevé, ce qui les atténue encore plus.

Seuls sont visibles les maximas principaux qui correspondent aux valeurs de Φ multiples entières de 2π . et qui le sont autour de ces valeurs dans un angle de $\pm \frac{2\pi}{N}$.

Par convention, il est habituel de prendre pour angle $\Delta \Phi$ à l'intérieur duquel l'éclairement est suffisamment visible autour d'un extremum principal la moitié de l'intervalle angulaire entre

les deux premiers zéros autour de lui, à savoir $\frac{2\pi}{N}$.

4. Application aux réseaux de diffraction

4.1 Présentation d'un réseau de diffraction

• La situation décrite précédemment modélise ce qu'il advient lors de l'utilisation d'un réseau de diffraction. Un tel dispositif est constitué de N fentes fines parallèles entre elles et espacées régulièrement dans un plan, occupant ainsi un rectangle de longueur L = Na, ce qui définit le **pas du réseau** a. (cf. fig. 19a)



FIGURE 19 - Réseau de diffraction

• Le réseau est éclairé par une onde scalaire plane monochromatique de fréquence v_0 et de longueur d'onde dans le vide λ_0 , arrivant selon la direction \vec{u}_0 . \vec{u}_0 est dans le plan qui contient la normale au réseau et la direction de la longueur de ce dernier. On observe les interférences « à l'infini », c'est-à-dire des rayons parallèles entre eux qui émergent de l'autre côté du réseau. On parle de **réseau par transmission** (cf fig.19b). Ceci se fait en observant le résultat dans le plan focal image d'une lentille convergente.

4.2 Expression de Φ et formule des réseaux

• La figure 19c permet de comprendre l'existence d'un déphasage Φ constant entre les rayons lumineux passant par deux fentes consécutives du réseau.

L'onde incidente est plane. L'observation porte sur la figure d'interférence à l'infini, donc sur des rayons parallèles entre eux auxquels est associée une onde plane émergente.

Le déphasage du rayon passant par la fente de rang k + 1 par rapport à celui passant par la fente de rang k est proportionnel à la différence des chemins optiques de chaque rayon, égale à $F_{k+1}B - AF_k$, en supposant l'indice optique de l'air égal à 1 :

$$\Phi = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(a \, \sin \theta - a \, \sin \theta_0 \right)$$

• Les maxima principaux d'éclairement se produisent pour les angles d'émergence θ tels que Φ soit un multiple de 2π . Il en résulte la **formule des réseaux** :

184 Physique

$$a(\sin\theta - \sin\theta_0) = p \lambda_0$$
 où $p \in \mathbb{Z}$ (9-5)

4.3 Qualités des réseaux de diffraction

• On définit la **dispersion angulaire du réseau**, \mathcal{D}_a comme le rapport de la variation de l'angle, $d\theta$, à la variation de longueur d'onde, $d\lambda$. En effet, aux deux longueurs d'onde λ_0 et $\lambda_0 + d\lambda$ sont associées, pour un même ordre p de la formule des réseaux, deux directions voisines θ et $\theta + d\theta$, de sorte que, par différentiation de (9.5), $a \cos \theta d\theta = p d\lambda$, soit :

$$\mathcal{D}_a = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{p}{a\cos\theta} \qquad (9-6)$$

La dispersion angulaire est d'autant plus élevée que l'ordre *p* est grand et le pas *a* du réseau est petit.

Au voisinage de $\theta = 0$ (lorsque l'on a choisi un angle θ_0 qui permet d'observer perpendiculairement au plan du réseau), la dispersion angulaire ne dépend de θ qu'au second ordre et λ est alors proportionnel à θ .

• On définit enfin **le pouvoir de résolution** *P.R.* du réseau par le rapport de la longueur d'onde λ_0 à l'intervalle minimum $\Delta \lambda$ que peut discriminer le réseau autour de λ_0 .

Or, les pics d'éclairement maximal ont une étendue angulaire conventionnellement égale à $\Delta \Phi = \frac{2\pi}{N}$, due à la diffraction du réseau, c'est-à-dire au fait que le nombre de fentes soit fini.

Il lui correspond un angle $\Delta \theta_d = \frac{\lambda_0}{aN\cos\theta}$.

Par ailleurs, la dispersion angulaire des réseaux (9-6) nous apprend qu'une variation $\Delta \lambda$ entraîne une variation angulaire $\Delta \theta = \frac{p\Delta \lambda}{a\cos\theta}$ de la position du maximum d'éclairement.

Les longueurs d'onde λ_0 et $\lambda_0 + \Delta \lambda$ sont séparées si la variation de la position angulaire du maximum d'éclairement est au moins égale à la largeur angulaire de chaque pic de diffraction correspondant aux deux longueurs d'onde. Soit :

$$P.R. = pN$$
 (9-7)

Le pouvoir de résolution est d'autant plus élevé que le nombre de traits du réseau est grand et que l'on travaille à un ordre p le plus grand possible, sachant que l'on demeure contraint par la formule des réseaux (9-5).

5. Autres applications des interférences à N ondes

• Les réseaux d'antennes en radiocommunication civile et militaire et en astrophysique constituent une application de la théorie des interférences de N ondes cohérentes.

• Des antennes identiques régulièrement espacées selon une droite ou dans un plan constituent un extrait de réseau (au sens cristallin du terme). Elles peuvent ainsi collectivement émettre dans (ou recevoir selon) des directions beaucoup plus précises de l'espace que ne le fait chacune de ces antennes prise séparément, comme le font, par exemples, les réseaux de radiotélescopes ou les radars à synthèse d'ouverture (S.A.R.). Leur propriétés essentielles sont assez bien décrites par une adaptation de la théorie des réseaux de diffraction.

• Troisième application : l'étude de la « diffraction » par les cristaux afin d'en déterminer l'ordre, relève de ce type de raisonnement où intervient une superposition d'ondes cohérentes.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Un spectroscope dans le visible est construit autour d'un réseau de diffraction de pas a = 1,25 mum possédant N = 28000 traits parallèles entre eux.

Peut-il séparer le doublet jaune du sodium à 589, 0 et 589, 6 nm?

Exercice 2 : Le réseau précédent est éclairé par une source spectrale à vapeur de sodium assimilable à un disque de diamètre $2r_s = 1$ mm placé au foyer d'une lentille convergente de distance focale image f' = 50 cm, de diamètre $2r_l = 5$ cm.

1. Estimez l'incertitude $\Delta \theta_0$ qui existe sur l'angle d'incidence de l'onde plane sur le réseau.

2. Déduisez-en l'incertitude sur l'angle dans la direction duquel les rayons interfèrent et compare la avec la largeur angulaire à mi-hauteur d'un pic de diffraction. Concluez.

10 Interférences par division du front d'onde

1. Un dispositif d'interférences : les trous de Young

1.1 Présentation

• Le dispositif est constitué de deux trous circulaires T_1 et T_2 de rayons très petits devant la distance *a* entre leurs centres, percés dans un écran plan opaque, Π_o .

D'un côté de l'écran une source ponctuelle S émet une onde lumineuse monochromatique ; de l'autre, un écran de projection ou un écran dépoli, Π_d , permet d'intercepter le résultat de la superposition des ondes lumineuses sortant par chacun des trous.



FIGURE 20 – Dispositif des trous d'Young

• La source S est sur la perpendiculaire au plan des orifices passant par le milieu du segment $[T_1T_2]$ de leurs centres, à la distance d du plan. L'écran d'observation est parallèle au plan des trous à la distance D de ce dernier. Les centres des trous sont distants de a selon la direction parallèle à celle X'X dans le plan d'observation.

La source S, le milieu de $[T_1T_2]$ et l'origine du repère des coordonnées sur l'écran d'observation sont alignés. On note (X, Y) les coordonnées du point d'observation M sur l'écran.

• Les milieux de part et d'autres du plan des trous sont transparents, homogènes et linéaires, d'indices optiques respectifs n_1 et n_2 . En général il s'agit de l'air dont les propriétés optiques seront assimilées à celles du vide : $n_1 = n_2 = 1$.

1.2 Hypothèses sur la source S

La source *S* est supposée ponctuelle et elle émet une onde monochromatique de fréquence ν et de longueur d'onde dans le vide λ_0 . La vibration lumineuse émise est décrite par une onde scalaire sphérique d'amplitude complexe en un point *P* du demi-espace où elle se trouve par rapport au plan :

$$\underline{a}(P,t) = A_m \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(2\pi\nu t - k_1\,S\,P)}}{S\,P}$$

où $k_1 = \frac{2\pi n_1}{\lambda_0}$, n_1 étant l'indice optique du demi-espace contenant la source et SP la distance de la source S au point d'observation P.

1.3 Description du phénomène d'interférences

• L'onde émise par S éclaire les trous avec un éclairement *a priori* différent si ceux-ci ne sont pas à égale distance d'elle. Le dispositif étant, dans notre étude, symétrique par rapport au plan médiateur des ouvertures, ce sont deux points différents de la même surface d'onde qui sont ainsi engagés dans le phénomène d'interférences. Ce sont des **interférences par division du front d'onde**.

• La limitation du front de l'onde par chacun des trous provoque une diffraction (cf. **Toute la MPSI en fiches**, fiche 2 §6) d'autant plus forte que les rayons des trous sont petits. Il en résulte, de l'autre côté de l'écran percé, un étalement de l'onde à partir de chacun des trous, dans les cônes principaux de diffraction dont les directions sont données respectivement par les droites (ST_1) et (ST_2) .



FIGURE 21 - Cônes principaux de diffraction et champ d'interférences

 T_1 et T_2 paraissent de la sorte être à l'origine de deux ondes lumineuses sphériques ayant une relation de phase fixe par rapport à l'onde que chacun d'eux a reçue de la source primaire S. On dit que T_1 et T_2 se comportent comme des **sources secondaires** cohérentes entre elles.

• L'extrême proximité de T_1 et T_2 font que les deux cônes de diffraction se superposent presque l'un à l'autre : tout point de leur domaine d'intersection reçoit la vibration lumineuse issue de chacun des orifices et son état vibratoire est caractérisé par une amplitude qui est la somme des amplitudes reçues. Cette région constitue le **champ d'interférences**. Son volume est quasiment égal à celui de l'un des deux cônes. On dit que **les interférences ne sont pas localisées**.

• On peut placer l'écran d'observation Π_d n'importe où et dans n'importe quelle position pourvu qu'il coupe le champ d'interférences pour voir un résultat de la superposition des ondes issues de T_1 et de T_2 . La figure qui s'y projette est la **figure d'interférences**. Cependant, elle n'est aisément interprétée et quantifiée que si l'écran est une distance du plan des trous Π_o grande devant *a* et lui est parallèle.

1.4 Aspects quantitatifs

• Comme sources secondaires quasi-ponctuelles, les orifices T_1 et T_2 émettent des ondes lumineuses qui, dans le cône principal de diffraction, sont supposées convenablement décrites, à une distance grande devant les dimensions caractéristiques de ces trous, par des ondes scalaires sphériques.

Leurs amplitudes respectives sont proportionnelles à l'amplitude de l'onde qui les a atteint,

en provenance de la source
$$S : A_1 = t_1 \frac{A_m}{ST_1}$$
 et $A_2 = t_2 \frac{A_m}{ST_2}$

Elles sont déphasées éventuellement au passage des orifices de φ_1 et φ_2 respectivement.

Les nombres complexes $\underline{T}_1 = t_1 e^{-j\varphi_1}$ et $\underline{T}_2 = t_2 e^{-j\varphi_2}$ sont appelés **transmittances** des ouvertures. La transmittance caractérise l'influence du franchissement de l'ouverture sur l'onde émise de l'autre côté, influence que peut venir renforcer un troisième milieu matériel placé au niveau de chaque ouverture.

Remarque : Les matériaux délimitant les trous ou les remplissant (par exemple une goutte d'huile ou d'eau) réfléchissent aussi les ondes dans le demi-espace de la source S et l'état vibratoire de ce côté-ci est la somme des amplitudes de la source et de l'onde réfléchie. La transmittance devrait être accompagnée d'une **réflectance** pour traduire l'effet de l'ouverture et de sa frontière sur l'onde qui revient dans le milieu de la source.

• Ainsi, en un point *M* quelconque du demi-espace au-delà du plan qui les porte, les amplitudes respectives de chacune de ces ondes sont :

$$\underline{a}_1(M,t) = A_1 \frac{e^{j(2\pi\nu t - k_1 S T_1 - k_2 T_1 M - \varphi_1)}}{T_1 M} \quad ; \quad \underline{a}_2(M,t) = A_2 \frac{e^{j(2\pi\nu t - k_1 S T_2 - k_2 T_2 M - \varphi_2)}}{T_2 M}$$

où $k_2 = \frac{2\pi n_2}{\lambda_0}$, n_2 étant l'indice du milieu dans lequel se produisent les interférences.

• Dans les dispositifs de trous d'Young usuels, la distance d de la source au plan des trous est grande devant leur écartement a et l'on peut négliger la différence qui pourrait exister entre $\frac{A_m}{ST_1}$ et $\frac{A_m}{ST_2}$. Ainsi, nous supposerons que les éclairements des deux trous sont identiques.

Par ailleurs, leurs trous ont même forme (en général, circulaire) ou sont, à tout le moins, symétriques par rapport au plan médiateur Π de leurs centres, plan censé contenir la source. Ils offrent exactement les mêmes conditions de passage à l'onde et ont de ce fait la même transmittance : les effets de l'onde reçue sont symétriques par rapport à Π . Ainsi, les amplitudes A_1 et A_2 sont égales et les déphasages φ_1 et φ_2 aussi.

Enfin, la distance d'observation de la figure d'interférence y est très grande devant a. Il en résulte que T_1M et T_2M sont très voisines pour n'importe quel point d'observation sur l'écran dépoli.

Par conséquent, pour ces dispositifs, les amplitudes reçues de chaque orifice en *M* se résument à :

$$a_1(M,t) = \mathcal{A}_m e^{j(2\pi v t - k_1 S T_1 - k_2 T_1 M - \varphi)}$$
(10-1)

et

$$a_2(M, t) = \mathcal{A}_m e^{j(2\pi v t - k_1 S T_2 - k_2 T_2 M - \varphi)}$$
 (10-1')

où
$$\mathcal{A}_m = t \frac{A_m}{ST_1 \cdot T_1 M} \approx t \frac{A_m}{ST_2 \cdot T_2 M}$$

Il leur correspond donc en *M* des éclairements $I_0 = k\mathcal{R}_m^2$ identiques.

• Les expressions des amplitudes en M font apparaître des déphasages liés au chemins optiques le long des rayons issus de la source S, n_1ST_1 et n_2ST_2 , et de ceux issus des sources secondaires, n_2T_1M et n_2T_2M .

En appelant $\delta_{2/1} = L_{ST_2M_2} - L_{ST_1M_1}$ la différence des chemins optiques ou différence de marche du rayons ST_2M_2 par rapport au rayon ST_1M_1 , il vient :

$$\underline{a}_2(M,t) = \underline{a}_1(M,t) e^{-j\frac{2\pi\delta_2/1}{\delta_0}}$$
(10-2)

1.5 Éclairement au point M

• La situation est ainsi ramenée à la superposition de deux ondes cohérentes étudiée fiche 3.

• L'amplitude instantanée de la vibration lumineuse en M, a(M, t), est la somme des amplitudes reçues de chaque trou, le milieu 2 étant supposé linéaire. Ainsi, l'amplitude complexe vaut-elle :

$$\underline{a}(M,t) = \underline{a}_1(M,t) + \underline{a}_2(M,t) = \underline{a}_1(M,t) \left(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi\delta_2/1}{\lambda_0}}\right)$$
(10-3)

• L'éclairement moyen en M en résulte :

$$I(M) = \langle E \rangle(M) = k \left| \underline{a}_{1}(M, t) \right|^{2} \left| 1 + e^{-j \frac{2\pi\delta_{2}/1}{\lambda_{0}}} \right|^{2}$$

soit

$$I(M) = 2 I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta_{2/1}}{\lambda_0}\right) \right)$$
(10-4)

Sous le régime des hypothèses précédentes, le facteur de contraste vaut 1.

1.6 Figure d'interférences - Interfrange

• Les points de la figure d'interférences où l'éclairement est constant forment des courbes appelées **franges d'interférences**. Lorsque l'éclairement y est maximal, égal à $4I_0$, les franges sont dites brillantes et celles où l'éclairement y est nul sont des franges sombres.

• Les franges d'égal éclairement sur l'écran de projection ou le dépoli sont les lieux des points M(X, Y) tels que la différence de marche entre les deux rayons ST_1M et ST_2M , $\delta_{2/1}$, est constante.

• Les franges brillantes sont celles pour lesquelles le cosinus de (4-4) vaut 1. Son argument est donc un multiple entier de 2π , soit :

$$\delta_{2/1} = p\lambda_0 \tag{10-5}$$

où p est un entier appelé ordre d'interférence.

• Les franges sombres sont celles pour lesquelles le cosinus de (4.4) vaut -1; son argument est donc un multiple entier impair de π , soit :

$$\delta_{2/1} = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda_0 \tag{10-6}$$

où p est un entier quelconque.

• L'expression de la différence de marche, la distance ST_1 étant égale à ST_2 , vaut :

$$\delta_{2/1} = n_2 (T_2 M - T_1 M)$$

Les lieux d'égal $\delta_{2/1}$ sont, dans l'espace, des portions d'hyperboloïdes de révolution autour de la droite (T_1T_2) . Les franges d'interférences sont les intersections de ces hyperboloïdes avec le plan de l'écran. Elles forment des branches d'hyperboles paramétrées, pour les franges sombres ou brillantes, par l'ordre d'interférence p.

• Passer d'une frange brillante (resp. sombre) à l'une de ses deux plus proches voisines de même espèce revient à faire varier l'ordre d'interférence de plus ou moins une unité et correspond à une variation de la différence de marche de plus ou moins une longueur d'onde.

• La différence de marche s'exprime analytiquement par :

$$\delta_{2/1} = n_2 \left(\sqrt{D^2 + \left(X - \frac{a}{2} \right)^2 + Y^2} - \sqrt{D^2 + \left(X + \frac{a}{2} \right)^2 + Y^2} \right)$$

Au voisinage de l'origine du repère de l'écran de projection, en considérant que l'on se limite aux positions (X, Y) telles que |X| et |Y| soient petites devant D, le développement au premier ordre en X et Y de $\delta_{2/1}$ donne :

189

$$\delta_{2/1} = -n_2 \frac{aX}{D} \tag{10-7}$$

Lorsque le milieu après Π_o est l'air, $n_2 = 1$.

• L'expression de la différence de marche est indépendante de Y au premier ordre autour de l'origine. Les franges d'interférences sont donc assimilables à des segments de droites colinéaires à l'axe des ordonnées. Les franges sombres ou brillantes apparaissent équidistantes. On appelle **interfrange** *i* la distance sur l'axe des abscisses séparant deux franges brillantes (resp. sombres) immédiatement voisines. D'après (**10-5**) ou (**10-6**) et (**10-7**), l'interfrange vaut :

$$i = \frac{D\lambda_0}{n_2 a}$$
(10-8)

Il caractérise le milieu situé après le plan des ouvertures (indice n_2), la lumière utilisée (longueur d'onde λ_0) et les dimensions géométriques du dispositif (espacement *a* des ouvertures et distance *D* d'observation).

• La frange située sur l'axe des ordonnées correspond à une différence de marche nulle entre les rayons qui interfèrent (ce qui est naturel vu la symétrie du dispositif). Son ordre d'interférence est donc p = 0; elle est brillante.

2. Variations autour du dispositif fondamental

2.1 Modification de la différence de marche

• L'introduction entre la source S et l'ouverture T_1 d'une lame à face parallèle d'indice n_e différent de celui n_1 du milieu en amont du plan Π_o et d'épaisseur e, modifie le chemin optique du rayon lumineux sur le trajet en question. Il en résulte donc une variation de la différence de marche entre les deux rayons :

$$\delta_{2/1} = L_{ST_2M} - L_{ST_1M}$$

= $(n_1ST_2 + \zeta_2 + n_2T_2M) - (n_1(ST_1 - e) + n_ee + \zeta_1 + n_2T_1M)$

où ζ_l , l = 1, 2 est le chemin optique rajouté par les éventuelles transmittances au franchissement des ouvertures $\varphi_l = \frac{2\pi\zeta_l}{\lambda_0}$.

• Cas particulier : la source est située dans le plan médiateur du segment $[T_1T_2]$, soit $ST_1 = ST_2$ et les transmittances des ouvertures sont identiques, soit $\zeta_1 = \zeta_2$. Alors, la différence de chemin optique se simplifie, au premier ordre en X et Y, en :

$$\delta'_{2/1} = \delta_{2/1} - (n_e - n_1)e = -n_2 \frac{aX}{D} - (n_e - n_1)e$$
(10-9)

où $\delta_{2/1}$ est donné par (10-7) et dans la limite où |X| et |Y| sont petits devant D.

• La différence de chemin optique varie ainsi de la quantité constante $-(n_e - n_1)e$.

La frange brillante d'ordre d'interférence nul (p = 0) de la nouvelle figure d'interférence est décalée : sa position passe de X(p = 0) = 0 à $X'(p = 0) = -\frac{(n_e - n_1)eD}{n_2a}$.

Si $n_e > n_1$, le chemin optique se rallonge pour les rayons passant par T_1 , ce qui a pour effet de faire « glisser » le système des franges vers T_1 .

• L'introduction de la lame, en revanche, ne modifie pas l'interfrange.

2.2 Influence de la position de la source

• Un déplacement de la source dans le plan médiateur de $[T_1T_2]$, à partir du dispositif étudié au §1 ne provoque aucune modification des chemins optiques au delà du plan Π_o des ouvertures ; les chemins optiques en deçà de Π_o demeure identiques entre eux par symétrie de la position de S par rapport aux trous. Ainsi l'expression de la différence de marche entre les rayons traversant les ouvertures est-elle inchangée.

• Il n'y a donc pas de modification de la position des franges sombres et brillantes sur l'écran Π_d . Les seules modifications de la figure d'interférence portent sur :

0 une modification (en général, marginale) de l'étendue du champ d'interférences par ouverture ou fermeture de l'angle (ST_1, ST_2) , quand la source se rapproche ou s'éloigne du milieu de $[T_1, T_2]$;

2 une modification de l'éclairement due aux changements des directions (ST_1) et (ST_2) des cônes principaux de diffraction.

• Un déplacement de la source S parallèle à la droite (T_1T_2) en revanche modifie les chemins optiques des rayons ST_1M et ST_2M , la différence de leurs marches et donc la position des franges sombres et brillantes. Si l'on déplace S de b du côté de T_2 , on rallonge le chemin optique L_{ST_1} et on diminue L_{ST_2} .

Un calcul analogue à celui fait pour $\delta_{2/1}$ conduit à la différence de marche $\delta'_{2/1}$ du rayon ST_2M par rapport au rayon ST_1M :

$$\delta_{2/1}' = \delta_{2/1} - n_1 \frac{ab}{d} = -n_2 \frac{aX}{D} - n_1 \frac{ab}{d}$$
(10-10)

en supposant que *a* et *b* soient petits devant *d*. La nouvelle différence de marche change d'une quantité constante par rapport à son ancienne expression.

• La position de la frange d'ordre d'interférence nul (p = 0) est donc décalée : elle passe de X = 0 à $X' = -\frac{n_1}{n_2} \frac{Db}{d}$, emportant avec elle tout le système de franges.

• L'interfrange ne subit aucune variation à cause du changement de position de la source.

2.3 Influence de l'élargissement de la source

• L'influence de l'élargissement de la source s'entend comme une extension de la source selon la direction de (T_1T_2) et peut s'interpréter comme la superposition de vibrations issues d'une infinité de sources ponctuelles incohérentes entre elles, réparties le long d'un segment de part et d'autre de la position initiale de S.

• L'incohérence provoque l'addition des éclairements de chacune des sources. L'expression (10-4) où la différence de marche $\delta_{2/1}$ est remplacée par $\delta'_{2/1}$ déterminée précédemment permet de comprendre ce qui se produit.



FIGURE 22 – Élargissement de la source

Soit un segment source colinéaire à (T_1T_2) , centré sur S et de longueur l_s ; soit la source élémentaire quasi-ponctuelle de largeur dx autour du point de coordonnée x et dI(x) l'éclairement élémentaire qu'elle crée au point M de l'écran.

Supposons que cet éclairement soit proportionnel à dx et au facteur d'interférence en M,

 $1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta_{2/1}^{2}(x)}{\lambda_{0}}\right)$, que l'on aurait pour la source initialement en *S* puis déplacée en *x*, avec,

par adaptation de (10-10), $\delta'(x) = -n_2 \frac{aX}{D} - n_1 \frac{ax}{d}$.

L'éclairement total en M est la somme de tous les éclairements élémentaires :

$$I(M) = \int_{-l_s/2}^{l_s/2} dI(x) = \int_{-l_s/2}^{l_s/2} \alpha \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta'_{2/1}(x)}{\lambda_0}\right) \right) dx$$

soit :

$$I(M) = \alpha l_s \left(1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi n_1 a l_s}{d\lambda_0}\right) \cos\left(\frac{2\pi \delta_{2/1}}{\lambda_0}\right) \right)$$
(10-11)

où $\delta_{2/1}$ est donné par (10.). Il en résulte un facteur γ de visibilité des franges égal à :

$$\gamma = \left| \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi n_1 a l_s}{d \lambda_0} \right) \right|$$
 (10.12)

• L'élargissement de la source parallèlement à la direction des ouvertures diminue le contraste des franges puis l'annule une première fois pour $l_s = \frac{d\lambda_0}{n_1 a}$. La figure d'interférences disparaît pour laisser place à un éclairement uniforme de l'écran de projection.

Si l'on continue à élargir la source au delà de cette valeur, la figure d'interférences réapparaît, mais avec un contraste moindre et surtout avec une permutation des positions des franges brillantes et sombres, le sinus cardinal devenant négatif.

C'est la superposition d'éclairements interférentiels avant des figures d'interférences avec une même interfrange mais des positions des franges sombres et brillantes qui se décalent les unes par rapport aux autres qui provoque cette variation du contraste et cette inversion des positions des franges sombres et brillantes.

• L'élargissement de la source n'a aucune incidence sur l'interfrange entre franges consécutives de même éclairement extrémal.

2.4 Influence du spectre de la source

• Supposons la source S à nouveau ponctuelle, mais seulement quasi monochromatique. La présence de longueur d'ondes dans le spectre de la source de part et d'autre de λ_0 s'interprète comme une superposition de sources incohérentes entre elles dont les éclairements respectifs s'ajoutent au point M de l'écran de projection.

Si les différences de marche des rayons entre la source et M sont les mêmes du fait du caractère ponctuel de celle-là, les déphasages qui en résultent varient avec les longueurs d'onde.

Les figures d'interférences associées à chacune présentent des interfranges différentes. Il doit en résulter une diminution du contraste pour les ordres d'interférences de quelques unités, lorsque des franges sombres d'un système se superposent aux franges brillantes d'un autre.

• Un modèle simple de source quasi-monochromatique est celui d'une source ayant un spectre uniforme d'étendue Δv autour de v_0 . Un intervalle élémentaire de fréquence dv autour de la fréquence v donne un éclairement élémentaire en M, $dI_v(M)$, proportionnel à la largeur dv de

l'intervalle et au facteur interférentiel
$$1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta_{2/1}\right) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu}{c}\delta_{2/1}\right), \delta_{2/1}$$
 étant donné

par (4.7). Il en résulte un éclairement total de l'écran qui est la somme des éclairements élémentaires sur toute l'étendue du spectre :

$$I(M) = \int_{\nu_0 - \frac{\Delta \nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta \nu}{2}} dI_{\nu}(M) = \beta \int_{\nu_0 - \frac{\Delta \nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta \nu}{2}} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu}{c}\delta_{2/1}\right) \right] d\nu$$

soit :

$$I(M) = \beta \Delta \nu \left(1 + \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi \, \Delta \nu \, \delta_{2/1}}{c} \right) \cos \left(\frac{2\pi \, \delta_{2/1}}{\lambda_0} \right) \right)$$
(10-13)

• Contrairement à précédemment où la variation du contraste avec la largeur de la source portait sur l'*ensemble* de la figure d'interférences, le contraste dépend dans ce cas de la position *dans* la figure d'interférences résultante : X apparaît, par l'intermédiaire de $\delta_{2/1}$ dans

l'expression du facteur de visibilité sinc $\left(\frac{\pi \Delta v \,\delta_{2/1}}{c}\right)$.

• Au voisinage de X = 0, le contraste est élevé et les franges sont nettement discernables. La frange centrale en X = 0 est brillante quelques franges convenablement contrastées la jouxtent.

• Le contraste s'annule une première fois pour une différence de marche $\delta_{2/1} = \pm \frac{c}{\Delta y}$.

Or, nous avons vu (cf. fiche 7 §1.3 et 1.4) que l'élargissement de la raie spectrale était lié à la longueur de cohérence temporelle l de la vibration quasi-monochromatique par la relation (7-3); il en résulte que $\delta_{2/1} \approx \pm l$.

Ainsi la position du premier brouillage de la figure d'interférences survient lorsque la différence de marche à travers le dispositif interférentiel est de l'ordre de la longueur du train d'ondes.

Ce n'est plus le même train d'ondes qui arrive par deux chemins différents en *M* pour y interférer avec lui même, mais deux trains d'ondes qui n'ont plus entre eux de relation de phase déterminée. Les éclairements que chacun apporte s'ajoutent alors sans interférer.

Le brouillage des franges nous renseigne ainsi sur la cohérence temporelle de la source et, par conséquence, sur sa largeur spectrale.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1: Un dispositif d'interférence constitué d'un écran opaque percé de deux trous identiques distants de a = 0, 4 mm est éclairé par une source spectrale disposée à l'intersection du plan médiateur des trous et du plan perpendiculaire à l'écran passant par les deux trous. La source possède trois longueurs d'ondes principales à 0, 62, 0, 58 et 0, 55 µm. Un écran d'observation, parallèle au plan des trous d'Young est D = 2 m.

1. Calculez les interfranges correspondantes.

2. Déduisez-en le positionnement des franges brillantes sur l'écran d'observation lorsque l'on se trouve au voisinage de l'intersection de l'écran d'observation avec le plan passant par les trous d'Young qui lui est perpendiculaire.

Exercice 2: Le dispositif précédent est éclairé par une source monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0, 62 \,\mu\text{m}$ assimilable à un segment de longueur $l_s = 0, 5 \,\text{mm}$ parallèle au segment dont les extrémités sont les deux trous et situé à une distance $D = 5 \,\text{cm}$ du plan des trous. Le milieu ambiant est l'air.

Calculez le facteur de contraste.

11 Interférences par division d'amplitude

1. L'interféromètre de Michelson

1.1 Principe

Il s'agit d'obtenir des interférences en faisant transiter chaque rayon lumineux issu d'une source par deux trajets différents à partir d'un certain endroit du dispositif. À comparer aux trous de Young où ce sont deux rayons distincts au départ de la source qui interfèrent. On parle d'**interférences par division d'amplitude**.

1.2 Description



FIGURE 23 – Interféromètre de Michelson : (a) en lame d'air ; (b) en coin d'air ; (c) détail de la lame semi-transparente séparatrice - compensatrice

L'interféromètre de Michelson ou, familièrement, le « Michelson », est un dispositif constitué de deux miroirs plans soit orthogonaux entre eux (cf. fig. 23a), soit faisant entre eux un dièdre d'angle réglable proche de l'angle droit $\frac{\pi}{2} - \alpha$ avec $\alpha \ll 1$ (cf. fig.23b). Deux mécanismes non représentés sur le schéma permettent, l'un, de déplacer le miroir M₂ parallèlement à lui-même(cf. fig. 23a); l'autre, d'incliner le miroir M₁ de l'angle α par rapport au plan orthogonal au plan du miroir M₂ (cf. fig. 23b).

• Le dispositif de « division du rayon » est une lame semi-transparente, parallèle au plan médiateur du dièdre des miroirs lorsqu'ils sont orthogonaux entre eux, constituée d'une **séparatrice** et d'une **compensatrice**.

La semi-transparence de la séparatrice est obtenue par la métallisation de la face tournée vers la compensatrice. Les deux chemins optiques empruntés par le rayon lumineux à la traversée de la lame semi-transparente sont identiques si la compensatrice et la séparatrice sont faites du même matériau, ont même épaisseur et sont parallèles entre elles.

Le rayon qui se réfléchit sur le miroir M_1 traverse trois fois la compensatrice et une fois la séparatrice ; celui qui se réfléchit sur le miroir M_2 traverse une fois la compensatrice et trois fois la séparatrice. Chaque rayon se réfléchit et traverse une fois la face métallisée.

• Deux distinctions subsistent, cachées, entre les chemins optiques :

> l'onde partant vers le miroir M_1 subit une transmission en provenance de l'air dans le verre et une autre transmission en provenance du verre dans l'air supplémentaires par rapport à l'onde qui se dirige vers le miroir M_2 ;

> elle subit sur la couche métallisée de la séparatrice une réflexion en provenance de l'air alors que celle qui se dirige vers M_2 y subit une réflexion en provenance du verre.

1.3 Le contact optique

• L'interféromètre est supposé réglé au contact optique lorsque :

➤ les miroirs sont perpendiculaires entre eux ;

➤ la lame semi-transparente supposée d'épaisseur nulle est dans le plan médiateur du dièdre formé par les miroirs. Les distances entre un point quelconque de la lame semi-transparente et chacun des miroirs sont égales.

• Tout rayon incident issu de la source se divise en deux rayons qui se réfléchissent chacun sur un des miroirs puis sortent de l'interféromètre après avoir franchi la séparatrice. Au delà de cette dernière et quelque soit l'inclinaison initiale du rayon incident considéré, les deux rayons qui sortent de l'interféromètre sont superposés l'un à l'autre.

• Au contact optique, en un point quelconque A des rayons confondus en aval, les chemins optiques entre la source S et A en suivant chacun des rayons sont égaux. La différence de marche en A entre les rayons est nulle ainsi que le déphasage : ils interfèrent de manière constructive.

• Quel que soit l'endroit où un écran intercepte le faisceau lumineux sortant de l'interféromètre, l'éclairement en chacun des points du champ lumineux est uniforme. L'observateur voit une **teinte plate**.

1.4 Les sources équivalentes

• Soit une source ponctuelle S éclairant l'interféromètre. La géométrie de l'appareil fait que les rayons originaires d'un même rayon incident qui sortent en aval semblent provenir de deux sources.

Le rayon réfléchi sur la lame puis sur le miroir M_1 semble provenir de S'_1 , image par le miroir M_1 du point S_1 , symétrique de S par la lame semi-transparente.

Le rayon réfléchi sur le miroir M_2 puis sur la lame semble provenir de S'_2 , symétrique par la lame semi-transparente du point S_2 , lui-même image de S par le miroir M_2 .



FIGURE 24 – Sources équivalentes à S et au « Michelson » en lame d'air

• Si *e* est le recul du miroir M₂ par rapport au contact optique, S'_2 est en arrière de S'_1 , à une distance $S'_1S'_2 = 2e$, la droite $(S'_1S'_2)$ étant perpendiculaire au plan du miroir M₁.

• Les rayons sortant de l'interféromètre proviennent tous des deux sources virtuelles S'_1 et S'_2 , équivalentes à la source S et à l'interféromètre réunis. Ces deux sources équivalentes sont synchrones et en phase, de part leur mode de construction, et cela sans avoir d'interaction l'une avec l'autre.

2. Franges d'égale inclinaison

2.1 Éclairement par une source ponctuelle

• La source et le « Michelson » sont équivalents aux sources S'_1 et S'_2 . Donc, en « tout » point de l'espace en sortie de l'interféromètre, deux rayons issus chacun de l'une des deux sources peuvent interférer. Un écran positionné en aval de la lame semi-transparente, à n'importe quelle distance de celle-ci est par conséquence un lieu de points d'interférences dont la réunion forme une figure d'interférences. Ces interférences ne sont pas localisées.

• Les figures d'interférences les plus simples sont obtenues lorsque l'écran est positionné perpendiculairement à la droite $(S'_1S'_2)$. La symétrie de révolution autour de cette droite se traduit par une figure d'interférences dont les franges sont des anneaux circulaires de centre le point d'intersection de cette droite avec l'écran.

• Soit *D* la distance entre la source équivalente la plus proche du plan d'observation et ce dernier, *e* l'épaisseur de la lame d'air et *r* la distance d'un point *M* quelconque de l'écran à la droite $(S'_1S'_2)$.



FIGURE 25 - Sources équivalentes et un point d'observation en lame d'air

Dans le cadre où e est petit devant r, lui-même l'étant devant D, la différence de chemin optique entre les rayons qui interfèrent en M vaut :

$$\delta_{2/1} \approx 2e\left(1-\frac{r^2}{2D^2}\right)$$
 (11-1)

• $\delta_{2/1}$ diminue toujours en valeur absolue avec l'éloignement du point d'observation de la droite des sources équivalentes. L'ordre d'interférence est donc en valeur absolue le plus élevé au point *C* de l'écran que coupe cette droite, contrairement au dispositif des trous d'Young avec une source dans le plan médiateur des sources.

• Le champ d'interférences est limité à l'espace commun aux deux cônes de sommet la plus éloignée des deux sources équivalentes, qui s'appuient respectivement sur le contour de la compensatrice et sur celui de la séparatrice en aval du Michelson.

• L'éclairement d'un point de l'écran à la distance r de $(S'_1S'_2)$ et situé dans le champ d'interférences est :

$$I(r) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{r^2}{2D^2}\right) \right) \right]$$
(11-2)

• L'éclairement de *C* varie avec l'épaisseur *e* de la lame d'air créée par le déplacement du miroir M₂. Lorsque *e* est suffisamment grande pour que la différence de marche entre les rayons soit supérieure à λ_0 , la longueur d'onde dans le vide de la vibration employée, la figure d'interférences présente plusieurs anneaux brillants et sombres. Les anneaux brillants ont des rayons $r_p^{(b)}$ conditionnés par une différence de chemins optiques multiple d'ordre *p* de

 λ_0 , soit :

$$r_p^{(b)} = D \sqrt{2 - p \frac{\lambda_0}{e}}$$
 (11-3)

Les anneaux sombres ont des rayons $r_p^{(s)}$ correspondant à une différence de marche multiple impaire de la demi-longueur d'onde, soit :

$$r_p^{(s)} = D \sqrt{2 - \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0}{e}}$$
 (11-4)

Tous ces anneaux alternent et se resserrent en s'éloignant de C.

• Le nombre d'anneaux sombres et brillants en est restreint. Soit r_M la plus grande distance à C d'un point du champ d'interférence coupé par l'écran de projection; les ordres d'interférence présents sur la figure d'interférence pour une épaisseur e de la lame d'air donnée

sont compris, pour les anneaux brillants entre les parties entières de $\left(2 - \frac{r_M^2}{D^2}\right) \frac{e}{\lambda_0}$ et de $2\frac{e}{\lambda_0}$,

de l'extérieur vers le centre de la figure.

• À partir du contact optique, le déplacement du miroir M_2 s'accompagne d'une diminution de l'éclairement de l'ensemble de la figure d'interférences jusqu'à ce que *C* devienne un point d'éclairement nul. Alors $2e = \lambda_0/2$.

En continuant le déplacement, e augmente : le centre C redevient éclairé et le lieu de ce premier anneau sombre est un cercle dont le rayon croît avec e selon la formule (**11.4**) pour un ordre d'interférence p fixé. Les anneaux semble sortir du centre de la figure d'interférence.

La sensation visuelle est opposée lorsque *e* diminue et que l'on s'approche du contact optique : les anneaux semblent retourner vers leur centre de courbure.

2.2 Éclairement par une source étendue

• Lorsque l'interféromètre est éclairé par une source étendue monochromatique, Les interférences disparaissent à distance finie. En effet, chaque point de la source se dédouble par les images dans les miroirs et les symétries par rapport à la lame semi-transparente, comme la source ponctuelle unique l'avait fait dans le cas précédent. Ainsi la source étendue et le Michelson se trouvent-ils équivalents à deux sources étendues parallèles entre elles et de mêmes dimensions que la source originelle (cf. fig. 26).



FIGURE 26 – Sources étendues équivalentes

198 Physique

L'incohérence entre deux points de la source se traduit par une incohérence similaire entre les couples de points équivalents par le Michelson. En un point M d'observation sur un écran à distance finie, s'ajoutent donc les éclairements créés par chaque paire de points équivalents. Les différences de chemins optiques entre chaque paire et M différant, la somme des éclairements brouille les figures d'interférences que l'on aurait pu obtenir individuellement en M de la part de chaque paire.



FIGURE 27 - Franges d'égale inclinaison

• Des interférences subsistent, localisées à l'infini. Elles sont ramenées à distance finie d'observation en plaçant l'écran de projection dans le plan focal image d'une lentille convergente interposée entre la sortie de l'interféromètre et l'écran (cf. fig. 27).

• Les rayons qui convergent en M sont tous parallèles entre eux et à la direction (OM), en amont de la lentille. D'où le nom donné à ces figures d'interférences de **franges d'égale in-**clinaison.

• La configuration du dispositif, le théorème de Malus et le principe du retour inverse de la lumière, rendent égales entre elles les différences de marche entre les rayons issus des points sources équivalents qui convergent par paire en M. Toutes ces paires apportent leur l'éclairement en M sans détruire la figure d'interférences.

• La différence de chemins optiques entre les deux rayons issus de sources équivalentes, $\delta_{2/1}$, vaut $S'_2 K$, soit :

$$\delta_{2/1} = 2e\cos\alpha \approx 2e\left(1 - \frac{r^2}{2f'^2}\right)$$
(11-5)



FIGURE 28 – Schéma de principe du calcul de $\delta_{2/1}$

(11-5) est analogue à (11-1) : la distance focale f' de la lentille interposée entre la lame semitransparente et l'écran de projection s'y substitue à la distance finie d'observation D. Il en résulte les mêmes propriétés des interférences que lorsque l'interféromètre est éclairé par une source ponctuelle ; le gain en est un éclairement accru de la figure.

2.3 Éclairement par une source de lumière blanche

• Lorsque le « Michelson » est éclairé par une source de lumière blanche, les anneaux d'interférences que l'on aurait pour chacune des fréquences participant à ladite lumière se superposent les uns aux autres. Tous les systèmes obéissent à (11-3) : l'ordre d'interférence décroît du centre vers la périphérie de la figure et pour un ordre d'interférences donné, les rayons des franges sombres ou lumineuses décroissent lorsque la longueur d'onde augmente.

• Au contact optique, la teinte est plate pour toutes les longueurs d'onde qui composent la lumière : le centre *C* est alors éclairé par une lumière ayant le même spectre que celle de la source. Si l'on s'écarte du contact optique, l'éclairement au centre devient nul pour les plus petites longueurs d'onde en premier et le blanc devient un blanc d'ordre supérieur dont l'analyse spectrale donne un spectre privé d'une raie dans le violet puis le bleu, le vert, etc...

• Lorsque l'épaisseur *e* de la lame d'air augmente, l'ordre d'interférence au centre croît aussi et le spectre du blanc d'ordre supérieur se cannelle un peu plus.

3. Franges d'égale épaisseur

3.1 Configuration de l'interféromètre

• Soit la configuration suivante de l'interféromètre de Michelson : à partir du contact optique, on tourne l'un des deux miroirs par rapport à leur direction commune (perpendiculaire au plan de la figure 23b ou 29) d'un petit angle α . Cela forme un « coin d'air » d'arête Δ . On obtient alors les **franges d'égale épaisseur**.

• L'interféromètre est éclairé par une source étendue produisant un faisceau de rayons lumineux parallèles éclairant le miroir M₂ sous une incidence normale ou voisine de la normale.

3.2 Sources équivalentes

• Les sources équivalentes Se_{pm1} et Se_{m2p} sont construites respectivement en prenant le symétrique de la source S par la lame semi-transparente, S_p puis son image par le miroir M_1 et en prenant l'image de S par le miroir M_2 , S_{m2} puis son symétrique par la lame semi-transparente. (cf. fig.29).

Les plans contenant respectivement Se_{pm1} et Se_{m2p} font entre eux un angle 2α et s'intersectent selon une arête colinéaire à Δ .



FIGURE 29 – Sources équivalentes au Michelson en coin d'air

• Soit un point *P* de la source *S*; il lui correspond deux points S'_1 et S'_2 sur les sources équivalentes Se_{pm1} et Se_{m2p} . Ces deux points sources particuliers n'émettent chacun qu'un seul rayon lumineux construit à partir de celui émis par *P* grâce à la même succession d'opérations que pour les sources équivalentes. Ces deux points émettent des ondes qui sont naturellement en phase.

3.3 Franges d'interférences

• La structure de l'éclairement créé par la source implique que les seuls rayons pouvant donner lieu à un phénomène d'interférences sont ceux issus des points correspondants tels que S'_1 et S'_2 . Les vibrations lumineuses émises par deux points pris sur chacune des sources équivalentes qui ne seraient pas en correspondance au sens où l'on l'a entendu dans le § précédent sont incohérentes entre elles.

• Les réflexions et symétries conservent les distances et les angles. Donc, par construction, nous avons les égalités de distances suivantes : $PR = P_pR$; $RQ_2 = RQ_1$ où Q_1 est le projeté orthogonal de P_p ou de R sur le symétrique du miroir M_2 par la séparatrice et Q_2 le projeté orthogonal de P ou de R sur M_2 ; $PQ_2 = Q_2P_{m2}$ et $RP_{m2} = RS'_2$; $P_pT = TS'_1$ où T est le projeté de P_p , R ou Q_1 sur le miroir M_1 suivant la direction (P_pR). Les droites (P_pT) et S'_1T font toutes deux un angle α par rapport à la normale au miroir M_1 , ainsi que la droite (S'_2T), la normale à M_1 en T étant la bissectrice des droites (S'_1T) et (S'_2T).

• Les rayons des paires de points correspondants s'intersectent ainsi exactement sur le miroir M_1 si la direction des rayons de la source est perpendiculaire à M_2 et à son voisinage si la direction des rayons de la source fait un angle $i \ll 1$ par rapport à la normale à M_2 . On dit que les interférences sont localisées sur le coin d'air.

• La différence de marche des rayons issus de S'_1 et S'_2 qui s'intersectent et y interfèrent vaut $\delta_{2/1} = S'_2 T - S'_1 T = -2TQ_1$. En appelant x la distance de Q_1 à l'arête Δ , l'angle α étant petit devant 1, $TQ_1 = x \tan \alpha \approx x\alpha$; cette dernière grandeur représente l'épaisseur e(x) entre le miroir M₁ et le symétrique de M₂ par rapport à la séparatrice à une distance x de leur arête commune. Ainsi, on retient :

$$\delta = 2 e(x) = 2 \alpha x \qquad (11-6)$$

Le déphasage qui en résulte est :

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda_0} \alpha x \qquad (11-7)$$

L'expression de la différence de marche entre les rayons prouve que l'ordre d'interférence sur l'arête du coin d'air est nul. Son éclairement est de la forme :

$$I(x) = 2 I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda_0} \alpha x\right) \right)$$
(11.8)

x étant la distance du point du miroir M_1 à l'arête, et αx l'épaisseur du coin d'air à cette distance-là.

• L'ordre p d'interférence des franges brillantes est :

$$p = \frac{2\alpha x}{\lambda_0}$$
 11-9

Il augmente en valeur absolue lorsque l'on s'éloigne de l'arête du dièdre formé par M_1 et le symétrique de M_2 par la lame semi-transparente.

• L'interfrange qui en résulte vaut :

$$i = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$
 (11-10)

• Tous les couples de points équivalents appartenant aux droites colinéaires à Δ passant respectivement par S'_1 et S'_2 ont leurs rayons qui interfèrent sur le miroir M_1 , sur la droite passant par T colinéaire à Δ avec une même différence de marche. Le déphasage et l'éclairement des points du segment de droite qui en résultent sont par conséquence les mêmes. Les courbes d'égal éclairement sont ainsi des franges rectilignes colinéaires à Δ .

La dépendance du déphasage de l'épaisseur du coin d'air a donné son nom aux franges obtenues.

Le coin d'air étant d'épaisseur croissant régulièrement, les franges d'interférences sombres et lumineuses sont régulièrement espacées.

• Les franges sont présentes sur le miroir. Pour les voir, il faut fixer le plan du miroir M_1 ; pour les projeter, il suffit de placer une lentille convergente en sortie de l'interféromètre et de conjuguer par elle le miroir M_1 et l'écran de projection.

Remarque : Des franges ayant des propriétés voisines s'obtiennent avec une lamelle posée sur une lame de microscope et faisant un coin d'air avec elle.

3.4 Éclairement par une source de lumière blanche

Comme pour les fentes de Young (cf. fiche 26), les éclairements pour chacune des fréquences de la lumière blanche s'ajoutent. Lorsque l'angle du coin d'air augmente, le système des franges se brouille en s'éloignant de l'arête du coin d'air et l'on obtient, loin d'elle, un blanc d'ordre supérieur attesté à l'analyse par un spectre cannelé.

3.5 Utilisation du phénomène

Les franges d'interférences ne sont parfaitement régulières dans les conditions présentées précédemment que si les miroirs sont parfaitement plans.

L'insertion d'un objet transparent dont l'épaisseur serait irrégulière ou/et l'indice optique *n* non uniforme sur le trajet des rayons lumineux de l'un des deux bras de l'interféromètre provoque une déformation des franges d'interférences qui cessent d'être rectilignes.

En effet, son introduction provoque une variation moyenne de chemin optique sur le bras égal à $\langle (n-1) e_{objet} \rangle$; on la compense par un rapprochement ou un éloignement *e* du miroir M₂ de la séparatrice.

Il ne reste plus qu'une fluctuation du chemin optique autour de sa moyenne qui détruit la planéité des surfaces du dièdre formant le coin d'air : la surface sur laquelle se forment les interférences en est, elle aussi, déformée et le caractère rectiligne des franges est détruit.

Les franges obtenues demeurent cependant le lieu des égales épaisseurs au sens d'égales différences de chemins optiques.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Soit un interféromètre de Michelson préparé au contact optique. Nous le ferons fonctionner en lame d'air. La source est une source étendue monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,546 \,\mu\text{m}$. On translate progressivement vers l'arrière l'un des miroirs par rapport à se position initiale de sorte que l'épaisseur de la lame d'air soit égale à 54, 6 μm .

2. Combien de franges sombres sont sorties ou rentrées (à préciser) entre la position initiale et l'épaisseur finale atteinte ?

- 3. Quel est l'éclairement du centre de la figure ?
- 4. Quelle est la distance entre le centre de la figure et le premier anneau sombre ?
- 5. Quelle est la distance entre les deux premiers anneaux sombres.

Exercice 2 : Soit un interféromètre de Michelson préparé au contact optique. Nous le ferons fonctionner en coin d'air. (cf. fig. 29) La source utilisée est supposée ponctuelle et remplace la source étendue.

1. Les interférences sont-elles localisées ?

2. Quelle figure d'interférence observe-t-on sur un écran placé en bas de la figure 29, à la place de l'image par la séparatrice de la source étendue ?

3. Quel dispositif produit des interférences similaires ?

12 Distributions de charge et champ électrostatique

1. Force de Coulomb et Champ électrostatique

1.1 Rappel sur les charges électriques

• Toute charge électrique isolée et observée expérimentalement est multiple entier de la valeur absolue de la charge élémentaire de l'électron e : q = ze où $z \in Z$.

• Ces charges sont portées par des entités, les particules élémentaires qui sont essentiellement, pour nous, les électrons et les protons, éventuellement structurés en noyaux, atomes, ions et molécules ou solides. Elles sont assimilées à des points matériels au sens géométrique du terme et donc sans extension spatiale.

• Par la suite, nous parlerons de « charge(s) », sous entendant « charge(s) électrique(s) ponctuelle(s) ». Cependant, nous n'hésiteront pas à faire abstraction de ces caractères spatialement discret - l'absence de dimensions affectées aux charges - et quantifié - les charges sont multiples entiers de e - pour construire, lorsque la nécessité simplificatrice s'en fera sentir, des grandeurs électriques supposées être des fonctions suffisamment régulières (par exemple continues et dérivables) des coordonnées d'espace pour traiter plus facilement certains problèmes.

1.2 Loi de Coulomb

• Soit un référentiel \mathcal{R} ; soient deux charges q_1 et q_2 placées dans le vide respectivement en M_1 et M_2 et immobiles dans \mathcal{R} ; une force s'exerce sur chacune des charges, la **force électrostatique de Coulomb**, qui respecte la loi de l'action et de la réaction, dont la loi de force est la suivante :

$$\vec{\mathbf{f}}_{q_1 \to q_2} = -\vec{\mathbf{f}}_{q_2 \to q_1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\overline{M_1 M_2}}{||\overline{M_1 M_2}||^3}$$
(12-1)

où $\vec{\mathbf{f}}_{q_1 \to q_2}$ est la force qu'exerce la charge q_1 sur la charge q_2 et $\vec{\mathbf{f}}_{q_2 \to q_1}$ la force réciproque, opposée à la précédente, que la charge q_2 exerce sur la charge q_1 .

• La loi de Coulomb est analogue dans sa forme à celle de l'attraction universelle de Newton. Elle décroît comme l'inverse du carré de la distance entre les charges. Elle est symétrique par échange des charges.

• La constante caractéristique de l'interaction électrostatique dans le vide qui apparaît dans l'expression de la loi de force, ε_0 , est appelée la **permittivité diélectrique** du vide.

Sa dimension est I^2 .T⁴.M⁻¹.L⁻³. Son unité est la farad par mètre (F.m⁻¹). Sa valeur approchée 8,8542 × 10⁻¹² F.m⁻¹.

• La loi de Coulomb est ce à quoi est réduite l'interaction fondamentale électromagnétique lorsque les charges sont fixes dans le référentiel \mathcal{R} . Cependant, sa simplicité est exploitée en mécanique classique même lorsque les charges sont mobiles l'une par rapport à l'autre dans \mathcal{R} pour interpréter en première approximation leurs mouvements et qu'elle cesse d'être l'expression exacte de l'interaction électromagnétique qui existe entre les charges.

Elle a permis d'obtenir un modèle classique de l'atome. Mais l'incompatibilité de celui-ci

204 Physique

avec les conséquences tirées des autres lois de l'électromagnétisme a imposé la formulation d'une nouvelle théorie atomique, la mécanique quantique.

1.3 Principe de superposition

• Soit une collection *C* de charges $\{q_i\}_{i \in I}$, fixes dans un référentiel \mathcal{R} aux points $\{M_i\}_{i \in I}$; soit une charge *q* fixe au point *M* dans \mathcal{R} . Lorsque la charge q_i de la collection est seule en M_i avec la charge *q* en *M*, la force électrostatique de Coulomb entre elles vaut :

$$\vec{\mathbf{f}}_{q_i \to q} = \frac{q_i q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\overline{M_i M}}{\|\overline{M_i M}\|^3}$$

• En présence simultanée de toutes les charges, la force électrostatique exercée sur q est la somme des forces électrostatiques que chaque charge de C exerçait sur q lorsqu'elle était seule à interagir avec q:

$$\overrightarrow{\mathbf{f}}_{C \to q} = \sum_{i \in I} \overrightarrow{\mathbf{f}}_{q_i \to q}$$

C'est le principe de superposition.



FIGURE 30 – Illustration du principe de superposition : (a) q_1 et q seules ; (b) q_2 et q seules ; (c) q_1 et q_2 simultanément en présence de q dans leurs positions respectives précédentes.

1.4 Champ électrostatique d'une charge électrique ponctuelle

• Une charge électrique isolée dans l'espace fixe en *M* ne subit aucune interaction électrostatique : elle ne saurait se mettre par exemple en mouvement sous l'effet de sa propre présence. Elle n'en modifie pas moins l'état électromagnétique de l'espace : cette modification est caractérisée en chaque point *P* de l'espace par le **champ électrostatique** ou **champ électrique indépendant du temps** qu'elle y crée.

• Par définition, le champ électrostatique créé en P dans le référentiel \mathcal{R} par une charge électrique ponctuelle q fixe en M dans \mathcal{R} est égal à la force électrostatique de Coulomb qui s'exercerait sur une charge électrique test q_t rapportée à la valeur de cette charge test :

$$\vec{\mathbf{E}}(P) = \frac{\vec{\mathbf{f}}_{q \to q_t}}{q_t} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{MP}}{\|\overrightarrow{MP}\|^3}$$
(12-2)

• Le champ électrostatique possède la dimension $M.L.I^{-1}.T^{-3}$. Son unité est le volt par mètre, de symbole $V.m^{-1}$.

1.5 Champ électrostatique d'un ensemble de charges électriques

• Soit une collection C de charges $\{q_i\}_{i \in I}$ fixes dans un référentiel \mathcal{R} et placées respectivement aux points $\{M_i\}_{i \in I}$. Conséquence du principe de superposition, le champ électrique créé au point P par la collection de charge est égal à la somme des champs électriques créés en P par chacune d'elles :

$$\vec{\mathbf{E}}(P) = \sum_{i \in I} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{M_i P}}{\|\overrightarrow{M_i P}\|^3}$$
(12-3)

2. Modélisation des distributions de charge électrique

2.1 Présentation

Lorsque les charges ponctuelles sont en très grand nombre dans un volume \mathcal{V} , il est possible de faire abstraction de leur caractère discret et de modéliser la distribution des charges par une fonction continue par morceaux.



FIGURE 31 - Modélisations de distributions : (a) volumique ; (b) surfacique ; (c) linéique

La modélisation que l'on en fait dépend largement des distances à la distribution auxquelles on observe ses propriétés et notamment le champ électrique qu'elle crée.

2.2 Distribution volumique de charge électrique

• Dans le cas le plus général (cf. fig. 31a), la distribution des charges est décrite par une **densité volumique de charge électrique** $\rho(\vec{r})$, fonction continue par morceaux, définie par la relation $dq = \rho(\vec{r})d\tau$ où dq est la charge contenue dans le volume $d\tau$ centré sur le point \vec{r} de l'espace. Ce type de modélisation est employé lorsqu'aucune des trois dimensions caractéristiques de la distribution ne peut être négligée.

 \bullet Cette manière de procéder engage deux conditions pour créer une fonction ρ suffisamment régulière :

1. veiller à ce que le volume élémentaire $d\tau$ soit de taille mésoscopique : pas trop petit afin de contenir un nombre suffisamment grand de charges ponctuelles ; pas trop grand pour que les variations de la distribution de charge observées à notre échelle soient prises en compte le plus finement possible ;

2. répartir chaque charge ponctuelle à l'intérieur d'une sphère centrée sur le point censé être son point de localisation et ayant un rayon de l'ordre de grandeur de la distance moyenne entre les charges dans la distribution, $\langle n \rangle^{-1/3}$ où $\langle n \rangle$ est le nombre moyen de charges ponctuelles par unité de volume dans la distribution.

On comptabilise ainsi la charge contenue dans la réunion des intersections de chaque sphère avec le volume élémentaire $d\tau$ que l'on a choisi pour jauge. De la sorte, son glissement du point \vec{r} au point voisin $\vec{r} + d\vec{r}$ assure la continuité de la charge comptabilisée et par conséquence celle de la fonction ρ .

Ce procédé théorique est mois arbitraire qu'il y paraît. En effet, la mécanique quantique, seule théorie valide à ce jour pour traiter correctement les problèmes à l'échelle microscopique, ne nous fournit que des densités de probabilités de présence par l'intermédiaire du module de la fonction d'onde des particules qu'elle est en théorie capable de produire. Ce fait nous invite justement à ne pas considérer ces dernières comme ponctuelles et parfaitement localisées.

2.3 Distributions surfaciques de charge électrique

• Si l'une des dimensions de la distribution de charge $\rho(\vec{r})$ est partout négligeable devant les deux autres (cf. fig. 31b), les charges peuvent être considérées comme réparties sur une surface S, qui ignore de fait l'épaisseur supposée petite de la distribution réelle.

• On décrit une telle distribution par une densité surfacique de charge électrique $\sigma(\vec{r})$, construite en considérant comme volume élémentaire un volume centré sur un point \vec{r} et qui traverse toute l'épaisseur $e(\vec{r})$ de la couche chargée en ce point.

Elle découpe de la sorte un cylindre élémentaire de longueur $e(\vec{r})$ d'aire dS.

La charge élémentaire dq qu'il contient est dq = $\left(\int_{e(\vec{r})} \rho(\vec{r}) de\right) dS$ et l'on définit $\sigma(\vec{r})$ par

 $dq = \sigma(\vec{r}) dS$.

2.4 Distributions linéiques de charge électrique

• Si deux des dimensions caractéristiques de la distribution de charge sont partout négligeables devant une troisième (cf. fig. 31c), les charges peuvent être considérée comme réparties le long d'une courbe - au sens géométrique du terme -, qui ignore l'étendue de la section de la distribution réelle.

• On décrit une telle distribution par une densité linéique de charge électrique $\lambda(\vec{r})$. Elle est construite en considérant comme volume élémentaire un volume centré sur un point \vec{r} . un tronçon de la distribution autour de ce point, cylindre élémentaire de section $s(\vec{r})$ de lon-

gueur d*l*. La charge élémentaire d*q* qu'il contient est d*q* = $\left(\iint_{s \in \vec{r}} \rho(\vec{r}) ds\right) dl$ et l'on définit

 $\lambda(\vec{r})$ par la relation $dq = \lambda(\vec{r}) dl$.

2.5 Charges ponctuelles

Lorsque les trois dimensions caractéristiques de la distribution peuvent être négligées devant la distance à laquelle on entend s'intéresser à ses propriétés électriques, alors la distribution

de charge peut être représentée par une charge électrique ponctuelle $Q = \iiint_{\tau} \rho(\vec{r}) d\tau$ po-

sitionnée en un point au centre de la distribution.

2.6 Charge électrique d'une distribution de charge

• Soit une distribution de charge électrique, décrite par sa densité volumique ρ , surfacique σ ou linéique λ . La charge électrique totale Q de la distribution est alors égale à :

$$Q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) d\tau \quad \text{ou} \quad Q = \iint_{\mathcal{S}} \sigma(\vec{r}) dS \quad \text{ou} \quad Q = \int_{\mathcal{C}} \lambda(\vec{r}) dl \quad (12-4)$$

selon la modélisation adoptée.

• Les charges précédentes sont finies - ce qui se traduit par le fait que les intégrales précédentes sont calculables et possèdent des valeurs finies - si les distributions sont d'extensions finies, ou si leurs valeurs décroissent suffisamment rapidement à partir d'une région donnée de l'espace lorsque l'on s'éloigne dans n'importe quelle direction de l'espace à partir de cette région.

2.7 Champ électrostatique

• Le principe de superposition permet de formuler le champ électrique d'une distribution continue de charge par la généralisation de l'expression du champ électrique d'une distribution de charges ponctuelles.

On décompose la distribution en éléments de volume, de surface ou de longueur élémentaires, selon le modèle qui la décrit ; chacun de ces éléments est considéré comme une charge ponctuelle élémentaire fixe au point \vec{r}' du référentiel dans lequel le champ électrique est évalué. $dq = \rho(\vec{r}')d\tau$ ou $\sigma(\vec{r}')dS$ ou $\lambda(\vec{r}')dl$.

Le champ électrique résultant est la somme des champs électriques créés par les éléments en lesquels la distribution de charge peut être décomposée.

• Ainsi, le champ électrique au point P, noté \vec{r} , est-il

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}') \vec{N}(\vec{r} - \vec{r}') d\tau_{\vec{r}'}, \quad \iiint_{\mathcal{S}} \sigma(\vec{r}') \vec{N}(\vec{r} - \vec{r}') dS_{\vec{r}'},$$

ou
$$\int_{C} \lambda(\vec{r}') \vec{N}(\vec{r} - \vec{r}') dl_{\vec{r}'}$$

selon la modélisation adoptée de la distribution, où $\vec{N}(\vec{u}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^3}$.

Remarque : Le principe de superposition se traduit dans le cas des distributions continues par le remplacement d'une somme discrète par une somme continue, une intégrale simple ou multiple.

3. Symétries et invariances des distributions de charge électrique

Des caractéristiques particulières du champ électrique d'une distribution de charge électrique peuvent se déduire des invariances de cette dernière sans avoir à calculer analytiquement le champ par les formules qui précèdent.

Les raisonnements ci-dessous sont valables pour toutes les modélisations discrètes ou continues des distributions de charge électrique. Par simplicité, nous nous appuierons sur des distributions décrites par des densités volumiques de charge.

3.1 Éléments d'invariance des distributions de charge électrique

• Rappel : une isométrie de l'espace affine, \mathcal{T} , est une application affine bijective de l'espace qui applique un point M sur un point $\mathcal{T}(M)$ de sorte que les distances entre deux points et leurs images respectives soient conservées : $\|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{\mathcal{T}(M)\mathcal{T}(N)}\|$. À cette application affine est associée une isométrie vectorielle, application linéaire T qui conserve les normes telle que l'image par T du vecteur \overrightarrow{MN} soit égale à $\overrightarrow{\mathcal{T}(M)\mathcal{T}(N)}$.

• Un élément d'invariance d'une distribution de charge décrite par ρ est une isométrie affine \mathcal{T} telle que pour tout point M de l'espace, les valeurs de la densité volumique de charge au point M et en son image par $\mathcal{T}, \mathcal{T}(M)$, soient égales :

$$\rho(M) = \rho(\mathcal{T}(M)) \tag{12-5}$$

3.2 Éléments d'invariance caractéristiques

• Une distribution de charge peut être invariante par translation de vecteur \vec{a} . Elle est alors obligatoirement invariante par toutes les translations de vecteur $p \vec{a}$ où p est un entier quelconque. Si l'on choisit une base orthonormée d'un repère cartésien de projection dont un des vecteurs est colinéaire à \vec{a} , appelons-le \vec{e}_x , alors la densité volumique de charge, fonction des coordonnées (x, y, z) d'un point M de l'espace est périodique pour la variable x, de période $a = |\vec{a}||$.

$$\rho(x + a, y, z) = \rho(x, y, z)$$

L'application linéaire associée T est l'identité de \mathbb{R}^3 .

• Une distribution de charge peut être invariante par translation selon une direction \vec{d} . Ceci signifie que la distribution est invariante *par toute translation de vecteur colinéaire* à \vec{d} . Si l'on choisit une base orthonormée du repère de projection dont un des vecteurs est colinéaire à \vec{d} , appelons-le \vec{e}_x , alors la densité volumique de charge, fonction des coordonnées (x, y, z) d'un point M de l'espace est indépendante de x:

$$\rho(x,y,z)=\rho(y,z)$$

• Une distribution peut être invariante par rotation d'angle $\theta_0 = \frac{2\pi}{n}$, où *n* est un naturel non

nul, autour d'une droite $\mathcal{D} = (I, \vec{d})$ donnée. Elle est alors obligatoirement invariante par toute rotation d'angle $p \theta_0$ autour de \mathcal{D} . Si l'on choisit une base orthonormée directe d'un repère cylindrique de projection dont le vecteur \vec{e}_z est colinéaire à \vec{d} , alors la densité volumique de charge, fonction des coordonnées (r, θ, z) d'un point M de l'espace est périodique pour la variable θ , de période θ_0 .

$$\rho(r, \theta + \theta_0, z) = \rho(r, \theta, z)$$

L'application linéaire T associée est la rotation vectorielle d'axe la droite vectorielle Vect (\vec{d}) , d'angle θ_0 .

• Une distribution peut être invariante par *par toute rotation d'angle* θ_0 *quelconque* autour de la droite \mathcal{D} . Si l'on choisit une base orthonormée d'un repère cylindrique de projection dont le vecteur \vec{e}_z est colinéaire à \vec{d} , alors la densité volumique de charge, fonction des coordonnées (r, θ, z) d'un point M de l'espace est indépendante de la variable θ :

$$\rho(r,\theta,z) = \rho(r,z)$$

On dit que « la distribution est invariante par rotation autour de \mathcal{D} » ou qu'« elle présente une symétrie de révolution (ou cylindrique) autour de \mathcal{D} . »

• Une distribution peut être invariante par *toute rotation d'angle quelconque autour d'une direction quelconque passant par un même point C*. Si l'on choisit une base orthonormée d'un repère sphérique de projection dont l'origine est *C* alors la densité volumique de charge, fonction des coordonnées (r, θ, φ) d'un point *M* de l'espace est indépendante de θ et de φ :

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r)$$

On dit que « la distribution présente une symétrie sphérique autour de C. »

• Une distribution peut être invariante par symétrie par rapport à un plan affine Π . Si l'on choisit une base orthonormée d'un repère cartésien de projection dont un vecteur est orthogonal au plan vectoriel directeur du plan Π , par exemple \vec{e}_x et l'origine du repère sur le plan affine Π , alors la densité volumique de charge, fonction des coordonnées (x, y, z) d'un point

M de l'espace est paire par rapport à la variable x :

$$\rho(-x, y, z) = \rho(x, y, z)$$

L'application linéaire T associée est la symétrie vectorielle par rapport au plan vectoriel directeur du plan de symétrie.

Remarque: Si une distribution de charge est invariante par translation selon une direction d, alors tous les plans affines perpendiculaires à \vec{d} sont des plans de symétrie de la distribution.

• Cas particulier : une distribution peut être antisymétrique par rapport à un plan $\overline{\Pi}$. Si l'on choisit une base orthonormée d'un repère cartésien de projection dont un vecteur est orthogonal au plan vectoriel directeur du plan $\overline{\Pi}$, par exemple \vec{e}_x et l'origine du repère sur le plan affine $\overline{\Pi}$, alors la densité volumique de charge, fonction des coordonnées (x, y, z) d'un point M de l'espace est impaire par rapport à la variable x:

$$\rho(-x, y, z) = -\rho(x, y, z)$$

L'application linéaire T associée est l'opposée de la symétrie vectorielle par rapport au plan vectoriel directeur du plan d'antisymétrie.

3.3 Conséquence sur le champ électrostatique

• On montre que si une distribution est invariante par la transformation affine \mathcal{T} , d'application linéaire associée T alors le champ électrostatique en l'image du point P est l'image par T du champ électrostatique en P :

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(\mathcal{T}(P)) = T\left(\overrightarrow{\mathbf{E}}(P)\right)$$

Les effets, en l'espèce le champ électrostatique créé par la distribution, possèdent au moins les symétries des causes. Ce constat tombe sous la coupe du principe de Curie, bien que, dans les cas de l'électrostatique et de la magnétostatique, cette propriété soit parfaitement démontrable.

• Les champs électrostatiques sont égaux en deux points dont l'un est l'image de l'autre par la translation de vecteur \vec{d} laissant invariante la distribution de charge. Le champ électrostatique est périodique le long de la direction \vec{d} , de période $d = \|\vec{d}\|$. Si le vecteur de base \vec{e}_x d'un repère de coordonnées cartésiennes est colinéaire à \vec{d} :

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(x+d,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{E}}(x,y,z)$$

• Le champ électrostatique en un point image du point *P* par la rotation affine d'angle $\theta_0 = \frac{2\pi}{n}$ laissant invariante la distribution de charge est égal à l'image par sa rotation vectorielle associée du champ électrostatique en P. L'axe de rotation étant pris comme axe Oz d'un repère de coordonnées cylindriques, les composantes du champ électrostatique sont périodiques en θ , de période θ_0 .

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(r,\theta+\theta_0,z)=R_{\theta_0}\left(\overrightarrow{\mathbf{E}}(r,\theta,z)\right)$$

où R_{θ_0} est la rotation vectorielle d'angle θ_0 d'axe \overrightarrow{e}_z .

• Le champ électrostatique d'une distribution de charge présentant une symétrie de révolution autour de l'axe \mathcal{D} appartient en tout point P au plan vectoriel directeur du plan affine contenant \mathcal{D} et passant par *P*. (cf. fig. 32b).

$$\vec{\mathbf{E}}(r,\theta,z)\cdot\vec{\mathbf{e}}_{\theta} = 0 \qquad \vec{\mathbf{E}}(r,\theta+\theta_0,z) = R_{\theta_0}\left(\vec{\mathbf{E}}(r,\theta,z)\right)$$

210 Physique

 $\overrightarrow{\mathbf{F}}(P) = \overrightarrow{\mathbf{F}}(T(P))$ $\overrightarrow{\mathbf{F}}(P) = \overrightarrow{\mathbf{F}}(P)$ $\overrightarrow{\mathbf{F}}(P)$ $\overrightarrow{\mathbf{F}}(P)$

où R_{θ_0} est la rotation vectorielle d'angle θ_0 quelconque d'axe \vec{e}_z .

FIGURE 32 – Exemples de distribution invariantes : (a) par translation; (b) à symétrie de révolution; (c) présentant un plan de symétrie; (d) présentant un plan d'antisymétrie.

• Le champ électrostatique en un point image du point P par la symétrie affine par rapport à Π laissant invariante la distribution de charge est égal au symétrique par rapport à la direction vectorielle du plan Π du champ électrostatique en P. (cf. fig. 32c).

Si le point *P* appartient à Π , alors le champ électrostatique appartient au plan vectoriel directeur de Π .

Posons le vecteur de base \overrightarrow{e}_z d'un repère de coordonnées cartésiennes perpendiculaire à la direction vectorielle de Π ; soit z = 0 l'équation du plan de symétrie de la distribution. Les composantes du champ électrostatique sur \overrightarrow{e}_x et \overrightarrow{e}_y , E_x et E_y , sont paires en z; la composante du champ sur \overrightarrow{e}_z , E_z , est impaire en z.

• Le champ électrostatique d'une distribution de charge invariante par translation selon la direction \vec{d} est en tout point orthogonal à \vec{d} . (cf. fig. 32a). Si le vecteur de base \vec{e}_x d'un repère de coordonnées cartésiennes est colinéaire à \vec{d} alors le champ électrostatique est indépendant de x et la composante du champ sur \vec{e}_x est nulle.

$$\vec{\mathbf{E}}(x, y, z) \cdot \vec{\mathbf{e}}_x = 0$$

• Le champ électrostatique en un point image du point P par la symétrie affine par rapport au plan $\overline{\Pi}$, plan d'antisymétrie de la distribution de charge, est égal à l'opposé du symétrique par rapport à la direction vectorielle de $\overline{\Pi}$ du champ électrostatique en P. (cf. fig. 32d).

Si le point *P* appartient à $\overline{\Pi}$, alors le champ électrostatique est orthogonal au plan vectoriel directeur de $\overline{\Pi}$.

Posons le vecteur de base \vec{e}_z d'un repère de coordonnées cartésiennes perpendiculaire à la direction vectorielle de $\overline{\Pi}$; soit z = 0 l'équation du plan d'antisymétrie de la distribution. La composante du champ électrostatique sur \vec{e}_z est paire ; celles sur \vec{e}_y et \vec{e}_z sont impaires.

3.4 Recherche des invariances

• Nous recherchons les transformations laissant invariantes une distribution donnée de charge électrique afin de calculer le champ électrostatique qu'elle crée dans l'espace, ce qui est le but

ultimement visé. Pour ce faire, il n'est pas nécessaire d'être exhaustif dans leur recensement : certaines apportent des renseignements plus précieux que d'autres.

• Méthode : choisir un point P quelconque de l'espace et rechercher si des plans de symétrie de la distribution passeraient par ce point. Si tel est le cas, le champ électrostatique appartient aux plans vectoriels directeurs de ces plans affines de symétrie, donc à leur intersection : ceci fixe la direction du champ électrostatique en ce point P.

Rechercher les invariances par translations : la composante restante du champ électrique ne dépend pas des coordonnées le long des directions d'invariance par translation. On obtient ainsi très rapidement le nombre de composantes non nulles du champ électrique dans un repère de projection donné et leur dépendance en ses coordonnées.

Remarque : En fait, si la direction est parfaitement déterminée, elle entraîne de fait la dépendance en les coordonnées du repère choisi.

• Lorsque l'on peut établir que le champ électrostatique en un point *P* donné possède telle direction et que sa composante sur cette direction ne dépend que d'une seule variable spatiale, on est dans une situation de haute symétrie pour lequel, en général, on pourra aisément calculer le champ électrique.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Trois charges ponctuelles toutes égales à +e sont disposées chacune à l'un des sommets d'un triangle équilatéral (*ABC*) de côté a = 1 nm.

1. Quels sont les éléments d'invariance de la distribution de charges ?

2. Que vaut le champ électrique au centre du triangle ?

3. Calculez le champ électrique au point D tel que (*ABCD*) soient les quatre sommets d'un tétraèdre régulier.

Exercice 2 : Déterminer tous les éléments d'invariance de la distribution constituée de deux cylindres identiques, parallèles entre eux et indéfinis, de rayon r_i uniformément chargés en volume, l'un par la densité volumique de charge ρ , l'autre par $-\rho$.

1. Déterminez tous les éléments d'invariance de la distribution.

2. Déduisez-en les propriétés des composantes du champ électrique dans un repère adéquat de coordonnées.

13 Propriétés du champ électrostatique

1. Circulation du champ électrostatique et potentiel électrostatique

1.1 Définition de la circulation

• La circulation du champ électrostatique d'un point *A* à un point *B*, que l'on peut noter $C_{A \to B}(\overrightarrow{\mathbf{E}})$ est par définition égale à l'intégrale :

$$C_{A \to B}\left(\overrightarrow{\mathbf{E}}\right) = \int_{A}^{B} \overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{r}$$
(13-1)

• La circulation du champ électrostatique de la force électrostatique entre les points A et B représente le travail par unité de charge entre les points considérés.

1.2 Circulation du champ électrostatique de la charge ponctuelle

• Soit une charge électrique ponctuelle q placée au point \overrightarrow{r}_M et fixe dans le référentiel \mathcal{R} ; elle crée au point \overrightarrow{r} un champ électrostatique $\overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_M}{||\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_M||^3}$.

Sa circulation de \overrightarrow{r}_A à \overrightarrow{r}_B vaut :

$$C_{A \to B}\left(\overrightarrow{\mathbf{E}}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\overrightarrow{r}_A - \overrightarrow{r}_M||} - \frac{1}{||\overrightarrow{r}_B - \overrightarrow{r}_M||}\right)$$

• La circulation entre les deux points est indépendante du chemin suivi : ceci est lié au caractère conservatif de la force de Coulomb dont dérive le calcul. Elle est la différence d'une fonction exprimée aux seules coordonnées des points de départ et d'arrivée : le **potentiel** électrostatique de la charge ponctuelle. Sa valeur au point \vec{r} n'est définie qu'à une constante près :

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_M\|} + cte$$
(13-2)

et

$$C_{A \to B}\left(\overrightarrow{\mathbf{E}}\right) = V(A) - V(B)$$
 (13-3)

• Il en résulte que la circulation du champ électrostatique le long d'un contour fermé est nul.

• La dimension du potentiel électrostatique est celle d'une énergie rapportée à une charge ou d'une puissance à un courant : $M.L^2.I^{-1}.T^{-3}$. Son unité est le volt (V).

1.3 Équation locale du champ électrostatique

• Le caractère conservatif du champ électrostatique se traduit localement par l'équation :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{E}}(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{0}$$
(13-4)

où $\overrightarrow{rot} \overrightarrow{E}$ est un champ de vecteur appelé le **rotationnel** du champ électrostatique.

1.4 Le rotationnel

• Le **rotationnel** est un opérateur vectoriel qui agit sur un champ de vecteurs \overrightarrow{A} pour donner un autre champ de vecteurs $\overrightarrow{rot} \overrightarrow{A}$.

• Soit un repère de coordonnées cartésiennes orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z, \vec{e}_z)$; dans cette base, le vecteur \vec{A} au point \vec{r} de coordonnées (x, y, z) a pour composantes (A_x, A_y, A_z) , chacune de ses composantes étant fonction des coordonnées (x, y, z).

Le rotationnel de \overrightarrow{A} est le vecteur :

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}} \overrightarrow{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \overrightarrow{\mathbf{e}}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \overrightarrow{\mathbf{e}}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \overrightarrow{\mathbf{e}}_z$$

• Soit un repère de coordonnées cylindriques orthonormé $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$; dans cette base, le vecteur \vec{A} au point \vec{r} de coordonnées (r, θ, z) a pour composantes (A_r, A_θ, A_z) , chacune de ses composantes étant fonction des coordonnées (r, θ, z) .

Le rotationnel de \overrightarrow{A} est le vecteur :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{A} = \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) \overrightarrow{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) \overrightarrow{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \overrightarrow{e}_z$$

• Soit un repère de coordonnées sphériques orthonormé $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_{\theta}, \vec{e}_{\varphi})$; dans cette base, le vecteur \vec{A} au point \vec{r} de coordonnées (r, θ, φ) a pour composantes $(A_r, A_{\theta}, A_{\varphi})$, chacune de ses composantes étant fonction des coordonnées (r, θ, φ) .

Le rotationnel de \overrightarrow{A} est le vecteur :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{A} = \frac{1}{r\sin\theta} \left(\frac{\partial(A_{\varphi}\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_{\theta}}{\partial\varphi} \right) \overrightarrow{e}_{r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta} \cdot \frac{\partial A_{r}}{\partial\varphi} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(rA_{\varphi})}{\partial r} \right) \overrightarrow{e}_{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial A_{r}}{\partial\theta} \right) \overrightarrow{e}_{\varphi}$$

• Un champ de vecteur \overrightarrow{A} et son rotationnel sont liés par la relation intégrale (le **théorème** de Stokes) :

$$\iint_{\Gamma} \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_{S} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{S}$$

où Γ est un contour fermé orienté et S une surface ouverte s'appuyant sur ce contour et dont la normale est orientée conformément à l'orientation du contour selon la règle du tire-bouchon de Maxwell.



FIGURE 33 - convention d'orientation de la normale s'appuyant sur un contour fermé orienté

1.5 Potentiel électrostatique d'une distribution de charge

• Soit une distribution de charges électriques ponctuelles $\{q_i\}_{i \in I}$ placées dans le vide et fixes dans le référentiel \mathcal{R} aux points respectifs $\{\vec{r}_i\}_{i \in I}$. Le principe de superposition suivi par le champ électrostatique et la linéarité de l'intégrale définissant la circulation permet d'affirmer que le potentiel créé par la distribution en un point de l'espace est la somme des potentiels créés en ce point par chacune des charges qui constituent la distribution :

$$V(\vec{r}) = \sum_{i \in I} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|} + cte$$
(13-5)

• Si la distribution est continue, le principe de superposition joue toujours : la somme discrète est remplacée par une somme continue :

$$V(\vec{r}) = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho(\vec{u})}{\|\vec{r} - \vec{u}\|} d\tau_{\vec{u}}$$

1.6 Champ et potentiel électrostatiques

• Le caractère conservatif du champ électrostatique se traduit par la relation générale qui le lie au potentiel électrostatique :

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = -\vec{\mathbf{grad}} V(\vec{r})$$
 (13-6)

Si le potentiel V d'une distribution est connu en tant que fonction des coordonnées de l'espace, alors la relation (13-6) peut être utilisée pour en calculer le champ électrostatique.

• Par définition, l'opérateur gradient d'une fonction scalaire f des coordonnées d'espace est le vecteur :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(\overrightarrow{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{r}) \overrightarrow{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}(\overrightarrow{r}) \overrightarrow{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}(\overrightarrow{r}) \overrightarrow{e}_z$$

en coordonnées cartésiennes ;

$$\overrightarrow{grad} f(\overrightarrow{r}) = \frac{\partial f}{\partial r}(\overrightarrow{r}) \overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta}(\overrightarrow{r}) \overrightarrow{e}_{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}(\overrightarrow{r}) \overrightarrow{e}_z$$

en coordonnées cylindriques ;

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial r}(\vec{r}) \overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta}(\vec{r}) \overrightarrow{e}_{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\vec{r}) \overrightarrow{e}_{\varphi}$$

en coordonnées sphériques.

L'opérateur est linéaire : si f et g sont deux fonctions scalaires différentiables, alors $\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f+g) = \overrightarrow{\mathbf{grad}} f + \overrightarrow{\mathbf{grad}} g$ et, si λ est un réel, $\overrightarrow{\mathbf{grad}}(\lambda f) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{grad}} f$. • (13-1) et (13-3) ou (13-6) sont les variantes intégrale et locale d'une même propriété :

Le champ électrostatique dérive d'un potentiel électrostatique.

1.7 Énergie potentielle d'une charge dans un champ extérieur

• Soit une distribution de charges fixes créant un champ $\vec{\mathbf{E}}(\vec{r})$ et un potentiel $V(\vec{r})$ électrostatiques dont le champ dérive. Soit une charge ponctuelle q placée au point \vec{r} , dans cet environnement à la création duquel elle ne participe pas. La charge est soumise à la force électrostatique $\vec{\mathbf{f}}_e = q\vec{\mathbf{E}}(\vec{r})$.

• Le travail élémentaire, noté δW_e , de cette force sur le déplacement élémentaire d \vec{r} à partir du point \vec{r} est :

$$\delta W_e = q \overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{r} = -q \overrightarrow{\mathbf{grad}} V(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{r} = -d(qV(\overrightarrow{r}))$$

Cette relation fait apparaître la quantité $qV(\vec{r}) + cte$ comme l'énergie potentielle de la charge q dans un champ de force extérieur. Ainsi, l'énergie potentielle électrostatique d'une charge dans un champ électrostatique extérieur dérivant du potentiel V est-elle :

$$\mathcal{E}_{pe}(\vec{r}) = q \, V(\vec{r}) + cte \qquad (13-7)$$

2. Lignes de champ et surfaces équipotentielles

2.1 Définition d'une ligne de champ électrostatique

• Soit une distribution de charges électriques, fixes dans le référentiel \mathcal{R} et y produisant en tout point un champ électrostatique $\vec{\mathbf{E}}(\vec{r})$.

On appelle **ligne de champ** du champ électrostatique - expression souvent raccourcie en « ligne du champ électrostatique » - passant par un point M_0 , la courbe de l'espace passant par M_0 en tout point de laquelle le champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r})$ est continûment tangent, courbe orientée dans le sens du champ électrostatique. (cf. fig. 34a).



FIGURE 34 – Lignes de champ : cas général (a); d'une charge ponctuelle positive (b) et négative (c)

• Les équations des lignes de champ sont obtenues en intégrant le système d'équations différentielles :

$$\frac{\mathrm{d}x}{E_x(\vec{r})} = \frac{\mathrm{d}y}{E_y(\vec{r})} = \frac{\mathrm{d}z}{E_z(\vec{r})}$$

• Une ligne de champ est la trajectoire que suivrait une particule de charge positive « tenue en laisse », c'est-à-dire que l'on suivrait sans lui laisser prendre de vitesse sous l'effet de la force électrostatique à laquelle elle serait soumise dans le champ.

216 Physique

• L'ensemble des lignes de champ constituent le **spectre** du champ électrostatique d'une distribution de charge électrique.

2.2 Propriétés des lignes de champ électrostatique

• Description du spectre d'une charge ponctuelle : les lignes de champ électrostatique sont les demi-droites dont l'origine est la charge électrique qui partent selon toutes les directions de l'espace, de manière isotrope à partir d'elle. Elles sont orientées de la charge vers l'infini si la charge est positive ; de l'infini vers la charge si elle est négative. Leur écartement au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la charge traduit la diminution de l'intensité du champ électrostatique qu'elle crée.

• L'unicité du champ électrostatique en un point donné de l'espace fait que par un point en lequel il n'y a pas de charge électrique, il passe une et une seule ligne de champ électrostatique.

- Plus généralement, les lignes de champ sont des courbes ouvertes
- ➤ qui prennent naissance sur les charges positives et aboutissent sur une charge négative ;
- ➤ qui prennent naissance sur les charges positives et partent à l'infini ;
- ≻ qui aboutissent sur des charges négatives en provenance de l'infini.

• Sur un spectre de champ électrostatique où un nombre fini de lignes de champ sont représentées, les zones de champ électrostatique intense sont caractérisées par une grande densité de lignes de champ ; celle de champ électrostatique faible par une moindre densité de ces lignes.

• Le spectre d'une distribution de charge électrique doit en respecter les invariances. Exemple : soit une distribution de charge électrique symétrique par rapport à un plan ; soit les deux lignes de champ électrostatique passant par deux points symétriques l'un de l'autre par rapport à ce plan ; alors ces deux lignes de champ électrostatique sont elles-mêmes symétriques l'une de l'autre par rapport à ce plan.

• Réciproquement, les propriétés de symétrie et d'invariances constatées sur le spectre d'une distribution de charge en laisse prévoir les mêmes symétries et invariances.

Attention : La représentation dans un plan d'une partie du spectre de champ électrostatique ne peut se faire que si la distribution qui le crée est plane contenue dans celui de la représentation ou invariante par translation le long de direction perpendiculaire à ce plan.

2.3 Surface équipotentielle

• Soit une distribution de charge électrique créant un champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r})$ dérivant d'un potentiel électrostatique $V(\vec{r})$. On appelle **surface équipotentielle** ou **équipotentielle** une surface en tout point de laquelle le potentiel est constant. L'équation liant les coordonnées des points \vec{r} appartenant à une même équipotentielle est $V(\vec{r}) = cte$.

• Par un point passe une équipotentielle et une seule. Les équipotentielles ne peuvent s'intersecter.

• Le champ électrostatique en tout point d'une surface équipotentielle est perpendiculaire à cette dernière. Soit \vec{r} et \vec{r} + d \vec{r} deux points infiniment proches d'une même équipotentielle : $V(\vec{r}) = V(\vec{r} + d\vec{r})$, d'où, au premier ordre en d \vec{r} : $\overrightarrow{\mathbf{grad}}V \cdot d\vec{r} = 0$, soit $-\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$.
3. Flux du champ électrostatique

3.1 Définitions

• Soit une distribution de charge électrique créant le champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r})$ en tout point de l'espace ; soit une surface élémentaire au point \vec{r} , d'aire dS et dont on choisit une des deux normales unitaires $\vec{n}(\vec{r})$. Par définition, le flux élémentaire du champ électrostatique à travers cette surface élémentaire est le produit scalaire du champ électrostatique et de la normale à la surface multiplié par son aire :

$$d\Phi = \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$
(13-8)

• Le flux du champ électrostatique à travers une surface ouverte S ou une surface fermée Σ est la somme des flux élémentaires à travers les éléments de surface en lesquels ces surfaces peuvent être décomposées. On le note :

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{S} \quad \text{ou} \quad \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{S}$$
(13-9)

3.2 Théorème de Gauss

Énoncé

Le flux du champ électrostatique créé par une distribution de charge électrique dans le vide à travers une surface fermée dont la normale est orientée vers l'extérieur est égal à la charge électrique contenue dans le volume qu'elle délimite rapporté à la permittivité diélectrique du vide.

• Soit une distribution de charge électrique créant un champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$; soit Σ une surface fermée. La traduction mathématique du théorème est la suivante :

$$\iint_{\Sigma} \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\Sigma}}{\varepsilon_0}$$
(13-10)

où Q_{Σ} est la partie de la charge électrique de la distribution enfermée à l'intérieur de Σ .

• Cette propriété du champ électrostatique est intimement liée à son caractère de champ central variant comme l'inverse du carré de la distance.

3.3 Formulation locale du théorème de Gauss

• Soit une distribution de charge décrite par sa densité volumique de charge $\rho(\vec{r})$; soit Σ une surface fermée délimitant le volume \mathcal{V} . La charge qui intervient dans le théorème de Gauss peut s'écrire alors :

$$Q_{\Sigma} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) \, \mathrm{d}\tau$$

La transformation de l'intégrale de flux par la formule d'Ostrogradsky permet d'écrire :

$$\iint_{\Sigma} \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) d\tau$$

Le théorème de Gauss étant valable quelle que soit la surface Σ , nous pouvons en déduire l'égalité des intégrandes et écrire :

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$
(13-11)

• Il s'agit là de la première des quatre **équations de Maxwell** de l'électromagnétisme dans le vide, appelée équation de Maxwell-Gauss.

4. Calcul de champs électrostatiques

Le théorème de Gauss est utilisé pour calculer aisément des champs électrostatiques dans des situations où les distributions de charge électrique possèdent suffisamment d'éléments d'invariance pour que les champs électrostatiques qu'elles créent puissent être exprimés en tout point de l'espace par un vecteur colinéaire à l'un des vecteurs de la base naturelle associée à la symétrie du problème, sa composante sur ce vecteur de base ne dépendant que d'une seule des coordonnées de l'espace.

4.1 Le plan de charge surfacique σ constante

• Soit une distribution plane, le plan d'équation x = 0, de charge électrique surfacique σ constante. Elle possède deux invariances par translation selon deux directions \vec{e}_y et \vec{e}_z , qui constituent le plan vectoriel Π_{inv} . Elle est alors aussi invariante par n'importe quelle translation de direction un vecteur appartenant au plan vectoriel Π_{inv} .



FIGURE 35 - Géométrie du plan de charge constante

• Soit un point quelconque M de l'espace : tout plan dont une direction est perpendiculaire à Π_{inv} et passant par M est plan de symétrie de la distribution, donc le champ électrostatique en M est contenu dans la direction vectorielle de chacun de ces plans et doit par conséquence appartenir à leur intersection commune. Cette intersection est la direction perpendiculaire à Π_{inv} , soit \overrightarrow{e}_x .

Le champ électrostatique est colinéaire à \vec{e}_x et les invariances par translation selon les deux autres directions perpendiculaires, \vec{e}_y et \vec{e}_z rendent sa composante E_x indépendante des coordonnées y et z. Ainsi, $\vec{E}(\vec{r}) = E_x(x)\vec{e}_x$ (ou une forme similaire en y ou z).

Le plan de la distribution de charge électrique est lui-même plan de symétrie de cette dernière : le champ électrostatique au point P, symétrique du point M par rapport au plan de la distribution x = 0, est donc le symétrique vectoriel du champ électrostatique en M. Ce dernier étant perpendiculaire au plan de la distribution, les deux champs sont opposés et la fonction E_x est donc impaire : $E_x(-x) = -E_x(x)$.

• Pour appliquer le théorème de Gauss afin d'en déduire $E_x(x)$, il faut choisir une surface fermée, souvent désignée **surface de Gauss**, satisfaisant aux trois exigences suivantes :

 $\mathbf{F} \vec{\mathbf{E}}(\vec{r})$ doit être en tout point de la surface colinéaire ou orthogonal à $d\vec{S}$: le produit scalaire de l'intégrale de flux $\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$ est alors $E_x(x)dS$ ou bien nul.

 $> E_x(x)$ doit être constant sur la surface d'intégration de façon à ce qu'il n'y ait pas réellement

d'intégrale à calculer et que $E_x(x)$ puisse être sorti de l'intégrale.

> Elle doit enfermer dans son volume intérieur une partie de la charge de la distribution. Une surface formée de deux parties planes parallèles au plan de la distribution l'une contenant M et l'autre son symétrique P, de mêmes aires S complétées par une surface latérale perpendiculaire au plan de la distribution convient. (cf. fig. 35).

• Ainsi le flux du champ électrostatique à travers la surface de Gauss vaut-il $\Phi = 2E_x(x)S$. La surface latérale découpe par ailleurs sur le plan de la distribution une surface d'aire *S*, de charge totale égale à σS . Selon le théorème de Gauss, $2E_x(x)S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$ d'où une composante du champ électrostatique pour x > 0 égale à $E_x(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ et pour x < 0 à $-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ du fait de l'imparité de E_x .

Le champ électrostatique est constant dans chacun des deux demi-espaces séparés par le plan chargé. Sa composante suivant la normale au plan subit une discontinuité égale à $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ au franchissement du plan.

4.2 Le condensateur plan

• Une situation de symétrie élevée du champ électrostatique existe aussi dans le cas d'une distribution constituée de deux plans parallèles $x = \frac{e}{2}$ et $x = -\frac{e}{2}$, uniformément chargés avec des densités surfaciques de charge égales à σ et $-\sigma$. Les invariances par translation le long des directions \vec{e}_y et \vec{e}_z conduisent à un champ électrostatique de la même forme que précédemment : $\vec{E}(\vec{r}) = E_x(x)\vec{e}_x$.

Toutefois, le plan x = 0 est un plan d'antisymétrie de la distribution et donc d'antisymétrie du champ électrostatique : ceci signifie que la fonction E_x est une fonction paire. On ne peut plus appliquer le théorème de Gauss afin de calculer le champ électrostatique : le flux à travers une surface de Gauss respectant les symétries du champ est nul, ou bien fait intervenir les valeurs du champ électrique en deux abscisses différentes.

On peut au mieux montrer à l'aide du théorème de Gauss que le champ électrostatique est constant dans chacune des trois zones $x < -\frac{e}{2}$, $x \in [-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}]$ et $x > \frac{e}{2}$.

• Seul l'usage du principe de superposition et les résultats acquis pour un plan uniformément chargé permettent de trouver le champ électrostatique en tout point de l'espace. On considère les champs créés par chacun des deux plans et l'on fait leur somme dans chacune des trois régions de l'espace que les plans délimitent. Si nous rassemblons les résultats dans un tableau, nous obtenons :

x	- ∞		$-\frac{e}{2}$		$\frac{e}{2}$		+∞
E_x dû à σ		$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$		$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$	I	$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$	
E_x dû à – σ	0	$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$	1	$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$		$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$	
E_x total		0	1	$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$	I	0	

Le champ électrostatique est nul à extérieur de l'espace entre les plans chargés et constant dans ce dernier, égal à $-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \overrightarrow{e}_x$.

220 Physique

• Cette situation constitue un condensateur plan idéal. Cependant, le résultat demeure acceptable lorsque des armatures planes parallèles en vis-à-vis, distantes de *e*, d'aires *S*, chargées par des densités surfaciques de charge opposées σ et $-\sigma$ ont des dimensions caractéristiques grandes devant la distance *e* les séparant. La **capacité** *C* du condensateur est égale au rapport de la charge $Q = \sigma S$ portée par une armature sur la différence entre son potentiel et celui de l'autre armature, $U = V_{\sigma} - V_{-\sigma}$.

$$\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} \uparrow \qquad \overset{\sigma}{\underset{-\sigma}{\overset{*}{\underbrace{\downarrow \vec{\mathbf{E}} \ e \ \downarrow \vec{\mathbf{E}} \ \downarrow \vec{\mathbf{E}} \ }}_{\uparrow}}}_{\uparrow \vec{\mathbf{U}}} \vec{\mathbf{E}} \stackrel{v_{\sigma}}{\underset{V_{-\sigma}}{\overset{*}{\underbrace{\downarrow \vec{\mathbf{E}} \ e \ \downarrow \vec{\mathbf{E}} \ }}}} V_{\sigma}} \uparrow U$$

FIGURE 36 – Le condensateur plan

Comme le champ électrostatique entre les armatures vaut $\overline{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \overrightarrow{\mathbf{e}}_x$; d'après (13-1) et (13-3), la circulation du champ de l'armature chargée σ à celle de charge opposée vaut $U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e = Q \frac{e}{\varepsilon_0 S}$, d'où la capacité du condensateur plan :

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$$
(13-12)

4.3 Cylindre infini uniformément chargé

• Soit une distribution de charge volumique décrite par sa densité volumique de charge ρ dans un système de coordonnées cylindriques :

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si} \quad r \le R\\ 0 & \text{si} \quad r > R \end{cases}$$

La distribution est indépendante des coordonnées z et θ : elle est donc invariante par translation le long de \vec{e}_z et par rotation d'angle quelconque autour de (Oz). Ceci signifie qu'elle est uniforme dans le cylindre d'axe (Oz) de rayon R.

• Soit un point M quelconque de l'espace (dans ou à l'extérieur du cylindre); le plan contenant l'axe (Oz) et passant par M, Π_z , est plan de symétrie de la distribution de charge du cylindre; le plan perpendiculaire à l'axe (Oz) passant par M, Π_{\perp} , est aussi plan de symétrie de la distribution de charge.

Le champ électrostatique appartient donc à la direction commune de ces deux plans, à savoir \vec{e}_r au point *M*. L'invariance de la distribution par translation suivant \vec{e}_z et par rotation d'angle quelconque autour de (*Oz*) rend le champ indépendant des coordonnées *z* et θ . Il est donc de la forme $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\vec{e}_r$.



FIGURE 37 - Le cylindre uniformément chargé

• Pour que la surface de Gauss satisfasse aux trois exigences dégagées pour le plan infini uniformément chargé, il faut qu'elle soit telle que sa normale soit en tout point colinéaire au

champ électrostatique ou perpendiculaire à lui, donc soit la normale est \vec{e}_r soit \vec{e}_z et pour que $E_r(r)$ soit constant, il faut que r le soit. Une surface adéquate est ainsi un cylindre de hauteur quelconque h, d'axe (Oz), de rayon r; elle passe donc par M. Le cylindre est fermé par deux bases perpendiculaires à (Oz).

• Le flux du champ électrostatique à travers cette surface de Gauss est ainsi : $Phi = 2\pi rhE_r(r)$. Selon le théorème de Gauss, il est égal à la valeur de la charge de la distribution contenue dans le volume que la surface délimite rapportée à la permittivité diélectrique du vide. Il convient de distinguer selon que $0 \le r \le R$ ou R < r: dans le premier cas, la charge vaut $\pi r^2 h\rho_0$; dans le second $\pi R^2 h\rho_0$. Il en résulte que le champ électrostatique vaut :

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{r\rho_0}{2\varepsilon_0} & \text{si } 0 \leq r \leq R\\ \frac{R^2\rho_0}{2r\varepsilon_0} & \text{si } R < r \end{cases}$$

représenté sur la figure suivante :



FIGURE 38 - Champ électrostatique du cylindre uniformément chargé

4.4 Sphère uniformément chargée

• Soit une distribution de charge volumique décrite par sa densité volumique de charge ρ dans un système de coordonnées sphériques :

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si} \quad r \le R\\ 0 & \text{si} \quad r > R \end{cases}$$

La distribution est indépendante des coordonnées θ et φ : elle est donc invariante par rotation d'angle quelconque autour d'un axe quelconque passant par O. Ceci signifie qu'elle est uniforme dans la sphère de centre O de rayon R.

• Soit un point M quelconque de l'espace (dans ou à l'extérieur de la sphère); tout plan contenant la droite (OM) est plan de symétrie de la distribution de charge de la sphère. Le champ électrostatique appartient donc à la direction commune à tous ces plans, à savoir \vec{e}_r au point M. L'invariance de la distribution par rapport à toutes les rotations d'angles et d'axes quelconques passant par O rend le champ indépendant des coordonnées θ et φ . Il est donc de la forme $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\vec{e}_r$.



FIGURE 39 - La sphère uniformément chargée

• Une surface de Gauss compatible avec les symétries de la figure est une sphère de rayon r centrée sur O. En tout point d'une telle surface, la normale est \overrightarrow{e}_r donc colinéaire au champ électrostatique et la projection de ce dernier y est constante égale à $E_r(r)$.

• Le flux du champ électrostatique à travers cette surface de Gauss est ainsi : $\Phi = 4\pi r^2 E_r(r)$. Selon le théorème de Gauss, il est égal à la valeur de la charge de la distribution contenue dans le volume que la surface délimite rapportée à la permittivité diélectrique du vide. Il convient de distinguer selon que $0 \le r \le R$ ou R < r: dans le premier cas, la charge vaut $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0$;

dans le second $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$. Il en résulte que le champ électrostatique vaut :

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{r\rho_0}{3\varepsilon_0} & \text{si } 0 \le r \le R\\ \frac{R^3\rho_0}{3r^2\varepsilon_0} & \text{si } R < r \end{cases}$$

représenté sur la figure 40.



FIGURE 40 - Champ électrostatique de la sphère uniformément chargée

• Hors de la sphère, le champ électrostatique est le même que celui d'une charge ponctuelle placée en O égale à la charge totale portée par la sphère, $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$.

Remarque : Le champ de la charge ponctuelle se retrouve à partir de l'expression précédente pour r > R en faisant tendre R vers 0 tout en maintenant la charge de la distribution constante.

5. Analogie pour le champ de gravitation

5.1 Définition du champ de gravitation

• Par analogie avec le champ électrostatique, on définit le **champ de gravitation** $\vec{\mathbf{G}}(P)$ créé au point *P* par une masse ponctuelle *m* placée au point *M* comme la force d'attraction universelle qu'elle exercerait sur une masse *m*' placée en *P* divisée par *m*' :

$$\vec{\mathbf{G}}(P) = -\mathcal{G}m\frac{\overrightarrow{MP}}{\|\overrightarrow{MP}\|^3}$$
(13-13)

G étant la constante de gravitation universelle.

• La dimension du champ de gravitation est celle d'une accélération $L.T^{-2}$ et son unité est donc le m.s⁻².

• Le principe de superposition s'applique au champ de gravitation d'une distribution de masse discrète ou continue. Le champ de gravitation créé par une distribution de masse en un point de l'espace est la somme des champs de gravitation créés en ce point par chacune des entités constitutives de la distribution.

• L'analogie formelle entre les expressions des champs électrostatique et de gravitation fait que les conséquences sur le champ de gravitation des invariances des distributions de masse sont les mêmes que pour le champ électrostatique vis-à-vis des distributions de charge.

Remarque : Comme il n'existe pas de masse négative, aucune distribution de masse ne peut avoir de plans d'antisymétrie.

5.2 Circulation du champ et potentiel de gravitation

• La force d'attraction universelle qu'une masse exerce sur une autre est conservative. Elle dérive donc d'une énergie potentielle. Il en résulte que, comme pour le champ électrique, la circulation du champ de gravitation entre deux points est indépendante du chemin entre ces deux points. Ainsi, le champ de gravitation dérive-t-il d'un **potentiel de gravitation** V_G tel que :

$$\vec{\mathbf{G}}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\mathbf{grad}} V_G(\vec{r}) \qquad (13-14)$$

• Le potentiel de gravitation possède la dimension du carré d'une vitesse $L^2.T^{-2}$. Son unité est le m².S⁻².

• Le potentiel de gravitation au point \vec{r} d'une charge ponctuelle *m* placée en \vec{r}_M est :

$$V_G(\vec{r}) = -\mathcal{G}m\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_M\|} + cte \qquad (13-15)$$

5.3 Flux du champ de gravitation et théorème de Gauss

• Les analogies formelles entre les champs électrostatique et de gravitation universelle sont immédiates : les masses jouent le même rôle dans la loi de la gravitation que les charges

électriques dans la loi électrostatique de Coulomb et – \mathcal{G} celui de $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

• On formule donc un théorème de Gauss portant sur le champ de gravitation :

Le flux du champ de gravitation d'une distribution de masse à travers une surface fermée Σ délimitant un volume V est égal à la masse intérieure à V multipliée par $-4\pi G$:

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathbf{G}}(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{S} = -4\pi \mathcal{G} M_{\Sigma} \qquad (13-16)$$

où M_{Σ} est la masse de la partie de la distribution contenue dans Σ .

• Soit une distribution de masse décrite par sa densité volumique de masse $\mu(\vec{r})$; soit Σ une surface fermée délimitant le volume \mathcal{V} . La masse M_{Σ} qui intervient dans le théorème de Gauss s'écrit alors :

$$M_{\Sigma} = \iiint_{\mathcal{V}} \mu(\vec{r}) \,\mathrm{d}\tau$$

• Le champ d'une distribution de masse à symétrie sphérique de rayon *R* est donc par analogie :

$$\vec{\mathbf{G}}(\vec{r}) = \begin{cases} -4\pi \mathcal{G}\frac{r\mu_0}{3} & \text{si } 0 \le r \le R \\ -4\pi \mathcal{G}\frac{R^3\mu_0}{3r^2} & \text{si } R < r \end{cases}$$

• Comme $\frac{4}{3}\pi R^3 \mu_0 = M$, le champ de gravitation d'une distribution de masse volumique

constante, à symétrie sphérique, à l'intérieur d'une sphère de rayon R est, à l'extérieur de celle-ci, le même que celui d'une masse ponctuelle de même masse que celle de la distribution et qui serait placée en son centre.

• Cette dernière propriété demeure vraie lorsque la masse volumique n'est pas uniforme à l'intérieur de la sphère, mais dépend de la seule distance à son centre.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Soit le potentiel électrostatique de Yukawa donné en coordonnées sphériques :

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

1. Déduisez du potentiel, le champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r})$ en tout point de l'espace.

2. Calculez le flux $\Phi(r)$ du champ électrostatique à travers une sphère de rayon r centrée sur l'origine du repère de coordonnées.

3. Calculez la limite de $\Phi(r)$ lorsque *r* tend vers 0. Que conclure ?

4. Déterminer de deux manières différentes la densité volumique de charge. Conclure sur la distribution de charge.

Exercice 2 : Soit une sphère de rayon *R* et de masse volumique μ .

1. Calculez le champ de gravitation en tout point de l'espace.

Un cavité sphérique de rayon R_i complètement creusée dans la sphère.

2. Calculez le champ de gravitation en tout point de la cavité en exploitant le théorème de superposition. Quelle est sa particularité ?

1. Potentiel électrostatique d'une distribution neutre

1.1 Distributions neutres de dimensions finies

• Toute distribution de dimensions finies dont la charge totale n'est pas nulle crée à grande distance par rapport à son extension maximale un potentiel et un champ électrostatiques grossièrement semblables à ceux d'une charge ponctuelle avec des décroissances respectives 1, 1

en $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r^2}$.

• Or, beaucoup de systèmes de charges sont en réalité neutres, tels les atomes ou les molécules. On souhaite alors caractériser les grandeurs électrostatiques que ces ensembles chargés neutres engendrent loin d'eux.

1.2 Hypothèses

• Soit une distribution discrète de charge électrique $\{q_i\}_{i \in I}$ situées respectivement aux points $\{\vec{r}_i\}_{i \in I}$. Nous supposons que la distribution est neutre et qu'elle est d'extension finie. Il existe donc une boule de rayon *R* enfermant toutes les charges. Ainsi,



FIGURE 41 - Configuration dipolaire étudiée

• Soit une origine *O* prise à l'intérieur de la boule en question. Lorsque le point d'observation *M* du potentiel et du champ électrostatiques créés est à grande distance de toutes les charges, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$ tel que $\forall i \in I, ||\overrightarrow{r}_i|| \ll ||\overrightarrow{r}||$, nous sommes dans le cadre de l'**approximation dipolaire**.

1.3 Calcul du potentiel électrostatique

• Le potentiel électrostatique au point \overrightarrow{r} dû à la distribution de charge électrique est, selon (13.4) :

$$V(\vec{r}) = \sum_{i \in I} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|}$$

en prenant comme référence du potentiel, un potentiel nul très loin de la distribution.

• Selon l'approximation dipolaire, nous développons $\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^{-1} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}}{r^2}\right)$ où $r = \|\vec{r}\|$. Introduit dans l'expression du potentiel électrostatique, le développement conduit à :

$$V(\vec{r}) = \left(\sum_{i \in I} q_i\right) \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \left(\sum_{i \in I} q_i \vec{r}_i\right)$$

• La distribution étant neutre, le premier terme du second membre de l'égalité est nul.

1.4 Le moment dipolaire

• On appelle **moment dipolaire** de la distribution neutre le vecteur \overrightarrow{p} défini par :

$$\overrightarrow{p} = \sum_{i \in I} q_i \overrightarrow{r}_i \qquad (14-1)$$

• Soit les parties de *I* des indices des charges positives I^+ et négatives I^- et les sommes respectives q^+ et q^- de ces charges ; alors $I^+ \cup I^- = I$ et $q^+ = -q^-$.

Soit les barycentres \vec{r}^+ et \vec{r}^- des charges respectivement positives et négatives : $q^+\vec{r}^+ = \sum_{i \in I^+} q_i \vec{r}_i$ et $q^-\vec{r}^- = \sum_{i \in I^-} q_i \vec{r}_i$ (cf. fig. 41); alors : $\vec{p} = q^+(\vec{r}^+ - \vec{r}^-)$ (14-2)

• Le moment dipolaire d'une distribution neutre est indépendant de l'origine du repère choisie. \vec{p} est colinéaire et de même sens que le vecteur joignant le barycentre des charges négatives au barycentre des charges positives de la distribution.

• Lorsque la distribution ne compte que deux charges opposées, la définition (14-2) s'applique sans difficulté : q^+ est la valeur de la charge positive, \vec{r}^+ son vecteur position et \vec{r}^- celui de la charge négative.

• Le vecteur moment dipolaire a pour dimension L.I.T et pour unité le coulomb-mètre, de symbole C.m.

• La notion de moment dipolaire permet de prévoir, par exemple, la capacité plus ou moins marquée des molécules d'un solvant de faire passer en solution des ions ou des molécules elles-mêmes polaires en solution. Les charges positives ou négatives sont de l'ordre de 10^{-19} C et les distances interatomiques au sein d'une molécule de l'ordre de 0, 1 nm, le C.m s'avère une unité beaucoup trop grande. On lui préfère à cette échelle le debye, de symbole D, égal à

 $\frac{1}{3} \times 10^{-29}$ C.m.

• Le moment dipolaire de la molécule d'eau vaut 1,85 D; celui de l'ammoniac 1,47 D et celui de l'acide fluorhydrique HF, 1,91 D. Ces molécules sont dites **polaires**. Les molécules symétriques et les atomes ne possèdent pas de moment dipolaire permanent; ces édifices sont dits **apolaires**.

• Si le moment dipolaire électrique de la distribution de charge est nul, l'expression du potentiel électrostatique nécessite de pousser le développement limité à un ordre supérieur, ce qui fait apparaître les moments dits multipolaires de la distribution.

1.5 Dipôle permanent et dipôle induit

• Le moment dipolaire électrique des molécules polaires placées dans un champ électrique

extérieur varie peu. Elles subissent donc ses effets en se comportant essentiellement comme un dipôle permanent rigide.

• Les molécules apolaires placées dans un champ électrique extérieur acquièrent un moment dipolaire électrique, appelé **moment dipolaire induit**.

En effet, les noyaux de leurs atomes tendent à se déplacer dans le sens du champ tandis que leurs cortèges électroniques tendent à se déplacer dans le sens opposé. Ce processus est contrarié par les forces de liaison de nature électrostatiques entre les nuages électroniques et les noyaux.

Le moment dipolaire induit est alors en première approximation proportionnel au champ électrique extérieur qui l'engendre : $\vec{p} = k\vec{E}$. Il se rajoute au moment dipolaire permanent pour les molécules polaires.

• Les substances solides sont rarement dotées de moments dipolaires électriques permanents. Mais leur aptitude des substances transparentes à acquérir un moment dipolaire électrique induit, en se traduisant dans leur indice optique, est à l'origine de leur comportement optique.

1.6 Expressions du potentiel électrostatique

• Le potentiel électrostatique d'une distribution neutre de charge électrique de moment dipolaire \overrightarrow{p} , loin de cette dernière est donné par :

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$
(14-3)

en prenant comme convention un potentiel électrostatique nul loin de la distribution.

• Soit un repère de coordonnées sphériques, d'axe Oz colinéaire et de même sens que le moment dipolaire \vec{p} , de norme p; d'origine le milieu des barycentres des charges positives et négatives, le potentiel s'exprime dans ce système de coordonnées :

$$V(\vec{r}) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
(14-4)

où (r, θ, φ) sont les coordonnées du point \overrightarrow{r} .



FIGURE 42 - Configuration dipolaire

• Le potentiel électrostatique de la distribution décroît en $\frac{1}{r^2}$ loin de cette dernière. Il n'est plus isotrope mais possède une invariance par rotation d'angle quelconque autour de la direction du dipôle (ce que traduit l'indépendance de son expression par rapport à φ).

1.7 Équipotentielles du dipôle électrostatique

• Surface en tous points de laquelle le potentiel conserve la même valeur, celle du dipôle électrostatique de potentiel égal à V est la surface d'équation en coordonnées sphériques $r^2 = K \cos \theta$ où $K = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 V}$

228 Physique

• Les équipotentielles de potentiels positifs sont situées à droite du plan médiateur du segment d'extrémités les (barycentres des) charges positives et négatives du dipôle ; chacune contient la charge (le barycentre des charges) positive(s). De manière symétrique, les équipotentielles de potentiels négatifs sont à gauche du plan médiateur et chacune contient la charge négative. (cf. fig. 43).

• Les surfaces équipotentielles possèdent une symétrie de révolution autour de la direction du dipôle. Les surfaces correspondant à des valeurs opposées de potentiel électrostatique sont symétriques par rapport au plan médiateur du dipôle.

2. Champ électrostatique du dipôle

2.1 Définition à partir du potentiel

• La définition (13-6) du champ appliquée au potentiel électrostatique du dipôle conduit à l'expression intrinsèque de son champ électrostatique à grande distance du dipôle :

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \left(3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{r}^2 \vec{p} \right)$$
(14-5)

• L'expression correspondante dans le repère de coordonnées sphériques défini précédemment possède la forme suivante :

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{\mathbf{e}}_r + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{\mathbf{e}}_\theta$$
(14-6)

où (r, θ, φ) sont les coordonnées du point \overrightarrow{r} .

• On observe que le champ électrostatique n'a de composante que suivant \vec{e}_r et \vec{e}_{θ} : ceci provient de ce que la distribution, résumée à son caractère dipolaire dominant, est modélisée par son dipôle électrostatique. Tout plan contenant la direction de ce dipôle est plan de symétrie du dipôle et donc contient le champ électrostatique en chacun de ses points.

• Le champ électrostatique n'est plus isotrope : ce caractère se remarque dans la dépendance en θ de ses composantes. Le plan médiateur du doublet des charges opposées (plan correspondant à $\theta = \frac{\pi}{2}$) est un plan d'antisymétrie de la distribution. Le champ électrostatique est perpendiculaire à ce plan en chacun de ses points.

• La décroissance de la norme du champ électrostatique est en $\frac{1}{r^3}$ · Elle est plus rapide au fur et à mesure que l'on s'éloigne que si la distribution possédait une charge totale non nulle. Il existe donc pour toute distribution dipolaire une distance à partir de laquelle les interactions électrostatiques dont elle est la source sont toujours moindres que celles engendrées par une charge ponctuelle.

2.2 Ligne de champ du champ du dipôle électrostatique

• La définition des lignes de champ du champ électrostatique et la manière d'obtenir leurs équations (cf. fiche 13 §2) conduit aux équations suivantes : $\varphi = cte$ et $r = K \sin^2 \theta$.

• Les lignes de champ sont des courbes planes inscrites dans les plans désignés par l'angle polaire φ . Leur allure est donnée sur la figure 43, en concomitance avec les équipotentielles auxquelles elles sont en tout point orthogonales.



FIGURE 43 – Lignes de champ et équipotentielles du dipôle électrostatique

3. Action des champs électriques sur les dipôles

3.1 Force résultante

• Soit un dipôle électrique \vec{p} plongé dans un champ électrostatique extérieur $\vec{E}_e(\vec{r})$. Le dipôle est supposé représenté par la valeur de la charge positive q^+ est le vecteur joignant les barycentres respectifs P et N des charges positives et négatives.

• La résultante des forces auxquelles sont soumis les barycentres des charges positives et négatives de la part du champ électrique extérieur est : $\vec{\mathbf{f}}_e = \vec{\mathbf{f}}^+ + \vec{\mathbf{f}}^- = q^+ (\vec{\mathbf{E}}_e(P) - \vec{\mathbf{E}}_e(N)).$



FIGURE 44 – Actions sur un dipôle électrique

• La résultante des forces électrostatiques $\vec{\mathbf{f}}_e$ est nulle si le champ électrique est uniforme. En effet, les champs électriques en N et P sont alors égaux et les forces électrostatiques sur q^+ et q^- sont opposées.

• Lorsque le champ n'est pas homogène, les dimensions des dipôles considérés sont suffisamment petites pour que les champs aux points N et P ne soient pas trop différents l'un de l'autre. La résultante des forces est alors exprimée par un développement autour de la position moyenne du dipôle :

$$\overrightarrow{\mathbf{f}}_{e} = \left(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\mathbf{grad}}\right) \overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{r})$$
 (14-7)

où $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\mathbf{grad}}$ est l'opérateur $p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}$ qui, appliqué à chacune des composantes cartésiennes du champ fournit les composantes de la force résultante sur le dipôle.

• Si l'action du champ électrostatique sur le dipôle se réduisait à cette seule résultante, alors on pourrait affirmer que le dipôle se déplacerait vers les régions de champ intense si son moment dipolaire formait un angle aigu avec le champ électrostatique. Si cet angle était obtus, alors il se déplacerait vers les régions de champ peu intense.

3.2 Moment résultant

• Simultanément, les forces qui s'exercent sur les charges positive et négative du dipôle possèdent un moment résultant par rapport à un point donné de l'espace. Que le champ soit ou non uniforme, ces forces sont en première approximation opposées et constituent un couple dont le moment par rapport à n'importe quel point *A* de l'espace vaut :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{A}(\overrightarrow{p}/\mathcal{R}) = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{r})$$
(14-8)

• Ce moment tend toujours à aligner le dipôle sur le champ électrostatique, s'il a la liberté de se mouvoir. Ainsi, un dipôle placé dans un champ électrostatique quelconque est soumis à un couple qui aligne son moment dipolaire sur la direction et dans le sens du champ puis, si ce dernier n'est pas uniforme, à une résultante des forces qui le déplace vers les régions de champ intense.

• Le moment du couple s'annule si le dipôle électrique est colinéaire et de même sens que le champ électrostatique; si le champ est uniforme, la résultante des forces qui s'exerce sur lui est nulle : il est en position d'équilibre stable. Le second cas d'annulation est celui où le dipôle électrique est colinéaire mais de sens contraire au champ électrique; si le champ est uniforme, cette position d'équilibre est instable et le dipôle tend toujours à se retourner pour s'aligner sur le champ électrostatique.

3.3 Énergie potentielle du dipôle électrique

• Soit le potentiel électrostatique $V_e(\vec{r})$ dont dérive le champ électrostatique extérieur dans lequel est plongé le dipôle électrique. L'énergie potentielle du dipôle dans le champ est égale à la somme des énergies potentielles de chacune des charges qui contribuent à la distribution dipolaire :

$$\mathcal{E}_{pe} = \sum_{i \in I} q_i V_e(\vec{r_i}) = \sum_{i \in I} q_i \left(V_e(\vec{r_0}) + (\vec{r_i} - \vec{r_0}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{grad}} V_e(\vec{r_0}) \right)$$

en supposant que les charges sont peu éloignées d'une origine \vec{r}_0 .

• Il en résulte l'expression suivante de l'énergie potentielle du dipôle dans un champ électrostatique extérieur :

$$\mathcal{E}_{pe} = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\mathbf{E}}_{e}(\overrightarrow{r}) \qquad (14-9)$$

• L'énergie potentielle du dipôle dans le champ est minimale lorsqu'il est aligné sur ce dernier et, au contraire, maximale lorsqu'il lui est antiparallèle. Nous retrouvons la stabilité de la position parallèle et l'instabilité de la position antiparallèle.

3.4 Interactions dipolaires et forces de Van der Waals

• Les **forces de Van der Waals** sont les forces d'interactions d'origine essentiellement dipolaire qui existent entre les molécules. La dépendance de ces forces en la distance entre les molécules est conditionnée par la nature des dipôles mis en jeu (permanents ou induits) et la liberté de se mouvoir des molécules.

• Elles assurent la cohésion des solides moléculaires mais existent aussi dans les liquides et les gaz. Si les interactions entre dipôles pris deux à deux possèdent certaines caractéristiques, lorsqu'un ensemble de dipôles interagissent, les caractères des forces moyennes attractives qui existent entre eux sont marqués par les aspects statistiques d'orientation relative et de distance moyenne entre les entités porteuses des dipôles.

• Entre dipôles permanents, l'énergie d'interaction $-\vec{p} \cdot \vec{E}$ décroit comme $\frac{1}{d^3}$ et conduit à une force en $\frac{1}{d^4}$ si d est la distance entre les deux dipôles. Cependant, s'ils sont libres de se mouvoir, l'orientation d'un dipôle par rapport à l'autre évolue et, en moyenne statistique, l'effet résultant est celui d'une force entre les dipôles qui décroissent beaucoup plus brutalement, comme $\frac{1}{d^7}$ · Ce sont les **interactions de Keesom**.

• Entre un dipôle permanent et un dipôle induit, l'énergie d'interaction décroît comme $\frac{1}{d^6}$ et la force qui en résulte décroît aussi comme $\frac{1}{d^7}$ · L'induction électrique par le dipôle permanent provoque spontanément l'alignement du dipôle induit sur le champ électrique créé et fait largement disparaître les effets statistiques d'orientation observés entre dipôles permanents. Ce sont les **interactions de Debye**.

• Enfin, il existe un troisième type d'interactions, celles de **London**, entre dipôles induits. De même décroissance que les précédentes, elles trouvent leur origine dans le fait qu'une molécule apolaire en moyenne ne l'est pas en permanence. Elle peut acquérir aléatoirement un moment dipolaire qui crée un champ électrostatique; ce dernier induit un moment dipolaire sur une autre molécule. La réciprocité du phénomène fait de la sorte apparaître des interactions mutuelles attractives.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Un dipôle électrostatique est constitué des charges q et -q placés respectivement aux points de coordonnées $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ et $\left(-\frac{l}{2}, 0\right)$ dans le plan de repère $(O, \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y)$.

1. Calculez le champ électrostatique créé par les deux charges aux points de coordonnées (10*l*, 0), (0, 10*l*) et $\left(\frac{10l}{\sqrt{2}}, \frac{10l}{\sqrt{2}}\right)$.

2. Comparez en chacun des trois points le champ réel créé par le dipôle et celui que l'on calcule en employant l'approximation dipolaire.

Concluez sur la pertinence de l'usage de l'approximation dipolaire à cette distance, si l'on se fixe un écart relatif en norme inférieur à 10%.

15 Propriétés du champ magnétostatique

1. Invariances des sources du champ magnétique

1.1 Introduction

• Les aimants permanents et les courants électriques sont sources de champs magnétiques.

• Les courants électriques sont décrits le plus souvent soit par des densités volumiques de

courant électrique $\vec{j}(\vec{r},t)$, soit par des courants filiformes, c'est-à-dire des distributions volumiques de courant dont deux des trois dimensions caractéristiques sont toujours très petites devant la troisième de sorte que la distribution puisse être sans difficulté assimilée à un écoulement de charge le long d'une courbe dans l'espace au sens géométrique du terme.



FIGURE 45 - Modélisation d'une distribution quasi unidimensionnelle

• Des caractéristiques particulières du champ magnétostatique d'une distribution de courants électriques se déduisent des invariances de cette dernière avant même d'avoir calculé explicitement le champ.

Les raisonnements ci-dessous sont valables pour toutes les modélisations des distributions de courants électriques. Par simplicité, nous nous appuierons sur des distributions décrites par des densités volumiques de courant électrique.

1.2 Éléments d'invariance des distributions de courants électriques

• Un élément d'invariance d'une distribution de courants électriques décrite par \mathbf{j} est une isométrie affine \mathcal{T} , d'isométrie vectorielle associée T, telle que pour tout point M de l'espace, la densité volumique de courant en l'image $\mathcal{T}(M)$ du point M par \mathcal{T} , soit égale à l'image par l'isométrie vectorielle associée T de la densité volumique de courant en M:

$$T\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}(M)\right) = \overrightarrow{\mathbf{j}}(\mathcal{T}(M))$$
 (15-1)

[®] Les invariances des distributions de courants électriques s'expriment différemment et plus délicatement que celle de charge électrique.

1.3 Éléments d'invariance caractéristiques

• Une distribution de courants électriques peut être invariante par translation de vecteur \vec{a} . Elle est alors obligatoirement invariante par toutes les translations de vecteur $p \vec{a}$ où p est un entier quelconque.

Si l'on choisit une base orthonormée d'un repère cartésien de projection dont un des vecteurs est colinéaire à \vec{a} , par exemple \vec{e}_x , alors la densité volumique de courant, vecteur fonction des coordonnées (x, y, z) d'un point M de l'espace est périodique pour la variable x, de période $a = \|\vec{a}\|$.

$$\overrightarrow{\mathbf{j}}(x+a,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{j}}(x,y,z)$$

L'application linéaire associée T est l'identité de \mathbb{R}^3 .

• Une distribution de courants peut être invariante par translation selon une direction \vec{d} . (cf. fig. 46a). Ceci signifie que la distribution est invariante *par toute translation de vecteur colinéaire* à \vec{d} .

Si l'on choisit une base orthonormée du repère cartésien de projection dont un des vecteurs est colinéaire à \vec{d} , par exemple \vec{e}_x , alors la densité volumique de courants, fonction des coordonnées (x, y, z) d'un point *M* de l'espace est indépendante de *x* :

$$\overrightarrow{\mathbf{j}}(x, y, z) = \overrightarrow{\mathbf{j}}(y, z)$$

• Une distribution peut être invariante par rotation d'angle $\theta_0 = \frac{2\pi}{n}$, où *n* est un naturel non

nul, autour d'une droite $\mathcal{D} = (I, \vec{d})$ donnée. Notons \mathcal{R}_{θ_0} cette rotation affine et \mathcal{R}_{θ_0} la rotation vectorielle associée, d'axe la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(\vec{d})$, d'angle θ_0 . Elle est alors obligatoirement invariante par toute rotation d'angle $p \theta_0$ autour de \mathcal{D} .

Si l'on choisit une base orthonormée directe d'un repère cylindrique de projection dont le vecteur \overrightarrow{e}_z est colinéaire à \overrightarrow{d} , alors la densité volumique de courant, vecteur fonction des coordonnées (r, θ, z) d'un point M de l'espace est telle que ses composantes dans la base du repère cylindrique sont périodiques pour la variable θ , de période θ_0 .

$$j_{\alpha}(r, \theta + \theta_0, z) = j_{\alpha}(r, \theta, z)$$

où l'indice α est successivement r, θ ou z.

La densité volumique de courant en un point *P*, image par la rotation affine d'angle θ_0 d'axe \overrightarrow{e}_z du point *M*, est égale à l'image par la rotation vectorielle associée de la densité volumique de courant au point *M* :

$$\overrightarrow{\mathbf{j}}(P) = \overrightarrow{\mathbf{j}}(\mathcal{R}_{\theta_0}(M)) = R_{\theta_0}\left(\overrightarrow{\mathbf{j}}(M)\right)$$

Remarque : Ce sont bien les seules composantes qui sont périodiques et non le vecteur densité volumique de courant dont la direction change par effet de la rotation vectorielle associée qui agit sur lui.

• Une distribution peut être invariante par *par toute rotation d'angle* θ_0 *quelconque* autour de la droite \mathcal{D} . (cf. fig. 46b).

Si l'on choisit une base orthonormée d'un repère cylindrique de projection dont le vecteur

 \vec{e}_z est colinéaire à \vec{d} , alors les composantes de la densité volumique de courant dans cette base de projection, vecteur fonction des coordonnées (r, θ, z) d'un point *M* de l'espace sont indépendantes de la variable θ :

$$j_{\alpha}(r,\theta,z) = j_{\alpha}(r,z)$$

234 Physique

où l'indice α est successivement r, θ ou z.

On dit que « la distribution est invariante par rotation autour de \mathcal{D} » ou qu'« elle présente une symétrie de révolution (ou cylindrique) autour de \mathcal{D} . »

• Une distribution peut être invariante par *par toute rotation d'angle* θ_0 *quelconque* autour d'une droite quelconque passant par O.

Si l'on choisit une base orthonormée d'un repère sphérique de projection alors la seule composante non nulle de la densité volumique de courant dans cette base de projection, vecteur fonction des coordonnées (r, θ, φ) d'un point *M* de l'espace est celle sur \overrightarrow{e}_r et elle est indépendante des variables θ et φ :

$$j_r(r, \theta, z) = j_r(r)$$
 $j_\theta = j_\varphi = 0$

La distribution présente une symétrie sphérique autour de O.

• Une distribution de courants peut être invariante par symétrie par rapport à un plan affine Π . (cf. fig. 46c).

Si l'on choisit une base orthonormée d'un repère cartésien de projection dont un vecteur est orthogonal au plan vectoriel directeur du plan Π , par exemple \vec{e}_x et l'origine du repère sur le plan affine Π , alors la composante sur \vec{e}_x de la densité volumique de courant, fonction des coordonnées (x, y, z) d'un point M de l'espace est impaire par rapport à la variable x :

$$j_x(-x, y, z) = -j_x(x, y, z)$$

Les deux autres composantes de la densité volumique de courant sur \vec{e}_x et \vec{e}_y sont des fonctions paires en x.

L'application linéaire T associée est la symétrie vectorielle par rapport au plan vectoriel directeur du plan de symétrie.

• Cas particulier : une distribution peut être antisymétrique par rapport à un plan $\overline{\Pi}$. (cf. fig. 46d).

Si l'on choisit une base orthonormée d'un repère cartésien de projection dont un vecteur est orthogonal au plan vectoriel directeur du plan $\overline{\Pi}$, par exemple \vec{e}_x et l'origine du repère sur le plan affine $\overline{\Pi}$, alors la composante sur le vecteur \vec{e}_x de la densité volumique de courants, fonction des coordonnées (x, y, z) d'un point M de l'espace est paire par rapport à la variable x:

$$j_x(-x, y, z) = j_x(x, y, z)$$

Les deux autres composante de la densité volumique de courant sur \vec{e}_x et \vec{e}_y sont des fonctions impaires de x.

L'application linéaire T associée est l'opposée de la symétrie vectorielle par rapport au plan vectoriel directeur du plan d'antisymétrie.

1.4 Conséquences sur le champ magnétostatique

• Les symétries associées aux invariances des distributions de courant électrique sont déterminées par le fait qu'un élément de courant au point P, $\vec{j}(P)d\tau$, crée au point M un champ magnétostatique élémentaire de la forme $f(PM) \vec{j}(P) \wedge \overrightarrow{PM}$. f(PM) étant une fonction de la distance entre la source et le point d'observation.

• Les plans de symétrie des distributions de courants électriques sont des plans d'antisymétrie du champ magnétostatique qu'elles créent. Le champ magnétostatique en un point image du point P par la symétrie affine par rapport à Π laissant invariante la distribution de courants est égal à l'opposé du symétrique par rapport à la direction vectorielle du plan Π du champ magnétostatique en *P*. (cf. fig. 46c).

Si le point *P* appartient à Π , alors le champ magnétostatique est perpendiculaire au plan vectoriel directeur de Π .

Posons le vecteur de base \vec{e}_x d'un repère cartésien perpendiculaire à la direction vectorielle de Π ; soit x = 0 l'équation du plan de symétrie de la distribution. Les composantes du champ magnétostatique sur \vec{e}_y et \vec{e}_z , B_y et B_z , sont impaires en x; la composante du champ sur \vec{e}_x , B_x , est paire en x.



FIGURE 46 – Exemples de distributions invariantes : (a) par translation; (b) à symétrie de révolution; (c) présentant un plan de symétrie; (d) présentant un plan d'antisymétrie.

• Les plans d'antisymétrie des courants électriques sont des plans de symétrie du champ magnétostatique. Le champ magnétostatique en un point image du point P par la symétrie affine par rapport au plan $\overline{\Pi}$, plan d'antisymétrie de la distribution de courants, est égal au symétrique par rapport à la direction vectorielle de $\overline{\Pi}$ du champ magnétostatique en P. (cf. fig. 46d).

Si le point *P* appartient à $\overline{\Pi}$, alors le champ magnétostatique appartient à la direction vectorielle de $\overline{\Pi}$.

Posons le vecteur de base \vec{e}_x d'un repère de coordonnées cartésiennes perpendiculaire à la direction vectorielle de $\overline{\Pi}$; soit x = 0 l'équation du plan d'antisymétrie de la distribution. La composante du champ magnétostatique sur \vec{e}_x est impaire en x; celles sur \vec{e}_y et \vec{e}_z sont paires en x.

1.5 Recherche des invariances

• Nous recherchons les transformations laissant invariantes une distribution donnée de courants électriques afin de calculer le champ magnétostatique qu'elle crée dans l'espace, ce qui est le but ultimement visé. Pour ce faire, il n'est pas nécessaire d'être exhaustif dans leur recensement : certaines invariances apportent des renseignements plus précieux que d'autres.

• Méthode : choisir un point *P* quelconque de l'espace et rechercher si un plan de symétrie de la distribution passerait par ce point. Si tel est le cas, le champ magnétostatique est per-

236 Physique

pendiculaire au plan vectoriel directeur de ce plan affine de symétrie : ceci fixe la direction du champ magnétostatique en ce point *P*.

Rechercher les invariances par translations et/ou rotation : la composante restante du champ magnétostatique ne dépend pas des coordonnées le long des directions d'invariance par translation et des angles de rotation. On obtient ainsi très rapidement les composantes non nulles du champ magnétostatique dans un repère de projection donné et leur dépendance en ses coordonnées.

Remarque : Si la direction en un point quelconque du champ magnétostatique est parfaitement déterminée, elle entraîne de fait la dépendance en les coordonnées du repère choisi.

• Lorsque l'on peut établir que le champ magnétostatique en un point P donné est colinéaire à un des vecteurs de base du repère et que sa composante sur ce vecteur ne dépend que d'une seule variable spatiale, on est dans une situation de haute symétrie pour laquelle, en général, on pourra aisément le calculer.

2. Lignes de champ

2.1 Définition d'une ligne de champ magnétostatique

• Soit une distribution de courants électriques, indépendante du temps dans le référentiel $\mathcal R$

et y produisant en tout point un champ magnétostatique $\vec{B}(\vec{r})$; la ligne de champ du champ magnétostatique - expression souvent raccourcie en « ligne du champ magnétostatique »passant par un point M_0 est la courbe de l'espace passant par M_0 en tout point de laquelle le champ magnétostatique $\vec{B}(\vec{r})$ est continûment tangent, courbe orientée dans le sens du

le champ magnétostatique $\mathbf{B}(\vec{r})$ est continûment tangent, courbe orientée dans le sens du champ magnétostatique. (cf. fig. 47a).



FIGURE 47 - Lignes et tube de champ magnétostatique

• L'ensemble des lignes de champ constituent le **spectre** du champ magnétostatique d'une distribution de courants électriques.

• Un **tube de champ** du champ magnétostatique est l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé donné. (cf. fig.47b).

2.2 Propriétés des lignes de champ magnétostatique

• L'unicité du champ magnétostatique en un point donné de l'espace fait que par ce point, passe une et une seule ligne de champ magnétostatique.

• En général, les lignes de champ sont des courbes fermées qui s'enroulent autour des courants.

• Sur un spectre de champ magnétostatique où un nombre fini de lignes de champ sont représentées, les zones de champ magnétostatique intense sont caractérisées par une grande

densité de lignes de champ ; celle de champ magnétostatique faible par une moindre densité de ces lignes.

• Le spectre d'une distribution de courants électriques doit être compatible avec les invariances de la distribution. Exemple : soit une distribution de courants électriques antisymétrique par rapport à un plan; soient les lignes de champ magnétostatique passant par deux points symétriques l'un de l'autre par rapport à ce plan; alors ces deux lignes de champ magnétostatique et leurs orientations sont elles-mêmes symétriques l'une de l'autre par rapport à ce plan.

• Réciproquement, les propriétés de symétrie et d'invariances constatées sur le spectre d'une distribution de courants en laisse prévoir les symétries et invariances en liaison.

Attention : La représentation dans un plan d'une partie du spectre de champ magnétostatique n'est aisément interprétée que si ce plan est plan d'antisymétrie de la distribution de courants électriques.

3. Propriétés du champ magnétostatique

3.1 Équations de Maxwell en régime indépendant du temps

• Dans le vide où règne une distribution volumique de courants électriques caractérisée par la densité volumique de courant indépendante du temps $\vec{j}(\vec{r})$, le champ magnétostatique dont la distribution est la source doit satisfaire aux deux équations locales suivantes :

div
$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) = 0$$
 et $\vec{\mathbf{rot}} \vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{\mathbf{j}}(\vec{r})$ (15-2)

où $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ est la perméabilité magnétique du vide, de dimension M.L.T⁻².I⁻².

• Les équations locales du champ magnétostatique sont symétriques vis-à-vis des sources par rapport à celles du champ électrostatique.

La source du champ électrostatique était la densité volumique de charge, une fonction scalaire des coordonnées spatiales ; elle ne pouvait donc apparaître de la manière la plus simple que dans la divergence du champ électrostatique dont le rotationnel était nul.

La source du champ magnétostatique est la densité volumique de courant, fonction vectorielle des coordonnées spatiales ; elle ne pouvait donc apparaître, de la manière la plus simple, que dans le rotationnel du champ magnétostatique, sa divergence étant nulle.

• Les équations qui régissent le champ magnétostatique dans le vide sont linéaires. Le principe de superposition peut donc s'appliquer et il peut être légitime de décomposer une distribution de courant complexe en des distributions simples aux propriétés des champs connues et d'additionner en chaque point de l'espace les champs magnétostatiques créés par chacune d'elles pour y obtenir le champ magnétostatique résultant.

3.2 Flux du champ magnétostatique

• L'équation en divergence correspond à une relation intégrale de flux du champ magnétosta-

tique. Soit une distribution de courants électriques créant le champ magnétostatique $\mathbf{B}(\vec{r})$ en tout point de l'espace ; soit une surface fermée quelconque Σ délimitant le volume \mathcal{V} ; d'après la première équation (15-2) et le théorème d'Ostrogradsky, le flux à travers la surface fermée est nul :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{B}} \, \mathrm{d} \, \tau = 0 = \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathbf{B}}(\overrightarrow{r}) \cdot \mathrm{d} \overrightarrow{S}$$

• Le flux du champ magnétostatique à travers une surface ouverte S s'appuyant sur un contour fermé Γ est indépendant de la surface S mais ne dépend que du contour choisi. Deux surfaces s'appuyant sur le contour constituent une surface fermée à travers laquelle le flux du champ

238 Physique

magnétostatique est nul. En changeant l'orientation de la normale sur une des surfaces, on retrouve la propriété énoncée.

• La nullité de la divergence peut être interprétée comme traduisant l'inexistence de charges magnétiques isolés qui seraient les équivalents magnétiques des charges positives et négatives pour l'électrostatique. Les distributions de courants, quelle que soit l'échelle à laquelle on les considère, sont dipolaires.

• Elle permet de prouver l'affirmation qu'une forte densité de lignes de champ est associée à un champ magnétique intense. Soit un contour Γ_1 pris dans une région de forte densité de lignes de champ ; soit le tube de champ magnétostatique s'appuyant sur Γ_1 et un autre contour Γ_2 s'appuyant sur le même tube de champ mais dans une région où les lignes de champs sont plus espacées : construisons une surface fermée à partir des surfaces S_1 et S_2 minimales s'appuyant respectivement sur Γ_1 et Γ_2 et de la portion de tube de champ comprise entre les deux contours, S_t .

Le flux du champ magnétostatique à travers cette surface fermée est nul : il est la somme des flux à travers S_1 , S_2 et S_t , notés Φ_1 , Φ_2 et Φ_t . $\Phi_t = 0$ car le champ magnétostatique est en tout point *P* de S_t orthogonal à la normale en *P* à S_t . Donc $\Phi_1 = -\Phi_2$.

Comme les lignes de champ sont plus espacées au niveau du contour Γ_2 , sa longueur est plus grande que celle de Γ_1 et la surface qui s'appuie sur lui a une aire A_2 supérieure à celle, A_1 , de la surface s'appuyant sur Γ_1 .

En définissant les normes des champs magnétostatiques moyens sur les surfaces S_1 et S_2 par les relations $\Phi_1 = A_1 \bar{B}_1$ et $\Phi_2 = -A_2 \bar{B}_2$, il découle que le champ moyen au niveau du second contour possède une norme inférieure à celle du champ moyen au niveau du premier : $\bar{B}_1 > \bar{B}_2$.

3.3 Circulation du champ magnétostatique : théorème d'Ampère

• L'équation en rotationnel conduit, d'après le théorème de Stokes, à une relation intégrale portant sur la circulation du champ magnétostatique. La circulation du champ magnétique ne conduit à un résultat remarquable, par ailleurs exploitable pour le calcul des champs magnétostatiques de certaines distributions, que sur un contour fermé.

• Soit un contour fermé orienté Γ sur lequel s'appuie une surface ouverte S dont la normale en tout point est orientée conformément à l'orientation du contour selon la règle du tire-bouchon de Maxwell. Le calcul de la circulation du champ magnétostatique le long du contour orienté donne, d'après le théorème de Stokes et la seconde équation (15-2) :

$$\iint_{\Gamma} \overrightarrow{\mathbf{B}}(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{r} = \iiint_{S} \overrightarrow{\mathbf{rot}} \overrightarrow{\mathbf{B}}(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{S} = \mu_0 \iiint_{S} \overrightarrow{\mathbf{j}}(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{S}$$

L'intégrale du flux de la densité volumique de courant à travers la surface s'appuyant sur le contour orienté représente l'intensité du courant électrique à travers ladite surface. On l'appelle le **courant enlacé** par le contour, I_{enl} . Ce résultat constitue le :

• Théorème d'Ampère

La circulation du champ magnétostatique le long d'un contour fermé orienté est égale à l'intensité du courant électrique enlacé par le contour multiplié par la perméabilité magnétique du vide.

$$\int_{\Gamma} \vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enl} = \mu_0 \iint_{S} \vec{\mathbf{j}}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$
(15-3)

Remarque : La convention d'orientation avec laquelle les courants enlacés sont comptabilisés est déterminée par l'orientation du contour le long duquel on calcule la circulation du champ

magnétostatique : l'intensité est comptée positive dans le sens de la normale à la surface.



FIGURE 48 – Orientations du contour d'Ampère, de la surface et des courants électriques

4. Calcul de champs magnétostatiques

4.1 Champ magnétostatique du fil rectiligne infini

• Soit une distribution de courants électriques donnée par sa densité volumique de courants dans un repère de coordonnées cylindriques $(O, \overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_{\theta}, \overrightarrow{e}_{\tau})$:

$$\vec{\mathbf{j}}(\vec{r}) = j_z(r)\vec{\mathbf{e}}_z \quad \text{où} \quad j_z(r) = \begin{cases} j_0 & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } R < r \end{cases}$$

L'intensité totale du courant électrique qui traverse le fil est $I = \pi R^2 i_0$.

• Indépendante de z, la distribution est invariante par translation le long de l'axe (Oz); indépendante de θ , elle l'est par toute rotation d'axe (O_z) et présente une symétrie de révolution autour de cet axe. (cf. fig. 49).

• Soit un point M quelconque en lequel on souhaite calculer le champ magnétostatique ; le plan contenant (Oz) passant par M, Π , est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc un plan d'antisymétrie du champ magnétique qui lui est donc perpendiculaire en M. La perpendiculaire à Π est donnée par \vec{e}_{θ} . La composante du champ B_{θ} est de plus indépendante des coordonnées θ et z du fait de l'invariance par translation et de la symétrie de révolution. Ainsi, $\overrightarrow{\mathbf{B}}(\overrightarrow{r}) = B_{\theta}(r)\overrightarrow{\mathbf{e}}_{\theta}$.



FIGURE 49 - Fil rectiligne infini

• Pour appliquer le théorème d'Ampère afin d'en déduire $B_{\theta}(r)$, il faut choisir un contour fermé, souvent désigné contour d'Ampère, satisfaisant aux trois exigences suivantes. $\vec{B}(\vec{r})$ doit être tangent ou orthogonal au contour en chacun de ses points. Le produit scalaire de l'intégrale de circulation $\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ doit être tel qu'il n'y ait pas réellement d'intégrale à calculer et que $B_{\theta}(r)$ puisse être sorti de l'intégrale. Il doit enlacer une partie des courants de la distribution. Un cercle de rayon r perpendiculaire à l'axe (Oz) dont le centre est sur l'axe satisfait à ces critères.



FIGURE 50 - Champ magnétostatique du fil infini

• Ainsi, la circulation du champ magnétostatique le long du contour d'Ampère est $C_{\Gamma} = 2\pi r B_{\theta}(r)$. La surface qui s'appuie sur le contour est traversée par la distribution des courants dont le flux à travers elle vaut : $j_0 \pi r^2$ si $r \leq R$ et $j_0 \pi R^2$ si r > R. D'où le champ magnétostatique :

$$B_{\theta}(r) = \begin{cases} \mu_0 \frac{j_0 r}{2} & \text{si } r \leq R \\ \mu_0 \frac{j_0 R^2}{2r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

• Lorsque le rayon R de la distribution tend vers 0 tout en maintenant un flux constant de la densité de courant électrique à travers une section du câble, la situation devient celle du fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité $I = \pi R^2 j_0$. Le champ magnétostatique créé par le fil vaut celui à l'extérieur du câble, $\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_{\theta}$, pour tout r > 0.

4.2 Champ magnétostatique du solénoïde infini

• Soit une distribution de courants électriques solénoïdale donnée par sa densité surfacique de courants dans un repère de coordonnées cylindriques $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_{\theta}, \vec{e}_z)$:

$$\overrightarrow{\mathbf{j}}_{s}(\overrightarrow{r}) = j_{s\theta}(r)\overrightarrow{\mathbf{e}}_{\theta} \quad \text{où} \quad j_{s\theta}(r) = \begin{cases} nI & si \ r = R \\ 0 & si \ r \neq R \end{cases}$$

où la distribution est créée par un fil de section supposée négligeable entouré en spires jointives sur un cylindre de rayon R, en plans perpendiculaires à l'axe (Oz) du solénoïde, avec un nombre de spires par unité de longueur du solénoïde égal à n.



FIGURE 51 - Solénoïde infini et ses contours d'Ampère

• Indépendante de z, la distribution est invariante par translation le long de l'axe (Oz); elle est invariante par toute rotation d'axe (Oz) et présente une symétrie de révolution autour de cet axe. (cf. fig. 51).

• Soit un point M quelconque en lequel on souhaite calculer le champ magnétostatique ; le

plan perpendiculaire à (Oz) passant par M, Π , est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc un plan d'antisymétrie du champ magnétique qui lui est ainsi perpendiculaire en tout point du plan. La perpendiculaire à Π est dirigée par \vec{e}_z . La composante du champ B_z est de plus indépendante des coordonnées θ et z du fait de l'invariance par translation et de la symétrie de révolution. Ainsi, $\vec{B}(\vec{r}) = B_z(r)\vec{e}_z$.

• Pour espérer appliquer le théorème d'Ampère afin d'en déduire $B_z(r)$, les contours d'Ampère adaptés sont des rectangles dont les côtés sont parallèles ou perpendiculaires à (Oz). (*cf.* fig. 51).

• En désignant par r_m les distances des côtés de ces contours parallèles à et les plus proches de l'axe du solénoïde, et r_M les distances analogues des côtés les plus éloignés, la circulation du champ magnétostatique le long des contours d'Ampère s'expriment : $(B_z(r_m) - B_z(r_M)).l_i$, où l_i est la longueur des côtés parallèles à l'axe du contour *i*.

Les contours Γ_1 et Γ_3 n'enlacent aucun courant donc, selon le théorème d'Ampère, on en déduit que $B_z(r_m) = B_z(r_M)$ pour les contours de ces deux types. On en conclut que le champ magnétostatique est constant à l'extérieur du solénoïde ainsi qu'à l'intérieur.

Le contour Γ_3 enlace la nappe de courant du solénoïde : la normale à la surface s'appuyant sur ce contour est de même sens que le vecteur densité surfacique de courant, donc l'intensité du courant électrique enlacé est nIl_3 . Il en résulte que $B_z(r_m) - B_z(r_M) = \mu_0 nI$.

Attention : L'application du théorème d'Ampère ne permet pas de déterminer complètement le champ magnétostatique du solénoïde infini. La situation est analogue à celle du condensateur plan en électrostatique avec le théorème de Gauss.



FIGURE 52 - Champ magnétostatique du solénoïde infini

• On admet que le champ magnétostatique à l'intérieur du solénoïde vaut $\mu_0 nI$. Il en résulte le champ magnétostatique du solénoïde infini :

$$B_z(r) = \begin{cases} \mu_0 nI & \text{si } r < R\\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

4.3 Ordre de grandeur des champs magnétostatiques

• Le champ magnétique créé à 10 cm d'un fil suffisamment long pour être considéré comme infini, parcouru par un courant électrique d'intensité 10 A est de l'ordre de 2×10^{-5} T. Par comparaison, l'intensité du champ magnétique terrestre est de l'ordre de $4, 5 \times 10^{-5}$ T.

• Dans le vide, les champs créés par des courants électriques sont de fait d'intensités limitées. Un fil de cuivre formant un solénoïde peut accepter une densité volumique de courant électrique de l'ordre de 5 A.mm⁻² avant que l'échauffement par effet Joule devienne rédhibitoire. Il correspond à cette contrainte un enroulement de 850 spires par mètre par couche de spires, soit un champ magnétique de l'ordre de 5, 3 mT par couche de spires. Dix couches superposées conduisent à un champ de l'ordre de 53 mT, mille fois plus intense que le champ magnétique terrestre.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Soit la distribution de courants électriques indépendante de z suivante :

Un cylindre conducteur homogène rectiligne indéfini de rayon *a*, l'âme, d'axe z'z est traversé par un courant continu d'intensité *I* qui se répartit uniformément à travers toute la section du conducteur qui lui est offerte. On note $\overrightarrow{i}(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{ie}_z$ sa densité volumique de courant



Un conducteur creux coaxial au précédent l'entoure sur toute sa longueur. Son rayon intérieur est *b* et son rayon extérieur est *c*. Il est parcouru par un courant d'intensité -I qui se répartit uniformément sur toute sa section. Sa densité volumique de courant est $\vec{j}(\vec{r}) = -j'\vec{e}_z$.

1. Établissez la relation entre j et j'.

2. Quels sont les éléments d'invariance de la distribution de courants. Déduisez-en la forme du champ magnétostatique créé par le câble.

3. Calculez le champ magnétostatique de cette distribution de courants en tous points de l'espace.

Exercice 2: Une couche plane illimitée d'épaisseur *e* est parcourue par une densité volumique de courants $\vec{j} = \vec{je}_x$, \vec{e}_x étant l'un des deux vecteurs directeurs du plan de la couche plane en question. L'origine du repère de projection est placée au milieu de l'épaisseur de la couche.

1. Quels sont les éléments d'invariance de la distribution de courants. Déduisez-en la forme du champ magnétostatique créé par la couche.

2. Calculez le champ magnétostatique de cette distribution de courants en tous points de l'espace.

1. Moment magnétique

1.1 Introduction

Alors que le caractère dipolaire d'une distribution de charge électrique est contingent, conditionné par sa neutralité électrique, les distributions de courants électriques sont intrinsèquement dipolaires. Ce caractère premier, conséquence de l'inexistence avérée de charges magnétiques isolées, apparaît lorsque l'on s'intéresse au champ magnétostatique qu'elles créent à grande distance d'elles.

1.2 Moment magnétique d'une distribution de courants électriques

• La grandeur qui caractérise le caractère dipolaire d'une distribution de dimension finie de courants électriques est son **moment** (dipolaire) magnétique, notée \vec{m} .

• Le moment dipolaire magnétique d'un circuit électrique plan formant une boucle simple d'aire S, de normale au plan qui le contient \vec{n} et parcouru par un courant électrique d'intensité i est égal à (cf **Toute la MPSI en fiches**, relation (**22-1**)) :

$$\overrightarrow{m} = i S \overrightarrow{n}$$
 (16-1)

Remarque : Cette notion s'étend par approximation aux bobines plates dont les N spires de même aire S sont toutes parcourues dans le même sens par le même courant électrique d'intensité $i : \vec{m} = N i S \vec{n}$. Mais aussi, et avec la même expression, au solénoïde à N spires.

• Lorsque la distribution de courants électriques est volumique, caractérisée par une densité volumique de courant électrique $\vec{j}(\vec{r})$, on définit le moment magnétique comme :

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint \vec{r} \wedge \vec{j}(\vec{r}) \,\mathrm{d}\tau \qquad (16-2)$$

Remarque : (16-2) redonne exactement (16-1) pour une distribution filiforme de courant. Il s'agit bien d'une seule et même définition.

• La définition générale (16-2) est indépendante de l'origine choisie pour repérer les points de la distribution.

• La dimension du moment magnétique est $I.L^2$. D'après l'expression de la force de Laplace, on remarque qu'il a la même dimension qu'une énergie rapportée à un champ magnétostatique. Il en résulte deux unités parfaitement identiques dans les faits : l'ampère-mètre carré, de symbole $A.m^2$, utilisée surtout pour caractériser les circuits électriques et le joule par tesla, de symbole $J.T^{-1}$ utilisé à l'échelle atomique pour évaluer les moments magnétiques atomiques.

1.3 Moment magnétique d'un morceau de matière aimantée

• La matière aimantée crée, elle aussi, des champs magnétiques dont il est intéressant d'étudier le comportement loin de leur source. La même notion de moment dipolaire magnétique at-tribuée à un barreau aimanté permet de caractériser le champ magnétique éloigné.

• L'attribution d'un moment dipolaire magnétique à un barreau aimanté permet d'imaginer la matière aimantée comme une structure constituée de boucles microscopiques de courants dont les effets s'ajoutent pour créer un champ magnétique perceptible à distance. Ces boucles sont les courants ampériens qui ont servi de premier modèle des milieux magnétiques.

1.4 Ordres de grandeur des moments magnétiques

• L'ordre de grandeur du moment magnétique d'un circuit électrique construit sur la table du laboratoire et faisant une boucle de diamètre environ 50 cm parcourue par un courant d'intensité 2 A est 0, 5 A.m² environ. Il est cent fois plus faible environ pour le même circuit parcouru par un courant variable dans la limite de l'approximation des régimes quasi-stationnaire où cette notion conserve sa pertinence.

• Comme il y a courant électrique dès qu'il y a déplacement de charge électrique, on peut considérer que le déplacement de l'électron au sein d'un atome constitue une boucle de courant à laquelle peut être associée un moment magnétique. Ainsi, le moment magnétique de l'électron dans l'état fondamental de l'atome d'hydrogène, qui, selon le modèle semiclassique de Bohr, est caractérisé par un moment cinétique égal à \hbar , est, en norme, égal à :

$$m = \frac{e}{T}\pi r_0^2 = \frac{e}{2m}\hbar$$
 (16-3)

soit de l'ordre de 9,27 × 10^{-24} J.T⁻¹. On appelle ce moment magnétique le **magnéton de Bohr**.

2. Champ magnétique du dipôle magnétique

2.1 Approximation dipolaire

Analogue à l'approximation dipolaire électrique (cf. fiche 41), l'approximation dipolaire magnétique consiste à étudier le champ magnétique créé par la distribution de courant loin de cette dernière, avec un critère identique, c'est-à-dire à une distance grande devant la distance qui sépare les deux éléments de courant de la distribution les plus éloignés l'un de l'autre.



FIGURE 53 - Cadre de l'approximation dipolaire magnétique

2.2 Expression du champ magnétique à grande distance

• L'expression intrinsèque du champ magnétique à grande distance de la distribution de courant dont le moment magnétique est \vec{m} est :

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\left(\vec{m}\cdot\vec{r}\right)\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$$
(16-4)

où $r = \|\overrightarrow{r}\|.$

Elle est rigoureusement analogue à l'expression (14-5)) donnant le champ du dipôle électrostatique dans les mêmes conditions.

• Dans un repère de coordonnées sphériques dont l'axe des z serait de même direction et de même sens que le moment dipolaire magnétique, elle se traduit par :

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \left(2 \cos\theta \vec{\mathbf{e}}_r + \sin\theta \vec{\mathbf{e}}_\theta \right)$$
(16-5)

où $m = |\vec{m}||, r$ et θ deux des trois coordonnées du point d'observation \vec{r} .

• On observe que le champ magnétostatique n'a de composante que suivant \vec{e}_r et \vec{e}_{θ} : ceci provient de ce que la distribution, résumée à son caractère dipolaire dominant, est modélisée par son dipôle magnétique. Son champ magnétique ne peut être distingué à grande distance de celui d'un circuit filiforme plan circulaire parcouru par un courant électrique d'intensité I pourvu que IS = m et dont le moment magnétique remplacerait celui de la distribution réelle. Tout plan contenant la direction de ce dipôle est plan d'antisymétrie de la distribution de courant équivalente et donc contient le champ magnétostatique en chacun de ses points.

• Il est indépendant de φ car la distribution de courants équivalente présente une symétrie de révolution autour de l'axe du dipôle, ce qui n'est pas nécessairement le cas de la vraie distribution de courants électriques.

• Le champ magnétostatique n'est plus isotrope : ce caractère se remarque dans la dépendance en θ de ses composantes. Le plan médiateur du dipôle magnétique est le plan de la spire équivalente (plan correspondant à $\theta = \frac{\pi}{2}$) : il est plan de symétrie de la distribution équivalente et plan d'antisymétrie du champ magnétostatique. Ce dernier est perpendiculaire à ce plan en chacun de ses points.

• La décroissance de la norme du champ magnétostatique est en $1/r^3$. Elle fixe la rapidité de la diminution de son champ à grande distance au fur et à mesure que l'on s'en éloigne pourvu que la distribution de courants électriques soit de dimension finie et indépendante du temps.

2.3 Lignes de champ magnétique du dipôle magnétique

• La forme du champ magnétique étant analogue à celle du champ électrostatique du dipôle électrique, les lignes de champ magnétostatique son rigoureusement identiques pour le champ à grande distance, le dipôle magnétique remplaçant à l'origine le dipôle électrostatique. (cf. fiche 14 fig. 43)

• Ce sont des courbes planes fermées contenues dans les plans d'équations en coordonnées sphériques $\varphi = cte$.

• La différence survient près du dipôle : les lignes de champ du dipôle magnétique sont effectivement fermées au voisinage de la spire équivalente alors que celles du dipôle électrique sont des courbes ouvertes partant de la charge positive et aboutissant à la charge négative.

3. Actions sur un dipôle magnétique dans un champ magnétique extérieur

3.1 Hypothèses de la situation étudiée

• Soit un moment magnétique \vec{m} placé dans un champ magnétostatique extérieur $\vec{B}_e(\vec{r})$, que ce moment soit dû à une distribution de courants électriques ou à un milieu aimanté. Le moment est supposé constant en norme ; seule son orientation est susceptible de varier.

S'il est celui d'une distribution de courants électriques, cette dernière est supposée invariable en forme comme en répartition des intensités électriques en son sein.

S'il est celui d'un fragment de matière aimanté, ses caractéristiques magnétiques propres sont supposées ne pas être affectées par son introduction dans un champ magnétique extérieur.

• Le champ magnétostatique extérieur - créé par d'autres sources que le moment magnétique - peut posséder des variations faibles sur des distances de l'ordre de grandeur des dimensions caractéristiques de la distribution de courants électriques ou du fragment de matériau magnétique détenteur du moment magnétique.

3.2 Résultat intermédiaire sur le travail des forces de Laplace

• Soit un circuit électrique filiforme indéformable parcouru à l'instant *t* par le courant d'intensité *i*(*t*) et plongé dans un champ magnétique extérieur constant dans le temps. Le théorème de Maxwell permet de calculer le travail élémentaire δW_L des forces de Laplace exercées sur ce circuit : $\delta W_L = i \, d\Phi$ où Φ est le flux du champ magnétostatique à travers le circuit filiforme.

• Si le courant dans le circuit est aussi constant au cours du temps, i(t) = I = cte, alors $\delta W_L = d(I\Phi)$. Le travail élémentaire apparaît alors comme une différentielle. On peut donc définir une énergie potentielle du circuit dans le champ extérieur :

$$\mathcal{E}_{pm} = -I\Phi$$

3.3 Énergie potentielle d'un dipôle dans un champ magnétostatique

• Si le champ magnétostatique extérieur est uniforme sur l'étendue du dipôle magnétique, son flux à travers la distribution des courants est $\Phi = \vec{B}_e \cdot \vec{S}$ où \vec{S} est le vecteur surface équivalent à la distribution. Comme $\vec{IS} = \vec{m}$, il en résulte que l'énergie potentielle d'une distribution de courants invariable ou d'un aimant permanent de moment \vec{m} dans un champ extérieur \vec{B}_e est :

$$\mathcal{E}_{pm} = -\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{\mathbf{B}}_e \qquad (16-6)$$

• (16-6) est prise comme expression générale de l'énergie potentielle d'un dipôle magnétique invariable dans un champ magnétostatique extérieur.

3.4 Force magnétique résultante

• La résultante des forces de Laplace sur la distribution de courant, $\vec{\mathbf{f}}_m$ s'obtient en écrivant que son travail élémentaire δW_L au cours d'une translation $d\vec{r}$ du moment magnétique \vec{m} - dont la direction et le sens resteraient identiques au cours de cette translation - dans le champ magnétostatique extérieur $\vec{\mathbf{B}}_e$ est par définition (cf. **Toute la MPSI en fiches**, (17-3)) : $\delta W_L = \vec{\mathbf{f}}_m \cdot d\vec{r}$.

• La résultante \vec{f}_m se déduit de l'énergie potentielle du dipôle magnétique invariable dans le champ magnétostatique extérieur :

$$\overrightarrow{\mathbf{f}}_{m} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}} \mathcal{E}_{pm} = \left(\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{\mathbf{grad}}\right) \overrightarrow{\mathbf{B}}_{e}(\overrightarrow{r})$$
(16-7)

• La force qui s'exerce sur le moment magnétique n'est autre que la résultante des forces de Laplace qui s'exerce sur les éléments de courants électriques invariables qui constituent le moment magnétique dans un champ magnétostatique.

• Si le champ magnétostatique est uniforme, son gradient est nul et la force qui en résulte est nulle.

3.5 Moment résultant dans un champ magnétostatique

• La résultante des moments des forces de Laplace $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ exercées sur la distribution de courant, $\overrightarrow{\mathbf{f}}_m$ s'obtient en écrivant que son travail élémentaire δW_L au cours d'une rotation de vecteur rotation $d\overrightarrow{\theta}$ du moment magnétique \overrightarrow{m} - dont la norme reste constante au cours de cette rotation - dans le champ magnétostatique extérieur $\overrightarrow{\mathbf{B}}_e$ est : $\delta W_L = \overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot d\overrightarrow{\theta}$.

Or, l'effet de la rotation d'angle $d\theta$ et d'axe la direction de $d\vec{\theta}$ est de faire varier le moment magnétique de $d\vec{m} = d\vec{\theta} \wedge \vec{m}$ et donc l'énergie potentielle de $d\mathcal{E}_{pm} = -d\vec{m} \cdot \vec{\mathbf{B}}_e$.

• Le moment résultant des forces de Laplace qui s'exercent sur la distribution de moment magnétique \vec{m} dans le champ extérieur \vec{B}_e est ainsi :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{\mathbf{B}}_e \qquad (16-8)$$

• Le moment des forces de Laplace appliqué au moment magnétique tend à aligner celui-ci sur le champ magnétique.

3.6 Effets combinés

• Soit un moment magnétique invariable plongé dans un champ magnétostatique extérieur inhomogène. Le premier effet du champ est d'aligner le dipôle sur sa direction au point où celui-ci se trouve. Le second effet est de le déporter vers les zones de champ magnétique intense sous l'effet de la résultante des forces (16-7).

• Il y a analogie complète entre ce qu'il advient à un moment magnétique subissant un champ magnétostatique extérieur et ce qu'il advient à un dipôle électrique dans un champ électrostatique.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Un cadre rectangulaire de côtés a et b constitué de N spires est parcouru par un courant électrique d'intensité I constante.

Le cadre est maintenu dans un plan vertical en étant suspendu par un fil vertical qui passe par le milieu des deux côtés. Il possède un moment d'inertie J par rapport à l'axe du fil de suspension exerçant un couple de torsion de constante de torsion C. Il est placé dans un champ

magnétique uniforme et constant \mathbf{B} horizontal de sorte que le moment dipolaire du cadre et le champ magnétostatique aient même direction et même sens.

On écarte le cadre de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 , le plan du cadre demeurant vertical. Les frottements fluides s'exerçant sur le cadre sont modélisés par un couple de moment opposé à $\dot{\theta}(t)$, $\theta(t)$ repérant la position du cadre par rapport à l'équilibre.

1. Déterminez l'équation du mouvement du cadre dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.

2. Que devient l'équation dans la limite des petites oscillations ? À quelle condition liant les paramètres le mouvement des petites oscillation est-il critique ?

Exercice 2: Soit un fil rectiligne indéfini par couru par un courant électrique d'intensité *I*. Il est placé dans le plan d'une boucle de courant de moment dipolaire magnétique \vec{m} à une distance *D* suffisamment grande pour que son champ magnétique puisse être approché, au niveau du fil rectiligne par son expression dipolaire.

Calculez la résultante des forces de Laplace qui s'exercent sur le fil.

1. Conservation de la charge électrique

1.1 La conduction électrique

• Le transport de charge s'effectue dans tous les milieux par le déplacement d'entités chargées - particules élémentaires telles l'électron dans les solides conducteurs et les gaz ionisés, ions positifs ou négatifs dans les électrolytes et les gaz ionisés -. Toutes ces entités portent alors une charge qui ne peut être qu'un multiple entier de la charge élémentaire $e \approx 1, 6 \times 10^{-19}$ C. C'est la quantification de la charge.

• Malgré le caractère particulaire, atomique ou moléculaire discontinu de la matière, nous considérons le courant électrique qui découle du déplacement de charge comme un milieu continu donc susceptible d'être décrit à l'aide de fonctions continues de l'espace. Cette approche est justifiée par le très grand nombre d'entités présentes dans chacun de ses volumes élémentaires, aussi petits soient-ils à l'échelle macroscopique.

Il s'agit d'un procédé similaire à celui adopté en thermodynamique (cf. **Toute la MPSI en fiches**, fiche 24, §1.2 et §2.5). Le recouvrement du discontinu physique par du continu analytique y a été présenté et en partie justifié.

1.2 Densité volumique de charge

• Lorsque plusieurs espèces d'entités sont simultanément présentes dans le milieu, il est possible de définir pour chacune d'elles une telle densité volumique de charge au point \vec{r} à l'instant $t, \rho_i(\vec{r}, t)$, définie comme le rapport au volume du domaine élémentaire centré sur \vec{r} de la charge électrique contenue dans ce même domaine. On spécifie de la sorte la différence de charge des porteurs élémentaires de l'espèce *i* (signe, nombre de charges élémentaires) et/ou leur différence de concentration par rapport aux entités d'autres espèces.

Un volume élémentaire $d\tau$ de forme quelconque dans le milieu conducteur, centré sur le point \vec{r} , contient, à l'instant *t*, la charge électrique $dq_i(\vec{r}, t) = \rho_i(\vec{r}, t) d\tau$ apportée par les entités de l'espèce *i*.

• La dimension de la densité volumique de charge est $I.T.L^{-3}$. Elle s'exprime en coulomb par mètre, de symbole $C.m^{-3}$.

• La distribution des charges au sein du milieu conducteur est représentée par la valeur $\rho(\vec{r}, t) = \sum_{i} \rho_i(\vec{r}, t)$, au point d'observation \vec{r} de l'espace dans lequel les charges électriques existent, à l'instant *t*. ρ est appelée la **densité volumique de charge électrique**, sans distinc-

tion des espèces apportant les charges.

Un volume élémentaire d τ de forme quelconque dans le milieu conducteur, centré sur le point \vec{r} , contient, à l'instant *t*, la charge électrique $dq(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) d\tau$.

1.3 Densités volumiques de courant électrique

• Parmi les entités de l'espèce *i* au sein de la matière conductrice, certaines peuvent être en mouvement, au moins d'agitation thermique. Si un mouvement d'ensemble local, dans une direction donnée de l'espace, se dessine, il existe alors un courant électrique. Il est décrit par

la donnée pour l'espèce *i* du **champ des vitesses** $\vec{\mathbf{v}}_i(\vec{r},t)$ dans le référentiel \mathcal{R} de l'étude. Sa signification est celle d'une vitesse collective ou d'ensemble représentant la moyenne des vitesses des entités d'espèce *i*, mobiles ou pas, contenues dans le volume élémentaire d τ autour du point \vec{r} à l'instant *t*.

Ce faisant, on ignore délibérément les vitesses individuelles des entités porteuses de charge électrique, expérimentalement inaccessibles et qui relèvent de la statistique, pour ne conserver que la vitesse moyenne locale, seule à pouvoir être comparée à une donnée issue d'une expérience.

• Par définition, la densité volumique de courant électrique associée à l'espèce *i*, notée $\vec{j}_i(\vec{r}, t)$, est le produit de la densité volumique de charge de cette espèce au point \vec{r} du milieu conducteur à l'instant *t* par leur vitesse d'ensemble en ce point et à cet instant :

$$\vec{\mathbf{j}}_{i}(\vec{r},t) = \rho_{i}(\vec{r},t) \vec{\mathbf{v}}_{i}(\vec{r},t)$$
(17-1)

Remarque 1 : Les vitesses des entités dépendant du référentiel par rapport auquel elles sont définies, les densités volumiques de courant électriques ne sont pas des quantités vectorielles intrinsèques.

Remarque 2 : Seules les charges mobiles dans le référentiel d'étude participent à la densité volumique de courant dans ce référentiel. Il est équivalent de définir la densité volumique de courant de l'espèce *i* à partir des seules charges mobiles. Soit leur densité volumique de charge $\rho_i^{(m)}(\vec{r},t)$ et la vitesse instantanée et locale moyenne des seules charges mobiles de l'espèce *i*, $\vec{v}_i^{(m)}(\vec{r},t)$; $\vec{j}_i(\vec{r},t)$ est aussi égale à $\rho_i^{(m)}(\vec{r},t)$; $\vec{v}_i^{(m)}(\vec{r},t)$.

• Par définition, la densité volumique de courant électrique totale, $\vec{j}(\vec{r},t)$, au point \vec{r} à l'instant *t*, est la somme des densités volumiques de courant électrique de toutes les espèces conductrices confondues en ce point et à cet instant :

$$\overrightarrow{\mathbf{j}}(\overrightarrow{r},t) = \sum_{i} \overrightarrow{\mathbf{j}}_{i}(\overrightarrow{r},t)$$
(17-2)

• La dimension d'une densité volumique de courant électrique est $I.L^{-2}$. Son unité est l'ampère par mètre au carré, de symbole $A.m^{-2}$.

1.4 Lignes et tubes de courant

• Soit un milieu conducteur au sein duquel la densité volumique de courant est $\vec{j}(\vec{r},t)$; on appelle **ligne de courant** passant par un point M_0 à un instant t, la courbe de l'espace passant par M_0 en tout point de laquelle la densité volumique de courant $\vec{j}(\vec{r},t)$ est continûment tangente, orientée dans le sens des vecteurs densité volumique de courant (cf. fig. 54a).



FIGURE 54 – Lignes (a) et tube (b) de courant dans un milieu conducteur

• Les équations des lignes de courant à l'instant t sont obtenues en résolvant le système

d'équations différentielles :

$$\frac{\mathrm{d}x}{j_x(\vec{r},t)} = \frac{\mathrm{d}y}{j_y(\vec{r},t)} = \frac{\mathrm{d}z}{j_z(\vec{r},t)}$$

• Les lignes de courants représentent une photographie à un instant *t* donné des déplacements d'ensemble des charges. Elles ne se confondent avec les trajectoires des charges que pour les régimes stationnaires car alors leurs positions ne changent pas au cours du temps.

• Soit un contour fermé Γ de l'espace : l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur le contour Γ constitue une surface appelée **tube de courant**. Les tubes de courant dessinent à un instant *t* les canaux d'écoulement du courant électrique. (cf. fig. 54b).

1.5 Définition de l'intensité du courant électrique

• Soit une surface élémentaire centrée sur le point \vec{r} , assimilable à une portion de plan, de normale orientée $\vec{n}(\vec{r})$ et d'aire dS. Nous définissons l'**intensité du courant électrique** élémentaire d $I(\vec{r}, t)$ qui traverse la surface élémentaire dans le sens de la normale à l'instant t comme le **flux élémentaire** de la densité volumique de courant électrique à travers l'élément de surface :





FIGURE 55 – Intensité électrique à travers une surface : (a) ouverte S; (b) fermée Σ

• Soit une surface ouverte orientée S (cf. fig. 55a) ou fermée Σ (cf. fig. 55b); soit $\vec{n}(\vec{r})$ la normale orientée à la surface au point \vec{r} .

Par définition, l'**intensité du courant électrique**, I(t) traversant la surface S (resp. Σ) à l'instant t est la somme des intensités des courants électriques élémentaires à travers les surfaces élémentaires en lesquelles S (resp. Σ) peut être divisée.

Elle est égale au **flux** de la densité volumique de courant à travers S (resp. Σ) :

$$I(t) = \iint_{\mathcal{S} \text{ (resp. } \Sigma)} \overrightarrow{\mathbf{j}}(\overrightarrow{r}, t) \cdot d\overrightarrow{S}$$
(17-4)

2. Bilan de charge

2.1 Problème étudié

• Nous souhaitons traduire, à une dimension, la conservation de la charge par une relation structurelle entre les densités volumiques de charge ρ et et de courant \vec{j} , autre que la relation de définition.

• La solution du problème repose sur le postulat de la conservation de la charge.

• Le système dont nous établissons le bilan de charge est un volume parallélépipède rectangle d'arêtes parallèles aux axes d'un repère de coordonnées cartésiennes, de longueurs L_y et L_z et situé entre x et x + dx.



FIGURE 56 – Schéma pour l'équation de continuité à une dimension

• À une dimension, ρ , \vec{j} ne dépendent que de *x* et de *t*. De plus le vecteur densité volumique de courant électrique est dirigé suivant $\vec{e}_x : \vec{j} = j_x(x, t)\vec{e}_x$.

2.2 Équation de continuité à une dimension

• La variation entre les instants t et t + dt de la charge électrique q(x, t) contenue dans le parallélépipède vaut :

$$dq(x,t) = q(x,t+dt) - q(x,t) = \left[\rho(x,t+dt) - \rho(x,t)\right] L_y L_z dx = \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) dt L_y L_z dx$$

Cette variation est due au flux des charges à travers la surface délimitant le volume, $dq^{(\Phi)}(x, t)$, pendant l'intervalle de temps dt. Ce flux de charges n'est non nul qu'à travers les faces perpendiculaires à \vec{e}_x : entrant en x et sortant en x + dx.

$$\mathrm{d}q^{(\Phi)}(x,t) = \left[j_x(x,t) - j_x(x+\mathrm{d}x,t)\right] . L_y . L_z . \mathrm{d}t = -\frac{\partial j_x}{\partial x}(x,t) \,\mathrm{d}x . L_y . L_z . \mathrm{d}t$$

Comme $dq(x, t) = dq^{(\Phi)}(x, t)$, il en résulte l'équation-bilan locale à une dimension suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial j_x}{\partial x}(x,t) = 0$$
 (17-5)

2.3 Généralisation à trois dimensions

• Soit une surface fermée Σ délimitant un volume V de l'espace à l'intérieur duquel nous voulons établir un bilan des charges entre les instants t et t + dt.

• La charge électrique contenue à l'instant t dans le volume \mathcal{V} est exprimée par :

$$q(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}, t) \,\mathrm{d}\tau$$

La variation de cette charge entre les instants t et t + dt est égale à :

$$\mathrm{d}q(t) = q(t+\mathrm{d}t) - q(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \left[\rho(\vec{r}, t+\mathrm{d}t) - \rho(\vec{r}, t)\right] \mathrm{d}\tau$$

soit

$$\mathrm{d}q(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r}, t) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\tau$$

Cette variation ne peut être due qu'au flux net de charges à travers la surface fermée Σ qui délimite \mathcal{V} :

$$\mathrm{d}q^{(\Phi)}(t) = -\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathbf{j}}(\overrightarrow{r}, t) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}.\mathrm{d}t$$

Comme $dq(t) = dq^{(\Phi)}(t)$. Il en résulte :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r}, t) \,\mathrm{d}\tau + \iiint_{\Sigma} \vec{\mathbf{j}}(\vec{r}, t) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$
(17-6)

qui est l'équation intégrale de conservation de la charge.

Selon le théorème d'Ostrogradsky, l'intégrale du flux de la densité volumique de courant à travers la surface Σ peut se transformer en une intégrale sur le volume V selon :

$$\iiint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathbf{j}}(\overrightarrow{r},t) \cdot d\overrightarrow{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{j}}(\overrightarrow{r},t) d\tau$$

(17-6) est vraie quel que soit le volume \mathcal{V} considéré, donc l'intégrande de l'intégrale triple formée en regroupant tous les termes sous la même intégrale doit être nulle. D'où l'équation locale de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r},t) + \operatorname{div} \vec{\mathbf{j}}(\vec{r},t) = 0$$
 (17-7)

Remarque : Les équations de continuité sur les densités volumiques de charge et de courant globale peuvent être établies espèce par espèce à condition de remplacer le 0 du second membre de (**17-5**) ou (**17-7**) par un terme de création-annihilation $\sigma_i(\vec{r}, t)$ de l'espèce chargée *i* par unité de temps, ayant la dimension d'une densité volumique de charge par unité de temps. La conservation de la charge électrique se traduit par une somme des termes de création-annihilation sur toutes les espèces nulle.

2.4 L'opérateur divergence

• L'équation de continuité généralisée fait apparaître un opérateur vectoriel, la **divergence** qui agit sur un vecteur \vec{A} à trois dimensions. Elle exprime le flux du champ de vecteur \vec{A} à travers la surface qui délimite un volume infinitésimal centré sur le point \vec{r} en lequel on l'a calculée, rapporté au volume en question.

• Le résultat est un scalaire qui a pour dimension celle de \vec{A} divisée par une longueur.

• La divergence d'un champ de vecteur \vec{A} se calcule de la manière suivante à partir des composantes du vecteur dans les systèmes classiques de coordonnées : en coordonnées cartésiennes.

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \text{ et } \vec{A}(\vec{r}, t) = A_x(\vec{r}, t) \vec{e}_x + A_y(\vec{r}, t) \vec{e}_y + A_z(\vec{r}, t) \vec{e}_z,$$

div
$$\overrightarrow{\mathbf{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

en coordonnées cylindriques,

 $\vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{e}_r + z \cdot \vec{e}_z \text{ et } \vec{A}(\vec{r}, t) = A_r(\vec{r}, t) \cdot \vec{e}_r + A_\theta(\vec{r}, t) \cdot \vec{e}_\theta + A_z(\vec{r}, t) \cdot \vec{e}_z,$

div
$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

en coordonnées sphériques,

$$\vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{e}_r \cdot \vec{e} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = A_r(\vec{r}, t) \cdot \vec{e}_r + A_\theta(\vec{r}, t) \cdot \vec{e}_\theta + A_\varphi(\vec{r}, t) \cdot \vec{e}_\varphi,$$
$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$
où les valeurs des opérateurs et les dérivées partielles sont prises au point-évènement de coordonnées (\vec{r}, t) .

2.5 Régime stationnaire

• Le **régime stationnaire** de déplacement des charges est défini par des densités volumiques de charge et de courant indépendantes du temps. L'équation de continuité à trois dimensions se traduit localement par :

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{j}}(\vec{r}) = 0 \qquad (17-8)$$

à quoi correspond la nullité du flux de la densité volumique de courant à travers une surface fermée quelconque.

• De (17-8) découle la loi des nœuds de l'électrocinétique. Soit le nœud :



FIGURE 57 - Loi des nœuds : (a) structure ; (b) support matériel

Soit une surface fermée Σ entourant le nœud du circuit. D'après (17-8) :

$$0 = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathbf{j}}(\overrightarrow{r}) \, d\overrightarrow{S} = \sum_{k=1}^{4} \, \iint_{S_{k}} \overrightarrow{\mathbf{j}}(\overrightarrow{r}) \, d\overrightarrow{S}$$

la densité volumique de courant n'étant non nulle que sur les surfaces $(S_k)_{k=1}$ à 4, intersections de chacun des conducteurs avec Σ . Or, d'après la réalisation matérielle du nœud,

$$I_k = \pm \iint_{\mathcal{S}_k} \overrightarrow{\mathbf{j}}(\overrightarrow{r}) \, \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

où le signe est + lorsque la convention d'orientation des courants dans la branche sort du nœud, et – lorsqu'elle est entrante. Ainsi, $0 = -I_1 + I_2 + I_3 - I_4$ qui n'est autre que la loi des nœuds de l'électrocinétique, appliquée à ce cas particulier.

3. Les équations de Maxwell

3.1 Rôle des équations de Maxwell

• Les quatre équations de Maxwell constituent, avec la loi de force électromagnétique de Lorentz, les postulats de l'électromagnétisme classique (au sens de non quantique). Elles sont essentiellement issues de l'expérience et de la logique de la conservation des charges électriques.

• Elles relient localement, en chaque point \vec{r} de l'espace et à chaque instant *t*, les densités volumiques de charge $\rho(\vec{r}, t)$ et de courant électriques $\vec{j}(\vec{r}, t)$ aux variations temporelles et spatiales du champ électromagnétique représenté par le couple champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ - champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ dans un référentiel galiléen.

• Les densités de charge et de courant ont un double statut dans ces équations. Elles sont tantôt

prises comme sources du champ électromagnétique si d'autres forces agissantes contrecarrent les forces de Lorentz qui s'exercent sur elles et imposent ainsi leurs déplacements dans un référentiel donné.

Le champ électromagnétique est alors une pure conséquence de ρ et \vec{j} sans les affecter.

• Sinon, laissées libres d'évoluer, ρ et \vec{j} sont aussitôt soumises à la force de Lorentz qu'elles subissent dans le champ électromagnétique à l'origine duquel elles sont; elles évoluent au cours du temps sous le coup des principes de la dynamique et modifie en retour le champ électromagnétique.

$$\rho, \vec{\mathbf{j}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{B}}$$

$$\swarrow \qquad \text{densité volumique de force de Lorentz}$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{f}}_{L}}{d\tau} = \rho \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{j}} \wedge \vec{\mathbf{B}}$$

• Ces lois fondamentales doivent être associées à des lois secondaires, les lois constitutives des milieux matériels dans lesquels règne un champ électromagnétique, pour comprendre tant les comportements de ces milieux vis-à-vis du champ et que l'évolution de ce dernier dans de tels milieux.

La loi d'Ohm locale est un exemple parmi d'autres de ce type de lois. D'autres concernant les milieu magnétiques ou les milieux isolants nécessitent l'introduction de deux autres champs de vecteur $\vec{\mathbf{D}}(\vec{r}, t)$ et $\vec{\mathbf{H}}(\vec{r}, t)$ auxquels $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ sont liés.

3.2 Les quatre équations de Maxwell

Dans le vide de permittivité diélectrique ε_0 et de perméabilité magnétique μ_0 , où sont présentes les densités volumiques de charge $\rho(\vec{r}, t)$, de courant $\vec{j}(\vec{r}, t)$, les quatre équations de Maxwell entre les charges et les champs électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ rapportés dans un référentiel galiléen sont :

$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	équation de Maxwell-Gauss	(17-9)
$\overrightarrow{\mathbf{rot}} \overrightarrow{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{B}}}{\partial t}$	équation de Maxwell-Faraday	(17-10)
$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{B}} = 0$	équation de Maxwell-flux	(17-11)
$\overrightarrow{\mathbf{rot}} \overrightarrow{\mathbf{B}} = \mu_0 \overrightarrow{\mathbf{j}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{E}}}{\partial t}$	équation de Maxwell-Ampère	(17-12)

• Les champs électrique et magnétique apparaissent simultanément dans deux des quatre équations. Ils sont ainsi couplés d'où la terminologie de **champ électromagnétique** pour exprimer qu'en régime dépendant du temps, les deux champs dépendent mutuellement l'un de l'autre.

3.3 Les équations de Maxwell intégrales

• Les équations traduisent localement le lien entre les sources et les champs. Il correspond à chacune d'elle une équation intégrale traduisant un comportement particulier du champ électromagnétique. • (17-9) est équivalente au théorème de Gauss (13-10).

• (17-11) traduit l'absence de charges magnétiques et donne un caractère conservatif au flux du champ magnétique. Si Σ est une surface fermée, le flux du champ magnétique à travers elle est nul :

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathbf{B}} \cdot d\overrightarrow{S} = 0$$

Il en résulte que le flux du champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour donné est indépendant de la surface mais ne dépend que du contour.

• (17-12) conduit au théorème d'Ampère généralisé. Soit Γ un contour fermé et S est une surface s'appuyant sur Γ :

$$\int_{\Gamma} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_{S} \vec{\mathbf{j}} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{S} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{S}$$

• (17-10) conduit aux lois de l'induction - voir §5 ci-après.

3.4 Les équations de Maxwell et la conservation de la charge électrique

• L'application de l'opérateur divergence aux deux membres de l'équation de Maxwell-Ampère (17.12) conduit à l'équation de conservation de la charge car

 $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{\mathbf{B}}\right) = 0 = \mu_0\left(\operatorname{div}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\overrightarrow{\mathbf{E}}\right)$ où il suffit de remplacer la divergence du champ électrique par (17-9) pour retrouver l'équation de conservation de la charge.

• La densité volumique de courant de déplacement $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est un terme que Maxwell ajouta à l'équation de Maxwell-Ampère statique afin que le résultat fût compatible, en régime variable, avec la conservation de la charge, principe qu'il jugeait supérieur à la conservation en l'état du théorème d'Ampère en régime permanent ou dans le cadre de l'A.R.Q.S.

• Le courant de déplacement éclaire la non interruption du courant électrique en régime variable dans une branche de circuit qui comporte un condensateur. Soit un condensateur de capacité C inséré dans une branche de circuit dans laquelle l'intensité du courant électrique est i(t); soit une surface fermée Σ entourant l'une de ses armatures (cf. fig. 58).



FIGURE 58 - Condensateur et courant de déplacement

Le flux de la densité volumique totale du courant à travers la surface fermée Σ est nul. Or, il est la somme de ses flux à travers les surfaces S_2 et S_1 .

Sur S_2 , la densité est en fait égale à la seule densité de courant de conduction dans le conducteur - le champ électrique est cantonné entre les armatures du condensateur plan; il est nul à l'extérieur -, le flux à travers S_2 vaut -i(t) à cause de la normale orientée extérieurement. Sur la surface S_1 , entre les armatures du condensateur, il n'y a pas de courant de conduction et la densité volumique de courant total se limite à la seule densité de courant de déplacement. Son flux à travers S_1 peut être estimé à $S \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ où E est la projection du champ électrique sur la direction normale aux armatures orientée de la gauche vers la droite (cf. fig.58).

En désignant par u(t) la tension entre les armatures, et e la distance qui les sépare, nous retrouvons la relation de l'électrocinétique entre intensité du courant électrique et tension :

$$i(t) = \varepsilon_0 \frac{S}{e} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}lt}(t) = C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$$

Le courant de déplacement prolonge entre les armatures, par substitution, le courant de conduction.

• Le courant de déplacement induit sur l'autre armature une variation de la charge qui se traduit par un courant électrique dans le conducteur qui part de l'autre armature du condensateur. En l'absence de courant de particules chargées entre les armatures du condensateur, le courant de déplacement prend le relais du courant électrique au sens traditionnel du terme.

• Par ailleurs, ce courant de déplacement symétrise les équations de Maxwell : l'équation de Maxwell-Faraday (17.10) couple une variation temporelle du champ magnétique à une variation spatiale du champ électrique. La nouvelle équation de Maxwell-Ampère couple une variation temporelle du champ électrique à une variation spatiale du champ magnétique. Sans lui, les ondes électromagnétiques n'existeraient pas.

3.5 Découplage de \overrightarrow{E} et \overrightarrow{B} en régime statique

• Lorsque les densités volumiques de charge et de courant sont imposées et indépendantes

du temps, $\rho(\vec{r})$ et $\vec{j}(\vec{r})$, les champs dont elles sont les sources deviennent eux-mêmes indépendants du temps. Les équations de Maxwell prennent la forme particulière suivante :

div $\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	équation de Maxwell-Gauss	(17-13)
$\overrightarrow{rot} \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$	équation de Maxwell-Faraday	(17-14)
$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{B}} = 0$	équation de Maxwell-flux	(17-15)
$\overrightarrow{\mathbf{rot}} \overrightarrow{\mathbf{B}} = \mu_0 \overrightarrow{\mathbf{j}}$	équation de Maxwell-Ampère	(17-16)

• Elles se regroupent par paires dans lesquelles les champs électrique et magnétique apparaissent seuls :

Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday pour le **champ électrostatique** ou champ électrique indépendant du temps qui n'apparaît dépendre que de la seule densité volumique de charge et Maxwell-Ampère avec Maxwell-Flux pour le **champ magnétostatique** ou champ magnétique indépendant du temps - qui ne dépend que de la seule densité volumique de courant.

3.6 Linéarité des équations et superposition des champs

 Les opérateurs divergence et rotationnel sont des opérateurs linéaires au sens mathématique du terme.

• Si les densités volumiques de charge et de courant sont des combinaisons linéaires de densités volumiques de charge et de courants dont les champs électromagnétiques tirés des équations de Maxwell sont déjà connus, alors le champ électromagnétique résultant sera une combinaison linéaire des champs électromagnétiques obtenus pour chaque couple de densités, avec les mêmes coefficients que ceux de la combinaison linéaire des densités.

$$\rho_{i}, \overrightarrow{\mathbf{j}}_{i} \quad \longleftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathbf{E}}_{i}, \overrightarrow{\mathbf{B}}_{i}$$

$$\rho = \sum_{i} \alpha_{i} \rho_{i}, \overrightarrow{\mathbf{j}} = \sum_{i} \alpha_{i} \overrightarrow{\mathbf{j}}_{i} \quad \longleftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathbf{E}} = \sum_{i} \alpha_{i} \overrightarrow{\mathbf{E}}_{i}, \overrightarrow{\mathbf{B}} = \sum_{i} \alpha_{i} \overrightarrow{\mathbf{B}}_{i}$$

Cette propriété est la traduction du **principe de superposition** qui constate que les effets dans le vide sont proportionnels aux causes et que des causes conjointes provoquent des effets conjoints.

3.7 Les équations de Maxwell et le principe de relativité restreinte

• Le principe de relativité restreinte postule que les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens et que la célérité de la lumière dans le vide y a la même valeur. Ceci signifie, en ce qui concerne les lois de l'électromagnétisme, que les équations de Maxwell régissant le champ électromagnétique décrit dans les systèmes de coordonnées attachés à deux référentiels galiléens distincts possèdent la même forme.

• La recherche du groupe des transformations d'un système de coordonnées à l'autre et de celui des transformations des champs afférentes qui laissent invariantes les équations de Maxwell déboucha sur l'invention des transformations de Lorentz et du groupe de Poincaré grâce auxquels on montre l'invariance de la célérité de la lumière dans le vide. Les transformations de Lorentz donnent les relations qui font passer d'un système de coordonnées spatiotemporelles (\vec{r}, t) d'un référentiel galiléen à un autre système de coordonnées (\vec{r}', t') dans un autre référentiel galiléen.

• De plus les transformations de Lorentz sont les matrices de passage du champ électromagnétique dans le premier référentiel au champ électromagnétique dans le second. En effet, les 3×2 composantes des champs électrique et magnétique apparaissant comme les composantes définissant une matrice 4×4 antisymétrique qui les regroupe, rendant ainsi indissociables les deux champs sous la forme d'une même entité, le champ électromagnétique.

• Ainsi, les équations de Maxwell se posent en premières équations de la physique classique intrinsèquement relativistes.

4. Les équations du potentiel électrostatique

4.1 Équation de Poisson du potentiel électrostatique

• Le fait pour le champ électrostatique de dériver d'un potentiel électrostatique - cf. (13-6) - est une conséquence de l'équation de Maxwell-Faraday en régime indépendant du temps (17-14). Ainsi,

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{r}) = -\overrightarrow{\mathbf{grad}} V(\overrightarrow{r})$$

est équivalent à affirmer que le rotationnel du champ électrostatique est nul.

• Combinée à l'équation de Maxwell-Gauss (17-9), on déduit l'équation de Poisson du potentiel électrostatique :

$$\operatorname{div}\left(-\overrightarrow{\mathbf{grad}} V\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

soit

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{17-17}$$

• L'équation de Poisson est une équation différentielle aux dérivées partielles du second ordre par rapport aux variables d'espace, contrairement aux équations de Maxwell qui sont des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

• Dans les situations où la densité volumique de charge possède suffisamment d'invariance pour que le potentiel électrostatique ne dépendent que d'une seule variable d'espace dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques, le calcul du potentiel par l'équation de Poisson est un moyen d'accéder au champ de la distribution de charge à travers la relation (13-6).

4.2 Équation de Laplace du potentiel électrostatique

• Le calcul du potentiel électrostatique dans une région de l'espace sans charge électrique entraîne la résolution de la variante de l'équation de Poisson, appelée équation de Laplace :

 $\Delta V = 0$ (17-18)

• Sa résolution nécessite de connaître le potentiel ou bien sa dérivée à la frontière du domaine en question.

5. Induction électromagnétique et champs

5.1 Rappel

• La loi de Faraday stipule que la force électromotrice induite e dans un circuit à travers lequel le flux du champ magnétique Φ varie au cours du temps est égale à l'opposé de sa dérivée par rapport au temps.

$$e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}(t) \qquad (17-19)$$

• Les variations de flux envisagées sont dues soit à une variation du champ magnétique au cours du temps à travers un circuit fixe dans un référentiel donné soit au déplacement d'un élément du circuit dans un champ magnétique indépendant du temps dans le référentiel d'étude. Un mélange des deux situations, pourvu qu'il y ait au final variation du flux à travers le circuit fait naître de la même manière une f.é.m. induite.

5.2 Induction à travers un circuit fixe dans le référentiel d'étude

• Soit un référentiel d'étude supposé galiléen dans lequel le champ électromagnétique est $\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t)$ et $\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}, t)$. Soit un circuit fixe dans le référentiel, définissant un contour fermé orienté Γ sur lequel s'appuie une surface S dont l'orientation de la normale est déterminée par la règle du tire-bouchon à partir de celle du contour.

• L'équation de Maxwell-Faraday (17-10) invite à calculer la circulation du champ électrique le long du contour fermé :

$$\int_{\Gamma} \vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t) \cdot d\vec{r} = \iint_{S} \vec{\text{rot}} \vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t) \cdot d\vec{S} = \iint_{S} - \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}(\vec{r},t) \cdot d\vec{S}$$

Le contour et la surface étant fixes dans le référentiel, il est possible de sortir la dérivation de l'intégrale et nous tirons :

$$\int_{\Gamma} \vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t) \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_{S} \vec{\mathbf{B}}(\vec{r},t) \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

où Φ est le flux du champ magnétique variable dans le référentiel à travers la surface s'appuyant sur le contour Γ . Nous retrouvons aisément la loi de Faraday dans ce cas.

• La force électromotrice e(t) introduite n'est autre chose que la circulation du champ électrique dans le référentiel d'étude le long du contour fermé Γ . La relation du champ électrique

à la force électromotrice induite renforce son caractère délocalisé sur tout le contour du circuit.

• La loi de Faraday atteste enfin un comportement du champ électrique variable fondamentalement différent de celui du champ électrostatique. Si la circulation entre deux points du champ électrostatique est indépendante du chemin suivi, celle du champ électrique variable ne l'est pas. Ceci signifie que le champ électrique variable ne peut plus dériver d'un potentiel comme le faisait le champ électrostatique ou que sa circulation le long d'un contour fermé peut ne pas être nulle.

5.3 Induction à travers un circuit mobile

• Soit le système fondé sur les rails de Laplace : un circuit conducteur ohmique est plongé dans un champ magnétique indépendant du temps perpendiculaire au plan du circuit, où seul le conducteur DF est entraîné à la vitesse \vec{v} constante dans le référentiel d'étude.



FIGURE 59 – Induction dans un circuit mobile

À un instant *t* quelconque, il est possible de définir de la même manière que précédemment un contour fermé et orienté Γ le long duquel calculer la circulation du champ électrique *dans le référentiel dans lequel le champ magnétique est constant*. Le champ magnétique est constant donc sa dérivée partielle par rapport au temps est nulle et le flux de cette dérivée à travers une surface s'appuyant sur le contour est nul !

Le circuit est pourtant le siège d'un courant induit *i* positif dans le sens indiqué sur la figure.

• L'apparente difficulté est levée par l'analyse suivante. Nous avons un circuit à une maille, donc le courant électrique est le même en tous les points du circuit (cadre de l'A.R.Q.S.). Il existe donc en chaque point du circuit une densité volumique de courant électrique. Appelons j sa composante normale à une section du conducteur et supposons qu'elle soit constante sur chaque section s dans la portion (*FGAD*) du circuit, fixe dans le référentiel, de sorte que i = js; de même dans la partie mobile (*DF*) : i = j's'.

Cependant la densité j' est liée par la loi d'Ohm locale au champ électrique dans le référentiel de la barre mobile et non dans celui où le champ magnétique est défini. La relativité galiléenne suffit à nous secourir : elle postule en effet que la force électromagnétique qui s'exerce sur un porteur de charge doit être la même dans les deux référentiels. Ainsi,

$$\overrightarrow{\mathbf{f}}_{L} = q\left(\overrightarrow{\mathbf{E}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{B}}\right) = q\left(\overrightarrow{\mathbf{E}}' + \overrightarrow{\mathbf{v}}' \wedge \overrightarrow{\mathbf{B}}'\right)$$

Or, en translation rectiligne, $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ où \vec{v} est la vitesse de la charge dans le référentiel \mathcal{R} et \vec{v}' sa vitesse dans le référentiel \mathcal{R}' . Il en résulte que les champ magnétiques doivent, dans le cadre de cette relativité, être égaux dans les deux référentiels, mais que les champs électriques doivent satisfaire à :

$$\overrightarrow{\mathbf{E}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}'}$$

• Ainsi, la circulation du champ électrique dans le référentiel de départ vaut, à l'instant t :

$$\int_{(FGAD)} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{r} + \int_{(DF)} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{r} = 0$$

Posons pour simplifier $\vec{\mathbf{E}} = \rho \vec{\mathbf{j}} = \rho \frac{i}{s} \vec{u}_r$ où ρ , s, \vec{u}_r sont la résistivité, la section et le vecteur unitaire colinéaire à l'élément d \vec{r} au point \vec{r} du circuit (*FGAD*); avec les significations correspondantes pour la partie mobile (*DF*), $\vec{\mathbf{E}}' = \rho' \vec{\mathbf{j}}' = \rho' \frac{i}{s'} \vec{u}_r$. Ainsi,

$$0 = i \int_{(FGAD)} \frac{\rho}{s} \, \mathrm{d}r + i \int_{(DF)} \frac{\rho'}{s'} \, \mathrm{d}r - \int_{(DF)} \left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{B}} \right) \cdot \mathbf{d}\overrightarrow{r}$$

Après mise en facteur de l'intensité i, on reconnaît la résistance totale du dispositif dans sa configuration à l'instant t:

$$R_t(t) = \int_{(FGAD)} \frac{\rho}{s} \, \mathrm{d}r + \int_{(DF)} \frac{\rho'}{s'} \, \mathrm{d}r$$

d'où :

$$R_t(t) i = \int_{(DF)} \left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{B}} \right) \cdot d\overrightarrow{r}$$

L'intégrale n'est autre que l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux du champ magnétique à travers la surface s'appuyant sur le contour fermé orienté que constitue le circuit, l'orientation de la surface étant déterminée par la règle du tire-bouchon de Maxwell par partir de l'orientation du contour.

• Il n'y a donc pas incompatibilité entre l'équation de Maxwell-Faraday dans le référentiel d'étude et l'existence d'un phénomène avéré d'induction électromagnétique, seulement un changement de référentiel à prendre en compte.

6 Les équations de propagation des champs

6.1 Les équations de propagation du champ électrique

• Prenons le rotationnel des deux membres de l'équation de Maxwell-Faraday ; selon les propriétés des opérateurs vectoriels, nous obtenons :

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{\mathbf{E}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\left(\operatorname{div}\overrightarrow{\mathbf{E}}\right) - \Delta\overrightarrow{\mathbf{E}} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{\mathbf{B}}\right)$$

En insérant les postulats donnés par les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère, il vient :

$$\Delta \vec{\mathbf{E}} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \overrightarrow{\mathbf{grad}} \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{j}}}{\partial t}$$
(17-20)

• Le membre de gauche de (17-20) est un opérateur caractéristique de la propagation à trois dimension d'une grandeur physique, le d'Alembertien, égal à la différence du laplacien et d'un terme proportionnel à la dérivée seconde par rapport au temps :

$$\Box = \Delta - \mu_0 \,\varepsilon_0 \,\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Le membre de droite peut apparaître comme un terme de source du champ électromagnétique si les densités volumiques de courants et de charges électriques sont imposées par l'extérieur. (17-20) est l'équation de propagation du champ électrique dans le vide, en présence de charges et de courants.

• L'homogénéité de la formule requiert que le produit $\mu_0 \varepsilon_0$ ait la dimension de l'inverse du carré d'une vitesse. On pose :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \,\varepsilon_0}} \qquad (17-21)$$

Les valeurs numériques de la permittivité diélectrique et de la perméabilité magnétique du vide donnent pour valeur de *c*, celle de la célérité de la lumière dans le vide. Ainsi, selon la synthèse opérée par Maxwell, les ondes lumineuses n'étaient rien d'autre que des ondes électromagnétiques dans un domaine particulier de fréquences du spectre.

• Dans une région de l'espace où les les densités volumiques de courants et de charges électriques sont nulles, l'équation de propagation du champ électrique devient l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \overrightarrow{\mathbf{E}} - \mu_0 \,\varepsilon_0 \,\frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0} \qquad (17-22)$$

6.2 Les équations de propagation du champ magnétique

• En procédant de même à partir de l'équation de Maxwell-Ampère et en insérant les postulats de Maxwell-Faraday et de Maxwell-flux, nous obtenons l'équation de propagation du champ magnétique dans le vide :

$$\Delta \overrightarrow{\mathbf{B}} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{B}}}{\partial t^2} = -\mu_0 \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\mathbf{j}}$$
(17-23)

en présence d'une densité volumique de courants électriques.

• La structure de l'équation obtenue est la même que (17-2) : le champ magnétique est soumis au même opérateur traduisant la propagation que le champ électrique et elle possède un second membre qui fait office de source.

• En l'absence de densité volumique de courants, l'équation de propagation du champ magnétique devient l'équation de d'Alembert du champ magnétique :

$$\Delta \vec{\mathbf{B}} - \mu_0 \,\varepsilon_0 \,\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2} = \vec{0} \tag{17-24}$$

rigoureusement identique à celle portant sur le champ électrique.

6.3 Importance des courants de déplacement

• Les deux calculs faits montrent que, sans densité volumique de courants de déplacement, les membres dans lesquels les champs interviennent dans les équations (17-20) et (17-23) se réduiraient au laplacien de chacun d'eux. Les équations en question seraient des équations de Poisson « un peu plus complètes ». Elle ne manifesteraient aucune propagation des champs.

• Sans la symétrisation introduite par la densité volumique des courants de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère, il n'y aurait pas de couplage des champs et pas de phénomènes de propagation du champ électromagnétique.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Soit l'équation de propagation dans le vide du champ électrique ou du champ magnétique. Une des interprétations possibles des résultats négatifs des expériences de Michelson et Morley est de supposer l'invariance de la célérité de la lumière dans tous les référentiels.

Le principe de relativité restreinte la postule ainsi que l'invariance des lois de la physique qui doivent avoir la même forme dans tous les référentiels galiléens. En particulier, la forme de l'équation de propagation du champ électromagnétique demeure la même dans tous les référentiels galiléens.

Soit \mathcal{R} et \mathcal{R}' deux référentiels galiléens, le référentiel \mathcal{R}' étant en mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse v le long de l'axe Ox, les axes des deux référentiels étant deux à deux parallèles.

Soit \vec{E} et \vec{E}' le même champ électrique exprimé dans chacun des deux référentiels :

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{E}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{E}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{E}}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{E}}'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{E}}}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{E}}}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{E}}}{\partial t'^2} = 0$$

1. Montrez que la transformation de Galilée :

x' = x - vt; y' = y; z' = z; t' = t

ne parvient pas à faire conserver la même forme à l'opérateur d'Alembertien.

2. Einstein et Poincaré ont cherché à savoir si la transformation suivante pouvait le faire :

 $x' = a_{11}x + a_{12}t$; y' = y; z' = z; $t' = a_{21}x + a_{22}t$.

Montrez que c'est le cas et déterminer la matrice des coefficient $(a_{ij})_{(i,j)\in 1,2^2}$ sachant qu'au faibles vitesses la transformation recherchée doit avoir pour limite la transformation de Galilée au premier ordre en v/c.

18 Énergie du champ électromagnétique

1. Théorème de Poynting

1.1 Densité volumique de puissance transmise aux charges

• Soit un référentiel galiléen; soit une densité volumique de charge électrique $\rho(\vec{r}, t)$ et la densité volumique des courants électriques qu'elles créent, $\vec{j}(\vec{r}, t)$. Une charge q_i placée en \vec{r}_i appartenant à cette collection est soumise à une force de Lorentz dans le champ électromagnétique de la distribution, dont la puissance dans le référentiel d'étude est :

$$\mathcal{P}_i = q_i(\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}_i, t) + \vec{v}_i \wedge \vec{\mathbf{B}}(\vec{r}_i, t)) \cdot \vec{v}_i = q_i \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}_i, t) \cdot \vec{v}_i$$

Lorsque l'on somme sur toutes les particules d'un volume élémentaire d τ autour du point \vec{r} , la puissance échangée entre le champ et les charges qu'il contient, s'exprime :

$$d\mathcal{P} = \overrightarrow{\mathbf{j}}(\overrightarrow{r}, t) \cdot \overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{r}, t) d\tau$$
(18-1)

• La quantité $\vec{j}(\vec{r},t) \cdot \vec{E}(\vec{r},t)$ est la **densité volumique de puissance** échangée entre le champ électromagnétique et les charges. Elle a pour dimension M.L⁻¹.T⁻³. Son unité est le watt par mètre-cube, de symbole W.m⁻³.

1.2 Théorème de Poynting et définitions

• L'usage des équations de Maxwell (17-9) à (17-12) permettent d'obtenir la relation suivante, le théorème de Poynting :

div
$$\left(\frac{\vec{\mathbf{E}} \wedge \vec{\mathbf{B}}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}}^2}{2} + \frac{\vec{\mathbf{B}}^2}{2\mu_0}\right) = -\vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$$
 (18-2)

• Le vecteur de Poynting au point \vec{r} , à l'instant *t* est le vecteur :

$$\vec{\mathbf{R}}(\vec{r},t) = \frac{\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t) \wedge \vec{\mathbf{B}}(\vec{r},t)}{\mu_0}$$
(18-3)

Sa dimension est celle d'une puissance par unité de surface $M.T^{-3}$. Son unité est le watt par mètre-carré, de symbole $W.m^{-2}$.

• La quantité, définie dans le vide au point \vec{r} , à l'instant t par le scalaire :

$$w_{em} = \frac{\varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}}^2(\vec{r}, t)}{2} + \frac{\vec{\mathbf{B}}^2(\vec{r}, t)}{2\mu_0}$$
(18-4)

a la dimension d'une énergie volumique, $M.L^{-1}.T^{-3}$. Son unité est le joule par mètre-cube, de symbole $J.m^{-3}$. Elle est prise pour expression de la **densité d'énergie électromagnétique dans le vide**.

1.3 Interprétation du théorème de Poynting

• Le vecteur de Poynting rapportée à la densité volumique de l'énergie électromagnétique fournit une expression homogène à une vitesse. Il peut de la sorte être assimilé à une densité de volumique de courant d'énergie électromagnétique.

• L'équation qui exprime le théorème de Poynting possède la structure d'une équation locale de conservation, à l'instar de celle de la charge, avec un terme de source. Elle est interprétée comme une équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique. En l'intégrant sur un volume \mathcal{V} délimité par une surface fermée Σ , elle conduit à :

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathbf{R}} \cdot d\overrightarrow{S} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{\mathcal{V}} w_{em} \,\mathrm{d}\tau = - \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\mathbf{j}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{E}} \,\mathrm{d}\tau \qquad (18-5)$$

ou

$$d \iiint_{\mathcal{V}} w_{em} \, \mathrm{d}\tau = -\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathbf{R}} \, \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} - \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\mathbf{j}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{E}} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau \qquad (18-6)$$

• (18-6)) s'analyse comme suit. La variation entre les instants t et t + dt de l'énergie électromagnétique contenue dans le volume \mathcal{V} est due à l'énergie apportée par l'intermédiaire du flux du vecteur de Poynting à travers la surface fermée Σ qui délimite le volume \mathcal{V} et à celle échangée dans le volume même entre le champ et les charges.

Pour ce dernier terme, si le produit scalaire $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ est positif, les charges sont localement accélérée et elles gagnent de l'énergie au détriment du champ électromagnétique; sinon, les charges perdent de l'énergie qu'elles fournissent alors au champ, contribuant ainsi à le renforcer.

2. Illustrations du théorème de Poynting

2.1 Cas d'un conducteur ohmique

• Soit un conducteur ohmique cylindrique, de longueur *l* et de rayon *a*, de conductivité γ . La densité volumique de courant y est proportionnelle au champ électrique : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Nous supposons les deux champs uniformes et axiaux à l'intérieur du conducteur. Nous supposons que le régime est indépendant du temps, le conducteur étant parcouru par un courant électrique d'intensité $I = \pi a^2 j = \pi a^2 \gamma E$.



FIGURE 60 – Vecteurs des champs électrique, magnétique et de Poynting dans le conducteur ohmique

• La puissance volumique reçue par les charge est $\vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E}^2$, toujours positive. La puissance reçue par les charges dans tout le volume conducteur vaut ainsi $\gamma \vec{E}^2 \pi a^2 l$.

• Le régime étant stationnaire, la quantité d'énergie accumulée est invariable. La puissance reçue par les charges est véhiculée par le flux du vecteur de Poynting à travers la surface qui délimite le conducteur : le champ électrique en tout point du conducteur est $\vec{\mathbf{E}} = E \vec{\mathbf{e}}_z$.

Si nous approximons le cylindre par un fil rectiligne infini, le champ magnétique à sa périphérie est égal à $\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{\mathbf{e}}_{\theta}$, Le vecteur de Poynting vaut : $\vec{\mathbf{R}} = \frac{\vec{\mathbf{E}} \wedge \vec{\mathbf{B}}}{\mu_0} = -\frac{EI}{2\pi a} \vec{\mathbf{e}}_r$ et son flux à travers la surface latérale du conducteur ohmique est égal à $-EIl = -\gamma E^2 \pi a^2 l$. Nous retrouvons (**18-5**) réduite à :

$$\iiint_{\Sigma} \vec{\mathbf{R}} \cdot d\vec{S} = -\iiint_{V} \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{E}} d\tau$$

La puissance transmise aux charges est véhiculée par le vecteur de Poynting à travers l'enveloppe extérieure du circuit.

2.2 Cas du condensateur

• Soit un condensateur plan formé de deux armatures circulaires en vis-à-vis, d'aires S et distantes de *e*. Nous supposons négligeables les effets de bords.



FIGURE 61 - Rôle du vecteur de Poynting dans l'énergie du condensateur

En électrocinétique, l'énergie électrique emmagasinée par le condensateur s'exprime $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} C U^2$; or, le champ électrique entre les armatures et la tension sont liés par U = Ee et la capacité a été montrée (cf. (13.12)) égale à $\varepsilon_0 \frac{S}{e}$. Il en ressort que :

$$\mathcal{E}_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \, S \, e$$

L'énergie électrique apparaît comme le produit de la densité volumique d'énergie liée au champ électrique, $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$, constante dans l'espace entre les armatures et du volume *S e* offert au champ. Elle est délocalisée partout où règne le champ électrique et non comme la simple somme des travaux des forces de Coulomb entre les particules qui chargent les armatures, travaux qui apparaissent pendant l'accumulation des charges électriques sur les armatures.

• En régime variable, dans le cadre de l'A.R.Q.S., le champ électrique et son énergie varient au cours du temps. $\vec{\mathbf{E}} = \frac{u(t)}{e} \vec{\mathbf{e}}_z$; l'énergie électrique emmagasinée à l'instant *t* est égale à : $\frac{\varepsilon_0 u^2(t)S}{2e}$ et sa dérivée par rapport au temps à $\frac{\varepsilon_0 u(t)S}{e} \frac{du}{dt}$.

• Le courant de déplacement entre les armatures vaut $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, soit $\frac{\varepsilon_0}{e} \frac{du}{dt} \vec{e}_z$. μ_0 fois son flux à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé Γ , coaxial aux conducteurs d'arrivée et de départ des charges électriques et dans un plan parallèles aux armatures, est égal à la circulation du champ magnétique le long du contour ; d'où l'existence, à la périphérie du condensateur, d'un champ magnétique orthoradial égal à :

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{2ec^2} \sqrt{\frac{S}{\pi}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \vec{\mathbf{e}}_{\theta}$$

où $\mu_0 \varepsilon_0$ est remplacé par $1/c^2$.

Le vecteur de Poynting en un point de la surface latérale du condensateur est ainsi :

$$\vec{\mathbf{R}} = -\frac{\varepsilon_0 u}{2e^2} \sqrt{\frac{S}{\pi}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \vec{\mathbf{e}}_r$$

Son flux à travers la surface latérale de hauteur e et de rayon $\sqrt{S/\pi}$ conduit à une puissance égale à $-\frac{\varepsilon_0 u(t)S}{e} \frac{du}{dt}$, opposée à la dérivée de l'énergie emmagasinée, conformément au théorème de Poynting, qui se réduit, dans la situation étudiée, à :

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathbf{R}} \cdot d\overrightarrow{S} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{\mathcal{W}} w_{em} \,\mathrm{d}\tau = 0$$

avec pour seule contribution à la densité volumique d'énergie électromagnétique la partie liée au champ électrique, $\frac{\varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}}^2}{2}$.

2.3 Cas de la bobine d'auto-induction

• Soit une bobine d'auto-induction, de longueur totale l, constituée de N spires jointives, d'aire S, . Nous supposons ses dimensions telles que l'approximation du solénoïde infiniment long soit valable.



FIGURE 62 – Rôle du vecteur de Poynting dans l'énergie de la bobine

En électrocinétique, l'énergie magnétique emmagasinée par le solénoïde s'exprime $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}LI^2$; or, le champ magnétique dans la bobine et l'intensité du courant électrique sont liés par $B = \mu_0 \frac{N}{l}I$ et l'inductance *L* a été montrée (cf. **Toute la MPSI en fiches** ((23-4))) égale à $\mu_0 \frac{N^2S}{l}$. Il en ressort que :

$$\mathcal{E}_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \, S \, l$$

L'énergie magnétique apparaît comme le produit de la densité volumique d'énergie liée au

champ magnétique, $\frac{B^2}{2\mu_0}$, constante dans le volume du solénoïde et du volume *S l* offert au champ.

Elle est délocalisée partout où règne le champ magnétique et non comme une simple énergie associée au travail fourni aux charges pour lutter contre la force contre-électromotrice induite lors de l'établissement du courant électrique dans la bobine.

• En régime variable, dans le cadre de l'A.R.Q.S., le champ magnétique et son énergie varient au cours du temps. $\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \frac{N}{l} i(t) \vec{\mathbf{e}}_z$; l'énergie magnétique emmagasinée à l'instant *t* est égale à : $\mu_0 \frac{N^2 S i^2(t)}{2l}$ et sa dérivée par rapport au temps à $\mu_0 \frac{N^2 S i(t)}{l} \frac{di}{dt}$.

• La variation du champ magnétique entraîne la circulation d'un champ électrique autour de l'axe du solénoïde. D'après la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday, l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux du champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé Γ , coaxial à la bobine et dans un plan perpendiculaire à cet axe, est égal à la circulation du champ électrique le long du contour ; d'où il résulte à la périphérie de la bobine un champ électrique orthoradial égal à :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\mu_0 \frac{N}{2l} \sqrt{\frac{S}{\pi}} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \vec{\mathbf{e}}_{\theta}$$

Le vecteur de Poynting en un point de la surface de la bobine est ainsi :

$$\vec{\mathbf{R}} = -\frac{\mu_0 N^2 i}{2l^2} \sqrt{\frac{S}{\pi}} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \vec{\mathbf{e}}_r$$

Son flux à travers la surface latérale de hauteur l et de rayon $\sqrt{S/\pi}$ conduit à une puissance égale à $-\mu_0 \frac{N^2 S i(t)}{l} \frac{di}{dt}$, opposée à la dérivée de l'énergie emmagasinée, conformément au théorème de Poynting, qui se réduit, dans la situation étudiée, à :

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathbf{R}} \cdot d\overrightarrow{S} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{W} w_{em} \,\mathrm{d}\tau = 0$$

avec pour seule contribution à la densité volumique d'énergie électromagnétique la partie liée au champ magnétique, $\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$.

19 Le champ électromagnétique dans le vide sans charges ni courants électriques

1. Solutions de l'équation de d'Alembert

1.1 L'équation de d'Alembert des champs

• Rappel : Les champs électrique et magnétique satisfont simultanément, dans le vide sans charge ni courant électrique, les équations de Maxwell qui, combinées entre elles, conduisent aux équations de d'Alembert (17-22) et (17-24) :

$$\Delta \overrightarrow{\mathbf{E}} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \Delta \overrightarrow{\mathbf{B}} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathbf{B}}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$$

• Ces équations sont vectorielles et se déclinent chacune en trois équations scalaires analogues portant sur chacune des composantes cartésiennes des champs. Lorsque les champs ne dépendent spatialement que d'une seule des coordonnées spatiales cartésiennes, x par exemple, les équations de propagation se réduisent à :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \mu_0 \,\varepsilon_0 \,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

où f désigne l'une des six composantes E_x , E_y , E_z , B_x , B_y ou B_z .

1.2 Célérité de propagation des champs

c, la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide, est définie à partir des constantes caractéristiques de l'interaction électromagnétique par la relation :

$$\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1 \qquad (19-1)$$

que nous utiliserons dès que l'écriture d'une expression s'en trouvera simplifiée.

1.3 Les solutions progressives

Toute fonction g deux fois dérivable peut servir à construire une solution de l'équation de d'Alembert en posant f(x, t) = g(x - ct) ou f(x, t) = g(x + ct). Les solutions du premier type décrivent des **ondes progressives** de la grandeur f se propageant dans le sens des x croissants; celles du second type décrivent des ondes progressives se propageant dans le sens des x décroissants.

1.4 Les solutions stationnaires

• L'équation de d'Alembert à une dimension admet des solutions f(x, t) de la forme g(x)h(t). La méthode de séparation des variables prouve que les fonctions g et h physiquement acceptables - qui ne divergent pas lorsque x tend vers $\pm \infty$ - sont $g(x) = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx)$ et $h(t) = B_1 \cos(kct) + B_2 \sin(kct)$ où k est une constante réelle quelconque.

• De telles solutions sont dites stationnaires.

1.5 Linéarité de l'équation d'onde

La linéarité de l'équation de d'Alembert (à une ou trois dimensions) entraîne que toute combinaison linéaire de solutions de l'équation est encore solution de l'équation. Cette propriété mathématique est la traduction du principe de superposition observé sur les effets électromagnétiques qui se déroulent dans le vide.

2. L'onde électromagnétique plane progressive

2.1 Définition de l'onde électromagnétique

• Une **onde électromagnétique** est une perturbation de l'état électrique et magnétique de l'espace qui se manifeste par l'existence de champs électrique et magnétique variables dans le temps, couplés entre eux de manière à se propager dans l'espace.

• Elle est entièrement décrite par le couple des champs électrique et magnétique couplés, appelé **champ électromagnétique** qui se propage dans le vide, au point de rendre synonyme entre elles les expressions « champ électromagnétique » et « onde électromagnétique ».

• Cependant, la notion d'onde électromagnétique fait référence, sans précision, à une onde progressive. Si le champ électromagnétique est stationnaire, il est d'usage de signaler ce caractère dans la dénomination de l'onde.

2.2 Structure de l'onde progressive

• Une onde électromagnétique progressive est décrite par une solution progressive des équations de d'Alembert des champs électriques et magnétiques. Chaque composante des deux champs de l'onde est une solution progressive d'une équation de d'Alembert scalaire. Les composantes doivent collectivement satisfaire les quatre équations de Maxwell dans le vide sans charge ni courant électriques, ce qui les rend dépendantes les unes des autres. Cette condition structure le champ électromagnétique de manière particulière.

• Une onde électromagnétique progressive est **plane** lorsqu'il est possible de trouver un repère de coordonnées cartésiennes du référentiel d'étude dans lequel le champ électromagnétique est progressif et ne dépend que d'une seule des coordonnées spatiales du repère.

• Si l'on exclut les solutions indépendantes du temps, la première conséquence, tirée des équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-flux, est que les champs électrique et magnétique d'une onde plane progressive sont, en tout point et à tout instant, orthogonaux à la direction de propagation : l'onde plane progressive est **transversale**.

• Si, par le choix fait des axes du repère de projection, l'onde électromagnétique se propage selon la direction x'x, les champs variables qui la décrivent ne dépendent spatialement que de x; la transversalité de l'onde conduit à $E_x(x, t) = 0$ et $B_x(x, t) = 0$.

• Les quatre composantes non nulles doivent aussi vérifier les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Gauss. Pour une onde progressive se propageant vers les x croissants, ceci implique que $B_y(x,t)$ soit égale à $-\frac{E_z(x,t)}{c}$ et que $B_z(x,t)$ soit égale à $\frac{E_y(x,t)}{c}$. Aucune autre condition ne s'impose aux composantes du champ.

Remarque : Si la propagation s'effectue vers les x décroissants, les conditions à satisfaire sont : $B_y(x,t) = \frac{E_z(x,t)}{c}$ et $B_z(x,t) = -\frac{E_y(x,t)}{c}$, sans autre condition.

270 Physique

• Ainsi, le champ électromagnétique d'une onde plane progressive se propageant dans le vide sans charge ni courant vers les *x* croissants est de la forme :

$$\vec{\mathbf{E}}(x,t) = E_y(x,t)\vec{\mathbf{e}}_y + E_z(x,t)\vec{\mathbf{e}}_z$$
$$\vec{\mathbf{B}}(x,t) = -\frac{E_z(x,t)}{c}\vec{\mathbf{e}}_y + \frac{E_y(x,t)}{c}\vec{\mathbf{e}}_z = \frac{1}{c}\vec{\mathbf{e}}_x\wedge\vec{\mathbf{E}}(x,t) \quad (19-2)$$

où $E_y(x,t) = f(x-ct)$ et $E_z(x,t) = g(x-ct)$ avec f et g deux fonctions quelconques deux fois dérivables.

• Les deux champs sont en permanence orthogonaux l'un à l'autre et à la direction de propagation. La structure de l'onde électromagnétique **plane, progressive** est ainsi caractérisée par les propriétés suivantes :

a. le trièdre $(\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{e}}_x)$ est un trièdre orthogonal direct; **b.** $c ||\vec{\mathbf{B}}|| = ||\vec{\mathbf{E}}||.$

2.3 Vitesse de phase

• La valeur du champ électrique (resp. magnétique) est, à un instant donné *t*, la même en tout point d'un plan perpendiculaire à la direction de propagation. Ces plans sont appelés **plans d'onde** ou **plans équiphase**.

• L'état électromagnétique des points d'un plan d'onde donné, d'équation $x = x_0$ à l'instant t se retrouve à l'instant t + dt, à condition de se trouver dans le plan d'équation $x = x_0 + dx$ tel que l'argument des fonctions f et g des composantes du champ électromagnétique soient les mêmes : x - ct = (x + dx) - c(t + dt).

Ce changement de position du plan d'onde pendant l'intervalle de temps d*t* est caractérisé par une vitesse, appelée **vitesse de phase**, définie par

$$v_{\varphi} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c$$

2.4 Attention aux faux raisonnements !

• Il est tentant de penser qu'un observateur qui se déplacerait à la vitesse de phase dans la direction de propagation de l'onde électromagnétique - ce qui est, matériellement parlant, impossible selon la dynamique relativiste - la verrait se figer par rapport à lui, « arrêtant » en quelque sorte son défilement.

Il n'en est rien : son déplacement entraîne le système de coordonnées dont il est, par exemple, l'origine et les horloges dont il se sert pour repérer les instants.

Selon le principe de relativité, l'onde électromagnétique qu'il y décrira se déplacera toujours à la vitesse de la lumière dans son référentiel.

• La vitesse de phase traduit simplement le fait que *deux* observateurs, dans le même référentiel, qui auraient synchronisés leurs montres et se seraient placés, l'un en x_0 et l'autre en x_1 en ayant convenu entre eux de relever l'état électromagnétique de l'espace, à l'instant t_0 pour le premier et à t_1 avec $x_1 - x_0 = v_{\varphi}(t_1 - t_0)$ pour le second, et qui compareraient les relevés dans leurs environnements respectifs des valeurs du champ électromagnétique de l'onde plane progressive se propageant selon x'x qu'ils auraient effectués, seraient en mesure de les faire exactement coïncider.

3. Énergétique de l'onde plane progressive

3.1 Densité volumique de courant

• La densité volumique d'énergie électromagnétique associée à une telle onde vaut, par sa définition (18-4) et en tenant compte de la structure de l'onde :

$$w_{em} = \varepsilon_0 \left(E_y^2(x,t) + E_z^2(x,t) \right) = \varepsilon_0 \left(\overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{r},t) \right)^2$$
(19-3)

• En chaque point de l'espace et à chaque instant, les contributions des deux champs à la densité volumique d'énergie électromagnétique sont égales : il y a équipartition de l'énergie électromagnétique entre les champs électrique et magnétique.

3.2 Vecteur de Poynting et flux de puissance

• Le vecteur de Poynting associé à l'onde s'exprime :

$$\overrightarrow{\mathbf{R}}(x,t) = \frac{E_y^2(x,t) + E_z^2(x,t)}{\mu_0 c} \overrightarrow{\mathbf{e}}_x = w_{em}(x,t) c \overrightarrow{\mathbf{e}}_x$$
(19-4)

Il est dirigé dans la direction et le sens de propagation de l'onde électromagnétique.

• (19-4) fait apparaître, par analogie avec la définition de la densité volumique de courants électriques par rapport à la densité volumique de charge électrique, le vecteur de Poynting comme une densité volumique de flux d'énergie électromagnétique. Cette dernière se déplace alors à la célérité c de la lumière dans le vide.

4. Onde plane progressive monochromatique

4.1 Définitions

• Une onde électromagnétique plane, progressive se propageant vers les x croissants est dite **monochromatique** de fréquence temporelle f ou de pulsation temporelle $\omega = 2\pi f$ si les composantes de son champ électromagnétique ont la forme $A_i \cos(\omega t - kx + \varphi_i)$.

• A_i est l'amplitude de l'une des composantes du champ électromagnétique $(E_v(x, t), E_z(x, t), t)$

 $B_v(x,t)$ ou $B_z(x,t)$). $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{ke_x}$ est le **vecteur d'onde** de l'onde électromagnétique.

4.2 Ses périodicités

• Une telle onde possède une périodicité temporelle, la période :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

et une périodicité spatiale, la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

• L'état électromagnétique du vide traversé par une telle onde est le même à deux instants séparés d'un nombre entier de périodes T. Il est aussi le même, à chaque instant, en deux points appartenant à des plans d'onde distants d'un nombre entier de longueurs d'onde λ .

4.3 Généralisation de l'expression d'une O.E.M.P.P.M.

• Une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique de pulsation ω se dirigeant dans une direction caractérisée par le vecteur unitaire \vec{u} a pour vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}$ avec k > 0.

Les composantes de son champ électromagnétique sont de la forme $A_i \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_i)$. Elles sont telles que :

 \succ ($\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{B}}, \vec{k}$) est à tout instant et en tout point de l'espace un trièdre orthogonal direct;

 $\succ \vec{k}$ et ω sont liés par la **relation de dispersion** dans le vide sans charges ni courants électriques :

$$\left(\overrightarrow{k}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$
 (19-5)

 $\succ c \| \overrightarrow{\mathbf{B}} \| = \| \overrightarrow{\mathbf{E}} \|.$

• Les plans affines perpendiculaires au vecteur d'onde de l'onde plane progressive monochromatique sont appelés **plans d'onde** ou **plans équiphases**. Les phases instantanées $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ des points d'un plan d'onde donné ont la màme valeur à un instant donné.

• Lors de la propagation, un plan d'onde quelconque se déplace entre les instants t et t + dtdans la direction de \vec{k} , d'une longueur ds. Sa vitesse v_{φ} , la **vitesse de phase**, est égale à $\frac{ds}{dt}$. Elle est telle que la valeur de la phase instantanée demeure la même, d'où $\omega dt - kds = 0$. La vitesse de phase est donc égale à :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = c \qquad (19-6)$$

La vitesse de phase des ondes planes progressives monochromatique dans le vide est égale à la vitesse de la lumière dans le vide. Elle est aussi la vitesse de propagation de l'énergie quand rien ne vient limiter l'espace de propagation accordé à l'onde.

4.4 Notations complexes du champ électromagnétique

• Le champ électromagnétique d'une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω , se propageant dans la direction \vec{u} et de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}$ est représenté par les vecteurs complexes :

$$\vec{\underline{\mathbf{E}}}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{E}}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \qquad \vec{\underline{\mathbf{B}}}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{B}}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

dont les parties réelles sont les composantes du champ électromagnétique. \vec{E}_0 et \vec{B}_0 sont des vecteurs constants dont les trois composantes sont des nombres complexes dont les parties réelles et imaginaires ont toutes deux les dimensions respectives de champs électrique ou magnétique.

• Les équations de Maxwell dans le vide sans charge ni courants électriques, équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre se transforment, après simplifications, en un système d'équations linéaires sur $\vec{\mathbf{E}}_0$ et $\vec{\mathbf{B}}_0$:

$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{E}} = 0$	\longleftrightarrow	$-\vec{jk}\cdot\vec{\underline{\mathbf{E}}}_0=0$	(19-7)
$\overrightarrow{\mathbf{rot}} \overrightarrow{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{B}}}{\partial t}$	\longleftrightarrow	$-\overrightarrow{jk}\wedge\overrightarrow{\mathbf{E}}_{0}=-j\omega\overrightarrow{\mathbf{E}}_{0}$	(19-8)
$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{B}} = 0$	\longleftrightarrow	$-\overrightarrow{jk}\cdot\overrightarrow{\mathbf{B}}_0=0$	(19-9)
$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{B}} = 0$	\longleftrightarrow	$-\overrightarrow{jk}\cdot\overrightarrow{\mathbf{B}}_0=0$	(19-10)

• La relation de dispersion provient de l'introduction de (19-8) dans (19-10) (ou réciproquement) en tenant compte de (19-7) (ou de (19-9)).

4.5 Polarisation d'une onde plane, progressive, monochromatique

• Le comportement du champ électrique dans un plan d'onde quelconque caractérise la **po**larisation ou l'état de polarisation de l'onde plane, progressive et monochromatique.

• La polarisation d'une onde électromagnétique plane progressive est **rectiligne** lorsque la direction du champ électrique est invariable au cours du temps. Cette direction est la **direction de polarisation** ; le plan défini par la direction de polarisation et celle de propagation est le **plan de polarisation** de l'onde.

Une polarisation rectiligne se traduit, sur l'expression d'une onde plane progressive se propageant suivant la direction x'x, par la proportionnalité, pour tout x et à tout instant t, des composantes $E_y(x, t)$ et $E_z(x, t)$ du champ électrique : $E_z(x, t) = \alpha E_y(x, t)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{E}}_0$ correspondant sont dans le même rapport réel de proportionnalité.

• Une onde plane progressive polarisée rectilignement se fabrique expérimentalement en faisant passer une onde électromagnétique plane progressive à travers un polariseur. La direction de polarisation du champ électrique après le polariseur est celle indiquée par ce dernier.



FIGURE 63 – Illustration de la loi de Malus

Loi de Malus

Si la puissance surfacique d'une onde plane progressive de polarisation rectiligne - la norme de son vecteur de Poynting - est R_0 , alors celle de l'onde qui aura traversé un analyseur dont la direction fait un angle α avec celle de la polarisation vaut $R = R_0 \cos^2 \alpha$.

• Une onde plane progressive monochromatique peut avoir une **polarisation circulaire** (resp. **elliptique**) lorsque l'extrémité du vecteur champ électrique dans un plan d'onde donné décrit au cours du temps un cercle (resp. une ellipse).

La polarisation est **circulaire gauche** (resp. **elliptique gauche**) si, pour un observateur recevant l'onde, le vecteur champ électrique tourne dans le sens trigonométrique ; dans le cas contraire, elle est **circulaire droite** (resp. **elliptique droite**).



FIGURE 64 – Illustration des types de polarisation

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Le champ magnétique complexe d'une onde plane progressive monochromatique est :

$$\vec{\underline{\mathbf{B}}}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{B}}}_0 \exp j(\omega t - kz) \operatorname{avec} \vec{\underline{\mathbf{B}}}_0 = B_{0x} \vec{\mathbf{e}}_x + j B_{0x} \vec{\mathbf{e}}_y.$$

- 1. Quelle est la direction de propagation de l'onde ?
- 2. Retrouvez la relation de dispersion.
- 3. Déterminez le champ électrique associé à cette O.E.M.P.P.M.
- 4. Quelle est la polarisation de l'onde en question ?

Exercice 2 : Déterminez l'ordre de grandeur du champ électrique d'un faisceau laser de diamètre 1 mm sachant qu'il transporte une puissance de 2 mW.

Exercice 3 : Nous faisons l'approximation qu'un émetteur radiophonique diffuse toute sa puissance moyenne $\mathcal{P} = 10$ kW autour de lui à travers un cylindre de hauteur *h* à une distance

d de sorte que $\frac{h}{d} = tan\theta \approx 49^{\circ}$. Son champ électromagnétique à grande distance possède les caractéristiques d'une onde plane progressive sinusoïdale.

1. Estimez l'amplitude maximale des champs électrique et magnétique de l'onde émise à aux distances 5 et 15 km.

2. Deux émetteurs identiques sont à une distance de 35 km l'un de l'autre. On suppose qu'il on la même fréquence d'émission. Que se passe lorsque l'on est à mi-distance entre les deux ?
3. Oue fait-on en pratique pour éviter cet inconvénient ?

20 Propagation du champ électromagnétique dans un plasma

1. Description succincte d'un plasma

1.1 Définition

• Un **plasma** est un gaz partiellement ou totalement ionisé, globalement neutre : atomes ou molécules neutres, ions positifs portant une ou plusieurs charges positives élémentaires et électrons libres de se déplacer entre les entités neutres et les ions sont mélangés.

• n_e est la concentration moyenne des électrons dans le plasma et n_i celle des ions positifs de charge moyenne q_i . $n_i q_i = n_e e$ traduit la neutralité globale du plasma. m_e et M_i désignent les masses respectives d'un électron et d'un ion positif; e, la charge élémentaire.

1.2 Hypothèses sur ses caractéristiques physiques

• Le plasma est supposé localement neutre et les concentrations locales en ions et en électrons sont égales aux concentrations moyennes dans le plasma.

• La température du plasma est suffisamment peu élevée de sorte que les vitesses d'agitation thermique de ses constituants, électrons ou ions, ne soient pas relativistes.

• Les électrons et en ions sont en concentrations relatives suffisamment faibles pour pouvoir négliger leurs interactions électromagnétiques réciproques.

• Si une onde électromagnétique se propage dans le plasma, l'intensité de son champ électrique est insuffisante pour faire acquérir aux charges des vitesses relativistes.

• Les normes des champs d'une onde électromagnétique dans le plasma sont dans un rapport de l'ordre de c, la célérité de la lumière dans le vide.

2. Évolution des charges dans le plasma

2.1 Mouvement d'une charge dans le plasma

• Une onde électromagnétique se propage dans le plasma ; chaque particule chargée subit de la part de son champ électrique une force de Lorentz qui la met en mouvement. Localement, ces mouvements se traduisent collectivement par l'apparition d'une densité volumique de courants électriques, mais pas de charge électrique.

• La dynamique d'un électron et d'un ion positif au voisinage du point \vec{r} et autour de l'instant t dans le champ électromagnétique de l'onde sont supposées convenablement décrite par la dynamique newtonienne, leurs vitesses n'étant pas relativistes. Les hypothèses constitutives du plasma font que chaque particule n'est essentiellement soumise qu'à la partie électrique de la force de Lorentz. Il en résulte les équations du mouvement suivantes, en supposant le référentiel d'étude galiléen :

$$m_e \frac{d\vec{\mathbf{v}}_e}{dt} = -e \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t) \qquad \qquad M_i \frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt} = q_i \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t)$$

2.2 Densité volumique de courants électriques

• D'après (17-1), la densité volumique de courant est connue si les densités volumiques locales et les vitesses d'ensemble des charges des diverses espèces le sont. Nous supposons que les vitesses d'ensembles sont déterminables à partir de la dynamique de régime permanent d'un représentant de chaque espèce de particules.

• La densité volumique de courants électriques en résulte :

$$\vec{\mathbf{j}}(\vec{r},t) = n_i q_i \vec{\mathbf{v}}_i(\vec{r},t) - n_e e \vec{\mathbf{v}}_e(\vec{r},t) = n_e e(\vec{\mathbf{v}}_i(\vec{r},t) - \vec{\mathbf{v}}_e(\vec{r},t))$$
(20-1)

• Lorsque le champ électrique oscille harmoniquement, les vitesses en régime sinusoïdal forcé des électrons et des ions oscillent elles-aussi harmoniquement et s'expriment, en notations complexes :

$$\vec{\underline{v}}_e = -\frac{e}{jm_e\omega}\vec{\underline{E}}$$
 et $\vec{\underline{v}}_e = \frac{q_i}{jM_i\omega}\vec{\underline{E}}$

Il en découle l'expression de la densité volumique de courants électriques dans le plasma, en notations complexes :

$$\vec{\underline{j}}(\vec{r},t) = \frac{n_e e}{j\omega} \left(\frac{q_i}{m_i} + \frac{e}{m_e}\right) \vec{\underline{E}}(\vec{r},t)$$

• Les ions possèdent une charge moyenne probablement comprise entre e et 2e - un seul, deux au maximum, électron(s) est (sont) arraché(s) à une même entité.

Comme leur masse est au moins 2000 fois supérieure à celle des électrons, il est légitime de négliger leur contribution à la densité volumique de courants électriques sous le régime d'hypothèses simplificatrices faites. Aussi retenons nous :

$$\vec{\underline{j}}(\vec{r},t) = \frac{n_e e^2}{j m_e \omega} \vec{\underline{E}}(\vec{r},t)$$
(20-2)

• La densité volumique de courants électriques est proportionnelle au champ électrique existant dans le milieu, au sens complexe. Il s'agit d'une loi d'Ohm en régime sinusoïdal du plasma.

La conductivité y est une grandeur complexe : la densité volumique de courant est en quadrature avance sur le champ électrique, donc il est prévisible qu'il puisse y avoir propagation sans atténuation d'une onde électromagnétique car la puissance volumique moyenne communiquée par le champ aux charges est nulle.

Il en résultera, d'après le théorème de Poynting, une conservation moyenne de l'énergie électromagnétique à travers le plasma.

3. Équations de Maxwell dans le plasma

3.1 Notations complexes du champ électromagnétique

• Soit une onde électromagnétique plane progressive monochromatique de pulsation ω et de constante de propagation k se propageant dans le plasma suivant la direction x'x, dans le sens des x croissants. Son champ électromagnétique est donné par les parties réelles des champs complexes suivants :

$$\vec{\underline{\mathbf{E}}}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{E}}}_0 e^{j(\omega t - kx)} \qquad \vec{\underline{\mathbf{B}}}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{B}}}_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

où $\mathbf{\vec{E}}_0$ et $\mathbf{\vec{B}}_0$ sont des vecteurs constants.

3.2 Transcription en complexe des équations de Maxwell

• Le plasma est supposé localement neutre : sa densité volumique de charge électrique est partout nulle ; il est le siège de la densité volumique de courants électriques décrite en fonction du champ électrique par la relation (**20-2**).

• Transcrites en notations complexes, les équations de Maxwell deviennent :

$$-jk\vec{e}_{x}\cdot\vec{E}_{0} = 0 \quad (1) \qquad k\vec{e}_{x}\wedge\vec{E}_{0} = \omega\vec{E}_{0} \quad (2) \qquad -jk\vec{e}_{x}\cdot\vec{E}_{0} = 0 \quad (3)$$

$$-jk\vec{e}_{x}\wedge\vec{E}_{0} = \mu_{0}\left(\frac{n_{e}e^{2}}{jm_{e}\omega} + \varepsilon_{0}j\omega\right)\vec{E}_{0} \quad (4)$$

où $\underline{\rho}_0$ est l'amplitude complexe d'une éventuelle onde de densité volumique de charge dans le plasma.

• Selon (1) et (3), les composantes des champs électriques et magnétiques complexes sur le vecteur \vec{e}_x de la direction de propagation doivent être nulles. Le champ électromagnétique recherché est donc transversal.

3.3 Relation de dispersion

• L'insertion de (2) dans (4), la transversalité du champ électromagnétique et l'hypothèse que \vec{E}_0 soit non nul conduisent à la **relation de dispersion** :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$
 avec $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}$ (20-3)

 ω_p est la **pulsation de plasma**, à laquelle est associée la **fréquence de plasma** $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$.

• Différente de la relation de dispersion (19-5) des ondes électromagnétiques planes, progressives et monochromatiques dans le vide, celle des ondes de même nature dans le plasma présente une pulsation de coupure, la pulsation de plasma, en deçà de laquelle, un champ électromagnétique sinusoïdal ne peut plus se propager dans le plasma.

Si $\omega < \omega_p$, k^2 est négatif : la constante de propagation est imaginaire pure.

Si nous supposons que le plasma occupe le demi-espace des x > 0, le champ électromagnétique complexe y prend alors la forme suivante :

$$\vec{\underline{\mathbf{E}}}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{E}}}_0 e^{-kx} e^{j\omega t} \qquad \vec{\underline{\mathbf{B}}}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{B}}}_0 e^{-kx} e^{j\omega t}$$

Ces expressions ne traduisent pas un phénomène de propagation du champ électromagnétique, mais son oscillation à la pulsation ω , tous les points du plasma vibrant en phase les uns avec les autres.

Par ailleurs, elles manifestent une atténuation de l'amplitude de l'oscillation lorsque l'on s'éloigne de la surface de pénétration de l'on dans le plasma. Un tel champ électromagnétique est est celui d'une **onde évanescente**.

• Si la pulsation du champ est supérieure à la pulsation du plasma, k^2 devient positif et k est réel. Le champ électromagnétique est celui d'une onde électromagnétique qui se propage sans atténuation dans le plasma.

3.4 Propriétés de l'ionosphère

• Couche supérieure de l'atmosphère constituée d'un plasma essentiellement dû au flux photonique solaire, son rôle dans les télécommunications hertziennes a été reconnu très tôt.

• Le cycle diurne dû à la rotation de la Terre fait que la densité électronique varie entre le jour et la nuit. Le maximum de la densité électronique se situe de jour comme de nuit autour de 250 km d'altitude où n_e atteint environ 10^6 cm⁻³ de jour et tombe à 10^5 cm⁻¹ la nuit.

• Les pulsations de plasma qui en résulte correspondent à des fréquences de coupure de l'ordre de 9 MHz en journée et de 3 MHz la nuit. Ces fréquences de coupure permettent de comprendre la propagation des ondes radio dans la bande des ondes longues sur de grandes distances en dépit de la courbure de la Terre. Leurs fréquences sont nettement inférieures aux fréquences de plasma et les ondes électromagnétiques correspondantes se propagent en se réfléchissant sur l'ionosphère et sur les surfaces marines, elles aussi conductrices.

3.5 Caractéristiques des ondes électromagnétiques dans le plasma

• Similitudes avec les champs électromagnétiques qui se propagent dans le vide sans charges ni courants électriques :

> il existe des champs électromagnétiques se propageant dans le plasma qui sont transverses, les champs électrique $\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t)$ et magnétique $\vec{\mathbf{B}}(\vec{r},t)$ et la direction de propagation $\vec{\mathbf{e}}_x$ forment un trièdre orthogonal direct;

➤ les deux champs vibrent alors en phase l'un avec l'autre ;

> leurs normes sont liées par la relation : $\|\vec{\mathbf{B}}(\vec{r},t)\| = \frac{|k|}{\omega} \|\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t)\|$.

Différences

➤ il existe une fréquence, la fréquence de plasma, en dessous de laquelle aucun champ électromagnétique transverse ne se propage dans le plasma, alors qu'il peut y avoir dans le vide sans charges ni courants des ondes électromagnétiques transverses à toutes les fréquences ;

➤ le rapport des normes des champs dépend maintenant de la pulsation du champ électromagnétique sinusoïdal. La vitesse de phase qui donne le rapport est égale à :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$
(20-4)

Elle est toujours supérieure à c et décroît de façon monotone de $+\infty$ lorsque ω tend vers ω_p , à c lorsque la pulsation de l'onde tend vers $+\infty$.

3.6 Propagation d'un paquet d'ondes - phénomène de dispersion

• L'onde électromagnétique plane, progressive et monochromatique n'apporte aucune information. Un signal informatif doit toujours être une superposition de telles ondes pour provoquer une variation qui manifeste la présence d'une nouveauté.

• Or, la dépendance de la vitesse de phase en fonction de la pulsation fait que les plans de phase des diverses composantes du signal ne se déplacent pas à la même vitesse : leurs positions relatives évoluent au cours de la propagation, les plans d'ondes des composantes monochromatiques de plus basses fréquences se déplaçant plus vite que ceux appartenant aux composantes de plus hautes fréquences.

• Supposons que des plans de phase égale, par exemple à 0, soient à une même abscisse à un instant donné, de sorte que les amplitudes des champs de toutes les composantes s'ajoutent.

Au cours de la propagation, ces plans se décalent les uns par rapport aux autres, et ils coïncideront jamais plus à l'identique à un même instant; la résultante des champs de toutes les composantes monochromatiques ne sera plus jamais égale à celle de départ. Le paquet d'ondes s'étale ce qui entraîne une déformation du signal transmis qui va se dégradant au fur et à mesure de sa propagation. Ce phénomène s'appelle la **dispersion**; le milieu est dit **dispersif**.

• La vitesse de déplacement du maximum d'un paquet d'onde de faible largeur spectrale autour d'une pulsation ω_0 est la **vitesse de groupe**, v_g , définie par la relation :

$$v_g, = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}(\omega_0)$$
 (20-5)

• Dans le plasma que nous considérons, la vitesse de groupe est directement obtenue en différenciant la relation de dispersion : $k dk = \frac{\omega d\omega}{c^2}$, qui mène à :

$$v_g = \frac{c^2}{v_{\varphi}} = c \ \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$
 (20-6)

La vitesse de groupe qui caractérise le déplacement du signal dans sa globalité dans le milieu est toujours inférieure à *c*.

4. Énergétique de l'onde dans le plasma

4.1 La densité volumique d'énergie électromagnétique

• Celle de l'onde plane progressive monochromatique dans le plasma est égale, au point \vec{r} et à l'instant t, à :

$$w_{em}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right) \left(\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t)\right)^2$$

• Pour une même amplitude du champ électrique que dans le vide, la densité volumique d'énergie électromagnétique est plus faible dans le plasma que dans le vide, (**19-2**). La cause en est à la moindre contribution du champ magnétique associé, sa norme étant plus faible que dans le vide.

4.2 Le vecteur de Poynting

• Le vecteur de Poynting dans les mêmes circonstances vaut :

$$\vec{\mathbf{R}}(\vec{r},t) = \frac{k}{\mu_0 \,\omega} \left(\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t)\right)^2 \vec{\mathbf{e}}_x \qquad (20-7)$$

 $\frac{k}{\omega}$ étant égal à $\frac{v_g}{c^2}$, le vecteur de Poynting de l'onde devient :

$$\vec{\mathbf{R}}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \left(\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t)\right)^2 v_g \vec{\mathbf{e}}_x \qquad (20-8)$$

Sous cette forme, la vitesse de groupe remplace dans le plasma le rôle que *c* avait dans le vide : elle apparaît comme la vitesse de déplacement de l'enveloppe du carré du champ électrique.

En fonction de la densité volumique d'énergie électromagnétique, nous obtenons :

280 Physique

$$\vec{\mathbf{R}}(\vec{r},t) = w_{em}(\vec{r},t) c \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \vec{\mathbf{e}}_x$$
(20-9)

Définissant la vitesse de propagation de l'énergie dans le plasma comme le rapport de la norme du vecteur de Poynting à la densité d'énergie électromagnétique, la vitesse trouvée vaut :

$$c\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right)^{-1}$$

Elle n'a de sens que pour $\omega > \omega_p$ et croît rapidement de façon monotone de 0 à sa valeur asymptotique c. Cette vitesse est comprise entre v_g et c.



FIGURE 65 – Vitesse de propagation de l'énergie

Remarque : Il est porté plus d'attention à la vitesse de groupe qu'à celle de propagation de l'énergie car c'est le champ électrique de l'onde qui est susceptible de communiquer de

l'énergie à un récepteur par l'intermédiaire de la puissance volumique $\vec{j} \cdot \vec{E}$ qu'il est capable de transférer aux charges présentes en son sein, y créant l'apparition d'un courant électrique.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Une onde électromagnétique plane progressive monochromatique polarisée rectilignement tombe sous une incidence normale sur le plan de séparation entre le vide et le plasma qui occupe le demi-espace des x > 0. Déterminer les caractéristiques des ondes électromagnétiques planes progressives et monochromatiques réfléchies et transmises sachant qu'à la traversée du plan de séparation le champ électromagnétique est supposé continu.

Exercice 2 : Soit un plasma neutre collisionnel. La densité volumique de courants électriques est toujours déterminée par le mouvement des électron, mais ceux-ci, non comptant d'être soumis au champ électrique d'une onde électromagnétique monochromatique, sont l'objet de collisions entre eux et avec les ions positifs du plasma, que l'on prend en compte

dans le bilan dynamique par un terme de frottement fluide $-\frac{m_e}{\tau} \overrightarrow{v}_e$.

L'onde électromagnétique a pour champ électromagnétique, en notation complexe :

$$\vec{\underline{\mathbf{E}}}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{E}}}_0 \exp j(\omega t - \underline{k}y) \text{ et } \vec{\underline{\mathbf{B}}}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{B}}}_0 \exp j(\omega t - \underline{k}y).$$

 Déduisez-en la relation entre la vitesse et le champ électrique de l'onde en notations complexes.

2. Que devient, sous ce régime d'hypothèses, la conductivité du plasma?

3. Déduisez-en la nouvelle relation de dispersion. Interprétez.

21 Champ électromagnétique en présence d'un milieu conducteur ohmique

1. Les équations de Maxwell dans un milieu conducteur ohmique

1.1 Spécificité du milieu conducteur ohmique

• Un milieu conducteur ohmique homogène est caractérisé par sa conductivité $\gamma > 0$ qui exprime la proportionnalité réelle de la densité volumique de courants électriques au champ électrique en son sein. Ainsi, la loi constitutive du milieu, la **loi d'Ohm locale**, s'écrit :

$$\vec{\mathbf{j}}(\vec{r},t) = \gamma \vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t)$$
 (21-1)

Elle exprime le caractère linéaire du milieu, traduit à notre échelle par la loi d'Ohm de l'électrocinétique pour un conducteur ohmique, u = Ri, et la simultanéité de l'effet, la densité volumique de courant, à la cause, la présence d'un champ électrique.

• Lorsque le champ électrique varie sinusoïdalement dans le temps, la loi d'Ohm locale se traduit, avec les notations complexes $\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ et $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ où les grandeurs physique réelles sont les parties réelles des grandeurs complexes, par :

$$\vec{\underline{j}}(\vec{r},t) = \gamma \vec{\underline{E}}(\vec{r},t)$$
(21-2)

• Ses propriétés diélectriques et magnétiques sont supposées être similaire à celles du vide et donc caractérisées par ε_0 et μ_0 .

• Le plasma présentait une relation, (20.2), entre la densité volumique de courant et le champ électrique : la conductivité y était imaginaire pure, ce qui entraînait une conservation moyenne de l'énergie électromagnétique. Le caractère réel de la conductivité du milieu ohmique entraîne une dissipation systématique de l'énergie électromagnétique par transfert aux charges mobiles du conducteur. Ce transfert n'est autre que l'effet Joule. Ce qu'atteste le théorème de Poynting, au point \vec{r} et à l'instant t:

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{R}}(\overrightarrow{r}, t) + \frac{\partial w_{em}}{\partial t}(\overrightarrow{r}, t) = -\gamma \overrightarrow{\mathbf{E}}^2(\overrightarrow{r}, t) < 0$$

• La propagation d'un champ électromagnétique à travers un milieu conducteur ohmique s'accompagne d'une atténuation de l'amplitude de ses champs au cours de la propagation.

• Un milieu conducteur ohmique est quasiment neutre à tout instant. La conservation de la charge :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

où j et ρ sont les densités volumiques de courants et de charge électriques en un point et un

instant donnés, combinée à l'équation de Maxwell-Gauss (17-9), conduit à :

$$\frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Si un déséquilibre de charge naît au sein du conducteur ohmique, qui se traduise localement par une densité volumique de charge électrique non nulle, ce déséquilibre disparaît avec une constante de temps $\tau_r = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$. Or, pour un bon conducteur tel le cuivre, γ est de l'ordre de $6 \times 10^7 \, \text{S.m}^{-1}$: la constante de temps est de l'ordre de $1, 5 \times 10^{-19} \, \text{s.}$ Ce temps caractéristique de relaxation du conducteur vers son équilibre électrique est petit devant les périodes de variation du champ électromagnétique que nous envisageons. Nous pourrons faire l'approximation qu'un bon milieu conducteur ohmique est neutre à tout instant.

1.2 Les équations de Maxwell dans le milieu conducteur ohmique

• L'équation de Maxwell-Ampère (17.12) fait apparaître les densités volumiques de courants de conduction $\gamma \vec{\mathbf{E}}$ et de déplacement $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$. Pour un champ électromagnétique sinusoïdal de pulsation ω dans le milieu, elles sont, en norme, dans le rapport $\frac{\gamma}{\omega\varepsilon_0} = \frac{1}{\tau_r\omega}$. Si ω est très petit devant $\frac{1}{\tau_r}$, ce qui est le cas aux fréquences du champ envisagées, alors le courant de déplacement est en permanence négligeable devant le courant de conduction. L'équation de Maxwell-Ampère se réduit à sa variante en régime quasi-stationnaire.

• Grâce aux considérations qui précèdent ($\rho = 0$ et un courant de déplacement négligeable devant celui de conduction), les équations de Maxwell dans le milieu conducteur ohmique deviennent :

div
$$\vec{\mathbf{E}} = 0$$
; $\vec{\mathbf{rot}} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$; div $\vec{\mathbf{B}} = 0$; $\vec{\mathbf{rot}} \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \gamma \vec{\mathbf{E}}$

2. Propriétés du champ électromagnétique dans un milieu conducteur ohmique

2.1 Les équations de diffusion du champ électromagnétique

• En procédant de même que pour obtenir les équations de propagation des champs électrique et magnétique dans le vide, nous aboutissons à :

$$\Delta \vec{\mathbf{E}} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$$
 et $\Delta \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$ (21-3)

Ces équations, par référence à la structure de celles qui traduisent les phénomènes de diffusion des particules ou de diffusion thermique, sont fréquemment appelées **équations de diffusion** du champ électromagnétique dans le milieu conducteur ohmique.

• Elles ne font plus intervenir l'opérateur d'Alembertien : si elles demeurent des équations aux dérivées partielles du second ordre par rapport aux coordonnées spatiales, elles sont seulement du premier ordre par rapport au temps. Elles ne sont donc pas invariantes par renversement du sens du temps. Cette caractéristique est à mettre en relation avec l'irréversibilité intrinsèque de l'effet Joule provoqué par le passage d'un champ électromagnétique dans le conducteur et la dissipation d'énergie qui s'ensuit.

2.2 Cas particulier du régime sinusoïdal : l'effet de peau

• Soit un champ électromagnétique variant sinusoïdalement à la pulsation ω et caractérisé par une constante de propagation k. En notations complexes, ce champ est donné par : $\vec{\underline{E}}(\vec{r},t) = \vec{\underline{E}}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ et $\vec{\underline{B}}(\vec{r},t) = \vec{\underline{B}}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$. Les équations de diffusion conduisent à la relation de dispersion caractéristique d'un milieu

conducteur ohmique :

$$\underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma\,\omega \qquad (21-4)$$

• La constante de propagation k est complexe, notée :

$$\underline{k} = \pm \frac{1-j}{\delta} \quad \text{où} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \, \omega}}$$
(21-5)

 δ est appelée l'épaisseur de peau.

• Le choix du signe est déterminé par le sens de propagation du champ électromagnétique dans le conducteur. Supposons que le milieu conducteur occupe le seul demi-espace des x > 0, qu'un champ électromagnétique arrive du demi-espace vide en se propageant dans la direction des x croissants et pénètre par le plan x = 0 dans le conducteur, alors le signe choisi pour k doit traduire une atténuation du champ électromagnétique lorsque l'on pénètre de plus en plus dans le conducteur. Dans cette situation, le signe + est retenu ; en résultent les champs suivants :

$$\vec{\underline{\mathbf{E}}}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{E}}}_0 \, \mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}} \, \mathrm{e}^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})} \qquad \qquad \vec{\underline{\mathbf{B}}}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{B}}}_0 \, \mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}} \, \mathrm{e}^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})}$$

Les expressions des champs électrique et magnétique de l'onde confirment l'analyse faite dans §1.

• Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-flux traduisent le caractère transversal du champ électromagnétique. $\vec{\mathbf{E}}_0$ et $\vec{\mathbf{B}}_0$ ont des composantes nulles sur la direction de propagation \overrightarrow{e}_r .

• Par ailleurs, de l'équation de Maxwell-Faraday, nous tirons :

$$\vec{\underline{\mathbf{B}}}_{0} = \frac{1-j}{\delta \, \omega} \vec{\mathbf{e}}_{x} \wedge \vec{\underline{\mathbf{E}}}_{0}$$

Les champs électrique et magnétique ne vibrent plus en phase : le champ magnétique est temporellement en retard de $\pi/4$ par rapport au champ électrique. Si nous nous restreignons à un champ électrique polarisé rectilignement suivant \vec{e}_y , alors le champ électromagnétique dans le conducteur a pour expression :

$$\vec{\underline{E}}(\vec{r},t) = \underline{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_y \qquad \vec{\underline{B}}(\vec{r},t) = \frac{\sqrt{2}}{\delta \omega} \underline{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})} \vec{e}_z$$
(21-6)

2.3 Commentaire sur l'épaisseur de peau

• Le rôle de l'épaisseur de peau dans les expressions des champs électrique et magnétique permet d'affirmer que le champ électromagnétique est quasiment nul lorsque l'on est à plus de 5 δ de la surface du conducteur ohmique.

• L'épaisseur de peau est d'autant plus faible que la pulsation du champ électromagnétique

est élevée. Dans le cuivre, elle s'exprime numériquement par la relation $\delta \approx \frac{1}{15, 4\sqrt{f}}$ m.

Ainsi, à 50 Hz, elle vaut environ 9 mm, mais à 1 MHz, elle ne vaut plus que $65 \,\mu$ m.

• Ceci permet de comprendre le rôle de blindage des parois conductrices vis-à-vis des perturbations électromagnétiques extérieures. Une perturbation électromagnétique est en général caractérisée par un spectre électromagnétique très large et de haute fréquence : une paroi de cuivre épaisse de 1 mm atténue les champs de fréquence supérieure à 1 MHz après sa traversée, d'un facteur au pire égal à 2×10^{-7} par rapport à leur valeur du côté de leur pénétration. Leur puissance surfacique est atténuée dans un facteur 4×10^{-14} !

• Cette qualité devient un défaut pour propager des champs électromagnétiques à très haute fréquence dans les câbles de cuivre. Le phénomène existe identiquement en géométrie cylindrique : le champ électromagnétique est cantonné à la seule périphérie du câble, ce qui diminue la section utile au passage des courants et donc la puissance électromagnétique transportable.

2.4 Bilan énergétique

• L'expression du champ électromagnétique étant donnée par (21.6), le vecteur de Poynting à la surface du milieu conducteur (x = 0) vaut :

$$\vec{\mathbf{R}}(0,t) = \frac{\sqrt{2}}{\delta\mu_0 \,\omega} |E_0|^2 \,\cos(\omega t + \varphi) \,\cos(\omega t - \frac{\pi}{4} + \varphi) \vec{\mathbf{e}}_x$$

Sa valeur moyenne sur une période du champ est donc :

$$\langle \vec{\mathbf{R}} \rangle = \frac{1}{2\delta\mu_0 \omega} |E_0|^2 \vec{\mathbf{e}}_{,x}$$

• La moyenne sur une période de la dérivée par rapport au temps de la densité d'énergie électromagnétique dans le conducteur est nulle.

• La puissance volumique instantanée $p_j(\vec{r}, t)$ fournie aux charges électriques mobiles dans le conducteur est égale à $\gamma \vec{E}^2(\vec{r}, t)$; sa valeur moyenne au point \vec{r} sur une période du champ, $\langle p_j \rangle$ est égale à :

$$\langle p_j \rangle (\overrightarrow{r}) = \frac{\gamma}{2} |E_0|^2 \, \mathrm{e}^{-2 \frac{x}{\delta}}$$

Si l'on somme cette puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule sur un parallélépipède de section unité perpendiculaire à \vec{e}_x , s'étendant de la face d'entrée x = 0 jusqu'à l'infini, on obtient une puissance dissipée par unité d'aire perpendiculairement à la direction de propagation égale à $\frac{\gamma \delta E_0^2}{4}$, qui vaut exactement la norme du vecteur vecteur de Poynting à la surface d'entrée À l'infini le vecteur est nul et son flux à travers la surface unité

ting à la surface d'entrée. À l'infini, le vecteur est nul et son flux à travers la surface unité aussi, donc son flux entrant a été entièrement dissipé par effet Joule dans le milieu conducteur.

2.5 Limite du conducteur parfait

• Un conducteur parfait est un conducteur dont la conductivité est infinie. Les épaisseurs de peau deviennent nulles à toute les fréquences : le champ électromagnétique ne le pénètre pas. Un milieu conducteur parfait est donc caractérisé par un champ électromagnétique nul en son sein.

• Les électrons situés en surface du conducteur réagissent instantanément aux champs électriques extérieurs qui l'atteignent; ils oscillent à la fréquence du champ incident et, comme toute charge en mouvement accéléré, créent un champ électromagnétique qui vient s'opposer à celui qui s'instaurerait dans le conducteur.

3. Réflexion d'un champ électromagnétique sur un conducteur parfait

3.1 Situation étudiée

• Un métal parfaitement conducteur occupe le demi-espace x < 0; une onde électromagnétique plane progressive monochromatique, l'onde incidente, se propage dans le vide sans charge ni courants électriques suivant la direction $-\overrightarrow{e}_x$ et se réfléchit à la surface du plan de séparation des milieux.

• Le champ électromagnétique de l'onde incidente est poséégal, en notations complexes, à :

$$\vec{\underline{\mathbf{E}}}_{i}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{E}}}_{i0} \, \mathrm{e}^{j(\omega t + kx)} \qquad \qquad \vec{\underline{\mathbf{B}}}_{i}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c} \vec{\mathbf{e}}_{x} \wedge \vec{\underline{\mathbf{E}}}_{i}(\vec{r},t)$$

où $\vec{\mathbf{E}}_{i0}$ est orthogonal à la direction de propagation $\vec{\mathbf{e}}_x$.



FIGURE 66 - Réflexion d'une onde sur un plan conducteur parfait

3.2 Relations de passage des champs

• Le changement de milieu de propagation nécessite de connaître le lien entre les valeurs du champ électromagnétique de part et d'autre de la surface qui délimite les milieux : ce sont les **relations de passage** du champ électromagnétique. Elles sont des conséquences des équations de Maxwell et des relations constitutives des milieux en question.

• $\vec{n}_{12}(\vec{r})$ désigne la normale à la surface en un point \vec{r} de la surface délimitant les deux milieux, orientée du milieu (1) vers le milieu (2).



FIGURE 67 – Éléments à la surface de séparation de deux milieux

Les règles de passage concernant les champs électrique et magnétique pour des milieux de permittivité diélectrique ε_0 et de perméabilité magnétique μ_0 sont les suivantes :

$$\vec{\mathbf{E}}_{2}(\vec{r},t) - \vec{\mathbf{E}}_{1}(\vec{r},t) = \frac{\sigma(\vec{r},t)}{\varepsilon_{0}} \vec{n}_{12}(\vec{r})$$
(21-7)

286 Physique

$$\vec{\mathbf{B}}_{2}(\vec{r},t) - \vec{\mathbf{B}}_{1}(\vec{r},t) = \mu_{0}\vec{\mathbf{j}}_{s}(\vec{r},t) \wedge \vec{n}_{12}(\vec{r})$$
(21-8)

où $\sigma(\vec{r}, t)$ et $\vec{j}_s(\vec{r}, t)$ sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courants électriques au point \vec{r} de la surface séparant les milieux et à l'instant *t*. La densité surfacique de courants électriques est forcément tangentielle à la surface, au point considéré.

3.3 Nécessité d'un champ électromagnétique réfléchi

• Le milieu conducteur du demi-espace x < 0étant parfait, le champ électromagnétique y est nul. Les relations de passage font que, en attribuant l'indice (1) aux grandeurs électromagnétiques dans le vide (x > 0) :

$$-\overrightarrow{\mathbf{E}}_{1}(\overrightarrow{r},t) = \frac{\sigma(\overrightarrow{r},t)}{\varepsilon_{0}}\overrightarrow{n}_{12}(\overrightarrow{r}) \quad \text{et} \quad -\overrightarrow{\mathbf{B}}_{1}(\overrightarrow{r},t) = \mu_{0}\overrightarrow{\mathbf{j}}_{s}(\overrightarrow{r},t) \wedge \overrightarrow{n}_{12}(\overrightarrow{r})$$

• La première relation de séparation montre que le champ électrique à la surface du métal parfait ne peut être que lui être orthogonal ou nul. Or, le champ électrique de l'onde électromagnétique incidente est parallèle au plan x = 0 et n'est pas nul à tous instants partout sur le plan de séparation. Il nous faut donc envisager une seconde onde, l'**onde réfléchie**, dont le champ électrique en s'ajoutant à celui de l'onde incidente pourrait annuler le champ électrique total en tout point du plan de séparation.

Remarque : Le champ magnétique de la seule onde incidente est *a priori* compatible avec la relation de passage.

Une onde électromagnétique plane progressive monochromatique convient pour retrouver

des conditions de passages compatibles. Soient $\vec{\mathbf{E}}_{r0}$, ω_r et \vec{k}_r , le champ électrique, la pulsation et le vecteur d'onde caractérisant l'onde électromagnétique réfléchie :

$$\vec{\underline{\mathbf{E}}}_{r}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{E}}}_{r0} e^{j(\omega_{r}t - \vec{k}_{r} \cdot \vec{r})} \qquad \vec{\underline{\mathbf{B}}}_{r}(\vec{r},t) = \vec{\underline{k}}_{r} \wedge \vec{\underline{\mathbf{E}}}_{r}(\vec{r},t)$$

En tout point du demi-espace x > 0 le champ électromagnétique est la somme des champs électromagnétiques des ondes incidente et réfléchie :

$$\vec{\underline{\mathbf{E}}}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{E}}}_i(\vec{r},t) + \vec{\underline{\mathbf{E}}}_r(\vec{r},t) \qquad \vec{\underline{\mathbf{B}}}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{B}}}_i(\vec{r},t) + \vec{\underline{\mathbf{B}}}_r(\vec{r},t)$$

3.4 Caractéristiques du champ réfléchi

• En tout point du plan de séparation et à tout instant, les composantes du champ électrique sur \vec{e}_y et \vec{e}_z doivent être nulle et en particulier à l'origine du repère de projection. Ainsi, $\underline{E}_y(\vec{0},t) = \underline{E}_z(\vec{0},t) = 0$, soit $(\underline{E}_{i0})_y e^{j(\omega t)} + (\underline{E}_{r0})_y e^{j(\omega_r t)} = 0$ et la même relation avec les composantes sur z. Ceci ne se peut à tout instant que si :

a. $\omega_r = \omega$ d'une part ;

b.
$$\left(\underline{E}_{i0}\right)_{y} + \left(\underline{E}_{r0}\right)_{y} = 0$$
 et $\left(\underline{E}_{i0}\right)_{z} + \left(\underline{E}_{r0}\right)_{z} = 0$ d'autre part.

• En tout autre point du plan de séparation, la nullité de ces deux composantes conduit à : $(\underline{E}_{i0})_y - (\underline{E}_{i0})_y e^{-j(k_{ry}y+k_{rz}z)} = 0$ et une relation analogue pour les composantes suivant z. Ces conditions ne peuvent être satisfaites, quels que soient y et z, que si $k_{ry} = k_{rz} = 0$.

• Par conséquence, $k_{rx} = k$ puisque l'onde plane satisfait à la relation de dispersion $c^2 \vec{k}_r^2 = \omega^2$ et, l'onde devant êre transversale, $(\underline{E}_{r0})_r = 0$. Ainsi, le champ électromagnétique de l'onde

réfléchie est-il :

$$\vec{\underline{\mathbf{E}}}_{r}(\vec{r},t) = -\vec{\underline{\mathbf{E}}}_{i0} e^{j(\omega t - kx)} \qquad \vec{\underline{\mathbf{B}}}_{r}(\vec{r},t) = \frac{\vec{e}_{x}}{c} \wedge \vec{\underline{\mathbf{E}}}_{r}(\vec{r},t)$$

3.5 Onde électromagnétique stationnaire

• Le champ électromagnétique total en notation complexe dans le demi-espace x > 0 vaut :

$$\vec{\underline{\mathbf{E}}}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{E}}}_{i0} e^{j(\omega t + kx)} - \vec{\underline{\mathbf{E}}}_{i0} e^{j(\omega t - kx)} = 2j\vec{\underline{\mathbf{E}}}_{i0} \sin(kx) e^{j\omega t}$$
$$\vec{\underline{\mathbf{B}}}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\vec{e}_x \wedge \vec{\underline{\mathbf{E}}}_{i0} e^{j(\omega t + kx)} - \frac{1}{c}\vec{e}_x \wedge \vec{\underline{\mathbf{E}}}_{i0} e^{j(\omega t - kx)} = -\frac{2}{c}\vec{e}_x \wedge \vec{\underline{\mathbf{E}}}_{i0} \cos(kx) e^{j\omega t}$$

• Toutes les composantes des champs électrique et magnétique sont des produits d'une fonction sinusoïdale de la coordonnée x et d'une autre fonction sinusoïdale du temps. Solutions stationnaires de l'équation de d'Alembert dans le demi-espace des x > 0, ces champs sont ceux d'une **onde stationnaire**.

• Le champ électrique s'annulant sur la paroi, la densité surfacique de charge qu'annonce la relation de passage, est nulle sur tout le plan x = 0. Il apparaît une densité surfacique de courants égale à :

$$\vec{\underline{\mathbf{j}}}_{s} = \vec{\mathbf{e}}_{x} \wedge \frac{\vec{\underline{\mathbf{B}}}(0,t)}{\mu_{0}}$$

• La dépendance en $\sin(kx)$ du champ électrique fait que son amplitude de vibration s'annule en tous les points des plans d'équation $x = p\frac{\lambda}{2}$ où p est un entier et λ la longueur d'onde dans le vide associé à la pulsation ω . Ces plans sont des plans de **nœuds** du champ électrique de l'onde stationnaire analogue à ceux d'amplitude de vibration sur une corde (cf. **Toute la MPSI en fiches**, fiche 2, §5). Les plans de **ventres** du champ électrique sont ceux où son amplitude de vibration est maximale. Ils ont pour équation $x = \frac{\lambda}{2} \left(p + \frac{1}{2} \right)$. Deux nœuds ou deux

ventres du champ électrique sont séparés entre eux d'un nombre entier de demi-longueur d'onde. Un ventre et un nœud consécutifs sont distants d'un quart de longueur d'onde.

• La dépendance en $\cos(kx)$ du champ magnétique fait correspondre aux plans de nœuds du champ électrique des plans de ventres du champ magnétique, c'est-à-dire des plans où l'amplitude du champ magnétique est maximale et réciproquement.

3.6 Énergétique des ondes stationnaires

• L'annulation périodique du champ électrique ou du champ magnétique dans leurs plans de nœuds respectifs provoque celle du vecteur de Poynting $\vec{\mathbf{R}}(\vec{r},t) = \vec{\mathbf{R}}(x,t)$ du champ électromagnétique. $\vec{\mathbf{R}}(p\frac{\lambda}{4},t) = \vec{0}$: il n'y a aucun flux de puissance électromagnétique à travers ces plans : une fois le champ électromagnétique stationnaire établi, l'énergie électromagnétique est cantonnée entre deux plans consécutifs, l'un du champ électrique et l'autre du champ magnétique, d'équations respectives $x = p\frac{\lambda}{4}$ et $x = (p+1)\frac{\lambda}{4}$, sans jamais traverser l'un de ces plans.

• Conséquence du théorème de Poynting : l'énergie électromagnétique comprise entre deux

plans consécutifs sur lesquels $\vec{\mathbf{R}}(\vec{r},t)$ s'annule est constante. En effet, le flux du vecteur de Poynting à travers la surface délimitant ces volumes est nul et il n'y a aucune charge électrique mobile avec lesquelles échanger de l'énergie.

4. Cavité résonante à une dimension

4.1 Règle de sélection des champs électromagnétiques stationnaires

• Si nous plaçons un autre plan parfaitement conducteur à la place d'un plan de nœuds du champ électrique, nous ne perturbons en rien la possibilité d'existence entre les deux plans du champ électromagnétique calculé plus haut. Ceci implique une relation entre la longueur d'onde du champ électromagnétique et la position *L* du second plan conducteur telle que :

$$Lsta = p\frac{\lambda}{2} = p\frac{\pi c}{2\omega}$$

où p est un entier naturel non nul.

• Réciproquement, si la position *L* du second plan est fixée *a priori*, alors les champs électromagnétiques stationnaires satisfaisant aux conditions aux limites sur chacun des plans doivent avoir une pulsation telle que :

$$\omega = p \frac{\pi c}{2L}$$
(21-9)

4.2 Vérification par la méthode de séparation des variables

• La résolution de l'équation d'onde confirme cette intuition naturelle. Soit un champ électromagnétique stationnaire, fonction de la seule coordonnée spatiale x et de t, dans le vide entre les deux plans x = 0 et x = L; chaque composante du champ est le produit d'une fonction de x, g, par une fonction du temps, h, et doit satisfaire à l'équation d'onde à une dimension :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(gh) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(gh) = 0 \quad \text{soit} \quad h\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d} x^2} - \frac{g}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d} t^2} = 0$$

et, en divisant par fg:

$$\frac{1}{g}\frac{d^2g}{dx^2} - \frac{1}{c^2h}\frac{d^2h}{dt^2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{g}\frac{d^2g}{dx^2} = \frac{1}{c^2h}\frac{d^2h}{dt^2}$$

Le membre de gauche est une fonction de x, celui de droite, une fonction de t: l'égalité ne peut être satisfaite pour tout x compris entre 0 et L et à tout instant t que si les deux fonctions sont égales à une constante.

Choix du signe de la constante

Si la constante est positive, posons-la égale à α^2 , *h* serait combinaison linéaire des fonction $h_1 : t \mapsto \exp(\alpha ct)$ et $h_2 : t \mapsto \exp(-\alpha ct)$. Or, *h* ne pourrait pas être une fonction bornée sur $] - \infty; +\infty[$.

Donc, la constante ne peut être que négative. Posons-la égale à $-k^2$; ainsi g sera combinaison linéaire de $g_1 : x \mapsto \cos(kx)$ et $g_2 : x \mapsto \sin(kx)$ et h sera combinaison linéaire de $h_1 : t \mapsto \cos(kct)$ et $h_2 : t \mapsto \sin(kct)$. Ainsi $F_j(x, t)$ où F_j est l'une des trois composantes du champ électrique ou des trois composantes du champ magnétique sont de la forme : $(C_j \cos(kx) + D_j \sin(kx)) \cos(kct + \varphi_i)$; Or E_x doit être identiquement nul ou constant pour toutes les valeurs de $x \in [0; L]$, et les composantes E_y et E_z doivent s'annuler aux limites en x = 0 et x = L, d'où $C_j = 0$ et, pour que le champ ne soit pas identiquement nul, la condition $\sin(kL) = 0$, qui permet de retrouver la règle de sélection (**21-9**).

• On remarque que cette règle de sélection des fréquences qui donnent lieu à des champs purement stationnaires entre les deux plans est exactement la même que (2-7) de Toute la MPSI en fiches au sujet des modes propres de vibration de la corde de Melde. Les nœuds du
champ électrique stationnaire entre les plans sont analogues aux nœuds de déplacement de la corde dans une résonance d'ondes stationnaires ou dans un mode propre de vibration de la corde.

4.3 Les champs non purement stationnaires

• Des ondes électromagnétiques non purement stationnaires peuvent s'instaurer entre les plans. Nous supposons que leurs champs électromagnétiques sont de la forme :

$$\overrightarrow{\underline{\mathbf{E}}}(\overrightarrow{\mathbf{r}},t) = \overrightarrow{\underline{\mathbf{E}}}_0(x) e^{j(\omega t - k_y y - k_z z)} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\underline{\mathbf{B}}}(\overrightarrow{\mathbf{r}},t) = \overrightarrow{\underline{\mathbf{B}}}_0(x) e^{j(\omega t - k_y y - k_z z)}$$

L'obligation pour ces deux champs de satisfaire l'équation d'onde dans le vide sans charge ni courant électriques entre les deux plans conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}^2 \vec{\mathbf{E}}_0}{\mathrm{d}x^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 - k_z^2\right) \vec{\mathbf{E}}_0 = 0$$

et une équation analogue portant sur $\mathbf{\vec{B}}_0(x)$.

• La quantité $k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 - k_z^2$ est obligatoirement positive pour qu'un champ électromagnétique non nul satisfaisant aux conditions aux limites existe entre les plans qui délimitent l'espace de propagation. Celles-ci imposent toujours au champ électrique tangent de s'annuler sur les plans x = 0 et x = L, ce qui impose à k_x d'être égal à $p \frac{\pi}{L}$ d'où il s'ensuit les relations de dispersion suivantes :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_y^2 + k_z^2 + p^2 \frac{\pi^2}{L^2}$$
(21-10)

• Lorsque p = 0, il n'existe aucune restriction sur les fréquences des champs pouvant se propager entre les deux plans; il suffit que le champ électrique soit polarisé suivant la direction \overrightarrow{e}_x . La limitation de l'espace de propagation autorise la propagation entre deux plans d'un champ électromagnétique ayant la structure d'une onde plane progressive monochromatique de vecteur d'onde $\overrightarrow{k} = k_y \overrightarrow{e}_y + k_z \overrightarrow{e}_z$. Les plans limitent simplement la zone dans laquelle se fait la propagation de l'énergie de l'onde.

• Lorsque $p \neq 0$, seules les ondes de fréquences supérieures à $\frac{pc}{2L}$ peuvent se propager. Elles n'ont plus une structure d'onde plane progressive monochromatique. Tous les champs électromagnétiques dont les couples (k_y, k_z) satisfont la relation de dispersion (**21-10**) peuvent exister à une fréquence et donc une pulsation données.

• Chacun de ces champs électromagnétiques est décomposable en une somme de deux ondes planes progressives monochromatiques ayant pour vecteurs d'onde respectifs $\pm p \frac{\pi}{L} \overrightarrow{e}_x + k_y \overrightarrow{e}_y + k_z \overrightarrow{e}_z$.

Sauriez-vous répondre?

Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement tombe avec une incidence normale sur le plan de séparation d'équation z = 0 entre l'air et un milieu conducteur de conductivité $\gamma > 0$ qui occupe le demi-espace des $z \ge 0$. Le champ électromagnétique de l'onde incidente, en notations complexes, est :

 $\vec{\underline{\mathbf{E}}}(\vec{r},t) = E_0 \exp j(\omega t - \underline{k}z) \vec{e}_x \quad ; \quad \vec{\underline{\mathbf{B}}}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{B}}}_0 \exp j(\omega t - \underline{k}z)$

1. Déterminez les champs électromagnétiques des ondes réfléchies dans le milieu d'incidence (demi-espace des z < 0) et transmises dans le conducteur.

2. Déduisez-en la densité volumique de force qui s'exerce en tout point du conducteur.

3. Calculez la force totale qui s'applique sur le parallélépipède d'aire orthogonale à $\vec{e}_z S$ compris entre 0 et + ∞ .

4. Déduisez-en la pression que l'onde incidente exerce sur la surface du métal. Vers quelle limite tend-elle lorsque le métal devient parfait ?



1. Distribution neutre de charges électriques

1.1 Rappel

• L'étude du potentiel et du champ électrostatiques d'une distribution neutre de charges électriques statiques nous a conduit à introduire la notion de dipôle électrostatique. Le potentiel et le champ électrostatiques à grande distance décroissent plus rapidement que ceux d'une charge seule à cause de la compensation, en première approximation, des contributions de signe opposés que des charges électriques de signes opposés créent loin de la distribution.

• Le potentiel électrostatique décroît à grande distance comme l'inverse du carré de la distance entre la distribution et le point d'observation ; le champ électrostatique décroît comme l'inverse du cube de cette distance.

1.2 Perception du comportement dynamique

• Lorsque les charges électriques d'une distribution neutre donnée évoluent au lieu d'être figées, la neutralité globale instantanée de la distribution est conservée. Donc, la notion de moment dipolaire doit demeurer pertinente : le moment dipolaire devient simplement variable. Son intensité et/ou sa direction sont susceptibles d'évoluer au cours du temps.



FIGURE 68 - Effets de propagation

• Mais les temps de propagation entre les différents endroits de la distribution un point d'observation M donné déforment l'image que l'observateur en M a de cette dernière. Comme l'illustre la figure 68, les effets de ce qui survient en un point P de la distribution ne se manifestent au point M qu'après le délai de propagation $\frac{PM}{c}$, qui augmente au fur et à mesure que sont pris en compte des points de la distribution de plus en plus éloignés du point M.

• Soit $\rho(\vec{r}', t)$ la densité volumique de charge de la distribution. Sa neutralité à tout instant t se traduit par la relation :

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} \rho(\vec{r}', t) \,\mathrm{d}\tau' = 0$$

Mais l'image de la charge perçue par un observateur en $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$ à l'instant *t* est la suivante :

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} \rho\left(\overrightarrow{r}', t - \frac{\|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'\|}{c}\right) \mathrm{d}\tau'$$

qui n'est pas nécessairement nulle.

2. Effets électromagnétiques à grande distance de la distribution

2.1 Potentiel électrique

• Nous supposons que, pour tout point \vec{r}' à l'intérieur de la distribution et pour tout instant t, $||\vec{r}'|| \ll ||\vec{r}||$, où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ désigne le point d'observation.

• Le potentiel électrique au point \vec{r} à l'instant *t* est le **potentiel retardé**. Ce dernier se construit en sommant $(\iiint ... d\tau')$ les contributions au potentiel des divers points \vec{r}' de la distribution $(\frac{\rho(\vec{r}',...)}{4\pi\varepsilon_0||\vec{r}-\vec{r}'||})$, mais à un instant antérieur à l'instant *t* du délai de propagation de \vec{r}' à \vec{r} . Ainsi :

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{\rho\left(\vec{r}',t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}{c}\right)}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau'$$

• Comme $||\vec{r}'|| \ll ||\vec{r}||$, un temps de retard principal se dégage, $t - \frac{r}{c}$ où $r = ||\vec{r}'||$; le premier terme prédominant du potentiel est :

$$V(\vec{r},t) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})\cdot\vec{r}}{cr^2}$$

où \overrightarrow{p} est la dérivée par rapport au temps du moment dipolaire électrique instantané de la distribution calculée à l'instant retardé $t^* = t - \frac{r}{c}$.

• La compensation des effets prédominants qui existait en statique ne se produit plus en régime variable. Le potentiel électrique à grande distance de la distribution décroît comme l'inverse de OM où O est un point à l'intérieur de la distribution.

2.2 Champ électrique

• En régime dépendant du temps, le champ électrique ne dérive plus du seul potentiel électrique. Cependant, l'opposé du gradient du potentiel électrique contribue au champ électrique.

• L'expression précédente montre que le gradient du potentiel, en coordonnées sphérique

apporte un terme en $1/r^2$, mais surtout un terme en $-\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p}(t-\frac{r}{c})\cdot\vec{r}}{r^2}$ où $\ddot{\vec{p}}$ est la dérivée seconde du moment dipolaire électrique à l'instant retardé $t^* = t - \frac{r}{c}$. Ce dernier terme décroît seulement en 1/r: il nous habitue à l'idée que le comportement dynamique de la distribution de charge électrique puisse décroître à grande distance moins rapidement que celui d'une charge ponctuelle statique non nulle.

2.3 Expression du champ électromagnétique à grande distance

• Les expressions suivantes du champ électromagnétique sont valables dans la zone de rayonnement. Elle est définie par la double inégalité :

$$\|\vec{r}'\| \ll \lambda \ll \|\vec{r}\| \qquad (22-1)$$

La première prédominance signifie que les temps de propagation des phénomènes électromagnétiques d'une partie à une autre de la distribution sont toujours négligeables devant la durée T caractéristique des évolutions au sein de la distribution. Ce qui signifie que l'usage de l'A.R.Q.S. est légitime à l'échelle de la distribution.

La seconde inégalité signifie que les observation se font à grande distance par rapport à la longueur d'onde $\lambda = cT$.

• Les termes prédominants du champ électromagnétique dans la zone de rayonnement sont :

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left(\ddot{\vec{p}}(t^*) \wedge \vec{r}\right) \wedge \vec{r}}{r^3} \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathbf{B}}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\ddot{\vec{p}}(t^*) \wedge \vec{r}}{r^2} \qquad (22-2)$$

2.4 Commentaires

• Les champs électrique et magnétique sont orthogonaux à la direction du rayon vecteur $-\vec{r}$ joignant le point d'observation à l'origine de la distribution dipolaire électrique; et ils sont orthogonaux entre eux :

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t) = c \vec{\mathbf{B}}(\vec{r},t) \wedge \frac{\vec{r}}{r}$$
(22-3)

(22-3) montre que le rapport des normes du champ électrique au champ magnétique est égal à *c*, la célérité de la lumière dans le vide : $\|\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t)\| = c \|\vec{\mathbf{B}}(\vec{r},t)\|$.

• Ces trois caractéristiques confèrent au champ électromagnétique dans la zone de rayonnement une structure d'onde plane.

• Le plan de polarisation de l'onde perçu au point d'observation \overrightarrow{R} à l'instant *t* est le plan de direction $(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{p}(t - \frac{r}{c}))$. Le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan.





• Le champ électromagnétique est en relation linéaire avec la dérivée seconde par rapport au temps du moment dipolaire électrique. Cette dernière peut être considérée comme résultant de l'accélération liée au changements de la position des barycentres respectifs des charges positives et négatives. Il s'agit d'une forme particulière de **rayonnement d'accélération**.

• Les expressions du champ électromagnétique montrent qu'il est toujours nul dans la direction de la dérivée seconde du moment dipolaire électrique à l'instant retardé $t - \frac{r}{c}$. A contrario, il est maximal dans le plan qui lui est perpendiculaire. Le champ rayonné n'est donc pas isotrope.

3. Énergétique du rayonnement dipolaire électrique

3.1 Vecteur de Poynting du champ électromagnétique rayonné

• L'expression intrinsèque du vecteur de Poynting du champ électromagnétique rayonné est :

$$\vec{\mathbf{R}}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left(r^2 \vec{p}^2(t^*) - \left(\vec{p}(t^*) \cdot \vec{r} \right)^2 \right) \vec{r}$$

• Colinéaire à \vec{r} , le vecteur de Poynting est toujours dirigé selon la droite joignant l'origine à l'intérieur de la distribution au point d'observation.

Comme $r^2 \vec{\vec{p}}^2(t^*) \ge \left(\vec{\vec{p}}(t^*) \cdot \vec{\vec{r}}\right)^2$, il est toujours dirigé vers l'extérieur de la distribution.

L'égalité des deux termes se produisant lorsque $\vec{p}(t^*)$ et \vec{r} sont colinéaires, l'expression confirme que la puissance surfacique rayonnée dans la direction de l'accélération du moment dipolaire électrique est nulle et donc le caractère anisotrope du rayonnement.

Son maximum à l'instant t est atteint à grande distance, pour les points situés dans le plan perpendiculaire à la direction de $\vec{\vec{p}}(t^*)$ passant par l'origine.

3.2 Indicatrice du rayonnement

• Pour caractériser la plus ou moins grand isotropie du rayonnement d'un dispositif - naturel ou non -, on trace le **diagramme de rayonnement** ou **indicatrice d'émission**.

• On suppose que le moment dipolaire possède une direction fixe, égale à Oz, et varie sinusoïdalement au cours du temps avec une pulsation ω et une amplitude p_0 . Le diagramme de rayonnement est la surface formée de l'ensemble des points, en coordonnées sphériques, $(I(r, \theta, \varphi), \theta, \varphi)$ où

$$I(r,\theta,\varphi) = \frac{\mu_0}{16\pi c} \frac{\omega^4 p_0}{r^2} \sin^2\theta$$

pour une distance *r* donnée dans la zone de rayonnement, lorsque θ varie de 0 à π et φ de 0 à 2π . θ désigne l'angle entre \overrightarrow{p} et \overrightarrow{r} . L'indicatrice $I(\theta, \varphi)$ est proportionnelle à sin² θ .

• Dans ce cas, l'indicatrice est une surface de révolution autour de la direction du moment dipolaire puisqu'elle est indépendante de φ . Son allure est donnée sur la figure suivante :



FIGURE 70 – Intersection de l'indicatrice avec un plan contenant z'z, d'angle φ quelconque

3.3 Puissance totale rayonnée

• La norme du vecteur de Poynting décroît comme l'inverse du carré de la distance à la distribution. Cette particularité du champ rayonné traduit la conservation de la puissance à travers toute surface entourant la distribution de charge électrique à l'origine du moment dipolaire.

• Soit la sphère Σ de centre *O* de rayon *D*; le vecteur de Poynting en un point \vec{r} de coordonnées (D, θ, φ) de la sphère, à l'instant *t*, y a pour expression :

$$\vec{\mathbf{R}}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left(\frac{\ddot{p}}{p}^2(t^*) \right) \sin^2 \theta \frac{\vec{r}}{D^3}$$

où $t^* = t - \frac{D}{c}$ et θ l'angle à l'instant t^* entre la direction de $\overrightarrow{p}(t^*)$ et \overrightarrow{r} .

• La puissance totale instantanée rayonnée par le dipôle à l'instant *t* à travers la sphère Σ est fournie par le flux du vecteur de Poynting à travers Σ :

$$\mathcal{P}(t) = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathbf{R}}(\overrightarrow{r}, t) \cdot d\overrightarrow{S}$$

soit :

$$\mathcal{P}(t) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left(\frac{\ddot{p}}{p}^2(t^*)\right) \sin^2\theta \,\frac{\overrightarrow{e}_r}{D^2} \cdot D^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi \,\overrightarrow{e}_r$$

Tous calculs faits,

$$\mathcal{P}(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left(\vec{\overrightarrow{p}}^2(t^*) \right)$$
 (22-4)

• La puissance totale instantanée rayonnée apparaît indépendante du rayon D de la sphère dans la zone de rayonnement et de la direction instantanée du moment dipolaire électrique.

• La même puissance instantanée totale traverse la surface de rayon *D* à l'instant *t* et la surface de rayon *D*' à l'instant $t' = t + \frac{D' - D}{c} \operatorname{car} \overrightarrow{p} \left(t' - \frac{D'}{c} \right) = \overrightarrow{p} \left(t - \frac{D}{c} \right).$

Si D' est supérieur à D, t' est un instant postérieur à t. Ceci est lié à la propagation de l'énergie électromagnétique dans le vide à la vitesse de la lumière à partir de sa source, la distribution dipolaire électrique dont les charges sont en mouvement accéléré.

3.4 Formule de Larmor

• Si le moment dipolaire électrique varie sinusoïdalement à la pulsation ω avec une amplitude p_0 , la puissance totale moyenne diffusée dans l'espace par le dipole oscillant vaut :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 \,\omega^4 p_0^2}{12 \,\pi \,c} \tag{22-5}$$

Cette expression est la formule de Larmor.

• Cette formule permet de comprendre l'intérêt qu'il y a à augmenter la fréquence des systèmes d'émission d'ondes électromagnétiques, la puissance rayonnée, pour une même valeur de l'amplitude p_0 , augmentant comme la puissance quatrième de la fréquence et les antennes y étant plus faciles à réaliser car moins encombrantes.

4. Le rayonnement dipolaire magnétique

4.1 Moments magnétiques des circuits électriques

• Un circuit à une maille possède, dans le cadre de l'A.R.Q.S., un moment magnétique dipolaire, $\vec{m}(t)$.

• Dans le même cadre, les différentes branches d'un circuit électrique sont le siège de courants électriques variables. Le circuit peut toujours être décomposé en un ensemble de mailles juxtaposées : un moment magnétique $\vec{m}_i(t)$ positionné sur l'origine O_i au centre de la maille en question peut être associé à la maille *i*.

4.2 Champ électromagnétique rayonné par un circuit simple

• La zone de rayonnement est définie de la même manière que pour le rayonnement dipolaire électrique. Si *T* est le temps caractéristique d'évolution du courant dans le circuit, auquel est associé une longueur d'onde $\lambda = cT$, alors :

 $\|\vec{r}'\| \ll \lambda \ll \|\vec{r}\|$

où \vec{r}' désigne un point du circuit à partir d'une origine située au centre de la maille et \vec{r} le vecteur position du point d'observation.

• Les termes prédominants du champ électromagnétique dans la zone de rayonnement sont donnés par les expressions suivantes :

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \frac{\left(\ddot{\vec{m}}(t^*) \wedge \vec{r}\right) \wedge \vec{r}}{r^3} \quad \text{et} \quad \vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\ddot{\vec{m}}(t^*) \wedge \vec{r}}{r^2} \quad (22-6)$$

où \vec{m} est la dérivée seconde du moment dipolaire magnétique par rapport au temps et $t^* = t - \frac{r}{c}$.

4.3 Commentaires

• De manière duale au champ rayonné par le dipolaire électrique, c'est le champ magnétique observé en \vec{r} à l'instant t qui est contenu dans le plan formé par \vec{r} et la direction de l'accélération du moment dipolaire magnétique à l'instant retardé t^* . Le champ électrique est perpendiculaire à ce plan de polarisation magnétique. Le champ magnétique et le champ électrique dans le rayonnement dipolaire magnétique prennent respectivement les places du champ électrique et de l'opposé du champ magnétique du rayonnement dipolaire électrique.

• Cependant, comme pour le rayonnement dipolaire électrique, le trièdre $\left(\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t),\vec{\mathbf{B}}(\vec{r},t),\vec{r}\right)$

est orthogonal direct et $\|\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t)\| = c \|\vec{\mathbf{B}}(\vec{r},t)\|$. Le rayonnement dipolaire magnétique produit à grande distance à une structure locale d'onde plane.



4.4 Énergétique du rayonnement dipolaire magnétique

• Le vecteur de Poynting au point d'observation à l'instant t a pour expression :

$$\vec{\mathbf{R}}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \left(r^2 \vec{\vec{m}}^2(t^*) - \left(\vec{\vec{m}}(t^*) \cdot \vec{r} \right)^2 \right) \vec{r}$$

auquel, par un raisonnement analogue à celui effectué pour le rayonnement dipolaire électrique, est associé une puissance instantanée rayonnée à travers une sphère de rayon D quelconque dans la zone de rayonnement égale à :

$$\mathcal{P}(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c^3} \left(\frac{\ddot{m}^2}{m} (t^*) \right)$$
(22-7)

• Lorsque le circuit fonctionne en régime sinusoïdal à la pulsation ω avec un moment dipolaire magnétique d'amplitude m_0 , la puissance moyenne rayonnée est égale à :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 \,\omega^4 \, m_0^2}{12 \,\pi \, c^3} \tag{22-8}$$

Si I_e est la valeur efficace de l'intensité du courant électrique dans le circuit, S l'aire de la surface qu'il présente et $\lambda = c/f$ la longueur d'onde associée à la pulsation de fonctionnement, la puissance peut se mettre sous la forme :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = R_r I_e^2$$
 où $R_r = \frac{8}{3} \pi^3 \mu_0 c \left(\frac{S}{\lambda^2}\right)^2$

 R_r est la **résistance de rayonnement** du circuit. La puissance rayonnée par le circuit s'apparente alors à une dissipation de puissance dans la résistance de rayonnement du circuit, comme s'il s'agissait d'un effet Joule.

• Le régime de l'A.R.Q.S. consiste à pouvoir négliger la puissance rayonnée devant la puissance dissipée par effet Joule dans le circuit ou les valeurs maximales des puissances fournies aux éléments réactifs du circuit (bobines d'auto-induction ou condensateurs).

5. Applications du concept de rayonnement dipolaire

5.1 Diffusion atomique et polarisation par diffusion

• De jour, la lumière du Soleil atteint les molécules de dioxygène et de diazote présentes dans l'atmosphère : c'est essentiellement le champ électrique des ondes lumineuses solaires qui excite les électrons de ces molécules par l'intermédiaire de la force de Lorentz et aboutit à la création d'un moment dipolaire électrique au niveau de chaque molécule.

Ce moment dipolaire induit diffuse à la même fréquence que l'onde incidente une onde électromagnétique dans toutes les directions possédant les caractéristiques du rayonnement dipolaire électrique étudié.

• Le modèle de l'électron élastiquement lié permet de saisir les caractères généraux du phénomène. Considérons un électron (masse m_e , charge -e) susceptible d'osciller autour d'un noyau, origine du repère, auquel il est lié par une force de rappel élastique $-k\vec{r}$ où \vec{r} est sa position par rapport au noyau.

Les pertes d'énergie que subit cet électron sont linéarisées et traduite par une force en $-\alpha \vec{r}$ où le coefficient α est supposé constant. L'électron est soumis à la force de Lorentz excitatrice dont il est légitime de ne conserver que la partie électrique si l'on suppose que l'électron n'est pas relativiste. Ainsi,

$$m_e \vec{\overrightarrow{r}} = -k \vec{\overrightarrow{r}} - \alpha \vec{\overrightarrow{r}} - e \vec{\overrightarrow{\mathbf{E}}}(\vec{\overrightarrow{r}},t)$$

Le champ électrique est modélisé par celui d'une onde électromagnétique plane de pulsation ω , qui se propage selon la direction x'x, de sorte que, en notations complexes, il soit décrit par $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp(j(\omega t - kx))$.

La transversalité de l'onde impose que $\vec{\mathbf{E}}_0 \cdot \vec{\mathbf{e}}_x = 0$. Le champ électrique de l'onde mettant en mouvement l'électron dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation, la solution forcée en notation complexe, \vec{r} , conduit au moment dipolaire électrique suivant :

$$\vec{\underline{p}}(t) = -e\vec{\underline{r}}(t) = \frac{e^2}{k - m_e \omega^2 + j\alpha \omega} \vec{\underline{E}}_0 \exp(j(\omega t))$$

• La puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ rayonnée par l'électron, calculée à partir de la formule de Larmor et exprimée en fonction de la puissance surfacique de l'onde incidente, de la norme de son vecteur de Poynting, $\Phi = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$, du rayon classique de l'électron r_e défini par

 $m_e c^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e}$, de la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et de la constante de temps de relaxation $\tau = \frac{m_e}{\alpha}$, est égale à :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{8}{3} \pi r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \Phi$$

• Le rapport de cette puissance au flux incident de l'onde excitatrice possède la dimension d'une surface : on l'appelle la section efficace totale de diffusion de l'électron, notée σ . Ainsi,

$$\sigma = \frac{8}{3} \pi r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

On distingue la **diffusion de Rayleigh**, lorsque $\omega \ll \omega_0$, pour laquelle la puissance rayonnée est proportionnelle à la puissance quatrième de la pulsation, et la **diffusion de Thomson**, lorsque $\omega \gg \omega_0$, donc dans le domaine des rayons X et qui conduit à une puissance diffusée indépendante de la fréquence des rayons.

• La couleur bleu du ciel résulte de la diffusion du rayonnement solaire par les molécules atmosphériques dans le cadre d'une diffusion Rayleigh. Elle provient de ce que les composantes de fréquences élevées du rayonnement visible (vers le bleu) sont plus fortement diffusées que celles de fréquences plus faibles (vers le rouge).

Ainsi, en regardant le ciel dans une direction différente de celle du Soleil, nous percevons un rayonnement diffusé beaucoup plus intense dans le bleu.

• Cependant, la forte diffusion du bleu signifie qu'il est absorbé par l'atmosphère. Si l'épaisseur de la couche atmosphérique traversée augmente, ce qui est le cas lorsque nous regardons le Soleil à l'horizon, à son lever ou son coucher, la lumière perçue est atténuée sur l'ensemble du spectre, et la forte absorption du bleu ne laisse subsister dans le rayonnement que les composantes rouge et orangée.

• Polarisation par diffusion

Le rayonnement solaire n'est polarisé à aucune fréquence. \vec{E}_0 est un vecteur aléatoire, perpendiculaire à la direction de sa provenance, aux composantes réelles ou complexes. Le moment dipolaire qui en résulte est lui-même aléatoire dans le même plan d'évolution que celui

de $\vec{\mathbf{E}}_0$.

Si nous regardons le ciel dans une direction qui fasse un angle droit par rapport à la direction de provenance du rayonnement solaire, le plan d'évolution du moment dipolaire est vu de profil et le rayonnement diffusé que nous observons nous apparaît polarisé rectilignement.

5.2 Les antennes de radiocommunication

• Les antennes d'émission d'ondes électromagnétiques font largement appel à la théorie du rayonnement dipolaire électrique. Pour les longues (160 - 270 kHz) et les moyennes ondes (540 - 1600 kHz), les antennes sont des éléments rayonnants dipolaires car les longueurs d'ondes associées sont trop grandes pour construire des antennes qui aient des dimensions voisines des longueurs d'onde.

• En revanche, en ondes courtes (6 - 16 Mhz) et en modulation de fréquence

(87,5 - 107,5 MHz), des antennes ayant les dimensions de la demi-longueur d'onde sont réalisable, qui donnent des diagrammes de rayonnement plus directifs.

• Les propriétés de directivité à l'émission se retrouvent à la réception : si une antenne est très directive à l'émission, ce qui permet d'y concentrer la puissance émise, elle aura la même directivité à la réception, ce qui peut rendre son réglage délicat pour assurer une bonne réception.

5.3 La remise en cause de la physique classique

• La théorie du rayonnement électromagnétique a jeté un doute sur le bien-fondé de son usage à l'échelle atomique.

• Considérons le mouvement de l'électron autour du proton dans l'atome d'hydrogène, dans le cadre du modèle classique selon lequel il orbite sous l'effet de la force électrostatique de Coulomb.

L'électron est accéléré dans le champ électrostatique du proton et le dipôle électrique que tous deux constituent doit rayonner de l'énergie électromagnétique.

Dans cette hypothèse, l'énergie mécanique de l'atome d'hydrogène devrait diminuer régulièrement, ce qui signifie que celui-ci ne pourrait être un édifice stable.

Cette contradiction avec l'observation a été l'un des éléments fondamentaux ayant fait douter de la pertinence du modèle classique pour décrire et étudier les édifices à l'échelle de l'atome.

Elle a obligé les physiciens à élaborer une nouvelle manière de penser, traduite par la mécanique quantique, déclinée par la suite en sa variante relativiste, l'électrodynamique quantique dont les résultats théoriques sont, à ce jour, confirmés par l'expérience avec une précision relative jamais atteinte auparavant.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Un circuit constituant une boucle de diamètre d = 70 cm est alimenté par un générateur de tension sinusoïdal de fréquence f = 5 kHz. Il y circule un courant d'intensité efficace $I_e = 10$ mA.

Estimez la puissance rayonnée à grande distance par le circuit.

Exercice 2 : Un émetteur radio-électrique de puissance $\mathcal{P}_0 = 250 \text{ kW}$ est relié à une antenne directive constituée par un dipôle quasi-ponctuel au foyer d'un paraboloïde de révolution réflecteur de rayon *R*. La puissance rayonnée est ainsi concentrée dans le cône s'appuyant sur le bord du paraboloïde, d'axe passant par son sommet et son foyer et de demi-angle au sommet α déterminé par la diffraction d'une ouverture circulaire de rayon *R*.

1. Calculez le gain G du dispositif, défini comme le rapport entre la puissance dirigée par le paraboloïde, \mathcal{P}_e et la puissance \mathcal{P}_0 envoyée dans la même direction par l'antenne rayonnant de façon isotrope, en fonction de la surface $S = 6 \text{ m}^2$ de l'antenne et de la longueur d'onde λ rayonnée ($\lambda = 10 \text{ cm}$).

Les ondes sphériques rayonnées rencontrent à une distance d un obstacle de surface $S' = 5 \text{ m}^2$ qui les renvoie dans tout l'espace. L'antenne émettrice sert aussi d'antenne réceptrice. Elle reçoit une partie de l'onde réfléchie, qui possède une puissance \mathcal{P}_r lorsqu'elle atteint l'antenne.

2. Exprimez \mathcal{P}_r en fonction de $\mathcal{P}_0, G, \lambda, S'$ et d.

3. Déduisez la portée du radar, c'est-à-dire la distance maximale à laquelle l'objet doit être situé pour être détecté sachant que la limite de détection de l'antenne est $\mathcal{P}_l = 2.10^{-13}$ W.

23 Systèmes ouverts en régime stationnaire

Relisez le §2 de la fiche 28 de Toute la MPSI en fiches.

1. Formulation infinitésimale des principes de la thermodynamique

1.1 Premier principe

• Rappel : un système thermodynamique fermé S dont l'énergie interne est U et l'énergie cinétique est $\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g)$ dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g subit une transformation au cours de laquelle il reçoit du milieu extérieur de l'énergie sous forme de travail W et sous forme de transfert thermique Q. Selon le premier principe de la thermodynamique, son énergie interne varie de ΔU et son énergie cinétique de $\Delta \mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g)$ en suivant l'égalité :

$$\Delta U + \Delta \mathcal{E}_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}_g) = W + Q$$

• Au cours d'une transformation infinitésimale pendant laquelle le système voit son énergie interne varier de la quantité élémentaire dU, son énergie cinétique de $d\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g)$ en recevant du milieu extérieur le travail élémentaire δW et le transfert thermique élémentaire δW , le premier principe se traduit par :

$$dU + d\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \delta W + \delta Q$$
 (23-1)

• Les notations ont un sens très précis. La transformation modifie les paramètres d'état du système S et la variation élémentaire de l'énergie interne qui en résulte est la différence entre l'énergie interne du système dans l'état d'équilibre final et celle à l'état d'équilibre initial.

Elle s'exprime comme la différentielle de l'énergie interne en tant que fonction de ces paramètres d'état, lorsque le système est à l'équilibre. Il en est de même, pour l'énergie cinétique. Ceci indépendamment du procédé employé pour obtenir la variation des paramètres d'état du système, « du chemin suivi » pour accomplir la transformation infinitésimale.

En revanche, le travail élémentaire δW et le transfert thermique δQ dépendent, eux, « du chemin suivi », ce ne sont pas des différentielles exactes, d'où la notation δW ou δQ .

1.2 Second principe

• L'entropie S d'un système thermodynamique fermé S est une fonction d'état extensive dont la variation ΔS au cours d'une transformation finie est égale à :

$$\Delta S = \int_{Etat_1}^{Etat_2} \frac{\delta Q}{T} + S_c$$

où δQ est le transfert thermique élémentaire reçu par S du milieu extérieur, à la température absolue T et S_c l'entropie créée au cours de la transformation, positive ou nulle. Si la transformation est réversible, $S_c = 0$.

• Au cours d'une transformation infinitésimale, le second principe se décline en :

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T} + \delta S_c \qquad (23-2)$$

où d et δ ont la même signification que pour le premier principe : d'un état à un autre infiniment voisin, la variation élémentaire d'entropie est fixée par les variations des paramètres d'état. Les transferts thermiques et l'entropie créée élémentaires sont fonction de la manière de procéder au cours de la transformation.

2. Cadre de l'étude des systèmes ouverts

2.1 Définition du système ouvert

• Un système ouvert est un système thermodynamique délimité par une frontière perméable à la matière.

• Comme nous l'avions remarqué au §1 de la fiche 24 de **Toute la MPSI en fiches**, la constance de la masse d'un système ouvert n'exclut pas l'échange de matière avec l'extérieur ; le bilan global de ces échanges est simplement nul : il est rentré autant de masse de matière à travers la frontière du système qu'il en est sorti. Ce ne sont donc pas les mêmes molécules qui servent à définir le contenu du système à deux instants distincts.



FIGURE 71 – Schéma de principe d'une centrale thermique

• Exemple : Une partie du fluide en écoulement dans le circuit fermé d'une centrale thermique de production d'énergie électrique (cf. fig. 71). L'eau du circuit est chauffée dans la chaudière par la combustion du fuel ou du gaz naturel : sa température augmente, elle se vaporise à haute température et haute pression puis est envoyée sur une turbine où elle communique aux aubes de cette dernière une partie de son énergie.

Un alternateur solidaire de l'axe de rotation de la turbine transforme cette énergie en énergie électrique. Dans son transit à travers la turbine, la vapeur d'eau s'est refroidie, elle circule ensuite vers le condenseur où elle revient à l'état liquide avant d'être pompée et envoyée à nouveau dans la chaudière pour recommencer son cycle.

L'ensemble du circuit est un système fermé, mais si l'on isole une de ses parties, par exemple le fluide contenu à un instant *t* dans le serpentin de la chaudière ou celui qui est dans la turbine, ces parties sont des systèmes ouverts.

2.2 Le régime stationnaire

• Lorsque les diverses grandeurs physiques intensives (température T, masse volumique ρ , pression p, vitesse v, altitude z, enthalpie et entropie massiques, etc ...) caractérisant localement l'état physique et énergétique d'un volume élémentaire du fluide sont indépendantes du temps, on dit que le régime est **stationnaire**.

Remarque 1 : « Stationnaire » ne signifie pas uniforme - c'est-à-dire « ayant même valeur en tout point de fluide ».

Remarque 2 : Les grandeurs ne peuvent être définies que localement puisque le fluide dans son ensemble n'est pas dans un état d'équilibre thermodynamique. Cependant, un volume

302 Physique

d'échelle mésoscopique du fluide, c'est-à-dire petit à notre échelle, mais grand à l'échelle moléculaire ou atomique de sorte qu'il contienne encore un grand nombre d'entités élémentaires du fluide, possède des paramètres intensifs thermodynamiques (température, pression, enthalpie ou entropie massiques, etc, ...) définis et, pour certains d'entre eux, liés par l'équation d'état du fluide.

• Dans une phase de régime stationnaire, la masse totale d'un système ouvert ne varie pas : la masse de la matière entrante est égale à la masse de la matière sortante sur n'importe quel intervalle de temps pendant ce régime. Ceci permet de définir le **débit-masse**, noté D_m , qui représente la masse de fluide circulant par unité de temps à travers le système.

La dimension du débit-masse est M.T⁻¹. Son unité est le kg.s⁻¹.

2.3 Objets de l'étude

• Deux objets d'étude se dégagent.

Le premier est de déterminer les relations entre les paramètres intensifs d'état ou énergétiques du fluide aux divers endroits du circuit, connaissant les transformations qui se déroulent dans ses éléments les plus spécifiques (par exemple, la turbine, la chaudière ou le condenseur).

Le second est de déterminer le travail ou l'énergie thermique à fournir ou à récupérer par unité de temps ou de masse lors du passage du fluide à travers l'un des éléments du circuit si l'on connaît les paramètres intensifs à l'entrée et à la sortie de l'élément en question.

• Les outils à notre disposition pour ce faire sont : les premier et second principes de la thermodynamique, le caractère extensif des grandeurs énergétiques et de l'entropie pour les systèmes thermodynamiques envisagés et les diagrammes synthétisant les données sur les fluides réels.

3. Le premier principe appliqué aux systèmes ouverts

3.1 Définition des grandeurs



FIGURE 72 – Évolution du système ouvert

• Nous considérons la machine thermique schématisée ci-dessus, fonctionnant en régime stationnaire avec un débit masse D_m .

• Caractéristiques énergétiques et mécaniques de la machine

 w_u et q: travail utile (autre que celui des forces de pression) et énergie thermique massiques apportées à l'unité de masse du fluide dans son transit à l'intérieur de la machine thermique. Ces travaux sont ceux de forces non conservatives. Ils ont la dimension d'une énergie rapportée à une masse : L².T⁻² et s'expriment en J.kg⁻¹. \dot{W}_u et \dot{Q} : puissance utile (autre que celle des forces de pression) et puissance thermique apportées par unité de temps au fluide dans son transit à l'intérieur de la machine thermique. Comme précédemment, la puissance est celle de forces non conservatives. Leur dimension est celle de toute puissance M.L².T⁻³ et s'expriment en watts (W).

 σ_1 et σ_2 : sections des conduites d'entrée et de sortie du fluide dans la machine. Dimension : L^2 ; unité : m^2 .

 z_1 et z_2 : altitudes moyennes des sections d'entrée et de sortie du fluide dans la machine. Elles s'expriment en m.

• Paramètres d'état du fluide

u : énergie interne massique. Sa dimension est celle d'une énergie rapportée à une masse : $L^2 \cdot T^{-2}$. Elle s'exprime en J.kg⁻¹.

p : pression du fluide. Sa dimension est $M.L^{-1}.T^{-2}$. Son unité est le pascal (Pa).

v: volume massique, inverse de la masse volumique ρ . De dimension L³.M⁻¹. son unité est le m³.kg⁻¹.

h = u + pv: enthalpie massique; de dimension L². T⁻²; unité J.kg⁻¹.

V: vitesse du fluide dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Dimension : L.T⁻¹; unité : m.s⁻¹.

s : entropie massique du fluide. Sa dimension est celle d'une entropie (énergie par unité de température absolue) rapportée à l'unité de masse $L^2 \cdot T^{-2} \cdot \Theta^{-1}$. Son unité est le J.kg⁻¹.K⁻¹.

• Nous indiçons par 1 toutes les grandeurs adéquates en entrée et par 2 toutes celles de sortie.

3.2 Bilan énergétique

• Nous définissons un système fermé, donc de masse constante, dont la position aux instants t et t + dt est indiquée sur la figure 72, dans un référentiel supposé galiléen.

• Son énergie totale \mathcal{E}_{tot} à un instant *t* est la somme :

➤ de son énergie cinétique macroscopique, c'est-à-dire mesurable dans le référentiel galiléen d'étude par le déplacement de ses parties constitutives ;

➤ de ses énergies potentielles dans les champs de force extérieurs - les cas envisagés ne font en général intervenir que l'énergie potentielle de pesanteur;

 \succ de son énergie interne U(t).

• Le premier principe de la thermodynamique postule que la variation de l'énergie totale du système entre deux instants est égale à la somme des travaux mécanique et de l'énergie thermique reçus entre ces deux instants. Les deux instants qui nous intéressent étant infiniment voisins, le premier principe prend la forme différentielle suivante :

 $\mathrm{d}\mathcal{E}_{tot} = \delta Q + \delta W \qquad (23-3)$

• Entre les instants t et t + dt, le système reçoit :

 \succ l'énergie thermique $\delta Q = \dot{Q} dt$;

> les travaux des forces non conservatives δW qui se décomposent en : le travail mécanique utile de la machine, celui des forces autres que les forces de pression au sein du fluide, $\dot{W}_u dt$; le travail des forces de pression : du côté de l'entrée il reçoit du fluide extérieur au système $p_1\sigma_1V_1dt$ et du côté de la sortie il lutte contre le fluide extérieur et perd $-p_2\sigma_2V_2dt$.

• $d\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}(t+dt) - \mathcal{E}(t) = \dot{Q}dt + \dot{W}_u dt + p_1 \sigma_1 V_1 dt - p_2 \sigma_2 V_2 dt.$

304 Physique

L'énergie totale est une grandeur extensive : elle est la somme des énergies des sous-parties du système. On la décompose à chacun des deux instants en :

> l'énergie de la partie du système commune aux deux instants et celle de la tranche infinitésimale de volume $\sigma_1 V_1 dt$ à l'instant t;

> l'énergie de la partie du système commune aux deux instants et celle de la tranche infinitésimale de volume $\sigma_2 V_2 dt$ à l'instant t + dt.

Comme le régime est stationnaire, l'énergie du système ouvert que constitue la partie commune aux deux instants est constante. Elle disparaît dans la différence des énergies du système entre les deux instants et la variation de l'énergie totale du système fermé entre t et t + dt se résume à la différence des énergies totale des deux portions en amont et en aval de la machine. Or, ces deux tranches contiennent la même masse élémentaire d*m* du fait de la stationnarité du régime et l'énergie totale de chacune d'elles lui est proportionnelle. Ainsi,

$$d\mathcal{E}_{tot} = \left(\frac{1}{2}V_2^2 + u_2 + gz_2\right)dm - \left(\frac{1}{2}V_1^2 + u_1 + gz_1\right)dm$$

et par ailleurs,

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_{tot} = \dot{Q}\mathrm{d}t + \dot{W}_u\mathrm{d}t + p_1v_1\mathrm{d}m - p_2v_2\mathrm{d}m$$

une fois exprimé le volume des deux tranches en fonction de la masse d*m* qu'elles contiennent et du volume massique du fluide.

3.3 Premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert

• Il résulte de l'égalisation des deux expressions précédentes de $d\mathcal{E}_{tot}$:

$$D_m \cdot \Delta h_g = D \cdot (h_{g2} - h_{g1}) = \dot{W}_u + \dot{Q}$$
 (23-4)

où h_{g1} et h_{g2} sont les enthalpies massiques généralisées du fluide en amont et en aval de la machine thermique :

$$h_g = h + gz + \frac{1}{2}V^2 = u + pv + gz + \frac{1}{2}V^2$$
 (23-5)

et $D_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ est le débit-masse.

En divisant de part et d'autre par D_m , il vient :

$$\Delta h_g = h_{g2} - h_{g1} = w_u + q \tag{23-6}$$

Le travail utile massique et la puissance mécanique utile étant liés par la relation :

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}w_u = D_m w_u = \dot{W}_u \qquad (23-7)$$

la chaleur massique et la puissance thermique par celle, similaire :

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}q = D_m q = \dot{Q} \qquad (23-8)$$

Remarque : La démonstration proposée diffère de celle de la fiche 28 §2, qui était dans son esprit plus proche de l'application des théorèmes de transport.

Attention : De même donne-t-elle une définition autre de l'enthalpie généralisée par la prise en compte du terme gz. Les deux points de vue ont cours dans la littérature sur le sujet aussi convient-il de faire attention et de retenir les résultats de la manière suivante :

 $> h_g = h + \frac{1}{2}V^2$: w_u (\dot{W}) doit comptabiliser aussi le travail (la puissance) des forces de pesanteur;

> $h_g = h + gz + \frac{1}{2}V^2$: w_u (\dot{W}) ne doit pas prendre en compte le travail (la puissance) des forces de pesanteur.

4. Bilan d'entropie

• Nous reprenons la situation étudiée au §2. la variation d'entropie du système fermé sur lequel nous avons travaillé entre les instants t et t + dt est égale à : dS = S(t + dt) - S(t).

Le caractère extensif de l'entropie permet d'affirmer que l'entropie du système fermé à l'instant t est égale à la somme de l'entropie de la partie du système commune aux deux instants et de l'entropie de la tranche en amont de la machine ; il en est de même à l'instant t + dt mais avec l'entropie de la tranche en aval de la machine.

Le régime est stationnaire : les caractéristiques physiques du fluide dans la machine sont les mêmes pour la partie commune aux deux instants et si, comme nous l'avons supposé, les grandeurs thermodynamiques sont toutes localement définies en son sein, alors l'état physique local du fluide est identique aux deux instants et le champ des entropies massiques également. Donc, les entropies aux deux instants de la partie commune sont égales. D'où :

$$\mathrm{d}S = (s_2 - s_1)\mathrm{d}m$$

• La variation d'entropie est essentiellement due aux flux d'énergie thermique dans la machine et aux phénomènes dissipatifs qui sont source de création d'entropie. Il n'est pas question de les calculer ici, aussi nous contentons nous de poser la variation de l'entropie égale à la somme de l'entropie échangée δS_e lorsqu'il y a échange d'énergie thermique entre le fluide et l'extérieur et de l'entropie créée δS_c . Soit :

$$\Delta s = (s_2 - s_1) \mathrm{d}m = \delta S_e + \delta S_c$$

En divisant par d*m* l'égalité précédente et en posant $s_e = \frac{\delta S_e}{dm}$ l'**entropie massique échangée**

et $s_c = \frac{\delta S_c}{\mathrm{d}m}$ l'**entropie massique créée**, il vient :

$$s_2 - s_1 = s_e + s_c$$
 (23-9)

• Si l'évolution du système fermé est adiabatique, il est clair que la différence des entropies massiques du fluide entre l'aval et l'amont est entièrement due à l'entropie massique créée au sein de la machine par les structures dissipatives internes.

5. Exploitation des diagrammes

• Les installations réelles fonctionnant en circuit ouvert se servent fréquemment du diagramme (p - h), **diagramme des frigoristes** et du diagramme (T - s) du fluide.

• Sur le diagramme des frigoristes, apparaissent les courbes h(p) du fluide à température constante et celles à entropie constante.

Les transformations isobares y sont représentées par les droites parallèles à l'axe des ordonnées et les transformations à enthalpie massique constante par celles parallèles à l'axe des abscisses. Les transformations isothermes (resp. isentropiques) suivent les courbes à température (resp. entropie) constante. 306 Physique

• On repère ainsi sur ce diagramme les valeurs des enthalpies massiques du fluide à une pression p_0 et une température T_0 donnée : c'est la valeur de l'enthalpie correspondant à l'intersection de l'isobare parallèle à l'axe des ordonnées, d'abscisse $p = p_0$ et de l'isotherme à $T = T_0$.

Ces valeurs permettent ainsi de calculer le travail utile ou l'énergie thermique massiques que doit apporter une machine pour faire passer le fluide d'un état à un autre dans une installation donnée.

• Sur le diagramme (T - s) apparaissent les courbes s(T) à pression constante et celles à énergie interne ou enthalpie massiques constantes.

Les transformations isothermes y sont représentées par les droites parallèles à l'axe des ordonnées et les transformations isentropiques par celles parallèles à l'axe des abscisses. Les transformations isobares (resp. isenthalpiques) suivent les courbes à température (resp. enthalpie massique) constante.

• On repère ainsi sur ces diagrammes les valeurs des entropies massiques du fluide à une pression p_0 et une température T_0 donnée : c'est la valeur de l'enthalpie correspondant à l'intersection de l'isotherme parallèle à l'axe des ordonnées, d'abscisse $T = T_0$ et de l'isobare à $p = p_0$.

Ces valeurs permettent de calculer *in fine* l'entropie massique créée et d'estimer ainsi le rendement réel de la machine.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Une pompe doit puiser de l'eau dans une nappe à une profondeur h = 1, 5 m de sa surface pour l'élever à une hauteur H = 25 m au dessus de sa surface. L'eau possède une vitesse nulle lors de la prise dans la nappe et sort avec un débit-volume $D_v = 1, 2 \text{ m}^3.\text{min}^{-1}$. La bouche de sortie de la pompe a une section $S = 100 \text{ cm}^2$. On suppose que la température de l'eau demeure constante.

En supposant qu'aucun échange thermique ne se produit lors du transvasement de l'eau, déterminez la puissance utile de la pompe.

Exercice 2 : Une chaudière de puissance thermique $\dot{Q} = 20 \text{ kW}$ est utilisée pour chauffer de l'eau de $\theta_0 = 5^{\circ}$ C à $\theta_1 = 65^{\circ}$ C sous la pression atmosphérique normale. On néglige la dilatation que l'échauffement produit ; on suppose que les vitesses et les altitude d'entrée et de sortie de l'eau dans la chaudière sont identiques.

Calculez le débit-volume que la chaudière peut réchauffer.

1. Les modes de transferts thermiques

Il existe trois modes fondamentaux de transferts thermiques : la **conduction**, la **convection** et le **rayonnement**. Bien que distincts par les principes qui les gouvernent, ils apparaissent souvent conjugués entre eux dans les phénomènes d'échanges thermiques observés sur les systèmes complexes.

1.1 La conduction thermique

• Elle procède de la communication de proche en proche de l'énergie d'agitation thermique possédée par les constituants (liés ou mobiles) du milieu matériel dans lequel le transfert thermique se produit, sans qu'il y ait déplacement macroscopique à grande distance des constituants mobiles. Ce mode de transfert est le plus lent des trois.

• Elle est prépondérantes pour expliquer les transferts thermiques au sein des matériaux solides. Dans les liquides et dans les gaz, elle s'accompagne fréquemment, si les gradients de température sont élevés, de transfert thermique par convection.

1.2 La convection thermique

• Elle procède d'un écoulement naturel ou forcé à l'échelle macroscopique d'un fluide dont les particules transportent leur énergie microscopique.

• Plus subtilement, il se produit à la surface de contact entre un écoulement et une paroi solide (ou fluide : contact de l'air et de l'eau par exemple) un échange thermique qui emprunte à la conduction thermique dans la zone appelée **couche limite** où le fluide est en contact avec l'autre milieu et à la convection pure, hors de la couche limite (cf. fig. 73). On parle de transfert conducto-convectif.

• La **relation de Newton** exprime la quantité de chaleur $\delta^3 Q(\vec{r}, t)$ transférée par flux conductoconvectif du fluide à un élément de surface de la paroi d'aire dS, autour d'un point \vec{r} , où la température de la paroi est $T(\vec{r}, t)$, entre les instants t et t + dt:

$$\delta^3 Q(\vec{r}, t) = h(\vec{r}) . (T_f - T(\vec{r}, t)) \,\mathrm{d}S .\mathrm{d}t \tag{24-1}$$

 T_f étant la température moyenne du fluide hors de la couche limite.



FIGURE 73 - Transfert conducto-convectif à une paroi

 $h(\vec{r})$ est le **coefficient surfacique de transfert conducto-convectif à la paroi** en \vec{r} . Sa dimension est M.T⁻³. Θ^{-1} . Son unité est le watt par mètre-carré et par kelvin, W.m⁻².K⁻¹.

308 Physique

• La convection est fréquente et importante dans les liquides et dans les gaz en mouvement et constitue le moyen le plus efficace pour transférer de l'énergie thermique d'un système à un autre.

1.3 Le rayonnement thermique

L'échange thermique par rayonnement procède d'un transport d'énergie par l'intermédiaire d'un champ électromagnétique se propageant à la vitesse des ondes électromagnétiques dans le milieu de propagation.

Les ondes électromagnétiques se propageant dans le vide, il n'a pas nécessairement besoin d'un support matériel pour se produire. C'est assurément le plus rapide de tous les modes de transferts, mais non le plus efficace à cause des lois particulières du rayonnement thermique. Dans la suite nous étudions le seul transfert conductif.

2. Vecteur densité de flux thermique

2.1 Flux thermique

• Soit un élément de surface situé au point \vec{r} , d'aire dS et de normale unitaire $\vec{n}(\vec{r})$, de vecteur surface élémentaire $d\vec{S} = dS \vec{n}(\vec{r})$. Nous appelons **flux thermique** $d^2 \Phi_Q(\vec{r}, t)$ à travers la surface élémentaire $d\vec{S}$ au point \vec{r} à l'instant *t* la puissance thermique la traversant à cet instant.

• Le flux thermique est une puissance. Sa dimension est M.L².T⁻³. Son unité est le watt (W).

2.2 Vecteur densité de flux thermique

• Le flux thermique à travers l'élément de surface considéré est par définition le flux du vecteur **densité de flux thermique** à travers l'élément de surface en question :

$$d^{2}\Phi_{Q}(\vec{r},t) = \overrightarrow{\mathbf{j}}_{Q}(\vec{r},t) \cdot \overrightarrow{n}(\vec{r}) dS = \overrightarrow{\mathbf{j}}_{Q}(\vec{r},t) \cdot d\overrightarrow{S}$$
(24-2)

(9-2) définit de fait le vecteur densité de flux thermique.

• La dimension du vecteur densité de flux thermique est celle d'une puissance divisée par une surface, soit $M.T^{-3}$. Son unité est le watt par mètre-carré $W.m^{-2}$.

• La puissance thermique est une grandeur scalaire, la densité de flux thermique est une grandeur vectorielle car orientée dans l'espace. La direction et le sens du vecteur densité de flux thermique au point \vec{r} et à l'instant *t* donnent la direction et le sens vers lesquels s'effectuent les transferts thermiques en ce point et à cet instant.

Le flux thermique à travers une surface élémentaire dont la normale est perpendiculaire au vecteur densité de flux thermique est nulle.

2.3 Énergie thermique

• L'énergie thermique traversant la surface élémentaire considérée entre les instants t et t + dt est :

$$\delta^{3}Q(\vec{r},t) = d^{2}\Phi_{Q}(\vec{r},t).dt = \overrightarrow{\mathbf{j}}_{Q}(\vec{r},t)\cdot d\overrightarrow{S} dt$$
 (24-3)

• Généralisation : le flux (la puissance) thermique $\Phi_Q(t)$ traversant une surface S ouverte ou Σ fermée quelconque à l'instant t est la somme des flux thermiques à travers les surfaces élémentaires en lesquelles la surface S ou Σ peut être divisée.

Que la surface soit ouverte - c'est-à-dire s'appuyant sur un contour - ou fermée, l'expression de $\Phi_Q(t)$ est :

$$\Phi_{\mathcal{Q}}(t) = \iiint_{S} \overrightarrow{\mathbf{j}}_{\mathcal{Q}}(\overrightarrow{r}, t) \cdot d\overrightarrow{S} \quad \text{ou} \qquad \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathbf{j}}_{\mathcal{Q}}(\overrightarrow{r}, t) \cdot d\overrightarrow{S}$$
(24-4)

où le vecteur surface de l'élément est $d\vec{S} = dS \vec{n}(\vec{r})$, avec $\vec{n}(\vec{r})$ la normale unitaire au plan tangent en \vec{r} à la surface S ou Σ .



FIGURE 74 - Calcul d'un flux thermique : (a) une surface ouverte ; (b) une surface fermée

L'énergie thermique $\delta Q(t)$ traversant les surfaces S ou Σ pendant l'intervalle de temps compris entre t et t + dt est :

$$\delta Q(t) = \Phi_O(t).\mathrm{d}t$$

Remarque : Les flux à travers une surface fermée sont calculés, sauf exception, avec une normale en tout point de la surface orientée de l'intérieur vers l'extérieur.

3. Bilans Thermiques

Nous voulons établir une équation qui traduise le bilan d'énergie thermique dans un volume \mathcal{V} donné d'un matériau.

3.1 Hypothèses du problème étudié

• Tout point \vec{r} du matériau est caractérisé par une masse volumique $\rho(\vec{r})$ et une capacité thermique massique $c_p(\vec{r})$.

• Le matériau est dans un état d'équilibre local. En tout point et à tout instant on suppose que la notion de température du matériau est définissable et son état thermodynamique caractérisé par cette seule variable $T(\vec{r}, t)$. Le transfert d'énergie thermique y est caractérisé par une densité de flux thermique $\vec{j}_{o}(\vec{r}, t)$ à l'instant t.

• Tout point de \mathcal{V} est susceptible d'être le lieu d'un processus de création ou d'absorption de puissance thermique. Nous notons $\sigma_{\mathcal{Q}}(\vec{r}, t)$ la puissance thermique créée par unité de volume au point \vec{r} à l'instant *t*. Exemple : la puissance volumique créée par effet Joule dans un conducteur ohmique.

La dimension de σ_Q est celle d'une puissance rapportée à un volume M.L⁻¹.T⁻³. Son unité est le watt par mètre-cube W.m⁻³.

Ainsi, la puissance thermique créée dans le volume $d\tau$ autour du point \vec{r} à l'instant t vautelle : $\sigma_Q(\vec{r}, t) d\tau$. L'énergie thermique créée dans $d\tau$ entre les instants t et t + dt est égale à $\sigma_Q(\vec{r}, t) d\tau$.

Remarque : Lorsque σ_Q est positive, il s'agit d'une création nette de puissance thermique ; lorsqu'elle est négative, il s'agit d'une consommation nette.

3.2 Bilan d'énergie à une dimension

• À une dimension, les grandeurs précédemment définies ne dépendent que d'une coordonnée d'espace, par exemple $x - c_p(x)$, $\rho(x) -$, et du temps - T(x, t), $\vec{\mathbf{j}}_Q(x, t)$ et $\sigma_i(x, t)$ -. De plus le vecteur densité de flux thermique est dirigé suivant $\vec{\mathbf{e}}_x : \vec{\mathbf{j}}_Q = j_{xQ}(x, t) \vec{\mathbf{e}}_x$.



FIGURE 75 - Schéma pour l'équation-bilan thermique à une dimension

• Soit un volume parallélépipède rectangle d'arêtes parallèles aux axes d'un repère de coordonnées cartésiennes, de longueurs L_y et L_z et situé entre x et x + dx.

La variation entre les instants t et t + dt de l'énergie interne du volume solide, $d^2U(t)$, est complètement traduite par une variation dT(x, t) de sa température selon :

$$d^{2}U(x,t) = \rho(x).c_{p}(x).L_{y}.L_{z}.dx \left[T(x,t+dt) - T(x,t)\right]d^{2}U(x,t)$$
$$= \rho(x).c_{p}(x).L_{y}.L_{z}.dx.\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) dt$$

Selon le premier principe de la thermodynamique, cette variation est due au travail élémentaire des forces (nul dans la situation étudiée) et à l'énergie thermique totale apportés au matériau. L'énergie thermique totale est due à :

> l'énergie thermique $\delta^2 Q^{(\Phi)}(x, t)$ apportée par le flux thermique à travers la surface délimitant le volume $d\Phi_Q(x, t)$ pendant l'intervalle de temps dt. Le flux thermique n'est non nul qu'à travers les faces perpendiculaires à \vec{e}_x : entrant en x et sortant en x + dx.

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathcal{Q}}(x,t) = \left[j_{x\mathcal{Q}}(x,t) - j_{x\mathcal{Q}}(x+\mathrm{d}x,t)\right] . L_y . L_z = -\frac{\partial j_{x\mathcal{Q}}}{\partial x}(x,t) \,\mathrm{d}x . L_y . L_z$$

qui donne un solde énergétique à la tranche de matériau :

$$\delta^2 Q^{(\Phi)}(x,t) = \mathrm{d}\Phi_Q(x,t).\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_{xQ}}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}x.L_y.L_z.\mathrm{d}t$$

> la création d'énergie, $\delta^2 Q^{(ca)}(x, t)$, dans le volume du parallélépipède, due aux sources internes, égale à :

$$\delta Q^{(ca)}(x,t) = \sigma_Q(x,t).L_y.L_z.dx.dt$$

Comme $d^2 U(x, t) = \delta^2 Q^{(\Phi)}(x, t) + \delta^2 Q^{(ca)}(x, t)$, il en résulte :

$$\rho(x).c_p(x).\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial j_{xQ}}{\partial x}(x,t) = \sigma_Q(x,t)$$
(24-5)

3.3 Généralisation à trois dimensions

• Soit une surface fermée Σ délimitant un volume \mathcal{V} de matériau pour lequel nous voulons établir un bilan de sa variation d'énergie interne entre deux instants *t* et *t* + d*t*.

• La variation de l'énergie interne du volume de matériau considéré entre les instants t et t+dt est égale à la somme des variations de l'énergie interne de tous les volumes élémentaires en lesquels V peut être découpé :

$$\mathrm{d}U(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) . c_P(\vec{r}) . \frac{\partial T}{\partial t}(\vec{r}, t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau$$

Comme à une dimension, cette variation ne peut être due qu'à l'énergie thermique apportée entre ces instants par le flux thermique net à travers la surface fermée Σ qui délimite V:

$$\Phi_{\mathcal{Q}}(t) = -\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathbf{j}}_{\mathcal{Q}}(\overrightarrow{r}, t) \cdot d\overrightarrow{S} \quad \text{et} \quad \delta \mathcal{Q}^{(\Phi)}(t) = -\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathbf{j}}_{\mathcal{Q}}(\overrightarrow{r}, t) \cdot d\overrightarrow{S} . dt$$

et à la création d'énergie au sein du matériau :

$$\delta Q^{(ca)}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \sigma_{\mathcal{Q}}(\vec{r}, t) \,\mathrm{d}\tau.\mathrm{d}t$$

Comme précédemment, $dU(t) = \delta Q^{(\Phi)}(t) + \delta Q^{(ca)}(t)$. Il en résulte :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) \cdot c_{P}(\vec{r}) \cdot \frac{\partial T}{\partial t}(\vec{r}, t) \,\mathrm{d}\tau + \iint_{\Sigma} \vec{j} \,\varrho(\vec{r}, t) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \sigma_{\varrho}(\vec{r}, t) \,\mathrm{d}\tau$$
(24-6)

Selon le théorème d'Ostrogradsky, l'intégrale du flux de la densité de flux à travers la surface Σ peut se transformer en une intégrale sur le volume V selon :

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathbf{j}}_{\varrho}(\overrightarrow{r}, t) \cdot d\overrightarrow{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{j}}_{\varrho}(\overrightarrow{r}, t) d\tau$$

(24.6) est vraie quel que soit le volume \mathcal{V} considéré, donc l'intégrand de l'intégrale triple formée en regroupant tous les termes sous la même intégrale doit être nul. D'où l'équationbilan locale de l'énergie :

$$\rho(\vec{r}).c_P(\vec{r}).\frac{\partial T}{\partial t}(\vec{r},t) + \operatorname{div} \vec{\mathbf{j}}_{\mathcal{Q}}(\vec{r},t) = \sigma_{\mathcal{Q}}(\vec{r},t)$$
(24-7)

Remarque : La formule (24-7) possède une structure que nous avons rencontrée pour le bilan des charges en électromagnétisme (17-7) : un terme faisant intervenir la dérivée première par rapport au temps de la grandeur d'intérêt, ici la température, ajoutée à la divergence d'une densité de flux égale à un terme de création.

4. La loi de Fourier

4.1 Remarque sur l'équation-bilan locale

L'équation-bilan locale nécessite de connaître en tout point et à tout instant la densité volumique de création de puissance $\sigma_Q(\vec{r}, t)$ et la densité de flux thermique $\vec{j}_Q(\vec{r}, t)$.

 $\sigma_Q(\vec{r}, t)$ fait l'objet d'hypothèses qui dépendent du type de matériau : un matériau nucléaire est par exemple le lieu d'une création d'énergie par réactions nucléaires qui s'y produisent, un conducteur ohmique parcouru par un courant électrique est le lieu d'une transformation de l'énergie électrique en énergie thermique par effet Joule.

312 Physique

Il en est de même pour la densité de flux thermique. Parmi ces hypothèses, l'une des plus importantes est la loi de Fourier.

4.2 Énoncé de la loi

La **loi de Fourier** pose que, dans un milieu isotrope, la densité de flux thermique en un point et à un instant donnés est proportionnelle à l'opposé du gradient de la température. Le coefficient de proportionnalité est désigné par λ . Elle se traduit mathématiquement par :

à une dimension	$j_{xQ}(x,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x,t)$	(24-8)
à trois dimensions	$\vec{\mathbf{j}}_{\mathcal{Q}}(\vec{r},t) = -\lambda \overrightarrow{\mathbf{grad}} T(\vec{r},t)$	(24-9)

4.3 Commentaires sur la loi de Fourier

• Comme la loi de Fick, la loi de Fourier n'est pas une loi fondamentale de la physique, mais une loi phénoménologique. Elle linéarise de fait la dépendance de la densité de flux thermique en les dérivées spatiales premières de la température et est acceptable par les conséquences tant qualitatives que quantitatives qui en résultent.

• Elle exprime le fait que si une inhomogénéité de température existe dans le milieu, il en résulte un flux thermique vers les régions de température les plus faibles afin de l'homogénéiser au sein du matériau, conformément à l'expérience sensible que nous en avons (exemple : une barre métallique chauffée à une extrémité conduit la chaleur et sa température s'élève en tous ses points).

• Lorsque la température du matériau est uniforme, son gradient est nul : il n'y a plus de flux thermique macroscopique : l'équilibre thermodynamique est possible.

• Comme la loi de Fick et la loi d'Ohm locale dans un milieu conducteur, la loi de Fourier traduit un phénomène de transport d'énergie qui tend à mettre en équilibre thermique les corps isolés et s'accompagne d'une même irréversibilité consubstantielle.

• De même, le temps n'intervient pas explicitement dans l'expression de la loi. Les collisions entre particules véhiculant l'énergie sont suffisamment nombreuses par unité de temps pour qu'un déséquilibre de température entraîne instantanément, à l'échelle caractéristique des temps d'évolution des phénomènes de conduction thermique, un flux thermique venant le compenser.

4.4 La conductivité thermique

• λ est la **conductivité thermique** du matériau au point \overrightarrow{r} . Sa dimensi on est celle d'une puissance surfacique divisée par un gradient de température : M.L.T⁻³. Θ^{-1} . Son unité est le watt par mètre et par kelvin, W.m⁻¹.K⁻¹.

• Les ordres de grandeur des conductivités thermiques sont étendus :

> de 10⁻³ à 10⁻¹ W.m⁻¹.K⁻¹ pour les gaz;

> de 10⁻¹ à 1 W.m⁻¹.K⁻¹ pour les liquides ;

→ de 10^{-1} W.m⁻¹.K⁻¹ à 400 W.m⁻¹.K⁻¹ pour les solides (cette dernière valeur étant celle du cuivre, l'un des meilleurs conducteurs thermiques).

Dans les conditions usuelles de températures, la conductivité thermique de l'air sec vaut $2,5 \times 10^{-2} \text{ W.m}^{-1}$.K⁻¹; celle de l'eau, 0, 6 W.m⁻¹.K⁻¹; celle d'un acier de 10 à 60 W.m⁻¹.K⁻¹ selon sa composition; celle d'un béton armé de 0, 4 à 1, 6 W.m⁻¹.K⁻¹; celle d'un bois de 0, 14 à 0, 17 W.m⁻¹.K⁻¹ selon l'essence.

• La conductivité thermique varie avec la température et leur constance ne saurait être considéré comme valide que sur des intervalles modestes de température.

5. Les équations de diffusion thermique

5.1 Les équations avec sources

• L'équation-bilan énergétique (24-5) (resp. (24-7)) combinée à la loi de Fourier (24-8) (resp. (24-9)) conduit à l'équation de diffusion thermique avec sources qui régit la température dans un milieu homogène et isotrope dont la conductivité thermique peut être considérée comme constante, indépendante du point et de la température en ce point :

à une dimension
$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) + \sigma_Q(x,t) = \rho.c_p.\frac{\partial T}{\partial t}(x,t)$$
 (24-10)
à trois dimensions $\lambda \Delta T(\vec{r},t) + \sigma_Q(\vec{r},t) = \rho.c_p.\frac{\partial T}{\partial t}(\vec{r},t)$ (24-11)

où Δ est l'opérateur laplacien, égal à la divergence du vecteur gradient : $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$.

• Lorsque la conductivité thermique du milieu ne peut plus être vue comme constante par rapport à la température, les équations avec sources deviennent :

à une dimension,

$$\lambda(T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T}(T) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\right)^2 + \sigma_Q(x,t) = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}(x,t)$$

à trois dimensions,

$$\lambda(T)\,\Delta T(\vec{r},t) + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T}(T).\left(\mathbf{grad}T(\vec{r},t)\right)^2 + \sigma_Q(\vec{r},t) = \rho.c_p.\frac{\partial T}{\partial t}(\vec{r},t)$$

Si elles demeurent des équations différentielles aux dérivées partielles, elles cessent d'être linéaires et deviennent difficiles à résoudre.

5.2 Les équations dites « de la chaleur »

Lorsque les sources réparties sont inexistantes et sous le même régime d'hypothèses que précédemment pour le matériau, les équations de diffusion deviennent les **équations dites** « **de la chaleur** » :

à une dimension

trois dimensions
$$D \frac{\partial}{\partial x^2} (\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{r}, t)$$
 (24-12)
 $D \Delta T(\vec{r}, t) = \frac{\partial T}{\partial t} (\vec{r}, t)$ (24-13)

 $D \frac{\partial^2 T}{\partial t} \rightarrow D \frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow D$

(24.12)

où l'on a introduit la diffusivité thermique :

à

$$D = \frac{\lambda}{\rho.c_p}$$
(24-14)

5.3 Propriétés de l'équation « de la chaleur »

ous le régime des hypothèses adoptées - en particulier l'homogénéité du matériau et la constance de sa conductivité thermique, la diffusivité thermique est constante et l'équation « de la chaleur » a la même structure que celle de diffusion. Donc ses propriétés sont similaires à celles que nous avions relevées pour l'équation de la diffusion particulaire (cf. fiche 8 §4.3) :

314 Physique

linéarité de l'équation, forme d'une solution, loi de similitude, invariance par rapport à la transformation x' = -x et absence d'invariance par rapport à la transformation t' = -t.

6 Le régime stationnaire

Le **régime stationnaire** de diffusion thermique est un régime indépendant du temps. Les sources de puissance thermique, la température et la densité de flux thermique ne dépendent que des variables d'espace.

Nous supposons le milieu homogène et de conductivité thermique indépendante de la température.

6.1 Propriétés du régime stationnaire

• Dans le cas unidimensionnel cartésien et sans sources de puissance thermique - $\sigma_Q = 0$ -,

l'équation-bilan (**24-5**) devient $\frac{dj_{xQ}}{dx} = 0$.

La densité de flux thermique j_{xQ} est donc constante dans le temps et dans l'espace. La loi de Fourier implique que T(x) est une fonction affine de x.

• Exemple : soit une paroi d'épaisseur *L* constante, perpendiculaire à \vec{e}_x , de diffusivité thermique *D*; on suppose que la température est T(0) et T(L) de part et d'autre de la paroi. La température T(x) et la densité de flux thermique j_{xQ} sont égales à :

$$T(x) = \frac{T(L) - T(0)}{L} x + T(0)$$
 et $j_{xQ} = -D \frac{T(L) - T(0)}{L}$ (24-15)

$$T(x)$$

$$T(0)$$

$$T(L)$$

$$J_{xQ} = D \frac{T(0) - T(L)}{L}$$

FIGURE 76 – Profil de température à travers une paroi en régime stationnaire en géométrie cartésienne

6.2 Cas unidimensionnel en géométrie cylindrique

• Dans ce cas, la seule composante non nulle du vecteur densité de flux thermique est j_{rQ} et l'équation de continuité se traduit par $\frac{1}{r} \frac{d(rj_{rQ})}{dr} = 0$. $rj_{rQ}(r)$ est donc une quantité constante et la composante $j_{rQ}(r)$ est proportionnelle à l'inverse de $r : j_{rQ}(r) = \frac{A}{r}$. De la loi de Fourier, il résulte que : $T(r) = -\frac{A}{\lambda} \ln r + B$; A et B sont des constantes déterminées par les conditions aux limites.

• Exemple : Supposons que la température soit T_0 et T_1 aux distances r_0 et r_1 de l'axe des coordonnées alors :

$$T(r) = \frac{T_1 - T_0}{\ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right)} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) + T_0 \quad \text{et} \quad j_{rQ}(r) = \frac{\lambda(T_1 - T_0)}{\ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right)} \frac{1}{r}$$

6.3 Cas unidimensionnel en géométrie sphérique

• Dans ce cas, la seule composante non nulle du vecteur densité de flux thermique est j_{rQ} et l'équation de continuité se traduit par $\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 j_{rQ})}{dr} = 0$. $r^2 j_{rQ}(r)$ est donc une quantité constante et la composante $j_{rQ}(r)$ est proportionnelle à l'inverse de r^2 : $j_{rQ}(r) = \frac{A}{r^2}$. De la loi de Fourier, il résulte que : $T(r) = \frac{A}{\lambda r} + B$; A et B sont des constantes déterminées par les conditions aux limites.

• Exemple : Supposons que la température soit T_0 et T_1 aux distances r_0 et r_1 de l'origine du système de coordonnées alors :

$$T(r) = \frac{T_0 - T_1}{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + T_0 \quad \text{et} \quad j_{rQ}(r) = \frac{\lambda(T_0 - T_1)}{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right)} \frac{1}{r^2}$$

6.4 Notion de résistance thermique

• La similitude formelle entre les lois d'Ohm et de Fourier montre que la densité volumique de courant et la densité de flux thermique sont homologues, de même que le potentiel électrique et la température. De même que la différence de potentiel aux bornes d'un conducteur ohmique est proportionnelle à l'intensité du courant qui le traverse, la différence de température de part et d'autre du matériau est proportionnelle à la puissance thermique qui traverse un conducteur thermique homogène, isotrope et de conductivité thermique constante, en régime stationnaire.

• L'analogie conduit à définir la **résistance thermique** R_{th} comme le rapport de la différence de température à la puissance thermique $\Phi_Q = j_{xQ}S$ qui traverse une section S du matériau considéré. La seconde des relations (9-15) conduit à :

$$R_{th} = \frac{T(0) - T(L)}{\Phi_Q} = \frac{L}{DS}$$
(24-16)

On lui associe le schéma formel suivant :

$$T_{A} \xrightarrow{\Phi_{Q}} R_{th}$$

FIGURE 77 - Conventions aux bornes d'une résistance thermique

• La résistance thermique est une grandeur positive qui a la dimension d'une température divisée par une puissance Θ . T³.M⁻¹.L⁻². Son unité est le kelvin par watt, K.W⁻¹.

On définit la conductance thermique G_{th} comme l'inverse de la résistance thermique.

• une résistance thermique élevée rend possible l'existence d'une grande différence de température entre les deux côtés du matériau tout en entretenant un très faible flux thermique le traversant. Un bon isolant thermique présente donc une résistance thermique la plus élevée possible.

• La résistance thermique est d'autant plus grande que la diffusivité du matériau et la surface offerte au passage de l'énergie thermique sont petites et grande l'épaisseur de matériau traversée. Un bon isolant thermique est un matériau de faible conductivité, de masse volumique élevée et de forte capacité thermique massique.

• Lorsque des matériaux différents sont juxtaposés les uns après les autres, en régime stationnaire, le flux thermique qui les traverse est le même, les différences de température de part et d'autres de chacun d'eux s'ajoutent. La résistance thermique équivalente est la somme des résistances thermiques (cf. fig. 78a) :

$$R_{eq}^{(th)} = \sum_{k=1}^{N} R_k^{(th)}$$
 (24-17)

Lorsqu'ils sont « en parallèle » les uns avec les autres (cf. fig. 78b), la température est la même de part et d'autre de la paroi. Ce sont les puissances thermiques traversant chacun des matériaux qui s'additionnent pour former le flux thermique total à travers la paroi. Ce sont les conductances thermiques de chacun des matériaux qui s'additionnent pour donner la conductance thermique équivalente de la paroi :





FIGURE 78 – Associations de résistances thermiques : (a) série, (b) parallèle

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Une ailette rectangulaire de longueur L, de largeur a et d'épaisseur e petite devant a est collée sur un corps C de température T_c pour dissiper par convection l'énergie produite par C.

L'air environnant est à la température T_a . On note h le coefficient de transfert convectif entre l'air et l'ailette, λ la conductivité thermique, indépendante de la température, ρ la masse volumique et c la capacité thermique massique du matériau constitutif de l'ailette.



1. Établissez l'équation différentielle satisfaite par la température T(x, t) en présence d'un transfert convectif et dans le cadre de la loi de Fourier.

2. Dans le cadre du régime permanent, exprimez les conditions aux limites sur la température. 3. Exprimez le champ T(x) des températures en régime permanent le long de l'ailette.

Exercice 2 : Le sol possède une masse volumique moyenne μ , une capacité thermique massique moyenne c_s . Sa conductivité λ est supposée indépendante de la température. Sa

diffusivité thermique est $D \approx 9, 6 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Le plan z = 0 sépare le sol de l'air ambiant. On suppose qu'il reçoit perpendiculairement à lui une puissance thermique de densité de flux à sa surface $J(0, t) = J_0 \cos(\omega t)$.

1. Établissez l'équation de propagation de la chaleur dans le sol.

2. Recherchez la loi de température T(z, t), partie réelle de la température complexe $\underline{T}(z, t) = T_m + \underline{f}(z) \exp j(\omega t)$ où \underline{f} est une fonction de z à exprimer en fonction des données.

3. Calculez les profondeurs de pénétration des variations diurnes et annuelles.

Fonctions d'onde et probabilités de présence

Vous relirez avec profit les fiches 7 et 8 de Toute la MPSI en fiches.

1. Équation de Schrödinger et fonction d'onde

1.1 L'équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste

• L'équation de Schrödinger est à la mécanique quantique ce que le principe fondamental de la dynamique est à la mécanique classique. Comme cette dernière, elle présente, en osant un parallèle juridique, un statut polyvalent de loi constitutionnelle, de loi ordinaire et de décret d'application de la loi.

• Elle est une sorte de loi constitutionnelle de la discipline en ce qu'elle confère aux particules l'attribut de leur « citoyenneté quantique », leurs fonctions d'onde et leur latitude « politique », l'obéissance de ces fonctions d'onde à une règle générale, l'équation de Schrödinger.

• Toutefois, pour une particule donnée, il n'y a pas qu'une équation de Schrödinger, mais une infinité, chacune dépendant des conditions dans lesquelles la particule doit évoluer : l'équation de Schrödinger se décline alors en de multiples équations, qui en font ainsi autant de lois ordinaires construites par les circonstances.

• Enfin, elle est un outil opérationnel, un décret d'application de la loi. Équation différentielle, elle est un instrument qui permet de déterminer explicitement la fonction d'onde et donne un contenu à la « citoyenneté quantique » de la particule.

1.2 L'équation de Schrödinger

• Rappelons sa forme :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(\vec{r},t)$$
(25-1)

m représente la masse de la particule, V, le potentiel (l'énergie potentielle) dans lequel elle se trouve plongée, ψ une fonction d'onde possible de la particule, solution de l'équation, Δ l'opérateur laplacien, \hbar la constante de Planck réduite, égale à $\frac{h}{2\pi}$ et i l'imaginaire pur de

carré égal à −1.

• L'équation différentielle est du second ordre par rapport aux variables d'espace et seulement du premier ordre par rapport au temps. Cependant, la présence du facteur imaginaire pur i ne permet pas d'en faire le signe d'une quelconque irréversibilité qui surviendrait dans le devenir de la particule, contrairement à ce qui se passe, par exemple, au cours d'une diffusion thermique.

• Le membre de droite de (25-1) est associé à l'énergie mécanique totale de la particule. Le terme en $\Delta \psi$ est lié à son énergie cinétique et le produit $V \psi$ à l'énergie potentielle. Elle apparaît comme une équation exprimant l'énergie de la particule dans le potentiel V.

• L'équation différentielle est linéaire : toute combinaison linéaire de solutions de l'équation est encore une solution de l'équation de Schrödinger.

• À une dimension spatiale, l'équation se réduit à :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t) + V(x,t)\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)$$
(25-2)

1.3 La fonction d'onde

• On désigne du terme de **fonction d'onde** toute solution de l'équation de Schrödinger attachée à une particule de masse donnée, plongée dans un potentiel donné. Elle est une fonction à valeurs *a priori* complexes. Parmi toutes les solutions, seules peuvent avoir la signification d'une **amplitude de probabilité**, les fonctions d'onde qui sont de carré sommable, c'est-à-dire celles pour lesquelles, à tout instant :

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} |\psi(\vec{r},t)|^2 \, \mathrm{d}\tau \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x$$

respectivement à trois ou à une dimension, existe (converge) et possède une valeur réelle positive finie.

• Dans une telle situation, il est toujours possible de **normaliser** la solution, c'est-à-dire de rendre l'intégrale égale à 1, en divisant la fonction d'onde par la racine carrée de l'intégrale convergente. Ainsi, nous définissons les fonctions d'onde qui sont des **amplitudes de pro-babilité** comme celles satisfaisant à l'une des deux conditions de normalisation :

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} |\psi(\vec{r},t)|^2 \, \mathrm{d}\tau = 1 \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x = 1$$
 (25-3)

selon la dimension du problème.

• La fonction d'onde en elle-même n'a pas de signification physique concrète : elle est un intermédiaire indispensable au calcul de toutes les grandeurs physiques attribuables à la particule. Seul le carré de son module possède une signification physique immédiate à travers la relation de définition suivante :

$$d\mathcal{P}(\vec{r},t) = |\psi(\vec{r},t)|^2 d\tau \quad \text{ou} \quad d\mathcal{P}(x,t) = |\psi(x,t)|^2 dx \quad (25-4)$$

est la probabilité élémentaire que la particule soit à l'intérieur du volume d τ centré sur \vec{r} ou dans le segment dx centré sur x à l'instant t, selon l'interprétation de l'école de Copenhague. $|\psi|^2$ apparaît ainsi comme une densité de probabilité, appelée **densité de probabilité de présence**.

Attention : À une dimension spatiale, la fonction d'onde a pour dimension $L^{-\frac{1}{s^{s^2}}}$. Son unité est alors le m^{- $\frac{1}{2}$}. À trois dimensions spatiales, elle a pour dimension $L^{-\frac{3}{2}}$ et pour unité le m^{- $\frac{3}{2}$}.

• Par extension, la probabilité de présence de la particule à l'intérieur d'un domaine \mathcal{D} de l'espace ou d'un intervalle I, à un instant t donné, est fournie par l'une des deux expressions :

$$\mathcal{P}(\mathcal{D},t) = \iiint_{\mathcal{D}} |\psi(\vec{r},t)|^2 d\tau$$
 ou $\mathcal{P}(\mathcal{I},t) = \int_{\mathcal{I}} |\psi(x,t)|^2 dx$

• La multiplication d'une amplitude de probabilité ψ par un facteur $e^{i\alpha}$ ne modifie pas la densité de probabilité de présence et les deux fonctions d'onde ψ et $e^{i\alpha} \psi$ sont réputées être représentatives de la même situation physique.

1.4 Densité de courant de probabilité

• La conjugaison complexe de l'équation de Schrödinger donne :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi^*(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi^*(\vec{r},t) = -i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t}(\vec{r},t)$$
(25-5)

(25-1) $\times \psi^*(\overrightarrow{r}, t) -$ (25-5) $\times \psi(\overrightarrow{r}, t)$ conduit à :

$$-i\frac{\hbar}{2m}\left(\psi(\vec{r},t)\Delta\psi^*(\vec{r},t)-\psi^*(\vec{r},t)\Delta\psi(\vec{r},t)\right)=\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t}(\vec{r},t)$$

qui se met sous la forme :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{J}}(\overrightarrow{r}, t) + \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t}(\overrightarrow{r}, t) = 0$$
 (25-6)

où

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{r},t) = i \frac{\hbar}{2m} \left(\psi(\vec{r},t) \overrightarrow{\mathbf{grad}} \psi^*(\vec{r},t) - \psi^*(\vec{r},t) \overrightarrow{\mathbf{grad}} \psi(\vec{r},t) \right)$$
(25-7)

• L'équation (25-6) possède la structure d'une équation de conservation. Par analogie avec les équations de conservation déjà rencontrées, la grandeur conservée est la probabilité de présence, représentée par la densité de probabilité $|\psi|^2$; la densité de courant qui permet sa continuité est le vecteur \vec{J} défini par (25-7), la densité de courant de probabilité.

Remarque : La densité de courant de probabilité est une grandeur réelle en tout point et à tout instant.

• Si $\alpha(\vec{r}, t)$ désigne l'argument de la fonction d'onde ψ , la densité de courant de probabilité se définit aussi par :

$$\overrightarrow{\mathbf{J}}(\overrightarrow{r},t) = |\psi(\overrightarrow{r},t)|^2 \frac{\hbar}{m} \overrightarrow{\mathbf{grad}} \alpha(\overrightarrow{r},t)$$
(25-8)

La structure de la densité de courant de probabilité apparaît plus clairement : elle est, à l'instar de la densité volumique de courant électrique, produit de la densité volumique de charges mobiles par leur vitesse moyenne (cf. (17-1), le produit de la densité de probabilité de présence

 $|\psi|^2$ par une grandeur homogène à une vitesse, ce qu'est bien $\frac{\hbar}{m} \overrightarrow{\text{grad}} \alpha$.

La vitesse de la densité de courant de probabilité est dirigée par le gradient de l'argument (la phase) de la fonction d'onde, de même qu'une onde électromagnétique plane progressive monochromatique se propage suivant son vecteur d'onde, qui est l'opposé du gradient de la phase instantanée.

2. États stationnaires de l'équation de Schrödinger

2.1 Situation étudiée

• Soit une particule de masse *m* plongée dans un potentiel *V* indépendant du temps. On recherche les solutions de l'équation de Schrödinger de cette particule qui pourraient se mettre sous la forme d'un produit de deux fonctions φ et f, φ étant fonction des variables spatiales et f étant fonction du temps.

• Nous établissons les caractères généraux de ces solutions et donc des états quantiques qui leur correspondent.

2.2 Solutions stationnaires

• La méthode de séparation des variables appliquée à l'équation de Schrödinger conduit à conclure que les deux fonctions doivent satisfaire à :

$$-\frac{1}{\varphi(\vec{r})}\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{r}) + V(\vec{r}) = i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(t) = cte = E$$

où E est une constante réelle, l'énergie du système.

Il en découle que $f(t) = A e^{-i \frac{Et}{\hbar}}$ et φ est solution de

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{r}) + V(\vec{r})\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r})$$
(25-9)

(25-8) est appelée l'équation aux valeurs propres du problème. φ est la partie spatiale de la fonction d'onde ψ ou fonction d'onde spatiale de ψ .

• On pose habituellement A = 1 et on conclut que les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger de la particule sont de la forme :

$$\psi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r}) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$$

où E est l'énergie de la particule et φ une solution de l'équation aux valeurs propres (25-9).

2.3 Propriétés des états stationnaires

• L'équation aux valeurs propres est linéaire. Il en découle que si, pour une même valeur de l'énergie E de la particule, il existe plusieurs solutions linéairement indépendantes, toute combinaison linéaire de ces solutions est encore solution de l'équation en question. Quand une telle situation se produit, le niveau d'énergie E est dit **dégénéré**.

• Les solutions stationnaires sont dépendantes du temps, mais les densités de probabilité qui leur sont associées $|\psi|^2$ ne sont fonction que des variables d'espace puisque, pour tout \vec{r} et à tout instant t, $|\psi(\vec{r}, t)|^2 = |\varphi(\vec{r})|^2$. Ainsi, la densité de probabilité de présence de la particule au point \vec{r} est indépendante du temps.

Remarque : La normalisation de la fonction d'onde d'un état stationnaire est équivalente à la normalisation de sa partie spatiale :

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} |\psi(\vec{r},t)|^2 \,\mathrm{d}\tau = \iiint_{\mathbf{R}^3} |\varphi(\vec{r})|^2 \,\mathrm{d}\tau = 1$$

• Il en résulte que la densité de courant de probabilité dans un état stationnaire d'énergie *E* est aussi indépendante du temps puisque, pour ces états, \vec{J} se simplifie en :

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{r}) = i \frac{\hbar}{2m} \left(\varphi_E(\vec{r}) \overrightarrow{\mathbf{grad}} \varphi_E^*(\vec{r}) - \varphi_E^*(\vec{r}) \overrightarrow{\mathbf{grad}} \varphi_E(\vec{r}) \right)$$
(25-10)

ou

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{r}) = |\varphi_E(\vec{r})|^2 \frac{\hbar}{m} \overrightarrow{\mathbf{grad}} \beta(\vec{r})$$

avec $\beta(\vec{r})$ l'argument de la partie spatiale de la fonction d'onde.

• Si la partie spatiale de l'état est une fonction réelle, alors la densité de courant de probabilité est partout nulle.

• Le courant de probabilité s'annule aux zéros de la partie spatiale de l'état stationnaire ainsi qu'en ses extrema.

• La méthode de séparation des variables appliquée à l'équation de Schrödinger conduit à conclure que les deux fonctions doivent satisfaire à :

$$-\frac{1}{\varphi(\vec{r})}\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{r}) + V(\vec{r}) = i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(t) = cte = E$$

où E est une constante réelle, l'énergie du système.

Il en découle que $f(t) = A e^{-i \frac{Et}{\hbar}}$ et φ est solution de

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{r}) + V(\vec{r})\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r})$$
(25-9)

(25-8) est appelée l'équation aux valeurs propres du problème. φ est la partie spatiale de la fonction d'onde ψ ou fonction d'onde spatiale de ψ .

• On pose habituellement A = 1 et on conclut que les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger de la particule sont de la forme :

$$\psi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r}) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$$

où E est l'énergie de la particule et φ une solution de l'équation aux valeurs propres (25-9).

• La conservation de la probabilité se réduit à :

div
$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{r}) = 0$$

qui rappelle l'équation de conservation de la charge en régime permanent ou l'équation caractérisant le champ des vitesses d'un fluide en écoulement stationnaire incompressible.

• Soit φ_E une solution de l'équation aux valeurs propres d'énergie *E*, fonction des variables spatiales à valeurs complexes ; le potentiel étant une fonction réelle de ces dernières, sa fonction complexe conjuguée, φ_E^* , est aussi solution de la même équation aux valeurs propres. Il en résulte l'existence d'une infinité de solutions combinaisons linéaires des deux précédentes.

• Toutefois φ_E et φ_E^* ne correspondent pas à un même état quantique stationnaire de la particule car, si leurs densités de probabilités correspondantes sont égales en tout point, leurs courants de probabilité sont opposés l'un à l'autre. Les combinaisons linéaires des deux fonctions d'onde spatiales correspondent donc à des états quantiques différents.

2.4 Vocabulaire rencontré

• La situation étudiée est formalisée en remarquant que l'opérateur H, appelé hamiltonien,

qui, à une fonction ψ de \mathbb{R}^4 dans C, associe une autre fonction de \mathbb{R}^4 dans C, $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\psi$ est un opérateur linéaire. L'équation de Schrödinger peut donc s'écrire $\mathcal{H}(\psi) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$.

Les états stationnaires ψ_E d'énergie E solutions de l'équation sont tels que leur partie spatiale

vérifie $\mathcal{H}(\varphi_E) = E \varphi_E$. On dit que l'énergie *E* en question est une **valeur propre** de l'hamiltonien et que la fonction φ_E est une **fonction propre** de l'hamiltonien.

• En général, les fonctions propres de l'hamiltonien sont normalisables; L'ensemble des fonctions propres normalisées de l'hamiltonien est une base orthonormée de l'espace des fonctions solutions de l'équation, l'orthonormalisation des fonctions propres étant en fait celle de leurs parties spatiales respectives.

3. La particule libre

3.1 Recherche des fonctions d'onde stationnaires

• Une particule libre de masse *m* est une particule qui n'est plongée dans aucun potentiel. Son équation de Schrödinger associée se réduit à :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(\vec{r},t)$$

La partie spatiale φ de la fonction d'onde ψ d'un état stationnaire d'énergie E doit satisfaire l'équation aux valeurs propres :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{r}) = E\,\varphi(\vec{r})$$

• Les solutions qui ne divergent pas (dont la valeur ne tende pas vers $\pm \infty$ lorsque x, y ou z tend vers $\pm \infty$) sont celles d'énergie positive. Les fonctions dont la valeur en \vec{r} sont du type $\varphi_E(\vec{r}) = A e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}$ sont solutions de l'équation aux valeurs propres pourvu que :

$$E = \frac{(\hbar \vec{k})^2}{2m}$$
 (25-11)

qui constitue la relation de dispersion des fonctions d'onde stationnaires de la particule libre. Il en résulte :

$$\psi_E(\vec{r},t) = A e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{Et}{\hbar}\right)}$$

On reconnaît dans une solution de cette forme le terme complexe traduisant les variations spatio-temporelles d'une onde plane progressive monochromatique se propageant dans la direction du vecteur d'onde \vec{k} et ayant une pulsation $\omega = \frac{E}{\hbar}$, qui n'est autre que la relation de Planck-Einstein.

Une solution tridimensionnelle est caractérisée par son énergie et la direction du vecteur d'onde. Elle sera indicée par \vec{k} et non plus par E la valeur de l'énergie à laquelle correspond une infinité de solution.

3.2 Propriétés des solutions stationnaires

• Le carré du module de $\psi_{\vec{k}}$ est constant égal à $|A|^2$; une telle solution n'est pas de carré sommable. Elle ne peut pas représenter une amplitude de probabilité. Elle ne peut par conséquence pas représenter un état quantique de la particule. Au mieux peut-on associer à l'uniformité de $|\psi_{\vec{x}}|^2$ dans tous l'espace, l'idée d'une indétermination complète sur la position de la particule.

• Le calcul de $\vec{\mathbf{J}}(\vec{r},t)$ donne :

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{r},t) = |\psi_{\vec{k}}(\vec{r},t)|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$$
 (25-12)

Cependant, ce vecteur ne peut plus être interprété au sens strict comme une densité de courant de probabilité puisque la fonction d'onde qui a servi à le calculer n'est pas une amplitude de probabilité.

• Ces solutions présentent une forme d'onde progressive sinusoïdale - elles sont de la forme

 $f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$. Mais la relation quadratique entre ω et \vec{k} ,

$$\omega = \frac{\hbar \vec{k}^2}{2m}$$

fait que leur vitesse de phase est fonction de \vec{k} :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}$$

où $k = \|\vec{k}\|$. Leur vitesse de groupe vaut :

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\hbar k}{m}$$
 (25-13)

• $\hbar \dot{k}$ est, selon la formule de de Broglie, l'impulsion (la quantité de mouvement) de la particule libre. La relation (25-12) montre que la vitesse de groupe de la fonction d'onde s'apparente à la vitesse de la particule.

• À \vec{k} et donc à énergie de la particule libre fixés, sa vitesse et son impulsion le sont également. Or, les inégalités spatiales de Heisenberg postulent que le produit des incertitudes sur la composante de l'impulsion Δp_{α} selon une direction α quelconque et sur la position de la particule selon cette direction Δx_{α} est supérieur ou égal à $\hbar/2$. Comme $\Delta p_{\alpha} = 0$, il faut imaginer que Δx_{α} soit infini, ce qui peut être considéré comme traduisant une incertitude absolue sur la position de la particule, conforme à l'uniformité $|\psi_{\vec{T}}|^2$.

• Malgré tous ces défauts, l'ensemble de ces fonctions d'onde solutions de l'équation de Schrödinger, pour toutes les valeurs de $\vec{k} \in \mathbf{R}^3$, avec un coefficient A convenablement choisi, constitue une base orthonormée de l'espace des fonctions d'onde qui en sont les combinaisons linéaires et aspirent au rôle d'amplitude de probabilité bien qu'aucun des vecteurs de la base n'en soit une. Cette base est désignée sous le nom de base de représentation en impulsions.

Remarque : Il est possible de généraliser l'expression de la vitesse de groupe de la particule :

$$\overrightarrow{v}_{\varphi} = \frac{1}{\hbar} \overrightarrow{\mathbf{grad}}_{\overrightarrow{k}} E$$

où grad $_{\overrightarrow{l}}$ désigne l'opérateur :

$$\frac{\partial}{\partial k_x} \overrightarrow{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial}{\partial k_y} \overrightarrow{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial}{\partial k_z} \overrightarrow{\mathbf{e}}_z.$$

3.3 Localisation par un paquet d'ondes

• Si une fonction d'onde $\psi_{\vec{k}}$ ne peut représenter une particule au sens classique, comme un corpuscule à peu prés localisé dans l'espace et ayant une vitesse à peu près définie, une superposition de telles solutions peut être une fonction d'onde normalisable donc une amplitude de probabilité. En effet, consentant à perdre la précision absolue sur la connaissance de l'impul-

sion par la superposition de plusieurs fonctions $\psi_{\vec{k}}$ pour des vecteurs \vec{k} de directions et/ou de modules différents, nous pouvons diminuer l'incertitude de la variable de position conjuguée, donc aboutir à une localisation raisonnable de la particule.

• Ainsi, à une ou trois dimensions,

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi}(k) \,\mathrm{e}^{i\left(kx - \frac{Et}{\hbar}\right)} \,\mathrm{d}k$$
ou

$$\psi(\vec{r},t) = \iiint_{\mathbf{R}^3} \overline{\psi}(\vec{k}) \, \mathrm{e}^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{Et}{\hbar}\right)} \mathrm{d}^3 \vec{k}$$

avec $E = \frac{(\vec{h} \cdot \vec{k})^2}{2m}$ et avec $\vec{\psi}(\vec{k})$ la distribution d'amplitude sur les fonctions d'onde de base dont la somme constitue le paquet d'ondes.

• Exemple : Soit, à une dimension, le paquet d'onde pour lequel les amplitudes $\overline{\psi}(k)$ des fonctions d'onde de base seraient distribuées selon une gaussienne centrée sur k_0 d'écart-type Δk . La fonction d'onde de la particule serait ainsi :

$$\psi(x,t) = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2(\Delta k)^2}} e^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2 t}{2m}\right)} dk$$

Le calcul de l'intégrale conduit à une fonction d'onde dont la densité de probabilité est le produit d'une fonction du temps par une gaussienne, de la forme :

$$|\psi(x,t)|^2 = \alpha(t) \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2 (\Delta k)^2}{2\left(1 + \left(\frac{\hbar(\Delta k)^2 t}{m}\right)^2\right)}\right)$$

qui atteste d'une densité de probabilité de présence de la particule elle-même gaussienne, à tout instant, centrée sur $x = \frac{\hbar k_0 t}{m} = v_0 t$ où v_0 serait la vitesse moyenne de la particule. Nous voyons l'effet de la relation de dispersion non linéaire entre ω et k dans l'étalement du paquet d'ondes puisque la gaussienne s'élargit au fur et à mesure de la progression de la particule. Son écart-type croît avec t selon :

$$\Delta x = \frac{1}{\Delta k} \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar (\Delta k)^2 t}{m}\right)^2}$$

4. Superposition d'états stationnaires

4.1 Problème étudié

• Soit une particule de masse *m* plongée dans un potentiel *V* indépendant du temps; on suppose que son équation de Schrödinger possède un ensemble de solutions stationnaires d'énergie $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ordonnées de manière croissante. À l'énergie E_n est associée « la » fonction d'onde ψ_n , normalisée, à un coefficient complexe près, dont la partie spatiale, notée φ_n est normalisée. ψ_n est appelée fonction ou, par abus de langage, état propre de l'hamiltonien.

• Nous nous intéressons à l'évolution de l'état quantique d'une particule dont la fonction d'onde, l'amplitude de probabilité, est une combinaison linéaire normalisée des états propres de l'hamiltonien :

$$\psi = \sum_{n} \alpha_{n} \psi_{n}$$

 $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant la suite des cordonnées complexes de l'état dans la base des états propres de l'hamiltonien. La valeur à l'instant *t* et au point \overrightarrow{r} de l'amplitude de probabilité fonction d'onde est ainsi :

$$\psi(\vec{r},t) = \sum_{n} \alpha_{n} \varphi_{n}(\vec{r}) \exp\left(-i\frac{E_{n}}{\hbar}t\right)$$
(25-14)

325

• Pour que la fonction d'onde ψ soit l'amplitude de probabilité d'un état quantique, il faut qu'elle soit normalisée, ce qui se traduit par :

$$1 = \sum_{n} |\alpha_n|^2$$

 $|\alpha_n|^2$ représente la probabilité que la particule soit dans l'état quantique de fonction d'onde ψ_n .

4.2 Densité de probabilité

• La densité de probabilité de présence de la particule au point \vec{r} , à l'instant t est égale à :

$$|\psi(\vec{r},t)|^2 = \sum_n \sum_m \alpha_n \,\alpha_m^* \varphi_n(\vec{r}) \,\varphi_m^*(\vec{r}) \,\exp\left(-i \,\frac{E_n - E_m}{\hbar} t\right)$$

La double somme peut être écrite :

$$|\psi(\vec{r},t)|^2 = \sum_n |\alpha_n|^2 |\varphi_n(\vec{r})|^2 + \sum_{n>m} C_{nm}(\vec{r}) \cos\left(\frac{E_n - E_m}{\hbar} t - \delta_{nm}(\vec{r})\right)$$

où $C_{nm}(\vec{r}) = |\alpha_n \, \alpha_m^* \varphi_n(\vec{r}) \, \varphi_m^*(\vec{r})|$ et $\delta_{nm}(\vec{r}) = \arg(\alpha_n \, \alpha_m^* \varphi_n(\vec{r}) \, \varphi_m^*(\vec{r})).$

• La densité de probabilité d'une superposition d'états stationnaires n'est pas stationnaire : elle est une fonction explicite du temps. La première somme de l'expression précédente est constante dans le temps et exprime l'addition des effets des états stationnaires comme s'ils étaient seuls. La seconde somme est composée de termes sinusoïdaux évoluant à des pulsations qui sont celles données par le postulat de Bohr entre deux états stationnaires :

$$\omega_{nm} = 2\pi \nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}$$
(25-15)

Ces termes correspondent à des battements entre les fréquences propres des états stationnaires.

• Les amplitudes de chacun des termes sont proportionnelles à $|\alpha_n|$ et $|\alpha_m|$, c'est-à-dire au racines carrées des probabilités pour la particule de se trouver dans les états quantiques stationnaires de fonctions d'onde ψ_n et ψ_m . Si α_{n_0} de l'ensemble des $\{\alpha_n\}$ est nul, tous les termes sinusoïdaux de pulsations ω_{n_0m} disparaissent. Les pulsations de Bohr ne peuvent apparaître qu'entre états stationnaires entrant dans la composition de l'état de la particule de fonction d'onde ψ . Ces amplitudes sont aussi proportionnelles au produit des modules des parties spatiales des fonctions propres de l'hamiltonien pour les indices distincts n et m: en un point \overrightarrow{r}_0 où la probabilité de présence de la particule pour un état propres ψ_n s'annule, il n'y a plus de contribution de cet état à la probabilité de présence en ce point.

4.3 Densité de courant de probabilité

• Les densités de probabilité de présence et de courant de probabilité sont liées par l'équation de continuité (25-6). Il en résulte que la densité de courant de probabilité doit dépendre du temps. La divergence du courant de probabilité et donc le courant de probabilité lui-même contiennent des composantes sinusoïdales de pulsations, le pulsations de Bohr trouvées pour la densité de probabilité de présence.

• En utilisant la relation de définition de la densité de courant de probabilité (25-7), nous déduisons qu'elle s'écrit aussi :

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{r},t) = -\frac{\hbar}{m} \Im\left(\psi(\vec{r},t) \overrightarrow{\mathbf{grad}} \psi^*(\vec{r},t)\right)$$

Elle s'exprime, à partir de (25-14) :

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{r},t) = -\frac{\hbar}{m} \sum_{n} \Im\left(|\alpha_{n}|^{2} \varphi_{n}(\vec{r}) \overrightarrow{\mathbf{grad}} \varphi_{n}^{*}(\vec{r})\right) - \frac{\hbar}{m} \sum_{n} \sum_{m \neq n} \Im\left(\alpha_{n} \alpha_{m}^{*} \varphi_{n}(\vec{r}) \overrightarrow{\mathbf{grad}} \varphi_{m}^{*}(\vec{r}) e^{i \frac{E_{m} - E_{n}}{\hbar} t}\right)$$

• La première somme est indépendante du temps : elle regroupe les contributions des états propres comme s'ils étaient seuls. elle est de divergence nulle puisque la densité de courant de probabilité d'un état stationnaire est de divergence nulle.

• C'est dans la double somme qu'apparaissent les termes harmoniques aux pulsations de Bohr, tels qu'ils ont été découverts pour la densité de probabilité de présence.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Un électron de masse m_e est dans un puits de potentiel infini de largeur L = 0, 15 nm. Soit ψ_0, ψ_1 et ψ_2 les trois états stationnaires de plus basses énergies. L'électron est dans un état $\psi = \frac{1}{2}\psi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2$.

1. Calculez les trois énergies les plus basses.

2. Quelles sont les fréquences apparaissant dans l'évolution temporelle de la densité de probabilité de présence ?

Exercice 2 : Soit le système précédent.

3. Calculez la densité de probabilité de présence.

4. Calculez la densité de courant de probabilité de la particule.

26 Puits, marches et barrières de potentiel

1. Puits de potentiel infini

1.1 Situation étudiée

• Une particule de masse *m* est soumise à un potentiel à une dimension, nul dans une région de largeur *L*, par exemple $x \in [0; L]$, et infiniment grand en dehors de cette région. Ce problème est communément dénommé « puits de potentiel infini ».

• Nous recherchons les états stationnaires de la particule dans ce puits de potentiel. L'enfermement de la particule dans le puits impose que sa fonction d'onde soit nulle en dehors du puits. La continuité de la densité de probabilité de présence se traduit alors, aux limites du domaine de présence de la particule, par les conditions : $\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$.

Selon (25-7), ces conditions aux limites assurent aussi la nullité du courant de probabilité aux frontières de son domaine de présence.

1.2 États stationnaires de la particule

• Soit *E* l'énergie d'un état stationnaires de la particule. L'équation aux valeurs propres associée à cette situation est, dans l'intervalle $x \in [0; L]$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} = E\,\varphi$$

C'est l'équation de la particule libre, dont la relation de dispersion est $E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$.

• Les solutions normalisées satisfaisant aux conditions aux limites sont, à un facteur complexe unitaire près :

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x) \quad \text{avec} \quad k_n = n \frac{\pi}{L}, \ n \in \mathbf{N}^*$$

· Les états propres correspondants sont :

$$\psi_n(x,t) = \varphi_n(x) \exp\left(-\frac{E_n t}{\hbar}\right) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x) \exp\left(-\frac{E_n t}{\hbar}\right)$$

Les nœuds de la fonction d'onde, c'est-à-dire les points où elle s'annule croissent régulièrement avec n: le nombre de nœuds de ψ_n est égal à n + 1. Ils sont régulièrement espacés entre les deux nœuds positionnés aux extrémités du domaine de présence de la particule. En fait, le problème aux valeurs propres est mathématiquement similaire à celui du déplacement des ondes stationnaires sur une corde vibrante. Il est donc naturel d'en retrouver les propriétés.

• L'énergie de l'état de fonction d'onde ψ_n , quantifiée par l'entier naturel non nul *n*, est donnée par l'expression :

$$E_n = n^2 \, \frac{h^2}{8mL^2}$$

L'énergie du niveau fondamental de la particule - son niveau de plus basse énergie possible -

est différente de 0, égale à $\frac{h^2}{8mL^2}$.

• Les densités de courant de probabilités sont identiquement nuls pour tous les états stationnaires de la particule.

2. Marche de potentiel

2.1 Situation étudiée

• Soit une particule de masse m dans le potentiel V à une dimension suivant :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\\ V_0 > 0 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

• Nous recherchons les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger associées à ce problème. Ces dernières sont construites sur chacun des intervalles définissant le potentiel en supposant que la particule vient des x < 0 et se dirige vers les x croissants.

2.2 États stationnaires

 Pour créer une solution physiquement satisfaisante, la densité de probabilité doit être continue aux points de discontinuité de première espèce ainsi que la densité de courant de probabilité. Ceci est réalisé si la fonction d'onde ainsi que sa dérivée première par rapport à x sont continues. En notant $\psi(0^-, t)$ la limite de $\psi(x, t)$ lorsque x tend vers 0 par valeur négative, et en adoptant des notations similaires pour les limites en 0 à gauche et à droite de la fonction et de ses dérivées premières,

$$\psi(0^-, t) = \psi(0^+, t)$$
 et $\frac{\partial \psi}{\partial t}(0^-, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(0^+, t)$

• La solution stationnaire d'énergie E est telle que :

$$\psi(x,t) = \varphi_E(x) \exp\left(-\frac{Et}{\hbar}\right)$$

• Nous avons vu fiche 25 §3 que pour une particule plongée dans un potentiel nul, les solutions non divergentes de l'équation de Schrödinger d'énergie E étaient les ondes planes de vecteur d'onde \vec{k} avec la relation de dispersion $E = \frac{(\vec{h}\vec{k})^2}{2m}$. Nous utilisons ce résultat en le transposant à une dimension. La partie spatiale φ de la fonction d'onde recherchée, pour les x < 0, est égale à :

$$\varphi_E(c_i \exp(ikx) + c_r \exp(-ikx))$$

avec $E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$. La première composante d'amplitude c_i représente une onde progressive se dirigeant vers la discontinuité accompagnant la particule avec la vitesse $\frac{\hbar k}{-}$.

L'autre composante représente une onde progressive réfléchie, générée par la réflexion de la particule sur la discontinuité et qui retourne vers les x < 0 avec la vitesse $-\frac{\hbar k}{m}$.

• L'équation aux valeurs propres associée au problème lorsque $x \ge 0$ est :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_E}{\mathrm{d}x^2}+V_0\,\varphi_E=E\,\varphi_E$$

330 Physique

Deux situations doivent être envisagées : $E > V_0$ et $E < V_0$.

• Cas $E > V_0$

posons k' tel que $E - V_0 = \frac{(\hbar k')^2}{2m}$. À la discontinuité, la particule peut continuer sa progression vers les x croissants. Nous prendrons donc pour solution d'énergie E une onde progressive vers les x croissants. Elle s'exprime :

$$\varphi_E(x) = c_t \exp\left(ik'x\right)$$

Ainsi, lorsque $E > V_0$, la partie spatiale a la forme :

$$\varphi_E(x) = \begin{cases} c_i \exp(ikx) + c_r \exp(-ikx) & \text{si } x < 0\\ c_t \exp(ik'x) & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$
(26-1)

• Cas $E < V_0$

posons $\alpha > 0$ tel que $V_0 - E = \frac{(\hbar \alpha)^2}{2m}$. À la discontinuité, la particule possède une fonction d'onde non nulle dans la zone $x \ge 0$. Nous ne conservons parmi les combinaisons linéaires des deux solutions que celles qui ne donnent pas lieu à une divergence de la fonction d'onde lorsque x tend vers + ∞ , soit :

$$\varphi_E(x) = c_t \exp\left(-\alpha x\right)$$

Ainsi, lorsque $E < V_0$, la partie spatiale devient :

$$\varphi_E(x) = \begin{cases} c_i \exp(ikx) + c_r \exp(-ikx) & \text{si } x < 0\\ c_t \exp(-\alpha x) & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$
(26-2)

• Relations entre les amplitudes issue de la continuité de φ et de sa dérivée en 0 : $c_i + c_r = c_t$ pour les deux types de solution et

$$ik(c_i - c_r) = \begin{cases} ik'c_t & \text{si } E > V_0 \\ -\alpha c_t & \text{si } E < V_0 \end{cases}$$

• Les continuités de la partie spatiale et de sa dérivée en 0 fournissent deux relations pour trois coefficients. Comme les solutions de ce type ne sont pas normalisables, nous nous contentons d'exprimer les amplitudes réfléchies et transmises en fonction de l'amplitude incidente.

• Pour E > 0, les amplitudes réfléchie et transmise sont égales à :

$$c_r = \frac{k - k'}{k + k'} c_i \qquad \qquad c_t = \frac{2k}{k + k'} c_i$$

Pour E < 0, elles deviennent :

$$c_r = \frac{k - i\alpha}{k + i\alpha} c_i$$
 $c_t = \frac{2k}{k + i\alpha} c_i$

2.3 Courants de probabilité

• La densité de courant de probabilité associée à l'onde incidente est, en adaptant à une dimension l'expression (25-12) :

$$J_i = i \frac{\hbar}{2m} \left(\varphi_i(x) \frac{\mathrm{d}\varphi_i^*}{\mathrm{d}x}(x) - \varphi_i^*(x) \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}x}(x) \right) = |c_i|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

• Lorsque $E > V_0$, celle de l'onde réfléchie a pour expression :

$$J_r = -\left|c_r\right|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

où le signe – traduit le déplacement de la particule vers les x décroissants.

La densité de courant de probabilité de l'onde transmise est :

$$J_t = |c_t|^2 \frac{\hbar k'}{m}$$

Remarque : La densité de courant de probabilité dans la région x < 0 est égale, à partir de l'expression de φ_E , à :

$$J = J_i + J_r = (|c_i|^2 - |c_r|^2) \frac{\hbar k}{m}$$

• Lorsque $E < V_0$, l'expression en fonction des l'amplitude c_i et c_r est la même, en revanche celle de la densité du courant de probabilité transmise est nulle.

2.4 Coefficients de réflexion et de transmission

• Dans le cas où l'énergie de la particule est supérieure à la hauteur de la marche de potentiel, une particule classique poursuivrait son chemin en se dirigeant vers les *x* croissants; la conservation de l'énergie ferait que seule son énergie cinétique aurait diminué au franchissement de la marche de potentiel.

La situation quantique est plus délicate : la fonction d'onde est une superposition d'ondes progressives se propageant dans les deux sens, dans la région d'incidence.

• On définit le **coefficient de réflexion** \mathcal{R} de la particule sur la marche de potentiel comme le rapport des valeurs absolues des densités de courant de probabilité de l'onde réfléchie à celui de l'onde incidente :

$$\mathcal{R} = \frac{|J_r|}{|J_i|} \qquad (26-3)$$

égal à :

$$\mathcal{R} = \frac{|c_r|^2}{|c_i|^2} = \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2$$

• On définit par analogie son **coefficient de transmission** \mathcal{T} comme le rapport des valeurs absolues des densités de courant de probabilité de l'onde transmise à celui de l'onde incidente :

$$\mathcal{T} = \frac{|J_t|}{|J_i|} \qquad (26-4)$$

égal à :

$$\mathcal{T} = \frac{|c_t|^2 k'}{|c_t|^2 k} = \frac{4kk'}{(k+k')^2}$$

• L'expression du coefficient de réflexion demeure conforme à l'intuition physique : si $V_0 = 0$, k = k' et $\mathcal{R} = 0$ alors que $\mathcal{T} = 1$.

La particule est en fait une particule libre d'impulsion parfaitement définie : sa fonction d'onde est une onde progressive plane. De même, si l'énergie de la particule est grande devant la marche de potentiel, le coefficient de réflexion tend vers 0, celui de transmission vers 1.

• Dans le cas où l'énergie de la particule est inférieure à la hauteur de la marche de potentiel, la particule classique rebondit sur la marche de potentiel et retourne dans sont milieu d'incidence. Les coefficients de réflexion et de transmission, avec naturellement les mêmes définitions que précédemment, sont respectivement :

$$\mathcal{R} = 1$$
 $\mathcal{T} = 0$

Du fait de la diminution exponentielle de la fonction d'onde dans la marche de potentiel, la fonction d'onde est dite **évanescente**.

2.5 Interprétation

• La somme des coefficients de réflexion et de transmission est égale à l'unité, ce qui autorise à leur conférer une valeur de probabilité. Ainsi, les expressions précédentes peuvent s'interpréter de la manière suivante : la probabilité de réflexion de l'onde sur la marche de potentiel est \mathcal{R} et sa probabilité de transmission est \mathcal{T} .

Ce résultat est contre-intuitif par rapport à celui produit par la physique classique. Il le reste même si nous considérons le fait que les solutions (26.1) ne peuvent être réellement représentatives de l'état d'une particule puisqu'elle ne sont pas normalisables et ne sont pas interprétables comme des amplitudes de probabilité. $|\psi(x, t)|^2$ demeure certes fini, égal à

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{2|c_i|^2(k^2 + k'^2)}{(k+k')^2} \left(1 + \frac{k^2 - k'^2}{k^2 + k'^2} \cos(2kx)\right)$$

dans la région x < 0.

Cette expression montre une « interférence » entre la particule incidente et la particule réfléchie ! Ceci ne doit pas nous surprendre puisque, en l'espèce, la particule en incidence ou en réflexion n'est pas localisée. Nous voyons ici les limites de l'usage de ce seul type de fonction d'onde pour prétendre représenter l'état « réaliste » de la particule.

• Un paquet d'ondes qui localiserait mieux, à l'instant *t*, la particule dans la zone où les ondes interfèreraient de manière plutôt constructive, ferait disparaître le phénomène d'interférences dans la région d'incidence sauf sur la discontinuité au moment de la réflexion.

Cependant, ce paquet d'ondes se partagerait sur la discontinuité en un paquet d'ondes qui se réfléchit et retourne dans la région des x < 0 en se déplaçant vers les x décroissants et un paquet d'ondes se transmettant dans la région des x > 0, en se déplaçant vers les x croissants.

• Cette apparente ubiquité de la particule cesse dès lors que l'on s'intéresse à savoir où, à tout le moins, dans quelle région se trouve la particule.

Pour ce faire, il suffit de chercher à la détecter. Si l'on procède à une détection de la particule dans une petite région de l'espace dans laquelle elle est supposée avoir une probabilité no-table de se trouver dans un intervalle de temps donné, il y a de forte chance de l'y détecter.

Mais, sa présence étant attestée, le paquet d'ondes de la particule, et donc sa fonction d'onde qui contenait telle ou telle probabilité de présence ici ou là, cesse d'être ce qu'il était avant que la particule soit détectée. Ce phénomène inhérent à toute mesure sur un système quantique s'appelle une **réduction du paquet d'ondes**, une sorte de « remise à zéro des compteurs ».

Une autre manière de présenter ce phénomène est de dire que, avant la mesure ou la détection, les différentes possibilités existent avec des probabilités données par la fonction d'onde ; mais une fois la mesure ou la détection faite, un certain nombre de possibilités contenues en puissance, avant d'avoir cherché à savoir, se trouvent confirmées quand d'autres sont infirmées.

• Lorsque la particule quantique possède une énergie plus petite que la valeur du potentiel V_0 , la valeur du coefficient de réflexion nous affirme que la particule quantique est toujours réfléchie.

Cependant, pour la particule dont la vitesse serait rigoureusement connue et parfaitement délocalisée, la fonction d'onde dans la région interdite par la physique classique est non nulle.

Ce résultat n'est pas incompatible avec la certitude de la réflexion de la particule. En effet, le

carré de son module n'est pas une densité de probabilité de présence. Une manière de normaliser cette fonction et donc d'estimer la probabilité de présence de la particule dans la zone interdite pourrait être de calculer le rapport :

$$\mathcal{P}(x \ge 0, t) = \lim_{u \to -\infty} \frac{\int_0^{+\infty} |\varphi_E(x)|^2 \, \mathrm{d}x}{\int_u^{+\infty} |\varphi_E(x)|^2 \, \mathrm{d}x}$$

Le numérateur est fini, égal à $\frac{|c_t|^2}{2\alpha}$. Le dénominateur est égal à

$$-2|c_i|^2\left(u+\frac{1}{k}\,\sin\delta.\cos(ku+\delta)\right)+\frac{|c_i|^2}{2\alpha}$$

où δ est l'argument du coefficient de réflexion ; il tend vers + ∞ lorsque *u* tend vers - ∞ .

Ainsi, la probabilité de présence de la particule dans la région en question est nulle. Ce qui nous permettrait de conclure que la particule dans cet état quantique ne pénètre en fait absolument pas dans la région interdite.

3. Barrière de potentiel

3.1 Présentation du problème

• Soit une particule de masse m plongée dans le potentiel V suivant :

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\\ V_0 > 0 & \text{si } 0 \le x < L\\ 0 & \text{si } L \le x \end{cases}$$

• Nous nous intéressons exclusivement aux états stationnaires de la particule d'énergie E comprise entre 0 et V_0 avec des parties spatiales $\varphi_E(x)$ bornées. Et dans l'expression de l'un d'eux, nous focalisons notre attention sur les ondes réfléchies dans la région x < 0 et l'onde transmise dans le région $L \leq x$.

3.2 États stationnaires

• L'équation aux valeurs propres est :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_E}{\mathrm{d}x^2} + V_0\,\varphi_E = E\,\varphi_E \quad \text{si} \quad x \in [0; L[$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_E}{\mathrm{d}x^2} = E\,\varphi_E \quad \text{si} \quad x \notin [0; L[$$

• En procédant à une recherche des solutions par morceaux, comme pour la marche de potentiel, nous obtenons :

$$\varphi_E(x) = \begin{cases} c_i \exp(ikx) + c_r \exp(-ikx) & \text{si } x < 0\\ c_1 \exp(\alpha x) + c_2 \exp(-\alpha x) & \text{si } 0 \le x < L\\ c_t \exp(ikx) & \text{si } L \le x \end{cases}$$

où k et α sont définies par les relations de dispersion :

$$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m} \qquad V_0 - E = \frac{(\hbar \alpha)^2}{2m}$$

• La solution n'est pas normalisable, ce qui fait que les cinq coefficients ne peuvent être déterminés. Comme pour la marche de potentiel, nous exprimons c_r , c_1 , c_2 et c_t en fonction de c_i grâce aux relations de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée par rapport à x en 0 et L.

3.3 Courants de probabilité

• Les densités de courant de probabilité J_i de l'onde progressive incidente, J_r de l'onde réfléchie dans la région x < 0 et J_t de l'onde transmise valent respectivement, par application de (**25-12**) :

$$J_i = |c_i|^2 \frac{\hbar k}{m}$$
; $J_r = -|c_r|^2 \frac{\hbar k}{m}$; $J_t = |c_t|^2 \frac{\hbar k}{m}$

La densité de courant de probabilité de la fonction d'onde dans la barrière, J_b , est égal à :

$$J_b = i \frac{\hbar}{m} (c_1^* c_2 - c_1 c_2^*)$$

• La densité de courant de probabilité dans la région d'incidence est égale à $J_i + J_r$.

 On constate que les densités de courant de probabilité sont indépendantes de la position à l'intérieur de chacune des trois régions définies.

3.4 Coefficients de réflexion et de transmission

• Le coefficient de transmission \mathcal{T} est défini, comme pour la marche de potentiel, comme le rapport de la densité de courant de probabilité dans la région de transmission ($x \ge L$), J_t , à celle de l'onde incidente, J_i :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{1 + \beta \operatorname{sh}^2(\alpha L)} \quad \text{où} \quad \beta = \frac{V_0^2}{4 E(V_0 - E)}$$

• Tous calculs faits, le coefficient de réflexion \mathcal{R} est égal à :

$$\mathcal{R} = 1 - \mathcal{T}$$

3.5 Interprétation - effet tunnel

• Dans la situation où l'énergie de la particule est inférieure à la barrière de potentiel, la mécanique classique affirme que la particule doit demeurer dans la région où elle se tient naturellement sans possibilité aucune de franchir la barrière de potentiel. Dans le cas présent, soit elle est dans la région des x < 0, soit dans celle des $x \ge L$.

• La particule examinée du point de vue quantique atteste d'une capacité trouver de l'autre côté de la barrière de potentiel. Le coefficient de transmission n'est jamais nul, que nous interprétons comme une probabilité non nulle de franchissement de l'obstacle.

Cet effet typiquement quantique est appelé **effet tunnel**, par allusion à l'idée que la particule trouverait à creuser puis reboucher un passage dans la barrière de potentiel.

• En fait, la particule, qui est dans un état propre de son énergie mécanique totale, n'est pas dans un état propre de son énergie cinétique ni de son énergie potentielle qui varient toutes les deux.

Son spectre en quantité de mouvement est distribué sur une largeur de l'ordre de α et l'incertitude sur la quantité de mouvement est donc $\Delta p \sim \alpha$. Cette extension du spectre de son impulsion confère à la particule une probabilité non nulle de posséder une énergie cinétique suffisante pour pouvoir franchir la barrière de potentiel et il serait plus conforme à l'esprit classique de parler d'effet « saute-mouton ». • Lorsque la barrière est « épaisse », c'est-à-dire lorsque $\alpha L \gg 1$, le coefficient de transmission est approché par l'expression suivante :

$$\mathcal{T} \approx \frac{4E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp(-2\alpha L)$$

Or, le facteur devant l'exponentielle est proportionnel au produit des modules au carré des coefficients de transmission en amplitude de chacune des deux marches de potentiel qui constituent la barrière. En effet, pour la première marche de potentiel, de 0 à V_0 , le coefficient de

transmission en amplitude \underline{t}_1 est égal à $\frac{2k}{k+i\alpha}$; pour la seconde marche de potentiel, le coef-

ficient de transmission \underline{t}_2 devient égal à $\frac{2\alpha}{\alpha + ik}$ et

$$|\underline{t}_1|^2 \cdot |\underline{t}_2|^2 = 16 \frac{\alpha^2 k^2}{(\alpha^2 + k^2)^2} = 16 \frac{E(V_0 - E)}{V_0^2}$$

Le facteur de transmission total de la barrière de potentiel apparaît ainsi proportionnel au produit des facteurs de transmission de chacune des marches successives, pondéré par le facteur exponentiel.

3.6 La radioactivité α

• L'effet tunnel permet de comprendre la radioactivité α , l'éjection par un noyau radioactif d'un noyau d'hélium.

En effet, la combinaison de l'interaction forte et de l'interaction électromagnétique (coulombienne) entre les particules du noyau conduit à créer un potentiel d'interaction dans lequel sont plongés les protons de la forme suivante :



FIGURE 79 – Potentiel dans un noyau

La valeur maximale du potentiel est donnée par le potentiel coulombien de la particule α dans le potentiel électrostatique du noyau :

$$V_m = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

où Z est le numéro atomique du noyau et ε_0 la permittivité diélectrique du vide et R le rayon du noyau atomique. Or, on observe «l'éjection» par le noyau de particule α ayant des énergies bien inférieures à la valeur de V_m . Ceci ne peut se concevoir qu'en supposant que la particule α traverse par effet tunnel la barrière de potentiel.

• À l'intérieur du noyau, l'énergie de la particule est purement cinétique, de l'ordre de quelques MeV et la particule, de vitesse v, rencontre les bords du potentiel, environ tous les $\Delta t = \frac{2R}{-1}$.

En appelant \mathcal{T} le coefficient de transmission de la particule à travers la barrière de potentiel, on peut dire que la particule a une probabilité \mathcal{T} de la traverser ou qu'il lui faudra en moyenne \mathcal{T}^{-1} rencontres avec la barrière pour la franchir.

On peut estimer la durée de vie τ d'un noyau atomique avant qu'il se désintègre en émettant Δt

une particule α par $\tau = \frac{\Delta t}{\mathcal{T}}$.

• L'effet opère de façon symétrique à partir de l'extérieur et des particules chargées d'énergie plus faibles que la hauteur de la barrière de potentiel pourront pénétrer par effet tunnel dans le noyau. C'est grâce à cet effet que les réactions de fusion thermonucléaire sont rendues possibles à l'intérieur des étoiles.

3.7 Exploitation de l'effet tunnel

L'effet tunnel est employé en « microscopie à effet tunnel » de la manière suivante. Une pointe fine est approchée de la surface d'un échantillon à étudier, sans la toucher; une forte tension est appliquée entre la pointe et l'échantillon de manière à extraire par effet tunnel des électrons dont on mesure le courant électrique qu'il constituent dans la pointe. En déplaçant cette dernière au-dessus de la surface de l'échantillon, les variations mesurées du courant électrique de pointe dressent une image de la surface avec une résolution spatiale de l'ordre de la dimension d'un atome.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Soit un puits de potentiel de profondeur V_0 finie :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x \le L \\ V_0 > 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On s'intéresse aux états stationnaires d'énergie $E < V_0$ normalisables d'une particule de masse *m* dans ce puits de potentiel.

Étudiez les niveaux d'énergie en fonction de V_0 et les comparer avec ceux des états stationnaires du puits de potentiel infini.

Exercice 2 : Une particule chargée positivement de masse *m*, d'énergie *E*, est utilisée comme projectile pour pénétrer la barrière de potentiel Coulombien $V_0 > E$ d'un noyau atomique.

Pour une énergie $E < V_0$ donnée, une particule α a-t-elle une probabilité plus élevée qu'un proton de franchir la barrière de potentiel ?

1. Loi fondamentale de la statique d'un fluide

1.1 Hypothèses de travail

• Le fluide est au repos dans un référentiel galiléen, à la température uniforme T et décrit par sa masse volumique $\rho(\vec{r})$.

• Les forces en volume exercées sur un volume V quelconque du fluide sont données par leur densité volumique \vec{f}_v

• Les seules forces de surface qui s'exercent sur une surface Σ dans le fluide sont dues au champ de pression dans le fluide.

1.2 Loi fondamentale de la statique des fluides

• L'équilibre d'un parallélépipède rectangle infinitésimal d'arêtes dx, dy et dz, centré sur le point de coordonnées (x, y, z) impose que la résultante des forces de pression et de volume soit nulle, dans le référentiel galiléen.

• Selon l'axe Ox, par exemple, la résultante des forces de volume agissant $d\tau = dx dy dz$ est $(f_{\nu})_x d\tau$; celle des forces de pression, est

$$\left(-p\left(x+\frac{\mathrm{d}x}{2},y,z\right)+p\left(x-\frac{\mathrm{d}x}{2},y,z\right)\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=-\frac{\partial\,p}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

D'où :

 $((f_v)_x - \frac{\partial p}{\partial x}) d\tau = 0$. Deux autres relations analogues sont établies selon les deux autres directions orthogonales à (Ox).

• L'équilibre du fluide se traduit par la relation locale fondamentale de la statique :

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}} p - \overrightarrow{f}_{v} = \overrightarrow{0}$$
 (27-1)

La relation fondamentale de la dynamique stipule que les forces volumiques doivent être égales au gradient de la pression.

2. Modèle isotherme de l'atmosphère

2.1 Hypothèses du modèle

• L'air est considéré comme un gaz parfait de masse molaire M. Sa masse volumique est notée ρ ; elle dépend de l'altitude z. L'air est en équilibre thermique à la température T. La loi des gaz parfaits s'exprime alors :

$$\frac{p(z)}{\rho(z)} = \frac{RT}{M}$$

• Il est en équilibre statique dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ considéré comme uniforme. La seule force volumique qui s'exerce sur lui est celle liée à la pesanteur : $\rho \vec{g}$.

2.2 Champ de pression dans un gaz à l'équilibre isotherme

• La loi fondamentale de la statique des fluides s'écrit, en projection sur les trois axes de coordonnées :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$
 ; $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\frac{Mg}{RT} p$ (27-2)

Le champ de pression dans le gaz est indépendant des coordonnées x et y perpendiculaires au champ de pesanteur.

• Elle s'intègre en :

$$p(z) = p_0 \,\mathrm{e}^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

 p_0 étant la pression au niveau z = 0. La pression décroît exponentiellement avec l'altitude et sa variation entraîne une variation de la masse volumique de même nature :

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}} \quad \text{où} \quad \rho_0 = \frac{Mp_0}{RT} \quad$$

3. Le facteur de Boltzmann

3.1 Densité de particules du gaz à l'équilibre isotherme

La concentration molaire du gaz à l'altitude z est égale à :

$$c(z) = \frac{p_0}{RT} e^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

Son nombre de particules par unité de volume est $n_p(z) = N_A c(z)$. Or, $k_B N_A = R$ et $M = N_A m$ où N_A est le nombre d'Avogadro, k_B la constante de Boltzmann et m la masse d'une molécule du gaz. D'où :

$$n_p(z) = \frac{p_0}{k_B T} e^{-\frac{m_S z}{k_B T}}$$
 (27-3)

3.2 Interprétation en terme de probabilités

• Supposons que le gaz occupe l'espace illimité suivant : une colonne comprise entre z = 0 et allant jusqu'à l'infini, de base d'aire A.

Le nombre total de ses particules est fini :
$$N = A \int_0^{+\infty} n_p(z) dz = \frac{p_0 A}{mg}$$

 $n_p(z) A dz$ est le nombre de particules du gaz dans la tranche de hauteur dz autour de z. Divisé par N, le rapport apparaît comme la probabilité élémentaire $d\mathcal{P}(z)$ qu'une particule soit à l'altitude z à dz près :

$$d\mathcal{P}(z) = \frac{mg}{k_B T} e^{-\frac{mgz}{k_B T}} dz = e^{-\frac{\mathcal{E}_p}{k_B T}} d\left(\frac{\mathcal{E}_p}{k_B T}\right)$$

où $\mathcal{E}_p = m g z$ est l'énergie potentielle d'une particule individuelle du gaz dans le champ de pesanteur uniforme.

• La probabilité pour une particule d'avoir une énergie potentielle élevée dans le champ de pesanteur décroît exponentiellement avec la valeur de la dite énergie.

3.3 Généralisation : le facteur de Boltzmann

• Le résultat précédent se généralise à toutes les formes d'énergie potentielle, dans un premier temps et à toutes les formes d'énergie dans un second. Si nous supposons que l'énergie cinétique de chaque molécule est égale à la valeur moyenne $\mathcal{E}_c = \frac{3}{2} k_B T$ qui est la leur dans le gaz à la température T, nous pouvons la rajouter à l'énergie potentielle de la particule à l'altitude z. L'énergie mécanique qui en résulte vaut :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c +, mgz$$

La probabilité pour une particule d'avoir une énergie \mathcal{E}_m à d \mathcal{E}_m près est alors proportionnelle au facteur exponentiel $\exp\left(-\frac{\mathcal{E}_m}{k_BT}\right)$:

$$\mathrm{d}\mathcal{P}(\mathcal{E}_m) = A \, \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_m}{k_B T}\right) \mathrm{d}\mathcal{E}_m$$

où A est un facteur de normalisation, pour que la somme des probabilités élémentaires dans l'intervalle adéquat, ici $[0; +\infty]$, soit égale à 1. Le facteur exponentiel est appelé le **facteur de Boltzmann**.

• Conséquence : les particules d'un système à l'équilibre à la température T se répartissent sur l'échelle des énergies accessibles proportionnellement au facteur de Boltzmann. À toutes les températures, ce sont les états d'énergie les plus bas qui sont prioritairement peuplés et ceux d'énergie dépassant quelques k_BT ont une probabilité très faible d'être occupés.

• Plus la température est élevée, plus les niveaux d'énergie élevée ont des chances d'être notablement peuplés par les particules.

4. Systèmes à spectres discrets d'énergie

4.1 Hypothèses de travail sur le système

• Le système est une particule de masse *m* plongée dans un potentiel *V* tel que ses états stationnaires soient quantifiés et non dégénérés. Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite ordonnée des niveaux d'énergie que l'on appelle le **spectre** des énergies du système; le caractère non dégénéré signifie que le niveau d'énergie E_n ne possède qu'un seul état pouvant être occupé par la particule.

• Le système est plongé dans un thermostat de température T.

4.2 Probabilités d'occupation

• Le spectre en énergie étant discret, les probabilités employées sont des probabilités discrètes ou dénombrables.

• La probabilité d'occupation par la particule de l'état d'énergie E_n est proportionnelle au facteur de Boltzmann. On la note :

$$\mathcal{P}(E_n) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right)$$
 (27-4)

Le facteur $\frac{1}{Z}$ doit être tel que la somme de toutes les probabilités d'occupation des états soit égale à 1. Ainsi, Z, appelée **fonction de partition** ou **somme des états** du système, est égale à :

340 Physique

$$Z = \sum_{n \in \mathbf{N}} \exp\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right)$$
(27.5)

La fonction de partition du système est très importante en physique statistique, lorsque qu'il s'agit de calculer, connaissant le spectre en énergie du système, ses grandeurs thermodynamiques. Comme la probabilité, elle est une grandeur sans dimension.

• Le spectre d'énergies du système étant donné, sa fonction de partition est une fonction de la température ou du facteur β défini par :

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

• Le rapport des probabilités d'occupation de deux états d'énergie E_n et E_m est dans le rapport des facteurs de Boltzmann :

$$\frac{\mathcal{P}(E_n)}{\mathcal{P}(E_m)} = \exp\left(-\beta(E_n - E_m)\right)$$

Une telle distribution d'énergie est appelée distribution canonique.

4.3 Énergie moyenne - Écart quadratique moyen

• L'énergie moyenne \overline{E} de la particule est égale à l'espérance - au sens des probabilités - de son énergie, à savoir la somme des énergies du spectre - qu'elle est susceptible de prendre - pondérées chacune par sa probabilité d'occupation du niveau correspondant :

$$\overline{E} = \sum_{n \in \mathbf{N}} E_n \mathcal{P}(E_n)$$
(27-6)

• L'énergie moyenne de la particule dans le thermostat de température T s'exprime directement à partir de la fonction de distribution :

$$\overline{E} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$
(27-7)

Remarque : Cette relation est générale et vaut pour tous les systèmes, continus ou discrets.

• L'écart quadratique moyen en énergie, noté ΔE , est la racine carrée de l'espérance des carrés des écarts de l'énergie à l'énergie moyenne :

$$\Delta E = \sqrt{(E - \overline{E})^2} = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} (E_n - \overline{E})^2 \mathcal{P}(E_n)} = \sqrt{\overline{E^2} - \overline{E}^2}$$

Il caractérise la dispersion de l'énergie autour de sa valeur moyenne.

• ΔE se calcule à l'aide de la fonction de partition du système :

$$(\Delta E)^2 = -\frac{\partial \overline{E}}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}$$
(27-8)

4.4 Système de N particules indépendantes

• Lorsque le système est constitué de *N* particules identiques indépendantes, plongées dans le même potentiel, les particules possèdent toutes le même spectre d'énergie et sont susceptibles d'occuper chacune de la même manière les niveaux d'énergie offerts.

Il en découle que les probabilités d'occupation des niveaux d'énergies offerts par deux particules sont elles aussi indépendantes.

L'énergie moyenne du système, \mathcal{E} , est égale au nombre de particules qui le composent multiplié par l'énergie moyenne qu'une de ces particules peut avoir dans un thermostat de température T:

$$\mathcal{E} = N\overline{E}$$

• Le carré de l'écart quadratique moyen en énergie, donné par (27-5), est proportionnel à la dérivée de l'énergie moyenne du système par rapport à β . Or, l'énergie moyenne du système est proportionnelle N, donc l'écart quadratique moyen est proportionnel à \sqrt{N} .

• Les fluctuations relatives en énergie, définies par $\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}}$, sont de ce fait inversement proportionnel à la racine carrée du nombre de particules du système.

Pour un système thermodynamique, le nombre de particules est si élevé que \sqrt{N} est encore un nombre très élevé - par exemple, si N est de l'ordre du nombre d'Avogadro, \sqrt{N} est de l'ordre de 10^{12} .

Par conséquence, les fluctuations relatives d'énergie sont si petites qu'elles nous sont imperceptibles. Ceci explique le caractère quasi-certain des valeurs des grandeurs thermodynamiques recueillies lors de mesures effectuées sur de tels systèmes macroscopiques.

5. Systèmes à deux niveaux d'énergie

5.1 Définition - exemples

• Un système à deux niveaux d'énergie est un système placé dans des conditions physiques telles que son hamiltonien ne possède que deux états propres stationnaires et donc un spectre en énergie à deux valeurs, $\{-\epsilon, +\epsilon\}$.

• Les exemples de tels systèmes se trouvent en général du côté de particules ou d'atomes placés dans un champ magnétique.

• Ainsi, l'expérience de Stern et Gerlach de déviation d'un jet d'atomes d'argent dans un champ magnétique inhomogène. Elle a permis de révéler la quantification du moment magnétique lié au moment cinétique intrinsèque (ou de spin) de l'atome.

Dans le cas des atomes d'argent, la projection du spin sur la direction du champ magnétique

ne peut donner que les valeurs $\pm \frac{\hbar}{2}$ et les énergies associées à ces deux situations possibles

sont $\epsilon = \pm \gamma \frac{n}{2} B$, où *B* est l'intensité du champ magnétique et γ le **rapport gyromagnétique** de l'atome, qui est le rapport de proportionnalité entre le moment magnétique et le moment cinétique intrinsèque.

• Une quantification du moment cinétique intrinsèque existe aussi pour le proton. Elle conduit à des propriétés similaires, exploitées en l'analyse physico-chimique et par les instruments d'imagerie médicale de Résonance Magnétique Nucléaire (R.M.N.), qui utilisent les signaux que créent les résonances des protons (atomes d'hydrogène) contenus dans les différentes molécules qui composent nos tissus organiques pour dresser des cartes de ces tissus, les scanners. Pour l'électron, le phénomène donne lieu à une Résonance Paramagnétique Électronique (R.P.E.).

5.2 Énergie moyenne d'un système à deux niveaux

• D'après (27-7), l'énergie moyenne d'un système placé dans un thermostat de température T est obtenue à partir de la fonction de fonction de partition (27-5)du système. Soit Z cette

342 Physique

fonction de partition :

$$Z = \exp\left(-\beta\varepsilon\right) + \exp\left(\beta\varepsilon\right)$$

L'énergie moyenne \overline{E} du système est donnée par l'expression :

$$\overline{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\varepsilon \, \text{th} \, (\beta \varepsilon) = \varepsilon \, \text{th} \left(-\frac{\varepsilon}{k_B T} \right)$$
(27-9)

• L'énergie moyenne du système apparaît comme une fonction strictement croissante de la température.

Aux très basses températures, l'argument de la tangente hyperbolique tend vers $-\infty$ et l'énergie moyenne tend vers $-\varepsilon$: le système est extrêmement peu agité et demeure essentiellement dans son état d'énergie la plus basse.

Aux très hautes températures, l'argument $-\beta\varepsilon$ tend vers 0 et l'énergie moyenne tend aussi vers 0. Le système est très agité dans le thermostat et il se trouve aussi souvent dans chacun des deux états.

Remarque : À l'équilibre thermodynamique, la probabilité d'occupation par le système de l'état d'énergie élevée est toujours plus faible que sa probabilité d'être dans l'état d'énergie la plus basse. Au mieux, aux températures très élevées, les probabilités tendent-elles à s'égaler.

5.3 Capacité thermique du système

• La capacité thermique à volume constant c_v du système est égale à la dérivée de son énergie moyenne par rapport à la température :

$$c_{\nu} = \frac{\partial \overline{E}}{\partial T} = -k_B \beta^2 \frac{\partial \overline{E}}{\partial \beta} = k_B \beta^2 \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta}$$
(27-10)

soit :

$$c_{\nu} = k_B \beta^2 (\Delta E)^2 \qquad (27-11)$$

• La capacité thermique du système en fonction de la température est égale à :

$$c_{v} = k_{B} \left(\frac{\varepsilon}{k_{B}T}\right)^{2} \frac{1}{\operatorname{ch}^{2}\left(\frac{\varepsilon}{k_{B}T}\right)}$$

La courbe représentative de la capacité thermique est donnée figure 80 :



Elle tend vers 0 aux basses et aux hautes températures et présente un maximum pour une température de l'ordre de ε/k_B .

• La relation (27.11) relie directement la capacité thermique à volume constant aux fluctuations d'énergie du système. Pour le système à deux niveaux, les fluctuations d'énergie sont égales à :

$$\Delta E = \frac{\varepsilon}{\operatorname{ch}\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}$$

Elles tendent vers 0 aux faibles températures et croissent jusqu'à la valeur asymptotique ε lorsque la température augmente. L'augmentation de la température entraîne en effet une égalisation des probabilités d'occupation des deux états du système et donc la tendance du système à occuper l'un ou l'autre indifféremment. Alors que l'énergie moyenne tend vers 0, les fluctuations autour de la moyenne tendent naturellement vers ε .

6 Théorème d'équipartition

6.1 Présentation du problème

• Un grand nombre de systèmes possèdent une énergie totale qui peut se mettre sous la forme d'une somme de termes quadratiques en fonction des coordonnées de position et des composantes d'impulsion, tels l'énergie cinétique d'une particule libre, l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique et son énergie mécanique totale.

• Soit un système classique possédant un terme d'énergie E_i quadratique en la coordonnée généralisée q_i (coordonnée de position ou composante du vecteur vitesse) et indépendant des autres degrés de liberté.

Posons $E_i = \frac{1}{2} aq_i^2$ où a > 0. Le caractère classique du système se manifeste par le fait que les valeurs de son énergie ne sont pas quantifiées et que toutes les valeurs d'énergies positives lui sont accessibles.

• Nous supposons un tel système plongé dans un thermostat de température T.

6.2 Probabilités continues

• Pour ce système classique, où les variations d'énergie peuvent être continues, les probabilités discrètes telles (27-4) doivent céder la place à une densité de probabilité continue par laquelle on définit non plus la probabilité que le terme considéré d'énergie ait telle ou telle valeur, mais la probabilité que ce terme ait une certaine valeur E_i à dE_i près. Cette latitude laissée à l'énergie correspond à une latitude dq_i sur la coordonnée q_i . Si toutes les valeurs de l'énergie sont supposées permises, alors, la coordonnées q_i peut varier de $-\infty$ à $+\infty$.

• La probabilité en question est infinitésimale, nous la notons $d\mathcal{P}(E_i)$, est supposée proportionnelle à dq_i et au facteur de Boltzmann :

$$d\mathcal{P}(E_i) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right) dq_i = \frac{1}{Z} \exp\left(-\beta E_i\right) dq_i$$

1/Z demeure le facteur de normalisation qui fait que la somme de toutes ces probabilités élémentaires sur toutes les valeurs possibles de q_i est égale à 1. Z joue donc toujours le rôle de fonction de partition, seule la manière de la calculer évolue :

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right) dq_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\beta a q_i^2}{2}\right) dq_i$$

• Du calcul de l'intégrale résulte l'expression de la fonction de partition :

344 Physique

$$Z = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta a}}$$

6.3 Calcul de l'énergie moyenne

• L'énergie moyenne du système plongé dans un thermostat à la température T se calcule grâce à l'expression :

$$\overline{E_i} = \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{+\infty} E_i \exp(-\beta E_i) \, \mathrm{d} \, q_i = -\frac{1}{Z} \, \frac{\partial Z}{\partial \beta}$$

où une intégrale remplace la somme discrète et la probabilité élémentaire continue, les probabilités discrètes. L'énergie moyenne s'obtient à partir de la fonction de partition par la même relation (**27-7**). Au final, il vient :

$$\overline{E_i} = \frac{k_B T}{2}$$
(27-12)

Quelles que soient la nature de la coordonnée q_i (une coordonnée de position ou une composante de vitesse) et la valeur du paramètre *a* caractérisant la système, l'énergie moyenne d'un

degré de liberté quadratique est toujours la même, $\frac{k_BT}{2}$.

6.4 Généralisation

• Si le système considéré possède r degrés de liberté et que son énergie totale E soit une somme de r termes quadratiques indépendants similaires à ceux rencontrés :

$$E = \sum_{i=1}^r \frac{1}{2} a_i q_i^2$$

Nous pouvons définir la probabilité élémentaire que l'énergie du degré de liberté 1 soit $E_1 \ll a$ dq_1 près », ..., l'énergie du degré *i* soit $E_i \ll a dq_i$ près », ... et celle du degré *r*, $E_r \ll a dq_r$ près ».

Elle est proportionnelle au facteur de Boltzmann pour l'énergie $E = \sum_{i=1}^{r} E_i$ et à $dq_1, \ldots, dq_i, \ldots, dq_r$. Elle s'écrit :

$$d^{r}\mathcal{P}(E_{1},\ldots,E_{i},\ldots,E_{r})=\frac{1}{Z}\exp(-\beta E)\,dq_{1}\ldots dq_{i}\ldots dq_{r}$$

La fonction de partition qui normalise les probabilités devient :

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\beta E) \, \mathrm{d}q_1 \dots \mathrm{d}q_r$$

Or, le facteur de Boltzmann de la somme des énergies est égal au produit des facteurs de Boltzmann de chacune d'elles :

$$\exp(-\beta E) = \prod_{i=1}^{r} \exp(-\beta E_i)$$

et l'intégrale multiple se calcule comme le produit de r intégrales simples. Il en résulte que la fonction de partition vaut :

$$Z = \prod_{i=1}^r \sqrt{\frac{2\pi}{\beta a_i}}$$

• Considérons le degré de liberté i_0 ; la probabilité que le degré de liberté i possède une énergie E_{i_0} à « dq_{i_0} près » est égale à la somme des probabilités élémentaires précédentes, les valeurs de toutes les autres énergies $E_1, ..., E_{i_0-1}, E_{i_0+1}, ... E_r$ pouvant être quelconques. Il s'en suit que :

$$d\mathcal{P}(E_{i_0}) = \int_{q_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{q_{i_0-1}=-\infty}^{+\infty} \int_{q_{i_0+1}=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{q_r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{Z} \exp(-\beta E) \, \mathrm{d}q_1 \dots \mathrm{d}q_{i_0} \dots \mathrm{d}q_r$$

qui, tous calculs faits, est égale à :

$$\mathrm{d}\mathcal{P}(E_{i_0}) = \sqrt{\frac{\beta a_{i_0}}{2\pi}} \exp(-\beta E_{i_0}) \,\mathrm{d}q_{i_0}$$

En suivant le raisonnement précédent, l'énergie moyenne du degré de liberté i_0 dans le thermostat demeure égale à ce qu'elle était lorsque le degré de liberté était seul, à savoir $\frac{k_BT}{2}$.

• L'énergie totale moyenne du système en question prend la valeur :

$$\overline{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{2\beta} = r \frac{k_B T}{2}$$

(2mm] L'énergie moyenne d'un système à *r* degrés de liberté quadratiques indépendants est égale à *r* fois l'énergie moyenne d'un degré quadratique indépendant, $\frac{k_BT}{2}$.

Chaque degré de liberté quadratique indépendant possède la même énergie moyenne : cette propriété caractéristique constitue le **théorème d'équipartition de l'énergie**.

7 Capacité thermiques des gaz et des solides

7.1 Capacité thermique des gaz dilués

• Un gaz parfait est constitué de particules supposées ponctuelles et sans interaction : son énergie totale est constituée de la somme des énergies cinétiques des particules. L'énergie est une somme de termes quadratiques indépendants et le calcul de son énergie moyenne satisfait aux hypothèses du théorème d'équipartition.

• Soit un gaz monoatomique constitué de *n* moles, soit $n N_A$ molécules, N_A étant le nombre d'Avogadro; chacune de ses molécules possède r = 3 degrés de liberté de translation, le système possède donc $3 \times n N_A$ degrés de liberté. Lorsque le gaz est placé dans un thermostat à la température *T*, son énergie moyenne est, selon le théorème d'équipartition,

$$\overline{E} = \frac{3 n N_A}{2} k_B T$$

Sa capacité thermique à volume constant est :

$$C_{v} = \frac{\partial \overline{E}}{\partial T} = \frac{3 n N_{A}}{2} k_{B} = \frac{3 n}{2} R$$

où R est la constante des gaz parfaits.

• Si le gaz parfait est diatomique rigide, les molécules sont linéaires et possèdent r = 5 degrés de liberté : 3 degrés de translation et 2 degrés de rotation. Les énergies cinétiques tant de translation que de rotation satisfont aux hypothèses du théorème d'équipartition. L'énergie moyenne totale du gaz vaut donc :

$$\overline{E} = \frac{5 n N_A}{2} k_B T$$

Sa capacité thermique à volume constant en résulte :

$$C_v = \frac{5n}{2}R$$

7.2 Capacité d'un solide

• Un solide peut être considéré, en première approximation, comme une collection d'oscillateurs harmoniques (les atomes) indépendants les uns des autres et en vibration autour de leurs positions d'équilibre.

L'énergie mécanique de chaque oscillateur est la somme de son énergie cinétique $\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ et de son énergie potentielle qui est limitée au puits de potentiel quadratique $\frac{1}{2}(h_x^2 + h_z^2 + h_z^2)$

dratique $\frac{1}{2}(k_x x^2 + k_y y^2 + k_z z^2)$.

Au total, chaque atome possède 6 degrés de liberté quadratiques, supposés indépendants de ceux des autres atomes.

• Les hypothèses précédentes autorisent l'application du théorème d'équipartition de l'énergie. Le traitement classique de ces oscillateurs indépendants conduit à une énergie moyenne d'un atome quelconque du solide égale à :

$$\overline{E} = 3 k_B T$$

La capacité thermique atomique à volume constant est égale à $3 k_B$. La capacité molaire à volume constant, obtenue en mulitpliant la capacité atomique par le nombre d'Avogadro devient :

$$c_{vm} = 3R$$

• Cette capacité apparaît indépendante de la température. Ce fait n'est pas conforme à l'expérience car, pour tous les solides, la capacité thermique molaire tend vers 0 lorsque la température tend vers 0, en étant proportionnelle à T^3 au voisinage du zéro absolu. En revanche, elle traduit à peu près la réalité aux températures ambiantes pour la plupart des solides, sinon à des températures plus élevées, car la limite des capacités thermiques molaires à volume constant est effectivement 3 *R* aux températures élevées. C'est la **loi de Dulong et Petit**.

7.3 Modèle quantique de la capacité d'un solide

• Un modèle quantique proposé par Einstein consiste à traiter chacun de ces oscillateurs à trois dimensions comme effectivement indépendant de tous les autres et identiques entre eux. Mais au lieu de traiter un oscillateur de manière classique en supposant son énergie continue, il utilise le résultat de la mécanique quantique selon lequel, l'énergie d'un des degrés d'un

oscillateur vibrant à la pulsation propre $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est quantifiée et vaut :

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

où n est un entier naturel. La fonction de partition de l'oscillateur devient ainsi :

$$Z = \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-\beta E_n) = \frac{\exp\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1}$$

• Il en résulte une énergie moyenne de l'oscillateur quantique égale à :

$$\overline{E} = 3\hbar\omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1}\right)$$

• La capacité thermique molaire à volume qui en découle a pour expression :

$$c_{vm} = 3 N_A k_B (\beta \hbar \omega)^2 \frac{\exp(\beta \hbar \omega)}{\left(\exp(\beta \hbar \omega) - 1\right)^2}$$

Or, $R = k_B N_A$; en posant $\Theta = \frac{\hbar \omega}{k_B}$ où Θ est la **température d'Einstein**, la capacité thermique molaire à volume constant s'exprime :

$$c_{vm} = 3R \left(\frac{\Theta}{T}\right)^2 \frac{\exp(\Theta/T)}{\left(\exp(\Theta/T) - 1\right)^2}$$

• Lorsque La température devient très grand devant la température d'Einstein, la capacité tend vers 3 R, conformément à la loi de Dulong et Petit.

Lorsque la température tend vers 0, la capacité tend effectivement vers 0, mais de manière exponentielle et non de manière polynomiale.

Ceci est du à l'hypothèse trop simplificatrice selon laquelle les atomes du solide se comportent comme des oscillateurs harmoniques ayant tous la même pulsation propre de vibration.

En réalité, des couplages existent au moins entre atomes premiers voisins, qui lèvent la dégénérescence de la pulsation en un ensemble de pulsations propres voisines mais différentes entre elles.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Un moment dipolaire électrique \vec{p} est plongé dans un champ électrique uniforme \vec{E} . Soit θ l'angle entre la direction du champ et celle du dipôle. Le système est plongé dans un thermostat à la température T.

1. Exprimez l'énergie d'interaction du dipôle dans le champ.

2. Calculez la projection moyenne du moment dipolaire électrique sur la direction du champ électrique.

Exercice 2 : Un atome possède un moment magnétique $g \gamma \vec{J}$ proportionnel au moment cinétique total \vec{J} .

La projection du moment cinétique total sur la direction d'un champ magnétique \vec{B} est quantifiée par J_z , entier compris entre -J, -J+1, -J+2, ..., J-1, J.

1. Exprimez l'énergie d'interaction du moment magnétique dans le champ magnétique.

2. Déduisez-en le moment magnétique moyen de l'atome dans un thermostat à la température T.

Corrigés de la physique

1. Cinématique

Exercice 1

Les expressions sont homogènes si R a la dimension d'une longueur et ω celle de l'inverse d'un temps (une vitesse angulaire).

2. Il s'agit de déterminer x'(t), y'(t) et z'(t) les lois horaires de M dans \mathcal{R}' . Le référentiel \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} à la vitesse constante $v_r \overrightarrow{e}_x$, donc le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est nul. Partons de la relation : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ où $\overrightarrow{OO'} = v_r t \overrightarrow{e}_x$. Ainsi,

$$\overrightarrow{O'M}(t) = \begin{vmatrix} R(\omega t + \sin(\omega t)) - v_r t \\ R\cos(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

3. Si $v_r = R\omega$ la coordonnée x'(t) devient égale à $R\cos(\omega t)$ et nous constatons que $x'^2 + y'^2 = R^2$, équation d'un cercle de centre O' et de rayon R. Le référentiel \mathcal{R}' doit se déplacer à la vitesse $R\omega \overrightarrow{e}_x$ par rapport à \mathcal{R} .

Exercice 2

1. Attachons un référentiel \mathcal{R}' à la tige en rotation : son origine O' est confondue avec O, l'un de ses axes $(O', \overrightarrow{e}_{x'})$ est la tige, un autre $(O', \overrightarrow{e}_z)$ est confondu avec son axe de rotation dans \mathcal{R} de sorte que $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \Omega \overrightarrow{e}_z$.

La vitesse d'entraînement est par définition égale à $\vec{v}_e = \vec{v}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$, qui se réduit, O' étant fixe dans \mathcal{R} , à $\vec{v}_e = \Omega \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{O'M}$, soit $\vec{v}_e = x'(t)\Omega \vec{e}_{y'}$ où $\vec{e}_{y'}$ est le vecteur unitaire tel que $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$ soit un trièdre orthonormé direct. Les vecteurs $\vec{e}_{x'}$ et $\vec{e}_{y'}$ sont similaires respectivement à \vec{e}_r et \vec{e}_{θ} d'un repère de coordonnées cylindriques.

2. Reprenons l'expression (1-7) de l'accélération d'entraînement en tenant compte de la nullité de l'accélération de O' dans \mathcal{R} et de la dérivée par rapport au temps du vecteur rotation : il ne reste plus que le double produit vectoriel qui conduit à $\vec{a}_e(M) = -\Omega^2 x'(t) \vec{e}_{x'}$. L'accélération de Coriolis est définie par (1-8), soit $\vec{a}_c(M) = -2\Omega \dot{x}'(t) \vec{e}_{y'}$.

3. Les coordonnées du point M dans le référentiel \mathcal{R} sont alors :

 $x(t) = R\cos(\omega t)\cos(\omega t)$ et $y(t) = R\cos(\omega t)\sin(\omega t)$ en choisissant les axes du référentiels \mathcal{R} de sorte que (O, \vec{e}_x) coïncide avec $(O', \vec{e}_{x'})$ à l'instant initial.

$$x(t) = \frac{R}{2} (1 + \cos(2\omega t)) \text{ et } y(t) = \frac{R}{2} \sin(2\omega t).$$

L'équation de la trajectoire est ainsi $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$. C'est l'équation d'un cercle de rayon $\frac{R}{2}$ et de centre le point de coordonnées $\left(\frac{R}{2}, 0\right)$.

349

Exercice 1

2. Dynamique

1. Fixons les axes du référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen et du référentiel lié au véhicule : les axes sont en translation rectiligne les uns par rapport aux autres et les repères de projection peuvent être $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ pour \mathcal{R} et $(O', \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ pour \mathcal{R}' , tels que l'accélération du véhicule soit $\vec{a} = a \vec{e}_x$ et celle de la pesanteur $\vec{g} = -g \vec{e}_z$.



Le référentiel \mathcal{R}' n'est pas galiléen et l'équilibre des forces dans le référentiel du véhicule doit intégrer la forces d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f}_{ie} = -m\overrightarrow{a}_e(M)$ au bilan des forces réelles, le poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e}_z$ et la tension \overrightarrow{T} du fil de suspension. \mathcal{R}' est en translation rectiligne par rapport à \mathcal{R} donc l'accélération d'entraînement de tous les points de \mathcal{R} est la même, égale à $-m\overrightarrow{e}_x$.

L'équilibre du pendule dans le référentiel s'écrit donc : $\vec{T} - mg\vec{e}_z - ma\vec{e}_x = \vec{0}$. La tension étant colinéaire au fil, le fil de suspension fait un angle θ_0 avec la verticale tel que tan $\theta_0 = \frac{a}{g}$.

2. Soit le repère de coordonnées polaire $(O', \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ associé au référentiel \mathcal{R}' . La projection sur \vec{e}_θ de la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel non galiléen donne l'équation du mouvement du pendule *m* dans \mathcal{R}' . Le bilan des forces et des forces d'inertie demeure le même puisqu'il n'y a pas de force d'inertie de Coriolis.

Soit un écart ε par rapport à la position d'équilibre déterminée à la question 1. Ainsi, en appelant *l* la longueur du pendule : $ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + ma\cos\theta$; posons $\theta = \theta_0 + \varepsilon$, le développement autour de θ_0 et la condition d'équilibre donnent :

$$l\ddot{\varepsilon} = -(g\cos\theta_0 - a\sin\theta_0)\varepsilon$$

Or $\cos\theta_0 = \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}$ et $\sin\theta_0 = \frac{a}{\sqrt{g^2 + a^2}}$, d'où :
 $\ddot{\varepsilon} = -\frac{g^2 - a^2}{l\sqrt{g^2 + a^2}}\varepsilon$

Il n'y a stabilité des petits mouvement que si a < g et leur pulsation dépend effectivement de a.

Exercice 2

Soit \mathcal{R}_G le référentiel géocentrique supposé galiléen ; soit \mathcal{R}_T le référentiel terrestre de repère de coordonnées cartésiennes $(O, \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$, O étant à la surface de la Terre, A à sa verticale, donnée par l'accélération de la pesanteur \overrightarrow{g} , \overrightarrow{e}_z désignant la direction verticale ascendante, \overrightarrow{e}_x le vecteur unitaire tangent au méridien dirigé vers l'équateur terrestre et \overrightarrow{e}_y le vecteur unitaire tangent par O, dirigé vers l'Est.



Le point matériel est soumis à son seul poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$. Le référentiel d'étude n'est pas galiléen, il tourne avec un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega(-\cos\lambda\vec{e}_x + \sin\lambda\vec{e}_z)$ par rapport au référentiel géocentrique, ω étant la vitesse de rotation diurne de la Terre autour de l'axe des pôles. L'étude du mouvement dans le référentiel terrestre doit tenir compte des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

Le poids du corps est la somme de la force d'attraction universelle et de la force d'inertie d'entraînement, que l'on supposera pratiquement constante à l'échelle du mouvement.

La force d'inertie de Coriolis est égale à : $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{\nabla}(M/\mathcal{R}_T)$, soit, $(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ étant les composantes du vecteur vitesse du centre d'inertie du corps dans le référentiel terrestre :

$$\vec{f}_{ic} = -2 m \Omega \left(-\dot{y} \sin \lambda \vec{e}_x + (\dot{z} \cos \lambda + \dot{x} \sin \lambda) \vec{e}_y - \dot{y} \cos \lambda \vec{e}_z\right)$$

Le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre conduit ainsi à :

$$\overrightarrow{ma}(M/\mathcal{R}_T) = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{f}_{ic}$$

soit, en projection sur les trois axes de coordonnées et après simplification par m :

$$\begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{vmatrix} - \frac{-\dot{y} \sin \lambda}{\dot{z} \cos \lambda + \dot{x} \sin \lambda}$$
$$\frac{-\dot{y} \cos \lambda}{-\dot{y} \cos \lambda}$$

Nous avons un système d'équations différentielles couplées. Mais les ordres de grandeur permettent de simplifier l'étude : le mouvement principal est la chute libre selon la direction verticale, les vitesses selon les deux autres axes seront considérées comme négligeables devant $|\dot{z}|$.

Par ailleurs $\Omega \approx 7, 3 \times 10^{-5}$ rad.s⁻¹ et tant que $|\dot{y}| \ll \frac{g}{\Omega}$, le mouvement selon \vec{e}_z est gouverné par $\ddot{z} \approx -g$. Ainsi $z(t) \approx H - \frac{1}{2}gt^2$ et $\dot{z}(t) = -gt$.

Le mouvement suivant \vec{e}_y est ensuite plus important que celui suivant \vec{e}_x .

Il se réduit à
$$\ddot{y}(t) \approx -2\Omega(-gt) \cos \lambda$$
 soit $\dot{y}(t) = \Omega gt^2 \cos \lambda$ et $y(t) = \frac{\Omega gt^3 \cos \lambda}{3}$.

D'où, après une hauteur de chute H, une déviation vers l'Est :

$$y = \frac{1}{3} \Omega g \cos \lambda \left(\frac{2H}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

y est positif, il s'agit donc bien d'une déviation vers l'Est. Le résultat de l'expérience de Reich a donné, après une chute de H = 180 m dans un puits de mine, une déviation de 3, 8 cm environ.

3. Complément de mécanique du solide

Exercice 1

1. Le référentiel est supposé galiléen. Le solide est soumis aux réactions normale \vec{R}_N et tangentielle \vec{R}_T du plan incliné et à son poids. La somme de ces forces est nulle à l'équilibre. La réaction tangentielle doit être dirigée vers le haut du plan incliné pour que l'équilibre soit possible.



La projection des forces sur les directions normale et tangentielle conduisent à : $R_N = mg \cos \alpha$ et $R_T = mg \sin \alpha$, R_N et R_T étant les projections des composantes de la réaction du plan. La condition d'équilibre se traduit par la relation :

$$\frac{|R_T|}{|R_N|} < f_s$$

L'angle limite α_m est donc tel que : tan $\alpha_m = f_s$.

2. Lorsque cet angle est dépassé, l'équilibre sous l'effet des frottements solides est impossible. Le solide entre en mouvement : il se déplace certainement vers le bas du plan incliné. Les forces auxquelles il est soumis sont exactement les mêmes, dirigées dans le même sens, mais R_N et R_T sont liés par la relation : $R_T = -f_d R_N$.

Soit le repère de projection du référentiel galiléen $(O, \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$, où \overrightarrow{e}_x est le vecteur unitaire colinéaire à la ligne de plus grand pente, dirigé vers le bas, \vec{e}_{y} est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan incliné et dirigé vers le haut, $\vec{e}_z = \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z$.

Le théorème de la résultante cinétique appliqué au centre d'inertie du solide et projeté dans le repère conduit à :

	ÿ		R_T	1	$\sin \alpha$
m	$\begin{array}{c} \ddot{y} = \\ \ddot{z} \end{array}$	=	R_N	+ mg	$-\cos \alpha$
		0		0	

L'absence de mouvement suivant \vec{e}_y et \vec{e}_z fait que : $R_N = mg \cos \alpha$, soit l'équation du mouvement le long de \vec{e} :

$$\ddot{x} = g \, \sin \, \alpha - f_d g \, \cos \alpha$$

La condition sur l'angle fait que l'accélération est positive, le mobile descend la pente, sa vitesse initiale étant nulle dans le référentiel lié au sol. L'accélération du centre d'inertie est constante : le mouvement suivant la ligne de plus grande pente est donc uniformément accéléré.

Exercice 2

1. On prend comme origine du repère la position initiale du centre d'inertie du solide (lorsque le ressort est détendu). L'analyse du mouvement est complétée par la force de tension du ressort : $\vec{T} = -kx \vec{e}_x$.

La tension du ressort étant nulle dans la position initiale, elle n'intervient pas dans la condi-

tion initiale de mise en mouvement qui demeure la même que précédemment.

Dans la phase initiale du mouvement, et en faisant l'hypothèse que le mouvement s'effectue vers le bas, la projection dans le repère du théorème de la résultante cinétique appliqué au centre d'inertie du solide conduit à l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} = mg\,\sin\alpha - kx - f_d mg\,\cos\alpha$$

En posant $m\omega_0^2 = k$, cette première phase conduit à la loi horaire,

$$x(t) = X_0 (1 - \cos(\omega_0 t))$$
 où $X_0 = \frac{g(\sin \alpha - f_d \cos \alpha)}{\omega_0^2}$: la loi horaire est bien compatible avec

les hypothèses faites d'un mouvement vers le bas. Elle est valable jusqu'à la première annulation de la vitesse : cette dernière est égale à $\dot{x}(t) = \omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t)$. Lorsque elle s'annule pour la première fois après la mise en mouvement, à $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0}$, le solide s'arrête et nous devons examiner si, dans le bilan des forces qui peut être alors fait, la réaction tangentielle satisfait à $|R_T| < f_s R_N$ soit $|R_T| < f_s mg \cos \alpha$.

Or à l'instant t_1 , la tension du ressort vaut $-2kX_0 \overrightarrow{e}_x$.

Si nous supposons l'immobilité, $-2kX_0 + R_T + mg \sin \alpha = 0$

d'où $R_T = mg (\sin \alpha - 2 f_d \cos \alpha)$.

Si $|R_T| < f_s mg \cos \alpha$, alors le solide s'arrête définitivement, sinon, il remonte vers le haut sous l'effet de la tension du ressort qui impose une force supérieure en norme à la somme des projections tangentielles du poids et de la valeur maximale de la réaction statique. Les forces à la remontée sont les mêmes, seul le signe de R_T change car la vitesse est négative donc R_T doit être dirigée vers le bas. L'équation du mouvement qui en résulte est alors :

$$m\ddot{x} = mg\,\sin\alpha - kx + f_d mg\,\cos\alpha$$

En prenant l'instant t_1 comme nouvelle origine des temps, les conditions initiales de la nouvelle phase du mouvement étant : $x(t_1) = 2X_0$ et $\dot{x}(t_1) = 0$, la loi horaire de cette phase du

mouvement devient :
$$x(t) = X'_0 + (2X_0 - X'_0) \cos(\omega_0 t)$$
 avec $X'_0 = \frac{g(\sin \alpha + f_d \cos \alpha)}{\omega_0^2}$.

Remarque : L'expression de X_1 doit être positive et l'est de fait car, si la condition d'arrêt du mouvement n'est pas satisfaite, c'est que R_T en $x(t_1)$ était positive et supérieure à $f_s mg \cos \alpha$, elle-même supérieure à $f_d mg \cos \alpha$.

La seconde phase du mouvement s'arrête lorsque la vitesse du centre d'inertie s'annule à l'instant $t_2 = \frac{\pi}{1} + t_1$.

l'instant
$$t_2 = \frac{\pi}{\omega_0} + t_1$$
.

En reproduisant le raisonnement fait au premier arrêt, nous obtenons deux possibilités : soit l'arrêt définitif, soit la poursuite du mouvement avec, à nouveau, une descente du solide le long du plan incliné. Cet arrêt se produit à l'abscisse $2(X'_0 - X_0)$ qui est positive : le solide n'est pas remonté à sa position initiale à cause des pertes d'énergie par frottement sur le plan incliné. On vérifie aisément par récurrence que l'abscisse du point d'arrêt après la *n*-ième descente est $x_n^{(d)} = 2X_0 - (n - 1)(2X'_0 - 2X_0)$ et celle des points d'arrêt après une remontée $x_n^{(m)} = n (2X'_0 - 2X_0)$. Les points d'arrêt à la descente vont de moins en moins loin et ceux d'arrêt à la montée de moins en moins haut. Le mouvement s'arrête sur un point d'arrêt (en

descente ou en montée) : en descente après $n = E\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{X_0}{X'_0 - X_0}\right) + 1$ descentes et n - 1 re-

montées ; en montée après $n = E\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{X_0}{X'_0 - X_0} + \frac{1}{2}\right) + 1$ descentes et remontées.

2. La trajectoire de phase est constituée de portions d'ellipses homothétiques les unes des autres de demi-grands axes arithmétiquement décroissants.



4. Traitement des signaux analogiques

Exercice 1

1. Un filtre passe-bas passif tel que décrit a pour fonction de transfert canonique : $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$ avec $\tau = \frac{1}{2\pi f_c}$.

2. Le filtre est linéaire donc les composantes spectrales en sortie sont de même fréquences que les composantes spectrales d'entrée. Elles ont donc pour fréquences f_1 , f_2 et f_3 . L'amplitude en sortie d'une composante de fréquence f donnée est le produit de son amplitude en entrée du filtre et du module de la fonction de transfert pour cette fréquence.

Ex : l'amplitude de la composante de fréquence f_1 vaut $\frac{U_{1m}}{\sqrt{1 + (f_1/f_c)^2}}$

soit 4, $5 \times \frac{1}{\sqrt{1 + (450/600)^2}} = 3, 6 \text{ V}$; l'amplitude de la composante de fréquence f_2 est ainsi de 6, $5 \times \frac{1}{\sqrt{1 + (900/600)^2}} \approx 3, 6 \text{ V}$ et celle de fréquence f_3 vaut $3, 5 \times \frac{1}{\sqrt{1 + (1800/600)^2}} \approx 1, 1 \text{ V}$.

Exercice 2

1. Deux formes canoniques existent pour un tel filtre

$$\underline{H}(\omega) = \frac{j \frac{\omega}{Q\omega_c}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_c}} \quad \text{ou} \quad \underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

2. Le signal décrit n'a de composantes spectrale que de rang impair : l'amplitude de la composante de rang *n* est $\frac{4V_0}{\pi n}$. Son amplitude filtrée par le passe-bande du second-ordre vaut : $\frac{4V_0}{\pi n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{nf_0}{f_c}-\frac{f_c}{nf_0}\right)^2}}$.

On souhaite que la composante préservée par le filtre soit celle de rang 5 : nous avons intérêt à choisir comme fréquence centrale $f_c = 5 f_0$ afin que le gain du filtre soit maximal pour cette fréquence. Ainsi, l'amplitude de la composante de rang n vaut : $\frac{4 V_0}{\pi n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 (\frac{n}{5} - \frac{5}{n})^2}}$;

celle de rang 5,
$$\frac{4V_0}{5\pi}$$
.

Afin que, pour tout *n* impair différent de 5, la condition soit respectée, il faut que

Physique

$$\frac{4V_0}{5\pi} \ge 10 \times \frac{4V_0}{\pi n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{n}{5} - \frac{5}{n}\right)^2}}, \text{ soit } Q^2 \ge \frac{25 \left(2500 - n^2\right)}{(n^2 - 25)^2}.$$

Or, le membre de droite de l'inégalité est maximal pour la valeur de n = 3 et la condition sur le facteur de qualité devient : $Q \ge 15, 6$.

5. Introduction au traitement numérique du signal

Exercice 1

1. La fréquence minimale d'échantillonnage, d'après le théorème de Shannon, doit être deux fois la fréquence maximale du spectre du signal à échantillonner, soit 40 kHz. La fréquence choisie satisfait à cette condition, donc le signal échantillonné est bien une représentation du signal audio à échantillonner.

2. Soit C = 700 Mo la capacité du disque compact enregistrable ; soit f_e la fréquence d'échantillonnage. Le nombre d'échantillons par seconde est donc f_e et chacun d'eux requiert n = 3octets, ainsi, chaque seconde d'enregistrement nécessite nf_e octets et le nombre de secondes d'enregistrement du disque est le rapport de la capacité d'enregistrement au nombre d'octets

nécessaires chaque seconde : $T = \frac{C}{nf_e}$, soit 5288 s ou 1 h 28 min environ.

Exercice 2

1. Soit α la résolution angulaire moyenne de l'œil humain. L'angle sous lequel les centres respectifs des deux pixels voisins sont vus à la distance D n'a pas besoin d'être inférieur à la résolution α puisqu'ils seront confondus entre eux et ne doit pas être supérieur pour donner l'impression visuelle de continuité. Or, cet angle est le rapport de la distance d entre leurs

centres respectifs à la distance d'observation, soit $\frac{d}{D}$; ainsi, $d = D \alpha$ soit 0, 29 mm environ.

2. En considérant les pixels comme carrés, le nombre de pixels multiplié par la distance entre deux pixels voisins immédiats doit donner la dimension d'un des côtés de l'écran : $1366 \times 0, 29 \approx 396$ mm soit 39, 6 cm et 768 $\times 0, 29 \approx 223$ mm soit 22, 3 cm. Le nombre de pixels choisi selon les deux dimensions conduit à un angle entre eux légèrement inférieur à la résolution de l'œil humain, ce qui explique la sensation de netteté que l'on a dans la définition des images.

3. La rémanence de l'œil est la durée pendant laquelle une impression visuelle génère une persistance de l'image dans le cerveau. Il suffit donc de changer légèrement l'image tous les 1/24 ou 1/25 de seconde pour avoir une sensation visuelle de mouvement continu. Or, chaque image requiert $1366 \times 768 \times 3$ octets de codage des informations lumineuses pour la constitution d'une image. Ainsi, le nombre d'octets à transmettre chaque seconde est compris entre $24 \times 1366 \times 768 \times 3$ et $25 \times 1366 \times 768 \times 3$, soit un flux d'informations de 75, 5 à 78, 7 Mo.s⁻¹.

6. Filtrage numérique du signal

Exercice 1

1. cf. réponse à l'exercice 2, question 1 de la fiche 4.

2. L'équation différentielle se déduit de la fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{N}(\omega)}{\underline{D}(\omega)}$ où N et D sont

des polynômes en $j\omega$. Nous constituons les deux opérateurs différentiels par remplacement dans N et D des puissances de $j\omega$ par la dérivée d'ordre la valeur de la puissance; l'opérateur différentiel construit à partir de D est appliqué à la tension de sortie et celui construit sur

corrigés 355

N est appliqué à la tension d'entrée. Ainsi, à $\underline{H}(\omega) = \frac{j \frac{\omega}{Q\omega_c}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_c}}$ correspond l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_c^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 v_s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{Q \,\omega_c} \cdot \frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + v_s = \frac{1}{Q \,\omega_c} \cdot \frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}t}$$

3. Le facteur de qualité Q du filtre désiré est $\frac{f_c}{\Delta f} = 50$, donc le régime libre du filtre est pseudo périodique et s'écrit :

$$v_s(t) = (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) \exp(-t/\tau)$$

avec $\Omega = \omega_c \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ et $\tau = \frac{2Q}{\omega_c}$ puisque v_s est solution de $\frac{1}{\omega_c^2} \cdot \frac{d^2 v_s}{dt^2} + \frac{1}{O\omega_c} \cdot \frac{dv_s}{dt} + v_s = 0$

Il dure environ 5τ et pour que être convenablement échantillonnée, il est bon de prendre au moins quatre échantillons par demi-pseudo-période $\frac{\pi}{\Omega}$. Comme il y a environ $5\tau\Omega/\pi$ demi-pseudo-périodes, il est nécessaire d'avoir environ $20\tau\Omega/\pi$ soit de l'ordre de $\frac{40Q}{\pi}$ échantillons

 h_m . Q étant égal à 50, il faut donc environ 670 valeurs de h_m pour que le filtre numérique fasse ce que l'on souhaite.

4. La condition de Shannon par rapport à la composante de fréquence la plus élevée que l'on ait à traiter conduit à une fréquence d'échantillonnage de 2×500 Hz soit 1 kHz. En ajoutant 10 %, nous prenons une fréquence d'échantillonnage de 1, 1 kHz.

7. Modèle scalaire des ondes lumineuses

Exercice 1

Deux sources cohérentes d'ondes lumineuses sphériques de même longueur d'onde $\lambda = 600$ nm et de même amplitude émettent respectivement des points S_1 et S_2 , distants entre d

eux de d = 1 mm, de coordonnées $(\frac{d}{2}, 0, 0)$ et $(-\frac{d}{2}, 0, 0)$.

1. La différence de chemin optique dans l'air est simplement égale à $\delta = S_2 M - S_1 M$, soit

$$\sqrt{\left(\frac{3d}{2}\right)^2 + D^2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + D^2}$$
. A.N. : $\delta \approx 6, 7 \times 10^{-7}$ m.

2. La différence de phase qui en découle vaut $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$. A.N. : $\varphi = 7,0$ rad.

3. La différence relative d'amplitude émise par chacune des sources est

$$\Delta A = \left(\frac{1}{S_1 M} - \frac{1}{S_2 M}\right) S_1 M \text{ par exemple. A.N.} : \Delta A \approx 4, 4 \times 10^{-7}.$$

Remarque : on constate sur cet exemple la variation beaucoup plus rapide de la différence de phase que de la différence d'amplitude.

Exercice 2

1. Les lois de Snell-Descartes sont : les rayons incident, réfléchi et réfracté sont copla-

356 Physique

naires ; l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence ; en appelant r l'angle de réfraction, $n_1 \sin i = n_2 \sin r$.

2. Soit *A* un point du rayon lumineux dans le milieu d'indice n_1 et *B* un point sur le même rayon dans le milieu d'indice n_2 ; soit *I* le point de franchissement du dioptre de séparation par le rayon lumineux.

Soit un système de coordonnées dans lequel les coordonnées de *A* sont $(0, y_A)$ avec $y_A > 0$, celles de *I*, (x, 0) avec x > 0 et celles de *B*, (x_B, y_B) avec $x_B > 0$ et $y_B < 0$.

Le chemin optique de A à B vaut $L_{AB} = n_1 AI + n_2 IB$ qui se traduit à l'aide des coordonnées : $L_{AB} = n_1 \sqrt{x^2 + y_A^2} + n_2 \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}$. Pour montrer que le chemin optique entre A et B en temps que fonction de x est minimal, il suffit de montrer que l'expression de $L_{AB}(x)$ admet un minimum et que ce minimum traduit la loi de la réfraction. Or,

$$\frac{\mathrm{d}L_{AB}}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} - \frac{n_2 (x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$

Cette expression peut s'annuler pour la valeur x_0 comprise entre 0 et x_B telle que :

$$\frac{n_1 x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_A^2}} = \frac{n_2 (x_B - x_0)}{\sqrt{(x_B - x_0)^2 + y_B^2}}$$

Or, $\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_A^2}} = \sin i$ et $\frac{(x_B - x_0)}{\sqrt{(x_B - x_0)^2 + y_B^2}} = \sin r$ en appelant *r* l'angle du rayon de réfracté.

Le chemin optique admet donc bien un extremum pour une abscisse du point I qui redonne la loi de la réfraction. Le calcul de la dérivée seconde de L_{AB} par rapport à x conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}^2 L_{AB}}{\mathrm{d}x^2}(x) = \frac{n_1 y_A^2}{(x^2 + y_A^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{n_2 y_B^2}{((x_B - x)^2 + y_B^2)^{\frac{3}{2}}}$$

qui est bien positive, donc cet extremum est un minimum.

8. Sources et détecteurs de lumière

Exercice 1

La longueur de cohérence temporelle du doublet jaune possède la signification suivante : c'est la longueur pendant laquelle les deux vibrations demeurent pratiquement en phase à partir d'un instant où elles étaient, par exemple, toutes deux nulles et croissaient.

Alors que les vibrations s'ajoutent de manière constructives à partir de cet instant, on considère qu'elles se détruisent lorsque les deux vibration sont à nouveau nulles, mais que l'une est croissante et l'autre décroissante. Ceci survient pour la plus petite longueur l_c telle que $\frac{l_c}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda_1 = k\lambda_2$ où k est le plus petit entier non nul, soit $\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\Delta \lambda}$ avec $\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Ainsi, $l_c \approx 579 \,\mu$ m.

Remarque : Le processus est symétrique par rapport à l'origine arbitraire que nous avons fixée, d'où le facteur 2 divisant l_c .

Exercice 2

1. Les éclairements E de la source à chacune des deux fréquences s'exprime par le rapport des puissances émises à chacune des longueurs d'onde rapportées à la surface de la sphère de

rayon D. Ainsi $E_1 = \frac{\mathcal{P}_1}{4\pi D^2}$ et $E_2 = \frac{\mathcal{P}_2}{4\pi D^2}$.

Les deux éclairements obtenus multipliés par la surface S du détecteur, E_1S et E_2S , donnent les puissances reçues par le détecteur à chacune des deux longueurs d'onde. Enfin, chacune de ces puissances divisée par l'énergie hv du photon correspondant donne le nombre de photons reçus par unités de temps à chacune des longueurs d'onde. D'où

$$\dot{n}_1 = \frac{\mathcal{P}_1 S \lambda_1}{4\pi D^2 h c} \quad \text{et} \quad \dot{n}_2 = \frac{\mathcal{P}_2 S \lambda_2}{4\pi D^2 h c}$$

A.N. : $\dot{n}_1 \approx 3, 5 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$ et $\dot{n}_2 \approx 33, 5 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$.

2. Le courant électrique engendré par la source sur le photodétecteur est égal à la somme des courants générés par les photons à chacune des deux longueurs d'onde. Or, le courant généré à une longueur d'onde est le produit du nombre de photons reçus à cette longueur d'onde par le rendement quantique à cette longueur d'onde, ce qui correspond au nombre d'électrons engendrés par les photons, multiplié par la charge électrique élémentaire que transporte chaque électron. Ainsi,

$$i = e(\eta_1 \dot{n}_1 + \eta_2 \dot{n}_2)$$

A.N. : $i \approx 3,9 \,\mu$ A.

9. Superposition d'ondes lumineuses

Exercice 1

Le pas a est supérieur à chacune des deux longueurs d'ondes, donc il existe un ordre p tel que la formule des réseaux de diffraction $p \lambda = a(\sin i - \sin i_0)$ soit satisfaite et le pouvoir de résolution est multiple entier de N, donc supérieur à 28 000.

Or, ce pouvoir de résolution est égal à $\lambda_0/\Delta\lambda$, soit une différence de longueur d'onde minimale égale à 589/28 000 nm, donc 0, 02 nm, nettement inférieur à l'écart entre les deux raies du sodium. Elles pourront être séparées.

Exercice 2

1. L'étendue du « point » source fait que l'angle θ_0 n'est défini qu'à environ $\frac{r_s}{f'}$, soit

 2×10^{-3} rad près.

2. L'incertitude $\Delta \theta_0$ sur l'angle d'incidence de l'onde plane sur le réseau entraîne une incertitude $\Delta \theta$ sur la direction dans laquelle les rayons lumineux interfèrent : $\Delta \theta = \Delta \theta_0 \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}$. $\Delta \theta$ est de l'ordre de grandeur de $\Delta \theta_0$. La largeur angulaire d'un pic de diffraction par le réseau est de l'ordre de $\frac{2\pi}{N}$ soit 2, 2 × 10⁻⁴ rad. Ainsi, c'est la finesse de la source qui limite de manière drastique le pouvoir de résolution du montage, d'un facteur 10 quasiment par rapport à ce qu'il serait théoriquement.

Remarque : La diffraction par la lentille n'est pas ici une limitation du pouvoir de résolution car l'angle d'ouverture lié à la diffraction est de l'ordre de

 $\frac{\lambda}{2r_l} \approx 1, 2 \times 10^{-5}$ rad.

10. Interférences par division du front d'onde

Exercice 1

1. Nous sommes exactement dans le situation vue dans le résumé. L'interfrange du dispositif

est ainsi $i = \frac{\lambda D}{a}$, soit respectivement, $i_1 = 3$, 1 mm, $i_2 = 2$, 9 mm et $i_3 = 2$, 75 mm.

2. Le centre du dispositif est occupé par les trois franges brillantes. De part et d'autre du dispositif, les franges brillantes vont s'espacer les unes des autres, modifiant la teinte de l'éclairement résultant.

Exercice 2

La situation est encore exactement celle du cours : le facteur de contraste n'est plus égal à 1 comme pour la source ponctuelle. Chaque élément du segment se comporte comme une source ponctuelle élémentaire incohérente par rapport à ses voisines, qui crée un éclairement sur l'écran. L'éclairement résultant est la somme des éclairement de chaque source. Le facteur

de contraste qui en résulte est $\left|\operatorname{sinc}\left(\frac{al_s}{\lambda_0 d}\right)\right|$ soit environ 4, 88 × 10⁻². Le contraste est devenu

très faible et le système de frange n'est plus visible en pratique.

11. Interférences par division d'amplitude

Exercice 1

1. Les interférences sont localisées à l'infini et nous les ramenons à distance finie en plaçant l'écran de projection dans le plan focal image d'une lentille convergente à la sortie du Michelson.

2. Au contact optique, l'écran est uniformément éclairé et l'apparition de la lame d'air fait sortir les anneaux d'interférence du centre vers la périphérie. Lorsque l'épaisseur de la lame d'air est $e = 54, 6 \,\mu\text{m}$, la distance entre les plans sources équivalentes est doublée et vaut $2e = 109, 2 \,\mu\text{m}$. L'ordre d'interférence au centre de la figure est donc p = 200, il est sorti p - 1 soit 199 anneaux sombres du centre.

3. L'ordre d'interférence au centre de la figure est entier donc l'éclairement est brillant, les ondes étant en phase.

4. Le premier anneau sombre correspond à un ordre d'interférence p = 199, soit

 $2 e \cos \theta_1 = \left(199 + \frac{1}{2}\right) \lambda$ qui correspond à un rayon du premier anneau sombre égal à $f' \tan \theta_1$.

5. La distance entre les deux premiers anneaux sombres est $f'(\tan \theta_2 - \tan \theta_1)$ où θ_2 est donné par la relation $2e \cos \theta_2 = \left(198 + \frac{1}{2}\right)\lambda$.

Exercice 2

1. Les interférences sont localisées sur le miroir qui crée le coin d'air.

2. On obtient des franges d'interférence parallèles à l'arête du coin d'air.

3. Un système de trous d'Young éclairé par une source ponctuelle dont on observe les interférences qu'il crée au voisinage de la projection orthogonale sur l'écran de la droite joignant les deux trous.

12. Distributions de charge et champ électrostatique

Exercice 1

1. Les rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ autour de la droite perpendiculaire au plan du triangle passant par le point d'intersection des médiatrices sont deux éléments d'invariance de la distribution de charge. Il existe par ailleurs quatre plans de symétrie de la distribution : celui qui contient la distribution de charge électrique elle-même, ceux qui sont perpendiculaires au plan de la distribution et passent par une charge et le milieu du segment constitué par les deux autres charges électriques.

2. Tous les plans de symétries passent par le centre du triangle. Le champ électrique appartient à chacun de ces plans, or l'intersection de leurs directions vectorielles respectives est réduite au vecteur nul, donc le champ électrique au centre du triangle est nul.

3. Le point D en question est à la verticale du centre du triangle ; il appartient donc aux trois plans de symétrie qui passent par l'une des charges et le champ électrique en ce point appartient à leur direction commune ; il est donc perpendiculaire au plan de la distribution.

D est à égale distance de chacune des trois charges, les charges électriques ont toutes trois même valeur, donc les normes des champs créés en *D* par chacune des charges sont égales : elles valent $\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$. La norme *E* de leur champ électrique résultant est égale à trois fois la norme de la projection du champ électrique créé par l'une des charges sur la perpendiculaire au plan de la distribution passant par *D*. Ainsi, $E = \sqrt{6} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e}{a^2}$, soit environ 3, 5 GV.m⁻¹.

Exercice 2

1. La distribution de charge électrique est invariante par translation le long de l'axe des cylindres. Si nous le notons Oz, le champ électrique est donc indépendant de la coordonnée zle long de cet axe. Le plan P contenant les axes de chacun des cylindres est plan de symétrie de la distribution de charge électrique; tout plan perpendiculaire aux axes des cylindres est plan de symétrie de la distribution de charge donc plan de symétrie du champ électrique; le plan \overline{P} médiateur des axes des cylindres, parallèle à leur axe, est plan d'antisymétrie de la distribution des charges et donc du champ électrique.



2. Le repère de coordonnées le plus approprié est celui de coordonnées cartésienne avec l'un des axes (Ox par exemple) perpendiculaire aux axes des cylindres et les coupant ; l'autre (Oy par exemple contenu dans le plan d'antisymétrie de la distribution et dans un plan perpendiculaire à Oz qui est l'axe des cylindres. Le champ électrostatique en un point M de coordonnées (x, y, z) est de la forme :

$$\vec{\mathbf{E}}(x, y, z) = E_x(x, y) \vec{\mathbf{e}}_x + E_y(x, y) \vec{\mathbf{e}}_y$$

avec E_x fonction paire en x et en y et E_y fonction impaire en x et impaire en y.

13. Propriétés du champ électrostatique

Exercice 1

1. Le champ électrostatique est égal à l'opposé du gradient du potentiel électrostatique. Ainsi,

au point \overrightarrow{r} de coordonnées sphériques (r, θ, φ) , le champ vaut :

$$\vec{\mathbf{E}}(r,\theta,\varphi) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \vec{\mathbf{e}}_r$$

2. La symétrie sphérique du champ électrostatique fait que son flux à travers la sphère de rayon r centrée sur l'origine du repère est égal au produit de sa projection sur \vec{e}_r par l'aire de la surface en question. D'où : $\Phi(r) = \frac{e}{\varepsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$.

3. La limite du flux du champ électrostatique vaut e/ε_0 , ce qui traduit l'existence d'une charge ponctuelle élémentaire positive à l'origine du repère de coordonnées.

4. Première manière de faire : calculer la divergence du champ électrostatique et la multiplier par ε_0 ; seconde manière calculer la différence entre les flux à travers les sphères centrées sur O et de rayon respectifs r et r + dr et écrire que cette différence est égale à la charge contenue dans la couche sphérique de rayon r et d'épaisseur dr divisée par ε_0 .

Selon la seconde méthode,
$$\Phi(r + dr) - \Phi(r) = \frac{4\pi r^2 dr \rho(r)}{\varepsilon_0} d'où : \rho(r) = \frac{\varepsilon_0}{4\pi r^2} \frac{d\Phi}{dr}(r).$$

Dans les deux cas, nous trouvons : $\rho(r) = -\frac{e}{4\pi r a^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$. ρ est partout négative, attestant d'une charge négative répartie de manière isotrope autour de l'origine.

La somme de la densité volumique de charge sur tout l'espace vaut -e. Ainsi, la distribution de charge qui donne le potentiel d Yukawa est constituée d'une charge ponctuelle élémentaire positive située à l'origine entourée d'une charge répartie de manière isotrope et qui lui est opposée.

Il s'agit d'un modèle quantique de l'atome d'hydrogène lié à la densité de probabilité de l'électron dans l'état stationnaire fondamental de l'atome.

Exercice 2

1. La symétrie sphérique de la distribution de masse volumique fait que le champ de gravitation est radial en tout point de l'espace (Tout plan contenant le centre O de la distribution et un point $M \neq O$ est plan de symétrie de la distribution : le champ de gravitation, qui possède des symétries analogues à celles du champ électrostatique appartient donc à l'intersection de tous ces plans et est donc dirigé par le vecteur \vec{e}_r d'un repère de coordonnées sphériques.

Par ailleurs, l'invariance par rapport à toute rotation d'axe passant par O rend sa composante sur \overrightarrow{e}_r indépendante de θ et φ ; d'où $\overrightarrow{\mathbf{G}}(M) = G_r(r) \overrightarrow{e}_r$.

Appliquons le théorème de Gauss à la distribution, avec une surface de Gauss Σ sphérique, centrée sur O de rayon r, le flux du champ de gravitation à travers Σ est égal à $4\pi r^2 G_r(r)$ et vaut – $4\pi G M_{int}(r)$ où G est la constante de gravitation universelle et $M_{int}(r)$ la masse contenue à l'intérieur de la sphère de rayon r.

Ainsi, si
$$r < R$$
, $M_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3 \mu$ et $G_r(r) = -\frac{4\pi \mathcal{G}\mu}{3}r$; si $r \ge R$, $M_{int} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu = M$ et $G_r(r) = -\frac{\mathcal{G}M}{r^2}$ où M est la masse de la sphère de rayon R .

2. La cavité est équivalente à la superposition à la distribution précédente d'une distribution fictive de masse volumique $-\mu$, opposée à la précédente, et de centre O'. Le champ de gravitation à l'intérieur de la cavité est la somme du champ de gravitation à l'intérieur de la sphère, calculé à la question 1 auquel on ajoute le champ de gravitation de la distribution fictive puisque le théorème de superposition s'applique aussi au champ de gravitation.

À l'intérieur de la cavité, le champ de gravitation de la distribution fictive est
$\vec{\mathbf{G}}'(r') = \frac{4\pi \mathcal{G}\mu}{2} r' \vec{\mathbf{e}}_{r'}$ où $\vec{\mathbf{e}}_{r'}$ est le vecteur radial à partir du centre O' et r' la distance d'un point de cette cavité à O'. Comme $\overrightarrow{re}_r = \overrightarrow{OM}$ et $r' \overrightarrow{e}_{r'} = \overrightarrow{O'M}$, le champ de gravitation total en un point M quelconque de la cavité est : $\overrightarrow{\mathbf{G}}_t(M) = \frac{4\pi \mathcal{G}\mu}{3} \overrightarrow{O'O}$. Il est constant, indépendant du point M, pourvu que la cavité sous intégralement creusée dans la sphère.

14. Dipôles électriques

Exercice 1

1. Le choix du système de coordonnées indique que l'on travaille dans un plan polaire. Soit A et B les points où sont les charges q et -q. Soit M un point quelconque de coordonnées (x, y), le champ électrostatique exact au point M est $\vec{\mathbf{E}}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\vec{AM}}{||\vec{AM}||^3} - \frac{\vec{BM}}{||\vec{RM}||^3} \right)$.

Ainsi, au point P de coordonnées (10l, 0), le champ électrostatique vaut :

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{20}{(9,5\times10,5)^2 \, l^2} \overrightarrow{\mathbf{e}}_x.$$

En *Q* de coordonnées (0, 10*l*), il vaut : $\vec{\mathbf{E}}(Q) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{l}{(\sqrt{100.25}l)^3} \vec{\mathbf{e}}_x$,

Enfin, en *R* de coordonnées $\left(\frac{10l}{\sqrt{2}}, \frac{10l}{\sqrt{2}}\right)$, il vaut :

$$\vec{\mathbf{E}}(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{(100,25-5\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}l^2} \left| \begin{array}{c} \frac{10}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \\ \frac{10}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{(100,25+5\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}l^2} \\ \frac{10}{\sqrt{2}} & \frac{10}{\sqrt{2}} \end{array} \right| \\ \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2} \left| \begin{array}{c} 4,96 \times 10^{-3} \\ 1,50 \times 10^{-3} \end{array} \right|$$

2. Dans le cadre de l'approximation dipolaire, le champ électrostatique est donné par l'expression :

$$\vec{\mathbf{E}}(M) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$$

où \overrightarrow{p} est le moment dipolaire égal à $q \, l \, \overrightarrow{e}_x$.

Ainsi, le champ dipolaire en *P* vaut : $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2}{10^3 l^2} \overrightarrow{e}_x$. Les directions des deux champs sont identiques et l'écart relatif sur la norme vaut environ 0, 5 %.

En Q, le champ dipolaire vaut $-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{10^3l^2}\vec{e}_x$. Les directions des deux champs sont aussi les mêmes et l'écart relatif sur les normes est inférieur à 0, 4 %.

En R, le champ dipolaire a pour composantes en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{10^3 l^2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

que l'on compare avec l'expression approchée. Les composantes des deux vecteurs sont très voisines l'une de l'autre, donc leurs direction le sont. L'écart relatif en norme est de l'ordre de 0,8 %.

Sur ces trois positions, nous voyons que l'approximation est extrêmement proche du champ réel, alors que les distance auxquelles nous nous sommes placées n'étaient toute que de dix fois celle séparant les charges électriques qui constituent le dipôle.

15. Distributions de charge et champ électrostatique

Exercice 1

1. D'après la définition du courant électrique à travers une surface donnée comme flux de la densité volumique de courant électrique à travers cette surface, $I = \pi a^2 j$ et $I = \pi (c^2 - b^2) j'$,

d'où $j' = j \frac{a^2}{c^2 - b^2}$.

2. Soit M un point quelconque de l'espace ; le plan contenant l'axe commun aux conducteurs et passant par M est plan de symétrie de la distribution des courants électriques. Le plan perpendiculaire à l'axe et passant par M est plan d'antisymétrie de la distribution des courants.

Cette dernière est invariante par translation de n'importe quel vecteur colinéaire à l'axe et par toute rotation d'angle quelconque autour de l'axe. Le champ magnétostatique est donc porté par le vecteur \vec{e}_{θ} au point M et sa composante ne dépend que de la distance à l'axe : $\vec{B}(M) = B_{\theta}(r)\vec{e}_{\theta}$ où (r, θ, z) sont les coordonnées cylindriques de M, Oz étant l'axe des conducteurs.

3. Appliquons le théorème d'Ampère pour calculer le champ magnétostatique avec comme contour d'Ampère un cercle de rayon r passant par M, dont le plan est perpendiculaire à Oz et le centre sur l'axe Oz.

La circulation du champ magnétique est alors égale à $2\pi r B_{\theta}(r) = \mu_0 I_{enl}$ où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et I_{enl} le courant traversant la surface délimitée par le cercle.

Si
$$r < a$$
, $I_{enl} = \pi r^2 j$ et $B_{\theta}(r) = \frac{\mu_0 J r}{2}$.
Si $a \le r < b$, $I_{enl} = I$ et $B_{\theta}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.
Si $b \le r < c$, $I_{enl} = I - \pi (r^2 - b^2) j' = I \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}\right)$ et $B_{\theta}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$.
Si $c \le r$ $I_{enl} = 0$ et $B_{\theta}(r) = 0$.

Exercice 2

1. Appelons \vec{e}_y l'autre vecteur directeur de la couche épaisse. La distribution des courants électriques est invariante par translation de n'importe quel vecteur combinaison linéaire de \vec{e}_x et \vec{e}_y : le champ magnétostatique est donc indépendant des coordonnées x et y. Tout plan de direction vectorielle (\vec{e}_x, \vec{e}_z) est plan de symétrie de la distribution : le champ magnétostatique lui est perpendiculaire.

Ainsi, $\vec{\mathbf{B}}(M) = B_y(z)\vec{\mathbf{e}}_y$. Tout plan de direction vectorielle $(\vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z)$ est plan d'antisymétrie de la distribution des courants électriques. Le plan de direction $(\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y)$ est plan de symétrie de la distribution de courant : le champ magnétostatique doit lui être perpendiculaire. Or, il doit par ailleurs être colinéaire à $\vec{\mathbf{e}}_y$ donc, il ne peut qu'être nul en tout point de ce plan. Comme ce plan est un plan d'antisymétrie du champ magnétostatique, B_y est une fonction impaire de z.

2. Soit *M* un point quelconque de coordonnées (x, y, z);



Appliquons le théorème d'Ampère en prenant comme contour un rectangle perpendiculaire à \overrightarrow{e}_x , dont les côtés sont parallèles respectivement à Oy et Oz et symétrique par rapport à Oy; soit *l* la longueur des côtés parallèles à Oy, l'un d'eux étant confondu sur l'axe Oy, et *z* celle des côtés parallèles à Oz. Orientons-le de sorte que \overrightarrow{e}_x soit sa normale.

L'imparité de B_y fait que sa circulation le long du contour choisi vaut $-lB_y(z) = \mu_0 I_{enl}$.

Si
$$0 \le z < \frac{e}{2}$$
, $I_{enl} = lzj$ et $B_y(M) = -\mu_0 zj$.
Si $\frac{e}{2} \le z$, $I_{enl} = l\frac{e}{2}j$ et $B_y(M) = -\mu_0 \frac{e}{2}j$.

16. Propriétés du champ électrostatique

Exercice 1

1. Le référentiel d'étude étant supposé galiléen, nous pouvons appliquer au cadre le théorème du moment cinétique : la dérivée par rapport au temps du moment cinétique du cadre par rapport à l'axe de rotation est égale à la somme des moments des forces par rapport à cet axe. Le cadre est soumis

➤ à son poids dont le moment résultant par rapport à l'axe de rotation est nul ;

> au couple de rappel des frottements fluides, dont le moment par rapport à l'axe est $-\alpha \dot{\theta}(t)$; > au couple de rappel du fil de suspension, dont le moment par rapport à l'axe vaut $-C\theta$; > au couple des forces électromagnétiques dont le moment par rapport à l'axe vaut $-NabIB \sin \theta$.

Il en découle l'équation :

$$J\ddot{\theta} = -\alpha\,\dot{\theta} - C\,\theta - NabIB\sin\theta$$

2. À la limite des petites oscillations, $\sin \theta \approx \theta$ et l'équation devient :

$$J\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + (C + NabIB)\theta = 0$$

Le mouvement des petites oscillations est critique lorsque le discriminant de l'équation caractéristique est nul, soit la condition : $\alpha^2 - 4J(C + NabIB) = 0$.

Exercice 2

Supposons que la boucle de courant de moment magnétique dipolaire \vec{m} soit à la gauche du fil, le courant la parcourant dans le sens trigonométrique. Le fil est parcouru par un courant *I* compté algébriquement dans le sens Oz.

Deux façons de calculer le champ se présentent.

• La plus simple consiste à dire que la force exercée par le moment dipolaire magnétique sur le fil est l'opposée de la force exercée par le fil sur le moment dipolaire.

Or, à la distance *r* du fil rectiligne infini, le champ magnétique créé par le fil vaut, dans le repère de coordonnées cylindriques, $\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \overrightarrow{e}_{\theta}$.

L'énergie du moment magnétique $\vec{m} = m \vec{e}_{\theta}$, dans le champ magnétique du fil vaut $-\vec{m} \cdot \vec{B} = -\frac{\mu_0 Im}{2\pi r}$.

La force que le fil exerce sur le dipôle magnétique est égale à l'opposé du gradient de l'énergie magnétique soit $-\frac{\mu_0 Im}{2\pi r^2} \overrightarrow{\mathbf{e}}_r$ et la force que le moment exerce sur le fil vaut : $\overrightarrow{\mathbf{f}}_L = \frac{\mu_0 Im}{2\pi r^2} \overrightarrow{\mathbf{e}}_r$. Comme, vis-à-vis du fil $\overrightarrow{\mathbf{e}}_r$ est alors égal à $-\overrightarrow{\mathbf{e}}_x$, la force qui en résulte vaut $\overrightarrow{\mathbf{f}}_L = -\frac{\mu_0 Im}{2\pi r^2} \overrightarrow{\mathbf{e}}_x$, où $\overrightarrow{\mathbf{e}}_x$ est dirigé de la boucle vers le fil.

• L'autre manière est de calculer la résultante des forces de Laplace que le moment dipolaire magnétique exerce sur le fil en utilisant l'expression dipolaire pour le champ magnétostatique du moment magnétique.

Le champ magnétostatique dipolaire de la boucle est égal à $\vec{\mathbf{B}}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$

où \vec{m} est le moment dipolaire magnétique de la boucle de courant et $\vec{r} = \vec{OM}$, \vec{O} étant par exemple au centre de la boucle de courant et M un point quelconque de l'espace. Lorsque M appartient au fil, \vec{m} et \vec{r} sont orthogonaux - le fil est dans le plan de la boucle et \vec{m} est perpendiculaire au plan de la boucle de courant.

Le champ magnétosatique en un point *M* du fil devient : $\vec{\mathbf{B}}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-\vec{m}}{r^3}$.

La force élémentaire de Laplace qui s'exerce sur un élément $d\vec{r}$ du fil orienté dans le sens du courant qui le parcours vaut : $d\vec{f}_L = I d\vec{r} \wedge \vec{B}(\vec{r})$.

Or, $\vec{r} = D \vec{e}_x + z \vec{e}_z$, d'où d $\vec{r} = dz \vec{e}_z$ et $\vec{m} = -m \vec{e}_y$, d'où d $\vec{f}_L = -\frac{\mu_0 I m}{4\pi} \frac{dz}{(D^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_x$.

La résultante des forces de Laplace qui s'exercent sur le fil vaut ainsi :

$$\vec{\mathbf{f}}_{L} = -\frac{\mu_{0} I m}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(D^{2} + z^{2})^{\frac{3}{2}}} \vec{\mathbf{e}}_{x}.$$

En posant $\frac{z}{D} = \tan \theta, z^{2} + D^{2} = \frac{D^{2}}{\cos^{2} \theta}$ et $dz = D \frac{d\theta}{\cos^{2} \theta}$. l'intégrale devient :
 $\vec{\mathbf{f}}_{L} = \frac{\mu_{0} I m}{4\pi D^{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta \, \vec{\mathbf{e}}_{x}.$ D'où $\vec{\mathbf{f}}_{L} = -\frac{\mu_{0} I m}{2\pi D^{2}} \vec{\mathbf{e}}_{x}.$

Cette expression est bien la même que la première obtenue.

17. Les équations de Maxwell

Exercice 1

Le passage d'un référentiel à l'autre doit présenter pour les équations différentielles les propriétés suivantes : le champ électromagnétique ne doit être fonction que des caractéristiques des particules : charges, positions et vitesses dans chacun des référentiels.

Lorsque l'on cherche à écrire l'opérateur d'Alembertien dans le référentiel \mathcal{R}' , en utilisant la transformation de Galilée, les dérivées secondes par rapport à y, à z et à t possèdent la même expression par rapport à y', z'. La dérivée seconde par rapport à x devient :

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial t'}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + \left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t'^2}, \quad \text{soit} \quad a_{11}^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2a_{11}a_{21}\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t'} + a_{21}^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2}.$$

La dérivée seconde par rapport à t devient

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial t'}{\partial t}\right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t'^2}, \text{ soit } a_{12}^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2a_{12}a_{22}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + a_{22}^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

En laissant de côté dans le d'Alembertien les dérivées par rapport à y' et à z', il vient que :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(a_{11}^2 - \frac{a_{12}^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2\left(a_{11}a_{21} - \frac{a_{12}a_{22}}{c^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + \left(a_{21}^2 - \frac{a_{22}^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

D'où par identification :

$$a_{11}^2 - \frac{a_{12}^2}{c^2} = 1$$
; $a_{11}a_{21} - \frac{a_{12}a_{22}}{c^2} = 0$; $a_{21}^2 - \frac{a_{22}^2}{c^2} = -\frac{1}{c^2}$

On impose par ailleurs $a_{11} > 0$ car les axes Ox et O'x' sont orientés dans le même sens ; $a_{22} > 0$ car le temps s'écoule aussi dans le même sens dans les deux référentiels ; $va_{11} = -a_{12}$ car l'origine du référentiel $\mathcal{R}'(x' = 0)$ se déplace à la vitesse v par rapport au référentiel \mathcal{R} . Il en résulte que $a_{21} = -\frac{va_{22}}{c^2}$.

Ainsi, la première des trois relations et la condition sur a_{11} et a_{12} conduisent à :

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad a_{12} = -\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad a_{21} = -\frac{v}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad a_{22} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ainsi, en posant $\gamma = \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ et $\beta = \frac{v}{c}$, Nous obtenons la transformation de Lorentz :

[x']	(γ	0	0	$-\gamma\beta$)	[x	1.00
y'		0	1	0	0	у	
z'	=	0	0	1	0	. z	
cť		$-\gamma\beta$	0	0	γJ	ct	

Lorsque la vitesse du référentiel \mathcal{R}' est très petite devant la célérité de la lumière dans le vide, $\gamma \approx 1$ au premier ordre en $\frac{V}{c}$ et la transformation de Lorentz redonne la transformation de Galilée.

19. Le champ électromagnétique dans le vide sans charges ni courants électriques

Exercice 1

1. La direction de propagation de l'onde se lit dans la dépendance spatiale de la phase instantanée. Elle se propage ici dans la direction \overrightarrow{e}_z .

2. Le champ magnétique doit satisfaire à l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2} = 0$$

qui mène à la relation de dispersion, en y insérant l'expression du champ magnétique fournie,

par : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$.

3. Utilisons l'équation de Maxwell-Ampère dans le vide sans charge ni courant pour trouver le champ électrique associé à ce champ magnétique.

En notation complexe, elle se traduit par $-\vec{e}_z \wedge \vec{\underline{B}} = \frac{1}{2}\vec{\underline{E}}$.

D'où $\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t) = \vec{\mathbf{E}}_0 \exp j(\omega t - kz)$ avec $\vec{\mathbf{E}}_0 = jcB_{0y}\vec{\mathbf{e}}_x - cB_{0x}\vec{\mathbf{e}}_y$.

4. Les composantes suivant Ox et Oy du champ électrique ne sont pas en phase puisque $E_x(\vec{r},t)$ est de la forme $-cB_{0y}\sin(\omega t - kz)$ et $E_y(\vec{r},t)$ est de la forme $-cB_{0x}\cos(\omega t - kz)$. Il est aisé de constater que $\left(\frac{E_x}{cB_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{cB_{0x}}\right)^2 = 1$: l'extrémité du vecteur champ électrique

de l'onde décrit une ellipse - éventuellement un cercle si $B_{0x} = B_{0y}$ -, donc la polarisation est elliptique ou circulaire. Si B_{0x} et B_{0y} sont positifs, alors l'ellipse ou le cercle sont parcourus dans le sens trigonométrique et la polarisation est gauche dans les deux cas.

Exercice 2

Supposons que toute la puissance du laser soit transportée par le faisceau. Sa puissance surfacique, ou norme du vecteur de Poynting moyen, R, est de l'ordre de sa puissance $\mathcal{P} = 2 \text{ mW}$ ramenée à l'aire de la section droite du faisceau $S = \pi \times 0, 5^2 \text{ mm}^2$, soit de l'ordre de $2, 5 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2}$.

Or, en supposant une polarisation rectiligne et une onde monochromatique, $R = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$.

D'où $E_0 = \sqrt{2\mu_0 cR}$, soit environ 1,4 kV.m⁻¹, ce qui est considérable pour un champ électrique sinusoïdal de fréquence optique.

Exercice 3

1. À la distance d de l'émetteur diffuse à travers un cylindre de hauteur h et de rayon d. Le vecteur de Poynting moyen R à travers la surface $2\pi dh$ dans laquelle l'onde est rayonnée est tel que son flux à travers la surface en question soit égal à la puissance totale rayonnée.

Ainsi, $\mathcal{P} = 2\pi dhR$, d'où $R = \frac{\mathcal{P}}{2\pi d^2 \tan \theta}$. Si nous supposons l'onde polarisée rectilignement, $R = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}, \text{ d'où :}$

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 c \mathcal{P}}{\pi d^2 \tan \theta}}$$

à $d = 5 \text{ km}, E_0 \approx 0, 2 \text{ V.m}^{-1}$ et trois fois plus loin, à d = 15 km, le champ rayonné est divisé par trois à $68 \text{ mV}.\text{m}^{-1}$.

2. Il se produit une interférence entre les deux ondes émises qui se traduira par une alternance de zones de forte réception où les amplitudes instantanées des champs s'ajoutent avec des zones de réception nulle ou très faible quand les amplitudes instantanées sont en opposition de phase ou presque.

3. On distribue les fréquences de sorte qu'une même station radiophonique relayée par deux émetteurs immédiatement voisins le soit sur deux fréquences différentes. les puissances émises et la sélectivité du filtre interdisent alors toutes interférences.

20. Propagation du champ électromagnétique dans un plasma

Exercice 1

Soit le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de coordonnées cartésiennes tel que le plasma occupe le demiespace x > 0. Les champs électromagnétiques réfléchi et transmis sont recherchés sous la forme d'ondes planes progressives monochromatiques transversales.

Soit, en notations complexes, le champ électromagnétique de l'onde incidente dans le vide, se propageant dans le demi-espace des x < 0 vers l'interface du vide avec le plasma en x = 0:

$$\vec{\underline{\mathbf{E}}}_{i}(\vec{r},t) = E_{i0} \exp j(\omega t - kx) \vec{e}_{y} \operatorname{et} \vec{\underline{\mathbf{B}}}_{i}(\vec{r},t) = \frac{E_{i0}}{c} \exp j(\omega t - kx) \vec{e}_{z};$$

soit le champ électromagnétique de l'onde réfléchie dans le vide

$$\vec{\underline{\mathbf{E}}}_{r}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{E}}}_{r0} \exp j(\omega't - \vec{k}_{r} \cdot \vec{r}) \operatorname{et} \vec{\underline{\mathbf{B}}}_{r}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{B}}}_{r0} \exp j(\omega't - \vec{k}_{r} \cdot \vec{r});$$

soit le champ électromagnétique de l'onde électromagnétique transmise dans le plasma :

$$\vec{\underline{\mathbf{E}}}_{t}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{E}}}_{t0} \exp j(\omega^{"}t - \vec{k}_{t} \cdot \vec{r}) \text{ et } \vec{\underline{\mathbf{B}}}_{r}(\vec{r},t) = \vec{\underline{\mathbf{B}}}_{r0} \exp j(\omega^{"}t - \vec{k}_{t} \cdot \vec{r}).$$

Le champ électromagnétique étant supposé continu sur le dioptre de séparation des milieux, ceci implique que $\omega = \omega' = \omega''$.

Les relations de dispersion dans chacun des deux milieux conduisent à

$$\|\vec{k}_r\| = \frac{\omega}{c} \text{ et } \vec{k}_t^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$
 où ω_p est la pulsation de plasma

Le caractère transversal des ondes incidentes réfléchies et transmises se manifeste par : $\vec{k}_r \cdot \vec{E}_{r0} = 0$ et $\vec{k}_t \cdot \vec{E}_{t0} = 0$ et les mêmes relations avec les champs magnétiques des ondes.

Enfin, les rapports de la norme du champ électrique au champ magnétique correspondant valent *c* pour l'onde réfléchie et $\frac{\omega}{\|\vec{k}_t\|} \neq c$ pour l'onde transmise dans le plasma.

La continuité des champs électrique et magnétique en tout point du dioptre x = 0 ne peut être satisfaite que si les vecteurs d'onde des ondes réfléchies et transmises sont colinéaires à \vec{e}_x la direction d'incidence (aisé à montrer à partir de la continuité de la composante sur \vec{e}_y du champ électrique ou celle sur \vec{e}_z du champ magnétique).

Ainsi, $\vec{k}_r = -k\vec{e}_x$ et $\vec{k}_t = k_t\vec{e}_x$, k_t pouvant être réel positif ou imaginaire pur de partie imaginaire négative. Enfin, la continuité du champ électrique sur \vec{e}_z et celle du champ magnétique sur \vec{e}_y annulent ces composantes.

Donc, les champs réfléchi et transmis sont de la forme :

$$\vec{\underline{E}}_{r}(\vec{r},t) = \underline{\underline{E}}_{r0} \exp j(\omega t + kx) \vec{e}_{y} \text{ et } \vec{\underline{B}}_{r}(\vec{r},t) = -\frac{\underline{\underline{E}}_{r0}}{c} \exp j(\omega t + kx) \vec{e}_{z} \text{ pour le champ réfléchi}$$

et $\vec{\underline{E}}_{t}(\vec{r},t) = \underline{\underline{E}}_{t0} \exp j(\omega t - k_{t}x) \vec{e}_{y} \text{ et } \vec{\underline{B}}_{t}(\vec{r},t) = \frac{k_{t}\underline{\underline{E}}_{t0}}{\omega} \exp j(\omega t - k_{t}x) \vec{e}_{z}$ pour le champ transmis. D'où :
$$\vec{\underline{E}}_{t} = \frac{2k_{t}}{c} \exp \frac{k_{t}}{c} = \frac{k_{t}}{c} \exp \frac{k_{t}}{c} + \frac{k_{t}}{c} \exp \frac{k_{t}}{c} + \frac{k_{t}}{c} \exp \frac{k_{t}}{c} \exp \frac{k_{t}}{c} + \frac{k_{t}}{c} \exp \frac{k_{t}}{c$$

$$\underline{\mathbf{E}}_{t0} = E_{i0} \frac{2k}{k+k_t} \text{ et } \underline{E}_{r0} = E_{i0} \frac{k-k_t}{k+k_t}.$$

Ces relations déterminent complètement les champs électromagnétiques d'après ce qui précède.

Exercice 2

1. Si nous supposons que les électrons ne sont toujours pas relativistes, la partie magnétique de la force de Lorentz peut être ignorée devant la partie électrique. Le mouvement d'un représentant de l'espèce dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen est :

$$m_e \frac{d\vec{\mathbf{v}}_e}{dt} = -e \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t) - \frac{m_e}{\tau} \vec{\mathbf{v}}_e$$

En régime sinusoïdal pour le champ électromagnétique, nous pouvons supposer que la relation entre la vitesse et le champ électrique étant linéaire, la vitesse sera elle aussi sinusoïdale de même fréquence. Avec les notations complexes, cela donne :

$$j\,\omega\,m_e\,\overrightarrow{\mathbf{v}}_e=-\,e\,\overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{r},t)-\frac{m_e}{\tau}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}_e$$

2. La conductivité du plasma est le rapport de la densité volumique de courant électrique \vec{j} au champ électrique de l'onde. Or, $\vec{j}(\vec{r}, t) = -e n_e \vec{v}_e$, d'où la conductivité γ :

$$\gamma = \frac{n_e e^2 \tau}{m e} \frac{1}{1 + j \tau \omega} = \frac{\gamma_0}{1 + j \tau \omega} \ .$$

3. La nouvelle relation de dispersion est obtenue en combinant les équations de Maxwell-Ampère et de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{\mathbf{E}}} = \omega \vec{\mathbf{B}} \quad ; \quad -j \vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{\mathbf{B}}} = \mu_0 \left(\frac{\gamma_0}{1 + j\tau\omega} + j\varepsilon_0 \, \omega \right) \vec{\underline{\mathbf{E}}}$$

soit pour une onde transversale :

$$\vec{\underline{k}}^{2} = ,\mu_{0} \left(\frac{-j\gamma_{0}\omega}{1+j\tau\omega} + \varepsilon_{0}\omega^{2} \right) = \frac{\omega^{2}}{c^{2}} \left(1 + \frac{\tau\omega_{p}}{j\frac{\omega}{\omega_{p}}(1+j\tau\omega)} \right)$$

où ω_p est la pulsation de plasma.

Le carré du vecteur d'onde est *a priori* complexe, donc le vecteur d'onde l'est : il possède une partie réelle qui traduit une propagation et une partie imaginaire qui manifeste une atténuation de l'onde au fil de la propagation.

21. Champ électromagnétique en présence d'un milieu conducteur ohmique

Exercice 1

1. Les notations pour les ondes réfléchie et transmise sont similaires à celles précédentes. Les conclusions sont voisines : le champ électromagnétique de l'onde réfléchie doit être de la forme : $\vec{\mathbf{E}}_r(\vec{r}, t) = \underline{E}_{r0} \exp j(\omega t + kz) \vec{\mathbf{e}}_x$ et $\vec{\mathbf{B}}_r(\vec{r}, t) = -\frac{\underline{E}_{r0}}{c} \exp j(\omega t + kz) \vec{\mathbf{e}}_y$ avec $k = \frac{\omega}{c}$.

Celui de l'onde transmise dans le milieu conducteur est :
$$\vec{\underline{E}}_t(\vec{r}, t) = \underline{E}_{t0} \exp j(\omega t - \underline{k}' z) \vec{e}_x$$

$$\operatorname{et} \vec{\underline{B}}_{t}(\vec{r},t) = \frac{\underline{k} \ \underline{E}_{t0}}{\omega} \exp j\left(\omega t - \underline{k}'z\right) \vec{e}_{y} \operatorname{avec} \underline{k}' = \frac{1-j}{\delta} \operatorname{ou} \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_{0} \gamma \omega}}$$

La continuité du champ électromagnétique au passage de l'interface fait que $E_{i0} + \underline{E}_{r0} = \underline{E}_{t0}$ et $k(E_{i0} - \underline{E}_{r0}) = \underline{k}' E_{t0}$, d'où $\underline{E}_{r0} = E_{i0} \frac{k - \underline{k}'}{k - \underline{k}'}$ et $\underline{E}_{t0} = E_{i0} \frac{2k}{k + \underline{k}'}$. **2.** La densité volumique de force $\vec{\mathbf{f}}_{v}$ dans le conducteur est égale à $\rho \vec{\mathbf{E}}_{t} + \vec{\mathbf{j}} \wedge \vec{\mathbf{B}}_{t}$ où ρ est la densité volumique de charge et \vec{j} la densité volumique de courant dans le conducteur. Or, la densité volumique de charge est nulle et la densité volumique de courant dans le conducteur est égale à : $\vec{j}(\vec{r},t) = \gamma \vec{E}_t(\vec{r},t)$. Ainsi, en prenant les parties réelles des champs électrique et magnétiques transmis dans le conducteur, il vient :

$$\vec{\mathbf{f}}_{\nu}(\vec{r},t) = \frac{4\sqrt{2\gamma}k\delta E_{i0}^2 \mathrm{e}^{-\frac{2z}{\delta}}}{c\left((1+k\delta)^2+1\right)} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \vec{\mathbf{e}}_z$$

où φ est tel que tan $\varphi = \frac{1}{1 + k\delta}$.

3. La force totale instantanée en question est égale à $\int_{0}^{+\infty} S \vec{f}_{v}(\vec{r}, t) dz$.

Sa moyenne sur une période est égale à $\int_{0}^{+\infty} S\langle \vec{\mathbf{f}}_{v}(\vec{r},t)\rangle dz$ soit :

$$\int_0^{+\infty} S \, \frac{2\gamma k\delta E_{i0}^2}{c\left((1+k\delta)^2+1\right)} \, \mathrm{e}^{-\frac{2z}{\delta}} \overrightarrow{\mathrm{e}}_z \, \mathrm{d}_z = S \, \frac{\gamma k\delta^2 E_{i0}^2}{c\left((1+k\delta)^2+1\right)} \overrightarrow{\mathrm{e}}_z$$

4. La pression que l'onde incidente exerce sur le métal est égal au rapport de la force transmise par unité de surface droite du conducteur. Soit :

$$p = \frac{\gamma k \delta^2 E_{i0}^2}{c \left((1 + k \delta)^2 + 1 \right)}$$

Lorsque le métal tend vers le métal parfait, γ tend vers + ∞ et δ tend vers zéro comme $\gamma^{-\frac{1}{2}}$, d'où la limite $p_{lim} = \varepsilon_0 E_{i0}^2$. Elle est le double de la norme du vecteur de Poynting de l'onde incidente, ce qui correspond à la différence du transfert de quantité de mouvement dans la direction et le sens de propagation et du transfert, opposé, de quantité de mouvement de l'onde réfléchie.

22. Champ de rayonnement dipolaire

Exercice 1

Un circuit constituant une boucle de diamètre $d = 70 \,\mathrm{cm}$ est alimenté par un générateur de tension sinusoïdal de fréquence f = 5 kHz. Il y circule un courant d'intensité efficace $I_e = 10 \text{ mA}$. Estimer la puissance rayonnée à grande distance par le circuit.

Le circuit fonctionne à une fréquence telle que la longueur d'onde est grande devant la dimension du circuit. Nous sommes donc dans le cadre d'un rayonnement dipolaire magnétique. Nous reprenons l'expression du cours concernant sa puissance rayonnée :

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0 \omega^4 m_0^2}{12 \,\pi \, c^3}$$

où m_0 est le moment magnétique du circuit, égal à $I_e \sqrt{2} \frac{\pi d^2}{4}$. $\mathcal{P} \approx 3, 6 \times 10^{-20}$ W.

La valeur très faible atteste que la puissance rayonnée peut être négligée devant les autres puissances, telle celle dissipée par effet Joule, ce qui est caractéristique du régime de A.R.Q.S.

Exercice 2

1. La puissance surfacique rayonnée par une antenne isotrope à la distance d est $\mathcal{P}_0/(4\pi d^2)$.

L'angle d'ouverture du cône de diffraction de la parabole est $\alpha \approx 1,22 \frac{\lambda}{R}$ et la surface à travers laquelle la puissance \mathcal{P}_0 est rayonnée à la même distance *d* est environ $\alpha^2 D^2$. La puissance surfacique qui en résulte est ainsi : $\mathcal{P}_0/(\alpha d)^2$.

Le gain G est le rapport de ces deux puissances, soit $\frac{4\pi}{\alpha^2} = \frac{4\pi R^2}{1,22^2\lambda^2}$, soit $\frac{4S}{1,22^2\lambda^2}$.

A.N. : $G \approx 1, 6 \times 10^3$.

2. L'objet à la distance *d* recueille une puissance égale au produit de sa surface par la puissance surfacique rayonnée à la distance *d*, soit $S' \frac{\mathcal{P}_0}{(\alpha d)^2}$.

Il rayonne, de manière isotrope, sa puissance avec une puissance surfacique qui, à la distance d, donc au niveau de l'antenne réceptrice est égale à $\frac{S'}{4 \pi d^2} \frac{\mathcal{P}_0}{(\alpha d)^2}$.

La puissance recueillie par l'antenne réceptrice est alors le produit de la surface de l'antenne réceptrice et de la puissance surfacique rayonnée à la distance *d* par l'objet, soit :

$$\mathcal{P}_{r} = S \frac{S'}{4\pi d^{2}} \frac{\mathcal{P}_{0}}{(\alpha d)^{2}} . \text{ Or } G = \frac{4S}{1,22^{2}\lambda^{2}} = \frac{4\pi R^{2}}{1,22^{2}\lambda^{2}} , \text{ d'où}$$
$$\mathcal{P}_{r} = \mathcal{P}_{0} \frac{1,22^{2}}{4} \frac{G^{2}\lambda^{2}S'}{(4\pi d)^{2}}.$$

3. La portée du radar est la distance *d* pour laquelle la puissance reçue est égale à la puissance limite de détection : $\mathcal{P}_r = \mathcal{P}_l$. Il en résulte une portée *d* égale à :

$$d = \left(\frac{1, 22 \, G \, \lambda}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}_l} \, S'\right)^{\frac{1}{4}}$$

La portée du radar est d'environ 140 km.

23. Systèmes ouverts en régime stationnaire

Exercice 1

Voici un exemple d'utilisation du premier principe appliqué aux systèmes ouverts. La puissance mécanique utile que doit fournir la pompe pour élever l'eau en lui communiquant la vitesse qu'elle a en sortie est donné par :

$$\dot{W}_u = D_m . \Delta \left((h + \frac{v^2}{2} + gz) \right)$$

Or, le débit-masse en kg.s⁻¹ vaut $D_m = \mu \frac{D_v}{60}$, μ étant la masse volumique de l'eau.

La température de l'eau n'ayant pas changé, son énergie interne massique n'a pas varié et son enthalpie massique à varié de $v\Delta p = -\mu g h v$ en considérant que la pression de sortie est la pression atmosphérique p_0 , de même que la pression à la surface de la nappe.

La pression de l'eau au niveau de la prise d'eau vaut donc : $p_0 + \mu g h. v$ est le volume massique de l'eau. L'altitude a varié entre la prise d'eau et la sortie de H + h; la vitesse de 0 à $\frac{D_v}{s}$. Ainsi, comme $\mu v = 1$,

 $\dot{W}_u = \mu \, \frac{D_v}{60} \left(g H + \frac{D_v^2}{S^2} \right)$

Soit $\dot{W}_u \approx 148,9$ kW. On remarque que c'est la mise en vitesse de l'eau qui requiert l'essentiel de la puissance de pompage, et que l'on ne gagne rien à une prise de plus ou moins grande profondeur puisque seule importe le dénivelé entre la surface libre du réservoir de prélèvement et la surface de restitution de l'eau.

Exercice 2

Autre cas d'application du premier principe aux systèmes ouverts. Sous le régime d'hypothèses prises, la variation d'enthalpie massique est égale à $c_p\Delta T$ où c_p est la capacité thermique massique de l'eau à pression constante, égale à 4,18 kJ.kg⁻¹ et ΔT la variation de température entre l'entrée et la sortie de la chaudière. Le débit-masse s'en déduit :

$$D_m = \frac{Q}{c_p \Delta T} = \mu D_v$$

 μ étant la masse volumique de l'eau. Ainsi,

$$D_v = \frac{\dot{Q}}{\mu c_p \Delta T}$$

D'où $D_v = 7,36 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ ou 4,42 L.min⁻¹.

24. Diffusion thermique

Exercice 1

1. Établissons le bilan thermique de la tranche de matériau comprise entre x et x + dx. La variation d'énergie interne entre l'instant t et l'instant t + dt est :

$$d^{2}U = 2 a e \rho dx c (T(x, t + dt) - T(x, t)) = 2 a e \rho dx c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) dt$$

Elle est le résultat du transfert thermique conductif au sein du matériau, qui gagne l'énergie $2 a e j_Q(x, t) dt$ et perd $2 a e j_Q(x + dx, t) dt$, j_Q étant la densité de flux thermique dans la direction Ox. Ainsi, le solde vaut $-2 a e \frac{\partial j_Q}{\partial x}(x, t) dx dt$; et du transfert convectif à travers la surface entre cet élément de matière et l'atmosphère : $-h(T(x, t) - T_a) \cdot 2(2a + e) dx dt$. Ainsi, après simplifications par dx et dt,

$$2 a e \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = -2 a e \frac{\partial j_Q}{\partial x}(x,t) - 2 (2a+e) h (T(x,t) - T_a)$$

Dans le cas où le transfert convectif satisfait la loi de Fourier : $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ et l'équation différentielle satisfaite par le champ des températures du corps est :

$$2 a e \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = 2 a e \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) - 2 (2a+e) h (T(x,t) - T_a)$$

2. En régime permanent, la température n'est fonction que de la position. Les conditions aux limites sont alors : $T(0) = T_0$ et la densité de flux thermique en *L* qui de conductive devient convective : $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(L) = h(T(L) - T_a)$.

3. En régime permanent, l'équation satisfaite par le champ de température est :

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{h}{\lambda} \left(\frac{2}{e} + \frac{1}{a}\right) (T - T_a)$$

Posons $m^2 = \frac{h}{\lambda} \left(\frac{2}{e} + \frac{1}{a}\right)$. $T(x) - T_a = A e^{mx} + B e^{-mx}$. En $x = 0, A + B = T_0 - T_a$ et en $x = L, -\lambda m (A e^{mL} - B e^{-mL}) = h (A e^{mL} + B e^{-mL})$. Ainsi : $T(x) = T_a + (T_0 - T_a) \frac{(h - m\lambda) e^{m(x-L)} - (h + m\lambda) e^{m(L-x)}}{(h - m\lambda) e^{-mL} - (h + m\lambda) e^{mL}}$

Si $mL \gg 1$, alors $T(L) \approx T_a$: un transfert convectif avec l'atmosphère efficace et une longueur suffisamment grande de l'ailette permette de dissiper suffisamment de puissance thermique pour que la température de l'extrémité de l'ailette se confonde avec celle de l'air ambiant.

Exercice 2

 $D \approx 9,6 \times 10^{-6} \,\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}.$

1. Aidez-vous du raisonnement du résumé de cours : l'équation obtenue est l'équation de la chaleur en *z*.

$$D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$
 où $D = \frac{\lambda}{\mu c_s}$

2. L'équation satisfaite par \underline{f} est : $D \frac{d^2 \underline{f}}{dx^2} = j\omega \underline{f}$. Posons $\underline{k}^2 = \frac{j\omega}{D}$; $\underline{f}(z) = A e^{\underline{k}z} + B e^{-\underline{k}z}$. Or, $\underline{k} = \pm \frac{1+j}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$.

La solution pour la température est celle qui ne peut diverger lorsque z tend vers + ∞ . Ainsi, $\underline{T}(z,t) = T_m + A e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}} e^{j\omega t}$. La détermination de A s'effectue à l'aide de la donnée de la densité de flux surfacique en $z = 0 : J_0 = -\lambda \underline{k} A$.

D'où, en ne conservant que la partie réelle de la température complexe :

$$T(z,t) = T_m + \frac{J_0\delta}{\sqrt{2}\lambda} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)$$

3. Les profondeurs de pénétration sont de l'ordre de δ et correspondent aux profondeurs auxquelles les variations de température sont inférieures d'un facteur e aux variations de température de surface. Pour les variations diurnes, $\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600}$ et $5\delta \approx 0, 5$ m environ; pour les variation annuelles, $\omega = \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 3600}$ et $\delta \approx 10$ m.

25. Fonctions d'onde et probabilités de présence

Exercice 1

1. Prenons un potentiel nul au fond du puits. L'équation aux valeurs propres tirée de l'équation de Schrödinger à une dimension est, pour $x \in [0; L]$,

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = E\,\varphi$$

où φ est la partie spatiale de la fonction d'onde de l'état stationnaire d'énergie E. Les fonctions d'onde des états stationnaires doivent s'annuler sur les bords du domaine. Soit k réel tel que $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, alors les parties spatiales normalisées qui satisfont aux conditions aux

limites sont, indicées par l'entier naturel
$$n \neq 0$$
: $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x)$ où $k_n = \frac{n\pi}{L}$, d'énergie

Physique corrigés

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8m_e L^2}.$$

Les énergies les plus basses sont donc : $E_1 = \frac{h^2}{8m_eL^2}$, $E_2 = \frac{h^2}{2m_eL^2}$ et $E_3 = \frac{9h^2}{8m_eL^2}$. A.N. : $E_1 = 16, 8 \text{ eV}$; $E_2 = 67, 1 \text{ eV}$ et $E_3 = 151 \text{ eV}$.

2. D'après la définition de la densité de probabilité de présence, $|\psi|^2$, les fréquences qui apparaissent dans sont évolution temporelle sont $v_{ij} = \frac{|E_i - E_j|}{h}$ soit 12, 1×10¹⁵ Hz, 20, 2×10¹⁵ Hz et 32, 4 × 10¹⁵ Hz.

Exercice 2

1. Les états stationnaires ont pour fonctions d'onde respectives $\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x) e^{-i\frac{E_n}{h}}$. D'où la densité de probabilité de présence :

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} \sin^2(k_1 x) + \sin^2(k_2 x) + \frac{1}{2} \sin^2(k_3 x) + \sqrt{2} \sin(k_1 x) \sin(k_2 x) \cos(\omega_{12} t) \right)$$

 $+\sin(k_1x)\sin(k_3x)\cos(\omega_{13}t) + \sqrt{2}\sin(k_2x)\sin(k_3x)\cos(\omega_{23}t)$

où $\omega_{ij} = 2 \pi v_{ij}$ de la question 2 de l'exercice précédent.

2. La densité volumique de courant de probabilité est

$$\vec{\mathbf{J}}(x,t) = \frac{i\hbar}{2m_e} \left(\psi(x,t) \, \overrightarrow{\mathbf{grad}} \, \psi^*(x,t) - \psi^*(x,t) \, \overrightarrow{\mathbf{grad}} \, \psi(x,t) \right)$$

soit

$$-\frac{\hbar}{m_e}\,\mathfrak{I}\left(\psi(x,t)\,\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\psi^*(x,t)\right)$$

Ainsi,

$$\vec{\mathbf{J}}(x,t) = -\frac{\hbar}{2m_e L} \sin(\omega_{12}t) \left[\left(\frac{k_2}{\sqrt{2}} \sin(k_1 x) \cos(k_2 x) - \frac{k_1}{\sqrt{2}} \sin(k_2 x) \cos(k_1 x) \right) + \sin(\omega_{13}t) \left(\frac{k_3}{2} \sin(k_1 x) \cos(k_3 x) - \frac{k_1}{2} \sin(k_3 x) \cos(k_2 x) \right) + \sin(\omega_{23}t) \left(\frac{k_3}{\sqrt{2}} \sin(k_2 x) \cos(k_3 x) - \frac{k_2}{\sqrt{2}} \sin(k_3 x) \cos(k_2 x) \right) \right]$$

Les fréquences qui apparaissaient dans la densité de probabilité de présence se retrouve dans le courant de probabilité.

26. Puits, marches et barrières de potentiel

Exercice 1

Les états stationnaires d'énergie $E < V_0$ possèdent des spatiales φ de la fonction d'onde solution de l'équation aux valeurs propres :

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = E\varphi & \text{si } x \in [0; L] \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + V_0 \varphi = E\varphi & \text{si } x \notin [0; L] \end{cases}$$

La discontinuité étant de première espèce, φ doit être continué, de dérivée continue. Posons $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ et $\kappa^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$, k et κ étant réels positifs.

Lorsque $x \in [0; L]$, $\varphi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$; pour $x \in] -\infty; 0[, \varphi(x) = C e^{\kappa x}$ (il ne peut y avoir de contribution en $e^{-\kappa x}$ qui divergerait à l'infini et empêcherait la fonction d'onde d'être normalisable).

Pour $x \in]L; +\infty[, \varphi(x) = D e^{-\kappa(x-L)}$ (il n'y pas de contribution en $e^{\kappa(x-L)}$ pour la même raison). La continuité en x = 0 et en x = L de φ et de sa dérivée première conduit au système linéaire suivant :

(A A	+	B	-	C			\equiv	0
	ik A	-	ik B	-	кС			=	0
ĺ	$e^{ikL}A$	+	$e^{-ikL}B$			-	D	=	0
	ike ^{ikL} A	-	$ike^{-ikL}B$			-	кD	=	0

Ce système ne peut avoir de solution non nulle que si son déterminant est égal à 0, ce qui donne l'équation séculaire sur l'énergie à travers k et κ . Ainsi, en introduisant $q^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$:

$$\cos(kL) = \frac{2k^2 - q^2}{2k\sqrt{q^2 - k^2}} \sin(kL)$$

k est nécessairement compris entre 0 et q: ceci signifie qu'il n'existe, pour une valeur finie de V_0 , qu'un nombre fini de valeur de k, donc de E, satisfaisant l'équation.

Lorsque V_0 tend vers l'infini, l'équation séculaire se réduit à sin(kL) = 0: nous retrouvons la quantifications de l'énergie des états stationnaires du puits de potentiel infini.

Exercice 2

L'expression de la probabilité de transmission à travers une barrière de potentiel montre que la probabilité est inversement proportionnelle à $1 + \beta(E) \operatorname{sh}(\alpha L)$. Or α est proportionnel à \sqrt{m} et le sinus hyperbolique est une fonction croissante, donc plus la masse est élevée et plus la probabilité de traverser la barrière de potentiel est faible. Un proton aura donc plus de chance de franchir la barrière de potentiel que la particule α , pour une énergie donnée.

27. Thermodynamique statistique

Exercice 1

1. L'énergie d'interaction du dipôle dans le champ électrique extérieur vaut $\mathcal{E}_p = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\mathbf{E}}$, soit $\mathcal{E}_p = -pE \cos \theta$, où $p = |\overrightarrow{p}|$ et $E = |\overrightarrow{\mathbf{E}}|$. L'énergie d'interaction décroît lorsque le dipôle électrique s'aligne sur le champ électrique extérieur.

2. La probabilité que le moment dipolaire possède une énergie \mathcal{E} est proportionnelle au facteur de Boltzmann. Le système est *a priori* classique aussi la probabilité est continue. Celle pour que la projection du moment soit $p \cos \theta$ à d θ près, vaut :

$$d\mathcal{P} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \mathcal{E}) \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{Z} \exp(\beta p E \cos \theta) \sin \theta \, d\theta$$

Z étant la fonction de partition pour le problème plan, égale à

$$\int_0^{\pi} \exp(\beta \, pE \cos \theta) \, \sin \theta \, d\theta = \frac{2 \operatorname{sh}(\beta pE)}{\beta pE}$$

La projection du moment dipolaire électrique sur la direction du champ électrique est $p \cos \theta$. La valeur moyenne de cette projection vaut :

$$\langle p \rangle = \frac{1}{Z} \int_0^{\pi} p \cos \theta \exp(\beta p E \cos \theta) \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{ZE} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = p \left(\coth x - \frac{1}{x} \right)$$

où $x = \frac{pE}{kT}$. Lorsque la température diminue, x tend vers l'infini et la projection moyenne sur la direction du champ électrique tend vers p: l'agitation thermique est très faible et ne parvient pas à écarter le moment dipolaire de la direction du champ. Lorsque la température s'élève, x tend vers 0 et la fonction $\operatorname{coth} x - \frac{1}{x}$ tend vers 0.

Exercice 2

1. Supposons que la direction du champ magnétique soit la direction Oz.

L'énergie d'interaction du dipôle dans le champ magnétique extérieur vaut $\mathcal{E}_p = -g \gamma J_z \hbar B$. L'énergie d'interaction décroît lorsque le moment magnétique s'aligne sur le champ magnétique extérieur.

2. La probabilité pour que l'énergie du moment magnétique dans le champ magnétique soit \mathcal{E}_p est proportionnelle au facteur de Boltzmann. Ainsi,

$$\mathcal{P}(J_z) = \frac{1}{Z} \exp(\beta g \gamma J_z \hbar B)$$

où Z est la fonction de partition $\sum_{J_z} \exp(\beta g \gamma J_z \hbar B) = \frac{\operatorname{sh}\left(\left(J + \frac{1}{2}\right)\beta E_m\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\beta E_m}{2}\right)}$ où $E_m = g \gamma \hbar B$. Le

moment magnétique moyen vaut :

$$\langle m_z \rangle = g \gamma \sum_{J_z = -J}^J J_z \mathcal{P}(J_z) = \frac{1}{ZB} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$$

soit :

$$\langle m_z \rangle = g \gamma \hbar \left(\left(J + \frac{1}{2} \right) \operatorname{coth} \left(J + \frac{1}{2} \right) \beta E_m - \frac{1}{2} \operatorname{coth} \left(\frac{\beta E_m}{2} \right) \right)$$

De même que pour les systèmes classiques, la valeur moyenne du moment magnétique sur la direction du champ magnétique tend vers sa valeur maximale lorsque la température tend vers 0 et vers 0 aux températures suffisamment élevées pour que βE_m tende vers 0.

Copyright © 2014 Dunod.

CH - CH - CH - C - O -Partie 3 Chimie

Na PQ,



ec

Michael Faraday, 1791-1867

En chimie, il découvre le benzène et invente le système du nombre d'oxydation.

*o*h

En physique, il découvre l'induction électromagnétique, fondement des machines électriques et des générateurs, et joue un rôle fondateur en électrochimie.

I-PU_ru-ru

Soyez rassurés s'il vous met en cage !

CH2 OR

en. Ou

1

À mon grand-père, Alfred Cabeza, mon soutien indéfectible

Sandrine Margail

1 Application du premier principe à la transformation chimique

Revoir Toute la MPSI en fiches ; fiche 2 de la chimie : Transformation chimique.

Les grandeurs thermodynamiques peuvent être calculées en s'appuyant sur les grandeurs tabulées pour un système fictif, appelé système standard.

1. État standard d'un constituant pur

Quel que soit l'état physique du constituant pur (constitué d'une seule espèce chimique), l'état standard correspond à un état fictif ou réel, à la température T, sous une pression dite standard, notée $P^{\circ} = 1$ bar= 10^5 Pa.

Conventions pour l'état physique standard :

État physique du constituant à T	État physique standard à T
Constituant gazeux pur (P) ou dans un mélange (P_i) .	Constituant pur sous P° se comportant comme un gaz parfait.
Constituant à l'état condensé (gazeux ou solide) pur ou dans un mélange.	Constituant pur dans le même état à la pression P° .
Soluté.	Soluté à la concentration $C^{\circ} = 1 \text{ mol.L}^{-1}$, à la pression P° , se comportant comme à dilution infinie.

2. Premier principe et grandeurs thermodynamiques du système

2.1 Définition de l'énergie interne U

 $E_{totale \ système} = E_c + E_p + U$

(grandeurs extensives en Joules)

avec E_c : énergie cinétique macroscopique,

 E_p : énergie potentielle macroscopique,

U: énergie interne (l'énergie cinétique microscopique, due à l'agitation thermique des particules, et l'énergie potentielle issue de toutes les forces internes au système, interactions intermoléculaires et intramoléculaires).

Cette énergie n'est pas mesurable : seule la variation d'énergie peut être déterminée.

380 Chimie

2.2 Expression de la variation d'énergie interne ΔU : premier principe de la thermodynamique

• Le premier principe traduit la conservation de l'énergie.

Pour un système fermé thermomécanique (variables P, V, T, n_i), macroscopiquement au repos dans le référentiel d'étude ($\Delta E_c = \Delta E_p = 0$), on a :

$$\Delta U = U_2 - U_1 = W_{1 \to 2} + Q_{1 \to 2}$$

avec

 ΔU : variation d'énergie interne du système,

 $W_{1\rightarrow 2}$: transfert d'énergie mécanique correspondant au travail des forces extérieures s'appli-

quant au système (si le travail mécanique correspond aux forces de pression $W = \int_{V}^{V_2} -P dV$);

 $Q_{1\rightarrow 2}$: transfert d'énergie thermique (chaleur échangée au travers de la surface Σ) noté Q_V pour une transformation isochore (V = cte) et Q_P pour une transformation isobare (P = cte).

Notation différentielle pour une transformation infinitésimale :

$$\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q.$$

2.3 Conséquences

• Pour un système qui subit une transformation adiabatique (soit $Q_{1\rightarrow 2} = 0$), on a :

$$\Delta U = W_{1 \to 2}$$

• Pour un système qui subit une transformation isochore (soit V = cte), on a :

$$W_{1\to 2} = 0$$
 et $\Delta U = Q_V$

Pour une transformation infinitésimale :

$$\mathrm{d}U = \delta Q_V = \sum_i n_i C_{v_m,i} \,\mathrm{d}T$$

avec $C_{v_m,i}$ la capacité thermique molaire à volume constant du constituant *i* (en J.mol⁻¹.K⁻¹)

• Pour un système qui subit une transformation isobare (cas le plus fréquent en chimie) :

 $P_e = cte$ donc $W_{1\to 2} = -P_e \Delta V$ ce qui entraîne $\Delta U_{1\to 2} = W_{1\to 2} + Q_P$ donc $Q_P = \Delta U - W_{1 \to 2} = \Delta U - (-P_e \Delta V) = \Delta (U + P_e V) = \Delta H.$

2.4 Quelle fonction d'état choisir : U ou H?

• Si V est constant (réacteur indéformable), U est une fonction d'état intéressante car le premier principe se résume à $\Delta U = Q_v$.

• Si P est constante (utilisation de soupapes pour réguler la pression ou contact avec l'atmosphère), H est une fonction d'état intéressante car le premier principe s'écrit $\Delta H = Q_P$.

3. Enthalpie H d'un système

Définition de l'enthalpie (fonction d'état extensive) d'après §2.3 :

$$H = U + PV.$$

3.1 Enthalpie molaire partielle H_{m,i}

• *H* étant une fonction d'état extensive, on peut alors définir : $H_{m,i} = \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{T,P}$ et appliquer le théorème d'Euler : $H = \sum_{i} n_i H_{m,i}$

avec H : enthalpie du mélange (en J),

 n_i : quantité de matière de l'espèce A_i (en mol),

 $H_{m,i}$: enthalpie molaire de l'espèce A_i (en J.mol⁻¹).

Approximation sur les grandeurs molaires

Dans le cas d'un mélange parfait, l'absence d'interactions entre particules permet de confondre grandeur molaire partielle dans le mélange et grandeur molaire standard (à P°), soit : $H_{m,i}(T, P) \approx H_{m,i}^\circ(T)$.

3.2 Variation de l'enthalpie d'un système en évolution chimique

Équation

Lors d'une réaction d'équation $0 = \sum_{i} v_i A_i$, on a :

(

$$\mathrm{d}H = \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_{T,n_i} \,\mathrm{d}P + \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,n_i} \,\mathrm{d}T + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{T,P} \,\mathrm{d}n_i$$

• Premier terme

On fait l'approximation que l'enthalpie *H* ne dépend pas de la pression, d'où : $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_{T,n_i} = 0$, soit $H(T, P, n_j) = H(T, P^\circ, n_j) = H^\circ(T, n_j)$.

Deuxième terme

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,n_i} = C_p = \sum_i n_i C_{P_m,i}$$

avec C_p : la capacité thermique à pression constante du mélange (en J.K⁻¹)

et $C_{pm,i}$: la capacité thermique molaire à pression constante du constituant *i* (en J.mol⁻¹.K⁻¹).

 \bigcirc C_p représente la quantité de chaleur à fournir pour élever de 1 degré la température d'un système fermé, sous pression constante, sans réaction chimique, sans autre travail que les forces pressantes.

Donc, pour une transformation infinitésimale, isobare et sans évolution chimique (P et ni constants), évoluant entre T_1 et T_2 , on a :

$$\mathrm{d}H = \delta Q_p = 0 + C_p \mathrm{d}T + 0 = \sum_i n_i C_{Pm,i} \mathrm{d}T$$

382 Chimie

soit en intégrant :

$$\Delta H = Q_p = \int_{T_1}^{T_2} C_p \, \mathrm{d}T = \int_{T_1}^{T_2} \sum_i n_i \, C_{Pm,i} \, \mathrm{d}T$$

Troisième terme

Pour une transformation isobare et isotherme (soit dT = dP = 0), on a :

$$dH = 0 + 0 + \sum_{i} \left(\frac{\partial H}{\partial n_{i}}\right)_{T,P} dn_{i} = \sum_{i} H_{m,i} dn_{i} = \sum_{i} H_{m,i} v_{i} d\xi \quad \text{donc} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_{P,T} = \sum_{i} v_{i} H_{m,i}.$$

On est conduit à introduire l'**opérateur de Lewis** Δ_r qui représente l'opérateur « dérivée partielle par rapport à ξ , à T et P constantes » :

$$\Delta_r H(T, P) = \left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_{P,T} = \sum_i \nu_i H_{m,i}.$$

^(S) Le symbole Δ_r dans $\Delta_r X$ ne représente pas une variation. C'est simplement une notation *qui permet d'éviter de manipuler des expressions avec de nombreuses dérivées partielles.*

Approximations

➤ *Pas d'interactions* au sein du mélange et effet de la pression négligée, ce qui entraîne : $\Delta_r H(T, P) \approx \Delta_r H^{\circ}(T)$.

> Approximation d'Ellingham (en l'absence de changement d'état) : $\Delta_r H^{\circ}(T)$ dépend peu de la température.

Donc :

$$\Delta_r H(T, P) \approx \Delta_r H^{\circ}(T) = \left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_{P,T} = \sum_i v_i H_{m,i}^{\circ}$$

avec $\Delta_r H(T, P)$: enthalpie de réaction (en J.mol⁻¹),

 $\Delta_r H^{\circ}(T)$: enthalpie standard de réaction (en J.mol⁻¹),

 v_i : coefficient stechiométrique algébrique du constituant i,

 $H_{m,i}^{\circ}$: enthalpie molaire standard du constituant *i* (en J.mol⁻¹).

 $\Delta_r H^{\circ}(T)$ dépend des coefficients stæchiométriques v_i choisis pour l'équation chimique. $\Delta_r X$ est donc associée à une équation chimique donnée.

• Relations entre $\Delta_r H^{\circ}(T)$ et $\Delta_r U^{\circ}(T)$

$$\Delta_r H^{\circ}(T) \approx \Delta_r U^{\circ}(T) + \left(\sum_{i,gaz} \nu_i\right) RT$$

avec $\Delta_r H^{\circ}(T)$: enthalpie standard de réaction (en J.mol⁻¹),

 $\Delta_r U^{\circ}(T)$: énergie interne standard de réaction (en J.mol⁻¹),

 v_i : coefficient stechiométrique algébrique des constituants gazeux *i*.

3.3 Signification physique de l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^{\circ}$

Il s'agit des effets thermiques pour une transformation isobare.

D'après §3-2, pour une transformation isobare et isotherme (soit dT = dP = 0), on a :

$$dH = \delta Q_P = 0 + 0 + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{P,T} dn_i = \sum_i H_{m,i} dn_i$$
$$= \sum_i H_{m,i} v_i d\xi = \Delta_r H^{\circ}(T) d\xi$$

Donc, en intégrant, on obtient la variation d'enthalpie au cours d'une réaction chimique à T et P constantes, c'est-à-dire l'énergie échangée avec l'extérieur, le transfert thermique Q_p pouvant être mesuré expérimentalement :

$$Q_P = \Delta H(T, P, \xi) \approx \Delta H^{\circ}(T, \xi) = \Delta_r H^{\circ}(T) \Delta \xi$$

Pour une réaction totale, j étant le réactif limitant, on a : $\Delta \xi = \frac{n_{0,j}}{|y_j|}$

• Si $\Delta_r H^{\circ}(T) < 0$ ($\Delta \xi > 0$) alors $Q_P < 0$. Le système cède de l'énergie thermique au milieu extérieur. La réaction est exothermique.

• Si $\Delta_r H^{\circ}(T) > 0$ ($\Delta \xi > 0$) alors $Q_P > 0$. Le système reçoit de l'énergie thermique du milieu extérieur. La réaction est endothermique.

• Si $\Delta_r H^{\circ}(T) = 0$, alors $Q_P = 0$. Il n'y a pas de transfert d'énergie entre le système et le milieu extérieur. La réaction est athermique.

R Surtout ne confondez pas ΔH et $\Delta_r H$:

 ΔH représente une variation de H, ce qui revient à écrire : $\Delta H = H_{final} - H_{initial}$. ΔH s'exprime en J.

 $\Delta_r H$ est la dérivée de H par rapport à ξ , à T et P constantes. $\Delta_r H$ n'est donc pas une variation, mais un taux de variation. $\Delta_r H$ s'exprime en J.mol⁻¹.

3.4 Enthalpie standard de formation $\Delta_f H^\circ$

• État standard de référence d'un élément chimique (ESR)

C'est le corps pur simple (constitué d'un seul type d'atomes) constitué de cet élément, le plus stable thermodynamiquement, pris dans son état standard (P°) à la température T.

R Attention de ne pas confondre l'état standard d'un constituant physico-chimique (qui est, à une température T, ce constituant pur sous 1 bar) et l'état standard de référence d'un élément chimique.

Exemples :

Ø Pour un corps pur simple solide, il faut parfois également tenir compte du type de réseau cristallin (exemple : C_{gr}).

383

Elément	Sn	Sn	Fe	Fe	Fe	С	0	Н	N	Cl
	à 298K	à 1000K	à 1000K	à 2500K	à 3200K					
ESR	Sn _(s)	Sn _(l)	Fe _(s)	Fe _(l)	Fe _(g)	C _(graphite) noté C _(gr)	O _{2(g)}	$H_{2(g)}$	N _{2(g)}	Cl _{2(g)}
T _{changement}	T _{fusion} =	=504 K	T _{fusion} =180	8 K et T _{vaporisa}	tion=3023 K	ESR n	e dépend	ant pas de	la tempér	ature

• Enthalpie standard de formation $\Delta_f H^\circ$ d'un composé

C'est l'enthalpie de la réaction de formation d'une mole de ce composé à partir de ses éléments constitutifs pris dans leur ESR à la température T.

On les trouve dans les tables thermodynamiques à 25°C (298 K) avec $\Delta_f H^\circ$ (corps simples pris dans leur ESR)=0.

Exemples

➤ Formation du dioxygène gazeux à 298 K :

$$O_{2(g)} = O_{2(g)}$$
 $\Delta_r H_{298}^{\circ}(O_{2(g)}) = 0 \text{ kJ.mol}^{-1}$

➤ Formation de l'acide éthanoïque à 298 K :

$$C_{(gr)} + 2 H_{2(g)} + O_{2(g)} = CH_3COOH_{(l)}$$

$$\Delta_r H_{298}^{\circ} = \Delta_f H_{298}^{\circ} (CH_3 COOH_{(l)}) = 487 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

➤ Formation de l'oxyde de zinc solide à 693 K :

$$Zn_{(s)} + \frac{1}{2}O_{2(g)} = ZnO_{(s)}$$
 $\Delta_r H^{\circ}_{693} = \Delta_f H^{\circ}_{693}(ZnO_{(s)}) = -354, 6 \text{ kJ.mol}^{-1}.$

 \otimes Lorsqu'on donne une $\Delta_f H^{\circ}(T)$, il faut impérativement préciser :

- la température T à laquelle on considère la réaction de formation,

- l'état physique du corps pur formé.

4. Loi de Hess - cycle thermodynamique

H étant une fonction d'état, sa variation ne dépend pas du chemin suivi. On peut donc inventer un chemin fictif partant du même état initial que le système réel. On peut alors calculer $\Delta_r H(T)$ en dissociant les réactifs en leurs éléments constitutifs, puis en formant les produits à partir de ces derniers.

Exemple :

$$2 \Delta f H^{\circ}(C_{2}H_{5}OH_{(1)}) + O_{2(g)} + O_{2(g)}$$

Généralisation : première loi de Hess

$$\Delta_r H^{\circ}(T) = \sum_i \nu_i \, \Delta_r H_i^{\circ}(T)$$

Faites les exercices 1 et 2. Vous devez savoir : – trouver $\Delta_r H^{\circ}(T)$ à partir des $\Delta_f H_i^{\circ}(T)$ donnés, – trouver une $\Delta_f H_i^{\circ}(T)$ à partir du $\Delta_r H^{\circ}(T)$.

5. Quelques transformations particulières

Faites l'exercice 3.

5.1 Enthalpie standard de changement d'état $1 \rightarrow 2 : \Delta_{1\rightarrow 2}H^{\circ}(T)$

Définition

 $\Delta_{1\to 2}H^{\circ}(T)$ (noté aussi $L^{\circ}_{1\to 2}$ chaleur latente molaire standard) est l'énergie échangée lors du passage d'une mole d'un corps pur de la phase 1 à la phase 2, sous *T* et *P*° fixées.

• Exemple

À $T = 100^{\circ}\text{C} = 373 \text{ K}$, sous $P^{\circ} = 1 \text{ bar}$, $H_2O_{(l)} = H_2O(g), \Delta_{\text{vap}}H^{\circ}_{(373K)} = 40, 7 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

Bilan des signes

fusion (S-L)	$\Delta_{\rm fus}H^\circ>0$	solidification (L-S)	$\Delta_{\rm sol}H^{\circ} = -\Delta_{\rm fus}H^{\circ} < 0$
vaporisation (L-V)	$\Delta_{\rm vap}H^{\circ}>0$	liquéfaction (V-L)	$\Delta_{\rm liq}H^\circ = -\Delta_{\rm vap}H^\circ < 0$
sublimation (S-V)	$\Delta_{\rm sub}H^{\circ}>0$	condensation (V-S)	$\Delta_{\rm cond} H^\circ = -\Delta_{\rm sub} H^\circ < 0$

5.2 Enthalpie standard de dissociation d'une liaison A - B:

 $\Delta_{dis}H^{\circ}$ ou D_{A-B}

• Enthalpie de dissociation (ou énergie de liaison E_l)

Elle mesure l'énergie nécessaire pour rompre une liaison covalente en phase gaz :

$$A - B(g) \rightarrow A(g) + B(g)$$
 $\Delta_{dis}H^0 = D_{A-B} > 0.$

Application : calcul de $\Delta_r H^{\circ}(T)$ à partir des valeurs d'enthalpie de dissociation.

Deuxième loi de Hess

$$\Delta_r H^{\circ}_{(T)} = -\sum_i k_i \Delta_{dis} H^{\circ}$$
 où k_i est le nombre algébrique de liaisons de type *i*.

Exemple

On a donc :

$$\begin{array}{c} CH_{3}CHO_{(g)} & + & 2 H_{2(g)} & & C_{2}H_{6(g)} & + & H_{2}O \\ 4 \Delta_{dis}H^{\circ}(C-H) + \Delta_{dis}H^{\circ}(C=O) + & & \\ \Delta_{dis}H^{\circ}(C-C) + 2 \Delta_{dis}H^{\circ}(H-H) & & 2 C_{(g)} + 8 H_{(g)} + O_{(g)} \end{array}$$

$$\Delta_r H^\circ = 4 \Delta_{dis} H^\circ(C - H) + \Delta_{dis} H^\circ(C = O) + 2 \Delta_{dis} H^\circ(C - C) + 2 \Delta_{dis} H^\circ(H - H)$$
$$- 6 \Delta_{dis} H^\circ(C - H) - \Delta_{dis} H^\circ(C - C) - 2 \Delta_{dis} H^\circ(O - H)$$
$$= -2 \Delta_{dis} H^\circ(C - H) - 2 \Delta_{dis} H^\circ(O - H) + \Delta_{dis} H^\circ(C = O) + 2 \Delta_{dis} H^\circ(H - H)$$

5.3 Enthalpie standard d'*ion*isation (ou énergie d'ionisation) à la température $T : \Delta_{ion}H^{\circ}(T)$

C'est l'enthalpie standard de réaction de la réaction de formation d'un cation en phase gazeuse, par arrachement d'un électron à un atome ou une molécule en phase gazeuse à T = 0 K :

 $A_{(g)} \rightarrow A_{(g)}^+ + e^- \qquad \Delta_{ion} H^\circ = E_i \text{ (en J.mol}^{-1}\text{)} > 0.$

La réaction doit être en phase gazeuse.

Le coefficient stœchiométrique devant $A_{(g)}$ vaut 1.

5.4 Enthalpie standard d'attachement électronique à la température $T : \Delta_{att}H^{\circ}$ - affinité électronique (ou électroaffinité) EA

C'est l'enthalpie standard de réaction de la réaction de formation d'un anion en phase gazeuse, par capture d'un électron supplémentaire par un atome ou une molécule en phase gazeuse à T = 0 K :

 $B_{(g)} + e^- \rightarrow B_{(g)}^- \qquad \Delta_{att} H_{(T)}^\circ \text{ (en J.mol}^{-1}) > 0 \quad \text{ou } < 0 \qquad \Delta_{att} H_{(T)}^\circ = -AE_{(T)}$

La réaction doit être en phase gazeuse.

Le coefficient stæchiométrique devant $B_{(g)}$ doit être égal à 1.

L'affinité électronique représente l'énergie cédée lors de l'attachement d'un électron à un atome en phase gazeuse.

Exemple

 $\Delta_{att}H^{\circ}_{(T)}$ (He) = + 21 kJ.mol⁻¹ et $\Delta_{att}H^{\circ}_{(T)}$ (F) = -322 kJ.mol⁻¹.

5.5 Comment calculer la température atteinte par un système lors d'une transformation adiabatique - température de flamme T_f

Faites l'exercice 4.

• Hypothèse : pour une réaction $\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{0}$ qui s'effectue dans un calorimètre adiabatique, soumis à une pression extérieure constante, l'énergie thermique libérée par la réaction à T_i permet d'échauffer le seul système de T_i à T_f (pas de transfert thermique vers l'extérieur).

La température de flamme T_f est la température théorique maximale atteinte par le système.

• Pour calculer T_f , il faut construire un cycle thermodynamique le long d'un chemin hypothétique contenant 2 étapes :



• Dans l'approximation d'une évolution adiabatique et à pression constante, l'intégralité de la chaleur dégagée par la réaction entraîne l'élévation de la température des produits (et constituants spectateurs) :

$$Q_{1\rightarrow 2} = 0 = Q_{1\rightarrow 3} + Q_{3\rightarrow 2} \Longrightarrow Q_{1\rightarrow 3} = -Q_{3\rightarrow 2}$$

On peut alors calculer T_f (cf. exercice 4).

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Déshydrogénation thermique du propane

Calculez l'enthalpie standard $\Delta_r H^{\circ}$ à 298 K de la réaction de déshydrogénation du propane en propène.

On donne les enthalpies standard $\Delta_f H_{298}^{\circ}$ de formation des gaz à 298 K :

; propène : $+20, 5 \text{ kJ.mol}^{-1}$. propane : -103, 7 kJ.mol⁻¹

Exercice 2 : Conversion du méthane

Déterminez l'enthalpie standard de conversion du méthane à 298 K en phase gazeuse, d'équation chimique :

$$CH_4 + H_2O = CO + 3H_2$$

On donne les enthalpies standard de combustion $\Delta_{comb}H^{\circ}$ des composés gazeux suivants :

 $CH_4: -886, 1 \text{ kJ.mol}^{-1}$; $H_2: -285, 5 \text{ kJ.mol}^{-1}$; $CO: -282, 6 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

Exercice 3 : Enthalpie réticulaire du bromure de sodium

Calculez l'enthalpie réticulaire du bromure de sodium au moyen des données suivantes :

énergie d'ionisation du sodium : 493, 8 kJ.mol⁻¹

affinité électronique du brome : 339, 0 kJ.mol⁻¹

enthalpie standard de formation du bromure de sodium : $-360, 0 \text{ kJ.mol}^{-1}$

enthalpie de sublimation du sodium : $108, 8 \text{ kJ.mol}^{-1}$

enthalpie de dissociation de la liaison Br-Br : 192, 5 kJ.mol⁻¹.

Exercice 4 : Température de flamme adiabatique

En partant d'un mélange d'une mole de dioxyde de soufre et de 4 moles d'air (que l'on considèrera comme composé à 80 % de diazote et à 20 % de dioxygène), initialement à 25 °C, on réalise, dans un réacteur adiabatique et isobare, la conversion totale de SO_2 et SO_3 par la réaction suivante :

$$2 \operatorname{SO}_{2(g)} + \operatorname{O}_{2(g)} = 2 \operatorname{SO}_{3(g)}$$

1. Quelle est la composition du système dans l'état final?

2. Quelle est la température finale du système sachant que $\Delta_r H^\circ = -197, 6 \text{ kJ.mol}^{-1}$ à 298 K?

Données à 298 K :

	O _{2(g)}	N _{2(g)}	O _{2(g)}	SO _{3(g)}
C_p° (kJ.mol ⁻¹)	29,9	31,2	51,1	76,6

Exercice 5 : Aluminothermie (bonus)

On mélange dans un creuset 0, 9 mol d'oxyde de chrome Cr_2O_3 et 1, 8 mol de poudre d'aluminium initialement à $T_0 = 300$ K. On amorce la réaction. Celle-ci est extrêmement violente et sera considérée instantanée.

Après la réaction, on obtient de l'alumine et du chrome liquide dans le creuset.

Déterminez la température des produits de cette réaction d'aluminothermie.

Données :

Enthalpie standard de la réaction :

$$\operatorname{Cr}_2\operatorname{O}_{3(s)} + 2\operatorname{Al}_{(s)} \to \operatorname{Al}_2\operatorname{O}_{3(s)} + 2\operatorname{Cr}_{(s)}$$

à 300 K : $\Delta_r H^\circ = -560 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

Capacités calorifiques molaires standard :

 $C_{n_{c}}^{\circ} = 40 \text{ J.K}^{-1} \text{.mol}^{-1} \text{ (solide ou liquide) ;}$

 $C_{p_{Al_{2}O_{3}}}^{\circ} = 120 \text{ J.K}^{-1} \text{.mol}^{-1}$ (solide ou liquide).

Enthalpie standard de fusion :

 $\Delta_{fus} H_{Cr}^{\circ} = +20 \text{ kJ.mol}^{-1} \text{ à } T_{fus} = 1910^{\circ}\text{C};$ $\Delta_{fus} H_{Al_2O_3}^{\circ} = +110 \text{ kJ.mol}^{-1} \text{ à } T_{fus} = 2050^{\circ}\text{C}.$

2 Application du second principe à la transformation chimique

Revoir **Toute la MPSI en fiches**; fiche 27 de la physique : second principe de la thermodynamique.

Soit un système thermodynamique fermé dans lequel se produit une transformation, isobare et isotherme à la température T_e , échangeant avec le milieu extérieur la quantité de chaleur δQ . On définit une fonction d'état extensive, appelée entropie, notée S, telle que son évolution ΔS entre deux états d'équilibre initial et final du système s'écrit :

$$\Delta S = S_{\text{échangée}} + S_{\text{créée}}$$

avec $S_{\text{échangée}} = \int \frac{\delta Q}{T_e} = \frac{\Delta H}{T}$

et $S_{créée} \ge 0$ ($S_{créée} = 0$ pour une transformation réversible).

La condition $S_{créée} \ge 0$ est un critère d'évolution spontanée d'un système à partir d'un état d'équilibre initial. L'inconvénient de ce critère est qu'il n'est pas toujours aisé de calculer l'entropie créée.

Dans les différents cas expérimentaux qui se présentent, on a donc intérêt à traduire autrement ce critère d'évolution spontanée. Le critère d'évolution spontanée d'une réaction s'énoncera donc :

$$\begin{split} S_{\text{créée}} &= \Delta S - \frac{\Delta H}{T} > 0 \Longrightarrow \Delta H - T\Delta S < 0 \Longrightarrow \Delta_r H \cdot \Delta \xi - T\Delta_r S \cdot \Delta \xi < 0 \\ &\Longrightarrow \Delta_r (H - TS) < 0. \end{split}$$

[®] Rappel : d'après la fiche précédente $\Delta H = \Delta_r H \Delta \xi$.

1. L'enthalpie libre G d'un système chimique

On voit donc apparaître une nouvelle grandeur thermodynamique : la fonction d'état **enthalpie libre** :

G = H - TS = U + PV - TS.

⁽⁶⁾ Rappel : d'après la fiche précédente H = U + PV.

Le critère de spontanéité d'une transformation s'écrit alors :

 $\Delta_r G < 0$: l'enthalpie libre de réaction est négative.

1.1 Variation de l'enthalpie libre d'un système d*G* de composition invariable (sans évolution chimique)

La différentielle de G s'écrit :

 $\mathrm{d}G = \mathrm{d}U + P\mathrm{d}V + V\mathrm{d}P - T\mathrm{d}S - S\mathrm{d}T.$

390 Chimie

Pour une transformation isobare à $P = P_e$ (dP = 0), On a vu que : d $U = \delta Q + \delta W = T dS - P_e dV$, d'où :

 $\mathrm{d}G = T\mathrm{d}S - P_e\mathrm{d}V + P_e\mathrm{d}V + V\mathrm{d}P - T\mathrm{d}S - S\mathrm{d}T = V\mathrm{d}P - S\mathrm{d}T.$

 \square *G* est donc une fonction de *P* et de *T* ; *G* est un potentiel thermodynamique adapté à l'étude des transformations spontanées isothermes et isobares, ce qui en fait une variable de choix pour les réactions chimiques.

1.2 Variation de l'enthalpie libre d'un système d*G* de composition variable

L'état d'un système physico-chimique de composition variable peut être décrit par le jeu de paramètres d'état suivants : T, P et n_i (quantité de matière de l'espèce i).

L'identité thermodynamique relative à G s'écrit alors de la manière suivante :

$$\mathrm{d}G = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{T,n_i} \mathrm{d}P + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P,n_i} \mathrm{d}T + \sum_i \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T,P} \mathrm{d}n_i$$

soit, par identification avec l'expression trouvée au 1.1 :

$$\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{T,n_i} = V \quad ; \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P,n_i} = -S$$

2. Le potentiel chimique μ_i

Le potentiel chimique μ_i est l'enthalpie libre molaire partielle du composé i:

$$\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T,P,n_{j\neq i}}$$
 soit $G = \sum_i n_i \mu_i$

[®] Rappel : d'après la fiche précédente l'enthalpie molaire partielle H_{mi} est :

$$H_{mi} = \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{T, P, n_{j \neq i}} \quad soit \quad H = \sum_i n_i \mu_i$$

Expression de la différentielle de G :

$$\mathrm{d}G = V\,\mathrm{d}P - S\,\mathrm{d}T + \sum_i \mu_i\,\mathrm{d}n_i$$

avec V, S et n_i : variables extensives et P, T: variables intensives.

Le potentiel chimique d'un composé *i* dépend de l'activité a_i du composé suivant la relation (admise) :

$$\mu_i = \mu_i^\circ + RT \ln a_i$$

avec μ_i : le potentiel chimique standard (qui impose une pression $P = P^\circ = 1$ bar)

Revoir Toute la MPSI en fiches, chimie, fiche 2 : transformation chimique.

Constituant	Activité chimique a	Potentiel chimique µ	Etat standard
Gaz parfait pur	$a = \frac{P}{p^{\circ}}$ P: pression du gaz pur	$\mu_{(\mathrm{T},\mathrm{P})} = \mu^{\circ}_{(\mathrm{T})} + \mathrm{RT} \ln \frac{P}{P^{\circ}}$	Gaz parfait pur à T sous P°=1 bar
Constituant gazeux parfait A _i dans un mélange idéal de gaz parfaits	$a_i = \frac{P_i}{P^\circ}$ $P_i: \text{ pression}$ partielle du gaz i	$\mu_{\mathbf{i}(\mathrm{T},\mathrm{P})} = \mu_{\mathbf{i}^{\circ}(\mathrm{T})} + \mathrm{RT} \ln \frac{P_{\mathbf{i}}}{P^{\circ}}$	Gaz parfait pur à T sous P°=1 bar
Soluté A _i dans une solution idéale	$a_i = \frac{C_i}{C^\circ}$ C _i : concentration molaire de l'espèce i	$\mu_{i(T,P,Ci)} = \mu_i^{\circ}{}_{(T)} + RT \ln \frac{C_i}{c^{\circ}}$	Constituant Ai sous 1 bar à T, dans une solution infiniment diluée à une concentration $C^{\circ}=1 \text{ mol.L}^{-1}$.

3. Détermination des grandeurs standard de réaction

3.1 Détermination de l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^{\circ}_{(T)}$

Détermination

Nous avons vu dans la fiche précédente la loi de Hess permettant de calculer une enthalpie standard de réaction :

$$\Delta_r H^{\circ}_{(T)} = \sum_i \nu_i \, \Delta_f H^{\circ}_{i(T)}$$

 $\Delta_f H_{i(T)}^{\circ}$ est l'enthalpie standard de formation du composé *i* à 298K (grandeurs tabulées).

 \succ L'approximation d'Ellingham (en l'absence de changement d'état) indique que $\Delta_r H_{i(T)}^{\circ}$ dépend peu de la température, soit :

$$\Delta_r H_i^{\circ}{}_{(T)} = \Delta_r H_{(298K)}^{\circ} + \int_{298}^T \sum_i \Delta_r C p^{\circ} dT \approx \Delta_r H_{(298K)}^{\circ}.$$

Signification physique

Si $\Delta_r H_{(T)}^{\circ} < 0$, on a $Q_P < 0$. Dans le sens direct ($\Delta \xi > 0$), le système cède de l'énergie thermique au milieu extérieur : la réaction est exothermique.

➤ Si $\Delta_r H^{\circ}_{(T)} > 0$, on a $Q_P > 0$. Dans le sens direct ($\Delta \xi > 0$), le système reçoit de l'énergie thermique au milieu extérieur : la réaction est endothermique.

≻ Si $\Delta_r H_{(T)}^\circ = 0$, on a $Q_P = 0$. Il n'y a pas transfert d'énergie entre le système et le milieu extérieur : la réaction est athermique.

3.2 Détermination de l'entropie standard de réaction $\Delta_r S^{\circ}(T)$

Détermination

De la même manière, pour la fonction d'état entropie S :

$$\Delta_r S^{\circ}_{(T)} = \sum_i \nu_i S^{\circ}_{i(T)} = \sum_i \nu_i \Delta_f S^{\circ}_{i(T)}.$$

392 Chimie

 $S_{i(T)}^{\circ}$ est l'entropie standard du composé *i* à 298K (grandeurs tabulées).

 $\Delta_f S_{i(T)}^{\circ}$ est l'entropie standard de formation du composé *i* à 298K (grandeurs tabulées).

Dans l'approximation d'Ellingham : $\Delta_r S^{\circ}_{(T)} \approx \Delta_r S^{\circ}_{(298K)}$.

Faites l'exercice 1.

Contrairement à $\Delta_f H^{\circ}_{(T)}$ qui correspond à une variation d'enthalpie, l'entropie standard sera répertoriée dans les tables en valeur absolue $S^{\circ}_{(T)}$.

Notez que, pour un corps simple : $\Delta_f H^{\circ}_{(T)} = 0$ alors que $S^{\circ}_{(T)} \neq 0$.

Signification physique

≻ Si $\Delta_r S^{\circ}_{(T)} < 0$, on a $Q_P < 0$. Dans le sens direct ($\Delta \xi > 0$), la réaction contribue à diminuer le désordre du milieu en diminuant la quantité de matière de gaz, état le plus désordonné.

➤ Si $\Delta_r S^{\circ}_{(T)} > 0$, on a $Q_P > 0$. Dans le sens direct la réaction contribue à augmenter le désordre du milieu en augmentant la quantité de matière de gaz, état le plus désordonné.

> Si $\Delta_r S^{\circ}_{(T)} = 0$, on a $Q_P = 0$. La quantité de matière de gaz, état le plus désordonné, ne change pas.

3.3 Détermination de l'enthalpie libre standard de réaction $\Delta_r G^{\circ}(T)$

Détermination

$$\Delta_r G^{\circ}_{(T)} = \Delta_r H^{\circ}_{(T)} - T \Delta_r S^{\circ}_{(T)}$$

Signification physique

- Si $\Delta_r G^{\circ}_{(T)} < 0$, la réaction est spontanée dans le sens direct.
- Si $\Delta_r G^{\circ}_{(T)} > 0$, la réaction est spontanée dans le sens indirect.
- Si $\Delta_r G^{\circ}_{(T)} = 0$, le système est à l'équilibre.

4. Sens d'évolution d'une réaction chimique

4.1 Le quotient réactionnel $Q_{r(T)}$

Pour une transformation chimique isobare (dP = 0) et isotherme (dT = 0), en notant v_i les coefficients stechiométriques tels que $dn_i = v_i d\xi$, on a :

$$\mathrm{d}G = V\,\mathrm{d}P - S\,\mathrm{d}T + \sum_{i} \mu_{i}\,\mathrm{d}n_{i} = \sum_{i} \mu_{i}\,\mathrm{d}n_{i} = \sum_{i} \mu_{i}\,\nu_{i}\,\mathrm{d}\xi$$

Il vient donc :

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{P,T} = \Delta_r G_{(T,P)} = \sum_i v_i \mu_i.$$

En remplaçant par l'expression des potentiels chimiques μ_i en fonction de leurs activités a_i (voir paragraphe 2), on obtient :

$$\Delta_r G_{(T,P)} = \sum_i \nu_i (\mu_i^{\circ} + RT \ln a_i) = \sum_i \nu_i \mu_i^{\circ} + \sum_i RT \nu_i \ln a_i = \Delta_r^{\circ} G_{(T,P)} + RT \ln \left(\prod_i a_i^{\nu_i}\right).$$

On a donc :

$$\Delta_r G_{(T,P)} = \Delta_r G^{\circ}_{(T,P)} + RT \ln Q_r \tag{1}$$

avec :

 $\Delta_r G_{(T,P)}$: l'enthalpie libre de réaction de la réaction isotherme et isobare (en J.mol⁻¹)

 $\Delta_r^{\circ}G_{(T,P=1\text{bar})}$: l'enthalpie libre standard de réaction de la réaction isotherme et isobare (en J.mol⁻¹)

R : constante des gaz parfaits (= $8,314 \text{ J.mol}^{-1}$.K⁻¹).

T : température de la réaction isotherme (en K).

 $Q_{r(T)}$: le produit réactionnel de la réaction (sans unité) : $Q_r = \prod_i a_i^{\nu_i}$.

Exemple

Pour une transformation :

$$\alpha A + \beta B \rightarrow \gamma C + \delta D$$

on obtient :

$$\Delta_r G_{(T,P)} = \Delta_r G_{(T,P)}^\circ + RT \ln\left(Q_{r(T)}\right) = \Delta_r G_{(T,P)}^\circ + RT \ln\left(\frac{a_C^{\gamma}.a_D^{\delta}}{a_A^{\alpha}.a_B^{\beta}}\right).$$

Capproximation $\Delta_r H \approx \Delta_r H^\circ$ (faite dans la fiche précédente) n'est pas valable pour $\Delta_r G$ et $\Delta_r G^\circ$!

4.2 Comparaison $K_{(T)}^{\circ}$ et $Q_{r(T)}$ – Sens d'évolution

Nous venons de voir : $\Delta_r G_{(T,P)} = \Delta_r G_{(T,P)}^\circ + RT \ln (Q_{r(T)})$ (1).

On sait que :

• l'équilibre se traduit par : $\Delta_r G_{(T)} = 0$, soit, d'après (1), $\Delta_r G_{(T)}^\circ + RT \ln Q_{r,eq(T)} = 0$.

À une température donnée, $Q_{r,eq}$ est une constante, appelée constante d'équilibre, notée $K_{(T)}^{\circ}$. Donc : $\Delta_r G_{(T)}^{\circ} + RT \ln K_{(T)}^{\circ} = 0$, soit

$$\Delta_r G^{\circ}_{(T)} = -RT \ln K^{\circ}_{(T)} \tag{2}$$

(1) et (2) donnent : $\Delta_r G_{(T,P)} = RT \ln\left(\frac{Q_r}{K_{(T)}^\circ}\right)$.

• L'évolution spontanée dans le sens direct d'une réaction se traduit par :

$$\Delta_r G_{(T,P)} < 0 \Longleftrightarrow RT \ln\left(\frac{Q_{r(T)}}{K_{(T)}^\circ}\right) < 0 \Longleftrightarrow Q_{r(T)} < K_{(T)}^\circ.$$

• L'évolution spontanée dans le sens indirect (ou inverse) d'une réaction se traduit par :

$$\Delta_r G_{(T,P)} > 0 \Longleftrightarrow RT \ln\left(\frac{Q_{r(T)}}{K_{(T)}^\circ}\right) > 0 \Longleftrightarrow Q_{r(T)} > K_{(T)}^\circ.$$

393

394 Chimie



Au contraire de $Q_{r(T)}$, $K^{\circ}_{(T)}$ ne contient pas d'information sur la composition du système. K° ne peut donc pas indiquer, à elle seule, le sens d'évolution d'un système physico-chimique.

5. Calcul d'une constante d'équilibre K°

5.1 Relation de Van't Hoff

D'après le paragraphe 3.3, on sait calculer $\Delta_r G^{\circ}_{(298K)}$, ce qui permet de calculer $K_{(298K)}$.

$$\Delta_r G_{(298)}^{\circ} = -RT \ln K_{(298)} \Longrightarrow K_{(298)} = \mathrm{e}^{-\Delta_r G_{(298)}^{\circ}/RT}.$$

La relation de Van't Hoff permet alors de calculer $K_{(T)}$ si l'on connaît $K_{(298)}$:

$$\frac{\mathrm{d}\ln(K_T)}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta_r H_T^\circ}{RT^2}$$

Après intégration :

$$\ln K_{(T)} - \ln K_{(298)} = \frac{1}{R} \int_{298}^{T} \frac{\Delta_r H_{(T)}^{\circ}}{T^2} \, \mathrm{d}T \approx \frac{\Delta_r H_{(298)}^{\circ}}{R} \int_{298}^{T} \frac{\mathrm{d}T}{T^2}$$

soit :

$$\ln\left(\frac{K_{(T)}}{K_{(298)}}\right) = \frac{\Delta_r H_{(298)}^\circ}{R} \left(-\frac{1}{T} + \frac{1}{298}\right)$$

ou encore :

$$K_{(T)} = K_{(298)} \exp\left(\frac{\Delta_r H_{(298)}^\circ}{R}\left(-\frac{1}{T}+\frac{1}{298}\right)\right).$$

Vérifiez la cohérence du résultat : si la réaction est endothermique (respectivement exothermique), une augmentation de la température T engendre une augmentation (respectivement une diminution) de K° .

Faites les exercices 2, 3 et 4.

5.2 Calcul par combinaison linéaire d'équations chimiques

Soit deux équations chimiques (R_1) et (R_2) , d'enthalpies standard de réaction $\Delta_r H_1^\circ$ et $\Delta_r H_2^\circ$ et de constantes d'équilibre K_1° et K_2° , la combinaison linéaire $(R) = \lambda (R_1) + \mu (R_2)$:

- > possède pour enthalpie standard de réaction : $\Delta_r H^\circ = \lambda \Delta_r H_1^\circ + \mu \Delta_r H_2^\circ$
- > possède pour constante d'équilibre : $K^{\circ} = \lambda K_1^{\circ} \times \mu K_2^{\circ}$.
 - Faites l'exercice 5.

5.3 Calcul d'une température d'inversion

À la température d'inversion, on a :

$$\Delta_r G^{\circ}(T_{inv}) = 0 \iff K^{\circ}(T_{inv}) = 1$$

Exemple : Soit une réaction dont l'enthalpie libre standard de réaction (en J.mol⁻¹) vaut : $\Delta_r G^{\circ}(T) = -198 \times 10^3 + 187 T$.

On a alors : $\Delta_r G^{\circ}(T_{inv}) = -198 \times 10^3 + 187 T_{inv} = 0 \iff T_{inv} = 1,06 \times 10^3 K.$

Si $T < T_{inv}, \Delta_r G^{\circ}(T) < 0 \iff K^{\circ}(T) > 1$: le sens direct est favorable.

Si $T > T_{inv}$, $\Delta_r G^{\circ}(T) > 0 \iff K^{\circ}(T) < 1$: le sens indirect est favorable.

6. État final d'un système : équilibre chimique ou transformation totale?

Etat final	Description
<u>EQUILIBRE</u> <u>CHIMIQUE</u>	A l'état final: les réactifs et les produits coexistent. Leurs quantités de matière n'évoluent plus dans le temps. Les processus direct et inverse ont lieu à des vitesses égales mais non nulles (leurs effets se compensent). Un système chimique cherche à atteindre l'équilibre chimique caractérisé par K°= $Q_{r,eq}$. La détermination de la composition du système dans l'état final est décrit dans Toute la MPSI en fiches : fiche N°2 de chimie: "La transformation chimique.
TRANSFORMATION	A l'état final, le réactif limitant a été totalement consommé.
TOTALE	Seules les phases condensées pures (solides purs et liquides purs) peuvent totalement disparaître d'un milieu.

Méthode

Voir **Toute la PCSI (ou MPSI) en fiches**, chimie fiche 2 (Transformation chimique), §6 (Détermination de la composition du système dans l'état final).

Faites l'exercice 6.

7. La variance d'un système à l'équilibre

7.1 Généralités

Objectif

Savoir déterminer le nombre de degrés de liberté d'un système.

Définition

La variance de l'ensemble des états d'équilibre d'un système physico-chimique en équilibre est le nombre nécessaire et suffisant de variables intensives indépendantes dont l'expérimentateur doit fixer la valeur pour atteindre un état d'équilibre quelconque de ce système physico-chimique.

• Calcul de la variance

Variance $v = (\mathbf{0} \text{ nombre de variables intensives nécessaires pour décrire le système})$

- (2) nombre de relations indépendantes entre variables intensives).

396 Chimie

7.2 Cas général (quantités de matière initiales quelconques)

Exemple de calcul de la variance du système à l'équilibre.

	$PCl_{5(g)}$	=	$PCl_{3(g)}$	+	$Cl_{2(g)}$
état initial	$n_{1,0}$		$n_{2,0}$		$n_{3,0}$
état final	$n_{1,0} - \xi$		$n_{2,0} + \xi$		$n_{3,0} + \xi$

O La description du système nécessite : $T, P, x_{PCl_{5(g)}}, x_{PCl_{3(g)}}, x_{Cl_{2(g)}}$. Il faut donc 5 paramètres intensifs pour décrire le système.

2 Les relations établies entre les paramètres intensifs à l'équilibre chimique sont :

➤ au sein de la phase gaz : $x_{PCl_{5(g)}} + x_{PCl_{3(g)}} + x_{Cl_{2(g)}} = 1$

> à l'équilibre chimique :
$$K^{\circ}(T) = Q_{r,eq} = K^{\circ}(T) = \frac{p_{\text{PCl}_3} p_{\text{Cl}_2}}{p^{\circ} p_{\text{Cl}_5}} = \frac{x_{\text{PCl}_3} x_{\text{Cl}_2}}{x_{\text{Cl}_5}} \times \frac{p}{p^{\circ}}$$

ce qui en fait une relation reliant $T, P, x_{PCl_{5(g)}}, x_{PCl_{3(g)}}, x_{Cl_{2(g)}}$

Il y a donc 2 relations établies entre les paramètres intensifs à l'équilibre chimique.

En conclusion, la variance vaut v = 5 - 2 = 3.

7.3 Cas particulier $n^{\circ}1$: système particularisé (nombre de degrés de liberté variable)

Cela signifie que l'obtention de l'équilibre s'est fait dans des conditions particulières, comme par exemple, dans l'état initial, il n'y a que du $PCl_{5(g)}$ dans l'enceinte. Soit le système :

	$PCl_{5(g)}$	=	$PCl_{3(g)}$	+	$Cl_{2(g)}$
état initial	$n_{1,0}$		0		0
état final	$n_{1,0} - \xi$		ξ		ξ

Le raisonnement est identique à ci-dessus sauf que, dans ces conditions : $n_{\text{PCl}_{3(q)}} = n_{\text{Cl}_{2(q)}}$

Or, $x_{\text{PCl}_{3(g)}} = \frac{n_{\text{PCl}_{3(g)}}}{n_{tot(g)}}$ et $x_{\text{Cl}_{2(g)}} = \frac{n_{\text{Cl}_{2(g)}}}{n_{tot(g)}}$ Donc $x_{\text{PCl}_{3(g)}} = x_{\text{Cl}_{2(g)}}$.

Cette nouvelle condition particulière provoque l'apparition d'une nouvelle relation entre les paramètres intensifs.

Il y a donc 2+1=3 relations établies entre les paramètres intensifs à l'équilibre chimique ; ce qui modifie la valeur de la variance : v = 5 - 3 = 2.

Le système ainsi particularisé n'a plus 3 mais 2 degrés de liberté.

Si, par ailleurs, la pression est déjà fixée, il ne reste plus qu'un seul degré de liberté.

7.4 Cas particulier n°2 : système particularisé (nombre de degrés de liberté fixé)

Une relation entre quantités de matière ne conduit pas forcément à l'apparition de relations entre variables intensives !

On examine un cas où l'équilibre est atteint à partir de l'état suivant : réactifs seuls (pas de produits dans l'état initial, introduits en proportions stœchiométriques, et dans l'atmosphère contenant du diazote $N_{2(g)}$. Soit le système :
$$CH_{4(g)} + \frac{3}{2}O_{2(g)} = CO_{2(g)} + 2H_2O_{(1)} \qquad N_{2(g)}$$

état initial n_0 $\frac{3}{2}n_0$ 0 0 $4 \times \frac{3}{2}n_0$
état final $n_0 - \xi$ $\frac{3}{2}(n_0 - \xi)$ ξ 2ξ $4 \times \frac{3}{2}n_0$

1 La description du système nécessite : $T, P, x_{CH_{4(g)}}, x_{O_{2(g)}}, x_{CO_{2(g)}}, x_{H_2O_{(g)}}, x_{N_{2(g)}}$. Il faut donc 7 paramètres intensifs pour décrire le système.

• Les relations établies entre les paramètres intensifs à l'équilibre chimique sont :

- ➤ au sein de la phase gaz : $x_{CH_{4(g)}} + x_{O2(g)} + x_{CO_{2(g)}} + x_{N_{2(g)}} = 1$;
- > au sein de la phase liquide pure d'eau : $x_{H_2O_{(1)}} = 1$;

> à l'équilibre chimique,
$$K^{\circ}(T) = Q_{r,eq} = \frac{x_{\text{CO}_{2(g)}}}{x_{\text{O}_{2(g)}}^{3/2} x_{\text{CH}_{4(g)}}} \times (\frac{p^{\circ}}{p})^{3/2}$$

> L'introduction des réactifs dans les proportions stœchiométriques implique : $x_{CH_{4(g)}} = \frac{2}{3} x_{O_{2(g)}}$.

Le fait qu'il n'y ait pas de produits dans l'état initial n'implique pas ici : $x_{CO_{2(g)}} = \frac{1}{2} x_{H_2O_{(l)}} \operatorname{car} CO_{2(g)} \operatorname{et} H_2O_{l)} \operatorname{appartiennent} a 2 \operatorname{phases} différentes.$

Il y a donc 4 relations établies entre les paramètres intensifs à l'équilibre chimique.

En conclusion, la variance vaut v = 7 - 4 = 3.

Le système particularisé a 3 degrés de liberté : l'expérimentateur peut, et doit, fixer 3 variables intensives indépendantes pour que l'équilibre chimique soit atteint dans les conditions particulières envisagées ici. Il peut, par exemple, choisir de fixer : T, P et $x_{N_{2(g)}}$.

8. Optimisation d'un procédé chimique

1. Point de départ : on est à l'équilibre chimique : $Q_r = K^{\circ}(T)$.

2. Puis on **applique une perturbation** par modification isolée d'un unique paramètre intensif, tous les autres restant à leur valeur lors de l'équilibre chimique initial.

• Si T est modifiée

Étudier l'effet de T sur $K^{\circ}(T)$ avec la relation de Van't Hoff.

> Si la réaction est exothermique, $K^{\circ}(T)$ diminue quand T augmente.

> Si la réaction est endothermique, $K^{\circ}(T)$ augmente quand T augmente.

On obtient une nouvelle valeur de K notée $K^{\circ'}$ à la nouvelle température T.

• Si un autre paramètre est modifié

T reste constante, donc $K^{\circ}(T)$ est inchangée et Q_r est modifiée.

> Si V est constante, exprimer les activités des gaz en faisant apparaître V :

$$a_{i,gaz} = \frac{p_i}{p^\circ} = \frac{n_i RT}{V} \frac{1}{p^\circ}$$

> Si P est constante, exprimer les activités des gaz en faisant apparaître P :

397

398 Chimie

$$a_{i,gaz} = \frac{p_i}{p^\circ} = \frac{x_i^g P}{p^\circ} = \frac{n_i^g}{n_{tot,g}} \times \frac{P}{p^\circ} \cdot$$

On obtient une nouvelle valeur de Q_r notée Q'_r .

3. Il faut enfin **comparer** $K^{\circ'}$ **et** Q'_r (sachant que l'un des deux n'a pas été modifié) pour trouver le sens d'évolution pour la relaxation du système.

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Détermination de grandeurs standard de réaction

On lit, dans les tables thermodynamiques, les valeurs des entropies molaires, à 298 K, des constituants suivants :

	$H_{2(g)}$	$O_{2(g)}$	$H_2O_{(g)}$	$H_2O_{2(aq)}$
$S_i^{\circ}(J.K^{-1}.mol^{-1})$	130,6	205,0	69,90	143,9

1. Déterminez les entropies standard de formation de $H_{2(g)}$, $H_2O_{(g)}$ et $H_2O_{2(aq)}$.

2. Calculez, de deux façons différentes, à 298 K, l'entropie de réaction de décomposition du péroxyde dans l'eau, modélisée par l'équation chimique :

$$2 H_2 O_{2(aq)} = O_{2(g)} + 2 H_2 O_{(g)}$$

3. La valeur de l'entropie standard serait-elle modifiée si on modélisait la transformation par l'équation :

$$H_2O_{2(aq)} = \frac{1}{2}O_{2(g)} + H_2O_{(g)}$$

Exercice 2 : Calcul d'un produit de solubilité

Calculez, à 298 K, le produit de solubilité K_s de Fe(OH)_{3(s)}.

Données : à 298 K, $\mu_{\text{Fe3}+(aq)}^{\circ} = -4,60 \text{ kJ.mol}^{-1}$; $\mu_{\text{HO}-(aq)}^{\circ} = -157 \text{ kJ.mol}^{-1}$ et $\mu_{\text{Fe}(\text{OH})3(s)}^{\circ} = -697 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

Exercice 3 : Formation de l'ammoniac

La synthèse de l'ammoniac est modélisée par l'équation de réaction :

$$N_{2(g)} + 3 H_{2(g)} = 2 NH_{3(g)}$$

1. Calculez l'entropie standard de réaction à 398 K. Commentez son signe.

2. Calculez l'enthalpie libre standard de réaction à 398 K.

3. Déduisez-en $K^{\circ}(298 \text{ K})$. Que pouvez-vous dire de cet équilibre ?

4. Déterminez la valeur de l'enthalpie standard de la réaction à 298 K et commentez son signe.

Données :

	N _{2(g)}	H _{2(g)}	NH _{3(g)}
$S_i^{\circ}(J.K^{-1}.mol^{-1})$	191, 3	130,6	192, 2
$\Delta_f G_i^{\circ}(\mathrm{J}.\mathrm{K}^{-1}.\mathrm{mol}^{-1})$	0	0	-16,47

Exercice 4 : Calcul d'une constante d'équilibre

Calculez, à 298 K, la constante d'équilibre K° de la réaction :

$$SO_{2(g)} + O_{2(g)} = 2SO_{3(g)}$$
.

Donnez une interprétation physique aux valeurs calculées.

Données à 298 K :

	$SO_{2(g)}$	O _{2(g)}	SO _{3(g)}
$\Delta_f H^{\circ}(\text{kJ.mol}^{-1})$	-297	0	-396
$S^{\circ}(J.K^{-1}.mol^{-1})$	248	205	257

Exercice 5 : Calcul d'une grandeur de réaction au moyen d'une combinaison linéaire Calculez la constante d'équilibre K_3° de la réaction de dosage de l'acide éthanoïque, par la soude.

Données :

$$H_3O^+ + HO^- = 2H_2O$$
 K_1^0
 $CH_3COOH + HO^- = CH_3COO^- + H_2O$ K_2^0

Exercice 6 : Détermination de la composition chimique d'un système dans l'état final

$$[CaCl_2, NH_3]_{(s)} = CaCl_{2(s)} + NH_{3(g)}$$
 $K^{\circ}(500K) = 1, 86.$

Déterminez la composition chimique de ce système dans l'état final (y a-t-il équilibre chimique ou transformation totale ?) pour un volume V = 10 L, à une température T = 500 K.

Revoir Toute la MPSI en fiches ; fiche 12 de la chimie : Les réactions d'oxydo-réduction.

1. Cinétique des réactions électrochimiques

1.1 Lien entre vitesse et intensité

Terminologie et conventions

Une réaction électrochimique correspond à un transfert d'électrons entre un oxydant et un réducteur, se faisant au contact d'une électrode métallique, suivant le schéma :

$$\alpha Ox + z e^{-1}$$

> Pour distinguer anode et cathode

Anode : l'électrode sur laquelle se produit une réaction d'oxydAtion ;

Cathode : celle sur laquelle se produit une réaction de réduCtion.

L'anode est l'électrode par laquelle entre le courant depuis l'extérieur dans la cellule électrochimique.



• Intensité et vitesse de réaction

On note v_{ox} la vitesse de la réaction directe et v_{red} celle de la réaction inverse. La vitesse de la réaction électrochimique est : $v = v_{ox} - v_{red}$.

Si, pendant la durée dt, l'avancement de la réaction électrochimique varie de $d\xi$, la charge électrique échangée dq traversant formellement l'interface électrode-solution (dans le sens

électrode \rightarrow solution) est : $dq = zF d\xi$ correspondant à l'intensité $i = \frac{dq}{dt} = \frac{zF d\xi}{dt}$

Par définition $v = \frac{d\xi}{dt}$, la vitesse de la réaction électrochimique au contact d'une électrode est donc proportionnelle à l'intensité traversant l'électrode :

$$i = z F (v_{ox} - v_{red})$$

Avec i : intensité du courant circulant dans l'électrode (en ampère A),

Z: nombre d'électrons mis en jeu,

F : constante de Faraday, $F = N_A.e$ soit F = 96485 C.mol⁻¹,

 v_{ox} : vitesse de la réaction directe d'oxydation (en mol.L⁻¹.s⁻¹),

 v_{red} : vitesse de la réaction inverse de réduction (en mol.L⁻¹.s⁻¹).

Remarque : pour obtenir des grandeurs intensives, en divisant par S, on obtient :

$$j = j_{ox} + j_{red} = z F (v_{ox} - v_{red})$$

avec $j = \frac{i}{S}$ la densité de courant et v_{ox} et v_{red} les vitesses surfaciques.

• Les facteurs cinétiques

 \succ Facteurs cinétiques communs à toute réaction hétérogène : température T, aire S de l'interface électrode-solution, concentrations des espèces dissoutes c_i .

➤ Facteurs cinétiques propres aux réactions électrochimiques : nature et différence de potentiel V entre l'électrode et la solution.

• Expression de l'intensité

L'intensité s'écrit sous la forme :

$$I = k(T, S, V).f(c_i).$$

Les courbes représentant, à T, S et c_i bloqués, les variations de I en fonction du potentiel E sont appelées **courbes intensité-potentiel**, en abrégé I(E), du couple Ox/Red pour l'électrode considérée.

1.2 Les différentes étapes de réaction à une électrode

La réaction électrochimique se produit au sein d'un milieu réactionnel hétérogène au voisinage de l'interface électrode – solution, qu'on peut schématiser par le modèle dit à double couche (proposé par Helmholtz) et mettant en jeu les trois processus suivants :

• Approche de l'électrode par les réactifs : **transfert de matière**, assuré au sein de la solution par trois phénomènes principaux :

 \succ la *diffusion* : déplacement des molécules ou des ions sou l'effet d'un gradient de concentration, qui satisfait en général à la loi de Fick.

la migration : déplacement des ions sous l'effet du champ électrique créé dans l'électrolyte ;

 \succ la *convection* : déplacement des molécules ou des ions sous l'effet d'une agitation mécanique de la solution.

② Transformations chimiques dans une zone entourant l'électrode baptisée « double couche », où règne un gradient de potentiel qui modifie la structure électronique des espèces (transferts de protons ou de ligands, réactions de surface et transferts d'électrons). C'est la *zone d'activation*.

③ Transfert de charge qui se produit à la surface de l'électrode puis éloignement des (ou de certains) produits de la réaction de l'électrode.

1.3 Les courbes intensité-potentiel

• Le montage à 3 électrodes

Le montage permettant le relevé d'une courbe i(E) est un montage à trois électrodes dont le schéma de principe est donné sur la figure ci-dessous :



> Un générateur extérieur $\mathbf{0}$ de force électromotrice variable U va imposer le passage d'un courant d'intensité *i* mesuré par un ampèremètre $\mathbf{2}$.

➤ La cellule d'électrolyse contient la solution électrolytique dans laquelle plongent 3 électrodes rapprochées au maximum pour éviter les chutes ohmiques.

 \succ L'électrode de travail (E.T) **4** est le siège d'une oxydation ou d'une réduction suivant le branchement du générateur.

À l'aide d'un voltmètre, on mesure son potentiel E par rapport à :

 \succ l'électrode de référence (E.Ref) **3** qui est une E.C.S par exemple (électrode au calomel saturé) dans laquelle le courant *i* ne circule pas.

 \succ La contre-électrode (C.E) **6** sert à fermer le circuit : le courant circule entre l'E.T **9** et la C.E **6** qui ne doit pas réagir avec les ions en présence (la C.E est le plus souvent en platine).

Conventions

En faisant varier la tension U délivrée par le générateur, on modifie le sens du courant qui circule dans le circuit. Cela nous amène à définir une convention pour le signe de l'intensité.



L'électrode peut être :	La réaction est :	L'intensité est comptée :
l'anode	une oxydation	positivement $i_a > 0$
la cathode	une réduction	négativement $i_c < 0$

Dans la réalité, le montage de principe montre vite ses limites ; il faut alors faire appel à un montage électrique particulier : le potentiostat.

2. Les courbes i - E obtenues : allure et interprétation

2.1 Exemple

Énoncé

Considérons le relevé expérimental suivant réalisé à 298 K, obtenu en plaçant dans un bécher jouant le rôle de la cellule :

> 50 mL d'une solution d'hexacyanoferrate III de potassium $K_3Fe(CN)_6$ à 0,05 mol.L⁻¹,

> 50 mL d'une solution d'hexacyanoferrate II de potassium K_4 Fe(CN)₆ à 0,05 mol.L⁻¹.

On utilise deux électrodes de platine comme électrode de travail et contre électrode, en opérant avec une agitation modérée.

On donne le potentiel standard : E (Fe(CN)₆³⁻/Fe(CN)₆⁴⁻ = 0, 40V et $E^{\circ}(E.C.S.) = 0, 25$ V.

• Calcul du potentiel à l'équilibre E_{eq}

$$Fe(CN)_{6}^{3-} + e^{-} \rightarrow Fe(CN)_{6}^{4-}$$

$$E_{eq} = E_{Fe(CN)_{6}^{3-}/Fe(CN)_{6}^{4-}} - E_{ECS} = E^{\circ} + \frac{0,06}{1} \log \frac{[Fe(CN)_{6}^{3-}]}{[Fe(CN)_{6}^{4-}]} - E_{ECS}$$

$$= 0,40 + 0,06 \log \frac{0,05}{0,05} - 0,25 = 0,15 \text{ V}.$$



Cet exemple permet de dégager les caractéristiques principales des courbes I(E) en analysant l'étape cinétiquement limitante.

2.2 Cas où le transfert de charge est l'étape cinétiquement limitante

On distingue les systèmes électrochimiques rapides et lents :

Système rapide	Système lent	
<i>i</i> <i>i</i> <i>i</i> <i>i</i> <i>i</i> <i>i</i> <i>i</i> <i>i</i>	i branche anodique red ox $E_{éq}$ E red ox F_{eq} E branche cathodique	
 Pour un système rapide, l'intensité croît (<i>i_a</i> > 0 et <i>i_c</i> < 0) rapidement dès que l'on s'écarte du potentiel d'équilibre <i>E_{eq}</i> donné par la formule de Nernst. On parle de vague d'oxydation pour <i>i</i> > 0 et de vague de réduction pour <i>i</i> < 0. 	 L'intensité ne s'annule pas pour une valeur bien définie du potentiel <i>E</i>. Pour une grande plage de <i>E</i>, l'intensité reste faible voire nulle (d'où l'appellation de système lent). Il n'est donc pas possible de retrouver l'expression du potentiel d'équilibre ni du potentiel standard du couple étudié à l'aide des résultats cinétiques. 	
 On peut considérer la courbe de polarisation comme la somme des intensités dues à deux phénomènes opposés : ox → red et red → ox. i = i_a + i_c E_{c,eq} est le potentiel à courant nul lorsque la solution ne contient que l'oxydant. E_{a,eq} est le potentiel à courant nul lorsque la solution ne contient que le réducteur. 	Les zones de potentiel où se produisent les réactions d'oxydation et de réduction sont disjointes. Il faut que le potentiel d'électrode E soit notablement différent de E_{eq} pour que l'intensité devienne significative. • On obtient un courant d'oxydation ano- dique détectable si $E - E_{eq} > \eta_A$ où η_A est appelée surtension anodique , $\eta_A > 0$ • On obtient un courant de réduction catho- dique détectable si $E - E_{eq} < \eta_C$ où η_C est appelée surtension cathodique , $\eta_C < 0$.	
 Les systèmes rapides correspondent à un faible changement de structure entre l'oxy-dant et le réducteur. Exemples : Fe³⁺/Fe²⁺ sur platine Ag⁺/Ag sur argent Zn²⁺/Zn sur zinc H⁺/H₂ sur platine platiné. 	 Les systèmes lents correspondent à une profonde modification de structure entre l'oxydant et le réducteur, mais aussi à des couples à faible changement de structure sur certaines électrodes. Exemples : H⁺/H₂ sur fer ou mercure O₂/H₂O sur toute électrode. 	

2.3 Cas où la vitesse de la réaction est limitée par la diffusion

• Intensité de diffusion

Si le transfert des charges est rapide, le processus cinétiquement limitant correspond au déplacement de matière par diffusion jusqu'à la zone voisine de l'électrode.

En effet, la réaction à l'électrode appauvrit la solution à son voisinage en la forme réagissante Ox ou Red.

Tant que les densités de courant sont faibles, la vitesse de diffusion est suffisante et ne limite donc pas la réaction.

Pour des densités de courant plus élevées, la concentration de l'espèce réagissante au niveau de l'électrode finit par quasiment s'annuler et la réaction est alors limitée par la diffusion. Le courant atteint une intensité limite, dite de diffusion ; d'où l'existence d'un **palier horizontal**.

Sur une anode : oxydation	Sur une cathode : réduction
$\beta Red \to \alpha Ox + z e^-$	$\alpha \ Ox + z \ e^- \to \beta \ Red$
Intensité du courant limite de diffusion ano-	Intensité du courant limite de diffusion ca-
dique :	thodique :
$i_{Da} = n F S k_{Dred} ([Red]_{sol} - [Red]_{electrode})$	$i_{Dc} = n F S k_{Dox} ([Ox]_{sol} - [Ox]_{electrode})$
$\approx n F S k_{Dred} [Red]_{sol}$	$\approx n F S k_{Dox} [Ox]_{sol}$
Densité de courant limite de diffusion ano-	Densité de courant limite de diffusion ca-
dique :	thodique :
$j_{Da} = \frac{i_{Da}}{S} \approx n F k_{Dred} [Red]_{sol}$	$j_{Dc} = \frac{i_{Dc}}{S} \approx n F k_{Dox} [Ox]_{sol}$

Présence d'un seul couple rédox à l'électrode

L'intensité du courant limite de diffusion i_D est donc proportionnelle à la concentration du réactif C, à sa mobilité via le coefficient de diffusion k_D , au nombre d'électrons échangés n, et à la surface immergée S de l'électrode (avec la constante de Faraday F = 96485 C.mol⁻¹).



On note l'absence de paliers de diffusion :

> pour les couples du solvant, toujours en grand excès,

> pour l'oxydation des espèces solides, seules dans leurs phases (en particulier les métaux).

Par exemple, pour le couple $Ag^+_{(aq)}/Ag_{(s)}$

la réduction : $Ag^+ + e^- \rightarrow Ag_{(s)}$ présente un palier de diffusion ;

l'oxydation : $Ag_{(s)} \rightarrow Ag^+ + e^-$ n'a pas de palier de diffusion.



• Présence de plusieurs couples rédox à l'électrode : vagues successives

Si la solution contient plusieurs espèces susceptibles d'être oxydées ou réduites, et que le potentiel imposé à l'électrode permette leur transformation, le courant qui traverse l'électrode est la somme des courants correspondants à chacune des réactions.



Lorsque l'écart entre les courbes est suffisant pour que la première courbe ait atteint son palier de diffusion, on observe des sauts de courants successifs, la hauteur de chaque palier étant proportionnelle au nombre d'électrons échangés.



2.4 Limitation par le solvant : le mur du solvant

• Le montage à trois électrodes permet de tracer la courbe I = f(E) relative à l'eau solvant. L'eau, amphotère rédox, peut être réduite ou oxydée suivant deux couples différents :

Couple et potentiel d'équilibre	Réaction su- bie par l'eau	Bilan de la réaction	Surtension dépendan- te de l'électrode uti- lisée
$O_{2(g)}/H_2O_{(l)}$ = 1,23 - 0,06 pH	Oxydation anodique	$2 \text{ H}_2\text{O}_{(l)} \rightarrow \text{O}_{2(g)} + 4e^- + 4 \text{ H}^+_{(aq)}$	Sur Pt, $\eta_a = +0,60$ V Sur Ti, $\eta_a = +1,50$ V

$H_{(aq)}^{+}/H_{2(g)}$ $H_2O_{(l)}/H_{2(g)}$ $E_{a,eq}$ = 0,00 - 0,06 pH	Réduction cathodique	$H_{(aq)}^+ + 2e^- \rightarrow H_{2(g)}$ Réduction rapide avec l'habituel palier de diffusion. 2 H ₂ O _(l) + 2e ⁻ → H _{2(g)} + 2 HO ⁻ _(aq) H ₂ O _(l) en excès : pas de palier de diffusion.	Sur Pt, $\eta_c = -0,05 \text{ V}$ Sur Fe, $\eta_c = -0,30 \text{ V}$ Sur Hg, $\eta_c = -0,60 \text{ V}$
---	----------------------	--	--

Commentaires

➤ sur l'oxydation anodique

 η_a élargit fortement le domaine du solvant du côté des potentiels élevés. De nombreuses solutions oxydantes sont donc apparemment stables dans l'eau.

sur la réduction cathodique

Les réactions sont plus rapides en milieu ionisé qu'en milieu non chargé : le domaine d'électroactivité de l'eau est donc particulièrement large en milieu neutre.

• Domaine d'électro-activité de l'eau

Le domaine dans lequel les réactions rédox se déroulent sans que le solvant « eau » intervienne est appelé **domaine d'électro-activité** de l'eau, typiquement de largeur 2 V.

Toutes les espèces qui ont leur courbe i - E avant la courbe de réduction de l'eau ou après la courbe d'oxydation de l'eau sont électro-inertes car la diffusion de l'eau vers l'électrode n'est jamais l'étape limitante. Le courant peut alors prendre des valeurs importantes : ce sont les **murs du solvant**.



La largeur du domaine d'électroactivité de l'eau dépend de la nature des électrodes utilisées. Il est le plus étroit avec des électrodes de platine.



Domaines d'électro-activité de l'eau pour différentes électrodes (étroit avec le platine Pt, large avec le mercure Hg)

3. Utilisation des courbes intensité-potentiel

3.1 Notion de potentiel mixte

Soit deux couples rédox, l'un noté (1) subissant une réduction à la cathode, l'autre, noté (2)

subissant une oxydation à l'anode.

La vitesse des échanges électroniques entre ces deux couples rédox se visualise à partir des courbes I = f(E), en écrivant (principe de conservation de la charge) :

$$i_{anode_2} = -i_{cathode_1}$$

Le potentiel qui assure cette relation entre les courants est appelé **potentiel mixte**, noté E_m car il met en jeu les deux couples rédox.

3.2 Les différentes conclusions suivant les positions respectives des courbes i = f(E) des deux couples rédox.

Voici les 4 cas qui peuvent se présenter lorsqu'on met en présence un oxydant Ox1 et un réducteur Red2. Ces courbes décrivent la situation instantanée du système : elles se modifient au fur et à mesure que le système évolue.



Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Surtensions cathodiques

On donne à pH=14 les courbes de réduction cathodiques ($i_c < 0$) de l'eau H₂O_(l) en dihydrogène H_{2(g)} sur le fer et le mercure. Le potentiel standard du couple H⁺/H₂ = 0,00V.

Déterminez les surtensions cathodiques de H2 sur ces deux métaux.

$$\begin{array}{c|c} -2,2 & -1,2 & i \\ \hline \\ \hline \\ H_2 & - \begin{pmatrix} H_2 & & \\ H_2 0 \\ (Hg) & (Fe) \end{pmatrix} & E(V) \end{array}$$

Exercice 2 : Savoir lire et interpréter des courbes i = f(E)

On donne les courbes intensité-potentiel suivantes :



courbe du système $Ag^+/Ag_{(s)}$, système rapide sur électrode d'argent, avec $[Ag^+] = 1, 0 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ courbe de réduction sur platine d'une solution d'ions iodates IO_3^- , d'abord en diode I_2 puis en iodure I⁻.

On donne par ailleurs les potentiels standards des couples impliqués :

$$E^{\circ}(Ag^+/Ag) = 0,80 \text{ V}$$
; $E^{\circ}(I_2/I^-) = 0,54 \text{ V}$; $E^{\circ}(IO_3^-/I_2) = 1,19 \text{ V}.$

1. Pour le système Ag⁺/Ag de la courbe **1** :

a) Vérifiez que le système $Ag^+/Ag_{(s)}$ est un système rapide sur électrode d'argent.

b) Exprimez le courant de diffusion cathodique i_{DC} , faites-le apparaître sur la figure 1, puis expliquez l'absence de palier de diffusion anodique.

2. Figure @ :

a) Après avoir écrit les 1/2 équations rédox, donnez les équations des 2 vagues de réduction. Précisez s'il s'agit de systèmes lents ou rapides en justifiant.

Pourquoi les vagues de réduction ont-elles des hauteurs différentes ?

b) Prévoyez la courbe d'oxydation d'une solution d'ions iodure I⁻ sur électrode de platine.

Revoir **Toute la MPSI en fiches** ; chimie, fiche 12 : L'oxydo-réduction ainsi que la fiche 16 : Les diagrammes E-pH.

La corrosion désigne l'ensemble des phénomènes par lesquels un métal ou un alliage métallique tend à s'oxyder sous l'influence de réactifs gazeux ou en solution. La corrosion coûte cher et pose de redoutables problèmes : elle induit de graves dommages, cause de nombreux accidents et n'est pas sans conséquences écologiques notables.

1. Nature de la corrosion

1.1 Définition

Action d'oxydation subie par un métal M de la part d'oxydants Ox issus de son environnement.

 $M + Ox \rightarrow M^{n+} + Red^{n-}$

1.2 Corrosion sèche et corrosion humide

Corrosion sèche

La corrosion est dite sèche quand l'oxydant est en phase gaz. Exemples : $O_{2(g)}$ ou $Cl_{2(g)}$

• Corrosion humide (étudiée dans cette fiche)

La corrosion est dite humide quand l'oxydant est en phase aqueuse.

L'atmosphère contenant une certaine quantité de vapeur d'eau va être à l'origine d'un dépôt d'une mince pellicule d'eau sur le métal.

Exemples : $H_2O_{(l)}$, $H^+_{(aq)}$, $O_{2(aq)}$

Outils d'étude :

- diagrammes potentiel-pH (aspect thermodynamique) : voir fiche MPSI n° 16,
- courbes courant-potentiel (aspect cinétique) : voir fiche précédente MP n° 3.

1.3 Facteurs aggravants de la corrosion

La corrosion dépend du taux d'humidité de l'air, de la concentration de gaz oxydants dans l'air comme principalement le dioxygène $O_{2(g)}$. La corrosion va être aussi favorisée par la présence d'ions en solution aqueuse comme les ions H⁺ issus des acides ou les ions Na⁺ et Cl⁻ fortement présents en milieu marin.

412 Chimie

1.4 Corrosion uniforme et corrosion différentielle

	Corrosion uniforme	Corrosion différentielle
Définition	Lorsque toute la surface du métal est attaquée de la même façon et qu'il n'y pas de circulations d'électrons au sein du métal.	Lorsque l'attaque s'exerce de façon différente en deux zones de la sur- face du métal. Il y a donc circu- lation d'électrons au sein du métal pour relier ces 2 zones.
Type de corrosion	Corrosion chimique	Corrosion électrochimique (trans- fert d'électrons via le métal) : exis- tence de micropiles de corrosion.
Ce qui suppose :	Surface du métal homogène (pas d'hétérogénéités) et solution à son contact homogène	Hétérogénéité à la surface du métal ou au sein du milieu.
Exemple :	Tige de fer pur totalement im- mergée dans de l'eau acidulée par- faitement agitée.	Canalisation en cuivre amenant l'eau au contact d'un radiateur en fer : le fer rouille au niveau de la jonction.
Schéma	Solution Solution	

2. Points de repère pour l'étude thermodynamique et cinétique

2.1 Étude thermodynamique : diagramme E-pH de corrosion

Conventions de tracé et domaines à distinguer

> Seuil d'effectivité de la corrosion humide : le métal a été dissous de telle sorte que la concentration en solution de ses formes dissoutes atteint 10^{-6} mol.L⁻¹.

> Convention de tracé : $C_0 = 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$.

Pour les espèce solides : les phases envisagées sont les plus stables (souvent les oxydes au lieu des hydroxydes).

Dans l'étude de la corrosion, on identifie trois types de domaines :

Les différents domaines à distinguer		Attaque du métal?	
Domaine d'immu- nité	Stabilité thermodynamique du métal.	Thermodynamiquement impossible car le métal est l'espèce stable dans ce domaine	
Domaine de corro- sion	Oxydation du métal	Thermodynamiquement possible et conduit à des espèces solubles ou perméables, ce qui permet la pour- suite de l'oxydation du métal	
Domaine de passi- vité	Domaine de l'oxyde, le protégeant en surface et évitant une attaque en profondeur	Thermodynamiquement possible, mais l'oxyde formé constitue une couche imperméable qui rend une attaque ultérieure infiniment lente	

En fonction de la position du point figuratif de l'état du système, il sera possible de dire si le métal est corrodé ou non.

• Diagramme E-pH de corrosion du zinc

Espèces choisies : Zn^{2+} , $Zn(OH)_4^{2-}$, $Zn(OH)_{2(s)}$ au n.o +II, $Zn_{(s)}$ au n.o 0

Étude permettant de tracer le diagramme E-pH de corrosion du zinc (méthode décrite dans la fiche 16, chimie, de MPSI)

Faites l'exercice 1.

Diagramme E-pH obtenu :



Lecture du diagramme E-pH du fer sur lequel est superposé le diagramme de l'eau (droites en pointillés)

 La position de la droite (1) de l'eau montre que le Zn métal ne peut pas coexister avec une phase aqueuse sans être oxydé.

414 Chimie

- Cependant, l'expérience montre que dans la zone d'existence de $Zn(OH)_{2(S)}$, le métal semble stable. Il a en fait subi une corrosion uniforme qui l'a recouvert d'une couche quasi invisible de Zn(OH)_{2(S)}. Cette couche, adhérente et imperméable, empêche tout contact ultérieur entre le métal et la solution, ce qui interdit la poursuite de l'attaque en profondeur. on dit que le zinc est passivé par la couche d' hydroxyde.

Diagramme E-pH de corrosion du fer

 \succ Espèces choisies : Fe³⁺, Fe₂O_{3(s)} plus stable que Fe(OH)_{3(s)} au n.o +III Fe^{2+} au n.o +II (absence de FeO qui n'existe qu'au-delà de 570°C). Fe(s) au n.o 0

Étude permettant de tracer le diagramme E-pH de corrosion du zinc (méthode décrite dans la fiche 16, chimie, de MPSI)



Faites l'exercice 2.

Diagramme E-pH obtenu : >



Lecture du diagramme E-pH du fer sur lequel est superposé le diagramme de l'eau (droites en pointillés)

La position de la droite de l'eau montre que le Fe métal ne peut pas coexister avec une phase aqueuse sans être oxydé.

Sur le diagramme apparaissent les différents domaines :

- corrosion : en milieu acide, le fer est oxydé en Fe²⁺ puis éventuellement en Fe³⁺. (En milieu très basique, il se forme également l'ion ferrite $HFeO_2^-$).

- immunité : celle-ci s'étend dans tout le domaine de stabilité du métal.

- passivation : celle-ci résulte de la formation d'une couche d'oxyde ferrique Fe₂O₃.

Comparaison zinc-fer

En comparant rapidement les deux diagrammes, le zinc, plus réducteur que le fer, possède un domaine de corrosion bien plus vaste. Pourtant, le zinc est bien plus stable vis-à-vis de la corrosion atmosphérique que le fer. L'explication se situe au niveau de l'étanchéité de la couche de passivation à l'eau et au dioxygène qui est un facteur clé dans le ralentissement du phénomène de corrosion :

> l'oxyde ferrique Fe₂O₃ (la rouille) est non adhérent et poreux : elle ne forme pas une couche imperméable à la surface, la corrosion continue donc en profondeur et consomme la totalité du métal : le fer rouille jusqu'au bout.

➤ Au contraire, le solide formé en surface du zinc est suffisamment étanche pour considérablement ralentir la corrosion du métal en profondeur. Le zinc est utilisé pour couvrir les toits dans de nombreuses villes, comme Paris.

🕲 Le zinc peut donc être utilisé pour la protection du fer.

2.2 Étude cinétique : diagramme i - E de corrosion

Potentiel de corrosion

Un métal M est corrodé (selon $M_{(s)} \rightarrow M^{n+} + ne^-$ à l'anode) si on se trouve dans les cas ① et ② de la fiche 3, paragraphe 3-2 : réaction spontanée.

➤ L'anode et la cathode sont court-circuitées (donc en série) : $i_A = -i_c = i_{corr}$.

> Les deux couples adoptent un potentiel commun (car anode et cathode reliées) : le potentiel mixte, ou potentiel de corrosion, noté E_m .

► La densité du courant de corrosion est : $j_{corr} = \frac{i_{corr}}{S}$ avec :

 j_{corr} : la densité de courant de corrosion (en A.m⁻²)

 $i_a = -i_c = i_{corr}$: l'intensité du courant de corrosion (en A)

S : surface de l'électrode (en m²)

Exemple : Lame de plomb dans une eau aérée acide

>> l'oxydation du plomb par les ions H⁺ est favorable sur le plan thermodynamique $(E_{Pb_2+/Pb}^{\circ} < E_{H^+/H_2}^{\circ})$, mais bloquée sur le plan cinétique $(i_{corr} \approx 0)$.

➤ en revanche, le dioxygène dissous peut corroder le plomb : $i_{corr} = i_a = -i_c \neq 0$ qu'on peut lire sur l'axe des ordonnées.



Plomb non corrodé par les ions H⁺.



Vitesse de corrosion

L'intensité I varie exponentiellement avec la tension E selon la loi de Tafel :

$$E = a + b \log |I|$$

On obtient le diagramme de Tafel en représentant : la droite (1) : oxydation anodique, $E = a + b \log(i_A)$ qui a une pente positive ; la droite (2) : réduction cathodique, $E = a' + b' \log(|i_C|)$ $Log i_{corr}$ log [i]

qui a une pente négative.

Les deux droites de Tafel se coupent en un point M de coordonnées : $M(\log i_{corr}, E_M)$. On en déduit la vitesse de corrosion d'après la formule vue au paragraphe 1 de la fiche 3 précédente :

$$i_{corr} = z F v_{corr}$$

3. Étude de la corrosion différentielle

沟 Méthode d'étude en deux temps :

recenser toutes les sources d'hétérogénéité pouvant provoquer une corrosion différentielle;

les étudier en modélisant le système par une micro-pile.

3.1 Contact entre deux métaux différents

La mise en contact de deux métaux différents, en présence d'une solution aqueuse (aérée ou non), accélère la corrosion du métal le moins noble (c'est-à-dire le plus réducteur dans les conditions de l'expérience, celui qui possède le potentiel standard E° le plus petit).

Exemple : réaction de corrosion différentielle au contact fer / cuivre

Micro-pile de modélisation = une lame de fer et une lame de cuivre, mises en contact électrique, plongées dans une solution aqueuse non aérée.



Prévisions thermodynamiques

Anode (électrode de fer) : oxydation : $Fe_{(s)} = Fe^{2+} + 2e^{-}$ Cathode (électrode de cuivre) : $2 H_2O + 2e = H_{2(g)} + 2 HO^{-}$ Bilan : $Fe_{(s)} + 2 H_2O \rightarrow Fe^{2+} + H_{2(g)} + 2 HO^{-}$

Aspect cinétique



3.2 Hétérogénéité de concentration : aération différentielle

Lorsqu'un métal plonge dans une solution présentant des différences de concentration d'éléments électroactifs, il y a corrosion :

- dans la zone la plus diluée;
- > dans la zone la moins aérée (où la concentration en $O_{2(dissous)}$ est la plus faible).

Étude : plaque de fer soumise à une solution d'aération non homogène

> Micro-pile de modélisation = deux lames de fer identiques, mises en contact électrique, plongées dans deux compartiments de concentration différente en $O_{2(dissout)}$.



Calcul des potentiels de chaque demi-pile

•
$$E_{O_2/H_2O} = E_{O_2/H_2O}^{\circ} + \frac{0.06}{2} \times \log \frac{p_{O_2}.(C^{\circ})^4}{[HO^-]^4.p^{\circ}} = E_{O_2/H_2O}^{\circ} - 0.06 \text{ pH} + \frac{0.06}{4} \times \log \frac{p_{O_2}}{p^{\circ}}$$

À pH=7 et dans le compartiment **2** (aéré) : $p_{O_2} = \frac{1}{5}P_{atm} = 0, 2 \text{ bar} \Longrightarrow E_{O_2/H_2O} = 1, 23 - 0, 06 \times 7 + \frac{0, 06}{4} \times \log \frac{0, 2}{1} = 0, 80 \text{ V}.$ À pH=7 et dans le compartiment **0** (désaéré) : $p_{O_2} \ll 0, 2 \text{ bar, donc } E_{O_2/H_2O} = 0, 80 \text{ V}.$

• $E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}} = E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^{\circ} + \frac{0,06}{4} \times \log \frac{[\text{Fe}^{2+}]}{C^{\circ}}$ · Par convention, $[\text{Fe}^{2+}] = 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$, donc : $E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}} = -0,44 + \frac{0,06}{2} \times \log \frac{10^{-6}}{1} = -0,62 \text{ V}.$

Prévision thermodynamique

Anode (compartiment **1**) : oxydation : $(Fe_{(s)} = Fe^{2+} + 2e^{-}) \times 2$ Cathode (compartiment **2**) : réduction : $O_2 + 2 H_2O + 4 e^{-} = 4 HO^{-}$ Équation bilan : $2 Fe_{(s)} + O_2 + 2 H_2O \rightarrow 2 Fe^{2+} + 4 HO^{-}$

Aspect cinétique



≻ Remarque

 $E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}} = E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^{\circ} + \frac{0,06}{1} \times \log \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} = 0,77 \text{ V}.$

Comme le montre la courbe i(E) ci-dessus, il n'existe pas de potentiel mixte : le fer n'est oxydé qu'en Fe²⁺ et pas en Fe³⁺ pour des raisons cinétiques.

Faites les exercices 3 (expérience de la goutte d'Evans) et 4 (quelques exemples pratiques).

3.3 État de surface du métal

Toutes les causes d'hétérogénéité du système interviennent pour favoriser la corrosion.

Même si un métal est unique, il peut donner des piles de corrosion :
➤ si c'est un alliage, ses différents constituants jouent le rôle d'électrodes.
➤ s'il a des défauts, des accidents de surface (piqûres, grains, etc.)
➤ s'il subit des contraintes différentes (pression, température).

Lorsque certaines zones du métal ont été soumises à des contraintes mécaniques importantes, elles deviennent plus sensibles à la corrosion. Au niveau de ces zones, on constate une désorganisation de la structure cristallographique.

Exemple

On place un clou usagé dans une solution contenant de la phénolphtaléine et d'agent précipitant des ions Fe²⁺ sous forme d'un solide bleu.

- Les zones autour de la pointe et de la tête du clou (= zones d'écrouissage) prennent une couleur bleue : apparition d'ions Fe^{2+} par oxydation du métal.

Le milieu du clou est rose, signe de l'apparition des ions HO⁻ (phénolphtaléine en milieu basique) : réduction du dioxygène dissous ou de l'eau.

4. Protection contre la corrosion

Il existe deux grandes techniques :

- utilisation de dépôts protecteurs à la surface du métal à protéger (4-1 et 4-2);

- modification du potentiel du métal à protéger (4-3).

4.1 Protection physique par des revêtements non métalliques

Il s'agit d'isoler le métal à protéger du milieu corrosif par un dépôt protecteur étanche et adhérent : peintures (ex) Pb_3O_4), vernis, polymères (grillage plastifié), goudrons, etc. Application : protection des ouvrages métalliques (pont, Tour Eiffel).

Suivant l'épaisseur du dépôt, on distingue :

• Dépôt épais ($e > 200 \,\mu$ m) Avantage : meilleure protection Inconvénients : modification des propriétés mécaniques du métal, risque d'écaillage.

```
    Dépôt fin (e < 200 μm)</li>
    Avantage : conservent les propriétés mécaniques du métal
Inconvénients : métal facilement mis à nu.
```

4.2 Métallisation

• Les deux stratégies envisageables en fonction de la nature du métal M utilisé

• Dépôt en surface d'un métal M moins réducteur que celui à protéger (le fer)

$$E^{\circ}_{M^{n+}/M} > E^{\circ}(\mathrm{Fe}^{2+}/\mathrm{Fe})$$

Exemples de M : chrome (chromage), étain (étamage), nickel (nickelage).

M étant peu réducteur, il est plus résistant à la corrosion. Il s'agit d'une protection de type 4-1 (dépôt) qui perdure tant que le revêtement est intact : **protection passive**.

En cas de perforation (de rayure), le dépôt de M reste intact. Le fer s'oxyde.



Obépôt en surface d'un métal M plus réducteur que celui à protéger (le fer)

$$E^{\circ}_{M^{n+}/M} < E^{\circ}(\mathrm{Fe}^{2+}/\mathrm{Fe})$$

Exemples de M : zinc, magnésium

M plus réducteur qui ne doit pas s'oxyder, ce qui suppose une passivation de M. Avantage : **protection active**.

En cas de perforation (de rayure) le dépôt de M s'oxyde à la place du fer qui reste intact. Les produits d'oxydation solides passivent le zinc et colmatent la fissure.



• Les procédés de métallisation

➤ Technique de galvanisation

L'objet en métal à protéger est plongé dans un bain de zinc fondu à 450 °C. On obtient ainsi un dépôt (alliage Zn-Fe) entre 30 et 100 μ m d'épaisseur.

Application : Protection de la carrosserie des voitures.

≻ Électrozingage

Réalisation du dépôt par électrolyse d'une solution de sulfate de zinc (Zn^{2+}, SO_4^{2-}) sur cathode de fer.

Cathode : métal à protéger (comme le fer) siège de la réaction : $Zn^{2+} + 2e^- = Zn_{(s)}$. Anode : lame de zinc. On obtient ainsi un dépôt de 10 µm d'épaisseur.

4.3 Protection électrochimique

• Protection électrochimique par courant imposé (liaison avec une source de tension)

Courbe i-E d'un acier ordinaire (alliage Fe-C), électrolyte : H₂SO₄ à 1,0 mol.L⁻¹



➤ Pour $E < E_1$: immunité du fer.

Pour $E_1 < E < F$: corrosion du fer. Le potentiel F où le courant s'annule est dit potentiel de Flade. Il correspond à la surface du fer totalement recouverte par un film d'oxyde Fe₂O₃.

≻ Pour F < E : passivation du fer.

On peut donc protéger une lame de métal en lui imposant un potentiel de travail pour l'amener :

soit dans son domaine d'immunité = protection cathodique,

soit dans son domaine de passivité = protection anodique.

Type de protection	Cathodique	Anodique
Pôle du générateur auquel la pièce à protéger est reliée	Pôle négatif (pôle positif relié à une cathode inerte)	Pôle positif Des électrons doivent être fabriqués à cette électrode pour alimenter le pôle + du générateur (pôle négatif relié à une cathode inerte)
La pièce à protéger se comporte en :	Cathode	Anode
Oxydation de la pièce à protéger ?	Aucun risque d'oxydation Le point de fonctionnement se trouve dans le domaine d'immunité du métal.	La pièce s'oxyde. MAIS on adapte les conditions (E, pH) de manière à ce que le point de fonctionne- ment se trouve dans le domaine de passivation du métal \implies Le dépôt d'oxyde protège la surface du métal.
Inconvénients	La pièce à protéger est le siège d'une réduction, souvent $H_2O \rightarrow H_{2(g)}$, et le gaz formé peut s'insérer dans la structure du métal et le fragiliser.	 Technique coûteuse en énergie (le générateur fonctionne en perma- nence). La couche d'oxyde ne doit pas su- bir de rayure ou d'altération.
Applications	 les ouvrages enterrés (canalisations diverses, pipelines ou sealines); les ouvrages immergés (carènes de navires, docks flottants). 	

• Protection électrochimique par anode sacrificielle

≻ Principe

On relie la pièce à un métal plus réducteur comme le zinc (magnésium ou aluminium) qui joue le rôle d'anode dans la micro-pile en court-circuit créée (voir contact de deux métaux au paragraphe 4-1).

422 Chimie

Le zinc s'oxyde à la place du métal à protéger et est consommé progressivement : d'où le nom d'anode sacrificielle.

> Application

Technique très utilisée pour protéger de grandes surfaces métalliques qu'on ne peut pas recouvrir d'un dépôt protecteur (Exemple : coques de bateaux)

Inconvénient

Il faut par contre changer régulièrement la pièce métallique de zinc, ce qui a un coût.

Les courbes i-E permettent de comprendre le principe de l'anode sacrificielle en zinc :



Non corrosion du fer en présence de zinc :

- Anode (électrode de zinc) : oxydation : $Zn_{(s)} = Zn^{2+} + 2e^{-1}$

- Cathode (électrode de fer) : $2 H_2O + 2e^- = H_{2(g)} + 2 HO^-$

Bilan : $Zn_{(s)} + 2 H_2O \rightarrow Zn^{2+} + H_{2(g)} + 2 HO^-$

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Diagramme E-pH de corrosion du zinc

Faites l'étude préalable nécessaire au tracé du diagramme E-pH du zinc donné dans le paragraphe 2-1-b).

Espèces choisies : Zn^{2+} ; $Zn(OH)_4^{2-}$; $Zn(OH)_{2(s)}$ au n.o +II ; $Zn_{(s)}$ au n.o 0 Constantes thermodynamiques utiles : $E_{Zn^{2+}/Zn}^{\circ} = -0,76V$; $pKs_{Zn(OH)_2} = 16$; $\log \beta_{4 Zn(OH)_4^{2-}} = 15, 5$. Convention de tracé : $[Zn^{2+}] = [Zn(OH)_4^{2-}] = 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$.

Exercice 2 : Diagramme E-pH de corrosion du fer

Faites l'étude préalable nécessaire au tracé du diagramme E-pH du fer donné dans le paragraphe 2-1.

Constantes thermodynamiques : $E_{Fe^{2+}/Fe}^{\circ} = -0,44V$; $E_{Fe^{3+}/Fe^{2+}}^{\circ} = 0,77V$; pKs $_{Fe_2O_3} = 43$. Convention de tracé : $[Fe^{2+}] = [Fe^{3+}] = 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$.

Exercice 3 : Mise en évidence de la corrosion par aération différentielle : expérience de la goutte d'Evans

Lorsqu'on dépose une goutte d'eau sur une plaque de fer préalablement décapé, on observe un dépôt de rouille (hydroxyde de fer III) à la périphérie et une altération de la plaque au centre de la goutte.

Interprétez ce phénomène en distinguant les réactions électrochimiques et en présentant les courbes i = f(E).

Exercice 4 : Quelques exemples pratiques de corrosion par aération différentielle

Expliquez les phénomènes suivants :

1. Cas 1 : une barre enfouie dans le sol et recouverte d'eau de mer : celle-ci est altérée en profondeur et quasiment pas à la surface.

2. Cas 2 : les piles géologiques : cas d'une canalisation en fer enterrée dans un sol traversant des endroits différents : elle est corrodée dans la zone argileuse (très faiblement perméable à O_2) et quasiment intacte dans la zone sableuse (fortement perméable à O_2).

Exercice 5 : Corrosion de l'aluminium

1. On plonge une lame d'aluminium fraîchement décapée dans une solution de chlorure d'hydrogène HCl de concentration molaire $0, 1 \text{ mol.L}^{-1}$. On observe un faible dégagement gazeux à la surface de l'aluminium.

Expliquez cette observation en proposant un tracé des courbes intensité-potentiel des couples concernés et écrivez l'équation de la réaction chimique qui s'effectue.

2. On touche la lame d'aluminium avec un clou en fer. On observe alors un fort dégagement gazeux sur le fer et la disparition rapide de la lame d'aluminium.

Mêmes questions que précédemment.

3. On plonge un fil d'aluminium décapé dans une solution d'hydroxyde de sodium NaOH de concentration molaire 1 mol. L^{-1} . On observe un fort dégagement gazeux à la surface de l'aluminium et la disparition de l'aluminium est rapide.

Expliquez l'observation à l'aide du diagramme potentiel-pH joint toujours en proposant l'allure des courbes intensité-potentiel.

Écrivez l'équation de la réaction chimique correspondante.

Données

Potentiels standard : $E^{\circ}(Al^{3+}/Al) = -1,66 \text{ V}$; $E^{\circ}(Fe^{2+}/Fe) = -0,44 \text{ V}$, $E^{\circ}(H^{+}/H_{2}) = 0,00 \text{ V}$; $E^{\circ}(AlO_{2}^{-}/Al) = -2,35 \text{ V}$. Diagramme potentiel-pH de l'aluminium :



Exercice 6 : Corrosion d'une plaque de zinc

Une plaque de zinc subit une corrosion uniforme d'un milieu acide. La densité de courant de corrosion est de $j_{cor} = 0, 12 \text{ mA.cm}^{-2}$.

1. Exprimez la vitesse d'usure du zinc définie comme l'épaisseur de métal corrodée par unité de temps, notée v_{max} en fonction de j_{cor} , de la masse molaire du zinc M_{Zn} , de la masse volumique du zinc μ_{Zn} et du Faraday F.

2. Calculez v_{max} en μ m par an dans ce milieu.

On donne $M_{Zn} = 65, 4 \text{ g.mol}^{-1}$; $\mu_{Zn} = 7, 1 \text{ g.cm}^{-3}$ et $F = 96500 \text{ C.mol}^{-1}$.

3. On vous propose pour la réalisation de la clôture de votre jardin des poteaux en fer recouverts de nickel ou des poteaux en fer recouverts de zinc. Lesquels choisissez-vous ? On justifiera la réponse.

On donne :

 $E_1^\circ = -0,44$ V pour le couple Fe²⁺/Fe_(s) ; $E_2^\circ = -0,25$ V pour le couple Ni²⁺/Ni_(s) et $E_3^\circ = -0,76$ V pour le couple Zn²⁺/Zn_(s).

Revoir **Toute la MPSI en fiches** ; fiche 12 de la chimie : *Les réactions d'oxydo-réduction* et la fiche 3 *Les courbes intensité-potentiel* de ce livre.

1. Tableau comparatif pile/électrolyseur





2. Étude des piles : approche thermodynamique

2.1 Inégalité entre la variation d'enthalpie libre dG et le travail électrique fourni δW_{el}

Pour l'introduction de la fonction enthalpie libre G, voir fiche $n^{\circ}2$ de chimie ce livre.

• Par définition, G = H - T.S = U + PV - TS donc dG = dU + PdV + VdP - TdS - SdT.

D'après le premier principe de la thermodynamique :

$$\mathbf{I}U = \delta Q + \delta W = \delta Q + \delta W_p + \delta W'$$

 $\delta W_p = -P dV$: le travail des forces de pression

 $\delta W'$: le travail élémentaire autre que celui des forces de pression, ici le travail électrique fourni par la pile δW_{el} .

donc dU = $\delta Q - P dV + \delta W_{el}$ puis dG = $\delta Q - P dV + \delta W_{el} + P dV + V dP - T dS - S dT$

• Pour trouver δQ , on utilise le second principe :

$$dS = \delta S_{\text{échangée}} + \delta S_{\text{créée}} \text{ avec } \delta S_{\text{échangée}} = \int \frac{\delta Q}{T_e} \text{ et } \delta S_{\text{créée}} \ge 0;$$

donc
$$\delta Q = T(dS - \delta S_{créée}) = TdS - T\delta S_{créée}$$

puis
$$dG = T dS - TS_{créée} - P dV + \delta W_{el} + P dV + V dP - T dS - S dT$$

et enfin
$$dG = -T\delta S_{créée} + \delta W_{el} + V dP - S dZ$$

La transformation étant isobare et isotherme : dP = dT = 0, on obtient :

$$dG = -T\delta S_{cr\acute{e}\acute{e}} + \delta W_{el}. \text{ Or, } \delta S_{cr\acute{e}\acute{e}} \ge 0 \quad \text{donc} \quad dG \le \delta W_{el}.$$

≻ Si la transformation se fait de façon réversible dans la pile : $S_{créée} = 0$ et $dG = \delta W_{el}$, ce qui signifie que le travail électrique est égal à l'énergie chimique.

En cas d'irréversibilité, $\delta S_{créée} > 0$ et d $G < \delta W_{el}$, ce qui signifie que le travail électrique est supérieur à l'énergie chimique (mais inférieur en valeur absolue puisque négatif).

2.2 Relation entre l'enthalpie libre standard de réaction $\Delta_r G$ et la tension à vide d'une pile e_{pile}

Introduisons l'enthalpie libre de réaction : $\Delta_r G = \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_T$ donc $dG = \Delta_r G.d\xi$

Or, d'après 2-1, pour une transformation réversible (*i* délivré très faible) : $dG = \delta W_{el}$. Dans le cas d'une pile, δW_{el} est le travail électrique fourni, donc $\delta W_{el} = -e_{pile} dq < 0$.

$$\mathrm{d}q = n_{e^-}.F = n.F.\mathrm{d}\xi$$

dq : la charge positive débitée ou reçue pendant le temps dt (en C) ;

 n_{e^-} : quantité de matière d'électrons mise en jeu lors de la réaction électrochimique(en mol); *n* : nombre d'électrons mis en jeu lors de la réaction électrochimique;

F: la constante de Faraday = 96 500 C.mol⁻¹.

 $d\xi$:avancement élémentaire (en mol).

De $\Delta_r G.d\xi = -n.F.e_{pile}.d\xi$ on tire :

 $\Delta_r G = -n.F.e_{pile}$

 $\Delta_r G$: l'enthalpie libre de réaction (en J.mol⁻¹);

n : nombre d'électrons mis en jeu lors de la réaction électrochimique ;

F: la constante de Faraday = 96 500 C.mol⁻¹.

 e_{pile} : tension à vide (ou force électromotrice f.é.m de la pile) (en V)

La circulation spontanée des électrons $(e_{pile} > 0)$ est telle que

► l'enthalpie libre de réaction $\Delta_r G < 0$;

> c'est-à-dire que l'enthalpie libre G diminue (voir fiche $n^{\circ}2$ de chimie de ce livre). De même, dans les conditions standard,

$$\Delta_r G^\circ = -n_{e^-}.F.e_{pile}^\circ$$

 $\Delta_r G^\circ$: l'enthalpie libre standard de réaction (en J.mol⁻¹) à P = 1 bar; e_{pile}° : f.é.m standard de la pile (en V), ne dépendant que de T.

2.3 Calcul de la constante d'équilibre $K^{\circ}_{(T)}$ de la réaction d'oxydoréduction spontanée au sein de la pile

• On a démontré dans la fiche n°2 de chimie de ce livre :

 $\Delta_r G_{(T,P)} = \Delta_r G_{(T,P)}^{\circ} + RT \ln Q_{r(T)} = \Delta_r G_{(T,P)}^{\circ} + RT \ln \frac{a_C^{\gamma} a_D^{\delta}}{a_A^{\alpha} d_B^{\beta}} \cdot$ Or, d'après **2-2**, $\Delta_r G = -n.F.e_{pile}$ et $\Delta_r G^{\circ} = -n.F.e_{pile}^{\circ}$ donc : $-n.F.e_{pile} = -n.F.e_{pile}^{\circ} + RT \ln Q_{r(T)}$ puis : $e_{pile} = e_{pile}^{\circ} - \frac{RT}{n.F} \ln Q_{r(T)}$

• Une pile cessant de débiter correspond à l'équilibre chimique, où $Q_{r(T)} = K^{\circ}_{(T)}$ avec $K^{\circ}_{(T)}$ la constante d'équilibre de la réaction électrochimique (à *T*).

$$e_{pile} = 0 \iff e_{pile}^{\circ} - \frac{RT}{n.F} \ln K_{(T)}^{\circ} = 0 \iff e_{pile}^{\circ} - \frac{RT}{n.F} \frac{\log K_{(T)}^{\circ}}{\log 10} = 0$$

Or à $T = 25^{\circ}$ C, on a $\frac{RT}{F} = \frac{8,31 \times (273 + 25)}{96\,500} = 0,059$
 $\iff e_{pile}^{\circ} - \frac{0,059}{n} \log K_{(T)}^{\circ} = 0$
 $\iff \log K_{(T)}^{\circ} = \frac{n}{0,059} e_{pile}^{\circ} = \frac{n}{0,059} (E_{+}^{\circ} - E_{-}^{\circ}).$

En notant : E[°]₊ : le potentiel standard du couple Ox/red de la cathode ⊕,
E[°]₋ : le potentiel standard du couple Ox/red de l'anode ⊖,
on obtient :

$$K_{(T)}^{\circ} = 10^{\frac{n}{0,059} \left(E_{+}^{\circ} - E_{-}^{\circ} \right)}$$

428 Chimie

2.4 Capacité d'une pile

La capacité d'une pile, notée Q, désigne la quantité d'électricité maximale délivrée par la pile dans le circuit extérieur, entre l'instant initial et l'état d'équilibre.

Q = I.t

avec Q: la capacité de la pile (en C);

I : l'intensité débitée (en A);

t : la durée de fonctionnement (en s).

Remarque : La capacité est souvent donnée en A.h (1 A.h = 3600 C).

Relations utiles

 \blacktriangleright Énergie totale maximale E (en J) délivrée par la pile : E = e.Q

> Puissance délivrée par la pile (en W) : P = e.I

avec e: f.é.m de la pile (en V);

I : intensite du courant délivré (en A) ;

Q: capacité de la pile (en C);

t : temps d'utilisation (en s).

3. Approche cinétique

Nous allons prendre l'exemple de la pile à combustible pour laquelle de nombreuses recherches sont conduites actuellement afin de produire de l'énergie électrique dans des générateurs facilement transportables.

3.1 Étude de la pile à combustible

Nous nous trouvons dans le cas **0** du paragraphe 3 de la fiche $n^{\circ}3$. Il s'agit d'une réaction spontanée : $E_2^{\circ} > E_1^{\circ}$ avec :

 $E_2^\circ = E^\circ(O_2/H_2O) = 1,23 \text{ V et } E_1^\circ = E^\circ(H^+/H_2) = 0,00 \text{ V.}$

Cette réaction correspond à l'oxydation du dihydrogène selon :

 $2H_{2(g)} = 4H^+ + 4e^-$ à l'anode Θ

et à la réduction du dioxygène selon :

 $O_{2(g)} + 4\mathrm{H}^+ + 4e^- = 2\mathrm{H}_2\mathrm{O}_{(liq)}$ à la cathode \oplus .

Cette pile est donc basée sur la réaction de synthèse de l'eau :

 $O_{2(g)} + 2 H_{2(g)} = 2 H_2 O_{(liq)}$

La tension à vide théorique maximale correspond à la différence des potentiels standard redox entre $E_2^\circ = 1,23$ V et $E_1^\circ = 0,00$ V. On ne pourra pas obtenir une différence de potentiel supérieure (dans les conditions standard). Le graphique des courbes intensité-potentiel est donné à la figure :



Tension à vide d'une pile

> Lorsque la pile ne débite pas, sa tension à vide $e_{pile} = e_0$ (ou force électromotrice f.é.m) est obtenue sur le graphique pour $i_a = -i_c = 0$.

On peut voir sur le graphique que : $e_0 = E_2^\circ - E_1^\circ - (|\eta_{c(0)}| + \eta_{a(0)})$.

> Quand la pile débite, à un moment t, pour une intensité i débitée, on a : $i_a = -i_c$.

Un courant I circule, de la puissance est dissipée dans le générateur sous forme calorifique (perte par effet Joule). Le terme r.I traduit la chute de potentiel ohmique de la pile, avec r la résistance interne du dispositif.

Comme on peut le voir sur la courbe i - E, on a : $e + rI = E_2^\circ - E_1^\circ - (|\eta_{c(i)}| + \eta_{a(i)})$.

On aura donc une tension délivrée qui sera inférieure à la tension à vide : $e \le e_0$.

3.2 Paramètres influençant la résistance interne de la pile

Il faut minimiser les pertes par effet Joule et donc il faut que cette résistance interne r soit la plus faible possible.

La résistance interne du dispositif peut se définir en fonction des caractéristiques géométriques du dispositif : $r = \rho \frac{l}{s}$.

Y-123 2 2 4 1

Afin que cette résistance interne r soit la plus faible possible, il faut que :

la surface S des électrodes soit grande ;

 la distance *l* qui sépare les électrodes soit petite;

– les électrolytes choisis soient très conducteurs, donc une résistivité ρ la plus faible possible.

ce qui donne :
$$I = \frac{e}{r + R_{décharge}} = \frac{U}{R_{décharge}}$$



Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : Accumulateur nickel-cadmium

Partie 1 : le fonctionnement en décharge (pile)

La partie 2 : le fonctionnement en charge (électrolyseur) sera étudié dans la fiche $n^{\circ}6$.

Un accumulateur nickel-cadmium est constitué d'une électrode de cadmium (électrode 1), d'une solution aqueuse de potasse concentrée et d'une électrode métallique inerte, recouverte d'un dépôt de Ni_2O_3 (électrode 2).

1. Quelle est la borne positive de l'accumulateur ? Écrivez les réactions d'électrodes et la réaction globale qui se produisent lorsque l'accumulateur débite.

2. Montrez que la f.é.m. est indépendante de la concentration en électrolyte et calculez sa valeur à 25°C.

3. Placez, sur un même diagramme intensité-potentiel, les courbes correspondant aux deux électrodes. Comparez la tension de fonctionnement et la f.é.m. Commentez.

Données

> Potentiels standard des couples rédox $E^{\circ}(\text{en V})$:

 $Ni^{2+}/Ni:-0,25 \hspace{0.1 in} ; \hspace{0.1 in} Ni_2O_3/Ni^{2+}:+1,74 \hspace{0.1 in} ; \hspace{0.1 in} Cd^{2+}/Cd:-0,40 \hspace{0.1 in} ; \hspace{0.1 in} O_2/H_2O:+1,23.$

> Produits de solubilité : Cd(OH)₂ : $K_{S1} = 10^{-14}$; Ni(OH)₂ : $K_{S2} = 10^{-16}$

Diagramme potentiel-pH du nickel et du cadmium



Entraînez vous à tracer le diagramme E-pH du nickel (voir fiche n° 16 de chimie de MPSI). Résultats :

Calcul du pH de précipitation noté pH₂ de Ni(OH)₂ à partir de cette solution à 10 mmol.L¹ en ions Ni²⁺ : pH₂ = 7,0 pH < pH₂ : E_2 = 1,86 – 0,177 pH

 $pH > pH_2$: $E_2 = 1,032 - 0,059 pH$.

Entraînez vous à tracer le diagramme E-pH du cadmium (voir fiche $n^{\circ}16$ MPSI) : Résultats :

Calcul du pH de précipitation noté pH₁ de Cd(OH)₂ à partir de cette solution à 10 mmol.L⁻¹ en ions Cd²⁺ : pH₁ = 8, 0 pH < pH₁ : $E_1 = -0, 46$ V pH > pH₁ : $E_1 = 0,013 - 0,059$ pH.

6 Les électrolyseurs et les accumulateurs

Revoir **Toute la MPSI en fiches** ; fiche 12 de la chimie : *Les réactions d'oxydo-réduction* et la fiche 3 *Les courbes intensité-potentiel* de ce livre.

Description d'un électrolyseur : voir le tableau comparatif du paragraphe 1 de la fiche 5.

1. Les électrolyseurs : approche thermodynamique

1.1 Condition thermodynamique pour que l'électrolyse se produise

Étude analogue à celle menée pour les piles dans la fiche n° 5, paragraphe 2.

• **Tension** : $E_+ - E_- = U_{AC}$ IMPOSEE par le générateur extérieur.

• Énergie reçue : $\delta W_{el} = +U_{AC}.dq > 0$

• Inégalité reliant la variation d'enthalpie libre dG et le travail électrique δW_{el}

Pour une transformation monotherme et monobare, on a toujours :

 $dG \leq \delta W_{el}$ d'où $\Delta_r G.d\xi \leq U_{AC}.dq$ puis : $dq = n.F.d\xi$ avec :

 $\Delta_r G$: enthalpie libre standard de réaction (à la température *T*) en J.mol⁻¹. d*q*: quantité d'électricité en C

n : nombre d'électrons échangés lors de la réaction d'électrolyse

 $F = 96500 \text{ C.mol}^{-1}$

Condition thermodynamique pour que l'électrolyse se produise

$$\Delta_r G.d\xi \leq U_{AC}.n.F.d\xi \Longrightarrow U_{AC} \geq U_{min} = \frac{\Delta_r G}{n.F} \quad \text{avec} \quad \Delta_r G = +n.F.(E_+ - E_-):$$
$$U_{AC} \geq U_{min} = E_+ - E_-$$

1.2 Exemple

• Électrolyse d'une solution d'acide sulfurique $(2H^+, SO_4^{2-})$ dans laquelle plongent 2 électrodes inertes en platine. Expérimentalement, on obtient :

Réduction cathodique (attire les cations, pôle –) :	$(2 \text{ H}^+ + 2e^- = \text{H}_2) \times 2$
Oxydation anodique (attire les anions, pôle +) :	$2 H_2 O = 2 O_2 + 4 H^+ + 4e^-$
Bilan : électrolyse de l'eau	$2 \text{ H}_2\text{O} \rightarrow 2 \text{ H}_2 + \text{O}_2$

• Première manière de calculer la tension de seuil (la tension minimale) :

$$U_{min} = \frac{\Delta_r G}{n_{e^-}.F}$$
 avec $\Delta_r G = \sum_i \nu_i \Delta_f G_i^\circ.$
H₂ et O₂ sont dans leur état standard (ils se dégagent contre la pression atmosphérique) : $p_{O_2} = p_{H_2} \approx p^\circ = 1$ bar. Donc :

$$\Delta_r G \approx \Delta r G^\circ = 2\Delta_f G^\circ(H_2) - 2\Delta_f G_i^\circ(H_2O) = 0 - 2 \times 237, 2 = -474, 4 \text{ kJ.mol}^{-1} \text{ à } 25^\circ C$$

 $\Delta_f G_i^{\circ}(\mathbf{H}_2) = 0$ car \mathbf{H}_2 est un corps pur;

donc $U_{min} = \frac{-474, 4}{4 F} = 1,23 \text{ V}.$

• Deuxième manière de calculer la tension de seuil (la tension minimale) :

$$U_{min} = E_{(+)} - E_{(-)} \approx E_{(+)}^{\circ} - E_{(-)}^{\circ} = E_{anode}^{\circ} - E_{cathode}^{\circ}$$
$$= E^{\circ}(O_2/H_2O) - E^{\circ}(H^+/H_2) = 1,23 - 0 = 1,23V.$$

1.3 Conclusion de l'étude thermodynamique

Quand $U_{AC} = V_A - V_C$ imposée par le générateur croît à partir de zéro, l'électrolyse peut commencer lorsque la valeur de U_{AC} est suffisante pour que se produise simultanément :

> l'oxydation la plus facile à l'anode ($V_A \ge E_{\text{couple}}$ de plus bas potentiel);

➤ la réduction la plus facile à l'anode ($V_C \leq E_{\text{couple}}$ de plus haut potentiel).



Mais ceci peut être remis en cause pour des raisons cinétiques, et seule la donnée des courbes intensité-potentiel permettra de conclure. En effet, nous devons aussi prendre en compte l'aspect cinétique qui se traduit par l'existence de surtensions (nulles pour un système rapide, ou grandes pour un système lent)!

2. Les électrolyseurs : approche cinétique

2.1 La tension de seuil et la tension de fonctionnement

Reprenons l'exemple précédent de l'électrolyse d'une solution d'acide sulfurique.

Réduction cathodique (attire les cations, pôle –) :	$(2 \text{ H}^+ + 2e^- = \text{H}_2) \times 2$
Oxydation anodique (attire les anions, pôle +) :	$2 H_2 O = 2 O_2 + 4 H^+ + 4e^-$
Bilan : électrolyse de l'eau	$2 \text{ H}_2\text{O} \rightarrow 2 \text{ H}_2 + \text{O}_2$

Si le générateur imposait cette tension théorique minimale (thermodynamique) de 1,23 V, aucune production de H_{2(g)} et de O_{2(g)} ne serait observée. Il faut compenser les surtensions anodique η_a et cathodique η_a .

De plus, le passage du courant d'intensité $i = i_a = -i_c$ impose une chute de potentiel correspondant à ri où r est la résistance de la solution aqueuse dans laquelle on fait passer le courant d'intensité i.



La tension à appliquer entre les électrodes pour que l'électrolyse se produise avec une intensité $i = i_a = -i_c$ est :



2.2 les réactions envisageables aux électrodes

Même dans une solution aqueuse ne contenant qu'un seul type de cation et un seul type d'anion, plusieurs réactions électrochimiques sont envisageables sur chaque électrode :

- À l'anode (+), trois réactions d'oxydation peuvent avoir lieu :
- oxydation des anions contenus dans la solution;
- oxydation des molécules d'eau;
- oxydation du matériau constituant l'électrode.
- À la cathode (-), deux réactions de réduction peuvent se dérouler :
- réduction des cations contenus dans la solution ;
- réduction des molécules d'eau.

[®] On ne peut prévoir la réduction et l'oxydation la plus « facile »qu'en prenant en compte l'aspect thermodynamique ET l'aspect cinétique.

2.3 Méthode classique d'étude d'une réaction d'électrolyse

• Exemple : électrolyse d'une solution de sulfate de zinc acidifiée

Soit une solution de sulfate de zinc à 2,0 mol.L⁻¹ acidifiée à pH=5 par de l'acide sulfurique. Les espèces présentes en solution sont donc : H_2O , Zn^{2+} , H^+ et SO_4^{2-} .

On effectue son électrolyse entre une cathode en aluminium et une anode inattaquable (en plomb argentifère).

Données :

Les potentiels rédox standards des couples mis en jeu :

 $E^{\circ}(O_2/H_2O) = 1,23 \text{ V}$; $E^{\circ}(H^+/H_2) = 0,00 \text{ V}$; $E^{\circ}(Zn^{2+}/Zn) = -0,76 \text{ V}.$

Surtensions : η_a (O₂ sur l'anode en Pb)= 0, 67 V.

 η_c (H⁺ sur la cathode en Al)= -0, 90 V.

 η_c (Zn²⁺ sur la cathode en Al)= 0 V (système rapide)

Les ions HSO_4^- et SO_4^{2-} sont électro-inactifs.

Solutions HSO_4^- et SO_4^{2-} se situent HORS du domaine d'électro-activité de l'eau. En effet, quels que soient le pH de la solution et l'électrode utilisée, les réactions d'oxydoréduction du soufre S (comme $HSO_4^- \rightarrow SO_2$ ou $SO_4^{2-} \rightarrow HSO_3^-$) ne sont jamais observées. Ces réactions sont ralenties pas de très fortes surtensions qui traduisent l'importance des changements de structure correspondants.

Approche thermodynamique

Les réactions possibles aux électrodes et calcul des potentiels à l'équilibre :



Prévision thermodynamique de réactions aux électrodes : $2 H_2O \rightarrow 2 H_2 + O_2$. Mais il faut aussi prendre en compte les surtensions !

436 Chimie



• Approche cinétique : prise en compte des surtensions



La cathode se recouvre alors de zinc (sur lequel on a à peu près la même surtension que sur l'aluminium).

• Le choix de l'électrode

Que se passe-t-il si on utilise une cathode en platine?

 η_c (H⁺ sur la cathode en Al)= -0,10 V : la réduction de H⁺ aurait eu lieu **avant** (à E = -0, 30 - 0, 10 = -0, 40 V) celle de Zn²⁺ (à E = -0, 75V) (ce qui n'est évidemment pas recherché lorsqu'on veut obtenir du zinc solide !).

• La nécessité de purifier la solution électrolytique avant l'électrolyse

Il faut faire précéder l'électrolyse du zinc d'une étape appelée cémentation qui consiste à éliminer toutes les impuretés ioniques dont les courbes de réduction cathodiques se situent à droite de celle de Zn^{2+} : élimination de Cu^{2+} , Cd^{2+} et Co^{2+} nécessaire, élimination de Mn^{2+} inutile car non gênante pour l'électrolyse.



· Choix de la tension à appliquer

Il ne faut pas que $U_{AC} - r.i$ soit trop grand (en pratique $U_{AC} - r.i < 2,75$ V) pour ne pas atteindre le palier de diffusion de Zn²⁺ qui conduit à un dégagement de H₂.

Faites l'exercice 1 : électrolyse de NaCl aqueux

2.4 Évaluer l'épaisseur d'un dépôt électrolytique

La loi de Faraday permet de calculer la quantité maximale de produits formés aux électrodes. *Démonstration :*

Soit une électrolyse où les réactions suivantes ont lieu :

À l'anode :	$Red_2 = Ox_2 + n_2e^-$	* <i>n</i> ₁	
À la cathode :	$Ox_1 + n_1 e^- = Red_1$	* <i>n</i> ₂	

Équation de la réaction	Avancement (en mol)	$a'Red_2 +$	$b'Ox_1 = c'Red_1$	$+ d'Ox_2$	
État initial	$\xi = 0$	$\eta_{(red2)0}$	$\eta_{(Ox1)0}$	0	0
État final(mol)	ξ_f	$\eta_{(red2)0} - a'.\xi_f$	$\eta_{(Ox1)0} - b'.\xi_f$	$c'.\xi_f$	$d'.\xi_f$

Il est intéressant de calculer la masse de Red_1 se déposant sur la cathode lors de la réduction. $m_{Red_1} = n_{Red_1} \cdot M_{Red_1}$

Or, d'après la tableau d'avancement, $n_{Red1} = c' \xi_f$; donc $m_{Red1} = c' \xi_f M_{Red1}$.

Exprimons l'avancement final ξ_f grâce à la loi de Faraday :

$$dq = dn_e \cdot F = idt$$
 soit $q = n_{e^-} \cdot F = i\Delta t$

À la cathode : $Ox_1 + n_1e^- = Red_1$

⇒ la formation d'une mole de Red_1 s'accompagne du passage de n_1 moles d'électrons; ⇒ la formation de $c'.\xi_f$ mole de Red_1 s'accompagne du passage de $n_{e^-} = n_1.c'.\xi_f$ moles d'électrons.

On a donc : $n_1.c'.\xi_f.F = i\Delta t$ puis $\xi_f = \frac{i\Delta t}{n_1.c'.F}$ et $m_{Red1} = c' \frac{i\Delta t}{n_1.c'.F} M_{Red1}$

Loi de Faraday

$$m_{Red1} = \frac{i\Delta t}{n_1.F} M_{Red1}$$
 et $m_{Ox2} = \frac{i\Delta t}{n_2.F} M_{Ox2}$ avec

m_{Red_1} :	la masse de <i>Red</i> ₁ formée à la cathode	en g
m_{Ox_2} :	la masse de Ox_2 formée à l'anode	en g
<i>i</i> :	l'intensité du courant continu d'électrolyse	en A
Δt :	la durée de l'électrolyse	en s
n_1 :	nombre d'électrons échangés à la cathode	
n_2 :	nombre d'électrons échangés à l'anode	
F:	la constante de Faraday = $N_A.e$ =	96 500 C.mol ⁻¹
M:	la masse molaire	en g.mol ⁻¹

🕲 Rappel

$$i = jS$$

avec : j : la densité de courant (en $A.m^{-2}$) S : la surface de l'électrode (en m^2)

2.5 Le rendement faradique ρ_F (ou le rendement en courant)

En réalité, la masse expérimentale obtenue est inférieure à cette valeur maximale. On définit donc le rendement en courant, ou rendement faradique ρ_F :

Rendement faradique

ρ_F (sans unité) =	<i>m</i> expérimentale	_	<u>i</u> utile	
	<i>m</i> calculée	-	iappliquée réellement	

3. Les accumulateurs

3.1 Définition

Un accumulateur est un dispositif électrochimique permettant de fournir un courant continu (comme une pile) et que l'on recharge grâce à une réaction d'électrolyse.

• Les 3 fonctions de l'accumulateur électrique sont donc :

de stocker de l'énergie sous la forme chimique (molécules actuellement au repos, mais susceptibles d'être dissociées);

➢ de transformer de l'énergie chimique (les molécules de ses électrolytes et électrodes) en énergie électrique. Il joue alors le rôle d'une pile électrochimique pendant sa phase de décharge.

d'être chargeable (et même rechargeable) en redemandant de l'énergie électrique à un fournisseur externe, pour reprendre une énergie chimiquement stockable. Il joue alors le rôle d'électrolyseur pendant sa phase de charge.

• $U_{accumulateur} \approx 2 \text{ V}.$

Pour avoir de plus fortes tensions U, on regroupe les accumulateurs en batteries, ce qui permet de produire 6V, 12V et 24 V.

• Types d'accumulateurs :

- ➤ au plomb (étude ci-après);
- ▶ nickel-cadmium (Ni-Cd) (voir exercice $n^{\circ}1$ de la fiche 5 et exercice 2 de cette fiche);
- nickel-hydrure métallique (Ni-MH);
- ➤ lithium-ion (Li-ion).

3.2 Étude de l'accumulateur au plomb

L'électrolyte est constitué par de l'acide sulfurique H_2SO_4 (pH< 1), l'anode est en plomb et la cathode est en Pb + PbO₂

Données: potentiel E des couples (préalablement calculés en tenant compte du pH de l'électrolyte):

$$E(PbSO_4/Pb) = -0,35 \text{ V}$$
; $E(PbO_2/PbSO_4) = +1,65 \text{ V}$

 1^e acidité de H₂SO₄ forte, pKa (HSO₄^{-/} SO₄²⁻) = 1,92 :

donc la forme prédominante à pH =1 est HSO₄.

Constante de solubilité $K_{sPbSO_4}a_{25^\circ C} = 1, 6 \times 10^{-8}$ donc PbSO₄ est peu soluble,

[Pb²⁺] est très faible, ce qui est la raison essentielle de la possibilité de recharge.

• Phase de charge : accumulateur en pile : réaction spontanée.

Oxydation de l'anode en plomb (-):

$$Pb + HSO_4^- = PbSO_4 + H^+ + 2e^-$$

Réduction de la cathode en PbO₂ :

$$PbO_2 + HSO_4^- + 3 H^+ + 2e^- = PbSO_4 + 2H_2O$$

Autre réduction cathodique possible thermodynamiquement :

$$2H^+ + 2e^- = H_2$$
 et $O_2 + 4H^+ + 4e^- = 2H_2O$.

Mais leurs surtensions cathodiques η_c sur du Pb sont très grandes et les « poussent sur le côté », ce qui les rend impossibles cinétiquement.

Autre oxydation anodique possible thermodynamiquement :

$$2 H_2 O = O_2 + 4H^+ + 4e^-$$

Mais la surtension anodique η_a sur du Pb est très grande et la « pousse aussi sur le côté », ce qui la rend impossible cinétiquement.

Bilan de la charge :

$$PbO_2 + Pb + 2 HSO_4^- + 2 H^+ \rightarrow 2 PbSO_4 + 2H_2O$$

Tension à vide de l'accumulateur :

$$U(i = 0) = e_0 = E_{(+)} - E_{(-)} = 1,65 - (-0,35) = 2,00$$
 V.

Phase de décharge réaction forcée : les réactions sont inversées.

Oxydation de l'anode en $PbO_2(+)$:

$$PbSO_4 + 2e^- = Pb + SO_4^{2-}$$

Réduction de la cathode en Pb (-):

$$2 \text{ PbSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O} = \text{PbO}_2 + \text{SO}_4^{2-} + \text{H}^+ + 2e^-$$

Bilan de la charge :

$$2 \text{ PbSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{PbO}_2 + \text{Pb} + 2 \text{ HSO}_4^- + 2 \text{ H}^+$$

autres réactions possibles thermodynamiquement mais impossibles cinétiquement : idem que pendant la charge.



Accumulateur en phase de décharge (pile)

Accumulateur en phase de charge (électrolyseur)

3.3 Contraintes dans la recharge d'un accumulateur

On constate qu'à cause des surtensions $\eta_a(i)$ et $\eta_c(i)$ dues à l'intensité de charge, on a toujours

440 Chimie

une tension de charge U(i) plus grande que la tension à vide $e_0 = 2,00$ V de l'accumulateur.

Attention : si la tension de charge imposée est trop grande (si U - r.i > 2, 4 V), ou en fin de charge lorsque le PbSO_{4(s)} est consommé (palier de diffusion), on peut observer des dégagements gazeux provoqués par :

 $2H^+ + 2e^- = H_2$ et $2H_2O = O_2 + 4H^+ + 4e^-$ et aussi $O_2 + 4H^+ + 4e^- = 2H_2O$.

Les bouchons de la cuve doivent donc rester ouverts, le remplissage régulier des éléments est nécessaire, et il peut y avoir risque d'explosion en présence d'une source de chaleur.

Faites l'exercice 2 : principe de l'accumulateur nickel-cadmium

Sauriez-vous répondre?

Exercice 1 : électrolyse de NaCl aqueux (d'après ESIM)

On se propose de réaliser l'électrolyse d'une solution aqueuse molaire de chlorure de sodium. **Données :**

Potentiels standards des couples suivants :

 $E_1^{\circ}(\text{Cl}_{2(aq)}/\text{Cl}^-) = 1,40 \text{ V} ; E_2^{\circ}(\text{Na}^+/\text{Na}) = -2,71 \text{ V}$

 $E^{\circ}(H^{+}/H_{2}) = 0,00 \text{ V}$; $E^{\circ}(O_{2}/H_{2}O) = 1,23 \text{ V}.$

Surtensions anodiques sur le titane :

 $Cl_{2(aq)}/Cl^{-}$: $\eta_a = +0, 1 V$; O_2/H_2O : $\eta_a = +1, 4 V$

Surtensions cathodiques sur mercure : $H^+/H_2 : \eta_c = -1, 6 V$; $Na^+/Na : \eta_c = 0V$ (système rapide)

Masse molaire : $M_{\text{Na}} = 23,0 \text{ g.mol}^{-1}$.

1. Précisez les deux réactions en compétition à l'anode et les deux réactions en compétition à la cathode. Quel est le bilan de l'électrolyse ? Estimez la tension minimale d'électrolyse, en supposant le bain maintenu en tampon acide (pH = 4 pour éviter la dismutation du dichlore), du seul point de vue thermodynamique.

2. Le procédé dit « au mercure »utilise une anode en titane et une cathode en mercure liquide, le fond cathodique étant incliné à 1 %, ce qui permet d'extraire les dépôts cathodiques (cathode dite circulante, le mercure extrait étant ensuite recyclé).

D'après les surtensions cinétiques sur le titane, tracez les courbes intensité - potentiel à l'anode et déduisez-en la réaction anodique.

3. Sachant que le mercure forme un amalgame de sodium, ce qui ramène le potentiel standard du couple Na⁺/Na devenant désormais Na⁺/Na(Hg) à -1, 70 V et d'après les surtensions cinétiques sur mercure, tracez les courbes intensité-potentiel à la cathode et déduisez-en la réaction cathodique.

4. Écrivez l'équation bilan de l'électrolyse et montrer graphiquement comment on peut estimer la tension minimale d'électrolyse U_{min} , la tension seuil U_{seuil} cinétique (les 2 à courant nul), ainsi que la tension d'électrolyse de fonctionnement U(i) pour un courant d'intensité *i* fixé. Calculez U_{min} et U_{seuil} . **5.** L'industriel applique en fait une tension de 3,9 V pour une densité de courant de 1 A.cm⁻². Pourquoi cet excès de tension ? Calculez la masse de sodium amalgamé en 1 heure par nappe de mercure de section $S = 200 \text{ cm}^2$.

Exercice 2 : accumulateur nickel-cadmium Partie 2 : **fonctionnement en charge (électrolyseur)**

La partie 1 : fonctionnement en décharge (pile) a été faite dans la fiche $n^{\circ}5$.

Un accumulateur nickel-cadmium est constitué d'une électrode de cadmium (électrode 1), d'une solution aqueuse de potasse concentrée et d'une électrode métallique inerte, recouverte d'un dépôt de Ni_2O_3 (électrode 2).

1. Comment recharge-t-on un tel accumulateur ? Quelles réactions se produisent ?

En utilisant les courbes I(V), comparer la f.é.m. et la d.d.p. nécessaire pour obtenir une intensité I.

2. Sachant que l'accumulateur est scellé, existe-t-il une limite de tension à imposer lors de la recharge ? Pourquoi ?

Données : voir exercice 1 fiche 5.

7 Récapitulatif sur les piles et les électrolyseurs

Dispositif	Dans une pile	Dans un électrolyseur	
	Etude thermodynamiq	ne	
Inégalité reliant dG et δW _{el}	$dG \le \delta W_{el}$		
Tension aux bornes	e _{pile} = E ₊ - E ₋ = U _{CA} délivrée par la pile	E ₊ - E ₋ = U _{AC} IMPOSEE par le générateur extérieur	
Travail électrique élémentaire $\delta W_{el} = \pm \delta P_{el} * dt$ $= \pm U*I* dt$ avec dq=I* dt	Energie <u>fournie</u> donc: $\delta W_{el} = -e_{pile} *dq < 0$	Energie <u>reçue</u> donc: $\delta W_{el} = + U_{AC} * dq > 0$	
Signe de dGRéactionélectrochimique: $dG = \Delta rG * d\xi$	Pour une transformation spontanee Pour une transformation réversible (i délivré très faible): $dG = \Delta rG * d\xi = \delta W_{el} = -e_{pile} * dq$	$\Delta rG * d\xi \leq U_{AC}*dq$	
Expression de la quantité d'électricité dq	dq= n dq (en C), n: nombre d'électrons éc	* F * dξ changés (en mol), F=96500 C.mol ⁻¹ ,	
Relations utiles. E ₊ et E ₋ sont le potentiels rédox des couples calculés grâce à la relation de Nernst.	Relation entre la tension à vide d'une pile et l'enthalpie libre de la réaction: $\Delta rG * d\xi = -e_{pile} * n * F * d\xi$ $\Rightarrow \Delta rG = -n * F * e_{pile}$ $\Rightarrow \Delta rG = -n * F * (E_+ - E)$ Et dans les conditions standards, $\Delta rG^\circ = -n * F * (E^\circ_+ - E^\circ)$	$\frac{\text{Condition thermodynamique pour}}{\text{que l'électrolyse de produise:}}$ $\Delta rG * d\xi \leq U_{AC} * n_{e^-} * F * d\xi$ $\Rightarrow \boxed{U_{AC} \geq U_{min} = \frac{\Delta rG}{n * F}}$ $\text{avec } \Delta rG = + n * F * (E_+ - E)$ $\Rightarrow \boxed{U_{AC} \geq U_{min} = E_+ - E}$	
Etude	cinétique: prise en compte des su	rrtensions η _a et η _c	
A vide: $i_a = -i_c = 0$	Tension à vide: $\mathbf{e}_0 = \mathbf{E}_+ - \mathbf{E} \eta_{c(0)} - \eta_{a(0)}$	$\mathbf{U}_{\text{seuil cinétique}} = \mathbf{E}_{+} - \mathbf{E}_{-} + \eta_{a(0)} + \eta_{c(0)} $	
Lorsqu'un courant circule: $i_a = -i_c$	Tension aux bornes de la pile: $\mathbf{e} + \mathbf{rI} = \mathbf{E}_{+} - \mathbf{E}_{-} - \eta_{\mathbf{a}(i)} - \eta_{\mathbf{c}(i)} $	Tension d'électrolyse: $U_{\hat{a} \text{ appliquer}} \mathbf{r}^* \mathbf{i} = U_{\min} + \eta_{a(i)} + \eta_{c(i)} $	
Paramètres influençant la résistance interne r du dispositif: $\mathbf{r} = \rho * \frac{l}{s}$.	Ce sont les termes de surtension η_a e coûtent cher à la production. Afin que cette résistance interne r soit la - la surface S des électrodes soit grande; - la distance l qui sépare les électrodes so - les électrolytes choisis soient très condu possible.	\mathbf{t} η _c et de chute ohmique $\mathbf{r}^*\mathbf{i}$ qui plus faible possible, il faut que: it petite; acteurs, donc une résistivité ρ la plus petite	

1. Application du premier principe à la transformation chimique

Exercice 1

La déshydrogénation du propane en propène a pour équation chimique :

$$C_3H_{8(g)} \to C_3H_{6(g)} + H_{2(g)}.$$

On applique la loi de Hess, en remarquant que $\Delta_f H^{\circ}_{H_{2(g),298}} = 0$ car $H_{2(g)}$ est l'état standard de référence de l'élément hydrogène à 298 K, soit :

 $\Delta_r H_{298}^{\circ} = \Delta_f H_{C_3 H_{6(g), 298}}^{\circ} + \Delta_f H_{H_{2(g), 298}}^{\circ} - \Delta_f H_{C_3 H_{8(g), 298}}^{\circ}$

Donc :

$$\Delta_r H_{298}^\circ = 124, 2 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

Exercice 2

On traduit tout d'abord les données. Il faut pour cela savoir ce qu'on appelle une réaction de combustion (oxydation complète par O_2 , nombre stœchiométrique de -1 devant le réactif subissant la combustion).

Exemple

$$CH_4 + 2O_2 \xrightarrow{\Delta_{comb}H_{CH_4}^0} CO_2 + 2H_2O$$

$$H_2 + \frac{1}{2}O_2 \xrightarrow{\Delta_{comb}H_{H_2}^0} H_2O$$

$$CO_2 + \frac{1}{2}O_2 \xrightarrow{\Delta_{comb}H_{CO}^0} CO_2$$

On construit alors un cycle d'équations chimiques faisant intervenir les combustions :

Exemple



On obtient donc :

$$\Delta_r H^\circ = \Delta_{comb} H^\circ_{CH_4} - \Delta_{comb} H^\circ_{CO} - 3\Delta_{comb} H^\circ_{H_2} = 253,0 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

Exercice 3

La construction correcte du cycle permettant de calculer une enthalpie réticulaire nécessite la connaissance rigoureuse des définitions regroupées dans le paragraphe 5 : Quelques transformations particulières.

Exemple



Finalement :

 $\Delta_{ret}H^{\circ}_{\mathrm{NaBr}} = -EI_{\mathrm{Na}} + AE_{\mathrm{Br}} - \frac{1}{2}\Delta_{dis}H^{\circ}_{\mathrm{Br}_2} - \Delta_{sub}H^{\circ}_{\mathrm{Na}} - \frac{1}{2}\Delta_{vap}H^{\circ}_{\mathrm{Br}_2} + \Delta_f H^{\circ}_{\mathrm{NaBr}}$

Application numérique :

$$\Delta_{ret} H_{\text{NaBr}}^{\circ} = -735 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

Exercice 4

Faisons un tableau d'avancement (quantité de matière en mol).

	$2SO_{2(g)}$	+	$O_{2(g)}$	Ħ	$2SO_{3(g)}$	$N_{2(g)}$
état initial	1		0,8		0	3,2
état final	$1 - 2\xi$		$0, 8-\xi$		2ξ	3,2
	0		0,3		1,0	3,2

La réaction est considérée comme totale : le réactif limitant (ici $SO_{2(g)}$ car $\frac{1}{2} < \frac{0,8}{1}$) a disparu dans l'état final. On a donc :

 $1 - 2\xi_{final} = 0 \Longrightarrow \xi_{final} = 0, 5 \text{ mol.}$

Pour calculer T_f , il faut construire un cycle thermodynamique le long d'un chemin hypothétique contenant 2 étapes :

Exemple



Dans l'approximation d'une évolution adiabatique et à pression constante, l'intégralité de la chaleur dégagée par la réaction entraîne l'élévation de la température des produits (et constituants spectateurs) :

$$Q_{1\to 2} = 0 = Q_{1\to 3} + Q_{3\to 2} = \Delta_r H_{(Ti)}\xi_f + \int_{T_i}^{T_f} \sum_i n_i C_{Pm,i}^{\circ} dT$$

corrigés 445

corrigés

Chimie

$$0 = \Delta_r H_{(Ti)}\xi_f + \int_{T_i}^{T_f} \left[n_{\text{SO}_2 final} \times C_p^{\circ}(\text{SO}_{2(g)}) + n_{\text{O}_2 final} \times C_p^{\circ}(\text{O}_{2(g)}) + n_{\text{N}_2 final} \times C_p^{\circ}(\text{N}_{2(g)}) \right] dT$$

Or $\sum_{i} n_i C_{Pm,i}^\circ$ ne dépend pas de T, donc : $0 = \Delta_r H_{(Ti)} \xi_f + [n_{SO_2 final} \times C_p^\circ(SO_{2(g)}) + n_{O_2 final} \times C_p^\circ(O_{2(g)}) + n_{SO_3 final} \times C_p^\circ(SO_{3(g)}) + n_{N_2 final} \times C_p^\circ(N_{2(g)})] (T_f - T_i)$

Donc $T_f = T_i - \frac{\Delta_r H(T_1)\xi_f}{D}$ où le dénominateur est :

 $\mathbf{D} = n_{\mathrm{SO}_2 final} \times C_p^{\circ}(\mathrm{SO}_{2(g)}) + n_{\mathrm{O}_2 final} \times C_p^{\circ}(\mathrm{O}_{2(g)}) n_{\mathrm{SO}_3 final} \times C_p^{\circ}(\mathrm{SO}_{3(g)})$

+ $n_{\mathrm{SO}_3 final} \times C_p^{\circ}(\mathrm{SO}_{3(g)}).$

Application numérique :

 $T_f = 298 - \frac{-197, 6 \times 10^3 \times 0, 5}{0 \times 51, 1 + 0, 3 \times 29, 9 + 1 \times 76, 6 + 3, 2 \times 31, 2} = 831 \text{ K}.$

Cette température constitue la température maximale que peut atteindre le système tel que décrit dans l'énoncé en l'absence de toute perte thermique. En réalité, une partie de l'énergie est perdue et cette température n'est jamais atteinte.

Exercice 5

On sait que l'aluminothermie réalisée produit de l'alumine et du chrome liquides. Or la réaction dont on donne l'enthalpie standard dans l'énoncé est celle qui les produit à l'état solide (réaction 1). On va donc dans un premier temps déterminer $\Delta_r H_{300}^\circ$ de la réaction 2 ci-dessous :

$$\operatorname{Cr}_2\operatorname{O}_{3(s)} + 2\operatorname{Al}_{(s)} \rightarrow \operatorname{Al}_2\operatorname{O}_{3(l)} + 2\operatorname{Cr}_{(l)}$$

Pour cela, on réalise un cycle d'équations chimiques incluant les changements d'état (réaction 3). L'ensemble du cycle est à T = 300 K.

Exemple



Les enthalpies standard de changement d'état sont données à la température de fusion de chaque constituant. IL faut donc les ramener à 300 K au moyen de la loi de Kirchhoff :

$$\begin{aligned} \mathrm{Al}_{2}\mathrm{O}_{3(s)} &\to \mathrm{Al}_{2}O_{3(l)} \\ \Delta_{fus}H^{\circ}_{\mathrm{Al}_{2}\mathrm{O}_{3(l)}(300K)} &= \Delta_{fus}H^{\circ}_{\mathrm{Al}_{2}\mathrm{O}_{3(l)}(2183K)} + \int_{2183}^{300} \left(C^{\circ}_{P\mathrm{Al}_{2}\mathrm{O}_{3(l)}} - C^{\circ}_{P\mathrm{Al}_{2}\mathrm{O}_{3(s)}}\right) \mathrm{d}T \end{aligned}$$

Mais l'énoncé suggère d'assimiler les capacités calorifiques de l'alumine solide et liquide. Il en résulte que le terme d'écart de Kirchhoff est nul, et donc : 446 Chimie

$$\Delta_{fus} H^{\circ}_{\mathrm{Al}_2\mathrm{O}_3(300)} = \Delta_{fus} H^{\circ}_{\mathrm{Al}_2\mathrm{O}_3(2183)} = +110 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

On procède de même pour le chrome :

$$\Delta_{fus} H^{\circ}_{Cr(300)} = \Delta_{fus} H^{\circ}_{Cr(2183)} = +20 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

On en déduit :

$$\Delta_r H_{300}^{\circ}(3) = \Delta_{fus} H_{\text{Al}_2\text{O}_3(300)}^{\circ} + 2\Delta_{fus} H_{\text{Cr}(300)}^{\circ} = 150 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

Et finalement :

$$\Delta_r H_{300}^{\circ}(2) = \Delta_r H_{300}^{\circ}(1) + \Delta_r H_{300}^{\circ}(3) = -410 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

Les caractéristiques thermiques de la réaction chimique étant maintenant connues, il reste à définir le système étudié :

– État initial : 0, 9 mol d'oxyde de chrome et 1, 8 mol d'aluminium, solides à $T_0 = 300$ K et à pression atmosphérique.

– État final (par bilan de matière) : 0, 9 mol d'alumine et 1, 8 mol de chrome, liquides à T_f et à pression atmosphérique.

Lors de la transformation du système, $\Delta H = Q_p$ car la transformation est isobare et $Q_p = 0$ car la réaction est considérée comme instantanée. Elle n'a donc pas le temps d'échanger de la chaleur. La transformation est donc **isenthalpique** : $\Delta H = 0$.

Comme il y a une réaction chimique et une élévation de température, et qu'on ne sait pas calculer la variation d'enthalpie que pour un phénomène à la fois, on crée un chemin fictif où la réaction aurait lieu de manière isotherme, et où ensuite la température des produits s'élève :

Exemple



Étape a (passage de l'état initial à l'état fictif)

$$\Delta H^a \approx \Delta H^{a\circ} = \Delta_r H^o_{300}(2) \times \xi$$

L'avancement de la réaction étant de $\xi = 0, 9$ mol, on trouve : $\Delta H^a = -369$ kJ.

Remarque

L'assimilation de l'enthalpie à l'enthalpie standard est ici une excellente approximation car on travaille avec des corps purs condensés qui ne diffèrent de l'état standard que par la pression éventuellement un peu différente de $P^\circ = 1$ bar. Mais les propriétés des corps condensés dépendent très peu de la pression.

$$\Delta H^b \approx \int_{300}^{T_f} (0, 9 \times C_{p \operatorname{Al}_2 \operatorname{O}_3}^\circ + 1, 8 \times C_{p \operatorname{Cr}}^\circ) \mathrm{d}t.$$

On obtient : $\Delta H^b = 180 \times (T_f - 300).$

Bilan : $\Delta H^a + \Delta H^b = 0$, donc :

$$T_f = 300 + \frac{369}{0,180} = 2350 \text{ K} (2077 \ ^\circ\text{C})$$

On trouve une température finale supérieure aux températures de fusion des deux produits, ce qui confirme qu'on les obtient liquides.

2. Application du second principe à la transformation chimique

Exercice 1

1. $\Delta_f S^{\circ}(H_2, g) = 0 \text{ J.K}^{-1} . \text{mol}^{-1}$; $\Delta_f S^{\circ}(H_2O, l) = -163, 2 \text{ J.K}^{-1} . \text{mol}^{-1}$; $\Delta_f S^{\circ}(H_2O_2, aq) = -191, 7 \text{ J.K}^{-1} . \text{mol}^{-1}$.

2. On peut utiliser la définition de $\Delta_r S^\circ = \sum_i v_i S^\circ_{m,i}$ ou la loi de Hess : $\Delta_r S^\circ = \sum_i v_i \Delta_f S^\circ_i$. Dans les deux cas, on obtient 57 J.K⁻¹.mol⁻¹.

3. Les coefficients stœchiométriques interviennent dans le calcul de $\Delta_r S^\circ$. La valeur serait donc changée.

Exercice 2

L'équation de la réaction définissant K_s est :

$$Fe(OH)_{3(s)} = Fe_{(aq)}^{3+} + 3 HO_{(aq)}^{-}$$

avec
$$\Delta_r G^\circ = \sum_i \nu_i \mu_i^\circ = 221, 4 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

On en déduit :
$$K_s = K^\circ = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right) = 1,55 \times 10^{-39}.$$

IF Attention à la conversion, souvent omise, des $kJ.mol^{-1}$ en $J.mol^{-1}$.

Exercice 3

On calcule successivement :

 $\Delta_r S^\circ = -198,7 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1} \qquad \Delta_r G^\circ = -32,94 \text{ kJ.mol}^{-1} \qquad K^\circ = 1,68 \times 10^{-6}$ $\Delta_r H^\circ = \Delta_r G^\circ + T \Delta_r S^\circ = -92,1 \text{ kJ.mol}^{-1} : \text{la réaction est exothermique car } \Delta_r H^\circ < 0.$

Exercice 4

• On part de la définition
$$K^{\circ} = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^{\circ}}{RT}\right) = \exp\left(-\frac{\Delta H_r^{\circ}}{RT} + \frac{\Delta_r S^{\circ}}{R}\right).$$

corrigés

Chimie

- À la température des données, on calcule :
- avec la loi de Hess :

$$\Delta_r H^\circ = \sum_i \nu_i \Delta_f H_i^\circ = -2 \times (-297) + 2 \times (-396)$$

d'où $\Delta_r H^\circ (298K) = -198 \text{ kJ.mol}^{-1}.$
- avec la définition :

$$\Delta_r S^\circ = \sum_i \nu_i S^\circ_{mi} = -2 \times 248 + (-205) + 2 \times 257$$

d'où $\Delta_r S^{\circ}(298K) = -187 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

• Dans le cadre de l'approximation d'Ellingham, on a :

$$\Delta_r S^{\circ}(T) = \Delta_r S^{\circ}(298K)$$
 et $\Delta_r H^{\circ}(T) = \Delta_r H^{\circ}(298K)$

dans un domaine de température où aucun constituant ne change d'état.

• Application numérique :

$$K^{\circ} = \exp\left(-\frac{-198 \times 10^3}{8,31 \times 298} + \frac{-187}{8,31}\right) = 8,9 \times 10^{24} \text{ à } 298 \text{ K}.$$

Solution $\Delta_f H^{\circ}(O_2, g) = 0$ car $O_2(g)$ est l'état standard de référence de l'élément O. Ne pas oublier de convertir les $kJ.mol^{-1}$ en $J.mol^{-1}$.

Interprétation physique des valeurs calculées

– Comme $\Delta_r H^\circ < 0$, la réaction est exothermique dans le sens direct; Q < 0 est la chaleur perdue par le système chimique.

– Comme $\Delta_r S^\circ < 0$, la réaction dans le sens direct contribue à diminuer le désordre du milieu en diminuant la quantité de matière de gaz, état le plus désordonné.

- Comme $K^{\circ} > 1$, le sens direct de réaction est favorable à cette température.

Exercice 5

On va utiliser la loi de Hess et rechercher une combinaison linéaire soit à partir des équations de réaction, soit par un cycle de transformations.

(1)	$\mathrm{H}_{3}\mathrm{O}^{+} + \mathrm{H}\mathrm{O}^{-} = 2\mathrm{H}_{2}\mathrm{O}$	$K_1^\circ = \frac{1}{K}$
(2)	$CH_3COOH + H_2O = CH_3COO^- + H_3O^+$	$K_2^\circ = K_A$
(3)	$CH_3COOH + HO^- = CH_3COO^- + H_2O$	K_3°

Comme (3) = (2) + (1), on obtient : $\Delta_r X_3^\circ = \Delta_r X_2^\circ + \Delta_r X_1^\circ$

$$\Delta_r H_3^\circ = \Delta_r H_2^\circ + \Delta_r H_1^\circ$$

$$\Delta_r G_3^\circ = \Delta_r G_2^\circ + \Delta_r G_1^\circ \Longrightarrow -RT \ln K_3^\circ = -RT \ln K_2^\circ - RT \ln K_1^\circ$$

$$\Longrightarrow \ln K_3^\circ = \ln K_2^\circ + \ln K_1^\circ = \ln(K_1^\circ K_2^\circ)$$

On obtient donc : $\ln K_3^\circ = \frac{K_A}{K_e}$.

Exercice 6

Commençons par un tableau d'avancement (en mol) :

	$[CaCl_2, NH_3]_{(s)}$	=	CaCl _{2(s)}	+	$NH_{3(g)}$
état initial	0,10		0		0
état final	$0, 10 - \xi$		ξ		ξ

Hypothèse : l'état final est un équilibre chimique.

Dans ce cas, à l'état final, $Q_{r,final} = K^{\circ} = \frac{a_{\text{CaCl}_2} a_{\text{NH}_3}}{a_{\text{CaCl}_2,\text{NH}_3}} = \frac{1 \frac{p_{\text{NH}_3}}{p^{\circ}}}{1} = \frac{p_{\text{NH}_3}}{p^{\circ}}$.

Si le système est finalement à l'équilibre chimique, on a :

 $p_{\text{NH}_3, final} = K^{\circ}(500K) \times p^{\circ} = 1,86$ bar.

Alors $p_{\text{NH}_3,final} = \frac{\xi_{eq}RT}{V}$ donc $\xi_{eq} = \frac{p_{\text{NH}_3,final}V}{RT} = 0,45$ mol, ce qui traduit l'avancement si le système final est à l'équilibre chimique.

Validité de l'hypothèse?

L'état initial ne contient que [CaCl₂, NH₃]_(s) : seule une évolution dans le sens direct est possible (il n'y a pas de quoi réaliser initialement la réaction en sens inverse).

La consommation totale de [CaCl₂, NH₃]_(s) donnerait : 0, 10 – ξ = 0 soit ξ_{max} = 0, 10 mol, C'est la valeur maximale de l'avancement en fonction des conditions initiales.

Conclusion : ξ_{eq} ne peut être atteint car $\xi \in [0, \xi_{max}]$ soit $0 \le \xi \le 0, 10$ mol.

Or, $\xi_{eq} = 0,45$ mol donc le système en évolution vers l'équilibre s'arrête d'évoluer avant d'avoir atteint l'équilibre $(Q_{r,final} < K^{\circ})$. À l'état final, $[CaCl_2, NH_3]_{(s)}$ a été totalement consommé (possible car c'est un solide).

Donc l'état final est :

 $n_{\text{CaCl}_2,\text{NH}_3} = 0 \text{ mol.}$

 $n_{\text{CaCl}_2}n_{\text{NH}_3} = 0, 10 \text{ mol soit } p_{\text{NH}_3} = \frac{RTn_{\text{NH}_3}}{V} = 0, 42 \text{ bar.}$

Remarque

Si V = 1,0 L, alors dans l'hypothèse d'un équilibre chimique final, $\xi_{eq} = 0,045$ mol. Cette fois, ξ_{eq} peut être atteint car ξ peut prendre une valeur dans l'intervalle [0; 0, 10 mol] : $0 \le 0,045 \le 0,10$ mol, donc l'état final est un équilibre chimique :

$$Q_{r,final} = K^{\circ} \Longrightarrow \xi_{final} = \xi_{eq} = 0,045 \text{ mol.}$$

Donc l'état final est :

 $n_{\text{CaCl}_2,\text{NH}_3} = 0,045 \text{ mol.}$

 $n_{\text{CaCl}_2} = n_{\text{NH}_3} = 0,10 \text{ mol soit } p_{\text{NH}_3} = \frac{RTn_{\text{NH}_3}}{V} = 1,86 \text{ bar.}$

Conseil

Quand on demande de calculer un avancement à l'équilibre ou des quantités de matière à l'équilibre, il faut toujours vérifier la cohérence de la valeur trouvée. La valeur de l'avancement ξ peut être négative (cela signifie que le système évolue dans le sens inverse), mais elle ne peut conduire à des quantités de matière négatives par exemple.

3. Les courbes intensité-potentiel

Exercice 1

Notons E_e (pour $E_{\text{electrode}}$) le potentiel pour lequel la vague de réduction « décolle » de l'axe des abscisses et E le potentiel d'équilibre donné par la relation de Nernst :

 $E_e = E + \eta_c = (E^\circ - 0,06 \text{ pH}) + \eta_c \text{ avec } \eta_c < 0$ Donc $\eta_c = E_e - E^\circ + 0,06 \text{ pH}$

On lit sur la courbe i = f(E): $E_{e(surHg)} = -2, 2$ V et $E_{e(surFe)} = -1, 2$ V

Application numérique :

 η_c (sur Hg) = -2, 2 - 0, 00 + 0, 06 × 14 = -1, 36 V η_c (sur Fe) = -1, 2 - 0, 00 + 0, 06 × 14 = -0, 36 V.

Exercice 2

1. Système Ag⁺/Ag

a) Voir paragraphe 2-2. S'il s'agit d'un système rapide, il n'y a pas de surtension anodique et la courbe « décolle »au potentiel d'équilibre donné par la loi de Nernst :

 $E = E^{\circ}(Ag^+/Ag) + 0,06 \log[Ag^+] = 0,80 + 0,06 \log(1,0 \times 10^{-2}) = 0,68 \text{ V}$ à compléter sur la courbe i = f(E):



Si c'était un système lent, la courbe « aurait décollé »à : $E = E^{\circ} + \eta_a$.

b) Voir paragraphe 2-3 a)

 \succ Le courant cathode i_c est limité par la diffusion des ions argents Ag⁺ avec

 $i_{D_{\text{cathode}}} = n F S k_{DAg^+}[Ag^+]$ avec $n = n_{\text{électrons échangés}} = 1$;

F: la constante de Faraday = 96 500 C.mol⁻¹;

S : la surface de l'électrode d'argent ;

 k_{DAg^+} : le coefficient de diffusion des ions argent et $[Ag^+]$ qui disparaît au cours de la réduction, d'où la limitation.

> Mais le courant anodique i_A ne peut pas être limitée car le réducteur $Ag_{(s)}$, solide, n'a pas à être transporté car il s'agit de l'électrode.

2. Courbe @

a) La première vague de réduction correspond à :

$$IO_3^- + 6 H^+ + 5 e^- = \frac{1}{2} I_2 + 3 H_2O$$

Il s'agit d'un système lent lié à un profond changement de structure de IO_3^- se réduisant en I₂. La deuxième vague de réduction correspond à :

$$\frac{1}{2}$$
 I₂ + e⁻ = I⁻.

Voir § 2-3 b) : dans les deux cas, la vitesse est limitée par la diffusion de IO_3^- vers l'électrode. La différence de hauteur est proportionnelle au nombre d'électrons échangés :

n = 5 pour la première vague,

n = 1 pour la deuxième vague, ce qui explique que la première vague ait une hauteur 5 fois supérieure à la deuxième.

b) Prévoir la courbe d'oxydation d'une solution d'ions iodure Γ sur électrode de platine. Les courbes d'oxydation anodiques $(i_a > 0) = \ll$ inverse »des courbes de réduction étudiées précédemment, la première vague ayant cette fois une hauteur 5 fois inférieure à la deuxième.

Première vague d'oxydation : $I^- = \frac{1}{2} I_2 + e^-$; Deuxième vague d'oxydation : $\frac{1}{2} I_2 + 3 H_2O = IO_3^- + 6 H^+5 + e^-$.

La vitesse est cette fois limitée par la diffusion des ions iodure I⁻ vers l'électrode.



4. Phénomènes de corrosion humide

Exercice 1

Frontières non redox au n.O +II					
Zn^{2+}	$Zn(OH)_{2(s)}$	$Zn(OH)_4^{2-}$			
$Zn(OH)_{2(s)} = Zn^2$	+ + 2 HO Zn(OH)	$_{2(s)}$ + 2 OH ⁻ = Zn(OH) ₄ ²⁻			
de constante K	$T_{\rm S} = 10^{-\rm pKs}$ de constante	$K^{\circ} = \beta_4 * K_{\rm S} = 10^{15.5} * 10^{-16} = 10^{-0.5}$			
$K_{\rm S} = [\rm Zn^{2+}] $	[HO ⁻] ² K ^o =	$=\frac{[Zn(OH)_{4}^{2^{-}}]*c^{\circ}}{[HO^{-}]^{2}}$			
d'où [HO ⁻] = $\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{10^{-16}}{10^6} = \frac{Ke}{[H30+]}$ [HC	$D^{-}] = \sqrt{\frac{1*10^{-6}}{10^{-0.5}}} = \frac{Ke}{[H30+]}$			
Or, pH=-log $\frac{[H30+]}{C^{\circ}}$ pH	= 9,0 pH	I = 11,25			
Fre	Frontières redox: étude du couple II/0				
	$Zn^{2+} + 2 e^{-} = Zn_{(s)}$				
	$E = E_{Zn2+/Zn}^{\circ} + \frac{0.06}{2} \log \frac{[Zn2+]}{C^{\circ}}$				
$[Zn^{2^+}] = 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$	$[Zn^{2+}] = K_S / [HO^{-}]^2$	Par définition, $\beta_4 = \frac{[Zn(OH)_4^2] * C^{\circ 4}}{Zn(OH)_4^2}$			
$E = -0.76 + \frac{0.06}{2} \log \frac{10^{-6}}{1}$	$= Ks * [H_30]^2 / Ke^2$	$[Zn^{2+}][HO^{-}]^{4}$			
E = -0.94 V	$E = -0.76 + \frac{0.00}{2} \log$	Donc $\beta_4 = \frac{[2\pi(0\pi)_4] + [130]}{[7\pi^{2+}] * Ke^4 * C^{\circ 4}}$			
,	$10^{-16} * [H30+]^2$	$[Z_{n}^{2+}] = [Z_{n}(OH)_{4}^{2-}] * [H_{3}O^{+}]^{4}$			
	$(10^{-14})^2$	$\begin{bmatrix} Zn \end{bmatrix} = \frac{\beta 4 * Ke^4 * C^{\circ 4}}{\beta 4 * Ke^4 * C^{\circ 4}}$			
		$E = -0.76 + \frac{0.06}{2} \log$			
	E= -0,40 - 0,06 pH	$10^{-6} * [H30^+]^4$			
		$10^{15,5}*(10^{-14})^4*1^4$			
		E = 0,275 - 0,12 pH			

452 Chimie

On obtient alors le diagramme E-pH donné au paragraphe 2-1-b).

Exercice 2

	Frontières non redox au n.O +III		
Fe ³⁺	$Fe_2O_{3(s)}$		
$\frac{1}{2}Fe_2O_{3(s)} + 3H_2O =$	$Fe^{3+} + 3 HO^{-}$		
de constante $K_{\rm S}$ =	= 10 ^{-pKs}		
$K_{\rm S} = [{\rm Fe}^3]$	-][HO-] ³		
d'où [HO]	$3 = \frac{10^{-43}}{10^6}$		
Or, pH=-log $\frac{[H30+]}{C^{\circ}}$ donc pH	= 1,67		
Fro	ntières redox: étude du couple III/II		
	$\mathrm{Fe}^{3+} + \mathrm{e}^{-} = \mathrm{Fe}^{2+}$		
	$E = E^{\circ}_{Fe3+/Fe2+} + \frac{0.06}{1} \log \frac{[Fe2+]}{[Fe3+]}$		
$[\mathrm{Fe}^{3^+}] = [\mathrm{Fe}^{2^+}] = 10^{-6} \mathrm{mol.L}^{-1}$	$[\mathrm{Fe}^{2^+}] = 10^{-6} \mathrm{mol.L}^{-1}$		
$E=0,77+\frac{0,06}{1}\log\frac{10^{-6}}{10^{-6}}$	$et K_{\rm S} = [{\rm Fe}^{3+}][{\rm HO}^{-}]^3$ d'où $[{\rm Fe}^{3+}] = \frac{Ks * [H30+]^3}{Ke^3}$		
	$E = 0.77 + \frac{0.06}{\log \log (10^{-43} * [H30+]^3)}$		
E=0,77 V	E = 1.07 - 0.18 pH		
Fre	ontières redox: étude du couple II/0 Point d'intersection		
	$Fe^{2^+} + 2e^- = Fe$		
	$E = E^{\circ}_{Fe^{2+/Fe}} + \frac{0.06}{\log \log \frac{[Fe^{2+}]}{\log \log \frac{Fe^{2+}}{\log \log \log$		
	$p_{11} - 3, 4$		
	$E = -0,44 + \frac{1}{2} \log \frac{1}{1}$		
	E = -0,62 V.		
Fro	ntières redox: étude du couple III/0		
$Fe_2O_{3(s)} + 6 H + 6 e = 2 Fe_{(s)} + 3 H_2O$			
$E = E_{Fe2O3/Fe}^{\circ} + \frac{0.06}{6} \log \frac{[H+]^{\circ}*1}{1}$			
	$E = E^{\circ}_{Fe2O3/Fe} - 0,06 \text{ pH}$		
Par continuité, la droite doit passer par le point: pH=9,4, E=-0,62V			
donc $-0.62 = E^{\circ}_{Fe2O3/Fe} - 0.06 * 9.4$, soit $E^{\circ}_{Fe2O3/Fe} = -0.06$ V.			
E = -0,06 - 0,06 pH			

On obtient alors le diagramme E-pH du fer donné dans le paragraphe 2-1-c).

Exercice 3

Le phénomène est dû à la différence de l'épaisseur de la goutte d'eau sur les pièces métalliques. En effet, la partie située au centre de la goutte est la zone la moins aérée (zone anodique).



Zone la moins aérée au centre: ANODE +: oxydation $Fe_{(s)} = Fe^{2+} + 2e^{-}$

Zone la plus aérée à la périphérie: CATHODE -: réduction $O_{2(g)} + 2 H_2O + 4 e^- = 4 HO^-$

Puis il s'ensuit une réaction chimique : $Fe^{2+} + 2 HO^{-} = Fe(OH)_{2(s)}$

Ce précipité d'oxyde ferreux se transformant lentement en hydroxyde ferrique par oxydation par le dioxygène de l'air dissout dans la solution :

$$Fe(OH)_{2(s)} + O_2 + 4 H_2O = 4 Fe(OH)_{3(s)}$$
 ou $2 Fe(OH)_{2(s)} + \frac{1}{2} O_2 = Fe_2O_{3(s)} + 2 H_2O$

Quand la goutte s'évapore, on remarque la formation d'un point de rouille au centre. Il s'agit de la corrosion dite « par piqûre ». Elle concerne toutes les structures métalliques qui sont au bord de la mer.

Exercice 4

La corrosion par aération différentielle intervient souvent et peut être la cause de pertes métalliques importantes, fragilisant le métal en profondeur, alors que sa partie apparente semble intacte.

• Cas d'une barre enfouie dans le sol et recouverte d'eau de mer



Remarque : La rouille formée est non adhérente. Elle flotte et ralentit la pénétration de l'oxygène, ce qui entraîne une augmentation de la différence de concentration en oxygène et par suite une augmentation de la vitesse de corrosion.

• Piles géologiques : cas d'une canalisation en fer enterrée dans un sol traversant des endroits différents : entre une zone argileuse (très faiblement perméable à O_2) et une zone sableuse (fortement perméable à O_2).



La corrosion du métal a lieu dans la zone argileuse (faible $[O_2]$) alors que la partie dans la zone sableuse n'est pratiquement pas altérée.

Exercice 5

1. $2 \operatorname{Al}_{(s)} + 6\mathrm{H}^+ \rightarrow 2 \operatorname{Al}^{3+} + 3\mathrm{H}_2$

2. Dans les deux expériences, le potentiel standard $E^{\circ}(H^+/H_2)$ de démarrage sur l'axe des abscisses n'a pas changé.

Il existe donc une très faible surtension cathodique de H⁺ sur Fe permettant l'existence d'un potentiel mixte et donc d'un courant de corrosion $i_{corr} = i_a$ et une plus forte surtension catho-

dique $\eta' c$ de H⁺ sur Al.



3. $[HO^-] = 1,0 \text{ mol.}L^{-1} \text{ donc pH} = 14.$ D'après le diagramme potentiel-pH, à pH=14, l'espèce prédominante est l'ion AlO₂⁻ qui est soluble : l'oxydation se poursuit donc en profondeur aux pH élevés.

Exercice 6

1. On a
$$v_{max} = \frac{e}{\Delta t}$$
 et $Q = j_{cor}.S.\Delta t$ qui représente $\frac{j_{cor}.S.\Delta t}{2F}$ moles de zinc, et donc une masse $m = \frac{j_{cor}.S.\Delta t}{2F} \cdot M_{Zn}$.

Le volume associé est $V = \frac{m}{\mu_{Zn}}$ et V = S.e d'où $v_{max} = \frac{j_{cor}.M_{Zn}}{2F.\mu_{Zn}}$.

2. $v_{max} = 1800 \,\mu\text{m}$ par an, c'est presque 2 mm par an. Le zinc va vite être corrodé.

3. Il faut choisir le zinc car c'est lui qui possède le potentiel standard le plus petit. Ce sera donc l'anode dans la pile de corrosion. Il s'oxydera à la place du fer dont on souhaite conserver l'intégrité.

Si on choisit le nickel, l'anode où se produit l'oxydation sera le fer (le nickel étant la cathode) d'où une corrosion accélérée du poteau en fer, ce que l'on ne souhaite pas.

5. Les piles

Exercice 1

1. Le diagramme montre que, quel que soit le pH, on a $E_2 > E_1$ donc le cadmium solide réduit l'oxyde de nickel Ni₂O_{3(S)} et s'oxyde en Cd²⁺ ou Cd(OH)_{2(S)}.

L'électrode (1) est donc l'anode et produit des électrons. La borne positive de l'accumulateur (d'où sort le courant) est donc l'électrode (2).

À l'anode, électrode (1), pôle négatif, se produit l'oxydation :

 $Cd_{(S)} + 2 OH^{-} = Cd(OH)_{2(S)} + 2e^{-}$ en milieu basique.

À la cathode, électrode (2), pôle positif, se produit la réduction :

 $Ni_2O_{3(S)} + 3 H_2O + 2e^- = 2$:Ni(OH)_{2(S)} + 2 OH⁻ en milieu basique.

Le bilan mis en jeu dans l'accumulateur est donc :

 $Cd_{(S)} + Ni_2O_{3(S)} + 3 H_2O = 2 Ni(OH)_{2(S)} + Cd(OH)_{2(S)}.$

corriges

Chimie

2. Une solution de potasse (KOH) concentrée est basique. D'après les questions précédentes, on peut donc écrire :

$$E = E_2 - E1 = (1,032 - 0,059 \text{ pH}) - (0,013 - 0,059 \text{ pH}) = 1,019 \text{ V}.$$

Cette f.e.m. ne dépend pas du pH, c'est-à-dire de la concentration en potasse.

3. Les deux couples d'espèces redox mis en jeu dans les conditions d'utilisation sont du type solide/solide. On peut donc penser que ce sont des systèmes rapides sans palier de diffusion (puisqu'il n'y a pas d'ions directement concernés).

On peut alors prévoir que les courbes intensité-potentiel ont l'allure suivante :



La tension de fonctionnement de l'accumulateur, notée $U_{I\neq0}$ ou e, est inférieure à la f.é.m e_0 calculée ci-dessus à causes des surtensions dues à l'intensité débitée et à la chute de potentiel due à la résistance interne de l'électrolyseur.

6. Les électrolyseurs et les accumulateurs

Exercice 1

1. Réactions envisageables et calcul de leur potentiel redox à l'aide de la relation de Nernst :

À l'anode (oxydation), pôle ⊕

$$2H_2O = O_2 + 4H^+ + 4e^-$$

$$E(O_2/H_2O) = E^{\circ}(O_2/H_2O) + \frac{0,06}{4}\log\frac{p_{O_2}\cdot[H^+]^4}{a_{H_2O}^2\cdot c_0^4\cdot p^{\circ}}$$

$$= 1,23 + \frac{0,06}{4}\log\frac{1 \times 10^{-pH^4}}{1^2 \times 1^4 \times 1} = 1,23 - 0,06 \text{ pH} = 0,99 \text{ V}.$$

$$2\mathrm{Cl}^- = \mathrm{Cl}_2 + 2e^-$$

$$E(\text{Cl}_{2(aq)}/\text{Cl}^{-}) = E^{\circ}(\text{Cl}_{2}(aq)/\text{Cl}^{-}) + \frac{0,06}{2}\log\frac{p_{\text{Cl}_{2}}.c_{0}^{2}}{[\text{Cl}^{-}]^{2}.p^{\circ}} = 1,40 \text{ V}.$$

À la cathode (réduction), pôle ⊖

$$2H^{+} + 2e^{-} = H_{2}$$

$$E(H^{+}/H_{2}) = E^{\circ}(H^{+}/H_{2}) + \frac{0,06}{4} \log \frac{[H^{+}]^{2} \cdot p^{\circ}}{p_{H_{2}}^{1} \cdot c_{0}^{2}} = 0,00 + \frac{0,06}{4} \log \frac{1 \times (10^{-pH})^{2} \times 1}{1^{1} \times 1^{2}}$$

$$= E^{\circ}(H^{+}/H_{2}) - 0,06 \text{ pH} = -0,24 \text{ V}.$$
Na⁺ + e⁻ = Na

456 Chimie

$$E(\text{Na}^+/\text{Na}) = E^{\circ}(\text{Na}^+/\text{Na}) + \frac{0,06}{21}\log\frac{[\text{Na}^+]}{a_{\text{Na}}^1 \cdot c_0^{12}} = -2,71 \text{ V}$$

• Du seul point de vue thermodynamique Réaction : électrolyse de l'eau : $2H_2O = O_2 + 4H^+ + 4e^-$ et $2(2H^+ + 2e^- = H_2)$ donne le bilan :



2. Anode en titane

« Démarrage »de la courbe de : ➤ réduction anodique de H₂O → O₂ à : $E(O_2/H_2O) + \eta_{aO_2/H_2OsurTi} = 0,99 + 1,4 = +2,39$ V. ➤ réduction anodique de Cl⁻ → Cl₂ à : $E(Cl_{2(aq)}/Cl^{-}) + \eta_{aCl_2/Cl^{-}surTi} = +1,40 + 0,1 = +1,50$ V

 \implies Cette oxydation, plus facile, a lieu en premier : $2Cl^{-} = Cl_2 + 2e^{-}$

La très forte surtension de O_2/H_2O sur *Ti* provoque un dégagement anodique de Cl_2 .

3. Cathode en mercure

« Démarrage »de la courbe de :

➤ réduction cathodique de $H^+ \rightarrow H_2$ à :

 $E(\mathrm{H}^+/\mathrm{H}_2) + \eta_{c\mathrm{H}^+/\mathrm{H}_2 sur\mathrm{Hg}} = -0, 24 - 1, 6 = -1, 84 \mathrm{V}.$

▶ réduction cathodique de Na⁺ \rightarrow Na(Hg) (système rapide) à :

 $E(\text{Na}^+/\text{Na}(\text{Hg})) + \eta_{c\text{Na}^+/\text{NasurHg}} = -1,70 - 0 = -1,70 \text{ V}$: réduction en premier !

 \implies Cette réduction, plus facile, a lieu en premier : Na⁺ + e^- + Hg_(l) = Na(Hg)

La très forte surtension de H⁺/H₂ sur Hg provoque un dégagement cathodique de Na_(s).

4. Courbe intensité-potentiel

À l'anode :
À la cathode :
Équation-bilan de l'électrolyse :

$$2 \text{ Cl}^- = \text{Cl}_2 + 2e^-$$

 $Na^+ + e^- + \text{Hg}_{(l)} = \text{Na}(\text{Hg})$ ×2
 $2 \text{ Na}^+ + 2 \text{ Cl}^- + 2 \text{ Hg}_{(l)} \rightarrow \text{Cl}_2 + 2 \text{ Na}(\text{Hg})$



D'après les courbes i - E ci-dessus : $U_{min} = E(Cl_{2(aq)}/Cl^{-}) - E(Na^{+}/Na(Hg) = 1, 40 - (-1, 70) = 3, 10 \text{ V}$ à courant nul. $U_{seuil} = E(\text{Cl}_{2(aq)}/\text{Cl}^{-}) + \eta_{a\text{Cl}_2/\text{Cl}^{-}surTi} - (E(\text{Na}^+/\text{Na}(\text{Hg})) + \eta_{c\text{Na}^+/\text{Na}sur\text{Hg}})$ = 1,50 - (-1,70) = 3,20 V à courant nul.

Tension de fonctionnement :

 $U(i) = U_{a \text{ appliquer}} - r.i = U_{min} + \eta_{a(i)} + |\eta_{c(i)}|.$

5. On a U_{a} appliquer = 3,9 V car il faut prendre en compte la chute ohmique r.i. Pour calculer une masse d'un dépôt à l'électrode, on utilise la loi de Faraday :

Na⁺ +
$$e^-$$
 + Hg_(l) = Na(Hg) avec $n_1 = 1$
 $m_{\text{Na(Hg)}} = \frac{i.\Delta t}{n_1.F} M_{\text{Na(Hg)}}$ avec $i = j.S$ On obtient donc :

$$m_{\rm Na(Hg)} = \frac{j.S.\Delta t}{n_1.F} M_{\rm Na(Hg)}$$

Application numérique : $m_{\text{Na(Hg)}} = \frac{1 \times 200 \times 3600}{1 \times 96500} \times 23 = 171, 6 \text{ g.}$ En une heure, il s'est déposé 171, 6 g de sodium amalgamé sur la cathode.

Exercice 2

1. Pour recharger l'accumulateur, il faut le relier en opposition d'une source de tension constante dont la f.e.m. est supérieure à celle de l'accumulateur qui fonctionne alors en électrolyseur.

L'électrode (1) de l'accumulateur est reliée au pôle (-) de la source et il s'y produit :

corrigés

Chimie

458 Chimie

$$Cd(OH)_{2(S)} + 2e^{-} = Cd_{(S)} + 2OH^{-}.$$

L'électrode (2) de l'accumulateur est reliée au pôle (+) de la source et il s'y produit :

$$2 \operatorname{Ni}(OH)_{2(S)} + 2OH^{-} = \operatorname{Ni}_{2}O_{3(S)} + 3H_{2}O + 2e^{-}.$$

On a alors le diagramme suivant :



On constate qu'à cause des surtensions dues à l'intensité de charge, on a toujours U_{charge} plus grande que la f.é.m. de l'accumulateur $E_2(pH) - E_1(pH)$.

Si la tension de charge imposée est trop grande, on peut provoquer la réduction de l'eau en $H_{2(G)}$ ou son oxydation en $O_{2(G)}$.

2. Si l'accumulateur est scellé, les gaz éventuellement formés au cours de l'électrolyse ne peuvent s'échapper. Ils s'accumulent à l'intérieur de l'accumulateur et créent une surpression qui peut entraîner une explosion. Il faut donc absolument éviter l'électrolyse de l'eau qui se traduit par la formation des gaz H_2 et O_2 .

La tension minimale pour cette électrolyse est $U_{min} = 1, 23 - 0 = 1, 23$ V à pH = 0 si l'on ne tient pas compte des surtensions. À cause de celles-ci, on a U_{min} de l'ordre de 1, 8 V. Il faut donc choisir une tension de charge d'environ 1, 6 V. L'écart avec la f.é.m. de l'accumulateur montre que l'intensité nécessaire sera élevée et donc que la réaction (c'est-à-dire la recharge de l'accumulateur) sera rapide.

Index des mathématiques

équation différentielle, 64 Abel (lemme d'), 50 algèbre, 18 anneau intègre, 15 application linéaire continue, 38 arc paramétré, 57 automorphisme, 14 orthogonal, 28 barycentre, 31 Bayes, 80 Bessel, 26 Bézout (th.), 18 Bienaymé-Tchebychev, 88 boule fermée, 35 ouverte, 35 Cauchy linéaire (th.), 65 Cayley-Hamilton (th.), 24 chinois (th.), 16 coefficients constants, 66 compacité, 39 congruence, 15 continuité uniforme, 38 convergence dominée, 61 normale, 47 simple, 45, 46 uniforme, 45, 47 covariance, 87 d'Alembert règle de, 42 dérivée partielles d'ordre k, 75 partielles d'ordre 1, 70 selon un vecteur, 70 développement en série entière, 52 diamètre, 35 différentielle, 70 distance, 26, 35 diviseur de zéro, 15 droite normale, 58 tangente, 57 écart type, 87

endomorphisme, 14 diagonalisable, 21 induit, 20 symétrique, 27 trigonalisable, 22 espace probabilisable, 77 espace vectoriel normé, 34 espérance, 86 Euclide (algorithme), 17 Euler (th.), 16 exponentielle d'une matrice, 65 extrémum global, 73 local, 73 famille sommable, 43 Fermat (th.), 17 fonction analytique, 52 concave, 31 contractante, 38 convexe, 31 génératrice, 89 intégrable, 59 lipschitzienne, 38 frontière, 37 gradient, 72 groupe monogène, 13 Hölder (inégalité de), 32 idéal, 15, 17 indépendance (événements), 80 de deux v.a., 83 mutuelle, 83 indicatrice d'Euler, 16 inégalité de Hölder, 32 de Minkowski, 32 intégrale à paramètre, 62 absolument convergente, 59 convergente, 60 divergente, 60 généralisée, 59 intérieur, 36 isomorphisme, 14

Lagrange (th.), 13 lemme d'Abel, 50 loi binomiale, 89 de Bernoulli, 89 de Poisson, 84, 89 de probabilité, 82 faible des grands nombres, 88 géométrique, 84, 89 Markov, 88 matrice jacobienne, 71 orthogonale, 29 maximum global, 73 local, 73 minimum global, 73 local, 73 Minkowski (inégalité de), 32 moment, 87 morphisme, 19 d'anneaux, 14 de groupes, 11 norme, 34 équivalente, 35 ordre d'un élément, 13 d'un groupe, 11 partie bornée, 35 compacte, 39 connexe par arcs, 39 convexe, 31 dense, 36 fermée, 36 ouverte, 36 plan affine tangent, 74 point critique, 73 isolé, 37 stationnaire, 73 polynôme annulateur, 23 caractéristique, 21 minimal, 23 polynômes premiers entre eux, 17 probabilité, 77 conditionnelle, 79 probabilités composées, 79 totales, 79

produit de Cauchy, 43 projection orthogonale, 26 rayon de convergence, 50 règle de d'Alembert, 42 Schwarz (th.), 75 série absolument convergente, 42 alternée, 42 convergente, 41 de fonctions, 46 divergente, 41 entière, 50 harmonique alternée, 43 sommable (famille), 43 sommation L^1 , 62 sous-anneau, 14 sous-espace propre, 20 sous-groupe engendré, 12 spectre, 20 suite de fonctions, 45 supplémentaire orthogonal, 26 système homogène, 64 transfert (th. du), 86 tribu, 77 valeur propre, 20 valeurs intermédiaires, 39 variable aléatoire, 82 centrée réduite, 87 discrète, 82 variance, 87 variation de la constante, 67 variation des constantes, 68 vecteur propre, 20 vecteur tangent, 74 voisinage, 36 wronskien, 67

Index de la physique

échantillonneur-bloqueur, 153 accélération complémentaire, 136 d'entraînement, 136 de Coriolis, 136 Ampère (th.), 238, 239 approximation dipolaire, 244 bobine d'auto-induction, 266 capacité, 220 champ de gravitation, 222 électromagnétique, 269 électromagnétique réfléchi, 286 électrostatique, 204 champ d'interférences, 179 chemin optique, 169 circulation, 212 du champ magnétostatique, 238 coefficient de frottement dynamique, 143 statique, 143 compensatrice, 194 composante continue, 146 fondamentale, 147 composition des accélérations, 135 des vitesses, 134 conductance thermique, 315 conduction électrique, 248 conduction thermique, 307 conductivité thermique, 312 contact linéique, 142 ponctuel, 142 surfacique, 142 contact optique, 195 convection thermique, 307 Coulomb (loi de), 203 dérivation composée, 133 densité volumique de charge, 248 volumique de courant, 248, 255, 271 volumique de puissance, 263 déphasage, 168 dérivateur, 151

détecteur pyroélectrique, 176 détection photonique, 176 thermique, 176 diagramme de rayonnement, 294 différence de marche, 179 diffusion de Rayleigh, 298 de Thomson, 298 dispersion angulaire du réseau, 184 distribution canonique, 340 divergence, 252 durée de cohérence temporelle, 173 échantillonnage, 153 échantillonnage (th. d'), 155 éclairement énergétique, 175 effet de peau, 283 énergie thermique, 308, 311 énergie potentielle électrostatique, 215 épaisseur de peau, 283 équation aux valeurs propres, 322 de Schrödinger, 318 équation de continuité, 251 équations de Maxwell, 237, 254, 256 équations de la chaleur, 313 équations de propagation, 260 équipotentielle, 216 exitance énergétique, 175 facteur de contraste, 180 de visibilité, 180 facteur de Boltzmann, 338 Fermat (principe de), 170 figure d'interférences, 180 filtrage numérique, 160 filtre discret, 160 linéaire, 148 numérique, 160 passe-bande, 151 passe-bas, 150 passe-haut, 150 flux du champ électrostatique, 217 du champ magnétostatique, 237 flux énergétique, 175

flux thermique, 308 fonction d'onde, 318 de partition, 339 force d'inertie, 138 d'inertie d'entraînement, 139 d'inertie de Coriolis, 139 de Van der Waals, 230 magnétique, 246 force électrostatique de Coulomb, 203 formule de Fresnel, 179 de Larmor, 295 des réseaux, 183 formule d'échantillonnage, 158 frange d'interférences, 189 fréquence, 146 période d'échantillonnage, 153 fréquence de plasma, 277 Fresnel, 179 Gauss (surface de), 218 Gauss (th.), 217 grandeur discrète, 160 échantillonnée, 160 numérique, 160 quantifiée, 160 hamiltonien, 322 harmonique, 147 incohérence, 180 indicatrice d'émission, 294 indice optique, 164 induction électromagnétique, 258 intégrateur, 150 intensité du courant, 250 interaction de Debye, 231 de Keesom, 231 de London, 231 interférence, 179 interféromètre de Michelson), 194 interfrange, 190 invariance, 232 Laplace, 258 ligne de champ, 215, 236 ligne de courant, 249 loi d'Ohm locale, 281 de Coulomb, 203

lois de Coulomb (frottement), 143

longueur de cohérence temporelle, 173

Malus (th.), 168 Maxwell (equ), 254, 256 Maxwell (equ.), 237 Michelson (interféromètre de), 194 milieu homogène, 164 linéaire, 164 transparent, 164 molécule apolaire, 226 polaire, 226 moment dipolaire, 226, 243 dipolaire induit, 227 magnétique, 243 monochromatique, 172 nœud, 287

onde électromagnétique, 269 monochromatique, 271 plane, 269 plane scalaire, 165 progressive, 269 réfléchie, 286 sphérique scalaire, 165 stationnaire, 287 transversale, 269 ordre d'interférences, 189 particule libre, 323 période d'échantillonnage, 153 periodepériode, 146 permittivité diélectrique, 203 phase instantanée, 165, 166 photodiode, 176 photomultiplicateur, 177 photorésistance, 177 plan d'onde, 165 plan de polarisation, 273 plan équiphase, 165 plasma, 275 Poisson, 257 polarisation, 273 circulaire, 273 elliptique, 273 rectiligne, 273 polarisation par diffusion, 298 potentiel électrostatique, 257, 258 electrostatique, 212 de gravitation, 223 électrique, 292 retardé, 292 pouvoir de résolution, 184 Poynting (th), 263

INDEX DE LA PHYSIQUE

principe de Fermat, 170 principe de superposition, 204 quasi-monochromatique, 173 référentiel de Copernic, 140 géocentrique, 140 terrestre, 140 régime stationnaire, 314 raie spectrale, 172 rapport gyromagnétique, 341 rayon lumineux, 164 rayonnement d'accélération, 293 rayonnement thermique, 308 réflectance, 188 régime stationnaire, 253 réjecteur du continu, 150 relation de Newton, 307 relation de dispersion, 272, 277 repliement du spectre, 156 réponse impulsionnelle, 161 représentation fréquentielle, 172 spectrale, 147, 172 temporelle, 146, 172 réseau par transmission, 183 résistance thermique, 315 résistance de rayonnement, 297 rotation, 131 rotationnel, 213 séparatrice, 194 série de Fourier, 146

Shannon (th. de), 155 sources équivalentes, 195 spectre, 148, 216, 236, 339 statique d'un fluide, 337 surface de Gauss, 218 surface équipotentielle, 216 système invariant, 148 linéaire, 148 non linéaire, 151

thermopile, 176 train d'ondes, 172 transformée de Fourier, 148, 172 translation, 131 transmittance, 187 tube de champ, 236 tube de courant, 249 efficace, 146 moyenne, 146 vecteur d'onde, 165 vecteur de Poynting, 263, 271 vitesse d'entraînement, 134 vitesse de phase, 270

Young (trous de), 186

zone de rayonnement, 292

Index de la chimie

accumulateur, 438 anode, 400approximation d'Ellingham, 392 cathode, 400 convection, 401 courbe intensité-potentiel, 401 diffusion, 401 double couche, 401 électrolyseur, 432 Ellingham (approximation d'), 392 énergie cinétique macroscopique, 379 interne, 379 potentielle macroscopique, 379 enthalpie, 380 libre, 389 molaire partielle, 381 standard, 391 standard de formation, 383 standard de réaction, 383 état standard, 379 facteur cinétique, 401 Faraday (loi de), 437 Hess (loi de), 384 intensité de diffusion, 405loi de Faraday, 437 de Hess, 384 migration, 401 montage à 3 électrodes, 401 mur du solvant, 407 palier horizontal, 405 potentiel chimique, 390 mixte, 408quotient réactionnel, 392 réaction

> athermique, 383, 391 endothermique, 383, 391 exothermique, 383, 391

relation de Van't Hoff, 394 rendement faradique, 438 surtension anodique, 404 cathodique, 404 transfert de charge, 401 de matière, 401 transformation isenthalpique, 446 vague d'oxydation, 404 de réduction, 404 Van't Hoff (relation de), 394 variance, 395 zone d'activation, 401