Préface à l'édition française

Parmi cours d'initiation à la physique élaborés récemment présentant la physique moderne sous une forme accessible aux débutants, deux cours, ont acquis dans les pays anglo-saxons une renommée justifiée, les « Feynman lectures in Physics » et le « Berkeley Physics Course ». L'un et l'autre méritent d'être mis à la portée de l'étudiant français qui désire s'initier à la Physique du xx^e siècle.

Nos étudiants ont certes à leur disposition, à l'heure actuelle, d'excellent, cours français. Conformément au génie français, le sujet d'études y est présenté avec un souci de rigueur logique. Le scientifique anglo-saxon est généralement beaucoup plus pragmatique que son collègue latin. Il se tient toujours très près de l'expérience et cette tournure d'esprit se manifeste aussi dans les ouvrages pédagogiques anglo-saxons. L'oeuvre de Newton complète heureusement l'oeuvre de Descartes.

Au cours de ma longue expérience de l'enseignement de la physique, j'ai toujours estimé que l'étudiant devait être amené à se servir de sources d'information d'origines diverses. J'ai conseillé à mes étudiants de ne pas s'en tenir à étudier leurs cours, mais d'entreprendre la lecture de divers ouvrages didactiques et de lire notamment des auteurs étrangers. Pour ma propre formation, la lecture du livre de Physique atomique de Sommerfeld a été décisive.

Les éditions Armand Colin ont entrepris de mettre à la disposition de l'étudiant français le cours de Physique de Berkeley. Ce cours a été édité en cinq volumes, dont voici le second, consacré à l'initiation à l'électricité et au magnétisme. Les chapitres de ce cours ont été rédigés par de grands noms de la physique, par des hommes connus pour leur oeuvre personnelle et qui ont su donner à ce cours une marque originale en montrant le rôle que jouent les concepts fondamentaux dans la physique qui se fait de nos jours. Ils font comprendre au lecteur que la Physique est une science vivante, une activité humaine en plein développement qui offre aux jeunes un champ inépuisable de recherches.

Claude GUTNMANN et Pierre LALLEMAND qui sont à la fois des chercheurs et des enseignants se sont chargés de la traduction de ce volume. Ayant travaillé aux États-Unis, ils ont acquis la pratique de la langue anglaise et une solide connaissance des Universités américaines et des méthodes d'enseignement qui y sont pratiquées.

A. KASTLER

Préface au cours de physique de Berkeley

Ceci est un cours d'université pour les étudiants qui se spécialisent en sciences et dans le métier d'ingénieur. Les auteurs ont eu l'intention de présenter la physique élémentaire autant que possible de la façon dont elle est utilisée par les physiciens qui travaillent sur des sujets à l'avant-garde de leur domaine., Nous avons cherché à faire un cours qui mettrait vigoureusement l'accent sur les fondations de la physique. Plus spécialement, nous avons eu pour but d'introduire de façon cohérente dans un programme élémentaire, les notions de la relativité spéciale, de la physique quantique et de la physique statistique.

Ce cours est conçu pour tout étudiant qui a suivi des cours de physique au lycée. Il faudrait suivre, en même temps que le cours, un cours de mathématiques qui comprenne l'analyse.

Dans le domaine de la physique, on est en train de concevoir plusieurs cours de 1^{er} et 2e cycle. L'idée d'un nouveau cours est venue à beaucoup de physiciens, conscients des besoins requis à la fois pour faire avancer la science et les techniques et pour mettre davantage l'accent sur les sciences dans les collèges et les lycées. Notre propre cours fut conçu au cours d'une conversation entre Philip MORRISON de Cornell University et C. KITTEL, à la fin de 1961. Nous avons été encouragés par John MAYS et ses collègues de la National Science Foundation, et par Walter C. MICHELS alors président de la Commission de la Physique universitaire. On forma un comité informel pour guider le cours dans ses premières phases. A l'origine, le comité était formé de Luis ALVAREZ, Wiliam B. FRETTER, Charles KITTEL, Walter D. KNIGHT, Philip MORRISON, Edward M. PURCEIM, Malvin A. RUDERMAN et Jerrold R. ZACHARIAS. Le comité s'est réuni pour la première fois en mai 1962, à Berkeley. C'est là qu'il traça un schéma provisoire d'un cours de physique entièrement nouveau. A cause de lourdes obligations de plusieurs des membres fondateurs, le comité fut partiellement reconstitué en janvier 1964; il est maintenant formé par les signataires de cette préface. Les contributions des autres sont mentionnées dans les préfaces de chaque volume.

Le schéma provisoire et l'esprit qui s'y trouvait eurent une profonde influence sur les éléments finalement établis pour le cours. Le plan couvrait en détail les sujets et attitudes qui, croyons-nous, devraient et pourraient être enseignés à des étudiants d'université et d'école d'ingénieurs. Ce ne fut jamais notre intention de concevoir un cours limité aux meilleurs étudiants ou à ceux qui sont d'un niveau élevé. Nous avons cherché à présenter les principes de la physique en partant de points de vue neufs et unifiés : des parties du cours peuvent donc sembler presque aussi nouvelles aux enseignants qu'aux étudiants.

Les cinq volumes du cours, comme nous les avons prévus, comprendront

I. Mécanique (KITTEL, KNIGHT, RUDERMAN) II. Électricité et magnétisme (PURCELL) III. Ondes (CRAWFORD) IV. Physique quantique (WICHMANN) V. Physique statistique (REIF)

Les auteurs de chaque volume ont été libres de choisir le style et la méthode de présentation qui leur semblaient appropriés à leur sujet.

L'activité du cours initial a conduit Alan M. PORTES à constituer un nouveau manuel de travaux pratiques de physique élémentaire, maintenant connu sous le nom de Travaux Pratiques de physique de Berkeley. Parce que le cours met l'accent sur les principes de physique, certains professeurs peuvent avoir le sentiment qu'il ne traite pas suffisamment la physique expérimentale. Il faut alors que les travaux pratiques soient riches en expériences importantes, et qu'ils soient conçus pour contrebalancer le cours⁽¹⁾.

L'aide financière pour le développement du cours fut fournie par la National Science Foundation, avec une aide indirecte considérable de l'Université de Californie. Les fonds furent administrés par les Educational Services Incorporated, une organisation sans but lucratif créée pour administrer les programmes.

Notre gratitude va particulièrement à Gilbert OAKLEY, James ALDRICH et William JONES, tous à la ESI pour leur aide compréhensive et dynamique. ESI a créé à Berkeley un bureau sous la direction très compétente de M^{me} Minty R. MALONEY pour aider au développement du cours et du laboratoire. L'Université de Californie n'a aucune attache officielle avec notre programme, mais elle nous a aidés d'importantes façons. Pour cette collaboration, nous remercions en particulier les deux présidents successifs du département de Physique, August C. HELMOLZ et Burton J. MOYER ; les enseignants et le personnel non-académiques du département; Donald CONEY et beaucoup d'autres à l'Université. Abraham OLSHEN nous a beaucoup aidés au début pour les problèmes d'organisation.

Vos corrections et suggestions seront les bienvenues.

Eugene D. COMMINS Frank S. CRAWFDRD, Jr. Walter D. KNIGHT Philip MORRISON Alan M. PORTIS Edward M. PURCELL Frederick REIF Malvin A. RUDERMAN Eyvind H. WICHMANN Charles KITTEL, président

¹ Le manuel de travaux pratiques qui accompagne l'édition américaine de ce livre a été conçu dans cet esprit.

Préface au volume II

Ce volume du cours de physique de Berkeley traite de l'électricité et du magnétisme. A première vue, le plan du cours est tout à fait classique : électrostatique, courants stationnaires, champ magnétique, induction électromagnétique, polarisations électrique et magnétique de la matière. Notre approche est cependant différente de celle traditionnellement utilisée. Cette différence est particulièrement sensible dans les chapitres 5 et 6 où, en nous appuyant sur le contenu du volume I, nous traitons les champs électrique et magnétique créés par des charges en mouvement comme des manifestations de la relativité et de l'invariance de la charge. Cette approche attire l'attention sur quelques questions fondamentales, telles que : la conservation de la charge, l'invariance de la charge, le concept du champ. Les seules formules mathématiques de la relativité restreinte réellement nécessaires ici sont la transformation de Lorentz des coordonnées et la formule d'addition des vitesses. Il est cependant essentiel que l'étudiant apporte dans l'étude de cette partie du cours quelques-unes des idées et des attitudes de pensée que le volume I a cherché à développer chez lui - à savoir une aptitude à regarder les phénomènes dans des référentiels variés, une notion de l'invariance, et une certaine confiance dans les arguments de symétrie. Nous utiliserons aussi beaucoup dans le volume II, des raisonnements basés sur le principe de superposition.

Notre approche des phénomènes électrique et magnétique de la matière est d'abord « microscopique » et insiste sur la nature des dipôles atomiques et moléculaires, qu'ils soient électriques ou magnétiques. La conduction électrique est aussi décrite microscopiquement, à l'aide d'un modèle de Drude-Zener. On a laissé bien sûr de côté quelques questions nécessitant des connaissances de physique quantique que l'étudiant acquerra dans le volume IV. Mais nous parlons cependant comme d'un fait établi de molécules et d'atomes en tant que structures électriques de dimensions, forme et consistance connues, ainsi que d'orbites électroniques et de spin. Nous essayons de traiter en détail une question qui est parfois évitée, parfois obscurcie dans les ouvrages d'initiation, la signification physique des champs macroscopiques E et B à l'intérieur de la matière.

Dans le volume II on augmente le bagage mathématique de l'étudiant en introduisant quelques-uns des outils du calcul vectoriel - le gradient, la divergence, le rotationnel et le Laplacien. Ces concepts sont introduits au fur et à mesure des besoins dans les premiers chapitres.

Dans ses premières versions, le volume II a été utilisé dans plusieurs classes de l'Université de Californie. L'ouvrage a bénéficié des critiques de plusieurs des personnes collaborant au Cours de Berkeley, et spécialement des apports de E. D. COMMINS et F. S. CRAWFORD Jr. qui utilisèrent ce texte avec les étudiants de première année d'université. Ils découvrirent, eux et leurs étudiants, de nombreux points à clarifier ou à modifier. Leurs suggestions furent à 1°origine de la plupart des révisions, Robert GOREN, qui aida à rassembler les problèmes réunit les critiques des étudiants concernant l'avant-dernière du Texas, et E. F. TAYLOR, de l'Université de Wesley nous adressèrent d'intéressantes critiques. Aux tous premiers stades de la rédaction, Allan KAUEMAN nous apporta de nombreuses idées. A. FELZER qui travailla sur le premier jet, fut notre premier « étudiant cobaye ».

Cette approche de l'électricité et du magnétisme a vu son développement encouragé, non seulement par la commission pédagogique du cours, mais encore par des collègues s'occupant de la mise au point d'un nouveau cours sur le même sujet au Massachusetts Institute of Technology. Parmi ceux-ci, citons J. R. TESSMAN, du Centre d'Enseignement des Sciences du M.I.T. et de l'Université Tufts, qui nous aida particulièrement et influença dès le début le choix de la méthode d'exposé du cours. Il utilisa la première version au M.I.T. et il fit une lecture critique du texte qui donna lieu à de nombreux changements et corrections.

La publication de la première version, avec ses révisions successives, fut supervisée par M^{rs} Mary R. MALONEY. M^{rs} Lila LOWELL dactylographia l'essentiel du manuscrit. Felix COOPER assura la mise au point finale des illustrations.

L'auteur de ce volume reste profondément reconnaissant envers ses amis de Berkeley, et principalement envers Charles Kittel, pour l'encouragement constant et l'atmosphère stimulante qui rendirent si agréable ce long travail. E. M. PURCELL

Notes pédagogiques

On peut traiter en un semestre de l4 semaines environ les principaux sujet du volume II. C'est-à-dire qu'un étudiant qui, on le suppose, a acquis les connaissances du volume 1, devrait être capable d'assimiler complètement les points essentiels, de lire sans grande hâte les autres parties du texte, et de regarder un ou deux au moins des sujets spécialisés introduits par le biais des problèmes. II est nécessaire, même ainsi, de faire une sélection judicieuse et de prévoir une certaine organisation du cours. Le nombre de sujets traités dans le cours est bien supérieur à celui qu'on peut étudier soigneusement en un semestre. On peut, et on devrait parfois, omettre de nombreuses sections en première lecture, ou tout au moins les réserver pour des lectures non programmées. Dans les notes qui suivent, nous donnons les numéros des sections qui sont plus ou moins à option. Nous disons « plus ou moins » parce que la décision de les traiter ou non doit dépendre du niveau d'enthousiasme du groupe de travail concerné, du temps disponible, et de l'opinion de l'enseignant sur le sujet.

Problèmes

On a prévu beaucoup plus de problèmes qu'aucun groupe de travail ne pourrait en traiter. Ils sont divisés en deux catégories. Les problèmes placés à la fin de chaque chapitre sont directement reliés aux points essentiels du chapitre. Ce sont des exercices sans difficultés. Si un étudiant éprouve des difficultés avec l'un d'eux, c'est qu'il n'a pas compris un point essentiel. La liste des problèmes correspondant à chaque chapitre se continue à la fin du livre sous le titre : Problèmes et questions supplémentaires. Bien que la distinction ne soit pas toujours très nette, ces « problèmes supplémentaires » sont généralement plus ambitieux - et généralement plus intéressants que ceux situés à la fin des chapitres. Certains d'entre eux introduisent de nouvelles applications, ou même de nouveaux concepts. Parfois on développe dans un de ces problèmes, une démonstration omise dans le cours, à l'aide de suggestions et de discussions. Ces problèmes et questions ont plusieurs buts. Ils donnent aux meilleurs étudiants quelque chose à se mettre sous la dent. Ils suggèrent, même si on ne fait que les lire sans chercher, l'énorme champ d'application des concepts que l'on étudie ici. Certains des problèmes peuvent servir de points de départ pour un cours sur un sujet particulier. (Un exemple en est donné par le problème 4.25 sur la diode en régime de charge d'espace.) De temps en temps, il peut être utile d'utiliser une séance de cours pour résoudre deux ou trois de ces problèmes avec les étudiants.

Expériences

Les expériences de cours sont d'une importance cruciale. Aucun livre ,ne peut suffire à rendre familier un étudiant avec l'électricité et le magnétisme. D'ailleurs, quand un sujet a une structure logique aussi belle, les livres tendent à être trop théoriques. Ce livre ne fait pas exception à cette règle. Les étudiants ont besoin de manipuler des aimants, de bobiner des enroulements, de faire des étincelles, de voir un appareil électrique très sensible et fragile. Ils devraient pouvoir voir « en action » aussi bien un mégawatt qu'un microwatt. Le cours de Physique de Berkeley possède les limites d'un cours. On doit se tenir prêt à exploiter toute autre occasion de mettre en contact l'étudiant avec un monde où un champ électrique n'est pas qu'un symbole mais quelque chose qui claque.

Examens

Dans ce livre on expose de nombreux concepts à un niveau assez élevé. Nous croyons qu'un étudiant peut profiter de tels exposés. On doit résister néanmoins à toute tentation de placer les examens à ce niveau. Notre expérience personnelle nous a prouvé que des examens relativement simples étaient les meilleurs.

Chapitre 1. (Électrostatique : Charges et Champs) C'est une présentation d'idées essentielles. Il est plutôt aride et devrait être accompagné d'expérience de cours en électrostatique dès le début.

Sections à option : 1.6

Chapitre 2. (Le potentiel électrique) Rien de très neuf en physique, mais de nombreux outils mathématiques nouveaux sont présentés dans ce chapitre. On doit exposer ceci avec beaucoup de soin, en s'adaptant aux aptitudes mathématiques et au degré de préparation des étudiants. Tôt ou tard, on aura besoin de tout ce qui se trouve dans ce chapitre ; cependant le rotationnel ne sera pas utilisé avant le chapitre 6. Les sections 2.15 à 2.18 pourront donc être repoussées jusqu'à ce moment si on juge nécessaire d'alléger un peu les mathématiques. On doit répondre au besoin existant chez les étudiants d'avoir une vue intuitive et physique de la divergence et du rotationnel. Dans ce but on pourra utiliser les figures 2.32 et 2.34 ainsi que certains exercices, mais rien ne peut remplacer les démonstrations avec les mains, les dessins au tableau et la discussion informelle.

Chapitre 3. (Champs autour des conducteurs) Ce chapitre peut être traité rapidement. Le condensateur à plaques parallèles, qu'on introduit ici, réapparaîtra fréquemment. Certaines idées importantes sont reliées au Théorème d'Unicité : c'est à travers la discussion et le raisonnement que l'on montrera le mieux le caractère délicat de celui-ci. L'introduction de la méthode de relaxation et de la méthode variationnelle pour la résolution du problème électrostatique avec conditions aux limites n'a rien de classique; mais les étudiants semblent intéressés par ces idées qui, après tout, sont plus utiles et plus instructives que le vieux truc des a images ». On peut cependant sauter cette partie (sect. 3.8) toute entière sans problème. De même pour la sect. 3.6 où sont introduits les coefficients de capacité et où on essaye principalement de montrer, sur des exemples concrets, comment on peut en général, décrire des systèmes linéaires. Il n'y a dans ce chapitre aucun exposé des méthodes de mesures pratiques du champ électrique ou des potentiels, ni aucune description des instruments ou des expériences mettant en jeu des champs électriques-électroscopes, voltmètres électrostatiques, etc... Des expériences de cours et des travaux pratiques seraient ici nécessaires pour faire le lien avec la réalité. Sections à option : 3.6-3.8

Chapitre 4. (Courants électriques) On introduit tout de suite le concept de densité volumique de courant et on adopte une présentation microscopique du transport des charges par des ions. Le modèle classique de Drude-Lorentz est utilisé pour expliquer physiquement la loi d'Ohm. Ce sujet, sect. 4.4 peut être traité plus ou moins en détail selon les possibilités de l'horaire; aucun thème d'étude ultérieure n'en dépend. Mais la physique du phénomène est importante en elle-même et l'étudiant devrait au moins lire cette partie. On a limité à l'essentiel le traitement des circuits en courant continu. On peut l'augmenter facilement de manière conventionnelle avec des exemples et des problèmes. Les étudiants suivant un équivalent des expériences de laboratoire du Cours de Berkeley auront acquis bien auparavant une expérience pratique des circuits. Sections à option : 4.5, 4.6, 4.10

Chapitre 5. (Le champ de charges en mouvement) Après avoir étudié le volume 1 et avoir fait des travaux pratiques, l'étudiant connaît déjà le champ magnétique et la force $q\mathbf{v} \wedge B$ agissant sur une charge en mouvement. Il serait bon de le vérifier. On devrait montrer avant de commencer la section 5.3 des expériences simples d'interactions magnétiques, en particulier sur la force entre courants parallèles. Dans ce chapitre l'étudiant verra les interactions magnétiques sous un jour tout à fait nouveau. Le premier fait physique d'importance est ici l'invariance de la charge. Pour s'en rendre compte il faut réfléchir longuement à la définition même de la quantité de charge dans un système où les charges sont en mouvement. Le premier but de ce chapitre est de permettre la compréhension du champ électrique créé par une charge se déplaçant à vitesse constante. La clé de ce problème se trouve dans la transformation du champ électrique. Il est ici nécessaire de se livrer à une discussion poussée sur le concept de champ. Jusqu'à ce qu'il comprenne le raisonnement de la section 5.5, l'étudiant aura des réticences à croire que l'on puisse déduire une loi générale de transformation de ce qui lui paraît être un cas très particulier. Le champ électrique créé par une particule très rapide surprend la plupart des étudiants, même les meilleurs, qui s'attendent plutôt à voir le champ « retardé ». Traiter le rayonnement ne demande alors plus un gros effort et, bien que nous l'ayons laissé à la charge du volume III, on peut montrer aux étudiants l'origine du bremsstrahlung (voir le problème 5.8) et le rayonnement synchrotron. La section 5.8 demande beaucoup de temps pour démontrer à l'étudiant quelque chose qu'il a l'habitude de considérer comme établi; on peut beaucoup la raccourcir si les étudiants ont étudié les transformations des forces au volume 1, p. 401. Dans la dernière section apparaît une force dépendant de la vitesse; la raison physique en est plus importante que les détails de la démonstration. On devrait insister sur la simplicité du résultat. .Section à option : aucune

Chapitre 6. (Le champ magnétique) On réintroduit le champ magnétique dont on connaît maintenant l'origine. On suppose que la relation intégrale $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$, démontrée dans le cas d'éléments rectilignes de courants, est valable pour des courants permanents quelconques. (La démonstration nous aurait conduits à traiter des charges accélérées.) Dans ce chapitre, nous avons introduit le potentiel-vecteur pour plusieurs raisons. Il n'est pas difficile de l'utiliser ici et plus tard au chapitre 10. Tout étudiant qui continuera en physique devra se familiariser avec ce concept. Bien qu'on ne soulève pas ce problème dans le texte, on peut aussi bien respecter la différence entre un vecteur axial et un vecteur polaire, et nous avons bien pris soin, dans notre exposé des champs **E** et **B** dans la matière, de montrer la différence essentielle qui existe entre sources électriques et magnétiques. C'est surtout sur le champ magnétique que l'on devrait insister dans ce chapitre. Quant aux lois de transformation des champs dans le vide, on peut les illustrer par de nombreux exemples. Le problème 6.15, par exemple, pourra être résolu et discuté avec les étudiants. Les sections 6.8 et 6.9 ne sont pas indispensables (bien que le premier paragraphe de la section 6.9 puisse aider à éclaircir un point important) et on devrait simplement conseiller de les lire.

Chapitre 7. (Induction électromagnétique et équations de Maxwell) On devrait présenter de nombreuses expériences pour introduire ce chapitre. En utilisant un galvanomètre à miroir sensible et à faible constante de temps, on peut montrer de façon très frappante les équivalences dont il est question aux sections 7.2, 7.3 et 7.4; il suffit de déplacer des aimants et des bobinages autour de l'appareil. (N'hésitez pas à utiliser des aimants permanents bien qu'on n'en parle qu'à partir du chapitre 10 !) Ce

chapitre ne présente pas de difficultés particulières. Les exemples pratiques pouvant illustrer le phénomène de l'induction sont en nombre quasiment illimité. Notre exposé peut paraître exagérément pointilleux en deux occasions : (1) lors du traitement de la self-induction dans la section 7.8 pour lequel nous avons d'abord introduit la notion de mutuelle inductance; (2) dans la section 7.12 où l'on s'étend à loisir sur la nature exacte du courant de déplacement. D'après notre propre expérience, il peut arriver qu'un bon étudiant soit rebuté par ces questions, si on les embrouille un peu; aussi vaut-il peut-être mieux les exposer le plus simplement possible pour la première fois. Une fois qu'on possède les équations de Maxwell, il est dur de résister à la tentation de parler d'ondes électromagnétiques, et c'est pourquoi, dans la dernière partie de la section 7.13, nous avons un peu empiété sur le domaine du volume II.

Sections à option : 7.7, dernière partie de 7.13

Chapitre 8. (Circuits en courant alternatif) On n'expose que les rudiments de la théorie des circuits en courant alternatif. On espère que cette modeste introduction complétera l'expérience pratique de l'étudiant au laboratoire. Les exercices sur la représentation complexe le prépareront bien à l'étude du volume III. L'enseignant, si le temps le lui permet, peut développer ce sujet de façon conventionnelle. Il peut aussi décider de sauter tout le chapitre, si ses étudiants doivent voir plus en détail les circuits en alternatif dans un autre certificat. Dans ce cas, on devrait garder la section 8.1 et l'étudier comme une partie du chapitre 7 où elle s'insérerait logiquement après la section 7.10.

Section à option : aucune (ou toutes sauf la section 8.1)

Chapitre 9. (Champs électriques dans la matière) Sans un planning minutieux, on risque d'arriver aux chapitres 9 et 10 sans avoir le temps de les traiter. On devrait consacrer à ces deux chapitres au moins trois semaines, si ce n'est quatre. Notre but principal est de familiariser l'étudiant avec la structure de la matière; la théorie formelle du champ macroscopique est pour nous secondaire. Par exemple, si le temps presse, nous abandonnerons volontiers l'exemple classique de la sphère diélectrique en faveur des dipôles moléculaires, induits et permanents. (Cependant la longue section 9.13 devrait toujours être omise en première lecture sauf par des étudiants exceptionnellement préparés et intéressés.) On ne devrait manquer aucune occasion d'utiliser les connaissances acquises en chimie par les étudiants, quelles qu'elles soient. Ce sujet concerne aussi bien les chimistes que les physiciens, et il concerne presque autant les futurs biologistes moléculaires et physiologistes. Exposez-le dans l'esprit de Debye !

Sections à option : 9.6, 9.10, 9.11, 9.13, 9.17.

Chapitre 10. (Champ magnétique dans la matière) Ce chapitre demande qu'on lui consacre moins de temps que le précédent bien que, comme celui-ci, il ouvre la voie vers des domaines où il est fascinant pour l'enseignant d'emmener ses étudiants. Si on est pressé par le temps, ou si on veut en gagner pour traiter un sujet de ce genre, on peut passer l'analyse classique détaillée du diamagnétisme donnée dans la section 10.5, à partir de l'équation 10.23, et on peut lire les sections 10.3 et 10.4 en insistant plus sur les résultats que sur les démonstrations. On pourrait aussi passer moins de temps sur la question du champ macroscopique dans la matière, question sur laquelle l'étudiant devra revenir plus tard quand il en aura besoin. Notre traitement du champ magnétique macroscopique se veut analogue à celui du champ électrique dans le chapitre 9. On évite dans les deux chapitres l'usage de cavités hypothétiques. Le résumé de la méthode adoptée qui figure sur la figure 10.9 devrait aider l'enseignant à faire le plan de son exposé.

Unités

Dans la version française de ce livre, on utilise les unités M.K.S.A. Le champ magnétique est B. II est mesuré en Teslas et nous ne l'appelons pas induction magnétique. Une table d'unités et de conversion figure page 450. Une table de constantes figure page 460.

Le Berkeley Physics Course dans les programmes français

Une correspondance terme à terme entre les ouvrages de cette série et les programmes actuels (22 juin 1966, 27 février 1973) est difficile.

Néanmoins l'ensemble des matières traitées dans les 5 volumes de la collection recouvrent un solide enseignement de la Physique au niveau des premier et second cycles des Universités.

Cet enseignement des bases de la Physique correspond donc aux différents DEUG à orientations a Sciences des structures et de la matière », aux Maîtrises de Physique à orientation Recherche ou Enseignement, aux Maîtrises des Sciences et 'techniques, aux programmes des Instituts Universitaires de Technologie, aux classes de préparation aux Écoles d'Ingénieurs et aux Écoles Normales.

La forme pédagogique très soignée de l'exposé permet d'utiliser l'ouvrage comme document de référence et les actions de formation permanente ou de recyclage - par exemple au niveau des professeurs de Physique ou de Mathématique de l'enseignement secondaire - pourront utilement s'en inspirer.

Nous avons tenté une répartition approximative par niveaux (années) des différents chapitres de ces ouvrages

PREMIER CYCLE (DEUG-Classes Préparatoires-IUT). Niveaux 1 et 2 SECOND CYCLE (Maîtrises). Niveaux 3 et 4. Mécanique (I) Chapitres 1 à 9 Niveau 1 Chapitres 10 à 15 Niveau 2 Certaines parties utilisables en lectures dès la première année Électromagnétisme (II) Chapitres 1 à 8 Niveau 1 Chapitres 5 et 6 Niveaux 2-3 Electromagnétisme et relativité Ondes (111) Chapitres 1, 3, 4, 7, 8, 9 Niveaux 1-2 Chapitres 2, 5, 6 Niveaux 2-3 Préparation à l'étude de la Mécanique Quantique. C'est un bon ouvrage de transition entre let et 2e cvcle Physique quantique (IV) Niveaux 2-3 La méthode de présentation suivie est originale et correspond sans doute davantage à une conception moins rigoureuse du formalisme de la mécanique quantique que la conception suivie classiquement par l'enseignement français. Physique statistique (V) Chapitres 1 à 5 Niveau 2

Chapitres 6 à 8 Niveaux 2-3 Un ouvrage de complément est nécessaire au niveau « maîtrise ».

Chapitre 1 Électrostatique : Charges et champs

1.1 La charge électrique

Aux premiers qui l'étudièrent l'électricité apparut comme un phénomène extraordinaire. Il fallait d'ingénieux dispositifs pour arriver à tirer des corps le « feu subtil », comme on l'appelait parfois, pour mettre un objet dans un état de forte électrisation, pour produire un écoulement continu de courant. Le spectacle des éclairs mis à part, les manifestations ordinaires de la nature, de la congélation de l'eau à la croissance des arbres, semblaient sans rapport avec le curieux comportement des objets électrifiés. Nous savons aujourd'hui que les forces électriques déterminent pour une large part les propriétés physiques et chimiques de la matière sur toute l'échelle, depuis l'atome jusqu'à la cellule vivante. Cette compréhension, nous la devons aux savants du xx^e siècle, Ampère, Faraday, Maxwell et beaucoup d'autres, qui découvrirent la nature de l'électromagnétisme, ainsi qu'aux physiciens et chimistes du xx^e siècle, qui élucidèrent la structure atomique de la matière.

L'électromagnétisme classique étudie les charges et courants électriques et leurs interactions comme si toutes les quantités mises en jeu pouvaient être mesurées indépendamment avec une précision illimitée. Ici « classique » veut simplement dire « non-quantique ». Les effets quantiques sont ignorés, et la constante de Planck h négligée dans la théorie classique de l'électromagnétisme, tout comme dans la mécanique ordinaire. D'ailleurs, la théorie classique avait presque atteint son plein état de développement avant la découverte de Planck; elle lui a remarquablement survécu. Ni la révolution de la physique quantique, ni le développement de la relativité restreinte n'ont terni le lustre des équations du champ électromagnétique telles que Maxwell les écrivit voici cent ans.

Bien entendu, la théorie était solidement fondée sur l'expérience et par conséquent bien valable dans le domaine d'application qui fut le sien à l'origine - bobinages, condensateurs, courants alternatifs et, finalement, ondes radio et lumineuses. Pourtant, même un tel succès ne lui donne pas de garantie de validité dans un autre domaine, comme par exemple à l'intérieur d'une molécule.

La persistance dans la physique moderne de l'importance de la théorie électromagnétique classique s'explique doublement. Tout d'abord, la relativité restreinte n'exigea aucune révision de l'électromagnétisme classique. Historiquement, la relativité restreinte fut *enfantée* par la théorie classique de l'électromagnétisme et les expériences qu'elle avait inspirées. Les équations de Maxwell, introduites longtemps avant les travaux de Lorentz et Einstein, se montrèrent entièrement compatibles avec la relativité. Ensuite, il se trouve que les modifications quantiques des forces électromagnétiques sont négligeables jusqu'à des distances inférieures à 10⁻¹² m, cent fois plus petites qu'un atome. Nous pouvons décrire les attractions et les répulsions entre particules d'un atome en utilisant les lois qui s'appliquent aux feuilles d'un électroscope, bien que nous ayons besoin de la mécanique quantique pour prédire comment les particules se comporteront sous l'effet de ces forces. Pour des distances encore plus petites, il existe une combinaison assez heureuse de la théorie électromagnétique et de la théorie quantique, appelée « électrodynamique quantique », qui semble confirmée par l'expérience jusqu'aux plus faibles distances explorées jusqu'ici.

Nous supposons que le lecteur a déjà quelque familiarité avec les faits élémentaires de l'électricité. Nous ne passerons pas en revue toutes les expériences qui permirent de démontrer l'existence de la charge électrique ou toutes les preuves de la constitution électrique de la matière. Mais nous voulons néanmoins examiner soigneusement les fondements expérimentaux des lois de base dont tout le reste découle. Dans ce chapitre, nous étudierons la physique des charges électriques stationnaires- l'électrostatique.

C'est sans aucun doute l'une des propriétés essentielles de la charge électrique que son existence sous deux formes qui furent, il y a déjà longtemps, nommées négative et positive. L'observation montre que toutes les particules chargées peuvent être séparées en deux classes telles que tous les membres de la même classe se repoussent entre eux, mais attirent ceux qui appartiennent à l'autre classe. Si deux petits corps électriquement chargés A et B placés à quelque distance, se repoussent et si A attire un troisième corps électrisé C, nous constaterons toujours que B attire C. Nous n'avons pas de certitude quant à la raison de la validité de cette loi universelle. Mais aujourd'hui les physiciens tendent à considérer que la charge positive et la charge négative constituent deux manifestations opposées dune même qualité, un peu comme la « droite » et la « gauche » constituent deux manifestations de la « latéralité ». D'ailleurs, le problème de symétrie soulevé par cette opposition droite-gauche semble étroitement relié à la dualité de la charge électrique ainsi qu'à une autre symétrie fondamentale entre les deux directions du temps. La physique des particules élémentaires permet de jeter quelque lumière sur ces questions.

Ce que nous appelons charge négative aurait pu aussi bien être appelée positive, et *vice versa* ⁽¹⁾. Le choix résulta d'un accident historique. Notre univers semble être un mélange équilibré de charges positives et négatives, ce qui n'a rien d'étonnant puisque les charges de même signe se repoussent.

Deux autres propriétés de la charge électrique sont essentielles pour la structure électrique de la matière : la charge est conservée, et la charge est quantifiée. Ces propriétés mettent en jeu la *quantité* de charge et impliquent donc une mesure de la charge. Plus loin nous montrerons en détail comment on peut mesurer la charge à partir de la force s'exerçant entre deux charges séparées par une certaine distance. Mais pour l'instant tenons ceci pour acquis de façon a pouvoir discuter librement de ces faits fondamentaux.

1.2 Conservation de la charge



Des particules chargées

Fig. 1.1 Des particules chargées sont créées par paires de charges opposées.

La charge totale d'un système isolé ne change jamais. Par *isolé* nous voulons dire qu'aucune forme de matière ne peut traverser la frontière de notre système. Nous pourrions laisser entrer ou sortir de la lumière sans affecter ce principe puisque les photons ne transportent pas de charge. Par exemple, une boîte aux parois peu épaisses, placée dons le vide, pourrait devenir le siège d'un événement de « création de paire » au cours duquel un photon de grande énergie termine son existence en dormant lieu à la création d'un électron positif et d'un électron négatif (fig. l.l). Deux particules électriquement chargées seraient ainsi créées mais la variation nette de charge dons la boîte serait nulle. La loi que nous avons énoncée *serait* violée par un événement tel que la création dune particule de charge positive *sans* la création simultanée dune particule de charge négative. Un tel phénomène n'a jamais été observé.

Bien entendu, si les charges électriques de l'électron et du positron n'étaient pas rigoureusement égales (en valeur absolue), la création de paires violeraient quand même la stricte loi de conservation de la charge. Autant que puisse le déterminer l'expérience, ces charges *sont* égales. Un test expérimental intéressant en est fourni par le système appelé *positronium*, structure composée d'un électron et d'un positron et de rien d'autre. Ce curieux « atome » peut vivre assez longtemps - un dixième de microseconde environ - pour qu'on puisse l'étudier en détail. Il se comporte comme s'il était parfaitement neutre électriquement. De fait, la plupart des physiciens seraient stupéfaits, sinon incrédules, si on mettait en évidence une *quelconque* différence entre les valeurs absolues de ces charges, car ils savent qu'électron et positron forment un couple

particule-antiparticule. L'égalité stricte de leurs charges, Comme celle de leurs masses, ne fait que traduire une symétrie apparemment universelle de la nature, la dualité particule-antiparticule. On pourrait alors se demander si la conservation de la charge ne fait alors que découler dune autre loi de conservation plus générale gouvernant la création et l'annihilation des particules. Ou bien la conservation de la charge est-elle une exigence fondamentale, à laquelle devraient satisfaire routes les autres lois ? Et ces questions ont-elles un sens quelconque ? Nous ne le savons pas vraiment.

En tout cas, il deviendra clair au tours de noire étude de l'électromagnétisme que la non-conservation de la charge serait tout à fait incompatible avec la structure de notre théorie électromagnétique actuelle. Nous pouvons donc énoncer, soit comme un postulat de la théorie, soit comme une règle empirique confirmée par routes les observations, sans aucune exception jusqu'à ce jour, la loi de *conservation de la charge*.

La charge électrique totale d'un système isolé, c'est-à-dire la somme algébrique des charges positives et négatives présentes à un instant quelconque, reste toujours constante.

Tôt ou tard, nous devrons nous demander si cette loi est en accord avec le Principe d'invariance relativiste. Nous reprendrons au chapitre 5 une discussion approfondie de cette importante question. Mais la réponse est positive, et non seulement au sens où l'énoncé de la loi reste vrai dans n'importe quel système de référence inertiel, mais encore au sens plus fort où des observateurs situés dans

⁽¹⁾ La charge de l'électron ordinaire n'a rien *d'intrinsèquement négatif*. Un entier négatif, une fois la multiplication définie, diffère essentiellement d'un entier positif en ceci que son carré est un entier de signe opposé. Mais le produit de deux charges n'est pas une charge; il n y a donc pas de comparaison possible.

différents référentiels et mesurant une charge électrique, trouvent le même résultat. Autrement dit, la charge électrique totale d'un système isolé est un invariant relativiste.

1.3 Quantification de la charge

L'expérience de Millikan (de la goutte d'huile) et d'innombrables autres expériences, ont montré que la charge électrique se présente dans la nature par unités de valeur bien déterminée. Nous dénoterons par a cette valeur, qui est celle de la charge de l'électron. Nous avons déjà indiqué que c'est également la valeur absolue de la charge du positron. Encore plus remarquable semble être la rigoureuse égalité des charges portées par routes les autres particules chargées - par exemple, l'égalité, en valeur absolue, de la charge positive du proton et de la charge négative de l'électron.

Cette égalité particulière, celle des charges de l'électron et du proton, peut être soumise à un test très sensible : il suffit d'examiner la neutralité électrique globale de l'atome ou de la molécule d'hydrogène ordinaires. On peut ainsi tenter de défléchir un faisceau d'atomes ou de molécules par un champ électrique. Au tours dune expérience très sensible montée dans ce but⁽²⁾, un faisceau très étroit d'atomes de césium passait, dans un vide poussé, à travers un champ électrique intense. De l'absence de route déflexion observable, on put conclure que la charge nette portée par un atome de césium devait être inférieure à 10^{-16} . Un test encore plus sensible a été réalisé récemment par une méthode différente⁽³⁾. Une grande quantité d'hydrogène était enfermée dans un réservoir très bien isolé électriquement du milieu extérieur. On laissait ensuite le gaz s'échapper du réservoir, mail de façon à empêcher l'évasion de tout ion ordinaire. Si la charge du proton différait de celle de l'électron, disons d'un milliardième, chaque molécule d'hydrogène, composée de deux protons et d'un électron, porterait une charge de $2 \times 10^{-9}e$; le départ de tout l'hydrogène modifierait alors de façon mesurable la charge électrique totale du réservoir et son potentiel. En fait, l'expérience aurait pu mettre en évidence une charge résiduelle aussi faible que $10^{-20}e$ par atome, mais rien ne fut détecté ! Nous en concluons que l'électron et le proton ont des charges égales, avec une précision de 10^{-20} .

D'après nos idées actuelles, l'électron et le proton sont des particules fondamentalement aussi dissemblables que possible. Personne ne comprend encore pourquoi leurs charges électriques doivent être égales avec un degré de précision aussi fantastique. La quantification de la charge est évidemment une loi de la nature profonde et universelle. *Toutes* les particules fondamentales chargées à ce qu'il semble, portent des charges ayant exactement la même valeur absolue⁽⁴⁾. Nous ne pouvons qu'espérer quelque découverte future ou un aperçu théorique capable de nous expliquer pourquoi une particule ayant une charge de 0,500 e ou 0,999 e ne peut exister⁽⁵⁾. Naturellement, la quantification de la charge électrique est un fait extérieur au domaine de l'électromagnétisme classique. NOUS l'ignorerons, en règle générale, et traiterons nos charges ponctuelles q comme si elles pouvaient prendre une valeur quelconque. Il vaut la peine, cependant, de se souvenir qu'on ne peut espérer de la théorie classique une explication de la structure des particules fondamentales. (Il n'est d'ailleurs pas certain que la théorie quantique actuelle puisse fournir une telle explication !) Ce qui tient l'électron ensemble reste aussi mystérieux que ce qui fixe la valeur de sa charge. Quelque chose de plus que les forces électriques doit être pris en considération, puisque les forces électriques entre les différentes parties de l'électron seraient répulsives.

Au cours de notre étude de l'électricité et du magnétisme, nous traiterons les particules chargées comme de simples porteurs de charge, de dimensions si faibles que leur extension et leur structure soit tout à fait négligeables pour ce qui nous intéresse en général. Dans le car du proton, par exemple, nous savons, d'après des expériences de collisions à haute énergie que sa charge électrique ne s'étend guère au-delà d'un rayon de 10⁻¹³ cm. L'analyse des expériences de Rutherford sur la diffusion des particules alpha montre que même les noyaux lourds ont leur charge répartie dans une région de dimensions inférieures à 10⁻¹¹ cm. Pour le physicien du siècle dernier, une « charge ponctuelle » restait une notion abstraite, dont une balle mousse chargée ne fournissait qu'une représentation assez pauvre. Aujourd'hui, nous sommes familiarisés avec les particules « atomiques ». L'essence granulaire de l'électricité est si évidente dans notre description moderne de la nature, que nous considérons une charge ponctuelle comme une idéalisation moins artificielle qu'une distribution régulièrement répartie de densité de charge. Lorsque nous postulons de telles distributions continues de charge, nous

⁽²⁾ J. C. Zorn, G. E. CHAMBERLAIN et V. W. Hugues, *Phys. Rev.* 129, 2566 (1963).

⁽³⁾ J. G. KING, *Phys. Rev. Letters* 5, 562 (1960). On trouvera des références à des expériences antérieures sur le sujet dans cet article et dans le chapitre de V. W. Hugues dans « Gravitation and Relativity » (H. Y. Chiu et W. F. Hoffmann, édit.; Benjamin, N. Y., 1964) chap. 13.

⁽⁴⁾ D'après certaines spéculations récentes sur les particules fondamentales, l'existence de particules de charges 1/3 ou 2/3 serait concevable (ces particules - hypothétiques - sont baptisées quarks). Les tentatives de détection expérimentale sont à ce jour restées infructueuses (voir, par exemple, L. B. LEIPUNER, W. T. CHU, R. C. LARSEN, R. K. ADAIR, Phys. Rev. Letters 12, 423 (1964). Les théoriciens n'en poursuivent pas moins leurs spéculations.

⁽⁵⁾ (N.d.T.) P.A.M. Dirac et d autres théoriciens ont montré que l'existence de « charges magnétiques » entraînerait la quantification des charges électriques et magnétiques. Néanmoins ces charges magnétiques ne semblent pas exister... (voir sect. 10.2, en particulier la note en bas de page).

pouvons les imaginer comme des moyennes sur un très grand nombre de charges élémentaires, de la même façon que nous pouvons définir la densité macroscopique d'un liquide, malgré son caractère discontinu à l'échelle moléculaire. Sur des objets nettement plus grands que les gouttes d'huile de Millikan, la quantification de la charge ne se remarque guère !

1.4 La loi de Coulomb

Comme vous le savez probablement déjà, l'interaction entre charges électriques immobiles est décrite par la loi de Coulomb : deux charges électriques stationnaires s'attirent ou se repoussent mutuellement avec une force proportionnelle au produit de la valeur des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. Nous pouvons donner un énoncé compact de cette loi sous forme vectorielle

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{k} \, q_1 \, q_2 \, \hat{\mathbf{r}}_{12} / r_{12}^2 \, (1.1)$$

Ici q_1 et q_2 sont les nombres (scalaires) donnant la valeur absolue et le signe des charges respectives, $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ est le vecteur unitaire dirigé de la charge 1 vers la charge $2^{(6)}$, et \mathbf{F}_2 est la force agissant sur la charge 2. ainsi l'équation (1) exprime-t-elle, entre autres choses, le fait que les charges de même signe se repoussent, de signe contraire s'attirent; elle exprime aussi le caractère Newtonien de la force, c'est-à-dire que $F_2 = -\mathbf{F}_1$.

Le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ indique que la force est parallèle à la direction joignant les deux charges. Il ne pourrait en alter autrement que si l'espace possédait une propriété intrinsèque à telle ou telle direction; en effet, avec deux charges seulement dans un univers isotrope et vide, aucune autre direction ne peut être singularisée. Si les « charges ponctuelles » elles-mêmes possédaient quelque structure interne, associée à un axe définissant une direction privilégiée, alors il faudrait plus que la simple quantité scalaire *q* pour les décrire.

Nous avons supposé en écrivant l'équation (1.1) que les deux charges soit bien localisées, occupant des régions petites comparées à r_{12} de façon à rendre l'équation (1.1) toujours valable. Nous nous restreignons pour l'instant à des charges stationnaires, de façon à laisser de côté le problème des forces magnétiques s'exerçant entre charge mobiles, problème que nous étudierons plus lard.

La constante *k* présente dans l'équation (1.1) dépend du système d'unité choisi. Dans le système (légal) M.K.S.A., les distances s'expriment en mètres et les charges électriques en *Coulombs* (C). Cette unité est en fait dérivée de la définition de *l'Ampère* (voir chap. 4, sect. 1). L'équation (1.1) donne alors la force en newtons pourvu que l'on prenne $k = 8,9875 \times 10^9$ M.K.S.A. $\cong 9 \times 10^9$ M.K.S.A. Pour des raisons qui apparaîtront plus tard, on pose dans le système M.K.S.A.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad (1.2)$$

et la constante ε_0 , appelée « permittivité du vide », vaut

$$\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ M.K.S.A.}$$

Les valeurs numériques de k et ε_0 découlent de la définition de l'ampère par l'intermédiaire dune relation fondamentale exprimant la vitesse de la lumière et contenant ε_0 (voir chap. 6, sect. 1). Dans le système C.G.S. électrostatique (C.G.S. es), la constante k est prise par définition, égale à l'unité, ce qui fixe les dimensions de la charge électrique et la valeur de l'unité de charge en fonction des autres grandeurs et unités fondamentales. Dans cet ouvrage, nous exprimerons la constante k dans le système M.K.S.A.

La seule façon dont nous puissions détecter et mesurer des charges électriques consiste à observer l'interaction de corps chargés. On pourrait alors se demander dans quelle mesure le contenu de la loi de Coulomb n'est pas une simple définition. De fait, la signification physique réelle de la loi de Coulomb réside dans l'énoncé de la dépendance par rapport à la distance (loi du « carré inverse ») et dans l'implication de *l'additivité* des effets de la charge électrique. Pour mettre en évidence ce dernier point, nous devons considérer plus de deux charges. En effet, si nous n'avions dans le monde que deux charges pour faire des expériences, q_1 et q_2 , nous ne pourrions jamais les mesurer séparément. Nous pourrions seulement vérifier que F est proportionnel à $1/r^2_{12}$. Supposons que nous ayons *trois* corps portant des charges q_1 , q_2 , q_3 , nous pouvons mesurer la force sur q_1 quand q_2 est à 10 cm de q_1 par exemple et q_3 très loin, comme dans la figure 1.2 *a*. Nous pouvons alors éloigner q_2 , amener q_3 à la position qu'occupait primitivement q_2 et mesurer à nouveau la force s'exerçant sur q_1 . Enfin, nous pouvons amener q_2 et q_3 l'un contre l'autre, toujours à 10 cm de q_1 . Une mesure nous montre alors que la

⁽⁶⁾ (N.d.T) Une convention contraire est parfois utilisée, par exemple dans l'édition américaine originale de ce livre.

force sur q_1 est la somme des deux forces précédemment mesurées. Ceci est un résultat essentiel. Il ne peut pas être déduit d'arguments logiques, tel que celui, basé sur la symétrie, utilisé plus haut pour montrer que la force entre deux charges ponctuelles devrait avoir la direction de la droite joignant les deux charges. La force avec laquelle interagissent deux charges n'est pas modifiée par la présence dune troisième charge.



Fig. 1.2 La force sur q_1 en (c) est la somme des forces sur q_1 en (a) et (b).

Quel que soit le nombre de charges dont est composé notre système, la loi de Coulomb (éq. 1.1) peut être utilisée pour calculer l'interaction de chaque paire. Ceci constitue la base du principe de *superposition*, que nous invoquerons sans cesse au cours de noire étude de l'électromagnétisme. Par « superposition », nous voulons dire combiner deux ensembles de charges en un seul système par l'addition du second au premier sans modifier la configuration de l'un ni de l'autre. Notre principe assure alors que la force sur une charge quelconque du système combiné est la somme vectorielle des forces que chacun des ensembles, pris séparément, exercerait sur une charge en ce point. Ce principe ne doit pas être considéré à la légère comme allant de soi. Il pourrait bien exister un domaine de phénomènes, mettant en jeu de très petites distances ou des forces très intenses, où le principe de superposition ne serait *pas valable*. De fait, nous connaissons certains phénomènes quantiques de nature électromagnétique qui représentent bien, du point de vue classique, un échec du principe de superposition.

La physique des interactions électriques n'apparaît donc clairement que lorsque l'on a *plus* de deux charges. Nous pouvons aller au-delà de l'énoncé explicite contenu dans l'équation 1.1 et affirmer que, les trois charges de la figure 1.2 occupant des positions quelconques, la force sur chacune d'elles, par exemple q_3 , est correctement donnée par l'équation :

$$\mathbf{F}_{3} = k \frac{q_{1}q_{3}}{r_{13}^{2}} \hat{\mathbf{r}}_{13} + k \frac{q_{2}q_{3}}{r_{23}^{2}} \hat{\mathbf{r}}_{23}$$
(1.2)

L'équation 1.2 s'applique par exemple à la situation décrite par la figure 1.3.

En ce qui concerne la loi du « carré inverse », sa vérification expérimentale laisse un peu à désirer, tout au moins sur une certaine échelle de distances. En 1785, Coulomb mesura la force s'exerçant entre deux sphères chargées, à l'aide dune balance de torsion. Longtemps avant Coulomb, Priestley avait suggéré, par analogie avec le champ de gravitation, que l'absence d'influence électrique à



Fig. 1.3 Force agissant sur une charge, dûe àdeux autres charges, exprimée par l'équation3.

l'intérieur d'une sphère chargée creuse impliquait une loi de carré-inverse. Henry Cavendish, le génial expérimentateur anglais, dont l'oeuvre resta largement inconnue à ses contemporains, mena à bien dès 1772 une vérification de la loi du carré inverse avec une précision de l'ordre de 2 %. Cavendish utilisa une toque métallique sphérique, que l'on pouvait séparer en deux pour accéder à une sphère intérieure. L'absence de toute charge sur la sphère interne lorsqu'on chargeait la sphère externe constituait une preuve de la loi du carré inverse. Des versions modernes de l'expérience de Cavendish ont permis d'établir la loi du carré inverse sur des distances de l'ordre d'un demi-mètre avec une précision de quelques 10⁻⁹. On présente parfois ce résultat expérimental comme une vérification de la valeur de l'exposant de r_{12} dans la loi de Coulomb (1.1). En fait, l'important n'est pas de savoir si cet exposant vaut exactement -2 mais bien plutôt si, à certaines distances, la loi de l'inverse carré (1.1) perd sa validité. Les méthodes expérimentales directes actuelles ne nous permettent pas d'affirmer la validité de la loi (1.1) dans deux domaines de distances. C'est d'abord aux très petites distances, inférieures à 10⁻¹⁴ cm où, comme on l'a déjà dit, on n'a aucune certitude concernant la validité de la théorie électromagnétique. Mais c'est aussi aux très grandes distances, distances

allant de plusieurs kilomètres aux distances astronomiques, que nous ne possédons aucune vérification expérimentale de la loi de Coulomb en tant que telle. Cependant nous n'avons aucune raison particulière pour *prévoir* qu'aux grandes distances, la loi (1.1) ne s'applique pas. En fait la théorie quantique moderne du champ électromagnétique donne quelque argument en faveur du maintien de la validité de la loi de Coulomb à des distances bien plus grandes que celles utilisées dans les anciennes expériences de Cavendish. En effet, l'annulation aux grandes distances de la loi (1.1) entraînerait l'existence d'une masse au repos petite mais finie pour le quantum de lumière, le photon, ce qui conduirait à une légère variation avec la longueur d'onde de la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide. Or l'observation directe⁽⁷⁾ montre que les ondes courtes radioélectriques ont la même vitesse dans le vide que la lumière visible,

⁷ On a observé récemment l'arrivée pratiquement simultanée (à quelques minutes près, au plus) sur la terre d'émissions de radio et de lumière provenant de l'éruption d'une « étoile à sursauts » éloignée de 20 années-lumière de la terre. (B. Lowell, F. L. WHIPPLE, L. H. SOLOMON, *Nature*. 202, 377 (1964).

avec une précision expérimentale d'au moins 10⁻⁶. On peut, à partir de cela, montrer théoriquement que la loi de Coulomb devrait être valable jusqu'à des distances de plusieurs kilomètres au moins. Il est probable que l'on puisse trouver d'encore plus convaincantes démonstrations indirectes de ce genre.



Fig. 1.4 On amène trois charges les unes près des autres. On approche d'abord q_2 de q_1 . Puis avec q_1 et q_2 fixe on amène q_3



Fig. 1.5 La force étant centrale, les éléments de différents circuit compris entre r et r + dr exigent le même travail.

l'on doit fournir pour effectuer ceci est :

En résumé, nous avons route raison de croire que la loi de Coulomb est valable sur un énorme domaine de distances allant de 10⁻¹³ cm à plusieurs kilomètres, si ce n'est plus loin encore. Nous la prendrons donc comme la base de notre description de l'électromagnétisme.

1.5 Énergie d'un système de charges

En principe la loi de Coulomb contient toute l'électrostatique. Si l'on se donne des charges et leurs positions, nous pouvons trouver toutes les forces électriques. Ou encore si l'on se donne des charges libres de se mouvoir sous l'action d'autres types de forces nous pouvons trouver l'état d'équilibre pour lequel les charges resteront immobiles. De la même façon les lois de Newton contiennent toute la mécanique. Mais, en mécanique aussi bien qu'en électromagnétisme, il est puissant d'introduire d'autres concepts, en particulier le concept d'énergie.

L'énergie est un concept très utile ici parce que les forces électriques sont *conservatives*. Considérons d'abord le travail qui doit être *fourni* au système pour placer certains corps chargés dans une configuration particulière. Partons de deux corps ou particules de charges q_1 et q_2 qui sont très éloignés l'un de l'autre initialement comme il est indiqué sur la figure 1.4 (*a*). Nous ne nous intéressons pas à l'énergie qui a été nécessaire pour créer à l'origine ces deux concentrations de charges. Rapprochons lentement les deux particules jusqu'à ce que leur distance soit r_{12} . Combien avons-nous dû fournir de travail ?

Que nous rapprochions q_1 de q_2 ou l'inverse ne change rien. Dans les deux cas le travail est l'intégrale du produit de la force par le déplacement dans-la-direction-de-la-force. La force qu'on doit appliquer pour déplacer une charge vers l'autre est égale et opposée à la force de Coulomb.

$$W = \text{force} \times \text{distance} = \int_{r=\infty}^{r=r_{12}} \frac{q_1 q_2 (-\text{d}r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$
(1.3)

Comme *r* varie de l' ∞ à r_{12} , l'élément différentiel du déplacement est-d*r*. Nous savons que le travail fourni au système doit être positif pour des charges de même signe; il faut vaincre leur répulsion. Avec q_1 et q_2 en coulombs et r_{12} en mètres l'équation 1.3 donne le travail en Joules. L'étude des forces *conservatives* faite dans le volume I: (particulièrement p. 145, vol. I) a montré que ce travail est indépendant du chemin suivi par le point d'application de la force. Refaisons cette démonstration dans le cas particulier des deux charges q_1 et q_2 représentées sur la figure 1.5. Nous y avons représenté q_1 fixe et q_2 se déplaçant vers sa position finale selon deux trajectoires différentes. Chaque coquille sphérique de rayon compris entre *r* et *r* + d*r* doit être traversée par les deux trajectoires. La variation du travail fourni – F·ds dans cette fraction de la trajectoire est la même pour les deux trajets. La raison en est que **F** a la même grandeur aux deux points et est dirigée radialement à partir de q_1 tandis que d $s = dr/\cos \theta$, donc F·ds = F·dr. A chaque variation du travail selon un trajet correspond une variation correspondante pour l'autre trajet, donc finalement les intégrales sont égales. Cette conclusion reste valable même pour des trajectoires qui font des boucles comme celle figuré en pointillé sur la figure 1.5 (pourquoi ?).

Reprenons les deux charges où nous les avons laissées sur la figure 1.4 b. Prenons une troisième charge q_3 située en un point très éloigné et amenons-la en un point P, dont la distance à la charge q_1 est r_{31} m et celle à la charge q_2 est r_{32} m (fig. 1.4 c). Le travail que

$$W_3 = \int_{\infty}^{P_3} \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{ds} \tag{1.4}$$

Grâce à l'additivité des interactions électriques sur laquelle nous avons déjà insisté,

$$-\int \mathbf{F}_{3} \cdot d\mathbf{s} = -\int (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}) \cdot d\mathbf{s} = -\int \mathbf{F}_{31} \cdot d\mathbf{s} - \int \mathbf{F}_{32} \cdot d\mathbf{s}$$
(1.5)

Ce qui montre que le travail nécessaire pour amener q_3 en P_3 en présence de q_1 et q_2 est la somme de celui nécessaire en présence de q_1 seulement et de celui nécessaire en présence de q_2 seulement.

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{32}} \right)$$
(1.6)

Le travail total U nécessaire pour obtenir ce système de trois charges est donc :

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$
(1.7)

Remarquons que q_1 , q_2 et q_3 jouent un rôle symétrique dans l'expression ci-dessus en dépit du fait que q_3 a été apporté en dernier. Nous aurions obtenu le même résultat si q_3 avait été apporté en premier. (Essayez.) U est donc indépendant de l'ordre dans lequel les charges sont apportées. Puisqu'il est aussi indépendant du trajet par lequel chaque charge est apportée à sa place, U doit être une propriété spécifique du système fini de charges. Nous l'appellerons énergie potentielle électrique de ce système particulier. Il y a comme toujours un certain arbitraire dans la définition d'une énergie potentielle. Dans ce cas nous avons choisi le zéro d'énergie potentielle comme étant l'énergie du système où les trois charges existent déjà mais sont infiniment éloignées les unes des autres. L'énergie potentielle *caractérise le système* dans son ensemble. On ne peut imputer une fraction de l'énergie potentielle à l'une des charges.



Fig. 1.6 (a) L'équation 8 donne l'énergie potentiell de ce système de neuf charges ponctuelles.

(b) La somme met en jeu quatre types différent de paires.

La généralisation de ce résultat très simple à un nombre quelconque de charges est élémentaire. Si nous avons N charges différentes, avec une configuration spatiale donnée, l'énergie potentielle du système est calculée en sommant sur toutes les paires comme dans l'équation 1.7. Le zéro de l'énergie potentielle, comme dans le cas précédent, correspond au système de N charges infiniment éloignées les unes des autres Par exemple, calculons l'énergie potentielle d'un système formé de huit charges négatives situées sur les coins d'un cube de côté b et d'une charge positive située au centre du cube comme sur la figure 1.6 a. On suppose que chaque charge négative est un électron de charge - e, tandis que la particule centrale porte une double charge positive élémentaire 2e. En sommant sur toutes les paires, nous avons

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{8(-2e^2)}{(\sqrt{3/2})b} + \frac{12e^2}{b} + \frac{12e^2}{\sqrt{2b}} + \frac{e^2}{\sqrt{3b}} \right) = \frac{4,32e^2}{4\pi\varepsilon_0 b}$$
(1.8)

La figure 1.6 b montre d'où vient chaque terme de cette somme. L'énergie est positive, ce qui indique que l'on doit fournir du travail au système pour le réaliser. On pourrait, bien sûr, récupérer ce travail si nous laissions les charges se déplacer en exerçant des forces sur des corps extérieurs au système. Ou encore si on laissait simplement les électrons libres de s'éloigner, *l'énergie cinétique totale* de toutes les particules deviendrait égale à U. Ceci est toujours vrai, que les électrons se soient éloignés simultanément et symétriquement, ou qu'on les lâche un à un dans un ordre quelconque. Nous voyons là la puissance de cette notion simple qu'est l'énergie potentielle totale du système. Pensez à la difficulté du problème auquel on serait confronté si on avait à calculer la résultante vectorielle des forces sur chaque particule, à chaque étape de l'assemblage du système ! Dans cet exemple, la symétrie géométrique simplifierait la tâche; mais ce serait néanmoins plus compliqué que le calcul simple que nous venons de faire.

On peut écrire la somme sur les paires ainsi :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k \neq j} \frac{q_j \cdot q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{jk}}$$
(1.9)

La notation $\sum_{j=1}^{N} \sum_{k \neq j}$ signifie : Prenez j = 1 et sommez sur k = 2,3, ...N et ainsi de suite jusqu'à j = N. Ceci fait intervenir *deux* fois chaque paire et c'ect pour cele que pous avens mis 1/2 on factour.

chaque paire et c'est pour cela que nous avons mis 1/2 en facteur.

1.6 Énergie électrique dans un réseau cristallin



Fig. 1.7 Un morceau de cristal de chlorure de sodium où les ions Na⁺ et Cl⁻ sont : (*a*) figures avec des proportions à peu près exactes. (*b*) remplacés par des charges ponctuelles équivalentes.

Ces idées ont une application importante en physique du solide. Nous savons qu'un cristal ionique, comme le chlorure de sodium, peut être décrit avec une bonne précision, comme un arrangement d'ions positifs (Na⁺) et d'ions négatifs (Cl⁻) alternés en un réseau régulier à trois dimensions. Dans le chlorure de sodium la disposition est celle figurée sur la figure 1.7 a. Bien sûr les ions ne sont pas des charges ponctuelles, mais des distributions quasi sphériques de charge et donc (comme nous allons le montrer) les forces électriques qu'ils exercent les uns sur les autres sont les mêmes que si chaque ion était remplacé par une charge ponctuelle placée en son centre. Nous représentons ce système électriquement équivalent sur la figure 1.7 b. L'énergie potentielle électrostatique des charges du réseau joue un rôle important dans l'explication de la stabilité et de la cohésion du cristal ionique. Voyons si nous pouvons estimer sa valeur. Nous sommes devant une somme qui parait à première vue énorme si ce n'est infinie, puisqu'un cristal macroscopique contient au moins 10²⁰ atomes. La somme convergerat-elle ? Ce que nous espérons déterminer est l'énergie potentielle par unité de masse ou de volume du cristal. Nous nous attendons à ce que celle-ci soit indépendante de la taille du cristal parce que nous pensons qu'une extrémité d'un cristal macroscopique ne peut avoir que peu d'influence sur l'autre. Deux grammes de chlorure de sodium devraient avoir une énergie double de celle d'un gramme et la forme du cristal ne devrait pas être importante puisque les atomes de la surface ne représentent qu'une faible fraction du nombre total des atomes. Notre prévision serait fausse si le cristal était composé d'ions d'un seul signe. Dans ce cas un cristal d'un gramme aurait une charge électrique énorme et rassembler deux cristaux de ce poids pour faire un cristal de deux grammes demanderait une quantité d'énergie fantastique. (Essayez d'estimer combien !) Ce qui nous sauve c'est le fait que le réseau cristallin soit formé d'une alternance d'ions positifs et négatifs; ainsi chaque fraction macroscopique du cristal est quasi neutre.

pour évaluer l'énergie potentielle nous remarquons d'abord que tous les ions positifs ont une position équivalente. En outre, bien que cela ne soit pas évident à partir de la figure 1.7, la disposition des ions positifs autour d'un ion négatif est exactement la même que celle des ions négatifs autour d'un ion positif. Nous pouvons donc prendre un ion d'un type quelconque pour centre, faire la somme de *ses* interactions avec tous les autres et multiplier simplement le résultat par le nombre total d'ions des deux sortes. Ceci réduit la double somme de l'équation à

une simple somme multipliée par le facteur N; on doit encore mettre 1/2 en facteur pour ne pas compter deux fois chaque paire. L'énergie d'un réseau de N ions de chlorure de sodium est donc :

$$U = \frac{1}{2} N \sum_{k=2}^{N} \frac{q_1 q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{1k}}$$
(1.10)

En prenant l'ion positif central comme sur la figure 1.7 b on doit sommer sur tous ses voisins, qu'ils soient proches ou éloignés. Les premiers termes sont les suivants :

$$U = \frac{N}{8\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2a}} - \frac{8e^2}{\sqrt{3a}} + \dots \right]$$
(1.11)

Le premier terme provient des six ions chlore les plus proches situés à une distance *a*, le deuxième terme des douze atomes de sodium situés sur les coins du cube et ainsi de suite. Remarquons que la convergence de cette série n'est pas *absolue*; si nous faisions l'erreur d'essayer de sommer d'abord tous les termes positifs, cette somme divergerait. Pour calculer une telle somme nous devons arranger les termes de façon à ce que, chaque fois que nous rajoutons des groupes de termes correspondant à des ions plus éloignés, ces groupes représentent des couches quasi neutres de matériau. Si on arrête alors la sommation, on peut être sûr que la contribution des ions les plus éloignés serait petite. Nous avons décrit ici en simplifiant à l'extrême ce qui est en fait un délicat problème de calcul. De nos jours on calcule de telles séries avec un ordinateur. Dans le cas qui nous intéresse on trouve

$$U = \frac{-0.8738Ne^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$
(1.12)

Ici *N*, nombre d'ions, est le double du nombre de molécules de NaCl. Le signe négatif traduit la prédominance des plus proches voisins et montre qu'il faut fournir du travail pour dissocier les ions formant le cristal. Cependant, s'il n'y avait pas d'autres effets, le cristal devrait se mettre sous la forme la plus compacte possible puisque l'énergie de la distribution de charges est bien évidemment *abaissée* par toute diminution de la distance *a*. Nous rencontrons de nouveau ici le dilemme familier de la physique classique non quantique. Aucun système ne peut être en équilibre stable, d'après les lois de la physique classique, sous l'unique action des forces électriques. Cela rend-il notre analyse inutile ? Pas du tout. Car en physique quantique, l'énergie potentielle électrique a toujours un sens et peut être calculée de la façon que nous venons de décrire.

1.7 Le champ électrique

Supposons que nous ayions un système de charges $q_1, q_2, ..., q_n$ fixées dans l'espace et que nous nous intéressions, non pas aux forces existant entre les charges, mais seulement à leur effet sur une autre charge q_0 que l'on peut placer au voisinage du système. Nous savons comment calculer la force résultante sur cette charge si nous pouvons indiquer sa position par ses coordonnées x, y, z; la force sur la charge q_0 est :

$$\mathbf{F}_{0} = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_{0} q_{j} \hat{\mathbf{r}}_{j0}}{4\pi\varepsilon_{0} r_{j0}^{2}}$$
(1.13)

où $\hat{\mathbf{r}}_{0j}$ est le vecteur unitaire allant de la j^{ieme} charge du système au point (x, y, z). La force est proportionnelle à q_0 de sorte que, si nous la divisons par q_0 , nous obtenons une quantité vectorielle qui ne dépend que de la structure de notre système original de charges, $q_1, ..., q_N$ et de la position du point (x, y, z). Nous appellerons cette fonction vectorielle de x, y, z le champ *électrique* créé par $q_1, ..., q_N$, et nous utiliserons le symbole \mathbf{E} pour le représenter. Nous appelons sources du champ électrique les charges $q_1, ..., q_N$. Nous pouvons prendre comme définition du champ électrique créé au point (x, y, z) par une distribution de charges





$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_{j0}^2}{q_j \hat{\mathbf{r}}_{j0}}$$
(1.14)

La figure 1.8 illustre l'addition vectorielle du champ électrique créé par une charge ponctuelle de + 2 C au champ créé par une charge ponctuelle de - 1 C, placées toutes deux en des points fixes de l'espace. Dans le système M.K.S.A. l'intensité du champ électrique s'exprime en newtons par charge unité c'est-à-dire en newtons/Coulomb ou encore en volts/m. Jusqu'ici nous n'avons rien dit de bien nouveau. Le champ électrique est simplement une autre façon de décrire le système de charges; il le fait en donnant en grandeur, direction et sens, la force par unité de charge qu'une charge d'exploration q_0 subirait en chaque point. Mais il faut être prudent dans l'utilisation de cette définition. A moins que les charges ne soient réellement immobiles, l'introduction d'une charge finie q_0 peut les déplacer légèrement; le champ, lui-même défini par l'équation 1.14, est alors différent. Aussi définit-on parfois le champ en disant que q_0 est une charge d'essai « infinitésimale » et que **E** est la limite de \mathbf{F}/q_0

quand q_0 tend vers zéro. La rigueur de cette nouvelle définition est cependant illusoire. Car on n'a jamais observé dans la réalité une charge inférieure à e! En fait, si nous prenons l'équation 1.14 comme *définition* de **E**, il n'y a plus de référence à une charge test, donc plus de problèmes : on n'a plus besoin de fixer les sources. Si l'introduction d'une nouvelle charge déplace les charges sources, alors le

champ est modifié et, si nous voulons prédire la force sur la nouvelle charge, nous devons utiliser le nouveau champ électrique pour la calculer.

Peut-être vous demandez-vous ce qu'est un champ électrique ? Est-ce un objet physique réel ? Est-ce un simple facteur de l'équation donnant la valeur numérique de la force mesurée au cours d'une expérience ? Faisons ici deux remarques ! D'abord, puisque cela marche, il faut bien que les deux points de vue soient identiques. Ceci n'a rien d'humoristique, c'est tout à fait sérieux. Ensuite, le fait qu'il suffise de connaître le vecteur champ électrique en un point de l'espace pour y prédire la force y agissant sur une charge *quelconque* n'est en rien trivial. Il aurait pu en être tout autrement ! Si on n'avait jamais fait d'expériences, on aurait pu imaginer que, placée dans une situation où une charge unité est soumise à une certaine force, une charge double ne subisse pas forcément une force double. Si ceci était vrai, la description des forces au moyen du champ électrique ne serait plus valable.



Fig. 1.9 (a) Champ créé par ure charge q_1 =+ 3 (b) Champ créé par une charge q_2 = - 1. Ces deux représentations sont sommaires et ne sont que grossièrement quantitative.



Fig. 1.10 Le champ au voisinage des deux charges q_1 =+3, q_2 =-1, est la superposition des champs des figures 9 *a* et 9 *b*

Le champ électrique définit en chaque point d'un système une *propriété locale*, au sens suivant : si nous connaissons **E** dans une petite région, nous savons, *sans avoir besoin d'aucun autre renseignement*, ce qui arrivera à de quelconques charges dans cette région. Nous n'avons pas besoin de savoir ce qui produit le champ. Si nous connaissons le champ électrique en tout point de l'espace, nous possédons une description complète du système, qui reflète les positions et grandeurs de toutes les charges.

Pour visualiser un champ électrique, il nous faut définir un vecteur, c'est-à-dire une amplitude et une direction, en chaque point de l'espace. Nous utiliserons dans ce livre, pour figurer des champs de vecteurs, des représentations variées, dont aucune ne donne pleinement satisfaction.

Il est difficile de représenter à deux dimensions une fonction vectorielle de l'espace à trois dimensions. Nous pouvons indiquer l'amplitude et la direction de E en des points variés en traçant de petites flèches en ces points, en les faisant plus longues lorsque **E** est plus grand⁽⁸⁾. En utilisant cette convention, nous représentons sur la figure 1.9 *a* le champ d'une charge isolée de + 3 unités et sur la figure 1.9 b le champ d'une charge de - 1 unité. Ces dessins n'apportent pas grand-chose à notre compréhension du champ créé par une charge isolée; chacun peut imaginer un champ radial en inverse carré de la distance sans s'aider d'une figure. Nous les donnons pour pouvoir comparer avec la figure 1.10 qui représente de la même façon le champ créé par deux telles charges séparées par une distance a. Tout ce que la figure 1.10 peut montrer est le champ dans un plan contenant les charges. Pour obtenir une représentation complète à trois dimensions, on doit imaginer que le dessin tourne autour de l'axe de symétrie. Sur la figure 1.10 il y a un point de l'espace pour lequel le champ

E est nul. A quelle distance de la plus proche des deux charges doit-il se trouver ? Remarquez aussi que, sur les bords du dessin, le champ pointe plus ou moins vers l'extérieur. On voit donc qu'à une très grande distance des charges le champ ressemble à celui créé par une charge positive. On peut s'y attendre parce que la séparation des deux charges ne doit pas jouer beaucoup sur le champ en des

 $^{^{(8)}}$ Une telle représentation est plutôt erronée. Il est difficile d'indiquer le point de l'espace auquel s'applique une valeur vectorielle particulière et le domaine de variation de **E** est généralement si grand qu'il est impossible de faire les longueurs des flèches proportionnelles à **E**.

points infiniment éloignés; une charge ponctuelle de + 2 unités est justement ce qui nous resterait si nous superposions nos deux sources au même point.



Une autre façon de représenter un champ de vecteurs est de tracer des lignes de force. Ce sont simplement des courbes dont la tangente en tout point a la direction du champ en ce point. De telles courbes seront continues sauf en des points singuliers tels que ceux où sont situées les charges, ou encore en des points comme l'exemple de la figure 1.10 où le champ est nul. Un dessin de lignes de forces ne donne pas directement l'amplitude du champ; nous verrons cependant que, dune façon générale, les lignes de force se resserrent quand on s'approche d'une région de haut champ et s'écartent quand on s'approche d'une région de faible champ. Sur la figure 1.11 on a tracé quelques lignes de force pour le même système que celui de la figure 1.10, une charge positive de 3 unités et une charge négative d'une unité. Nous nous trouvons limités de nouveau par la nature de l'impression à une coupe bi-dimensionnelle à travers un réseau de courbes.

1.8 Distribution de charges

Fig. 1.11 Quelques lignes de force du champ électrique autour des deux charges $q_1 = +3$, $q_2 = -1$.

Le moment semble propice à la généralisation des charges ponctuelles aux distributions continues de charges. Une distribution volumique de charge est décrite par une fonction scalaire de densité de charge ρ , qui est une fonction de la position et qui a les dimensions charge/volume. Ce qui signifie que la charge totale contenue dans un élément de volume est égale à ρ fois le volume de cet

élément. On utilise souvent le même symbole pour la masse volumique, mais, dans ce livre, nous attribuerons toujours en premier lieu le symbole ρ à la densité de charge par unité de volume. Si nous écrivons ρ comme une fonction des coordonnées (x, y, z), alors $\rho(x, y, z)$ z) dx dy dz est la charge contenue dans la petite boîte de volume dx dy dz située au point x, y, z.

A l'échelle atomique, bien sûr, la densité de charge varie énormément d'un point à un autre; elle reste cependant un concept très utile. Néanmoins nous l'utiliserons principalement pour l'étude de systèmes macroscopiques, assez grands pour que l'élément de volume dv =dx dy dz puisse être très petit devant la taille du système tout en étant assez grand pour contenir plusieurs atomes ou charges élémentaires. Comme nous l'avons remarqué avant, nous avons eu un problème similaire pour définir la densité de masse d'un corps.

Si la source du champ électrique est une distribution continue de charges au lieu d'une distribution ponctuelle, il nous suffira de remplacer la somme de l'équation 1.14 par l'intégrale appropriée. Cette intégrale donne le champ électrique au point (x, y, z) produit par des charges placées aux points (x', y', z')



Fig. 1.12 Chaque élément de la distribu. tion de charges $\rho(x', y', z')$ fournit une contribution au champ électrique **E** au point (x, y, z). Le champ total en ce point est la somme de toutes les contribution, semblables (éq. 15).

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \int \frac{\rho(x', y', z')\hat{\mathbf{r}}dx'dy'dz'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
(1.15)

C'est une intégrale de volume. En maintenant fixes x, y et z, nous laissons les variables d'intégration x', y', z', explorer tout l'espace contenant la charge, sommant ainsi les contributions dues à tout élément de charge. Le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{r}}$ pointe de (x', y', z') vers (x, y, z), à moins que nous désirions mettre un signe négatif devant l'intégrale, auquel cas on doit inverser la direction de $\hat{\mathbf{r}}$. On a toujours du mal à ne pas se tromper de signe. Rappelons que le vecteur champ électrique créé par une charge pointe dans la direction opposée à la charge (fig. 1.12).

Au voisinage d'une charge ponctuelle le champ électrique tend vers l'infini ($E \propto 1/r^2$). Parler du champ sur la charge n'a pas de sens. Comme les sources physiques du champ ne sont pas, à notre connaissance, des concentrations infinies de charges dans un volume nul mais des structures finies, nous ignorons simplement les singularités mathématiques qu'impliquent notre langage en charges ponctuelles et nous ne considérons pas l'intérieur de ces sources élémentaires. Il vaut mieux noter toutefois qu'une distribution continue de charge ne contient aucune menace de singularité, et que le champ peut être parfaitement défini à l'intérieur de la distribution elle-même. Ceci provient du fait que l'intégrale de volume de l'équation 1.15 ne peut diverger au



(a)



Fig. 1.13 (a) Une surface fermée placée dans un champ de vecteurs est divisée (b) en petits éléments de surface. (c) Chacun de ces éléments est représenté Par un vecteur dirigé vers l'extérieur de la surface

voisinage de r = 0 puisque l'élément de volume tend vers zéro comme $r^2 dr$. Cela revient à dire que, tant que ρ reste fini, le champ reste fini partout même à l'intérieur ou à la surface d'une distribution de charge,

1.9 Flux

La relation entre le champ électrique et ses sources peut s'exprimer d'une façon remarquablement simple qui peut être très utile. Pour cela, nous allons définir une quantité appelée *flux*.

Considérons une région où règne un champ électrique quelconque et, dans cette région, une surface arbitraire fermée, formant une sorte de ballon de forme quelconque. La figure 1.13 montre une telle surface, quelques lignes de force y représentent le champ. Divisons maintenant la surface en petits éléments assez petits pour être considérés comme plans et pour que le champ n'y varie pratiquement pas. En d'autres termes il ne faut pas prendre une surface trop accidentée et ne pas la faire passer par des singularités⁽⁹⁾ du champ telles que des charges ponctuelles. La surface d'un petit élément a une certaine valeur en mètres carrés et chaque élément définit une direction unique, celle de la normale à sa surface pointant vers l'extérieur. (Comme la surface est fermée, on peut dire aussi de l'intérieur vers l'extérieur; il n'y a pas d'ambiguïté.) Représentons cette valeur de l'aire et cette direction par un vecteur. Alors, pour chacun des éléments en lesquels on a divisé la surface, et que l'on peut repérer par un indice *j*, nous avons un vecteur **a**_j donnant sa surface et son orientation. Les figures 1.13 *b* et *c* représentent ce que nous venons de décrire. Remarquons que le vecteur **a**_j ne dépend pas du contour de l'élément de surface; dès que les éléments sont assez petits, la façon dont on a divisé la surface importe peu.

Soit $\mathbf{E}_{\mathbf{j}}$ le champ électrique à l'endroit du *j-ième* élément. Le produit scalaire $\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{j}}$ est un nombre. Nous l'appellerons le *flux* à travers cet élément de surface. Pour comprendre l'origine de ce nom, imaginons une fonction vectorielle qui représente la vitesse de déplacement dans un liquide, par exemple l'eau d'une rivière où la vitesse varie d'un endroit à l'autre tout en restant constante dans le temps en un point donné. Représentons par **v**, mesuré par exemple en mètres par secondes, ce



Fig. 1.14 Le flux à travers le cadre d'aire a est v.a où v est la vitesse du fluide. Le flux est le volume passant à travers le cadre par unité de temps

champ de vecteurs. Maintenant, si a est la surface orientée, exprimée en mètres carrés, d'un cadre placé dans l'eau, **v** · **a** est le débit de l'eau à travers le cadre mesuré en mètres cubes par seconde (fig. 1.14). Nous devons insister sur le fait que notre définition du flux peut s'appliquer à toute fonction vectorielle, quelle que soit la grandeur physique qu'elle représente.

Ajoutons maintenant les flux à travers tous les éléments de surface pour obtenir le flux total à travers la surface, quantité scalaire que nous représentons par :

$$\boldsymbol{\varPhi} = \sum_{\text{tous les } j} \mathbf{E}_{j} \cdot \mathbf{a}_{j}$$
(1.16)

⁹ Par singularité du champ, nous n'entendons pas simplement une charge ponctuelle où le champ diverge, mais tout endroit où le champ subit une discontinuité en grandeur ou en direction, comme, par exemple, une couche chargée infiniment mince. En fait, cette nouvelle sorte de singularité ne nous causera pas de difficulté ici, à moins que la surface fermée ne coïncide avec la surface de discontinuité sur une aire finie.

Si nous diminuons la taille des éléments et augmentons leur nombre indéfiniment, nous passons de la somme de l'équation 1.16 à une intégrale de surface

$$\boldsymbol{\Phi} = \int_{\substack{\text{sur toute} \\ \text{la surface}}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{da}$$
(1.17)

Une intégrale de surface d'une fonction vectorielle quelconque \mathbf{F} , prise sur une surface S, a le sens suivant : diviser S en petits éléments, chacun d'eux étant représenté par un vecteur porté par sa normale extérieure de module égal à l'aire de l'élément; pour chaque élément faire le produit scalaire du vecteur surface orientée de l'élément avec le \mathbf{F} local; faire la somme de tous ces produits, l'intégrale de surface est la limite de cette somme, quand on fait tendre vers zéro les éléments de surface. Ne vous inquiétez pas à la pensée d'avoir à vous livrer à un tel calcul dans le cas d'une surface aussi compliquée que celle de la figure 1.13. La propriété surprenante que nous allons démontrer maintenant le rend inutile !

1.10 Théorème de Gauss



Fig. 1.15 Dans le champ **E** créé par une charge ponctuelle q, quel est le flux sortant d'une sphère entourant q?



Fig. 1.16 Où l'on montre que le flux à travers *n'importe quelle* surface entourant q est le même que le flux à travers la sphère précédente.

Prenons le cas le plus simple à imaginer; supposons que le champ soit créé par une charge positive ponctuelle isolée q et que la surface soit une sphère de rayon r centrée sur la charge ponctuelle (fig. 1.15). Que vaut le flux Φ à travers cette surface ? La solution est simple parce que le module de **E** en chaque point de la surface est $q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ et sa direction est celle de la normale extérieure en ce point. Nous avons donc :

$$\Phi = E \times \text{surface totale} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$
(1.18)

Le flux est indépendant de la taille de la sphère.

Imaginons maintenant une seconde surface entourant la première mais qui ne soit pas sphérique, comme sur la figure 1.16. Nous prétendons que le flux total à travers cette surface est le même que celui à travers la sphère. Pour le démontrer, considérons un cône, dont le sommet est sur q, qui coupe la sphère selon un petit élément **a** et se continue sur la surface extérieure où il découpe un élément **A** à une distance R de la charge ponctuelle. L'aire de l'élément **A** est égale au produit de celle de l'élément **a** par deux facteurs : le premier est le rapport des distances $(r/R)^2$, le second dû à l'orientation de **A** est 1/cos θ . L'angle θ est l'angle entre la normale extérieure à **A** et la direction radiale (fig. 1.16). Le champ électrique dans cette région est toujours dirigé radialement, il est réduit par rapport à sa valeur sur la sphère d'un facteur $(r/R)^2$. En appelant **E**(R) le champ sur la surface extérieure, et **E**(r) le champ sur la sphère, nous avons

Flux à travers l'élément extérieur = $\mathbf{E}(R) \cdot \mathbf{A} = E(R)A \cos \theta$ Flux à travers l'élément intérieur = $\mathbf{E}(r) \cdot \mathbf{a} = E(r)a$

$$E(R)A\cos\theta = [E(r)(r/R)^2][a(R/r)^2 \ 1/\cos\theta]\cos\theta = E(r)a \tag{1.19}$$

Ceci prouve que le flux à travers les deux éléments est le même. On peut faire maintenant correspondre à chaque élément de la surface extérieure un élément de la surface sphérique, de sorte que le flux total à travers les deux surfaces doit être le même. Donc le flux à travers la nouvelle surface est tout juste q/ε_0 . Mais cette surface peut avoir une forme et une taille

arbitraire⁽¹⁰⁾. Nous en concluons : le flux du champ électrique à travers toute surface enfermant une charge ponctuelle q est q/ε_0 . En corollaire, nous pouvons dire que le flux à travers une surface fermée est *nul* si la charge est à l'extérieur de la surface. Nous laissons au lecteur le soin de la démonstration en lui suggérant sur la figure 1.17 une méthode pour la faire.

⁽¹⁰⁾ Pour être tranquilles, nous avons pris une surface qui entourait la sphère, mais cela n'était pas nécessaire. D'ailleurs, on peut prendre la sphère aussi petite que l'on veut.

Il y a une façon de considérer tout ceci qui rend évident ce résultat. Imaginons en q une source qui émet des particules - telles que des balles ou des photons - dans toutes les directions à une vitesse constante. Il est clair que le flux des particules à travers une fenêtre d'aire unité va diminuer comme l'inverse du carré de la distance de la fenêtre à la source q. Nous pouvons donc faire une analogie entre le



Fig. 1.17 Pour montrer que en (a) le flux à travers *S* est nul vous pouvez vous servir de (b).

module E du champ électrique et l'intensité du flux de particules exprimé en balles par unité d'aire et par unité de temps. Il est assez évident que le flux des balles à travers toute surface entourant complètement la source est indépendant de la taille et de la forme de cette surface, car il vaut juste le nombre total de projectiles émis par unité de temps. Donc le flux de E à travers la surface fermée doit être aussi indépendant de sa grandeur et de sa forme. Ces deux phénomènes ont un caractère commun, la variation de l'intensité en inverse carré de la distance.

La situation est maintenant mûre pour la superposition ! Tout champ électrique est la somme des champs dus aux sources individuelles Nous avons énoncé cette propriété dans notre énoncé, éq. 1.13, de la loi de Coulomb. Il est clair que le flux est une quantité additive au même sens, car, si nous avons un certain nombre de sources $q_1, q_2, ..., q_N$, qui créeraient, si elles étaient seules, les champs $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ..., \mathbf{E}_N$, le flux $\boldsymbol{\Phi}$ du champ réel à travers une surface S peut s'écrire

$$\boldsymbol{\Phi} = \int_{S} \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}\mathbf{a} = \int_{S} \left[\mathbf{E}_{1} + \mathbf{E}_{2} + \dots + \mathbf{E}_{N} \right] \cdot \mathbf{d}\mathbf{a}$$
(1.20)

Nous venons tout juste d'apprendre que $\int \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{da}$ vaut q_n / ε_0 si la charge q_n est à l'intérieur de *S* et zéro autrement. Donc chaque charge

q située à l'intérieur de la surface fournit une contribution de q/ϵ_0 à l'intégrale de surface de l'équation 1.20 et toutes les charges situées à l'extérieur fournissent une contribution nulle. Nous sommes arrivés au théorème de Gauss

Le flux du champ électrique E à travers une surface fermée quelconque, c'est-à-dire l'intégrale		$\int \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{a}$ sur la surface, vaut $1/\varepsilon_0$ fois
la charge totale contenue dans la surface :	$\int \mathbf{E}_{n} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_{0}} \sum_{i} q_{i} = \frac{1}{\varepsilon_{0}} \int \rho d\upsilon$	

Nous pourrions appeler *loi* l'énoncé de l'encadré parce qu'il est équivalent à la loi de Coulomb et pourrait aussi bien servir de loi de base pour les interactions électrostatiques une fois définis la charge et le champ. Le théorème de Gauss et la loi de Coulomb ne sont pas deux lois physiques indépendantes, mais la même loi exprimée de façon différente⁽¹¹⁾.

Si nous regardons de nouveau notre démonstration. nous voyous qu'elle est basée sur la nature en inverse carré de l'interaction et bien sûr, sur la superposition, c'est-à-dire l'additivité des interactions. Donc le théorème s'applique à tout champ en inverse carré de la physique, par exemple au champ de gravitation, comme on l'a vu dans le volume 1, chapitre 9.

Il est aisé de voir que le théorème de Gauss ne s'appliquerait pas si la loi de force était par exemple en inverse du cube de la distance. Car, dans ce cas, le flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle q à travers une sphère de rayon R centrée sur la charge serait

$$\boldsymbol{\Phi} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0 R}$$
(1.22)

En rendant la sphère assez grande, nous pourrions avoir un flux aussi petit que nous le voudrions, alors que la charge totale à l'intérieur resterait constants.

C'est à double titre que ce théorème remarquable augmente nos connaissances. D'abord il exprime une relation entre le champ et ses sources qui est l'inverse de la loi de Coulomb. La loi de Coulomb nous dit comment trouver le champ électrique à partir de charges

 $^{^{(11)}}$ Il y a une différence, ici sans conséquence mais qu'il est intéressant de remarquer en vue de l'étude du champ créé par des charges en mouvement. Le Théorème de Gauss régente une plus grande sorte de champs que ceux représentés par le champ électrostatique. En particulier, un champ en inverse carré de *r* mais qui n'a pas la symétrie sphérique, peut satisfaire le théorème de Gauss. En d'autres termes, le théorème de Gauss seul n'inclut pas la symétrie du champ créé par une charge potentielle qui est implicite dans la loi de Coulomb.

données; avec le théorème de Gauss nous pouvons déterminer quelle est la quantité de charge dans une région quelconque où le champ est connu. Ensuite, la relation mathématique que l'on vient d'établir est un outil analytique puissant; elle peut simplifier des problèmes compliqués, comme nous allons le voir.

1.11 Champ créé par une distribution sphérique de charge



Nous pouvons utiliser le théorème de Gauss pour trouver le champ électrique créé par une distribution de charge à symétrie sphérique. c'est-à-dire une distribution où la densité de charge ρ ne dépend que de la distance à un point central. La figure 1.18 représente une coupe à travers une telle distribution. Dans celle-ci, la densité de charge est forte au centre, décroît puis augmente à nouveau quand on s'éloigne du centre, puis s'annule au-delà de r_0 . Que vaut le champ électrique en un point tel que P_1 , à l'extérieur de la distribution ou en un point tel que P_2 à l'intérieur (fig. 1.19)? Si nous devions utiliser seulement la loi de Coulomb, nous aurions à effectuer une intégration qui ferait la somme des champs électriques en P_1 créés par chaque volume élémentaire de la distribution de charge. Essayons une approche différente qui utilise à la fois la symétrie du système et le théorème de Gauss.

Fig. 1.18 Une distribution de charge à symétrie sphérique.



Fig. 1.19 Champ électrique créé par une distribution de charge à symétrie sphérique.



Fig. 1.20 Le champ est nul à l'intérieur d'une coquille sphérique de charges.

A cause de la symétrie sphérique, le champ électrique en tout point doit être dirigé radicalement. De la mime façon, le module E du champ doit être le même en tous les points d'une surface sphérique S_1 de

rayon r_1 car de tels points sont tous équivalents. Appelons E_1 cette valeur du module du champ. Le flux à travers cette surface S_1 est dons simplement $4\pi r_1^2 E_1$ et, d'après le théorème de Gauss, il doit être égal à $1/\varepsilon_0$ fois la charge contenue dans la surface. Dons $4\pi r_1^2 E_1 = 1/\varepsilon_0$ (charge à l'intérieur de S_1) ou

$$E_1 = \frac{\text{charge à l'interieur de } S_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$$
(1.23)

En comparant ce résultat au champ créé par une charge ponctuelle, nous voyons que *le champ en tout point de S, est le même que si toute la charge contenue dans S*₁ *était concentrée en son centre.* Le même énoncé s'applique à une sphère tracée à l'intérieur de la distribution de charge. Le champ en tout point de S_2 est le même que si toute la charge à l'intérieur de S_2 était en son centre et que si toute la charge à *l'extérieur* de S_2 n'existait pas. Évidemment le champ à l'intérieur d'une distribution de charge sphérique « creuse » est nul (fig. 1.20).

Le même argument appliqué au champ gravitationnel nous montrerait que la terre, en supposant que sa distribution de masse est de symétrie sphérique, attire les corps qui lui sont extérieurs comme si la masse était concentrée en son centre. C'est un énoncé connu. Cela a été prouvé dans le volume I en utilisant le potentiel de gravitation et une intégration. Ceux qui tendent à penser que cela exprime une propriété évidente du centre de masse doivent se rappeler que ce théorème n'est en général pas vrai. Un cube parfait de densité uniforme n'attire *pas* les corps extérieurs comme si sa masse était concentrée en son centre géométrique.

Newton ne trouvait pas ce théorème évident. Il en avait besoin pour démontrer qu'un objet tombant sur la terre est soumis à une force semblable à celle qui maintient la lune sur son orbite. Le délai de vingt ans qui intervint dans la publication de la théorie de Newton fut apparemment dit, en partie tout au moins, à la difficulté qu'il avait eu à trouver une preuve de ce théorème qui le satisfasse. La démonstration qu'il trouva et publia dans les *Principia* en 1686 (livre I, sect. XII,théorème XXXI) est une merveille de finesse dans laquelle, pour parler vulgairement, il effectue une intégration en volume vicieuse sans l'aide du calcul intégral tel que nous le connaissions. La démonstration est nettement plus longue que la discussion précédente sur le

théorème de Gauss et le raisonnement plus compliqué. C'est que, voyez-vous, avec tout son génie mathématique et son originalité, Newton ne connaissait pas le théorème de Gauss; relation qui, une fois qu'on nous l'a démontré, semble évidente et même triviale.

1.12 Champ créé par une distribution linéaire de charge



Un long fil rectiligne chargé peut, si l'on néglige son diamètre, être caractérisé par la quantité de charge qu'il porte par unité de longueur. Désignons par a la densité de charge linéaire, mesurée en Coulomb/mètre. Quel est le champ électrique créé par une telle distribution linéaire, qu'on suppose infiniment longue et de densité linéaire λ ? Nous allons résoudre ce problème de deux façons, d'abord par une intégration en partant de la loi de Coulomb.

Pour estimer le champ en un point *P*, figuré sur la figure 1.21, nous devons ajouter les contributions de tous les segments élémentaires de la ligne chargée, tels que l'élément dx. La charge dq de cet élément est égale à λdx . Si nous prenons la ligne chargée comme axe des x, nous pouvons faire passer l'axe des y par *P*, qui est situé à r m du point le plus proche de la ligne. Il est bon d'utiliser la symétrie du problème dès le début. Le champ électrique en *P* doit évidemment pointer dans la direction y, de sorte que E_x et E_z soient tous deux nuls. La contribution de la charge dq à la composante y du champ électrique au point *P* est :

$$dE_{y} = \frac{dq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_{0}R^{2}} = \frac{\lambda \, dx\cos\theta}{4\pi\varepsilon_{0}R^{2}}$$
(1.24)

Fig. 1.21 (a) Le champ en *P* est la somme vectorielle des contributions de chaque élément de la ligne chargée.(*b*) Détail de (*a*).

où θ est l'angle que le vecteur champ créé par dq fait avec la direction y. La composante totale selon y est donc :

$$E_{y} = \int dE_{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda \cos \theta dx}{4\pi\varepsilon_{0}R^{2}}$$
(1.25)

Il est commode de prendre θ comme variable d'intégration. Puisque $R = r/\cos \theta$ et dx = R d θ /cos θ , l'intégrale devient :

$$E_{y} = \int dE_{y} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\lambda \cos\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_{0}r} = \frac{\lambda}{\varepsilon_{0}r} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos\theta d\theta}{4\pi r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_{0}r}$$
(1.26)



Fig. 1.22 Utilisation du théorème de Gauss pour trouver le champ d'une ligne chargée

Nous voyons que le champ créé en un point par une ligne rectiligne uniformément chargée est inversement proportionnel à la distance du point à la ligne. Sa direction est radiale, vers l'extérieur si la ligne est chargée positivement, vers la ligne si celle-ci est chargée négativement.

Le théorème de Gauss conduit directement au même résultat. Entourons un segment de la ligne chargée d'un cylindre circulaire de longueur L et de rayon r, comme sur la figure 1.22 et considérons le flux à travers cette surface. Comme nous l'avons déjà remarqué, la symétrie garantit que le champ est radial, de sorte que le flux à travers les extrémités de la « boîte de conserve » est nul. Le flux à travers la surface cylindrique est simplement égal au produit de l'aire $2\pi rL$ par E_r module du champ à la surface. D'autre part, la charge contenue dans la surface est juste λL ; le théorème de Gauss donne alors

$$2\pi r L E_r = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$
(1.27)

ou

1

en accord avec l'équation 1.26.

1.13 Champ créé par une distribution plane infinie de charge



Fig. 1.23 Utilisation du théorème de Gauss pour trouver le champ créé par une plaque chargée infinie.

On appelle distribution de charge superficielle une charge électrique distribuée sur une couche mince. Considérons une feuille plane de dimensions infinies avec une densité de charge en surface constante σ . Le champ électrique de chaque côté de la surface doit être, quel que soit son module, perpendiculaire à celle-ci; il n'y a pas d'autre direction privilégiée dans ce système. Pour des raisons de symétrie, le champ doit avoir le même module et une direction opposée en deux points P et P' équidistants de la surface situés de part et d'autre de celle-ci. Ceci étant, le théorème de Gauss nous donne aussitôt le module du champ : traçons un cylindre comme sur la figure 1.23 avec P d'un côté P' de l'autre et une surface de base A. Le flux sortant n'est non nul qu'aux deux extrémités; si E_p et $E_{p'}$ désignent respectivement le module du champ en P et P', le flux sortant est $AE_p + AE_{p'} = 2AE_{p}$. La charge à l'intérieur du cylindre est σA . Donc $2AE_p = \sigma A/\varepsilon_0$ ou

$$E_{\rm p} = \sigma/2\varepsilon_0 \tag{1.28}$$

Nous voyons que le module du champ est indépendant de la distance r du point à la surface chargée. On aurait pu, au prix de bien plus grands efforts, obtenir l'expression (1.28) en calculant la somme vectorielle des contributions au champ en P de tous les petits éléments de charge de la surface.

Le champ créé par une distribution linéaire infinie varie comme l'inverse de la distance à la ligne, tandis que celui créé par une surface plane chargée infinie a un module constant. Cela vient de la loi en $1/r^2$: en raisonnant simplement, on voit que la partie de la

distribution linéaire qui est la cause principale du champ en P (fig. I .21) est constituée par les charges les plus proches - réparties sur une distance de l'ordre de r. Si nous les groupons ensemble et négligeons les autres, nous avons une charge concentrée de grandeur $q \cong \lambda r$, qui devrait produire un champ proportionnel à q/r^2 ou λ/r . Dans le cas de la surface chargée, la quantité de charge « effective » ainsi définie augmente proportionnellement à r^2 quand on s'écarte de la surface, ce qui compense la décroissance en $1/r^2$ du champ créé par un élément donné de charge.

Problèmes



- 1.1 (a) Comparer la force de répulsion électrique de deux électrons. séparés par une distance r, à leur attraction gravitationnelle. Que faudrait-il prendre comme masse de l'électron pour que ces forces soient égales ? (Les constantes fondamentales que sont la charge et la masse de l'électron ainsi que la constante G de gravitation universelle sont données vol. 1, p. 79. G est une constante qui doit être déterminée expérimentalement puisque le kilogramme, unité de masse, est défini indépendamment, Dans le système M.K.S.A., la loi de Coulomb elle-même sert à définir l'unité de charge. En supposant que l'unité de masse ait été définie exactement de la même façon, que serait notre masse, dans de telles unités
- 1.2 Quelle est la force électrique qui s'exerce sur une charge positive unité placée au centre d'un carré de côté b qui porte des charges q, 2q, 4q et 2q placées dans cet ordre sur ses quatre coins.

1.3 Deux ballons identiques gonflés à l'hélium flottent en équilibre dans l'air en supportant un poids de 5 g. (Voir le dessin. Chaque ballon porte une charge Q. Trouver la valeur de Q en Coulombs *rép.* 5.6 10⁻⁷ C

- 1.4 Des charges e sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté r, et une charge Q > 0 est placée au centre de gravité du triangle. Quelle doit être la valeur de Q pour que les forces sur chacune des charges négatives soient nulles? Il est évident que la force *sur* Q est toujours nulle par symétrie. Le système est-il en équilibre stable ?
- 1.5 Trois charges sont placées comme indiqué sur le dessin.
 - a) Calculer la force électrostatique agissant sur chaque charge.
 - b) Calculer l'énergie potentielle totale de cette configuration de charges.

Énergie potentielle d'un système de charges ponctuelles e



- 1.6 Une particule α passe rapidement à travers le centre d'une molécule d'hydrogène en se déplaçant le long dune ligne perpendiculaire à l'axe internucléaire. La distance internucléaire vaut *b*. En quel point de son parcours la particule α subit-elle la force la plus grande ? On supposera que les noyaux ne bougent pas beaucoup durant le passage de la particule. (Cette hypothèse est valable en raison de la grande vitesse de la particule α . Vous négligerez aussi le champ électrique dû aux électrons dans la molécule. (Ce n'est pas une très bonne approximation, car, dans la molécule H₂, il y a une importante densité de charge négative dans la région centrale).
- 1.7 Trouvez les dispositions géométriques d'un proton et d'un électron pour lesquelles l'énergie potentielle du système est nulle. Combien y-a-t-il de telles dispositions avec les trois particules en ligne droite ?
- 1.8 Calculer l'énergie potentielle, par ion, d'un cristal ionique unidimensionnel infini, c'est-à-dire d'un alignement de charges équidistantes de valeur e et de signes alternés. (Suggestion : le développement en série de Log(1 + x) peut être utile.
- 1.9 Une sphère de rayon *a* une densité de charge volumique uniforme ρ . Nous voulons savoir l'énergie potentielle de cette sphère chargée, c'est-à-dire le travail nécessaire pour établir cette distribution de charge. Calculez-le en fabriquant la sphère couche par couche, en utilisant le fait que le champ à l'extérieur d'une distribution sphérique de charge est le même que si toute la charge était concentrée au centre. Supposez que la sphère a atteint un rayon *r*. Quelle est sa charge totale *q* à cet instant? Ajoutez maintenant une couche infinitésimale d'épaisseur dr. Quel travail dU doit-on fournir pour apporter de l'infini au rayon *r* la quantité de charge contenue dans cette couche? Intégrez alors de r = 0 à r = a. Exprimez le résultat en fonction de la charge totale *Q* de la sphère.

$$R\acute{e}p. \ U = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

- 1.10Au début de ce siècle, l'idée que la masse au repos de l'électron pouvait avoir une origine purement électrique était très attirante, d'autant plus que la relativité restreinte venait d'établir l'équivalence entre masse et énergie. Imaginez que l'électron soit une sphère de charge de densité volumique constante jusqu'à un rayon maximum r_0 . En utilisant le résultat du problème 1.9, écrivez que l'énergie potentielle est égale à m_0c^2 et voyez ce que vous obtenez pour r_0 . Ce modèle a un défaut évident : rien n'est prévu pour maintenir ensemble les charges
- 1.11 On peut décrire, en première approximation, le noyau des atomes lourds, pour ce qui concerne leur structure électrique, comme des sphères de matière ayant une densité volumique de charge constante de 1,33 10²⁵C/m³. Si un noyau d'uranium de charge totale 92*e* se désintègre en deux noyaux de charge et de rayon égaux qui se séparent ensuite, quelle est la variation d'énergie électrique exprimée en Joules et en million d'électron-volts ?
- 1.12 Deux charges ponctuelles sont placées sur l'axe des x, une charge +1C à x=+2m, une charge -4C à x=-2m.
 - a) Calculez le module et la direction du champ électrique au point (0, 3, 0) de l'axe des y en trouvant d'abord les composantes du champ en ce point.
 - b) Trouvez un point où le champ s'annule. Existe-t-il plus d'un tel point?
- 1.13 Une goutte d'eau de diamètre 10^4 m porte une charge négative. A sa surface, le champ électrique créé par la charge vaut 6×10^4 V/m. Quelle valeur devrait avoir un champ électrique vertical pour empêcher la goutte de tomber ?
- 1.14 Il existe quelques preuves que le champ électrique à la surface de la terre n'est pas nul, même en moyenne. Supposez que de nombreuses mesures, effectuées au même instant sur toute la terre, permettent d'établir que le module moyen du champ normal à la surface est 30 V/m et qu'il est dirigé vers le sol. Quel excès de charge à la surface ceci entraîne-t-il ? Exprimez-le en électrons par mètre carré.
- 1.15 L'atome neutre d'hydrogène dans son état normal se comporte à certains points de vue comme une distribution de charge électrique consistant en une charge positive ponctuelle + e entourée d'une distribution de charge négative dont la densité vaut $\rho(r)$ = - C $e^{-2r/a0}$. Ici au est le « rayon de Bohr », 0,53 10⁻¹⁰ m, et C est une constante positive telle que la charge totale négative soit juste égale à - e. Quelle est la charge électrique totale à l'intérieur de la sphère de rayon a_0 ? Quel est le module du champ électrique à cette distance du noyau?

- 1.16 On courbe, en forme de cercle de 0,5 m de diamètre, un barreau fin en matière plastique isolante. Il subsiste un intervalle de 2x 10⁻² m entre les extrémités du barreau. On répand uniformément sur la longueur du barreau une charge positive de 10⁻⁹ C. Quels sont le module et la direction du champ électrique au centre du cercle ?
- 1.17 (a) Une charge ponctuelle q est placée au centre d'un cube d'arête d. Quelle est la valeur de $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ sur une face du cube ?
 - (b) On place la charge q à l'un des sommets du cube. Quelle est maintenant la valeur du flux de E à travers chacune des faces du cube ?
- 1.18 Deux plans infinis chargés superficiellement, de densités de charge $\sigma_1 = 2 \times 10^{-5}$ C/m² et $\sigma_2 = -1,33 \times 10^{-5}$ C/m² respectivement, sont placés parallèlement l'un à l'autre à une distance de 2 cm. Décrivez le champ électrique créé par ce système de charge. Supposez maintenant que les plans soient perpendiculaires l'un à l'autre, au lieu d'être parallèles. Montrez que les champs sont identiques dans les quatre régions en lesquelles les plans divisent l'espace.



- 1.19 Un plan infini a une densité uniforme de charge de surface σ . Tout près de lui, il y a une couche parallèle de charge d'épaisseur *d* et de densité volumique de charge uniforme ρ . Toutes les charges sont fixes. Trouvez **E** partout.
- 1.20 L'un des plus remarquables phénomènes exprimés par la loi de Coulomb est le suivant : des charges identiques se repoussent avec exactement la même force que des charges symétriques s'attirent. Pour montrer que ce n'est pas une simple question de définition et pour voir ce que cela entraîne, imaginons un monde hypothétique qui différerait du nôtre sous ce seul aspect. Dans ce monde on définit la charge unité par la force entre charges identiques. Deux charges positives sont égales à l'unité, si placées à 1 m l'une de l'autre, elles se repoussent avec une force de 1 Newton; de même pour des charges négatives. La loi de l'inverse carrée de la distance

est valable et le principe do superposition aussi. Mais une charge unité positive et une charge unité négative s'attirent avec une force de k Newtons, où k < 1. Montrer que l'on peut s'attendre à trouver, dans un tel monde, une situation où trois charges sont toutes attirées les unes vers les autres. Ceci est-il possible dans notre monde ? Dans l'autre, serait-il nécessaire de généraliser la notion de quantité de charge ? Et que faire du concept de champ électrique ? Combien de mesures différentes devrait-on effectuer, en utilisant des charges d'essai en un point de l'espace, pour prédire la force qui s'exercerait sur tout corps chargé placé en ce point ? Pour k < 1, décrivez une situation possible dans ce monde mais différente de tout ce qui puisse se produire dans le nôtre.

- 1.21 Notre théorème concernant le champ créé par une distribution de charge à symétrie sphérique, à savoir que le champ à l'extérieur est le même que si toute la charge était concentrée au centre et que le champ à l'intérieur d'une distribution creuse est nul, a son analogue dans le cas d'une distribution à symétrie cylindrique circulaire, d'extension infinie dans la direction de l'axe -par exemple un long tuyau chargé. Énoncez et prouvez ce théorème.
- 1.22 Considérez une distribution sphérique de charge qui a une densité constante ρ_0 de r = 0 à r = a, et est nulle au-delà. Trouvez le champ électrique pour toutes les valeurs de r, plus petites ou plus grandes que a. Y-a-t-il une discontinuité dans le champ électrique quand on franchit la surface de la distribution de charge à r = a? Y-a-t-il une discontinuité à r = 0

Chapitre 2 Le potentiel électrique

2.1 Circulation du champ électrique



Fig. 2.1 Découpage d'un circuit en éléments ds.



Fig. 2.2 (a) Un circuit particulier, *ABC*, dans le champ électrique $E_x = K_y$, E_y , E_y , E_y , E_y , On a figure quelques lignes de force.

Supposons que **E** soit le champ créé par une distribution stationnaire quelconque de charges. Soit P_1 et P_2 deux points quelconques dans ce champ. La circulation de **E** entre les deux points est $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ prise le long d'un certain circuit qui va de P_1 , à P_2 , comme sur la figure 2.1. Ce qui signifie : divisez le circuit en petits segments, chacun d'eux étant représenté par un vecteur reliant ses extrémités; prenez le produit scalaire du vecteur élément de circuit par le champ électrique en ce point; ajoutez tous ces produits pour le circuit tout entier. Comme d'habitude l'intégrale est la limite de cette somme quand on fait tendre la longueur des segments vers zéro en augmentant indéfiniment leur nombre.

Prenons un exemple concret. Supposons que nous ayons un champ électrique **E** tel que $E_x = K_y$ et $E_y = K_x$ où K est une constante. C'est une forme possible d'un champ électrostatique. (Nous apprendrons plus loin comment le reconnaître très vite.) La figure 2.2 a montre quelques-unes des lignes de force. Quelle est la valeur de la circulation de **E** entre le point A et le point C, le long du circuit ABC de la figure ?

Le vecteur qui représente un élément de circuit est

$$ds = \hat{x} \, dx + \hat{y} \, dy \tag{2.1}$$

et comme le vecteur E est ici

$$\mathbf{E} = K(\hat{\mathbf{x}}y + \hat{\mathbf{y}}x) \tag{2.2}$$

le produit scalaire **E** • ds pour un élément de circuit est

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = K(y \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}y) \tag{2.3}$$

Le long de la portion *AB* du circuit, y = 2x et dy = 2 dx.



$$\int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = K \int_{A}^{B} (y dx + x dy) = K \int_{0}^{1} (2x dx + 2x dx) = 4K \int_{0}^{1} x dx = 2K$$
(2.4)

Le long de la portion *BC* du circuit, y = 2 et dy = 0

$$\int_{B}^{C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = K \int_{B}^{C} (y dx + x dy) = K \int_{1}^{2} 2 dx) = 2K$$
(2.5)

La circulation sur le circuit *ABC* est donc 2K + 2K, soit 4*K*.

Le champ électrique d'une charge ponctuelle est dirigé radialement et son module dépend seulement du rayon r. Si P_1 et P_2 sont deux points quelconques situés dans le champ d'une charge ponctuelle, il est évident que la circulation de **E** est la même pour tous les circuits reliant ces points. Ceci résulte directement de l'argument que nous avons utilisé dans la section 1.5 et illustré sur la figure 1.5, pour trouver le travail effectué quand on déplace une charge dans un champ de force central. En fait, la seule différence entre la circulation de la force **F** agissant sur une charge d'essai q et la circulation de **E**, champ au travers duquel la charge est déplacée, est le facteur q. Or tout champ électrostatique est simplement la superposition des champs créés par les charges, comme l'expriment les équations 1.14 et



(b) Calcul de l'intégrale curviligne

ou circulation $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ sur ce circuit. Voir les équations 2.3 à 2.5.



(c) Un circuit différent entre les mêmes points.

1.15. Dans un tel champ, la circulation de E, E total dû à toutes les sources, doit être indépendant du circuit.

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{ds}$$
 a la même valeur pour tous les circuits reliant P_1 à P_2 dans un champ électrostatique. (2.6)

Calculons, comme illustration de ceci, la circulation de A à C sur la figure 2.2 c, le long du circuit passant par le point (2,0), du champ **E** décrit précédemment. Le long de la première partie du circuit, portion de l'axe comprise entre l'origine et le point x = 2, le champ est perpendiculaire au circuit, de sorte que $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$. Sur la seconde partie $E_y = Kx = 2K$, et la longueur est de 2 unités. Nous obtenons donc pour la circulation 4K; même valeur que précédemment. En fait, une fois que nous sommes convaincus que la circulation est indépendante du circuit, il semble peu sérieux de la calculer sur un circuit tel que ABC. Nous n'aurons d'ailleurs pas souvent besoin de calculer la valeur d'une circulation. Le but principal de cet exemple était de vous rendre sûrs d'avoir compris ce que signifie la circulation.

2.1 Différence de potentiel et fonction potentiel

Comme la circulation du champ électrostatique est indépendante du circuit d'intégration, nous pouvons l'utiliser pour définir une quantité scalaire V_{21} de la façon suivante

$$V_{12} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds}$$
 (2.7)

 V_{21} est alors le *travail par unité de charge* nécessaire pour amener une charge positive de P_1 à P_2 dans le champ **E**. C'est donc une fonction scalaire a une seule détermination de *deux* points P_1 et P_2 . Nous l'appellerons différence de potentiel entre les deux points.

Dans le système d'unités M.K.S., la différence de potentiel est mesurée en volts. Il faut fournir un travail de un Joule pour déplacer une charge de un Coulomb à travers une différence de potentiel de un volt.

Supposons que P_1 soit un point de référence fixe. V_{21} devient alors une fonction des coordonnées spatiales x, y, z de P_2 . Nous pouvons l'écrire simplement V(x, y, z) sans les indices. si nous nous rappelons que la définition se fait par rapport à un point de référence P_1 . Nous dirons que V est le *potentiel* associé au champ de vecteur **E**. C'est une fonction scalaire du point : on dit aussi un champ scalaire. Sa valeur en un point est simplement un nombre (une unité de travail par charge unité) et il n'y a pas de direction qui lui soit associée. Une fois qu'on a donné le champ de vecteur **E**, la fonction potentiel est déterminée, à une constante près qui provient de l'arbitraire du choix de P_1 .

A titre d'exemple, cherchons le potentiel associé au champ électrique, décrit sur la figure 2.2. Il est commode de prendre P_1 à l'origine, le point appelé A sur la figure 2.2. Pour obtenir une expression de

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} \tag{2.8}$$

de ce point de référence à un point quelconque (x, y), le plus facile est d'utiliser un circuit tel que celui en pointillé de la figure 2.2 c

$$V(x,y) = -\int_{(0,0)}^{(x,y)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{(0,0)}^{(x,0)} \mathbf{E}_{\mathbf{x}} dx - \int_{(x,0)}^{(x,y)} E_{y} dy$$
(2.9)

La première intégrale est nulle, comme nous l'avons remarqué plus haut, puisque, dans ce champ, E_x est nul le long de l'axe des x. La seconde intégration s'effectue à x constant, et, comme $E_y = Kx$, l'intégrale devient

$$-Kx = \int_0^y \mathrm{d}y \qquad (2.10)$$

qui a pour valeur - Kxy. Pour ce champ, le potentiel est donc

$$V = -Kxy \tag{2.11}$$

On peut lui ajouter une constante quelconque. Cela signifierait seulement que le point de référence auquel on a attribué le potentiel nul a été placé ailleurs qu'en A.

Il faut bien faire attention à ne pas confondre le *potentiel V* associé à un champ donné **E** avec *l'énergie potentielle* d'un système de charges. L'énergie potentielle d'un système de charges est le travail total nécessaire pour construire le système. Dans l'équation 1.8, par exemple nous avons exprimé U, énergie potentielle du système de charges de la figure 1.6. Le *potentiel* électrique V(x, y, z) associé au champ de la figure 1.6 serait le travail nécessaire pour amener de l'infini une charge d'essai positive unité au point (x, y, z) dans le champ de cette structure de huit charges.

2.3 Gradient d'une jonction scalaire



Fig. 2.3 La fonction scalaire f(x, y) est représentée par la surface en (a). Les flèches de (b) représentent la fonction vectorielle, grad f.

Étant donné un champ électrique, nous pouvons trouver la fonction potentielle. Mais nous pouvons aussi faire l'inverse; à partir du potentiel nous pouvons obtenir le champ. L'équation 2.7 nous suggère que le champ est une sorte de *dérivée* de la fonction potentiel. Pour préciser cette idée, nous introduisons le *gradient* d'une fonction scalaire du point. Soit f(x, y, z) une fonction continue et différentiable des coordonnées.

Avec ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$, nous pouvons construire en tout point de

l'espace un vecteur, le vecteur dont les composantes *x*, *y*, *z* sont égales aux dérivées partielles de *f* par rapport aux trois coordonnées respectivement ¹. On appelle ce vecteur le *gradient* de *f* on le représente par grad *f*, ou ∇f

$$\nabla f = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial f}{\partial z}$$
(2.12)

 ∇f est un vecteur qui exprime comment la fonction f varie au voisinage d'un point. Sa composante selon x est la dérivée partielle de f par rapport à x, elle donne le taux de variation de f quand on se déplace dans la direction des x. La direction du vecteur ∇f en un point est la direction dans laquelle on doit se déplacer à partir de ce point pour trouver la plus rapide augmentation de f. Supposons que nous soyons intéressés par une fonction de deux variables seulement, x et y, de sorte que la fonction pourrait être représentée par une surface dans l'espace à trois dimensions. Si nous nous plaçons en un point quelconque de

cette surface, nous voyons la surface monter dans une direction, descendre dans une autre. Il y a une direction dans laquelle un petit déplacement nous amènera plus haut qu'un déplacement de même amplitude dans toute autre direction. Le gradient de la fonction est un vecteur qui a pour direction celle de la plus grande pente et dont le module est la pente mesurée dans cette direction.

La figure 2.3 doit vous aider à vous représenter ceci. Supposons qu'une certaine fonction des deux coordonnées x et y soit représentée par la surface f(x, y) dessinée sur la figure 2.3 *a*. Au point (x_1, y_1) , la surface a la plus forte pente positive dans une direction qui fait un angle d'environ 80° avec la direction des *x* positifs. Le gradient de f(x, y), ∇f , est une fonction vectorielle de *x* et *y*. Un certain nombre de ses valeurs en divers points de l'espace à deux dimensions sont représentées sur la figure 2.3 *b*, en particulier au point (x, y). La fonction vectorielle ∇f définie dans l'équation 2.12 est simplement une extension de cette idée à l'espace à trois dimensions. (Faites attention à ne pas confondre la figure 2.3 a avec l'espace réel à trois dimensions *x*, *y*, *z*; la troisième coordonnée est ici la valeur de la fonction f(x, y).

¹ Nous rappelons au lecteur que la dérivée partielle par rapport à x, d'une fonction de x, y, z, qu'on écrit $\frac{\partial f}{\partial y}$, est la dérivée par

rapport à x de la fonction, les autres variables y et z étant maintenues constantes. Plus précisément, $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$ Par exemple si $f = x^2 y z^3$ $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz^3$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 z^3$ $\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2 y z^2$ Comme exemple de fonction dans l'espace à trois dimensions prenons f fonction de r seulement où r est la distance à un point fixe 0. Sur une sphère de rayon r_0 et de centre 0, $f=f(r_0)$ est constante. Sur une sphère concentrique de rayon légèrement plus grand $r_0 + dr$ elle est aussi constante avec la valeur $f=f(r_0 + dr)$. Si nous désirons passer de $f(r_0)$ à $f(r_0 + dr)$, le plus court chemin est radial (de A à B par exemple) comme il est indiqué sur la figure 2 4. La « pente » de f est donc plus grande dans la direction radiale, de sorte que ∇f est en tout point un vecteur de direction radiale. En fait, dans ce cas

 $\nabla f = \hat{\mathbf{r}} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \right),$

représentant en chaque point le vecteur unité dans la direction radiale.

2.4 Dérivation du champ à partir du potentiel



Fig. 2.4 Le plus court chemin pour une variation donnée de f est le parcours radial *AB*, si f n'est fonction que de r.

Il est maintenant aisé de voir que la relation entre la fonction scalaire f et la fonction vectorielle ∇f est la même, au signe près, que celle entre le potentiel V et le champ **E**. Considérons les valeurs de V en deux points voisins (x, y, z) et (x + dx, y + dy, z + dz). La variation de V du premier au deuxième point est

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial e}dz \qquad (2.13)$$

D'un autre côté, cette variation peut s'exprimer à partir de la définition même de V comme $dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ (2.14)

Le vecteur infinitésimal de déplacement ds est juste $\hat{\mathbf{x}}dx + \hat{\mathbf{y}}dy + \hat{\mathbf{z}}dz$. Donc, si nous identifions **E** avec - ∇V , les équations 2.13 et 2.14 deviennent identiques. Donc le champ électrique est égal à moins le gradient du potentiel



Le signe - provient de ce que le champ électrique est dirigé d'une région de potentiel positif vers une région de potentiel négatif, tandis que le vecteur ∇V , d'après sa définition, pointe vers les *V* croissants.

Pour montrer comment ceci s'applique, retournons à l'exemple du champ de la figure 2.2. A partir du potentiel donné par l'équation 2.11, V = -Kxy, nous pouvons retrouver le champ électrique dont nous sommes partis

$$\mathbf{E} = \nabla(-Kxy) = -\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)(-Kxy) = K(\hat{\mathbf{x}}y + \hat{\mathbf{y}}x)$$
(2.16)



Fig. 2.5 Chaque élément de la distribution de charge $\rho(x', y', z')$ apporte une contribution au potentiel au point (x, y, z). Le potentiel en ce point est la somme de toutes les contributions de ce genre.

2.5 Potentiel d'une distribution de charges

Nous connaissons déjà le potentiel qui caractérise une charge ponctuelle isolée, car nous avons calculé le travail nécessaire pour amener une charge au voisinage d'une autre dans l'équation 1.3. Le potentiel en un point quelconque, en présence d'une charge ponctuelle isolée q, est juste $q/(4\pi\varepsilon_0 r)$, où r est la distance du point en question à la charge source q, et où nous avons attribué le potentiel 0 aux points infiniment éloignés de la source.

La superposition doit marcher aussi bien pour les potentiels que pour les champs. Si nous avons plusieurs sources, la fonction potentiel sera simplement la somme des fonctions potentiels qu'on aurait pour chacune des sources isolément, *pourvu que* les zéros de potentiel soient compatibles entre eux. Si toutes les sources sont contenues dans des régions finies de l'espace, il est toujours possible, et c'est généralement le choix le plus simple, de choisir l'origine du potentiel à l'infini. Si nous adoptons cette

règle, le potentiel d'une distribution de charge quelconque peut s'exprimer par l'intégrale (2.17)

$$V(x, y, z) = \int_{\text{toutes les}} \frac{\rho(x', y', z') \, dx' \, dy' \, dz}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

où *r* est la distance de l'élément de volume dx' dy' dz' au point (*x*, *y*, *z*), où l'on calcule le potentiel (fig. 2.5). C'est-à-dire que $r = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$. Notez la différence entre cette expression et l'intégrale donnant le champ électrique d'une distribution de charge (éq. 1.15). Ici nous avons *r* au lieu de r^2 au dénominateur, et l'intégrale est un scalaire et non un vecteur. A partir de la fonction scalaire V(x, y, z), nous pouvons toujours, en utilisant l'équation 2.15, obtenir le champ électrique.



Potentiel de deux charges ponctuelles. Considérons un exemple très simple, le potentiel des deux charges ponctuelles représentées sur la figure 2.6. Une charge positive de 4 x 10^{-9} C. est placée à 3 cm d'une charge négative de 2×10^{-9} C. Le potentiel en tout point de l'espace est la somme des potentiels dus à chaque charge. Sur le dessin sont indiquées les valeurs des potentiels en quelques points particuliers. Aucune addition vectorielle n'est ici nécessaire, il suffit de l'addition algébrique de quantités scalaires. Par exemple au point, qui, à droite de la figure, est à 6 cm de la charge positive et à 5 cm de la charge négative le potentiel a la valeur

$$\frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{+4}{6 \times 10^{-2}} - \frac{2}{5 \times 10^{-2}} \right) = +240$$

Fig. 2.6 Le potentiel électrique V en divers points d'un système de deux charges ponctuelles. V tend vers zéro à l'infini. Il est donné en volts..

L'unité ici est le volt. Le potentiel tend vers zéro à l'infini. Il faudrait fournir un travail de 240 joules pour amener une charge unité positive de l'infini à un point où V = 240 V. Remarquez que deux des points représentés sur le dessin ont un

potentiel nul. Le travail pour amener une charge quelconque de l'infini en ces points est nul. Vous pouvez vous convaincre qu'il doit y avoir un nombre infini de tels points, formant une surface entourant la charge négative. En fait le lieu des points ayant une valeur particulière de V est une surface, appelée surface équipotentielle qui serait représentée, sur notre dessin à deux dimensions, par une courbe.

Potentiel d'un long fil chargé. L'utilisation de l'équation 2.17 comporte une restriction : elle n'est valable que si toutes les sources sont circonscrites dans une région finie de l'espace. On peut trouver un exemple simple des difficultés que l'on rencontre avec des charges situées à l'infini dans le cas du long fil chargé dont nous avons étudié le champ dans la section 1.12. Si nous essayons d'attribuer un potentiel nul aux points à l'infini de ce système, et que nous effectuons l'intégration sur la distribution de charge indiquée par l'équation 2.15, nous trouvons que l'intégrale diverge - nous obtenons un résultat infini. Nous pouvions nous attendre à des ennuis parce que, dans ce cas « l'infini », c'est-à-dire tout l'espace très éloigné de la région où nous souhaitons définir une fonction potentielle, contient non seulement des points éloignés du fil, mais la plus grande partie du fil lui-même ! La recherche du *champ* électrique du fil long infini ne se heurte pas à une telle difficulté, parce que les contributions au champ des éléments de la ligne chargée décroissent très rapidement avec la distance. Nous aurions évidemment avantage à placer plus près le zéro du potentiel dans un système où il y a des charges à l'infini. On calcule alors simplement la différence de potentiel V_{12} , entre le point (x, y, z) et le point de référence choisi, en utilisant la relation fondamentale, éq. 2.7.

Pour voir ce qui se passe dans le cas du fil chargé infiniment long, prenons comme point de référence un point arbitraire P, situé à une distance r, du fil. Transporter une charge du point P, à un autre point P_1 situé à une distance r_1 nécessite un travail par unité de charge

$$V_{12} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}s = -\int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right) \mathrm{d}r = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \log r_2 + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \log r_1$$
(2.18)

Ceci montre qu'on peut prendre comme potentiel électrique dû au fil chargé

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \log r + C^{te}$$
(2.19)

La constante $\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\log r_1$ dans ce cas ne joue aucun rôle quand nous prenons - grad V pour retrouver le champ E. Dan, ce cas.

$$-\nabla V = -\hat{\mathbf{r}}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{\varepsilon_0 r}$$
(2.20)

2.6 Disque uniformément chargé



Fig. 2.7 Calcul du potentiel en un point P_1 situé sur l'axe d'un disque uniformément chargé.

Étudions, en tant qu'exemple concret, le potentiel et le champ électrique créés par un disque uniformément chargé. C'est une distribution du même type que celle traitée dans la section 1.13. mais avec une extension limitée. Le disque plat de rayon *a* de la figure 2.7 porte une charge positive répartie sur sa surface aces une densité constante σ , exprimée en C/m². (C'est une simple couche de charge d'épaisseur infinitésimale et non deux couches de part et d'autre. La charge totale du système est donc $\pi\sigma a^2$.) Nous rencontrerons souvent par la suite des distributions de charge en surface, en particulier sur les conducteurs métalliques. Cependant l'objet que nous venons de décrire *n'est pas* un conducteur; s'il l'était. les charges ne pourraient rester uniformément distribuées mais. comme nous le verrons bientôt se redistribueraient en se concentrant au bord du disque. Ce que nous avons ici est un disque isolant, par exemple une feuille de plastique, sur lequel les charges ont été « pulvérisées » de sorte que chaque centimètre carré du disque a reçu, et garde fixée la même quantité de charge.

Pour commencer, cherchons le potentiel en un point quelconque P_1 de l'axe de symétrie que nous prenons pour axe des y. Tous les éléments de charge portés par un mince segment du disque en forme d'anneau sont à la même distance de P_1 . Si s est le rayon d'un tel segment annulaire et ds sa largeur, sa surface est $2\pi s$ ds. La quantité de charge qu'il contient est donc $dq=\sigma \cdot 2\pi s ds$. Toutes les parties de cet anneau sont à la même distance r de P_1 et $r = \sqrt{y^2 + s^2}$, de sorte que la contribution de l'anneau au potentiel en P_1 est $dq/4\pi\varepsilon_0 r$, ou $2\pi\sigma s ds/4\pi\varepsilon_0 \sqrt{y^2 + s^2}$ Pour obtenir le potentiel dû à tout le disque, il nous faut intégrer sur tous les anneaux de ce genre :

$$V(0, y, 0) = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int \frac{\sigma s \,\mathrm{d}s}{\sqrt{y^2 + s^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{y^2 + s^2} \right]_{s=0}^{s=a}$$
(2.21)

L'intégrale est élémentaire; en posant $u = y^2 + s^2$, elle prend la forme $\int u^{-1/2} du$. En donnant leur valeur aux limites, on obtient

$$V(0, y, 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{y^2 + a^2} - y \right] \text{ pour } y > 0$$
 (2.22)

Un point de détail mérite un commentaire : le résultat de l'équation 2.22 est valable pour tous les points du demi-axe des *y* positifs. Il est évident, d'après la symétrie du système (il n'y a aucune différence entre les deux faces du disque), que le potentiel doit être le même qu'y soit positif ou négatif et ceci se voit dans l'équation 2.21 où ne figure qu'y². Mais, en écrivant l'équation 2.22, nous avons un choix de signe en extrayant la racine carrée de y^2 , et elle n'est valable que pour les valeurs positives de *y*. L'expression correcte pour y < 0 est fournie par l'autre choix de signe et s'écrit

$$V(0, y, 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{y^2 + a^2} + y \right] \text{ pour } y < 0$$
 (2.23)

Et c'est pour cette raison que nous ne serons pas surpris de trouver une singularité dans V(0, y, 0) à y = 0. La fonction subit en ce point un brutal changement de pente, comme on le voit sur la figure 2.8, où nous avons tracé le potentiel sur l'axe en fonction

de y. Le potentiel au centre du disque est $V(0,0,0) = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}$. C'est la quantité de travail qu'il faut fournir pour amener une

charge unité positive de l'infini au centre du disque, en suivant un chemin quelconque. Le comportement de V(0, y, 0) pour de très grands y est intéressant. Pour $y \leftarrow a$, nous pouvons écrire

$$\sqrt{y^2 + a^2} - y = y \left[\sqrt{1 + a^2 / y^2} - 1 \right] = y \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{y^2} \right) \dots - 1 \right] \cong \frac{a^2}{2y}$$
(2.24)

L'équation 2.22 devient donc

$$V(0, y, 0) \cong \frac{\pi a^2 \sigma}{4\pi\varepsilon_0 y} \quad \text{pour } y >> a \tag{2.25}$$



Maintenant $\pi a^2 \sigma$ est la charge totale du disque, et l'équation 2.25 apparaît comme l'expression du potentiel dû à une charge ponctuelle ayant cette valeur. Comme nous pouvions nous y attendre, à grande distance du disque (par rapport à son diamètre), la forme de la distribution de charge importe peu, ce qui compte, c'est la charge totale, en première approximation. Sur la figure 2.8

nous avons tracé, en pointillé, la fonction
$$\frac{\pi a^2 \sigma}{4\pi \varepsilon_0 y}$$
. Vous pouvez

voir que la fonction potentiel sur l'axe tend assez vite vers sa forme asymptotique.

Il n'est pas aussi facile de calculer le potentiel en des points quelconques qui ne sont pas sur l'axe de symétrie, parce que l'intégrale définie n'est plus alors aussi simple. Elle devient ce que l'on appelle une *intégrale elliptique*. Ces fonctions sont bien

Fig. 2.8 Courbe du potentiel sur l'axe. La courbe en pointillé est le potentiel d'une charge ponctuelle $q = \pi a^2 \sigma$

connues et il en existe des tables⁽²⁾, mais il n'y a pas lieu ici de s'appesantir sur des détails mathématiques spécifiques d'un problème particulier. Un calcul supplémentaire assez simple est instructif. Il nous permet de trouver le potentiel en un point du bord du disque, tel que P_2 sur la figure 2.9.

Pour calculer le potentiel en P_2 , considérons le segment d'anneau centré en P_2 . Comme vous pouvez le voir sur la figure 2.9,la charge de ce segment est $dq = \sigma \cdot 2r\theta dr$. Dans le triangle droit de la figure 2.9, on a $r = 2a \cos \theta$, de sorte que $dr = -2a \sin \theta d\theta$. Ceci permet de prendre θ comme variable d'intégration. Si θ varie de $\pi/2$ à 0, nous décrivons tout le disque. Donc

$$V = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int_{\pi/2}^0 \frac{\sigma\theta}{2\pi\varepsilon_0} \left[-2a\sin\theta \,\mathrm{d}\theta \right] = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma a\theta}{\pi\varepsilon_0} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{\sigma a}{\rho\varepsilon_0} \left[\sin\theta - \theta\cos\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{\sigma a}{\pi\varepsilon_0}$$
(2.26)



Fig. 2.9 Calcul du potentiel en un point P_2 situé sur le bord d'un disque uniformément chargé.

(Vous pouvez intégrer $\int \theta \sin \theta \, d\theta$ par parties - ou trouver directement le résultat.) En comparant cette valeur à $\frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}$, potentiel au centre du disque, nous

voyons que, comme nous pouvions nous y attendre, le potentiel diminue en allant du centre vers le bord du disque. Le champ électrique doit donc avoir une composante dirigée ers l'extérieur dans le plan du disque. C'est pourquoi nous avons dit plus haut que, si les charges étaient libres de se mouvoir, elles se redistribueraient vers le bord du disque. On peut dire d'une autre manière que, à moins que les charges ne se déplacent, notre disque uniformément chargé n'est pas

⁽²⁾ On les a mentionnées dans le vol. 1 à propos du traitement exact du pendule simple (vol. 1, chap. 7, complément I, p. 227).

une surface à potentiel constant, ce que doit être toute surface conductrice⁽³⁾.

Le champ électrique sur l'axe de symétrie peut se calculer directement à partir de la fonction potentiel

$$E_{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \left(\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_{0}} \left[\sqrt{y^{2} + a^{2}} - y \right] \right)$$
(2.27)

ce qui donne

$$E_{y} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_{0}} \left[1 - y / \sqrt{y^{2} + a^{2}} \right] \qquad y > 0 \qquad (2.28)$$

(A titre de vérification, il n'est pas difficile de calculer E_y directement à partir de la distribution de charges, pour des points de l'axe.)

Quand y tend sers zéro par valeurs positives, E_y tend vers $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Du côté des y négatifs du disque, que nous appellerons

l'arrière, **E** est dirigé dans le sens contraire et sa composante selon l'axe des y, E_y est $-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. **E** est identique au champ d'une

plaque infinie de densité superficielle de charge σ , champ calculé dans la section 1.13. Et c'est normal, car, pour des points très proches du centre du disque, qu'il y ait ou non des charges au-delà du bord du disque ne compte pas beaucoup. En d'autres termes, toute plaque est infinie si on en est assez près.

D'ailleurs E_y a la valeur $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ non seulement au centre du disque mais sur toute sa surface. Pour démontrer ceci, nous pouvons

utiliser le théorème de Gauss un peu comme nous avons fait dans la section 1.10, mais en prenant quelques précautions, parce que le champ électrique total en un point quelconque du disque n'est pas perpendiculaire au plan du disque. Imaginez un élément du disque, d'aire A, compris dans une boîte plate et mince, comme indiqué sur la figure 2.10. Soit E_{y+} la composante y du champ juste à l'avant de cet élément et E_{y-} la composante y de l'autre côté du disque. Le flux sortant de la boîte est

 $\Phi = AE_{\nu+} - AE_{\nu-} + ($ flux à travers les faces latérales de la boîte) (2.29).



Fig. 2.10 Application du théorème de Gauss au disque chargé.

Le deuxième terme a un signe moins parce que le vecteur représentant la surface arrière de la boîte est dirigé vers les y négatifs. On peut rendre aussi petit que l'on veut le flux à travers les faces latérales de la boîte en diminuant son épaisseur⁽⁴⁾. Cela ne change pas la charge à l'intérieur qui reste égal à σA . A la limite, le théorème de Gauss nous dit

$$AE_{y+} - AE_{y-} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$
(2.30)

$$E_{y+} - E_{y-} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{2.31}$$

Dans l'équation 2.31 nous avons un résultat général valable pour *n'importe quelle* distribution de charge en surface, uniforme ou non

si σ est la densité locale d'une couche superficielle quelconque de charge, il

⁽³⁾ Le fait que les surfaces conductrices doivent titre des équipotentielles sera discute en détail au chap. 3.

⁽⁴⁾ Cet énoncé reste correct tant que le champ radial n'est pas infini. Nous savons le champ radial fini *presque* partout sur le disque parce qu'il n'y qu'une différence de potentiel finie entre son centre et son bord. En fait il *y a* un endroit où le champ radial devient infini, c'est le bord même du disque. Nous en garderons éloignés les bords de notre boîte, puisqu'aussi bien il y a là une discontinuité dans E_{y+} et dans σ .

y a en ce point un changement brutal, ou discontinuité, dans la composante du champ électrique perpendiculaire à la surface. La

valeur de la discontinuité est $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ Dans notre problème, σ est constant sur tout le disque. Comme les champs sur les deux faces

doivent être symétriques, puisqu'il n'y a pas d'autres sources de champ, nous devons avoir $E_{v+} = -E_{v-}$, de sorte que

$$E_{y+} = E_{y-} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$
 sur tout le disque

Sur la figure 2.11, on a représenté quelques lignes de forces de ce système et aussi, en courbes pointillées, les intersections avec le plan yz des surface équipotentielles. Près du centre du disque, ce sont des surfaces en forme de lentilles, tandis qu'à des distances beaucoup plus grandes que a, elles tendent vers la forme sphérique des surfaces équipotentielles autour d'une charge ponctuelle.

La figure 2.11 illustre une propriété générale des lignes de force et des surfaces équipotentielles. En tout point, la ligne de force et la surface équipotentielle qui passent par ce point *sont perpendiculaires l'une à l'autre*, tout comme sur une carte géodésique d'un terrain montagneux, la ligne de plus grande pente est perpendiculaire à la ligne de niveau. Il doit en être ainsi, parce que, si



Fig. 2.11 Champ électrique dû à un disque uniformément chargé. Les courbes en trait plein sont les lignes de force. Les courbes en pointillés sont les intersections, avec le plan de la figure, des surfaces éauipotentielles.

le champ électrique avait en un point quelconque une composante parallèle à la surface équipotentielle passant par ce point, il faudrait fournir du travail pour déplacer une charge d'essai le long d'une surface à potentiel constant.

2.7 La force sur une charge de surface

Il nous reste encore quelque chose à apprendre de l'étude de la très simple distribution de charge à forte symétrie sphérique que constitue une charge de surface de densité uniforme σ à la surface d'une sphère de rayon r_0 (fig. 2.12 a). La charge totale Q est égale à $4\pi r^2 \sigma$. Le potentiel à l'extérieur de la sphère est juste $Q/4\pi\varepsilon_0 r_0$, comme si toute la charge Q était concentrée au centre de la sphère, tandis que le potentiel à l'intérieur a la valeur constante $Q/4\pi\epsilon_0 r_0$. Le gradient d'un potentiel constant est nul, bien sûr; nous avons déjà vu que le champ à l'intérieur d'une telle distribution de charge sphérique creuse est nul. Les figures 2.12 b et c montrent graphiquement comment le potentiel V et le module E du champ varient avec r. Cherchons maintenant quelle est la force agissant sur un élément de charge de surface, tel que σda , force due à la répulsion qu'exercent sur cet élément tous les autres éléments. Nous connaissons le

module du champ électrique juste à l'extérieur de la sphère : $E_{\text{ext.}} = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2 = \sigma/\varepsilon_0$, tandis que $E_{\text{int.}} = 0$. Quelle valeur devons-nous utiliser pour calculer la force sur la charge ?

La réponse correcte est (1/2) ($E_{\text{ext.}} + E_{\text{int.}}$). Une façon de la trouver est d'imaginer une charge de surface, non comme une couche d'épaisseur nulle, mais comme une densité volumique de charge d'épaisseur faible mais finie Ar, dans laquelle la densité volumique de charge ρ soit uniforme et si élevée que la charge contenue par unité de surface soit σ . En d'autres termes, quel que soit Δr , nous choisissons ρ pour que $\rho\Delta r = \sigma$. Il est bien évident, mais vous pouvez utiliser le théorème de Gauss pour le prouver si vous y tenez, que le module du champ est nul sur la surface interne et augmente linéairement à travers la couche, atteignant la valeur σ/ε_0 sur la surface externe. (La courbure de la surface devrait rendre la variation légèrement non linéaire,
mais puisque nous supposons toujours que $\Delta r \ll r_0$, le petit élément de surface da est pratiquement plan.) Le module du champ

moyen dans la tranche, et donc la force moyenne sur une charge unité de la tranche, est donc (1/2) ($E_{\text{ext.}} + E_{\text{int.}}$), et dans le cas particulier où $E_{\text{int.}}$ est nul vaut 1/2 $E_{\text{ext.}}$ soit $\sigma/2\varepsilon_0$. Les figures 2.13 *a-c* montrent comment les choses évoluent quand on fait décroître l'épaisseur de la tranche, en gardant la charge superficielle constante. Il ne se produit rien de spectaculaire; la variation du champ a simplement lieu sur une plus courte distance, et seule la densité volumique de charge croît indéfiniment.







Fig. 2.13 La variation totale du champ au passage d'une couche chargée ne dépend que de la charge totale par unité de surface.

Remarquez que, même si la densité de charge n'est pas uniforme au travers de la tranche comme sur la figure 2.13 d, cela ne change en rien la variation totale de E d'un côté à l'autre. Et il est encore vrai que la force par unité de surface d'une telle couche est précisément (1/2) ($E_{\text{ext.}} + E_{\text{int.}}$) multiplié par la charge totale par unité de surface, même quand la variation du champ n'est pas linéaire. Le problème 1.29 en propose une vérification dans un cas particulier, tandis que le problème 1.30 vous propose de trouver une démonstration générale si vous en avez envie.

On ne trouve *pas* de charges superficielles réelles dans une couche d'épaisseur nulle et de densité volumique infinie, de sorte que le modèle intermédiaire est plus réaliste que le cas limite. Par exemple, une charge à la surface d'un métal est répartie sur une



Fig. 2.12 Potentiel électrique et champ électrique d'une distribution sphérique de charges de surface.(*a*) Vue éclatée de la sphère.(*b*) *V* en fonction de *r*.

(c) E en fonction de r.

épaisseur de quelques angströms. Ce qui est important c'est que, tant que la couche est mince par rapport aux autres dimensions du système, on peut, pour calculer tous les effets macroscopiques, la considérer comme une couche d'épaisseur nulle, entièrement définie par sa densité locale de charge par unité de *surface*. Cependant le profit réel en profondeur de la distribution peut être important pour l'étude de phénomènes atomiques à la surface, tels que le passage d'électrons d'un milieu à un autre, à travers une interface.

Retournons maintenant à la question posée au début de cette section; nous voyons que la force sur un élément de charge de surface dq est $\sigma/2\varepsilon_0 \cdot dq$, et comme la charge d'un élément de surface dS est $dq = \sigma dS$, la force sur l'élément de surface dS est :

$$\mathrm{d}F = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \mathrm{d}S \tag{2.32}$$

La force par unité de surface (ou pression électrostatique) est donc juste $\sigma^2/2\varepsilon_0$. C'est une force dirigée *vers l'extérieur* à cause de la répulsion entre charges de même signe. Naturellement, si les charges restent où elles sont, c'est que cette force est équilibrée par quelque autre force, d'origine atomique ou moléculaire non comprise dans nos équations, qui maintient les porteurs de charge sur la sphère.

Si nous voulions charger un ballon de baudruche, la force de répulsion électrique $\sigma^2/2\varepsilon_0$ par unité de surface, que nous venons de calculer, tendrait à augmenter le volume du ballon. Inversement, on devrait fournir du travail au système pour

diminuer le diamètre d'une telle distribution de charge en maintenant constante la charge totale. Supposons que nous voulions contracter la sphère du rayon r_0 au rayon $r_0 - dr$, comme sur la figure 2.14. Sans nous occuper des autres forces, cherchons le travail qu'il faut fournir contre les seules forces électriques; nous avons donc à appliquer une force normale à la surface et

dirigée vers la surface de $\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ par unité de surface. Cette force voit son point d'application se déplacer d'une distance dr, de

sorte que le travail fourni au système par ces forces extérieures est

$$dW = (4\pi r_0^2) \left(\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\right) dr = \frac{2\pi r_0^2 \sigma^2}{\varepsilon_0} dr \qquad (2.33)$$

Nous pouvons aussi exprimer ceci en fonction de la charge totale Q, puisque $Q = 4\pi r_0^2 \sigma$

$$\mathrm{d}W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0^2} \mathrm{d}r \tag{2.34}$$

2.8 Énergie associée à un champ électrique

Remarquez que le seul résultat de la contraction de la sphère, en ce qui concerne le champ électrique, est de créer un champ électrique de module σ/ε_0 dans l'espace compris entre les sphères de rayons $r_0 - dr$ et r_0 où le champ était auparavant nul. Dans le reste de l'espace, le champ n'a pas changé. On peut dire que l'on a créé du champ dans cet espace au prix de l'énergie d*W*. En comparant les expressions d*W* et *E*, nous voyons que la dépense d'énergie d*W* peut s'exprimer en fonction du nouveau volume d*v* occupé par le champ sous la forme

$$\mathrm{d}W = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \mathrm{d}\upsilon \tag{2.35}$$



C'est un cas particulier d'un théorème général que nous ne prouverons pas pour l'instant : l'énergie potentielle U d'un système de charges, qui est égal au travail total nécessaire pour amener le système à sa configuration, peut être calculée à partir du

champ électrique simplement en attribuant une quantité d'énergie $\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 d\upsilon$ à chaque élément de volume dv et en intégrant ceci partout où il y a du champ électrique.

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\text{Espace où}} E^2 d\upsilon$$
 (2.36)

Fig. 2.14 Contraction d'une coquille sphérique ou d'un ballon chargé.

 E^2 est bien sûr une quantité scalaire : $E^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$. Nous pouvons donc calculer le travail nécessaire à la réalisation de la bulle sphérique de charge de la figure 2.14 de la façon suivante

E -- $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$, $r > r_0$; E = 0, $r < r_0$ de sorte que

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 d\upsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0 r_0}$$
(2.37)

On obtient le même résultat en calculant le travail nécessaire pour contracter la sphère d'un rayon infini à un rayon final r_0 en utilisant l'équation 2.34

$$U = \int_{\infty}^{r_0} -\frac{Q^2 dr}{8\pi\varepsilon_0 r^2} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{Q^2 dr}{8\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$$
(2.38)

Certains aiment à penser que cette énergie est « emmagasinée » dans le champ électrique. En effet, le système étant conservatif, on peut récupérer cette énergie en permettant aux charges de se séparer; il est donc agréable de penser que l'énergie est localisée « quelque part ». En disant qu'elle est emmagasinée dans l'espace avec une densité $\varepsilon_0 E^2/2$, en Joules/m³, nous interprétons bien le résultat de notre calcul. Il n'y a pas de mal à cela, mais nous n'avons en fait aucun moyen d'identifier indépendamment l'énergie emmagasinée dans un volume particulier de l'espace. Physiquement, une seule quantité est mesurable, c'est l'énergie totale, c'est-à-dire le travail nécessaire pour amener les charges dans une certaine configuration à partir de quelqu'autre configuration. De même que le concept de champ électrique sert à remplacer la loi de Coulomb pour expliquer le comportement des charges, de même nous utilisons l'équation 2.36 plutôt que l'équation 1.9 pour exprimer l'énergie potentielle totale d'un système électrostatique; ce que nous venons de faire est comparable au changement du mode de classement d'une bibliothèque. Changer de point de vue, même si ce n'est qu'en changeant un système de classement, peut donner de nouvelles idées et permettre parfois de mieux comprendre. Le concept de champ électrique prendra tout son sens quand nous étudierons le comportement dynamique des particules chargées et le rayonnement électromagnétique.

Nous avons parlé d'énergie potentielle et de potentiel électrique. Rappelez-vous que ce sont des choses fort différentes. L'énergie potentielle U d'un système stationnaire de charges est le travail nécessaire pour construire celui-ci à partir de ses éléments situés à l'infini, nous pouvons considérer cette énergie comme emmagasinée dans le système. C'est une simple quantité scalaire et c'est une propriété du système tout *entier*. Le potentiel électrique V est, pour une distribution donnée de charges, une fonction scalaire du point. Il s'exprime en volts. La différence entre les valeurs de V en deux points de l'espace est égale au travail par unité de charge qu'il faut dépenser pour transporter une charge d'un point à l'autre.

Pour bien marquer la différence entre V et U, écrivons l'équation 2.36 en y exprimant E en fonction de V. Puisque $E=-\nabla V$, nous avons

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\text{tout l'espace où}} \left| \nabla V^2 \right| \mathrm{d}\upsilon$$
 (2.39)

Il y a une autre façon de calculer l'énergie emmagasinée. Nous avons appris plus haut au chapitre 1 que l'énergie nécessaire pour établir un système de plusieurs charges ponctuelles discrètes, $q_1 \dots, q_j \dots$, s'exprime par l'équation 1.9

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k \neq j} \frac{q_{j} q_{k}}{4\pi \varepsilon_{0} r_{jk}}$$
(2.40)

Écrivons cette équation de la façon suivante

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} q_j \left[\sum_{k \neq j} \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{jk}} \right]$$
(2.41)

et intéressons-nous aux termes entre crochets. Chaque terme de cette somme est la contribution d'une des charges au potentiel électrique V au point où se trouve q_j , de sorte que la somme toute entière, que nous pouvons appeler V_j , est le potentiel sur la charge q_j dû à toutes les autres charges. De cette façon, nous pouvons exprimer U sous la forme

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j} q_{j} V_{j} \qquad (2.42)$$

Maintenant, si nous avons une distribution continue de charge $\rho(x, y, z)$ au lieu d'avoir des charges discrètes, nous remplacerons simplement la somme de l'équation 2.42 par l'intégrale

$$U = \int \rho V \,\mathrm{d}\upsilon \tag{2.43}$$

Ici, on n'a plus besoin de spécifier que V est dû à *toutes les autres charges*, car l'élément de charge correspondant à q_j , qui est ρ d ν , est toujours infinitésimal. V dans l'équation 2.43 est donc le potentiel électrique pour le système tout entier, V(x,y,z). L'équation 2.43 est, bien sûr, équivalente à l'équation 2.39 et à l'équation 2.36.

2.9 Divergence d'une fonction vectorielle

Le champ électrique a une direction et un module définis en chaque point. C'est une fonction vectorielle des coordonnées, que nous écrivons $\mathbf{E}(x,y,z)$. Ce qui va nous occuper maintenant peut s'appliquer à toute fonction vectorielle, pas seulement au champ électrique; nous utiliserons donc un autre symbole, $\mathbf{F}(x, y, z)$, à cause de cela. Nous allons faire, pour un moment, plus de mathématique que de physique et nous appellerons \mathbf{F} une fonction vectorielle quelconque. Nous restons dans l'espace à 3 dimensions.

Considérons un volume fini V d'une forme quelconque; soit S la surface qui le limite. Nous sommes déjà familiers avec la notion de flux total Φ sortant de S. C'est la valeur de l'intégrale de **F** sur toute la surface S :



Fig. 2.15 Un volume *V* délimité par une surface *S* est divisé : (*b*) en deux parties délimitées par S_1 et S_2 . Aussi loin qu'aille le découpage, comme en (*c*) ou en (*d*), la somme des intégrales de surface sur toutes les parties est égale à l'intégrale de surface sur *S*, pour toute fonction vectorielle **F**.

$$\boldsymbol{\Phi} = \int_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{da} \tag{2.44}$$

Sous le signe somme, d**a** est le vecteur infinitésimal dont le module est l'aire d'un petit élément de S et dont la direction est la normale extérieure à cet élément, comme indiqué sur la figure 2.15 a.

Maintenant imaginons que nous divisions V en deux parties par une surface, comme un diaphragme D, qui couperait en deux le « ballon » S (fig. 2.15 b). Appelons V_1 et V_2 les deux parties de V, et, en les traitant comme des volumes distincts, calculons l'intégrale de surface sur chacun d'eux séparément. La surface limite S_1 de V_1 comprend D, de même que la surface limite S_2 de V_2 . Il est assez évident que la somme des deux intégrales de surface

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_2 \qquad (2.45)$$

sera égal à l'intégrale originale sur route la surface S exprimée par l'équation 2.44. La raison en est que chaque élément de surface de D donne une contribution égale en module, mais de signes opposés, aux deux intégrales, la normale « extérieure » dans un cas étant la normale « intérieure » dans l'autre cas. En d'autres termes, tout flux *sortant* de V_1 à travers cette surface D, est un flux *entrant* dans V_2 . Le reste de la surface concernée est identique à celle du volume original tout entier.

Nous pouvons continuer à subdiviser les volumes jusqu'à ce que nous ayons divisé V en un grand nombre de parties $V_1, ..., V_i, ..., V_N$, de surfaces $S_1 ... S_i ... S_N$. Quelle que soit la manière dont nous nous y prenions, nous savons que

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_{i} = \int_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \boldsymbol{\Phi}$$
(2.46)

Notre but est le suivant : nous voulons définir, à la limite des N infinis, une quantité caractéristique d'une petite région particulière et, en dernière limite, du voisinage d'un point. Or l'intégrale de surface

$$\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{da}_i \tag{2.47}$$

sur l'une des petites régions, *n'est pas un bon* candidat car si nous divisons encore chaque volume en deux, cette intégrale se divise en deux termes dont chacun est inférieur à l'intégrale précédente, puisque leur somme lui est égale. En d'autres termes, quand nous considérons des volumes de plus en plus petits dans le même voisinage,

l'intégrale de surface sur l'un de ces volumes diminue constamment. Mais nous pouvons remarquer que, à chacune de nos divisions, le volume est divisé en deux parties dont la somme est le volume original. Ceci suggère de considérer, pour chaque élément de la subdivision le rapport de l'intégrale de surface au volume correspondant

$$\frac{\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i}{V_i}$$
(2.48)

Il semble plausible que, pour N assez grand, c'est-à-dire pour une subdivision assez fine, on puisse diviser en deux le volume chaque fois que l'on divise par deux l'intégrale de surface; en continuant ainsi la subdivision d'une région particulière, le rapport considéré doit tendre vers une limite finie. S'il en est ainsi, cette limite est une propriété caractéristique de la fonction vectorielle **F**, au voisinage du point considéré. Nous l'appellerons *divergence* de **F** et nous l'écrirons div **F**. La valeur de div **F** en un point quelconque se définit donc par

div
$$\mathbf{F} \equiv \lim_{V_i \to 0} 1/V_i \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i$$
 (2.49)

où V_i est un volume comprenant le point en question et S_i la surface limitant V_i sur laquelle on calcule l'intégrale de surface. Mais il faut que cette limite existe et soit indépendante de la façon de faire la subdivision. Pour l'instant nous supposerons que cette condition est remplie.

On peut exprimer ainsi la signification de div \mathbf{F} : div \mathbf{F} est le flux sortant de V_i par unité de volume, dans la limite d'un V_i infinitésimal. C'est évidemment un scalaire. Elle peut varier d'un point à un autre sa valeur en un point (*x*, *y*, *z*) est donnée par l'équation 2.49 quand V_i devient de plus en plus petit mais englobe toujours le point (*x*, *y*,*z*). Div \mathbf{F} est donc simplement une fonction des coordonnées.



2.10 Théorème d'Ostrogradski et forme différentielle du théorème de Gauss

Si nous connaissons la fonction scalaire du point qu'est div **F**, nous pouvons retrouver l'intégrale de surface sur un grand volume : nous écrivons d'abord l'équation 2.46 de cette façon :

$$\int_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_{i} = \sum_{i=1}^{N} V_{i} \left[\frac{\int_{S_{i}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_{i}}{V_{i}} \right]$$
(2.50)

A la limite $N \to \infty$, $V_i \to 0$, le terme entre crochets devient la divergence de **F** et la somme devient une intégrale de volume

$$\int_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_{V} \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}\upsilon \tag{2.51}$$

L'équation 2.51 s'appelle théorème d'Ostrogradski ou théorème de la divergence. Il est valable pour tout champ de vecteurs pour lequel existe la limite indiquée dans l'équation 2.49. Voyons ce que cela entraîne pour le champ électrique **E**. Le théorème de Gauss nous donne

(2.52)

Si le théorème de la divergence est valable pour tout champ de vecteurs, il l'est sûrement pour ${\bf E}$

(2.53)

Fig. 2.16 Calcul du flux sortant d'une boîte de volume $\Delta x \Delta y \Delta z$.

L'équation 2.52 et l'équation 2.53 sont toutes deux valables quel que soit le volume que nous choisissons - quelles que soient sa forme, sa taille, sa position. En les comparant, nous voyons qu'il faut qu'en tout point,

div
$$\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$$
 (2.54)

Si, à partir de maintenant, nous incorporons le théorème de la divergence dans notre arsenal mathématique, nous pouvons considérer l'équation 2.54 comme un autre énoncé du théorème de Gauss. C'est le théorème de Gauss sous sa forme différentielle, c'est-à-dire sous la forme d'une relation locale entre la densité de charge et le champ électrique.

2.17 La divergence en coordonnées cartésiennes

Tandis que l'équation 2.49 est la définition fondamentale de la divergence, indépendante de tout système de coordonnées, il est utile de savoir comment calculer la divergence Anne fonction vectorielle quand on nous a donné sa forme explicite. Supposons qu'une fonction vectorielle **F** soit exprimée en fonction des coordonnées cartésiennes x, y, et z. Ce qui veut dire que nous connaissons les trois fonctions scalaires $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$ et $F_z(x, y, z)$. Nous prendrons comme volume V_i une petite boîte à faces rectangulaires, avec un coin au point x, y, z et des côtés Δx , Δy et Δz , comme on voit sur la figure 2.16 a. Nous affronterons plus tard le problème de démontrer que la limite est indépendante de la forme de la boîte.

Considérons deux faces opposées de la boîte, le fond et le dessus, par exemple, qui peuvent être représentés par les vecteurs $\hat{z} \Delta x \Delta y$ et - $\hat{z} \Delta x \Delta y$. Le flux à travers ces faces ne met en jeu que la composante z de F_z et leur contribution dépend de la *différence* entre F_z sur le dessus et F_z au fond, ou plus précisément de la différence entre la moyenne de F_z sur le dessus de la boîte et la moyenne de F_z sur la face du fond. Au premier ordre, la différence est $(\partial F_z/\partial z)\Delta z$. La figure 2.16 *b* nous aide à comprendre ceci. La valeur moyenne de F_z au fond de la boîte est égale à sa valeur au centre de ce rectangle, si nous considérons seulement les variations au premier ordre de F_z sur ce petit rectangle. Cette valeur est, au premier ordre⁽⁵⁾ en Δx et Δy ,

$$F_{Z}(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_{Z}}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial F_{Z}}{\partial y}$$
(2.55)

Comme valeur moyenne de F_z sur la face du dessus, nous prenons la valeur au centre de cette face qui est, toujours au premier ordre en

$$F_{z}(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_{z}}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial F_{z}}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial F_{z}}{\partial z}$$
(2.56)

Le flux sortant de la boîte par ces deux faces, qui ont chacune une surface $\Delta x \Delta y$, est donc

$$\Delta x \Delta y \left[F_z(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial F_z}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z} \right]$$
(Flux sortant du sommet de la boîte)
$$-\Delta x \Delta y \left[F_z(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial F_z}{\partial y} \right]$$
(2.57)
(1.57)
(2.57)
(2.57)

$$F_{z}(x+a,y+b,z+c) = F_{z}(x,y,z) + \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}\right)F_{z} + \dots + \frac{1}{n!}\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}\right)F_{z} + \dots$$

Les dérivées sont toutes prises au point (x, y, z). tans notre cas, $a = \Delta x/2$, $b = \Delta y/2$, c = 0 et nous négligeons les termes d'ordre plus élevé dans le développement.

⁽⁵⁾ Ceci n'est rien d'autre que le début d'un développement en série de Taylor de la fonction scalaire F_z au voisinage de (x, y, z) C'est-à-dire

qui se réduit à $\Delta x \Delta y \Delta z (\partial F_z / \partial z)$. On peut évidemment appliquer le même raisonnement aux autres paires de faces de la boîte. Ce qui donne comme flux sortant de la boîte par les faces parallèles au plan $yz \Delta x \Delta y \Delta z (\partial F_x / \partial x)$. Remarquez que le produit $\Delta x \Delta y \Delta z$ intervient ici aussi. Donc le flux total sortant de la petite boîte est



Fig. 2.17 La limite du quotient du flux par le volume est indépendante de la forme de la boîte considérée.



Fig. 2.18 Vous pouvez prouver que $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = 0$.

 $\boldsymbol{\Phi} = \Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)$ (2.58)

Le volume de la boîte est $\Delta x \Delta y \Delta z$ de sorte que le quotient du flux par le volume est

 $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ et comme cette expression ne contient pas les dimensions de la

boîte, elle ne varie pas quand on fait tendre vers zéro les dimensions de la boîte. (Si, d'uns le calcul du flux, nous avions retenu les termes proportionnels à $(\Delta x)^2$, $(\Delta x \Delta y)$, etc., ils se seraient annulés en passant la limite.)

Nous pouvons maintenant regarder pourquoi cette limite est indépendante de la forme de la boîte. Elle est évidemment indépendante des proportions de la boîte rectangulaire, mais cela ne nous apprend pas grand chose. Il est facile de voir qu'elle sera encore la même pour tout volume que nous pouvons réaliser en collant côte à côte de petites boîtes rectangulaires de toute forme et de toute taille. Considérons les deux boîtes de la figure 2.17. La somme du flux Φ_1 , sortant de la boîte 1 et du flux Φ_2 sortant de la boîte 2 n'est pas changée si on enlève les parois adjacentes pour faire une seule boîte, car le flux qui passe à travers un tel plan est négatif pour une boite s'il est positif pour l'autre. Nous pouvons donc avoir une forme bizarre comme sur la figure 2.17 c sans changer le résultat. Nous laissons au lecteur le soin d'une généralisation plus poussée. Il pourra traiter les surfaces inclinées en prouvant d'abord que la somme vectorielle des quatre faces du tétraèdre de la figure 2.18 est nulle.

De tout ceci, nous concluons que, si F_x , F_y et F_z , sont dérivables, la limite cherchée existe et est donnée par

div
$$\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$
 (2.59)

Si div F a une valeur positive en un point, nous avons - si nous imaginons que F est un champ de vitesse - un « courant vers l'extérieur » de ce voisinage. Par exemple, si les trois dérivées partielles de l'équation 2.59 sont positives en un point P, nous pouvons avoir au voisinage un

champ de vecteur un peu comme celui suggéré par la figure 2.19. Mais le champ pourrait avoir un aspect très différent tout en ayant encore une divergence positive, car on peut lui rajouter n'importe quelle fonction vectorielle G telle que div G = 0. Une ou deux des trois dérivées partielles pourraient être négatives et nous pourrions cependant avoir div $\mathbf{F} > 0$. La divergence est une quantité qui n'exprime qu'un aspect de la variation spatiale du champ.

Appliquons ceci à un champ électrique qui soit plutôt facile à représenter. Un cylindre circulaire de rayon A infiniment long contient une distribution de charge positive de densité p. A l'extérieur du cylindre, le champ électrique est le même que celui d'une ligne chargée sur l'axe du cylindre. C'est un champ radial avec un



Fig. 2.19 Représentation d'un champ qui a une divergence non nulle, au voisinage du point P

module proportionnel à 1/r. On trouve le champ à l'intérieur en appliquant le théorème de Gauss à un cylindre de rayon r < a. Vous pouvez résoudre ce problème simple. Vous devez trouver que le champ à l'intérieur est directement proportionnel à r, et, bien sûr, qu'il est aussi radial. Les valeurs exactes sont

$$E = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r} \quad \text{pour } r > a$$

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \quad \text{pour } r < a$$
(2.60)

La figure 2.20 est une section perpendiculaire à l'axe du cylindre. Les coordonnées rectangulaires ne constituent pas ici le choix le plus naturel, mais nous les utilisons néanmoins pour nous servir de l'équation 2.59.

Avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, les composantes du champ s'écrivent comme suit



Fig. 2.20 Champ à l'intérieur et à l'extérieur d'une distribution de charge cylindrique uniforme.

 E_z est nul, bien sûr.

A l'extérieur du cylindre de charge, div E a la valeur donnée par

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)} \right] = 0$$
(2.62)

A l'intérieur du cylindre, div E est

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} (1+1) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
(2.63)

Nous nous attendions à ces deux résultats. A l'extérieur du cylindre, où il n'y a pas de charge, le flux net sortant d'un volume quelconque - petit ou grand- est nul, de sorte que la limite du rapport *flux/volume* est certainement zéro. A l'intérieur du cylindre, nous obtenons le résultat obtenu par la relation fondamentale (éq. 2.54).

2.12 Le Laplacien

Nous avons maintenant rencontré deux fonctions scalaires reliées au champ électrique, la fonction potentiel V et la divergence, div **E**. En coordonnées cartésiennes, ces relations s'expriment ainsi

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V = -\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$
(2.64)

div
$$\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$
 (2.65)

L'équation 2.64 montre que la composante x de **E** est $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ En substituant ceci et les expressions correspondantes pour E_y et E_z dans l'équation 2.65, nous obtenons une relation entre div **E** et V:

div
$$\mathbf{E} = -\text{div grad } V = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)$$
 (2.66)

Nous appellerons « div grad » ou « prendre la divergence du gradient de... » l'opération sur V qu'indique au signe près l'équation 2.66. Le symbole utilisé pour représenter cette opération est ∇^2 appelé *l'opérateur Laplacien* ou encore le *Laplacien*. $\partial^2 \quad \partial^2 \quad \partial^2$

L'expression $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ est l'expression du Laplacien en coordonnées cartésiennes.

La notation ∇^2 s'explique ainsi. L'opérateur gradient est souvent symbolisé par ∇ , appelé « del ». En coordonnées cartésiennes,

$$\nabla = \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
(2.67)

Si nous le manipulons comme un vecteur, son carré sera

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
(2.68)

même expression que le Laplacien en coordonnées cartésiennes. Aussi on appelle souvent le Laplacien « del-carré a et nous disons « del-carré » pour dire « div grad » . *Attention* : dans d'autres systèmes de coordonnées, les coordonnées polaires sphériques par exemple, les formes explicites de l'opérateur gradient et de l'opérateur Laplacien n'ont pas entre elles une relation si simple. Il est bon de se rappeler que la définition fondamentale de l'opérateur Laplacien est « divergence du gradient de ».

Nous pouvons maintenant exprimer directement une relation *locale* entre la densité de charge en un point quelconque et la fonction potentiel au voisinage immédiat de ce point. Du théorème de Gauss sous sa forme différentielle, nous tirons

$$\nabla^2 V = -\rho / \varepsilon_0 \tag{2.69}$$

L'équation 2.69, parfois appelée équation de Poisson, relie la densité de charge aux dérivées secondes du potentiel. Elle s'écrit en coordonnées cartésiennes

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\rho / \varepsilon_0$$
(2.70)

On peut considérer cette équation comme l'expression différentielle do la relation exprimée par une intégrale dans l'équation 2.17, qui nous dit comment trouver le potentiel en un point en sommant les contributions de toutes les sources, où qu'elles soient⁽⁶⁾.

⁽⁶⁾ En fait, on peut montrer que l'éq. 2.70 est l'équivalent *mathématique* de l'éq. 2.17. Ceci signifie que, si vous appliquez l'opérateur Laplacien à l'intégrale de l'éq. 2.17, vous obtiendriez - g/eu• Nous ne nous attarderons pas à montrer comment on obtient ceci; faites-nous confiance ou alors essayez de le démontrer.

2.13 Équation de Laplace



Fig 2.21 Le travail nécessaire pour amener q' de l'infini et le répartir sur la sphère est égal au produit de q' par la *moyenne*, sur la sphère, du potentiel V dû à q.

Partout où $\rho = 0$, c'est-à-dire en tout point de l'espace où il n'y a pas de charge électrique, le potentiel électrique doit satisfaire l'équation

 $\nabla^2 V = 0 \tag{2.71}$

On l'appelle équation de Laplace. Nous la retrouverons dans beaucoup de branches de la physique. D'ailleurs, on peut dire que, d'un point de vue mathématique, la théorie classique des champs consiste principalement en l'étude des solutions de cette équation. L'ensemble des fonctions qui satisfont l'équation de Laplace sont appelées fonctions harmoniques. Elles ont quelques remarquables propriétés, dont celle-ci si V(x,y,z) satisfait l'équation de Laplace, alors la valeur moyenne de V à la surface d'une sphère quelconque (il n'est pas nécessaire qu'elle soit petite) est égale à la valeur de V au centre de la sphère. Nous pouvons facilement démontrer que ceci est vrai pour le potentiel électrique V, dans des régions où il n'y a pas de charges. Considérons une sphère S dans le champ d'une charge ponctuelle située à

l'extérieur de la sphère, comme sur la figure 2.21. Imaginons maintenant une charge d'essai de valeur totale q' répartie uniformément sur cette sphère. Le travail nécessaire pour apporter q' et la répartir de cette façon doit être égal au produit de q'par la valeur moyenne sur la sphère du potentiel dû à q. Mais nous savons que ce travail serait le même si nous avions apporté la charge d'essai en premier, avant d'apporter q de l'infini à sa position finale; nous savons que, dans ce cas, le travail est le même que q' soit concentrée au centre de la sphère ou qu'elle soit répandue sur sa surface. Ceci prouve la proposition dans ce cas. Comme les potentiels dus à plusieurs sources s'ajoutent simplement, ceci doit être vrai pour tout système de sources situées entièrement à l'extérieur de la sphère S.

Cette propriété du potentiel est intimement liée à un fait qui peut vous désappointer; on ne peut concevoir un champ électrostatique qui maintienne une particule chargée en équilibre *stable* dans le vide. Ce théorème d'impossibilité» particulier, sert, comme beaucoup d'autres en physique, à s'éviter des efforts inutiles et de stériles spéculations. Cherchons son origine. Supposons que nous ayons un champ électrique tel que, contrairement au théorème, il *existe un point* P où une particule chargée positivement soit en équilibre stable. Tout petit déplacement de la particule à partir de P doit donc nécessairement l'amener en un point où existe un champ électrique qui la repousse vers P. Mais ceci veut donc dire qu'une petite sphère autour de P doit avoir E dirigé vers l'intérieur sur *toute* sa surface. Ceci contredit le théorème de Gauss, car il n'y a pas de charge source négative dans cette région. (Notre particule chargée d'essai ne compte pas; d'ailleurs elle est positive). En d'autres termes, il ne peut exister une région vide de charges où le champ électrique soit dirigé ou tout vers l'intérieur ou tout vers l'extérieur, et c'est pourtant ce que nécessite un équilibre *stable*. Pour exprimer la même chose à l'aide du potentiel électrique une position d'équilibre stable pour une particule chargée doit avoir un potentiel V plus faible que tous les points voisins (si la particule est chargée positivement) ou un potentiel V plus élevé que tous les points voisins (si la particule est chargée positivement) ou un potentiel V plus élevé que tous les points voisins (si la particule est chargée positivement). Et il est clair que ceci est impossible pour une fonction dont la valeur moyenne sur une sphère est toujours égale à sa valeur au centre.

Bien sûr, une particule chargée peut être en équilibre dans un champ électrostatique, c'est-à-dire que la force agissant sur elle peut être nulle. Le point où $\mathbf{E} = 0$ sur la figure 1.10 est un endroit possible pour cela. Le point situé à mi-chemin entre deux charges positives égales est une position d'équilibre pour une troisième charge, qu'elle soit positive ou négative. Mais cet équilibre n'est pas stable. (Pensez à ce qui arrivera si on déplace légèrement la troisième charge hors de sa position d'équilibre.) Il est cependant possible de a piéger > et de maintenir en équilibre stable une particule chargée électriquement dans des champs électriques qui varient dans le *temps*.



Fig. 2.22 Dans un champ qui n'est pas en inverse carré de la distance, le flux à travers une surface fermée n'est pas nul.

2.14 Distinction entre Physique et Mathématique

Dans les sections précédentes, nous nous sommes occupés de relations mathématiques et de façons nouvelles d'exprimer des choses connues. Pour nous aider à séparer la physique de la mathématique, et les lois des définitions, essayons d'imaginer ce qui arriverait si la force électrique n'était pas une force en pur inverse carré de la distance, mais une force à rayon d'action fini, par exemple une force variant comme

$$\frac{\mathrm{e}^{-\lambda r}}{r^2} \tag{2.72}$$

Alors le théorème de Gauss, que l'équation 2.52 exprime sous sa forme intégrale, serait sûrement en défaut, car en prenant une très grande surface contenant quelques charges, on trouverait que le champ est infiniment petit sur cette surface. Le flux devrait tendre vers zéro quand la surface augmente, au lieu de rester constant. Cependant, nous pour rions encore définir un champ en tout point de l'espace. Nous pourrions calculer la divergence de ce champ, et l'équation 2.53, qui décrit une propriété mathématique de *tout* champ de vecteurs serait toujours vraie. Y a-t-il là une contradiction ? Non, parce que l'équation 2.54 serait, elle, en défaut. La divergence du champ ne serait plus égale au quotient de la densité de charge par ε_0 . Nous pouvons comprendre cela en remarquant qu'un petit volume vide de charges sources pourrait avoir un flux sortant non nul dû à l'effet d'une source *extérieure*, si le champ avait une portée finie. Comme le suggère la figure 22, il entre rait plus de flux par le côté proche de la source qu'il n'en sortirait par l'autre côté.



Fig. 2.23 La somme de toutes les circulations Γ_i autour des petites boucles subdivisant la grande boucle *C* est égale à la circulation autour de la courbe *C*.



Fig. 2.24 Règle du tire-bouchon entre la normale à la surface et la direction selon laquelle on doit prendre la circulation.

Nous pouvons donc dire que les équations 2.52 et 2.54 expriment la même *loi physique*, la loi de l'inverse carré de la distance que Coulomb établit par mesure directe de la force entre deux corps chargés, tandis que l'équation 2.53 est l'expression *d'un théorème mathématique* qui nous permet de passer, dans notre énoncé de cette loi, de la forme différentielle à la forme intégrale, et inversement.

Comment pouvons-nous justifier l'existence de ces relations différentielles dans un monde où la charge électrique n'est pas réellement une distribution continue, mais est concentrée sur des particules dont nous connaissons bien peu la configuration interne ? En fait, un énoncé tel que l'équation 2.69, équation de Poisson, n'a de sens qu'à l'échelle macroscopique. Il faut interpréter la densité de charge p comme une moyenne sur une région petite mais finie contenant plusieurs particules La fonction ρ ne peut donc être continue au sens que le mathématicien donne à cet adjectif. Quand nous faisons se contracter notre domaine V_i pour démontrer la forme différentielle du théorème de Gauss, nous savons bien, en tant que physiciens, que nous ne pouvons le laisser se contracter jusqu'au bout. Cela peut paraître étrange, mais le fait est que le modèle continu permet de traiter très correctement les systèmes électriques à grande échelle. A l'échelle atomique, il n'y a que les particules élémentaires, et le vide. A l'intérieur des particules, même si la loi de Coulomb garde un sens, il doit y avoir quelque chose d'autre. Le vide, en ce qui concerne l'électrostatique, est gouverné par l'équation de Laplace. Et encore, nous ne pouvons être sûr que, même dans le vide, le passage à une limite de taille nulle ait un sens physique.

2.15 Le rotationnel d'une jonction vectorielle

Nous avons introduit le concept de divergence, propriété locale d'un champ de vecteurs, en partant de l'intégrale de surface prise sur une grande surface fermée. Dans le même esprit, considérons la circulation d'un champ de vecteurs $\mathbf{F}(x, y, z)$ prise le long d'un contour fermé, une courbe *C* qui se referme sur elle-même. On peut se représenter la courbe *C* comme le contour dune certaine surface qui la sous-tend. Nous utiliserons le symbole Γ pour la circulation le long d'une telle courbe fermée :

$$\Gamma = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} \tag{2.73}$$

Sous l'intégrale, ds est un élément de courbe, un vecteur infinitésimal tangent localement à C (fig. 2.23 a). Il y a deux sens de parcours sur C: nous devons en choisir un pour que la

direction de ds soit définie sans ambiguïté. Remarquez que rien n'oblige la courbe C à être dans un plan - elle peut aussi être sinueuse dans l'espace que vous le voulez.

Maintenant, rajoutons un nouveau circuit *B* à *C*, ce qui nous donne deux boucles C_1 et C_2 qui comprennent chacune *B* (fig. 2.23 *a*). Prenons les circulations autour de chacune de ces boucles dans le même sens. Il est aisé de se convaincre que la somme des deux circulations, Γ_1 et Γ_2 , sera la même que la circulation autour de *C* : la raison en est que le chemin B est parcouru en sens

inverse dans les deux intégrations, cc qui ne laisse dans la somme que les contributions correspondant juste à la circulation autour de C. Un découpage plus poussé à partir de celui-ci et qui crée de nombreuses boucles $C_1, ..., C_i, ..., C_N$ garde constante la somme des circulations :

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}_{i} \qquad \text{ou} \qquad \Gamma = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_{i} \qquad (2.74)$$



Ici aussi, nous pouvons continuer à diviser indéfiniment, en rajoutant do nouvelles branches, pour arriver à la limite à une quantité caractéristique du champ **F** au voisinage d'un point. Quand nous divisons les boucles, nous en obtenons d'autres ayant une plus petite circulation, mais aussi une plus petite surface. Il est donc naturel de considérer le rapport de *la circulation autour de la boucle à l'aire de la boucle*, de la même façon que nous considérions, à la section 2.9, le quotient du *flux* par le *volume*. Il y a cependant une petite différence ici, parce que faire **a**_i de la surface qui sous-tend une petite boucle C_i est un vecteur; une surface a une orientation dans l'espace. Nous ne pouvons diviser un scalaire par un vecteur ! En fait, en faisant des boucles de plus en plus petites dans un certain voisinage, nous pouvons orienter une boucle comme nous le voulons (rappelez-vous, nous n'étions pas limités dans le choix de la courbe C). Nous pouvons donc passer à la limite de différentes façons et le résultat doit refléter ces possibilités.

Fig. 2.25 La boucle se rétracte autour de P, en gardant sa normale dirigée dans la direction des x.

Choisissons donc, aux dernières étapes du découpage, une orientation particulière pour les boucles. Le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{n}}$ représentera la normale à l'aire de la boucle,

et ce vecteur doit rester constant tandis que faire entourant un point particulier P tend vers une limite nulle. La limite du quotient de la circulation par l'aire de la boucle s'écrira ainsi :

$$\lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} \qquad \text{ou} \qquad \lim_{a_i \to 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{a_i}$$
(2.75)

La règle qui donne le signe est la suivante : la direction de $\hat{\mathbf{n}}$ et le sens dans lequel C_i est parcouru dans le calcul de la circulation sont reliés par la règle du tire-bouchon comme sur la figure 2.24. La limite que nous obtenons par ce procédé est une quantité scalaire, fonction du point *P* et de la direction $\hat{\mathbf{n}}$ dans le champ de vecteurs **F**. Nous pouvons prendre trois directions indépendantes telles que x, y et i et obtenir trois nombres différents. On peut considérer ces trois nombres comme les composantes d'un vecteur. Nous appellerons ce vecteur rotationnel de **F** que l'on note rot **F**. Et l'équation suivante le définit

$$(\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} \lim_{a_i \to 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{a_i}$$
(2.76)

Par exemple, la composante x de rot F s'obtient en choisissant n = x, comme sur la figure 2.25. Lorsque la boucle se contracte autour du point P, nous la maintenons dans un plan perpendiculaire à l'axe x. En général, le vecteur rotationnel varie d'un point à un autre. Si nous faisons diminuer la petite surface autour d'un autre point, le quotient de la circulation par l'aire peut avoir une valeur différente, cela dépend de la fonction vectorielle F. C'est dire que le rot F est lui-même une fonction vectorielle des coordonnées. Sa direction en chaque point est normale au plan passant par ce point dans lequel la circulation est maxima. Son module est la valeur limite de la circulation par unité de surface, dans ce plan, autour du point en question. Nous avons seulement dit que l'objet ainsi défini était un vecteur -nous ne l'avons pas prouvé. Pour qu'il mérite ce nom, ses composantes doivent se comporter à tous égards comme des composantes de ce vecteur. Supposez que nous ayons trouvé certaines valeurs pour les composantes x, y et z, selon l'équation 2.76. Si nous choisissons alors \hat{n} dans une quatrième direction, le résultat donné par l'équation 76 devra être en accord avec ces trois nombres, puisque trois composantes déterminent un vecteur de façon univoque. Si vous désirez approfondir ce point, le problème 2.24 vous suggère une méthode pour vous convaincre que l'équation 2.76 définit réellement une composante de vecteur.

2.16 Théorème de Stokes

A partir de la circulation autour d'un contour infinitésimal nous pouvons maintenant remonter à la circulation autour de la grande boucle originale C

$$\Gamma = \int_{C} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_{i} = \sum_{i=1}^{N} a_{i} \left[\frac{\Gamma_{i}}{a_{i}} \right]$$
(2.77)

Dans le dernier membre, nous avons simplement multiplié et divisé par a_i les termes d'indices correspondants. Regardons maintenant ce qui arrive au terme de droite si *N* tend vers l'infini et que tous les a_i tendent vers zéro. La quantité entre crochets devient (rot \mathbf{F}) $\cdot \hat{\mathbf{n}}_i$ où $\hat{\mathbf{n}}_i$ est le vecteur unitaire normal au i-ème contour. Nous avons donc à droite la somme, sur tous les contours qui composent la surface *S* sous-tendant C, de produits du genre « aire d'un contour multipliée par la composante normale à la surface du contour de (rot F) « .Ceci n'est rien d'autre que *l'intégrale de surface*, sur *S*, du vecteur rot \mathbf{F} :

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \left[\frac{\Gamma_i}{a_i} \right] = \sum_{i=1}^{N} a_i (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \to \int_{\mathbf{S}} d\mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}$$
(2.78)

Nous trouvons donc que

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{S}} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$$
(2.79)

La relation qu'exprime l'équation 2.79 est un théorème mathématique appelé théorème de Stokes. Remarquez combien il ressemble par sa forme au théorème d'Ostrogradski, le théorème de la divergence. Le théorème de Stokes relie l'intégrale curviligne d'un vecteur à l'intégrale de surface du rotationnel de ce vecteur. Le théorème d'Ostrogradski (éq. 2.51) relie l'intégrale de surface d'un vecteur à l'intégrale de volume de la divergence de celui-ci. Le théorème de Stokes met en jeu une surface et la courbe qui la limite. Le théorème d'Ostrogradski met en jeu un volume et la surface qui le limite.

2.17 Le rotationnel en coordonnées cartésiennes

L'équation 2.76 constitue la définition fondamentale de rot **F**, elle ne dépend pas d'un système particulier de coordonnées. A ce point de vue elle ressemble à l'équation de définition fondamentale de la divergence, équation 2.49. De même nous aimerions savoir comment calculer rot **F** quand la fonction vectorielle $\mathbf{F}(x, y, z)$ est donnée explicitement. Pour trouver la règle de calcul, nous effectuons l'intégration indiquée par l'équation 2.76, mais nous la faisons sur un contour de forme très simple, celui qui entoure une surface rectangulaire parallèle au plan *xy* (fig. 2.26). C'est-à-dire que nous prenons $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$. En accord avec notre règle de signe, la direction de l'intégration autour du contour doit être le sens des aiguilles d'une montre pour quelqu'un qui regarde la surface dans le sens de $\hat{\mathbf{n}}$. Sur la figure 2.27 nous regardons le rectangle de dessus.



La circulation de **A** autour d'un tel contour dépend de la variation de A_x avec y et de la variation de A_y avec x; en effet si A_x avait la même valeur moyenne le long du haut du contour de la figure 2.27 que le long du bas, la contribution de ces deux segments à la circulation totale serait évidemment nulle. Une remarque analogue s'applique aux segments latéraux. Au premier ordre par rapport aux petites quantités Δx et Δy , la différence entre la moyenne de A_x sur le segment du haut du contour - à $y + \Delta y$ - et sa moyenne sur le segment du bas - à y - est

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \Delta y \tag{2.80}$$

Le raisonnement est le même que celui que nous avons utilisé sur la figure 2.16 b.

Fig. 2.26 Circulation autour d'une boucle rectangulaire avec $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$.

$$A_{x} = A_{x}(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_{x}}{\partial x}$$
 (au milieu du segment du bas du contour)

$$A_{x} = A_{x}(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_{x}}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial A_{x}}{\partial y}$$
 (au milieu du segment du haut du contour) (2.81)

Ce sont ces valeurs moyennes, calculées par développement en série de Taylor limité au premier ordre, que l'on utilise. C'est leur différence, multipliée par la longueur du segment Δx du contour, qui détermine leur contribution à la circulation. Cette contribution est

 $-\Delta x \Delta y (\partial A_x / \partial y)$

Le signe moins s'introduit parce que nous intégrons vers la gauche sur le segment du sommet, de sorte que si A_x est plus grand au sommet, la contribution à la circulation est négative. La contribution des côtés latéraux est $\Delta x \Delta y (\partial A_x / \partial y)$ et ici le signe est positif parce que si A_y est plus grand à droite, la contribution à la circulation est positive.



Donc, en négligeant les termes d'ordre plus élevé en Δ_x et Δ_y la circulation autour du rectangle tout entier est :

$$\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds} = (-\Delta x) \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta y + (\Delta y) \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \Delta x = \Delta x \Delta y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$
(2.82)

Or $\Delta_x \Delta_y$ est le module de l'aire du rectangle que nous avons représentés par un vecteur dans la direction z. La quantité

$$\frac{\partial A_{y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x}}{\partial y}$$
(2.83)

Fig. 2.27 Boucle de la figure 2.26 vue de dessus.

est évidemment la limite du rapport

quand le contour tend vers zéro. Si le contour rectangulaire avait été orienté avec sa normale dans la direction des y positifs, nous aurions trouvé l'expression

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial x} \tag{2.85}$$

comme limite du rapport correspondant, et si le contour avait été orienté avec sa normale dans la direction des x positifs, comme sur le contour de droite de la figure 2.28, nous aurions obtenu

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{2.86}$$

Bien que nous ayons uniquement considéré des rectangles, ce résultat est en réalité indépendant de la forme du petit contour et de sa taille, et ceci pour des raisons analogues à celles indiquées lors du calcul de la divergence. Par exemple il est clair que nous pouvons associer sans limitation différents rectangles pour former d'autres figures, puisque les intégrales curvilignes le long des côtés communs s'annulent exactement les unes les autres (fig. 2.29).

Nous en concluons que, pour une orientation quelconque, la limite du quotient de la circulation par l'aire est indépendante de la forme du contour choisi. Nous obtenons donc une formulation générale pour les composantes du vecteur rot \mathbf{F} , quand \mathbf{F} s'exprime en fonction de *x*, *r* et *z*.

rot
$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}} \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right] + \hat{\mathbf{y}} \left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right] + \hat{\mathbf{z}} \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right]$$
(2.87)



Fig. 2.28 Pour chaque orientation, la limite du rapport circulation/aire détermine la composante de rot **A** au point considéré. Pour déterminer toutes les composantes du vecteur rot **A** en un point, les boucles d'intégration doivent entourer ce point; ici on les a séparées pour la clarté du dessin.

Vous pouvez trouver plus facile de vous rappeler la règle suivante; écrivez le déterminant ci-dessous

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$
(2.88)

et développez-le suivant la règle de calcul d'un déterminant; vous obtiendrez rot **F** sous la forme de l'équation 2.87. Remarquez que la composante *x* de rot **F** dépend de la dérivée de F_z par rapport à *y* et de l'opposé de la dérivée de F_y par rapport à *z*, et ainsi de suite.

On utilise souvent le symbole $\nabla \wedge$, qu'on lit « del-vectoriel », où ∇ symbolise le « vecteur »



$$\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$
 (2.89)

à la place de rot. Si nous écrivons $\nabla \wedge \mathbf{F}$ et suivons les règles de formation d'un produit vectoriel, nous obtenons automatiquement le vecteur rot \mathbf{F} . Rot \mathbf{F} et $\nabla \wedge \mathbf{F}$ ont donc le même sens.

Fig. 2.29 La circulation dans la boucle de droite est la somme des circulations dans les rectangles de gauche, et l'aire dans la boucle de droite est la somme des aires des rectangles. Ce dessin montre pourquoi le rapport circulation/aire est indépendant de la forme de la boucle.



Fig. 2.30 Le « rot-metre ».

2.18 Signification physique du rotationnel

Imaginons un champ de vecteur vitesse **G** et supposons que rot **G** soit non nul. Alors les \checkmark vitesses dans ce champ sont un peu comme ceci ou comme cela de plus un courant d'ensemble dans une direction peut leur être superposé. Par exemple le champ de vitesse de l'eau qui s'écoule d'une baignoire a généralement une circulation. Son rotationnel est non nul sur la majeure partie de la surface de l'eau. Un objet flottant à la surface tourne sur lui-même durant son déplacement (voir les problèmes 2.16 et 2.26). Dans les branches de la physique qui traitent de l'écoulement des fluides, l'hydrodynamique et l'aérodynamique, ce concept a une très grande importance.

Pour fabriquer - par l'esprit tout au moins - un « rot-mètre » pour un champ électrique, nous pourrions fixer des charges positives sur un tourniquet aux bras isolants (fig. 2.30). En explorant un champ avec cet instrument, nous trouverions que, chaque fois que rot \mathbf{E} est différent de zéro, la roue à une tendance à tourner autour de son axe. Si l'on met un ressort pour limiter la rotation, l'angle de déplacement de la roue indique le couple qui est proportionnel à la composante du vecteur rot \mathbf{E} dans la direction de l'axe. Si on peut trouver la direction que doit avoir l'axe pour que le couple soit maximum et dans le sens des aiguilles d'une

montre, c'est la direction du vecteur rot E. (Bien sûr, nous ne pouvons nous fier au « rot-mètre » que dans des champs qui varient peu sur des distances de l'ordre des dimensions de la roue.)

Que pouvons-nous dire maintenant du champ électrostatique \mathbf{E} ? Notre conclusion sera très simple : le « rot-mètre » indiquera toujours zéro dans un tel champ ! Ceci provient d'un fait que nous connaissons déjà; à savoir, que dans un champ électrostatique, la circulation de \mathbf{E} sur *n'importe quel* contour *fermé* est nulle. En effet rappelons-nous que la circulation de \mathbf{E} entre deux points tels que P_1 et P_2 de la figure 2.31 est indépendante du circuit utilisé. Quand nous rapprochons les deux points P_1 et P_2 l'un de l'autre, l'intégrale curviligne sur le chemin le plus court s'annule évidemment à moins que le point de convergence de P_1 et P_2 soit une singularité du genre d'une charge ponctuelle, et nous excluons ce cas. L'intégrale curviligne doit donc être nulle sur la boucle fermée de la figure 2.31 *d*. Mais alors, si la circulation est nulle sur tout contour fermé, le théorème de Stokes nous dit que l'intégrale de surface de rot \mathbf{E} est nulle quelle que soit la surface d'intégration. Rot \mathbf{E} doit donc être nul partout, car s'il ne l'était pas on pourrait trouver un domaine d'intégration qui contredirait le résultat précédent. Tout ceci mène à ce simple énoncé : dans un champ électrostatique \mathbf{E}

rot $\mathbf{E} = 0$ (partout)



Fig. 2.31 Si l'intégrale curviligne entre P_1 et P_2 est indépendante de la courbe, l'intégrale curviligne autour d'une boucle fermée doit être nulle.

Réciproquement, on peut dire que l'équation 2.90 est une condition suffisante pour qu'un

(2.90)

champ soit *conservatif*, c'est-à-dire pour qu'on puisse le décrire comme le gradient d'une certaine fonction potentielle. C'est un test facile à appliquer. Quand nous avons introduit la fonction vectorielle de la

c est un test fache à appliquer. Quand nous avons introduit la fonction vectorielle de la figure 2.2, nous avons dit qu'elle représentait un champ électrostatique. Vérifions-le. Ses composantes étaient données par $E_x = K_y$ et E_y , $= K_x$, auxquelles nous devrions ajouter $E_z=0$ pour compléter la description de ce champ dans l'espace à trois dimensions. En calculant rot **E** on trouve

$$(\operatorname{rot} \mathbf{E})_{x} = \frac{\partial E_{z}}{\partial y} - \frac{\partial E_{y}}{\partial z} = 0$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{E})_{y} = \frac{\partial E_{x}}{\partial z} - \frac{\partial E_{z}}{\partial x} = 0$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{E})_{z} = \frac{\partial E_{y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{z}}{\partial y} = K - K = 0$$
(2.91)

Ceci nous assure que E est le gradient d'un certain potentiel scalaire. Remarquons que ce champ E particulier a aussi une divergence nulle.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$
(2.91)

Il représente donc un champ électrostatique dans une région vide de *charges*. Par contre la fonction vectorielle toute aussi simple définie par $F_x = K_y$, $F_y = -K_x$, $F_z = 0$, a un rotationnel non nul. En effet

$$(rot \mathbf{F})_{z} = -2K$$
 (2.93)

Aucun champ électrostatique ne peut donc avoir cette forme. Si vous tracez sommairement ce champ, vous verrez tout de suite qu'il a une circulation.

Pour exercer votre intuition sur les aspects des fonctions vectorielles, étudiez les champs bi-dimensionnels dessinés sur la figure 2.32. Pour quatre de ces champs la divergence de la fonction vectorielle est nulle dans toute la région figurée. Essayez de les identifier. Une divergence non nulle en un point implique un flux net entrant, ou sortant, d'une région entourant ce point. C'est facile à retrouver sur certains des dessins. Sur d'autres vous devez être capables de voir aussitôt que la divergence est nulle. Pour trois des champs représentés, le rotationnel de la fonction vectorielle est nul. Essayez d'identifier ces trois champs en regardant sur chaque dessin si une



Fig. 2.32 Quatre de ces champs de vecteurs ont une divergence nulle dans les régions représentées, Trois ont un rotationnel nul. Pouvez-vous les identifier ?

intégrale curviligne autour de n'importe quelle boucle est nulle ou non. (Après avoir étudié les dessins, répondez à ces questions avant de comparer votre raisonnement et vos conclusions avec les explications données sur la figure 2.34.)

Le rotationnel d'un champ de vecteur sera un outil précieux quand nous aurons affaire plus tard à des champs électriques et magnétiques dont le rotationnel n'est pas nul. Nous pouvons dire que nous avons vu deux sortes de dérivées d'un champ de vecteurs. L'une, la divergence, met en jeu la variation relative d'une composante du vecteur dans sa propre direction, $\partial F_x / \partial x$ et ainsi de suite. La deuxième, le rotationnel est une sorte de « dérivée latérale » qui met en jeu la variation relative de F_x lorsqu'on se déplace dans la direction y ou z.

Les relations appelées théorème de Gauss et théorème de Stokes sont récapitulées sur la figure 2.33. La relation entre la fonction potentiel scalaire et l'intégrale curviligne de son gradient peut être considérée comme un théorème de la même famille et on l'a incluse dans la figure.



$$\int_{surface} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_{volume} \operatorname{d} v dv$$

div
$$\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$\int_{courbe} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{surface} \mathbf{N} \cdot d\mathbf{a}$
EN COORDONEES CARTESIENNES
rot $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)$
$+ \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)$
$+ \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$
$= \nabla \times \mathbf{A}$

$$v_{2} - v_{1} = \int_{courbe} \operatorname{grad} v \cdot d\mathbf{s}$$
$$\operatorname{grad} V = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial V}{\partial z}$$

- - 1 IZ J

$$=\nabla V$$

 $\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}$

Fig.2.33 Récapitulation de quelques grandeurs vectorielles.

Problèmes

- 2.1 La fonction vectorielle suivante représente un champ qui peut être électrostatique $E_x=6xy E_y=3x^2-3y^2 E_z=0$ Calculez la circulation de **E** du point (0, 0, 0) au point (x_1 , y_1 , 0) le long du circuit qui va en ligne droite de (0, 0, 0) à (x_1 , 0, 0) puis de (x_1 , 0, 0) à (x_1 , y_1 , 0). Faites le même calcul pour le circuit formé par les deux autres côtés du rectangle, en passant par le point (0, y_1 , 0). Si l'énoncé ci-dessus est vrai, vous devez obtenir le même résultat. Vous avez maintenant la fonction potentiel $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Prenez le gradient de cette fonction et retrouvez les composantes du champ dont on est parti.
- 2.2 Considérez le système de deux charges décrit par la figure 2.6. Soit z la coordonnée le long de la ligne qui joint les deux charges, avec z = 0 pour la charge positive. Tracez le potentiel V le long de cette ligne en portant V en volts en fonction de z en centimètres, de z = -5 à z = 15.
- 2.3 Une petite sphère de rayon *r* est placée au centre d'une plus grande sphère de rayon *R*. Les sphères portent respectivement des charges *q* et *Q* réparties uniformément sur leur surface. Calculez leur différence de potentiel. Remarquez que, si *q* est positif, la sphère intérieure sera toujours a un potentiel plus élevé que la sphère extérieure. Si on relie les sphères par un fil, la charge *q* s'écoulera donc entièrement sur la sphère extérieure même si *Q* est très grand.

2.4 Un barreau fin est placé sur l'axe z de z = -a à z = a. Le barreau porte une charge uniformément distribuée sur sa longueur, de λC par mètre de longueur. Calculer le potentiel en tout point de l'axe x pour x > 0.



2.5 Sur chacun des trois plans infinis x = -a, x = 0 et x = a, il y a une charge de surface uniforme de même densité σ . Trouvez le champ électrique et le potentiel dans tout l'espace, en prenant V = 0 à x = 0.

- 2.6 Pour le cylindre de densité de charge uniforme de la figure 2.20
 - (a) Montrer que l'expression donnée pour le champ à l'intérieur du cylindre dérive de la loi de Gauss.
 - (b) Trouver le potentiel V en fonction de r, à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre.
 - (c) Tracer à main levée la courbe de V en fonction de r. Quelle est la nature de la singularité existant en r = a?
- 2.7 L'espace entre les plans y = 0 et y = b est rempli par une densité volumique de charge uniforme p. Il n'y a pas de charge ailleurs. Trouver le champ électrique créé dans tout l'espace par ce système. Trouver une fonction potentiel V adaptée à ce champ, et montrer qu'elle satisfait partout l'équation de Poisson.
- 2.8 Pour le système de la figure 2.7 tracez la surface équipotentielle qui touche le bord du disque. Trouvez le point où elle coupe l'axe de symétrie.
- 2.9 Appliquez l'équation 2.42 pour trouver l'énergie nécessaire pour réaliser un système formé de quatre électrons placés aux quatre coins d'un tétraèdre de 1 Å de côté, et d'un proton situé au centre du tétraèdre. Que pouvez-vous déduire du signe de l'énergie concernant la force résultante sur l'un des électrons ?
- 2.10Deux sphères identiques de rayon r sont séparées par une distance $d \gg r$. On doit répartir une charge Q à la surface des sphères.
 - (a) Quelle est l'énergie potentielle du système si nous plaçons Q/2 sur chaque sphère?
 - (b) Quelle est l'énergie potentielle si nous plaçons toute la charge sur une sphère et rien sur l'autre ?
 - (c) Que valent les potentiels électriques sur chaque sphère dans les cas (a) et (b) ?
 - (d) Si nous relions les sphères dans la configuration (b) par un fil conducteur fin de sorte que la charge puisse s'écouler de l'une à l'autre, quelle est la répartition finale des charges ? Comment la conservation de l'énergie se trouve-t-elle satisfaite ?
- 2.11En calculant explicitement les composantes de $\nabla \wedge \mathbf{E}$, montrer que la fonction vectorielle donnée au problème 2.1 peut représenter un champ électrostatique. (Bien sûr, si vous avez fait ce problème, vous l'avez déjà prouvé d'une autre façon en trouvant une fonction scalaire dont elle est le gradient). Calculer la divergence de ce champ.
- 2.12La fonction $f(x, y)=x^2 + y^2$ satisfait-elle l'équation de Laplace ? Et la fonction $g(x, y)=x^2 + y^2$? Tracez cette dernière fonction, calculez son gradient aux points (x = 0, y = 1), (x = 1, y = 0), (x = 0, y = 1) et (x = -1, y = 0). Indiquez par de petites flèches la direction de ces vecteurs gradients.
- 2.13Tracer les lignes de force de la fonction vectorielle $\mathbf{A} = -y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}$ dans le plan *xy*. Calculer le rotationnel de \mathbf{A} et tracer un vecteur indiquant sa direction. Calculer l'intégrale curviligne $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ sur la courbe fermée $x^2 + y^2 = 1$, z = 0. Montrer que le théorème de Stokes est vérifié en calculant l'intégrale de surface de $\nabla \wedge \mathbf{A}$ sur faire limitée par cette courbe.
- 2.14Calculer le rotationnel et la divergence de chacun des champs de vecteurs suivants. Si le rotationnel est nul, essayez de trouver une fonction scalaire V dont le champ de vecteurs soit le gradient

(a)
$$F_x = x + y$$
 ; $F_y = -x + y$; $F_z = -2z$
(b) $G_x = 2y$; $G_y = 2x + 3z$; $G_z = 3y$

- (c) $H_x = x^2 z^2$; $H_y = 2$; $H_z = 2xz$
- 2.15Si A est un champ de vecteurs quelconque à dérivées continues, div(rot A) = 0 ou, en utilisant la notation « del », V (V A A) = 0. Nous aurons besoin plus tard de ce théorème. Le problème est maintenant de le prouver. Voici deux façons différentes d'y parvenir
 - (a) (Calcul direct et fastidieux dans un système particulier de coordonnées) En utilisant la formule de ∇ en coordonnées cartésiennes, calculer explicitement ∇ (∇ ∧ A)
 - (b) (Avec le théorème de la divergence et le théorème de Stokes, sans avoir besoin de passer aux coordonnées) : Considérer la surface *S* de la figure, une sorte de ballon divisé en deux, limitée par la courbe fermée *C*. Pensez à l'intégrale curviligne, sur une courbe telle que *C*, d'un champ de vecteur quelconque. Puis utiliser les théorèmes de Stokes et d'Ostrogradski.

2.16Soit la fonction vectorielle $\mathbf{v}(x, y, z)$ qui représente la vitesse en tout point d'un fluide. On suppose le fluide incompressible, c'est-à-dire qu'il a partout la même densité. Remarquez que cela signifie que la vitesse de transport de la matière à travers une aire définie par un petit cadre fixé dans l'espace est proportionnelle à \mathbf{v} , de sorte que, si \mathbf{v} est constant dans le temps en tout point et s'il y a conservation de la matière, div \mathbf{v} doit être nulle partout. Pourquoi ? Cette question est cependant secondaire; ce qui doit nous intéresser au premier chef dans ce problème, c'est rot \mathbf{v} . Parmi les écoulements indépendants du temps, on considère ici ceux où le courant est symétrique par rapport à un axe et où \mathbf{v} est donc toujours dirigé selon une circonférence. C'est-à-dire que, en tout point, \mathbf{v} est un vecteur perpendiculaire à un plan contenant ce point et l'axe. La symétrie axiale rend très indiqué l'usage des coordonnées polaires cylindriques z, $r \in \varphi$. On supposera en outre que \mathbf{v} n'est fonction que de r. Un écoulement de ce type peut se décrire par $\mathbf{V} = \hat{\phi} \mathcal{U}(r)$ Où $\hat{\phi}$ représente un vecteur unitaire perpendiculaire à r et à z. En partant de la définition fondamentale de rot \mathbf{v} en termes de circulation autour d'un petit circuit,

montrez que, pour les champs possédant cette symétrie particulière, rot v est donné par rot $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{z}} \frac{l}{r} \frac{d}{dr} (r \upsilon(r))$ Utilisez

ceci pour étudier les cas particuliers suivants, correspondant à des fonctions v(r) particulières

- (a) Le fluide se déplace comme un corps solide en rotation autour de l'axe avec une vitesse angulaire ω . Que vaut rot v dans ce cas?
- (b) Le fluide a un écoulement tel que rot $\mathbf{v} = 0$. Ceci peut-il être réalisé partout? Quelle est la fonction v(r)? Essayez de représenter l'écoulement sur un croquis.
- (c) Le fluide a un écoulement tel que v(r) suive la loi de Képler pour le mouvement des planètes. Que vaut rot v ? Cet écoulement ne pourrait-il servir à interpréter le phénomène des anneaux de Saturne ?
- 2.17Nous avons donné sans démonstration l'équation 2.36 et son équivalent l'équation 2.39. Mais nous pouvons nous flatter d'avoir démontré l'équation 2.43. Essayons donc de prouver que l'équation 2.39 se déduit de l'équation 2.43. Vous devriez être capable de le faire en usant des armes suivantes :
 - (a) L'identité vectorielle $\nabla \cdot (f\nabla f) = (f\nabla f)^2 + f\nabla^2 f$, que vous pouvez admettre, bien qu'il ne soit pas très dur de la démontrer.
 - (b) L'équation de Poisson.
 - (c) Le théorème de la divergence.

Chapitre 3 Champs électriques autour des conducteurs

3.1 Conducteurs et isolants

Les premiers expérimentateurs observèrent très tôt que les substances possédaient à des degrés très divers le pouvoir de garder la « Vertu Électrique ». Quelques corps pouvaient aisément s'électrifier par friction et rester dans cet état électrifié; d'autres, semblait-il, ne pouvaient s'électrifier de cette façon ou, en tout cas, ne gardaient pas la « Vertu » si on la leur communiquait. C'est pourquoi les expérimentateurs du XVIII^e siècle établirent des listes où les substances étaient classées en « électriques » ou « non-électriques ». Aux alentours de 1730 l'anglais Stephan Gray montra expérimentalement que l'on pouvait faire passer la « Vertu Électrique » d'un corps à un autre au moyen d'une cordelette horizontale tendue sur des distances de l'ordre de quelques dizaines de mètres, pourvu que la cordelette soit elle-même suspendue par des fils de soie⁽¹⁾. Et une fois que l'on eût compris la distinction entre conductivité et non-conductivité, les physiciens de l'époque trouvèrent que même un corps « non-électrique » pouvait être électrifié fortement s'il était posé sur du verre ou suspendu à des fils de soie. Dans les démonstrations publiques alors très en vogue, le bouquet était souvent l'électrisation d'un homme suspendu aux poutres du plafond par des fils de soie; ses cheveux se hérissaient sur sa tête et l'on pouvait tirer des étincelles du bout de son nez.

A la suite des travaux de Gray et de ses contemporains, la distinction entre matériaux électriques et non-électriques, dont il existait des listes fort exhaustives, fut interprétée comme une division des corps en isolants et conducteurs électriques. Cette distinction reste un des contrastes les plus extrêmes et les plus étonnants parmi ceux que nous offre la nature. De bons conducteurs ordinaires comme les métaux ont des conductivités électriques qui peuvent être 1020 fois plus grandes que celles d'isolants ordinaires comme le verre et les plastiques. Pour exprimer ceci en des termes qu'aurait pu comprendre un expérimentateur du XVIII^e siècle comme Gray ou Benjamin Franklin, un globe de métal posé sur un barreau de métal perd son électrisation en un millionième de seconde, posé sur un barreau de verre, le même globe de métal pourrait la garder pendant plusieurs années. (Pour vérifier la dernière proposition, nous devrions prendre quelques précautions qu'on eût été bien en peine de prendre dans un laboratoire du XVIII^e siècle. Pouvez-vous en suggérer quelques-unes ?)

La différence électrique entre un bon conducteur et un bon isolant est aussi grande que la différence mécanique entre un liquide et un solide. Ceci n'est pas purement accidentel. Ces deux types de propriété dépendent de la mobilité des particules atomiques : dans le cas électrique, il s'agit de la mobilité des porteurs de charge, électrons ou ions, dans le cas des propriétés mécaniques de la matière, il s'agit de la mobilité des atomes ou des molécules qui constituent la structure du matériau. Pour pousser l'analogie un peu plus loin, nous connaissons des substances dont la viscosité est intermédiaire entre celle d'un solide et celle d'un liquide - des substances comme le goudron ou les glaces à la crème. D'ailleurs quelques substances -le verre en est un bon exemple - passent graduellement et continûment d'un état liquide peu visqueux à un état solide rigide permanent par un abaissement de température de quelques centaines de degrés. En ce qui concerne la conductivité électrique, il existe toute une « gamme » de corps allant des « bons conducteurs » aux « bons isolants », et quelques substances peuvent voir changer leur conductivité sur une aussi grande échelle, lors de la variation de paramètres tels que la température. Une catégorie utile et fascinante de matériaux appelés semi-conducteurs possède cette propriété, parmi d'autres.

Qu'on appelle un matériau solide ou liquide dépend parfois de l'échelle de temps considérée, et parfois de l'échelle des distances. L'asphalte naturelle semble assez solide si vous en tenez un fragment dans votre main. D'un point de vue géologique, c'est un liquide, s'écoulant de filons souterrains et formant même des lacs. Nous devons donc nous attendre à ce que, pour des raisons quelque peu similaires, le classement en isolant ou conducteur d'un matériau dépende de l'échelle de temps du phénomène qui nous intéresse. Nous verrons que, pour la plupart des phénomènes électriques, le critère ne se fonde que sur l'échelle de temps, et non sur celle des distances. Dans l'immédiat, nous n'avons même pas besoin de faire ces distinctions.

3.2 Conducteurs dans un champ électrostatique

Nous nous intéresserons d'abord à des systèmes électrostatiques comprenant des conducteurs. C'est-à-dire que nous considérerons l'état stationnaire de charge et de champ électrique qui existe après que toutes les redistributions de charge se soient effectuées dans les conducteurs. Chaque isolant présent est supposé être un isolant parfait. Comme nous l'avons déjà

⁽¹⁾ La ficelle d'emballage qu'il utilisait comme cordelette était sans aucun doute un bien plus mauvais conducteur qu'un fil de métal, mais elle suffisait pour transporter des charges dans une expérience d'électrostatique. Gray trouva aussi que du fil fin de cuivre était conducteur, mais il utilisa principalement de la ficelle pour les grandes distances.

remarqué, les isolants ordinaires sont déjà très bons, de sorte que les systèmes que nous discuterons seront très proches de la réalité. Les systèmes auxquels nous nous intéresserons seront du genre du système suivant : deux sphères métalliques chargées, isolées l'une de l'autre et de tout autre corps, fixées à une distance relativement faible l'une de l'autre. Quel est alors le champ électrique résultant dans tout l'espace entourant les sphères, et comment la charge de chaque sphère s'est-elle répartie ? Posons-nous d'abord une question plus générale : après que les charges se sont immobilisées dans leur état stationnaire, que dire du champ électrique dans la matière conductrice ?



Fig. 3.1 L'objet en (a) est un isolant neutre électriquement. Les charges qu'il contient sont fixes, qu'elles soient positives ou négatives. En (b) les charges ont été libérées et commencent à se déplacer. Elles se déplaceront jusqu'à ce que l'état final, représenté en (c) soit atteint.

Dans l'état statique il n'y a plus aucun mouvement de charges. On pourrait donc penser que le champ électrique doive être nul à l'intérieur du matériau conducteur. On pourrait dire que, si le champ n'est pas nul, les porteurs de charge sont soumis à une force, donc mis en mouvement, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Mais un tel raisonnement néglige la possibilité qu'il puisse exister d'autres forces agissant sur les porteurs de charge qui compensent les forces électriques, permettant ainsi l'état stationnaire. Qu'il puisse être physiquement possible que des forces autres qu'électriques agissent sur des porteurs de charge n'a rien d'étonnant, pensez par exemple aux forces de gravitation. Un ion positif a une masse; il subit une force constante dans un champ de gravitation, il en est de même pour un électron; les forces qu'ils subissent ne sont pas égales. C'est un exemple qui n'est cependant pas très convaincant. En effet, nous savons que les forces de gravitation sont pratiquement négligeables à l'échelle atomique. Il existe cependant d'autres forces, que nous appellerons de façon volontairement vague « forces chimiques ». Dans une pile électrique et dans beaucoup d'autres systèmes où ont lieu des réactions chimiques, comme par exemple les cellules animales, les porteurs de charges se déplacent parfois dans un sens opposé à celui qui serait dû au champ électrique; cela se passe quand une réaction fournit plus d'énergie que celle nécessaire pour « remonter » la différence de potentiel correspondant au champ électrique. On peut hésiter à dire que de telles forces ne sont pas électriques quand on sait que l'on peut expliquer aussi bien la structure des atomes et des molécules que les forces existant entre eux en utilisant la loi de Coulomb et la mécanique quantique. Pourtant, dans le cadre de notre théorie classique de l'électricité, on doit les considérer comme d'origine étrangère à cette théorie. Elles se comportent d'ailleurs d'une facon très différente de la force en inverse carré sur laquelle est basée toute notre théorie. Lorsqu'au chapitre 2 nous avions découvert qu'on ne pouvait obtenir une structure statique stable au moyen des seules forces de Coulomb, cela montrait déjà la nécessité de l'existence de forces qui ne soient pas électriques.

Le but de l'exposé qui précède est celui-ci : nous ne devons pas être surpris de trouver, dans certains cas, des forces non-Coulombiennes agissant sur des porteurs de charges à l'intérieur d'un milieu conducteur. Dans ce cas, l'équilibre électrostatique sera atteint quand il existera dans le conducteur un champ électrique fini qui compense exactement l'influence des autres forces, quelle qu'en soit l'origine.

Après cet avertissement, nous allons commencer par l'étude d'un cas très ordinaire et important où nous n'avons pas à nous soucier de telles forces, le cas d'un conducteur homogène et isotrope. A l'intérieur d'un tel conducteur, à l'équilibre électrostatique, nous pouvons affirmer que le champ électrique est nul⁽²⁾. En effet, s'il ne l'était pas, les charges devraient bouger. Il s'ensuit que toutes les régions intérieures au conducteur, y compris les points à l'extrême voisinage de sa surface, doivent être au même potentiel. A notre connaissance, le potentiel peut subir une discontinuité entre l'extérieur et l'intérieur du conducteur (voir le problème 3.21). Mais, dans un conducteur homogène isotrope,

seule espèce que nous considérerons maintenant, la discontinuité est la même dans tout le conducteur. A l'extérieur du conducteur, le champ électrique n'est pas nul. La surface du conducteur est une surface équipotentielle pour ce champ.

⁽²⁾ Quand nous parlons de champ électrique à l'intérieur de la matière, nous parlons d'un champ moyen, calculé sur une région grande par rapport à la taille des détails de la structure atomique. Nous savons bien sûr, que des champs très élevés existent dans tous les matériaux, y compris les bons conducteurs, à l'échelle du noyau atomique. C'est bien un champ électrique, après tout, qui faisait dévier les particules alpha dont Rutherford, Geiger et Marsden bombardaient une fine feuille d'or (voir vol. 1, chap. 15, note historique I). Le champ électrique nucléaire ne fournit pas de contribution au champ moyen dans la matière, parce que, s'il est dirigé dans une direction d'un côte d'un noyau, il est dans la direction opposée de l'autre côté. Nous ne nous poserons pas maintenant la question de savoir comment ce champ moyen devrait être défini et pourrait être mesuré.

Imaginons que nous puissions changer à volonté un isolant en conducteur. (Cela n'a rien d'impossible -le verre devient conducteur quand on le chauffe; tout gaz peut être ionisé au moyen des rayons X. Sur la figure 3.1 a on a représenté un isolant non chargé placé dans le champ électrique produit par deux couches fixes de charges. Le champ électrique est le même à l'intérieur et à l'extérieur du matériau. (Un corps dense tel que le verre créerait en réalité une distorsion des lignes de force, effet



Fig. 3.2 Un système de trois conducteurs. Q_1 est la charge du conducteur 1, V_1 son potentiel, etc.

dense tel que le verre créerait en réalité une distorsion des lignes de force, effet que nous étudierons au chapitre 9, mais, ici, cela n'a pas d'importance.) On suppose maintenant que l'on a créé, d'une façon ou d'une autre, des charges mobiles (ou *ions*) rendant le corps conducteur. Les ions positifs sont attirés dans une direction par le champ, les ions négatifs le sont dans la direction opposée, comme on le voit sur la figure 3.1 *b*. Ils ne peuvent dépasser la surface du conducteur. En s'empilant sur celle-ci, ils commencent à créer eux-mêmes un champ électrique à l'intérieur du solide, champ qui tend à *annuler* le champ électrique de départ. Et en fait, les charges se déplacent jusqu'à ce que le champ d'origine soit *exactement* annulé à l'intérieur. La distribution finale des charges, dessinée sur la figure 3.1 *c*, est telle que le champ qu'elle crée et le champ des charges sources extérieures fixes s'ajoutent pour donner un champ électrique *nul* à l'intérieur du conducteur. C'est parce que ceci se produit « automatiquement » dans chaque conducteur que nous ne nous préoccuperons toujours que de la surface des conducteurs placés dans des champs extérieurs.

Cela dit, voyons ce que l'on peut dire d'un système de conducteurs chargés de façon variée et placés dans le vide. Sur la figure 3.2 on a dessiné quelques objets. Imaginons qu'ils soient métalliques et qu'ils soient maintenus en place par des isolants quasi-invisibles - comme les fils de soie de Stephen Gray. La charge totale de chaque objet, c'est-à-dire l'excès de la charge positive sur la charge négative, est fixe puisqu'il n'y a aucun moyen pour les charges de se déplacer entre les conducteurs. Appelons Q_k la charge totale du k-ième conducteur. On peut aussi caractériser chaque objet par une valeur partiel V_k de la fonction potentiel électrique.



Nous dirons que le conducteur n° 2 est « au potentiel V_2 ». Avec un système comme celui qui nous intéresse, où aucun des éléments est à l'infini, il est très commode d'attribuer le potentiel zéro aux points infiniment éloignés. Dans ce cas, V_2 est le travail par unité de charge nécessaire pour amener une charge test infinitésimale de l'infini et la placer n'importe où sur le conducteur nº 2. Remarquons, au passage, que c'est juste le genre de système pour lequel la charge

Fig. 3.3 (a) Le théorème de Gauss relie le module du champ électrique à la surface du conducteur à la densité de charge de surface (éq. 3.2.) (b) Coupe à travers la surface du conducteur et la boîte.

d'essai doit obligatoirement être très petite, comme nous l'avons dit dans la section 1.7.

Puisque la surface d'un conducteur est nécessairement une surface équipotentielle, le champ électrique, qui est donné par -grad V, doit être perpendiculaire à la surface en chaque point de celle-ci. En allant de l'intérieur à l'extérieur du conducteur, nous trouvons à la surface une variation brutale du champ électrique; **E** est non nul à l'extérieur de la surface, et est nul à l'intérieur. La discontinuité de **E** est due à la présence d'une charge de surface, de densité σ , que l'on relie directement à **E** par le théorème de Gauss. Nous pouvons utiliser une boîte plate entourant un élément de la surface (fig. 3.3) comme celle que nous avons prise pour étudier le disque chargé dans la section 2.6. Ici, il n'y a pas de flux à travers le « fond » de la boîte, qui est à l'intérieur du conducteur, et nous en concluons que $En = \sigma/\varepsilon_0$, où E_n est la composante du champ électrique normale à la surface. La charge de surface est due à la charge totale Q_k . C'est-à-dire que l'intégrale de surface de a sur tout le conducteur doit être égale à Q_k . En résumé, nous pouvons énoncer ce qui suit pour tout système de conducteurs, quelles que soient leurs formes et leur disposition :

 $V = V_k$ en tout point de la surface du k - ième conducteur.

En tout point situé juste à l'extérieur d'un conducteur, **E** est normal à sa surface, et $E_n = \sigma / \varepsilon_0$ où σ est (3.2) la densité locale de charge de surface

$$Q_k = \int_{S_k} \sigma d\mathbf{a} = \varepsilon_0 \int_{S_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$
(3.3)



Fig. 3.4 (a) Une couche plane isolée de charges de surface. On l'a déjà rencontrée sur la figure 1.23. Le champ valait Q/2t;() de chaque côté de la feuille par raison de symétrie.



(d) Si nous savons que le milieu d'un côté de la surface est un conducteur, nous savons que de l'autre côté \mathbf{E} doit être perpendiculaire à la surface et son module égal à /iro.



(3.1)

(c)

(b) S'il y a d'autres charges dans le système, tout ce que nous pouvons dire c'est que la variation de E,r au passage de la surface doit être de Q/co tandis que celle de Ey est nulle.

Beaucoup de champs autres que le champ de (a) ci-dessus pourraient avoir cette propriété. Deux tels exemples sont donnés en (b) et (c).

Comme (3.2) ne relie \mathbf{E} qu'à σ , densité locale de charge de surface, vous pouvez être tentés par la pensée que a est la source de E. Cc serait une erreur. \mathbf{E} est le champ total dû à toutes les charges du système, qu'elles soient proches ou lointaines, et la charge de surface du conducteur est obligée de « se réajuster » jusqu'à ce que la relation (3.2) soit satisfaite. La figure 3.4 montre bien la spécificité du cas des conducteurs par rapport aux autres distributions de charges en surface.

La figure 3.5 montre le champ et la distribution des charges dans le cas 'un système simple comme celui que nous avons mentionné plus haut. Il s'agit ici de deux sphères conductrices, l'une de rayon unité porte une charge de +1 unité, l'autre, légèrement plus grande, a une charge totale nulle. Remarquons que la densité de charge de surface n'est uniforme sur aucun des deux conducteurs. La sphère de

droite, de charge totale nulle, a une densité de charge de

surface négative dans les régions qui font face a l'autre sphère, et une densité de charge de surface positive sur le reste de sa surface. Les courbes en pointillé de la figure 3.5 indiquent les surface, équipotentielles, ou plutôt leur intersection avec le plan de la figure. Si nous nous éloignions plus des deux sphères, nous trouverions des surfaces équipotentielles presque sphériques, des lignes de force presque radiales, et le champ commencerait à beaucoup ressembler a celui créé par une charge ponctuelle de valeur +1 qui est justement la valeur de la charge totale du système.

La figure 3.5 illustre, tout au moins qualitativement, toutes les caractéristiques que nous avons décrites, mais elle présente un intérêt supplémentaire. En effet, bien que ce système soit très simple, on ne peut obtenir sa



Fig. 3.5 Le champ électrique autour de deux conducteurs sphériques, l'un avec une charge totale -f- 1, l'autre avec une charge nulle. Les courbes pointillées sont les intersections des surfaces équipotentielles avec le plan de la figure. Le potentiel est nul â l'infini.

solution mathématique exacte et on a dû construire la figure 3.5 à partir d'une solution approchée. En fait, le nombre d'arrangements géométriques de conducteurs à trois dimensions que l'on puisse traiter mathématiquement de façon exacte est lamentablement faible. On n'apprendrait donc que peu de physique si on se limitait à ces quelques exemples. Essayons de comprendre les caractères généraux que présente le problème mathématique posé par un système de conducteurs.

3.3 Le problème électrostatique dans toute sa généralité; le théorème d'unicité

Nous allons énoncer ce problème en termes de potentiel, car si nous pouvons trouver la fonction potentiel V, nous pouvons en tirer aussitôt E. Dans tout l'espace extérieur aux conducteurs, V doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles que nous avons introduite au chapitre 2, l'équation de Laplace : $\nabla^2 V = 0$. En coordonnées cartésiennes, elle s'écrit

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$
(3.4)

Le problème est de trouver une fonction solution de l'équation 3.4 qui satisfasse également aux conditions existant sur les surfaces des conducteurs. Ces conditions peuvent avoir été imposées de différentes manières. Par exemple, les potentiels V_k de chaque conducteur peuvent être fixés ou connus. (Dans un système réel on peut fixer les potentiels au moyen de connections permanentes à des piles ou à d'autres « alimentations » à potentiel constant.) Notre solution V(x, y, z) doit alors prendre les valeurs imposées en tout point de chacune des surfaces équipotentielles. L'ensemble de ces surfaces *limite* la région dans laquelle V est défini, si nous y incluons une grande surface « à l'infini », où V doit tendre vers 0. Parfois, la région qui nous intéresse peut être entièrement entourée d'une surface conductrice: nous pouvons alors donner à ce conducteur un potentiel arbitraire et ignorer tout ce qui est à l'extérieur. Dans l'un ou l'autre cas, nous avons un *problème aux limites* classique, dans lequel les valeurs que doit prendre la fonction aux limites sont fixées.

On peut, à l'inverse, avoir fixé la charge totale Q_k de chaque conducteur. (Nous ne pourrions pas fixer arbitrairement toutes les charges et torts les potentiels; le problème ne pourrait pas satisfaire toutes le conditions, il y en aurait trop.) En effet, en fixant les charges des conducteurs, on fixe les valeurs de l'intégrale de surface de grad V à la surface de chaque conducteur. Ceci donne au problème mathématique un aspect légèrement différent. On peut aussi avoir un « mélange » des deux types de conditions aux limites.

Il est intéressant de se poser le problème suivant : étant données certaines conditions aux limites, le problème a-t-il ou non une solution, en a-t-il plusieurs ? Nous n'allons pas chercher à répondre à cette question dans tous les cas possibles, mais nous limiter à un seul cas important, ce qui nous montrera comment traiter ce genre de problème et nous fournira un résultat fort utile. Supposons que le potentiel V_k de chaque conducteur ait été fixé, et que V tende vers zéro à l'infini, où sur un conducteur entourant tout le système. Nous allons démontrer que le problème avec ces conditions aux limites n'a pas plus d'une solution. Il semble évident physiquement qu'il existe une solution, parce que, si nous disposions réellement les conducteurs selon un certain plan en les connectant par des fils infiniment fins à des sources de potentiel appropriées, le système devrait se placer dans un certain état. Cependant, c'est une autre affaire que de prouver mathématiquement qu'il existe toujours une solution et nous ne nous y risquerons pas ici. Nous supposerons qu'il existe une solution V(x, y, z) et nous montrerons qu'elle est unique. La démonstration caractéristique de ce genre de problème, se fait de la façon suivante.

Supposons qu'il y ait une autre fonction $\Psi(x, y, z)$, solution de l'équation de Laplace, satisfaisant les mêmes conditions aux limites que V. L'équation de Laplace est linéaire. Ce qui veut dire que, si V et Ψ satisfont à l'équation 4, $V+\Psi$ ou toute combinaison linéaire telle que $C_1 V = C_2 \Psi$, où C_1 et C_2 sont des constantes, la satisfont aussi. En particulier la différence entre nos deux solutions, $V - \Psi$, doit satisfaire l'équation 3.4. Appelons W cette fonction

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) - \Psi(x, y, z)$$
(3.5)

Mais W ne satisfait pas aux conditions aux limites. En effet, à la surface de chaque conducteur, W est nulle, puisque V et Ψ prennent la même valeur, V_k à la surface du conducteur k. W est donc solution d'un autre problème électrostatique, où les conducteurs sont les mêmes, mais où ils sont tous maintenus au potentiel zéro. Nous pouvons maintenant affirmer que, s'il en est ainsi, W doit être nul en tout point de l'espace. Car, sinon, W devrait avoir un maximum ou un minimum en un certain point -puisqu'il s'annule à l'infini et sur les conducteurs. Si W a un extremum en un certain point, on peut alors considérer une sphère centrée sur ce point. Or, nous l'avons vu au chapitre 2, la moyenne sur une sphère d'une fonction solution de l'équation de Laplace est égale à sa valeur au centre de la sphère. Ceci est impossible si le centre est un maximum ou un minimum. W ne peut

donc avoir de maximum ou de minimum; il s'annule donc partout. Il s'ensuit que $V = \Psi$, partout, c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir *qu'une* solution qui satisfasse les conditions aux limites décrites.



Fig. 3.6 Le champ est nui partout à l'intérieur d'une boite fermée conductrice.

Nous pouvons maintenant démontrer aisément un autre fait remarquable. Dans l'espace contenu à l'intérieur d'un conducteur creux de forme quelconque, le champ électrique est nul, s'il n'y a pas de charges. Ceci est vrai quel que soit le champ à l'extérieur du conducteur. Nous sommes déjà avertis du fait que le champ est nul à l'intérieur d'une coquille sphérique uniforme isolée de charge, de la même façon que le champ de gravitation est nul à l'intérieur dune coquille sphérique de masse. Le théorème que nous venons d'énoncer est, d'un certain point, plus surprenant. Considérons la boîte de métal fermée figurée partiellement découpée sur la figure 3,6. Il y a des charges au voisinage de la boîte, et le champ extérieur a approximativement l'aspect indiqué. Sur la surface de la boîte, il y a une distribution de charge extrêmement inhomogène. Le champ en tout point de l'espace, y compris à l'intérieur de la boîte, est la somme du champ dû à cette distribution de charge et de celui dû aux charges extérieures. Il semble à peine croyable que la charge de surface puisse se répartir elle-même sur la boîte de façon assez compliquée pour que son champ annule exactement celui créé par les charges extérieures en tout point situé à l'intérieur de la boîte. Et c'est pourtant ce qui se passe, comme nous allons le démontrer en quelques lignes.

La fonction potentiel à l'intérieur de la boîte doit satisfaire l'équation de Laplace. La frontière tout entière de cette région, constituée par la boîte, est une équipotentielle, de sorte que nous avons $V = V_0$ constant en tout point de la surface de la boîte. V = 0 dans tout le volume de la boîte est une solution évidente. Mais il ne peut y avoir qu'une solution, d'après le théorème d'unicité, c'est donc celle-ci. « V = constante » entraîne $\mathbf{E} = 0$ puisque $\mathbf{E} =$ - grad V.

L'absence de champ électrique à l'intérieur d'une enceinte conductrice présente un intérêt pratique autant que théorique. C'est ce qui permet la réalisation de blindages électriques. Dans la plupart des applications pratiques, l'enceinte n'a pas besoin d'être complètement scellée. Si les parois sont percées de petits trous, ou faites de toile métallique, le champ sera extrêmement faible sauf au voisinage d'un trou. Un tube de métal aux extrémités ouvertes, blinde très efficacement, si sa longueur vaut plusieurs fois son diamètre, l'espace intérieur qui n'est pas trop près des extrémités. Nous ne considérons, bien sûr, que des champs statiques, mais ceci reste encore valable pour des champs électriques variant lentement.

3.4 Quelques systèmes simples de conducteurs



Dans cette section, nous étudierons quelques configurations particulièrement simples de conducteurs. Commençons par deux sphères métalliques concentriques, de rayon R_1 et R_2 , portant des charges totales Q_1 et Q_2 respectivement (fig. 3.7). Ceci ne doit pas nous paraître très nouveau. Car il est évident, par symétrie, que les charges doivent être réparties uniformément sur chaque sphère, ce qui nous ramène à un problème du chapitre 1 ! A l'extérieur de la plus grande sphère, le champ est celui créé par une charge ponctuelle de valeur $Q_1 + Q_2$. de sorte que V_1 , potentiel de la sphère extérieure, vaut

$$\frac{(Q_1+Q_2)}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

Fig. 3.7 Avec des charges Q_1 et Q_2 données sur les coquilles sphériques, le potentiel de la coquille intérieure est donné par l'éq. 6.

Le potentiel de la sphère intérieure est donné par

$$V_{2} = \frac{(Q_{1} + Q_{2})}{4\pi\varepsilon_{0}R_{1}} + \int_{R_{1}}^{R_{2}} -\frac{Q_{2}}{4\pi\varepsilon_{0}r^{2}}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \left(\frac{Q_{1}}{R_{1}} + \frac{Q_{2}}{R_{2}} + \frac{Q_{2}}{R_{1}} - \frac{Q_{2}}{R_{1}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \left(\frac{Q_{1}}{R_{1}} + \frac{Q_{2}}{R_{2}}\right)$$
(3.6)

V2 est aussi le potentiel de tous les points situés à l'intérieur de la sphère interne. Nous aurions pu aussi trouver

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} (Q_1 / R_1) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} (Q_2 / R_2)$$

par simple superposition : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(Q_1/R_1)$ est le potentiel à l'intérieur de la plus grande sphère si elle est seule

présente, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(Q_2/R_2)$ le potentiel à l'intérieur de la plus petite si elle est seule présente... Si les sphères portent des

charges égales en valeur absolue et de signes opposé, $Q_1 = Q_2$, ce n'est que dans l'espace compris entre elles que règne un champ électrique non nul.



Fig. 3.8 (a) Une charge ponctuelle Q au-dessus d'un plan conducteur infini.



(b) Le champ doit ressembler à ceci.



dans les conducteurs est celui constitué par une charge ponctuelle au voisinage d'un plan conducteur. Supposons que le plan xy soit la surface d'un conducteur s'étendant jusqu'à l'infini. Attribuons à ce plan le potentiel zéro. Prenons maintenant une charge positive Q et plaçons-la à une distance h au-dessus du plan sur l'axe z, comme sur la figure 3.8 a. A quelles sortes de champ et de distribution de charge de surface pouvons-nous nous attendre ? La charge positive Q doit attirer la charge négative mais celle-ci ne pourra quand même pas s'empiler avec une concentration infinie au pied de la perpendiculaire abaissée de Q sur le plan. Pourquoi ? Nous nous rappelons aussi que le champ électrique est toujours perpendiculaire à la surface du conducteur, en un point de cette surface. D'autre part, au voisinage de la charge ponctuelle Q, la présence du plan conducteur ne doit pas changer grand chose; les lignes de force doivent donc

L'un des système simples qui mettent bien en évidence la mobilité des charges

partir de Q comme si elles quittaient radialement la charge ponctuelle. Nous devons donc nous attendre à quelque chose du genre de la figure 3.8 b, à quelques détails près. Le tout sera bien sûr symétrique par rapport à l'axe z.

Mais comment résoudre réellement ce problème ? On y arrive en utilisant une « astuce », mais cette astuce est à la fois instructive et fréquemment utile. On prend un problème plus facile à résoudre, dont la solution, ou une partie de celle-ci, peut s'adapter à notre problème de départ. Ici le problème facile sera celui de deux charges égales en valeur absolue et de signes opposés, Q et -Q. Sur le plan médiateur du segment joignant les deux charges, plan indiqué par sa trace AA sur la figure 3.8 c, le champ électrique est partout perpendiculaire à ce plan. Si nous prenons la distance h de notre problème de départ comme distance de Q au plan, la partie supérieure du champ de la figure 3.8 c satisfait à toutes nos conditions : le champ est perpendiculaire au plan du conducteur et, au voisinage de Q, il tend vers le champ d'une charge ponctuelle.

Les conditions aux limites que nous avons ici ne sont pas tout à fait les mêmes que celles qui figuraient dans notre théorème d'unicité de la section précédente. Le potentiel du conducteur est fixé, mais nous avons dans le système une charge ponctuelle, où le potentiel tend vers l'infini. Nous pouvons considérer la charge ponctuelle comme le cas limite d'un petit conducteur sphérique sur lequel serait fixée la charge Q. Pour ces conditions aux limites « mixtes » - des potentiels fixés sur certaines surfaces, des charges totales fixées sur d'autres - il existe aussi un théorème d'unicité. Si noire solution « d'emprunt » satisfait les exigences de notre problème, ce doit donc être *la* solution.

La figure 3.9 représente la solution finale avec les lignes de force du champ au-dessus du plan et on y a suggéré la densité de charge. Nous pouvons calculer l'intensité du champ et sa direction en tout point en revenant au problème des deux charges, figure 3.8 c et en utilisant la loi de Coulomb. Considérons un point

(c) Le champ créé par une paire de charges opposées.

de la surface, à une distance r de l'origine. Le carré de sa distance à Q est r^2+h^2 et la composante z du champ dû à Q en ce point est - $Q \cos \theta/4\pi\epsilon_0 (r^2+h^2)$. La « charge image » - Q au-dessus du plan crée un champ de même composante z. Le champ électrique est donc donné ici par

$$E_{2} = \frac{-2Q}{4\pi\varepsilon_{0}(r^{2} + h^{2})}\cos\theta = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_{0}(r^{2} + h^{2})}\frac{h}{(r^{2} + h^{2})^{1/2}} = -\frac{Qh}{2\pi\varepsilon_{0}(r^{2} + h^{2})^{3/2}}$$
(3.7)

Ceci nous fournit la densité de surface

$$\sigma = \varepsilon_0 E_z = -\frac{Qh}{2\pi\varepsilon_0 (r^2 + h^2)^{3/2}}$$
(3.8)

La charge totale de surface doit valoir - Q. Comme vérification, nous pouvons intégrer a sur la surface, et voir si on obtient bien cela

Charge totale de surface =
$$\int_0^\infty \sigma \cdot 2\pi r \, \mathrm{d}r = -Q \int_0^\infty \frac{hr \, \mathrm{d}r}{\left(h^2 + r^2\right)^{3/2}} = -Q \tag{3.9}$$



Fig. 3.9 Quelques lignes de force pour la charge au-dessus du plan. La valeur du champ à la surface, donnée par l'équation 3.7, détermine la densité de charge de surface a.



Fig. 3.10 (a) Coupes à travers les surfaces équipotentielles de deux charges de même valeurs absolues et de signes opposes.

(b) Deux telles surfaces métallisées. Des conducteurs ayant exactement cette forme et cette disposition, et des charges Q et -Q créeraient exactement le même champ dans l'espace qui leur est extérieur.

La méthode de résolution que nous venons d'utiliser est appelée traditionnellement méthode des images. On considère la charge négative fictive placée à une distance hau-dessous du plan du conducteur comme « l'image » de la charge ponctuelle Q, un peu comme une image virtuelle derrière un miroir. La force électrique qui agit sur la charge Q, due à l'attraction par la charge de surface, est égale à la force que créerait une charge -Q placée à l'endroit de l'image. Attention, l'origine réelle de cette force est la charge de surface.

L'analogie avec le miroir n'est ni très juste ni très utile. Il vaudrait mieux considérer cette méthode comme un exemple d'une approche plus générale qu'on pourrait appeler « ajuster les limites à la solution ». Pour expliquer

ce que nous entendons par cela, considérons quelques unes des surfaces équipotentielles dans le cas de deux charges égales en valeur absolue et de signe opposé, représentée sur la figure 3.10 a. L'une d'entre elles est un plan. Les autres sont des surfaces fermées, dont aucune n'est sphérique, mais que l'on peut localiser, si besoin est, par un calcul élémentaire. Si maintenant nous prenons deux quelconques de ces surfaces et construisons des corps métalliques ayant exactement leur forme et leur disposition relative, comme sur la figure 3.10 b, nous connaîtrons déjà la solution exacte donnant le champ électrostatique créé par deux tels conducteurs chargés ! Ce sera le champ créé par les deux charges ponctuelles dans l'espace extérieur aux deux équipotentielles considérées. Malheureusement, personne ne sera intéressé par des électrodes ayant juste cette forme, mais ce pourra être une méthode de résolution approchée pour des sphères.

Nous pourrions nous mettre à passer en revue les surfaces équipotentielles d'autres systèmes simples, en cherchant ainsi les cas qui peuvent être les plus utiles. On pourrait aussi appeler cette méthode « une solution à la recherche d'un problème ». Le problème 3.22 donne un bon exemple de son utilisation. Maxwell a très bien décrit la situation : « on voit donc que ce que l'on pourrait appeler naturellement le problème inverse, à savoir, déterminer la forme des conducteurs, étant donnée l'expression du potentiel, est bien plus abordable que le problème direct : déterminer le potentiel, étant donnée la forme des conducteurs »⁽³⁾.

3.5 Condensateurs et capacité



Fig. 3.11 (a) Condensateur à plaques parallèles.



Fig. 3.12 La vraie capacité de plaques parallèles circulaires, comparée aux résultats prédits par l'éq. 3.11, pour différents rapports de l'écart des plaques à leur rayon. La correction due à l'effet de bord peut se représenter en écrivant la charge Q sous la forme $Q = (S (V_1 - V_2)/e) f$

Pour des plaques circulaires, le facteur f dépend de a/R de la façon suivante

e/R	f
0,2	1,286
0,1	1,167
0,05	1,094
0,02	1,042
0,01	1,023



(b) Coupe transverse de (a) montrant les lignes de force

Considérons deux plaques conductrices identiques, parallèles l'une à l'autre, distantes de *e*, comme sur la figure 3.11 *a*. Soit *S* la surface de chaque plaque, on suppose qu'il y a une charge *Q* sur une plaque et une charge -Q sur l'autre. V_1 et V_2 sont les valeurs du potentiel sur chacune des plaques. La figure 3.11 *b* représente en coupe les lignes de forces du système. Loin des bords, le champ régnant entre les plaques est pratiquement uniforme. En le considérant comme partout uniforme, son module doit être $(V_1 - V_2)/e$. La densité de charge de surface correspondante sur la face interne de l'une des plaques est

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{\varepsilon_0 (V_1 - V_2)}{e} \tag{3.10}$$

Si nous pouvons négliger les variations de E et donc de σ qui interviennent principalement près du bord des plaques, nous pouvons écrire la charge totale d'une plaque sous la forme simple

$$Q = \frac{S\varepsilon_0 (V_1 - V_2)}{e} \text{ (en négligeant les effets de bord)}$$
(3.11)

Nous devons nous attendre à ce que l'équation 3.11 nous donne un résultat d'autant plus exact que le rapport de l'écart e entre les plaques à leur dimension latérale est plus petit. Bien sûr, si nous voulions résoudre exactement le problème électrostatique, en tenant compte des bords, pour une forme particulière de plaque, nous pourrions remplacer l'équation 3.11 par une formule exacte. Pour montrer combien l'équation 3.11 représente une bonne approximation, on donne sur la figure 3.12 la liste des valeurs du facteur correctif f par lequel on doit multiplier la charge Q donnée par cette équation pour obtenir le résultat exact dans le cas de deux disques circulaires d'écart variable. La charge totale est toujours un peu plus grande que ne le prédit

⁽³⁾ James Clerk Maxwell, *Treatise on electricity and Magnetism* vol 1, chap. VII (3^e éd., Oxford University Press, 1891, reimp. Dover, New York, 1954), Trad. *Traité d'Electricité et de Magnétisine*, vol. I, chap. VII IGauthier-Villars, Paris. 1885).

Chaque étudiant en physique devrait, de temps en temps, jeter un oeil sur le livre de Maxwell. Le chapitre VII est un bon endroit pour s'y plonger dans le sujet que nous traitons ici en ce moment. A la fin du volume 1, on trouve quelques superbes diagrammes de champs électriques ainsi que les raisons que donne Maxwell de leur choix (elles se trouvent un peu après la citation ci-dessus). On peut aussi penser qu'il prit un certain plaisir à les tracer et à admirer leur élégance.

l'équation 3.11. Ceci semble raisonnable, car si l'on regarde la figure 3.11 *b*, on voit bien qu'il doit y avoir un excès de charge au bord et même quelques charges sur les faces extérieures près du bord.

Ce qui nous intéresse ce ne sont pas de telles corrections de détail mais les propriétés générales d'un système de deux conducteurs. Notre paire de plaques constitue un élément très courant dans les systèmes électriques, un condensateur. Un condensateur est composé simplement de deux conducteurs voisins, à des potentiels différents, portant des charges différentes. Nous sommes intéressés par la relation entre la charge Q portée par l'une des plaques et la différence de potentiel entre celles-ci. Pour le système particulier auquel l'équation 3.11 s'applique, le quotient $Q/(V_1 - V_2)$ est $\varepsilon_0 S/e$. Même si ceci n'est qu'approché, il est clair que la formule exacte ne dépendra que de la taille et de la disposition géométrique des plaques. On voit donc que pour une paire de conducteurs fixes, le rapport de la charge à la différence de potentiel est constant. Nous appellerons cette constante la capacité du condensateur et la symboliserons par C.



Fig. 3.13 Un condensateur dans lequel un des conducteurs est entouré par l'autre.



Fig. 3.14 Un condensateur asymétrique.

$$Q = C/(V_1 - V_2) \tag{3.12}$$

La capacité du condensateur à plaques (ou armatures) parallèles, est donc donné, en négligeant les effets de bord par

$$C = \frac{\varepsilon_0 S \text{ (en m}^2)}{e \text{ (en m)}}$$
(3.13)

En unités M.K.S.A., avec la charge électrique exprimée en coulombs, et la différence de potentiel en volts, l'unité de capacité est la capacité d'un condensateur qui a un coulomb sur une de ses plaques quand leur différence du potentiel vaut un volt. On l'appelle le *Farad*. Un condensateur de 1 farad serait gigantesque. Pour le réaliser avec des plaques séparées par 1 mm de vide, il faudrait prendre des plaques ayant une surface d'environ 100 km²⁽⁴⁾. Aussi utilise-t-on plus communément le *microfarad* (μ F) et le *micromicrofarad* (μ µF). Cette dernière valant 10⁻¹² farads, est encore appelée le picofarad (pF).

Toute paire de conducteurs, quelle que soit leur forme et leur position, peut être considérée comme un condensateur. Il se trouve simplement que le condensateur est très utilisé et qu'il est l'un des système pour lesquels il est aisé de faire un calcul approché de la capacité. La figure 3.13 montre deux conducteurs, l'un à l'intérieur de l'autre. Nous pouvons aussi appeler condensateur un tel système. Dans la pratique,

il faudrait prévoir quelque support mécanique pour le connecteur intérieur, mais cela

ne nous concerne pas. Il faudrait aussi amener ou retirer les charges électriques des conducteurs, des fils sont aussi des corps conducteurs. Puisqu'un fil sortant du conducteur intérieur que nous numéroterons 1, passe nécessairement dans l'espace compris entre les conducteurs, il risque de causer quelque perturbations au champ électrique qui y règne. Pour négliger cela, nous devons supposer que les fils de connexion sont extrêmement fins. Ou nous pouvons imaginer qu'on a retiré les fils avant de déterminer les potentiels.

Dans ce système, nous pouvons distinguer trois charges : Q_1 , charge totale du conducteur intérieur; $Q_2^{(i)}$, quantité de charge sur la surface intérieure du conducteur extérieur ; $Q_2^{(e)}$ charge sur la surface externe du conducteur extérieur. Remarquons d'abord que $Q_2^{(i)}$ doit être à $-Q_1$. Nous pouvons dire ceci parce que le flux à travers une surface telle que *S* sur la figure 3.13, qui contient ces charges et aucune est nécessairement nul. En effet, la surface S étant à l'intérieur d'un conducteur, le champ électrique y est nul.

⁽⁴⁾ Il existe, bien sûr, des façons de fabriquer des condensateurs de haute capacité beaucoup plus compacts. Vous pouvez acheter facilement une capacité de un microfarad dans un magasin de pièces détachées électroniques et le ramener chez vous dans votre poche. Dans les systèmes biologiques, la paroi d'une cellule constitue une couche isolante électrique séparant l'intérieur de la cellule du milieu extérieur liquide. Cette membrane se comporte électriquement comme une capacité de, typiquement, 1 F/cm² de surface de membrane. Quel « écart entre plaques » ceci implique-t-il? (En réalité, la capacité dépend aussi de la constante diélectrique, c'est-à-dire de la polarisabilité du milieu situé entre les plaques. On en parlera au Chap. 9.)

C'est évidemment la valeur de Q_1 qui détermine de façon unique le champ électrique régnant entre les deux conducteurs et détermine donc la différence de leurs potentiels $V_1 - V_2$. C'est pour cette raison que, si nous considérons les deux corps conducteurs comme les « plaques » d'un condensateur, c'est seulement Q_1 ou son opposé $Q_2^{(i)}$ qui intervient dans la définition de la capacité. La capacité vaut

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

 $Q_2^{(e)}$, dont dépend V_2 , est ici sans intérêt. En fait, le fait qu'un des conducteurs entoure complètement l'autre rend la capacité indépendante de tout ce qui est à l'extérieur. Si, au lieu de cela, nous avions affaire à deux plaques de condensateur non symétriques, dont l'une n'entoure pas l'autre - quelque chose comme sur la figure 3.14, par exemple - nous pourrions être ennuyés par la question suivante quelle charge joue-t-elle le rôle de Q_1 , permettant ainsi de définir la capacité ? C'est la quantité de charge que l'on devrait transférer du conducteur 1 au conducteur 2 (en gardant donc constante la somme des charge, des deux conducteurs) pour que leurs potentiels soient les mêmes.



Fig. 3.15 Un état général de ce système peut être considéré comme la superposition de trois états (a-c) dans chacun desquels tous les conducteurs sauf un sont au potentiel zéro.

3.6 Potentiels et charges sur plusieurs conducteurs

Nous venons de nous attaquer à un morceau d'un problème plus général, celui de trouver les relations qui existent entre les charges et les potentiels d'un nombre quelconque de conducteurs ayant titre configuration donnée. Le condensateur à deux conducteurs n'en est qu'un cas particulier. Nous allons, même si cela vous étonne, pouvoir dire quelque chose d'utile à propos du cas général. Nous utiliserons pour cela le théorème d'unicité et le principe de superposition. Pour nous fixer les idées, considérons trois conducteurs séparés, tous trois entourés par une enceinte conductrice, comme sur la figure 3.15. Nous pouvons choisir le potentiel de l'enceinte égal à zéro: par rapport à cette référence, les potentiels de nos trois conducteurs seront, pour un état donné du système V_1 V_2 et V_3 . Le théorème d'unicité nous assure que V_1 , V_2 et V_3 , étant donnés, le champ électrique est déterminé dans tout le système. Il s'ensuit que les charges Q_1 , Q_2 et Q_1 sur chacun des conducteurs sont aussi déterminées de façon unique.

Nous n'avons pas besoin de nous soucier de la charge sur la surface intérieure de l'enceinte conductrice, puisqu'elle doit toujours, être égale à -($Q_1 + Q_2 + Q_3$). Si sous le préférez, vous pouvez laisser « l'infini » jouer le rôle de cette enceinte en imaginant qu'elle s'est dilatée sans limite. Nous l'avons gardée sur le dessin parce qu'elle rende le processus de transfert de charge plus facile à suivre pour certains.

Parmi tous les états possibles du système, il en est où V_1 et V_3 sont tous deux nuls. Nous pouvons réaliser cette condition en reliant les conducteurs 2 et 3 à l'enceinte au potentiel zéro, comme indiqué sur la figure 3.15*a*. Comme auparavant, nous devons supposer que les fils de connexion sont si fins que toute charge qu'ils puissent porter est négligeable. En fait, nous ne nous préoccupons par réellement de la façon dont a été réalisée la condition ci-dessus. Dans un tel état, que nous appellerons l'état I, le champ électrique dans tout le système et la charge sur chaque conducteur sont déterminés par la valeur de V_1 . En outre, si on doublait V_1 , cela entraînerait le doublement du module du champ en tout point et donc le doublement de chacune des charges Q_1 , Q_2 et Q_3 . C'est-à-dire que, si $V_2 = V_3 = 0$, chacune des trois charges est proportionnelle à V_1 . Mathématiquement, ceci s'écrit

$$Etat I V_2 = V_3 = 0$$
 $Q_1 = C_{11}V_1; Q_2 = C_{21}V_1; Q_3 = C_{31}V_1$ (3.15)

Les trois constantes, C_1 , C_2 , et C_3 ne peuvent dépendre que de la forme et de la disposition des corps conducteurs.

Nous pouvons traiter de la même façon les états où V_1 et V_3 sont nuls, nous appellerons II un tel état (fig. 3.15 *b*). Nous devons trouver de nouveau une relation linéaire entre le seul potentiel non nul, V_2 , dans ce cas, et les diverses charges.

$$\begin{array}{c}
Etat \ II \\
V_1 = V_3 = 0
\end{array} \middle\} \ Q_1 = C_{12}V_2 \ ; \ Q_2 = C_{22}V_2 \ ; \ Q_3 = C_{32}V_2 \ (3.16)$$

Finalement, quand V_1 et V_2 ont maintenus nuls, le champ et les charges sont proportionnels à V_3

$$\begin{array}{c}
Etat \ III \\
V_1 = V_2 = 0
\end{array} \left\{ \begin{array}{c}
Q_1 = C_{31}V_3 \ ; \ Q_2 = C_{23}V_3 \ ; \ Q_3 = C_{33}V_3
\end{array} \right. (3.17)$$

Mais la superposition des trois états I, II et III est aussi un état d'équilibre possible pour le système. Le champ électrique en tout point est alors la somme vectorielle des champs électriques en ce point dans les trois cas, tandis que la charge électrique d'un conducteur est la somme de celles qu'il portait dans les trois cas. Dans ce nouvel état, les potentiels sont V_1 , V_2 et V_3 aucun d'eux n'étant nécessairement nul. En bref, nous axons l'état le plus général. On obtient les relations entre charges et potentiels simplement en ajoutant les équations 3.15 à 3.17

$$Q_{1} = C_{11}V_{1} + C_{12}V_{2} + C_{13}V_{3}$$

$$Q_{2} = C_{21}V_{1} + C_{22}V_{2} + C_{23}V_{3}$$

$$Q_{3} = C_{31}V_{1} + C_{32}V_{2} + C_{33}V_{3}$$
(3.18)

Il apparaît que le comportement électrique de ce système est régi par les neuf constantes C_{11} , C_{12} ... C_{33} . En fait, il suffit de six constantes, car on peut prouver que, quel que soit le système, $C_{12} = C_{21}$, $C_{13} = C_{31}$ et $C_{23} = C_{32}$. La raison de ceci n'est pas du tout évidente. Le problème 3.27 en propose une démonstration basée sur la conservation de l'énergie, mais vous aurez besoin pour le faire d'une idée introduite dans la section 3.7. Les coefficients C_{ik} , des équations 3.18 sont appelé, coefficients de capacité. Il est clair que notre démonstration peut s'étendre à un nombre quelconque de conducteurs. Remarquons au passage que ce qui a été défini plus haut comme la capacité d'un condensateur à deux plaques n'est pas la même chose que C_{11} (ni C_{22} ou C_{12}) mais est bien sûr relié à ces coefficients.

On peut résoudre un ensemble d'équations tel que (3.18) en exprimant les V_i en fonction des Q_j . C'est-à-dire qu'on obtient un ensemble de relations linéaires équivalentes de la forme

$$V_{1} = P_{11}Q_{1} + P_{12}Q_{2} + P_{13}Q_{3}$$

$$V_{2} = P_{21}Q_{1} + P_{22}Q_{2} + P_{23}Q_{3}$$

$$V_{3} = P_{31}Q_{1} + P_{32}Q_{2} + P_{33}Q_{3}$$
(3.19)

On appelle coefficients de potentiel les coefficients P_{ik} ; on pourrait les calculer à partir des C_{ik} ou inversement.

Nous avons ici un exemple simple des types de relations que nous pouvons nous attendre à voir gouverner tout système physique linéaire. Des relations analogues interviennent dans l'étude des structures mécaniques (elles relient les efforts intérieurs aux charges), dans l'étude des circuits électriques (elles relient les différences de potentiels aux courants) et, de façon générale, chaque fois qu'un principe de superposition s'applique.

3.7 Énergie emmagasinée dans un condensateur

Considérons un condensateur de capacité *C*, avec une différence de potentiel V_{12} entre ses plaques. La charge *Q* est égale à *C* V_{12} . Il y a une charge *Q* sur une plaque et une charge - *Q* sur l'autre. Supposons que nous augmentions la charge de *Q* à Q = dQ en transportant une charge positive dQ de la plaque négative à la plaque positive, donc en travaillant contre la différence de potentiel V_{12} . Le travail que l'on doit fournir est $dW = V_{12} dQ = Q dQ/C$. Donc pour charger le condensateur, à partir d'un état initial où il n'est pas chargé, à une charge finale Q_f , il faut fournir le travail

$$W = 1/C \int_{Q=0}^{Q_f} Q \, \mathrm{d}Q = Q_f^2 / 2C \tag{3.20}$$

C'est l'énergie U qui est « emmagasinée » dans le condensateur. On peut aussi l'écrire

$$U = \frac{1}{2}CV_{12}^2 \tag{3.21}$$

Pour le condensateur à plaques parallèles de surface de plaques S et de distance a entre les plaques, nous trouvons une capacité $C = \varepsilon_0 S/e$ et un champ électrique $E = V_{12}/e$. L'équation 3.21 est donc aussi équivalente à

$$U = 1/2(\varepsilon_0 S/e)(Ee)^2 = (\varepsilon_0 E^2/2) \cdot Se = (\varepsilon_0 E^2/2) \cdot \text{volume}$$
(3.22)

Ceci est en accord avec notre formule générale, équation 2.36, donnant l'énergie emmagasinée dans un champ électrique⁽⁵⁾.

3.8 Autres approches du problème aux limites

Il serait faux de donner l'impression qu'il n'y a pas de méthodes générales pour résoudre le problème de trouver une solution de l'équation de Laplace qui satisfasse à des conditions aux limites. Bien que nous ne puissions nous attarder trop longtemps sur cette question, nous allons mentionner trois approches aussi utiles qu'intéressantes que vous rencontrerez très probablement dans vos futures études de physique ou de mathématiques appliquées.

Tout d'abord, une élégante méthode d'analyse, appelée transformation conforme, est basée sur la théorie des fonctions de variable complexe. Malheureusement, elle ne s'applique qu'aux systèmes à deux dimensions. Ce sont des systèmes dans lesquels V ne dépend que de x et y, par exemple; toutes les limites conductrices sont alors des cylindres (au sens général) de génératrices parallèles à Oz. L'équation de Laplace se réduit alors à

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{3.23}$$

avec des valeurs aux limites données sur certaines courbes du plan xy. Beaucoup de systèmes d'intérêt pratique sont comme cela, ou suffisamment proches de ce modèle pour que la méthode soit utile, indépendamment de son intérêt mathématique intrinsèque. Par exemple, la solution exacte du potentiel autour de deux bandes parallèles est aisément obtenue par la méthode de la transformation conforme. Les lignes de forces et les équipotentielles sont dessinées en section transverse sur la figure 3.16. Ceci nous donne le champ au bord pour tout condensateur à plaques parallèles dont la dimension des plaques est grande par rapport à la distance entre les plaques. Le champ figuré sur la figure 3.11 b a été dessiné à partir d'une telle solution. Vous serez capable d'appliquer cette méthode quand vous aurez étudié en mathématiques les fonctions d'une variable complexe,

En second lieu, nous devons citer une méthode numérique pour trouver des solutions approchées du potentiel électrostatique avec des conditions aux limites données. Très simple et presque toujours applicable, cette méthode est basée sur une propriété spéciale des fonctions harmoniques avec laquelle nous sommes déjà familiers : la valeur d'une fonction en un point est égale à sa valeur moyenne sur le voisinage du point. Dans cette méthode, on assigne au départ à la fonction potentiel des valeurs en des points discrets, y compris sur les limites où se trouvent les seuls points où les valeurs ne soient pas arbitraires. On ajuste alors les valeurs aux points qui ne font pas partie des limites jusqu'à ce que chaque valeur soit égale à la moyenne des valeurs aux points voisins. On pourrait en principe faire ceci en résolvant un grand nombre d'équations simultanées - autant qu'il y a de points intérieurs aux limites. Mais on peut obtenir beaucoup plus simplement une solution approchée en remplaçant systématiquement chaque valeur par la valeur moyenne des points voisins et en répétant ce processus jusqu'à ce que les variations ainsi obtenues deviennent négligeables. C'est ce qu'on appelle la *méthode* de relaxation. Sa seule limite est la patience du calculateur, et cela ne compte plus depuis l'introduction des calculateurs électroniques rapides, auxquels cette méthode est parfaitement adaptée. Si vous voulez voir comment cela marche, les problèmes 3.29 et 3.30 sous fourniront tic bons exemples.

⁽⁵⁾ Tout ceci s'applique au « condensateur à vide », constitué par des conducteurs séparés par des espaces vides. Comme vous l'avez certainement vu au laboratoire, la plupart des condensateurs utilisés dans les circuits électriques sont remplis d'isolant ou « diélectrique ». Nous étudierons son effet au chap. 9.

La méthode *variationnelle* constitue une troisième méthode de résolution approchée des problèmes de conditions aux limites. Elle met en jeu une idée que nous rencontrerons dans beaucoup de domaines de la physique, allant de la dynamique newtonienne à la mécanique en passant par l'optique. En électrostatique, le principe utilisé se présente de la façon suivante. Nous avons déjà appris que l'énergie associée à un champ électrostatique peut s'exprimer par

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 \,\mathrm{d}r \tag{3.24}$$

Si vous avez fait le problème 2.19, vous avez trouvé que, dans ce cas très simple, la charge sur une surface conductrice à potentiel constant (constituée ici de deux sphères reliées par un fil) se répartit de façon à *minimiser* l'énergie emmagasinée dans le champ électrique tout entier. Ceci est tout à fait général. C'est-à-dire que, pour tout système de conducteurs, portés à des potentiels fixes variés, la charge se déplacera sur chaque conducteur jusqu'à ce que l'énergie emmagasinée dans le champ soit aussi petite que possible. Ceci est presque évident si nous remarquons qu'à chaque diminution de l'énergie totale du champ, de l'énergie est disponible pour assurer le déplacement des charges⁽⁶⁾. La raison pour laquelle la surface de l'eau dans un bol est plane est essentiellement la même.

Considérons maintenant la fonction potentiel V(x, y, z) dans une certaine région délimitée par un certain nombre de limites conductrices portées à des potentiels donnés. Le V(x, y, z) correct, c'est-à-dire la solution de $\nabla^2 V = 0$ qui vérifie les conditions aux limites du potentiel se distingue de toutes les autres fonctions $\psi(x, y, z)$, qui satisfont les mêmes conditions aux limites, mais ne satisfont pas l'équation de Laplace, par le fait que l'énergie emmagasinée est *plus petite* pour *V* que pour ψ . Si l'on exprime l'énergie en fonction du potentiel, comme on a fait dans l'équation 2.38, on a



Fig. 3.16 Lignes de force et équipotentielles dans le cas de deux bandes plates conductrices infiniment longues.

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \left| \nabla V \right|^2 \,\mathrm{d}\upsilon \tag{3.25}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le problème des conditions aux limites d'une façon nouvelle sans mentionner le Laplacien. La fonction potentiel V est la fonction qui, *parmi toutes les fonctions satisfaisant les conditions aux limites, minimise l'intégrale de l'équation 3.25*. On peut donc obtenir au moins une solution d'un problème aux limites en essayant un ensemble de fonctions, qui prennent toutes les bonnes valeurs aux limites, et en gardant celle qui donne la plus petite valeur de U. Ou encore on peut essayer une fonction avec un ou deux paramètres ajustables et utiliser ces « boutons de réglage » mathématiques pour minimiser U. La méthode s'avère extrêmement puissante pour évaluer l'énergie U, qui est souvent la quantité physique la plus importante à connaître. Comme U est minimum pour le V correct, elle est peu sensible aux écarts de V autour de sa valeur correcte. Le problème 3.32 montre bien la simplicité et la précision de la méthode variationnelle.

Il y a dans le principe variationnel quelque chose de plus d'importance pour nous que son utilité dans les calculs; il représente une autre formulation de la loi fondamentale de l'électrostatique. La reformulation des lois physiques sous forme de principes variationnels est une entreprise qui s'est souvent montrée féconde et enrichissante. Le professeur R. P. Feynman, déjà connu pour ses travaux dans ce domaine, a donné une très vivante exposition élémentaire des principes variationnels dans un chapitre de son livre : Le cours de Physique de Feyman, Vol. II. chap. 19 (Addison Wesley, Reading, Mass. U.S.A., 1970).

Problèmes

⁽⁶⁾ En parlant ainsi, nous pensons à un déplacement de charge entrainant une dissipation d'énergie. C'est ce qui arrive généralement. 5'il n'en était pas ainsi, un système qui ne serait pas à l'origine à l'équilibre ne pourrait perdre de son énergie pour atteindre l'état d'équilibre. Que pensez-vous qu'il arrive dans ce cas ?
- 3.1 Un observateur muni d'un appareil capable de mesurer le champ électrique E s'est placé à une certaine distance d'une charge ponctuelle fixe q. On abaisse, au moyen d'un cordon isolant, un morceau de tube métallique non chargé jusqu'à ce qu'il entoure la charge ponctuelle. Comment ceci affecte-t-il le champ électrique que mesure l'observateur? Justifiez votre réponse. Si vous êtes dans un laboratoire lui-même situé à l'intérieur d'une grande enceinte en cuivre, pouvez-vous dire si on déplace ou non des charges a l'extérieur de l'enceinte ? Justifiez votre réponse. .
- 3.2 Un conducteur sphérique *A* contient deux cavités sphériques. La charge totale du conducteur lui-même est nulle. On place cependant une charge ponctuelle q_b au centre d'une cavité et une charge ponctuelle q_c au centre de l'autre. Une autre charge q_d est placée à une grande distance *r* de l'ensemble. Quelle force agit sur chacun des quatre objets *A*, q_b , q_c , q_d ? Parmi vos réponses, y en a-t-elles qui soient seulement approchées, et valables seulement quand r est grand?
- 3.3 Supposons qu'après qu'on ait réalisé les conditions de la figure 3.1 *c*, on rende de nouveau isolant l'objet de la figure, en laissant les charges en place. Après cela, on retire les couches de charge positive et négative qui produisaient le champ électrique au départ. A quoi ressemble le champ électrique restant, à l'intérieur et à l'extérieur du solide ?
- 3.4 C'est un cliché bien connu des amateurs de science fiction et le rêve de beaucoup d'inventeurs sans culture scientifique que *l'écran gravitationnel*, système qui « arrêterait » la gravitation de la façon dont une feuille métallique semble « arrêter » le champ électrique. Réfléchissez à la différence entre une source gravitationnelle et une source électrique. Remarquez que les parois de la boite de la figure 3.6 n'arrêtent pas le champ des sources extérieures, mais permettent seulement aux charges de surface de créer un champ compensateur. Pourquoi ne pourrait-on imaginer quelque chose d'analogue pour la gravitation ? De quoi auriez-vous besoin pour le réaliser ?
- 3.5 Dans le champ de la charge ponctuelle au-dessus du plan de la figure 3.9, suivez une ligne de force qui part horizontalement de la charge ponctuelle, c'est-à-dire parallèlement au plan; où rencontrera-t-elle la surface du conducteur? (Vous n'avez besoin que du théorème de Gauss et d'une intégrale simple).
- 3.6 En résolvant le problème de la charge ponctuelle et du plan conducteur, nous avons, en fait, résolu chaque problème qui puisse être construit à partir de celui-ci par superposition. Par exemple, supposons que nous ayons un fil rectiligne uniformément chargé de charge 3 x 10⁻⁵ C par mètre de longueur, placé parallèlement à la terre à une hauteur de 5 mètres. Quel est le module du champ à la surface de la terre juste au-dessous du fil ? Quelle est la force électrique agissant sur le fil par unité de longueur ? Pouvez vous imaginer d'autres configurations électriques simples que l'on puisse construire à partir de ces éléments ?
- 3.7 Une charge Q est placée à une hauteur d au-dessus d'un plan conducteur juste comme sur la figure 3.8 a. Un étudiant, à qui on demande de prédire la quantité de travail nécessaire pour éloigner jusqu'à l'infini cette charge du plan, répond que c'est le même travail que celui nécessaire pour envoyer à l'infini deux charges Q et Q initialement séparées par

une distance h, donc que $W = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(2h)}$. Un autre étudiant calcule la force qui agit sur la charge quand on la

déplace, intègre Fdx et obtient un résultat différent. Qu'obtient le second étudiant et qui a raison ?

- 3.8 Trois plaques conductrices sont placées parallèlement les unes aux autres comme indiqué sur la figure. Les plaques extérieures sont reliées par un fil. La plaque intérieure est isolée et porte une charge de 3 10⁻⁵ C/m². Dans quel rapport cette charge doit-elle se diviser en charge de surface σ_1 sur une face de la plaque intérieure et en charge de surface σ_2 , sur l'autre face de la même plaque ?
- 3.9 On place deux charges +q et deux charges -q aux sommets d'un carré, les charges identiques étant diagonalement opposées les unes aux autres. Montrez qu'il y a deux surfaces équipotentielles qui sont des plans. Obtenez de cette façon et tracez qualitativement le champ créé par une charge ponctuelle isolée placée symétriquement dans l'intérieur de l'angle formé en pliant une feuille de métal à 90°. Quelles configurations de plans et de charges ponctuelles peut-on résoudre de cette façon et lesquelles ne peut-on pas ? Que faut-il dire du problème d'une charge ponctuelle placée sur le plan bissecteur d'un dièdre de 120° formé par deux plaques conductrices ?
- 3.10Une fine feuille de métal est placée entre les plaques d'un condensateur a plaques parallèles et parallèlement à celles-ci. Que se prise-t-il si la feuille est reliée par un fil à l'une des plaques?
- 3.11Un condensateur de 100 pf est chargé sous 100 volts. Après que l'on ait débranché la source de tension, le condensateur est branché en parallèle sur un autre condensateur. Si la différence de potentiel aux bornes de l'ensemble

est de 30 volts, quelle est la capacité du second condensateur ? Quelle a été la perte d'énergie et comment s'est-elle effectuée ?

- 3.12Quelle est la capacité *C* d'un condensateur constitué par deux sphères creuses concentriques, le rayon intérieur de l'une étant r_1 , le rayon extérieur de l'autre étant r_2 ? Vérifiez votre résultat en reliant au cas du condensateur à plaques parallèles le cas limite où $r_2 r_1 \ll r_1$.
- 3.13Soit V₁₂ la différence de potentiel entre les armatures du condensateur sphérique du problème précédent. Trouver une

expression pour le champ électrique, en fonction du rayon. Calculez l'énergie totale du champ $\int \frac{(\mathcal{E}_0 E^2)}{2} dv$ et

montrez qu'elle est égale à
$$\frac{CV_{12}^2}{2}$$

- 3.14Par capacité d'une sphère isolée, nous entendons le quotient de la charge du conducteur par son potentiel, le zéro du potentiel étant à l'infini. Quelle est la capacité d'un conducteur sphérique ? Calculer la capacité de la terre, en microfarads
- 3.15Imaginez qu'un condensateur sphérique tel que celui décrit dans le problème 3.12 soit mis en orbite autour de la terre comme un satellite? Il n'y a aucune liaison mécanique entre les sphères intérieure et extérieure. Le vide est parfait, et il n'y a pas de frottements sur la sphère extérieure. En d'autres termes, nous avons un état parfait « d'apesanteur ». Supposez que la sphère intérieure ait une charge et soit placée au centre de l'autre sphère. Cette situation est-elle stable? (Considérez la variation d'énergie du système quand on écarte la sphère intérieure du centre de l'autre. Pour en prédire le signe, vous n'avez qu'à regarder comment varie la capacité quand on approche la sphère intérieure très près de la sphère extérieure.
- 3.16Calculez la force qui agit sur une plaque d'un condensateur a plaques parallèles. La différence de potentiel entre les armatures est de 3000 volt, et les plaques sont des carrés de 20 cm de côté espacés de 3 cm. Si les plaques sont isolées de façon à ce que la charge reste constante, quelle quantité de travail pourrait-on fournir à l'extérieur en laissant les plaques venir l'une vers l'autre ? Cette énergie est-elle égale à celle initialement emmagasinée dans le champ électrique?
- 3.17Deux plaques parallèles sont reliées par un fil de sorte qu'elles restent au même potentiel. Prenons l'une des plaques comme plan xz, l'autre coïncidant avec le plan y = s. La distance s entre les plaques est beaucoup plus petite que les dimensions latérales des plaques. Une charge ponctuelle Q est placée entre les plaques à y = h (voir la figure). Quelle est la valeur de la charge totale de surface induite sur les faces internes de chaque plaque? La charge totale sur les faces internes des deux plaques doit, bien sûr, être égale a Q (Pourquoi?) et nous pouvons présumer que la plus grande partie en sera sur la plaque la plus proche de la charge. Si la charge était très proche de la plaque de gauche, h >> s, la présence de la plaque de droite ne pourrait apporter de grands changements. Nous voulons cependant trouver comment se répartit exactement la charge. Si vous essayez d'utiliser la « méthode des images », vous découvrirez que vous avez besoin d'une série infinie d'images s'étendant dans les deux directions, un peu comme les images qu'on voit dans les salons de coiffure qui ont des miroirs sur les deux murs opposés. Il n'est pas facile de calculer le champ résultant en tout point. On peut néanmoins répondre à la question que nous avons posée au moyen d'un calcul très simple base sur la superposition - (Suggestion : la remarque suivante vous aidera à démarrer. Ajouter une autre charge O n'importe où sur le plan y = h doublerait la charge de surface sur chaque plaque; en fait, la charge totale induite par un nombre quelconque de charges situées sur ce plan est indépendantes de leur position sur ce plan. Si nous avions seulement une charge uniforme de surface sur ce plan, le champ électrique serait simple, et nous pourrions trouver le moyen d'utiliser le théorème de Gauss. Partez de là).

Chapitre 4 Courants électriques



Fig. 4.1 (a) Un paquet de particules chargées se déplaçant à la même vitesse **u**. Le cadre a une surface **a**. Les particules qui sont contenues dans le prisme oblique (*b*) à l'instant du dessin sont celles qui franchiront le cadre dans les Δt sec suivantes. Le prisme a une base de surface a et une hauteur $u\Delta t \cos \theta$, son volume est donc *au* $\Delta t \cos \theta$ ou **a** • **u** Δt .

4.1 Transport des charges et densité de courant

Les courants électriques sont causés par le mouvement des porteurs de charge. Le courant électrique dans un fil est la mesure de la quantité de charge passant par unité de temps en un point quelconque du fil. Dans les unités utilisées ici, le courant sera exprimé en ampères. L'ampère représente un Coulomb par seconde. C'est évidemment le transport total de charge qui compte, avec le signe approprié. On peut dire que le mouvement d'un corps neutre entraîné le transport d'une quantité énorme de charge (quelque 10^5 coulombs par gramme de matière !) mais ne crée pas un courant parce qu'il y a exactement le même nombre de particules positives et négatives qui se déplacent à la même vitesse.

La forme la plus générale de courant, ou transport de charge, met en jeu le déplacement de porteurs de charge dans un espace à trois dimensions. Pour le décrire, nous avons besoin du concept de *densité de courant*. Nous considérerons des valeurs moyennes, les porteurs de charge étant des particules discrètes. Nous devons supposer, comme nous l'avons déjà fait pour la définition de la densité de charge ρ , que notre échelle de dimensions est telle que, quelle que soit la petite région de l'espace où nous devons prendre la moyenne, elle contient toujours un très grand nombre des particules qui nous intéressent.

Considérons d'abord un cas particulier, où il y a *n* particules par mètre cube, en moyenne, qui se déplacent toutes avec le même vecteur vitesse **u** et portent la même charge *q*. Imaginons un petit cadre de surface **a**, d'orientation fixe, comme sur la figure 4.1 *a*. Combien passe-t-il de particules à travers le cadre pendant l'intervalle de temps Δt ? Si Δt commence à l'instant figuré sur la figure 4.1 *a* et *b*, les particules qui passeront à travers le cadre dans les prochaines Δt secondes seront juste celles actuellement contenues dans le prisme oblique de la figure 4.1 *b*. Ce prisme a pour base le cadre et un côté de longueur $u\Delta t$, qui est la distance parcourue par une des particules en un temps Δt . Les particules situées en dehors de ce prisme passeront à côté du cadre ou ne l'atteindront pas en Δt secondes. Le volume du prisme est le produit base × hauteur, ou $au\Delta t \cos \theta$, que l'on peut écrire **a** • $u\Delta t$. Le nombre moyen de charges passant par le cadre par unité de temps, ou courant à travers le cadre, que nous noterons I(a), vaut donc

$$\boldsymbol{I}_{(a)} = \frac{q(n\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}\Delta t)}{\Delta t} = nq\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$$

Supposons que nous ayons beaucoup de sortes de particules en mouvement, différant par leur charge ou leur vitesse, ou les deux à la fois. Chacune fournira sa propre contribution au courant à travers **a**. En repérant par l'indice k chaque sorte de particules, le $k^{i\text{ème}}$ type de particules aura une charge q_k , un vecteur vitesse \mathbf{u}_k , une densité moyenne de n_k particules par mètre cube, et on pourra écrire

(4.1)

$$\boldsymbol{I}_{(a)} = n_1 q_1 \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_1 + n_2 q_2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_2 + \dots = \mathbf{a} \cdot \sum_k n_k q_k \mathbf{u}_k$$
(4.2)

La quantité vectorielle que multiplie scalairement **a** dans l'équation 2 est appelée densité de courant **J**. **J** a pour unité l'ampère par mètre carré.

$$\mathbf{J} = \sum n_k q_k \mathbf{u}_k \tag{4.3}$$

61

Considérons la contribution à la densité de courant d'un type de porteurs, par exemple des électrons, qui peuvent avoir des vitesses très différentes. Dans un conducteur, les électrons auront une distribution de vitesse presque aléatoire, variant beaucoup en module et en direction. Soit N_e le nombre total d'électrons par unité de volume, quelle que soit leur vitesse. Nous pouvons classer les électrons en divers groupes, contenant chacun des électrons avant à peu près la même vitesse. La vitesse movenne de tous les électrons sera, comme toute moyenne, calculée en faisant la somme des vitesses de chaque groupe pondérées par le nombre d'électrons de chaque groupe et en la divisant par le nombre total d'électrons. C'est-à-dire

$$\overline{\mathbf{u}} = \frac{1}{N_e} \sum_{k} n_k \mathbf{u}_k \tag{4.4}$$

La barre sur les \overline{u} symbolise la moyenne sur une distribution. En comparant l'équation 4.4 avec l'équation 4.3, on volt que la contribution des électrons à la densité de courant peut s'écrire simplement en fonction de la vitesse moyenne des électrons. En se rappelant que, pour l'électron q = -e, et en utilisant l'indice e pour toutes les quantités se rapportant à ce type de porteur de charge, nous pouvons écrire

$$\mathbf{J}_e = -eN_e \,\overline{\mathbf{u}}_e \tag{4.5}$$

Ceci peut sembler assez évident, mais nous avons décomposé tout cela pour mettre en relief le fait que le courant à travers le cadre ne dépend que de la vitesse moyenne des porteurs, qui n'est souvent qu'une très petite fraction, en module, de certaines de leurs vitesses individuelles. N'oubliez pas que l'équation 4 représente une moyenne vectorielle; elle sera nulle pour une distribution où toutes les directions sont également probables, quelles que puissent être les vitesses individuelles.

4.2 Courants stationnaires

Le courant que transporte un long conducteur du genre d'un fil est évidemment égal à l'intégrale de la densité de courant J sur la section transverse du fil. D'ailleurs le courant circulant à travers une surface quelconque S est égal à l'intégrale de surface

$$I = \int_{S} \mathbf{J} \cdot \mathbf{d}\mathbf{a} \tag{4.6}$$

I est le « flux » associé au vecteur **J**, et dans ce cas, cette dénomination est tout à fait appropriée.

Nous utiliserons l'expression système à courant stationnaire ou constant quand le vecteur densité de courant J restera constant partout dans le temps. Les courants constants doivent obéir à la loi de conservation de la charge. Considérons une région quelconque do l'espace complètement entourée par une surface fermée S. L'intégrale de surface de J sur toute la surface S donne la quantité de charge quittant par unité de temps le volume compris dans S. Elle sera positive si des porteurs de charge positive en sortent ou si des porteurs de charge négative y rentrent, et inversement. Si cela continuait indéfiniment, le volume serait tôt ou tard vide de charges - à moins qu'on n'en ait créé de nouvelles. Mais justement on ne peut créer de charges. Pour une distribution de courant réellement indépendante du temps, l'intégrale de surface de J sur une surface fermée quelconque doit donc être nulle. Il est complètement équivalent de dire, qu'en tout point de l'espace

div
$$\mathbf{J} = 0$$
 (distribution de charges indépendante du temps) (4.7)

Pour vous en convaincre, rappelez-vous le théorème de Gauss et la définition fondamentale de la divergence en fonction de l'intégrale de surface sur une petite surface entourant le point concerné.

Nous pouvons donner un énoncé plus général que l'équation 4.7. Supposons que le courant ne soit plus constant, J étant une fonction de *t* aussi bien que de *x*, *y*, *z*. Puisqu'alors $\int_{S} \mathbf{J} \cdot \mathbf{d} \mathbf{a}$ est la quantité de charge qui guide par unité de temps le volume *V* compris dans *S*, tandis que $\int_{V} \rho dv$ est la charge totale contenue à *l'intérieur* du volume *V* à chaque instant. nous avons

$$\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_{V} \rho d\upsilon \qquad (4.8)$$

Si nous faisons tendre vers zéro le volume en question autour du point (x, y, z), la relation exprimée par l'équation 4.8 devient ⁽¹⁾

div
$$\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$
 (distribution de charge dépendant du temps) (4.9)

La dérivée par rapport au temps de la densité de charge est écrite comme une dérivée partielle puisque ρ est généralement aussi bien fonction des coordonnées spatiales que du temps. Les équations 4.8 et 4.9 expriment la *conservation de la charge* : aucune charge ne peut quitter un point sans diminuer la densité de charge en ce point.

Un exemple instructif de distribution de courant stationnaire nous est fourni par la diode plane, tube électronique classique à deux électrodes.



Fig. 4.2 Une diode à vide avec des electrodes plan parallèles.

Une électrode, la cathode, est recouverte d'un matériau qui émet en quantité des électrons quand on le chauffe. L'autre électrode, l'anode, est simplement une plaque de métal. L'anode est maintenue à l'aide d'une pile à un potentiel positif par rapport à la cathode. Les électrons sont émis par la cathode chauffée avec de très faibles vitesses, mais ils sont aussitôt accélérés vers l'anode positive par le champ électrique régnant entre la cathode et l'anode. Dans l'espace compris entre la cathode et l'anode, le courant électrique est constitué par ces électrons en mouvement. Le circuit est complété par le déplacement des électrons dans les fils extérieurs, par le mouvement des ions dans une pile et tous autres phénomènes extérieurs, dont nous n'avons pas à nous soucier ici. Dans cette diode, la densité locale de charge ρ en un point quelconque est simplement -ne où n est la densité locale des électrons en électrons/m³. La densité locale de courant **J** est évidemment ρ **v** où **v** est la vitesse des électrons au point considéré. Dans la diode à électrodes planes parallèles, nous pouvons supposer que **J** n'a pas de composantes y ou z (fig. 4.2). Si les conditions sont stationnaires, ceci entraîne que J_x doit être

indépendant de *x*, car si div $\mathbf{J} = 0$ d'après l'équation 4.7, $(\partial J_x / \partial x)$ doit être nulle si $J_y = J_z = 0$. Cette démonstration est superflue; si nous avons un écoulement constant d'électrons se déplaçant dans la direction *x*, il faut qu'il y en ait le même nombre qui traversent par seconde tout plan compris entre cathode et anode qui leur est parallèle. Nous en concluons que $\rho \mathbf{v}$ est constant. Mais remarquons que \mathbf{v} n'est pas constant; il varie avec *x* puisque les électrons sont accélérés par le champ. ρ n'est donc pas non plus constant. Au contraire, la densité de charge négative est élevée près de la cathode et faible près de l'anode, tout comme la densité des voitures sur une autoroute est élevée près d'un bouchon et faible aux endroits où la circulation se fait à grande vitesse.

Le courant dans une diode peut être limité par un intéressant phénomène : la densité de charge négative (la « charge d'espace ») influe sur le champ électrique, donc sur l'accélération et la vitesse des électrons et donc - pour refermer la boucle - sur elle-même. Le problème 4.25 étudie le comportement de la diode « en régime de charge d'espace » et montre comment obtenir la curieuse relation existant entre courant et tension appliquée. Cette relation est importante en électronique, non seulement pour la conception et l'utilisation des diodes, mais aussi pour la conception des canons à électrons des tubes cathodiques.

4.3 Conductivité électrique et Loi d'Ohm

Il y a beaucoup de façon de mettre en mouvement des charges, y compris ce qu'on pourrait appeler « transport matériel » des porteurs de charge. Dans le générateur électrostatique de Van de Graaf (voir le problème 4.3), une courroie isolante reçoit une charge de surface qu'elle transporte jusqu'à une autre électrode où on la décharge, tout à fait comme un escalier roulant transporte des voyageurs. Et ceci constitue un véritable courant. Dans l'atmosphère, des gouttelettes d'eau chargées tombant sous l'influence de leur poids constituent l'un des composants du système des courants électriques de la terre. Dans cette

⁽¹⁾ Si le passage de l'éq. 4.8 à l'éq. 4.9 ne vous paraît pas évident, allez revoir au chap. 2 notre définition fondamentale de la divergence. Quand le volume devient de plus en plus petit, on peut si on le veut sortir Q de l'intégrale de volume de droite. On doit prendre l'intégrale de volume à un instant t. Sa dérivée par rapport au temps dépend donc de la différence entre l'intégrale de volume au temps t et celle-ci au temps t + dt. La seule différence est ici due à la variation de Q puisque les limites du volume restent à la même place.

section, nous nous intéresserons à un agent de transport beaucoup plus ordinaire, la force exercée sur un porteur de charge par un champ électrique. Un champ électrique tend à mettre en mouvement des porteurs de charge et donc à créer un courant électrique. Que celui-ci circule ou non dépend de la nature physique du système, le milieu, sur lequel agit le champ.

Une des premières découvertes expérimentales sur les courants électriques est représentée par la loi d'Ohm

$$I = V/R \tag{4.10}$$

L'intensité *I* du courant circulant à travers un fil est proportionnel à *V*, différence de potentiel existant entre les extrémités du fil. Étant donné un morceau de fil maintenu à la même température, la résistance *R*, qui est le coefficient de proportionnalité de l'équation 4.10, ne dépend pas de la valeur du courant qui y circule. La résistance dépend de façon évidente de la longueur et de la section du fil; elle est proportionnelle à sa longueur *L* et inversement proportionnelle à sa section *S*. Elle dépend évidemment aussi du matériau qui constitue le fil et tout cela s'exprime par la formule toute simple suivante

$$R = \rho L/S \tag{4.11}$$

On appelle résistivité de volume (ou résistivité) de la substance le facteur ρ . La résistance se mesure en Ohms; un ohm est la résistance d'un conducteur qui est parcouru par un courant de un ampère quand il est soumis à une différence de potentiel d'un volt. L'unité correspondante de résistivité est l'ohm-m si les longueurs sont mesurées en mètres; dans les tables on utilise plutôt l'ohm-cm.



Fig. 4.3 Passage du courant dans un conducteur. La relation fondamentale entre la densité de courant **J** et le champ électrique **E** est équivalent à la loi d'Ohm, V=RI.

équations 4.10 et 4.11.

L'ingénieur électricien trouve un grand intérêt aux équations 4.10 et 4.11 qui lui permettent de calculer la résistance des éléments des circuits électriques, ainsi que les relations courant-tension dans ces circuits. Le physicien - sauf quand il est en train de concevoir un appareillage électrique - voit plutôt ces équations comme l'expression d'une propriété générale très remarquable de la matière, dont l'explication peut être un des buts qu'il poursuit. Le fait fondamental que traduit l'ensemble de ces deux équations est le suivant : dans les matériaux solides homogènes, la densité de courant est proportionnelle en tout point au champ électrique et la constante de proportionnalité ne dépend que de la nature du matériau - elle ne dépend pas, par exemple, de la forme du conducteur. C'est-à-dire que

$$\mathbf{J} = \mathbf{\sigma} \, \mathbf{E} \tag{4.12}$$

Dans la plupart des conducteurs, il existe trois directions perpendiculaires physiquement équivalentes. Par exemple, dans le cuivre, les atomes sont disposés selon un réseau cubique (cubique face-centrée). Mais même quand l'arrangement des atomes n'est pas cubique, un morceau de métal est généralement composé de nombreux petits cristaux orientés au hasard, ce qui rend équivalentes toutes les directions à l'échelle macroscopique. Dans tous les matériaux de ce type, il n'y aura pas de direction privilégiée, **J** aura la même direction que **E** et σ sera simplement un scalaire⁽²⁾. Nous l'appelons *conductivité* du matériau. La conductivité σ est l'inverse de la résistivité⁽³⁾. On trouvera sur la figure 4.3 un résumé de ces relations ainsi qu'une démonstration de l'équivalence de l'équation 4.12 avec les

⁽²⁾ Une relation linéaire entre deux vecteurs met généralement en jeu un teuseur. Nous rencontrerons un important exemple de tenseur au chap. 9. Il existe quelques corps où la conductivité diffère notablement selon la direction et est donc représentée par un tenseur, mais nous ne nous en occuperons pas.

⁽³⁾ Les lettres grecques Q et σ sont les symboles usuels de la résistivité et de la conductivité bien qu ils soient d'usage aussi commun pour la densité de charge en volume et la densité de charge de surface.

Disons un mot des unités et des dimensions. L'unité de conductivité est dérivée de l'unité de résistance, l'ohm. Comme vous le savez déjà, l'ohm est égal à un volt par ampère. La conductivité-est le rapport densité de courant / module du champ, ce qui donne en unités des ampères/m² / volts/m soit des (ohm-m)⁻¹. On utilise plus souvent l'inverse de la conductivité, appelée la *résistivité*. L'unité en est l'ohm-m et on utilise pratiquement l'ohm-cm. Le symbole usuel en est ρ . La résistivité d'un bon conducteur à la température ambiante est de l'ordre de quelques millionièmes d'ohm-centimètre. Ainsi le cuivre pur a une résistivité de $1,7 \times 10^6$ ohm-cm, soit une conductivité de $5,8 \times 10^{-7}$ (ohm-m)⁻¹, à la température ambiante.

4.4 Un modèle de la conduction électrique

L'équation 4.12 ne fait que traduire ce que l'on observe expérimentalement dans les conducteurs les plus courants dans un certain domaine de champ électrique. Nous ne pouvons l'obtenir à *partir* des lois fondamentales du champ électrique. Pour comprendre sa signification, nous devons comprendre ce qui se passe dans un corps particulier quand on applique un champ électrique, et ceci peut beaucoup varier d'un corps à l'autre. Mais ce qui est très remarquable dans la loi d'Ohm, c'est qu'elle est suivie par une grande variété de corps dans un vaste domaine de valeurs de champ. (Elle n'est, bien sûr, pas toujours suivie, dans certaines circonstances elle *ne doit pas* d'ailleurs être suivie, pour des raisons que nous découvrirons dans certains cas.). Nous allons essayer maintenant de décrire en détail le processus de conduction dans un système modèle. Ce sera un modèle représentatif d'un large éventail de conducteurs électriques, mais pas de tous.



Fig. 4.4 Ions négatifs et positifs au milieu d'atomes neutres.

Nous avons besoin de porteurs de charge, aussi imaginons-nous un milieu constitué par des porteurs de charge positive et négative en nombre égal, soit N porteurs de chaque signe par mètre cube. Les porteurs positifs sont des ions ayant chacun une masse M_+ une charge e, tandis que les porteurs négatifs sont des ions négatifs chacun de masse M_{+-} et de charge -e. La densité de courant **J** sera déterminée par les vitesses moyennes de ces porteurs.

On applique au système un champ électrique **E** uniforme et constant dans le temps, qui exerce une force sur chacun des porteurs de charge. C'est la première occasion que nous aurons dans ce volume de considérer la force sur une charge *en mouvement* dans un champ électrique. Nous traiterons cette question en détail au chapitre 6. Le fait est et nous l'avons déjà utilisé dans le volume **I** - que cette force est la même que si le porteur de charge était au repos. C'est-à-dire que chaque porteur de charge q, quel que soit son mouvement, subit la force constante qE.

Arrêtons-nous un instant pour nous étonner à l'idée de voir la loi d'Ohm suivie dans ces conditions ! Une force constante agissant sur un porteur libre de charge devrait produire une accélération constante. Mais une densité de courant constante est associée à une *vitesse* constante, et non une accélération constante. Si notre système doit réellement suivre la loi d'Ohm, ce doit être parce que la vitesse moyenne est proportionnelle à la *force*, dans le cas de nos porteurs de charge. Ceci nous montre que les porteurs de charge ne peuvent se déplacer librement; il doit exister quelque chose qui s'oppose au mouvement dont le champ électrique est la cause.

Nous n'aurons pas à chercher l'origine de la force de frottement -elle doit provenir des collisions que les porteurs de charge subissent les uns contre les autres ainsi que contre toutes les autres particules qui peuvent constituer le milieu.

La façon dont tout ceci va fonctionner dépend quelque peu des détails de notre modèle. Soyons précis et pensons à un gaz constitué d'atomes neutres, d'ions positifs et d'ions négatifs avec une densité caractéristique d'un gaz normal, soit environ 10²⁵atomes/m³(fig.4.4). Supposons qu'il y ait une nette prépondérance d'atomes neutres, avec quelques ions positifs et négatifs parmi eux. La distance entre les particules, qu'elles soient neutres ou chargées, est beaucoup plus grande que les rayons des atomes ou des ions, de sorte qu'un ion passe la plupart du temps *sans* être soumis à une collision.

En l'absence d'un champ électrique, les ions se déplacent dans des directions aléatoires, avec des vitesses qui sont déterminées par la température. La théorie cinétique des gaz peut nous donner, si nous en avons besoin, la relation existant entre température et énergie

cinétique moyenne d'une particule. Si nous nous occupons d'un certain ion à un instant particulier, soit à t = 0. nous le trouverons en train de se déplacer avec une certaine vitesse **u**. Que se passera-t-il ensuite? L'ion se déplacera en ligne droite à une vitesse constante jusqu'à ce qu'il passe près d'un atome, assez près pour que des forces à faible rayon d'action agissent sur lui. Dans cette *collision*, l'énergie cinétique totale et la quantité de mouvement totale des deux corps sera conservée, mais le

module de la vitesse et la direction du déplacement de l'ion seront changés - un peu ou beaucoup, selon le cas - et il aura une nouvelle vitesse \mathbf{u}' . Plus tard aura lieu une nouvelle collision, qui changera la vitesse en \mathbf{u}'' , et ainsi de suite. Il peut aussi arriver qu'un autre ion, placé assez loin du nôtre, interagisse avec lui au moyen d'une force de Coulomb à grand rayon d'action, modifiant ainsi son trajet. Ces influences à grande distance, qui peuvent être importantes entre des ions, font varier généralement la vitesse par petites quantités aléatoires, mais l'effet final est le même.

L'effet final - et c'est la clé de notre énigme - est d'effacer toute relation (en module ou en direction) entre la vitesse \mathbf{u} de l'ion à t = 0 et sa vitesse après qu'un certain temps se soit écoulé. C'est-à-dire qu'après un certain temps $t = \tau$, on puisse trouver le vecteur vitesse de l'ion autant dans une direction de l'espace que dans une autre, *indépendamment* de sa direction au temps t = 0. L'ion a « oublié » la direction dans laquelle il se déplaçait à l'origine. En d'autres termes, si nous prenions 10 000 ions se déplaçant horizontalement vers le sud à un instant donné et suivions chacun d'eux pendant τ secondes, les directions finales de leurs vitesses seraient attribuées aléatoirement sur une sphère. Pour que soit effacé le souvenir de la direction de la vitesse, il peut falloir de nombreuses collisions, ou très peu; cela dépend de l'importance des variations de la quantité de mouvement que mettent en jeu les collisions ainsi que la nature de l'interaction. Un cas extrême est celui des collisions. Nous n'avons pas à nous soucier de ces différences. Ce qui compte, c'est que, quelle que soit la nature de ces collisions, il y ait un certain intervalle de temps τ caractéristique d'un système donné, au bout duquel se produit une importante diminution de la *corrélation* entre la direction finale de la vitesse d'un ion du système⁽⁴⁾. Ce temps caractéristique dépendra de l'ion et de la nature de ce qui l'entoure; il sera d'autant plus court que les collisions seront plus fréquentes, puisque dans notre modèle de gaz, il n'arrive rien à un ion entre les collisions.

Nous sommes maintenant prêts à appliquer un champ électrique uniforme \mathbf{E} au système. La description sera beaucoup plus simple si nous imaginons que l'oubli de la direction de la vitesse se produise totalement en une collision, comme dans le cas des sphères dures. En fait, notre conclusion ne dépendra pas de cette hypothèse. Un ion repart donc dans une direction aléatoire, immédiatement après une collision. Nous désignerons par \mathbf{u}^c la vitesse après une collision. La force électrique $e\mathbf{E}$ agissant sur chaque ion communique constamment de la quantité de mouvement à l'ion. Après un temps t, l'ion aura vu sa quantité de mouvement augmenter de $e\mathbf{E}t$, qui s'ajoutera simplement vectoriellement à sa quantité de mouvement initiale $M\mathbf{u}^c$. La quantité de mouvement de l'ion est alors $M\mathbf{u}^c - e\mathbf{E}t$. Si son accroissement est faible par rapport à $M\mathbf{u}^c$, cela entraînera que la vitesse ne sera pas trop changée, de sorte que l'on peut s'attendre à ce que la collision suivante se produise à peu près au même instant que si il n'y avait pas eu de champ électrique. En d'autres termes, le temps moyen entre les collisions, que nous désignerons par t, est indépendant du champ \mathbf{E} , si celui-ci n'est pas trop fort.

La quantité de mouvement que fournit le champ est un vecteur de direction constante. Mais celle-ci se perd, en fait, à chaque collision, puisque la direction du mouvement après une collision est aléatoire, donc indépendante de la direction initiale.

Quelle est la quantité de mouvement moyenne de tous les ions positifs, à un instant donné? La réponse à cette question s'avère d'une surprenante facilité si nous adoptons le point de vue suivant : à l'instant en question, supposons que nous arrêtions l'horloge et demandions à chaque ion combien de temps s'est écoulé depuis la dernière collision. Supposons que nous obtenions la réponse t_1 de l'ion positif 1. Cet ion doit avoir une quantité de mouvement eEt_1 en plus de celle, Mu_1^c , qu'il possédait après sa dernière collision. La quantité de mouvement moyenne des N ions positifs est alors

$$M\overline{\mathbf{u}}_{+} = \frac{1}{N} \sum_{j} \left(M \mathbf{u}_{j}^{c} + e \mathbf{E} t_{j} \right)$$
(4.13)

lci, \mathbf{u}_{j}^{c} est la vitesse que le j^{ième} ion avait après sa dernière collision. Ces vitesses \mathbf{u}_{j}^{c} ont une direction tout à fait aléatoire et done une contribution nulle en moyenne. Le second terme de l'équation est simplement le produit de **E***e* par la *moyenne de t*, c'est-à-dire, la *moyenne du temps écoulé depuis la dernière collision*. Ce doit être la même que la moyenne du temps qui s'écoulera avant la *prochaine* collision et ces deux moyennes sont toutes deux ⁽⁵⁾ égales au temps moyen entre les collisions \overline{t} . Nous en concluons que la vitesse moyenne d'un ion positif est, en présence d'un champ constant **E**,

⁽⁴⁾ Il serait possible de définir précisément τ pour un système général en utilisant une mesure quantitative de la corrélation entre les directions finale et initiale. C'est un problème statistique, comme celui de la mesure de la corrélation entre le poids des rats à la naissance et leur poids à maturité. Nous n'aurons pas cependant besoin d'une définition générale quantitative de la corrélation pour achever notre analyse.

Vous pensez peut-être que le temps moyen entre les collisions devrait être égal à la *somme du temps moyen écoulé depuis la derniére collision* et du *temps moyen avant la prochaine*. Ce serait vrai si les collisions survenaient ë des intervalles absolument réguliers, mais il n'en est rien. Ce sont des événements aléatoires indépendants, et c'est pour cela que l'énoncé ci-dessus est vrai,

$$\overline{\mathbf{u}}_{+} = (\mathrm{E}\,e\bar{t}_{+})/M_{+} \tag{4.14}$$

Ceci montre que la vitesse moyenne d'un porteur de charge est proportionnelle à la force qu'il subit. Si nous ne considérons que la vitesse moyenne, tout se passe comme si le milieu s'opposait au mouvement avec une force proportionnelle à la vitesse. C'est la sorte de résistance au déplacement que vous ressentez quand vous essayez de remuer un sirop épais avec une cuillère, c'est la force de « viscosité ». Chaque fois que des porteurs de charge se comportent ainsi, nous pouvons nous attendre à quelque chose ressemblant à la loi d'Ohm.

Dans l'équation 4.14, nous avons écrit \bar{t}_+ parce que le temps moyen entre les collisions peut être différent pour des ions positifs ou négatifs. Les ions négatifs prennent de la vitesse dans la direction opposée, mais comme its portent une charge négative leur contribution â la densité de courant **J** s'ajoute à celle des ions positifs. L'équivalent de l'équation 4.3 s'écrit donc en tenant compte des deux types d'ions

$$J = Ne(e E \bar{t}_{\perp}) / M_{\perp} - Ne(-e E \bar{t}_{\perp}) / M_{\perp} = Ne^{2} (\bar{t}_{\perp} / M_{\perp} + \bar{t}_{\perp} / M_{\perp}) E$$
(4.15)



Notre théorie prédit bien que le système suit la loi d'Ohm, puisque l'équation 4.15 exprime une relation linéaire entre J et E, les autres quantités étant des constantes caractéristiques milieu. Comparez du l'équation 4.15 à l'équation 4.12. La constante $Ne^{2}(\bar{t}_{\perp}/M_{\perp}+\bar{t}_{-}/M_{-})$ le rôle de joue la conductivité.

Nous avons émis un certain nombre d'hypothèses très particulières concernant ce système, mais, en faisant un retour en arrière, nous pouvons constater qu'elles n'avaient rien d'essentiel pour trouver une relation linéaire entre **E** et **J**. Tout

Fig. 4.5 (a) Une distribution aléatoire d'ions positifs et d'électrons en nombre égal. Les vecteurs représentent les vitesses des électrons qui sont répartis complètement au hasard en (*a*). En (*b*) on a introduit une vitesse de dérive vers la droite représentée par le vecteur vitesse -->. On a ajouté cette vitesse à chacune des vitesses originales des électrons, comme on le montre pour l'électron le plus bas dans le coin de gauche.

système contenant une densité constante de porteurs de charges libres dans lequel le mouvement des porteurs est fréquemment « redistribué au hasard » par des collisions ou d'autres interactions existant dans le système devrait suivre la loi d'Ohm si le champ n'est pas trop élevé. La constante de proportionnalité entre **E** et **J**, c'est-à-dire la conductivité a du milieu, sera proportionnelle au nombre de porteurs de charge et au temps caractéristique τ , durée de la perte de corrélation en direction. Ce n'est qu'au travers de cette dernière quantité que s'introduisent dans le problème les caractéristiques compliquées des collisions. L'édification d'une théorie détaillée de la conductivité d'un système donné, dont on suppose connu le nombre de porteurs de charge, repose sur celle d'une théorie fournissant τ . Dans notre exemple particulier, on a remplacé cette quantité par t et on a obtenu pour la conductivité σ un résultat parfaitetnent défini. En introduisant la quantité τ , qui est plus générale, et en tenant compte de la possibilité d'avoir des nombres différents de porteurs de signes opposés, nous pouvons résumer notre théorie comme ceci :

$$\sigma \approx e^2 (N_+ \tau_+ / M_+ + N_- \tau_- / M_-)$$
(4.16)

si paradoxal qu'il puisse paraitre. Réfléchissez-y. Cette question n'obère pas notre conclusion, mais si vous la résolvez, vous aurez franchi un grand pas dans l'art statistique. (Suggestion : si subir une collision n'affecte en rien la probabilité d'en subir une autre - et c'est ce que signifie *indépendant* - il sera sans importance de déclencher l'horloge à un instant arbitraire, ou à l'instant de la collision).

Nous utilisons le signe \approx pour montrer que nous n'avons pas donné une définition précise. On pourrait le faire cependant. Pour insister sur le fait que la conduction électrique ne met habituellement enjeu qu'une très légère dérive superposée au mouvement aléatoire des porteurs de charge, nous avons dessiné sur la figure 4.5 une sorte do vue artificielle microscopique du type de système dont nous venons de parler. Les ions positifs y sont représentés par des points blancs, les ions négatifs par des cercles. Nous supposons que ces derniers sont des électrons; ceux-ci, en raison de leur masse beaucoup plus faible, se déplacent beaucoup plus vite que les ions positifs, ce qui nous permet de négliger le mouvement des ions positifs. On voit sur la figure 4.5 *a* une distribution parfaitement aléatoire de particules et de vitesses des électrons. Pour réaliser ce dessin on a utilisé une table de nombres au hasard. Les vecteurs vitesse des électrons ont été tracés à partir d'une distribution aléatoire, correspondant à la distribution « maxwellienne » des vitesses le même petit vecteur dirigé vers la droite. C'est que la figure 4.5 *b* représente une substance ionisée dans laquelle il y a un courant de particules négatives vers la droite, équivalent à un courant de particules positives vers la gauche. La figure 4.5 *a* représente le même système en l'absence de courant moyen.

Nous ne devons pas, bien sûr, nous attendre à ce que la vitesse moyenne des 46 électrons de la figure 4.5 *a* soit exactement nulle, puisque ce sont des quantités statistiquement indépendantes. Un électron n'a aucune influence sur le comportement d'un autre. Il y aura, en fait, un courant électrique fluctuant au hasard en l'absence de tout champ d'excitation, il proviendra des fluctuations statistiques de la somme vectorielle des vitesses des électrons. On peut mesurer ce courant fluctuant spontané. C'est une source de « bruit » dans tous les circuits électriques, qui détermine souvent la limite de sensibilité des systèmes de mesures de faibles signaux électriques. Dans le volume V de ce cours. on en parlera plus en détail.

4.5 Où la loi d'Ohm est en défaut

Nous pouvons regarder maintenant comment la loi d'Ohm peut être en défaut. Supposons que le champ électrique soit si fort qu'un ion prenne, entre les collisions, une vitesse supplémentaire comparable à sa vitesse thermique moyenne. Cela affectera sérieusement le temps moyen entre les collisions, \bar{t}_+ ou \bar{t}_- , qui apparaît dans l'équation 4.15. Ces temps sont maintenant fonctions de **E**, ce ne sont plus des constantes, et l'équation 4.15 n'est plus linéaire. Ce qui veut dire que doubler la valeur de **E** ne fera pas que doubler celle de la densité de courant **J** si \bar{t} change également. Voyons ce qui pent se passer dans un cas typique. Notre modèle ressemble à un gaz faiblement ionisé. Le libre parcours moyen d'un ion dans un gaz est de l'ordre de 10^{-8} m L'énergie cinétique moyenne des déplacements aléatoires des ions est de l'ordre de kT où k est la constante de Boltzmann qui intervient dans la théorie cinétique des gaz. Nous pouvons énoncer ainsi notre critère sur les vitesses : nous devons nous attendre à des problèmes si l'énergie cinétique additionnelle que le champ fournit à l'ion entre les collisions est comparable à kT. En écrivant que ces deux énergies sont approximativement égales

$$e\mathbf{E} \cdot 10^{-8} m \approx kT \tag{4.17}$$

on trouve que $\mathbf{E} \approx 2400$ kilovolts/m. C'est un champ modérément élevé à l'échelle de ceux que l'on peut réaliser au laboratoire, il correspond à une différence de potentiel de 24 kilovolts sur une distance de 1 cm. Cette limite dépend évidemment du libre parcours moyen. Des gaz ionisés sous basse pression, où le libre parcours moyen, est beaucoup plus long, peuvent dévier de la loi d'Ohm à des champs beaucoup plus faibles.

Des champs électriques très élevés peuvent entraîner des changements encore plus importants, comme une variation du nombre des porteurs. C'est ce qui se passe dans une décharge électrique. Les porteurs de charge déjà présents reçoivent tellement d'énergie du champ que les collisions qu'ils font avec les atomes neutres sont assez fortes pour ioniser ceux-ci, augmentant ainsi le nombre de porteurs. Le phénomène d'avalanche qui en résulte représente une violation catastrophique de la loi d'Ohm !

On peut signaler encore un point faible de notre théorie, dans certaines conditions. Supposons que le champ **E** soit appliqué pendant un très petit intervalle de temps. Si ce temps est comparable à τ , ou plus petit, nous devons certainement réviser nos conclusions. Pour éclaircir nos idées, imaginons que nous appliquions un champ électrique alternatif, de période courte comparée au temps entre les collisions. La réponse des porteurs sera alors principalement due à leur inertie mécanique. Quelle que soil la nature de ce problème, dont vous rencontrerez plus tard un intéressant exemple, la théorie que nous avons développée lui sera inapplicable. Remarquez, cependant, que le temps moyen de collision dans le gaz que nous avons pris pour exemple peut être estimé à 10^{-8} m/vitesse moléculaire, ce qui donne pour les ions un temps de l'ordre de 10^{-10} s, et quelque chose d'encore plus court pour les électrons. Donc notre théorie, bien qu'elle ait été construite pour un champ faible, devrait être valable pour de nombreux systèmes, où le champ varie rapidement.

La diode à vide que nous avons décrite dans la section 4.2 est un système extrêmement « non-ohmique » . Dans certaines conditions de fonctionnement, où le débit d'électrons est limité par leur vitesse d'émission par la cathode, le courant est pratiquement indépendant de lit tension. si l'anode est positive. Si l'anode est négative, le courant est nul, car l'anode ne peut émettre aucun électron. Le courant ne traverse la diode que dans un sens. On l'utilise très courammenl comme un *redresseur* de courant alternatif. Dans les conditions, étudiées dans le problème 4.25, où le courant est limité par la charge d'espace, le courant dans la diode est proporlionnel à la puissance 3/2 de la tension, ce qui n'est pas la relation linéaire de la loi d'Ohm.

La jonction entre deux matériaux semiconducteurs, ou entre un *semiconducteur* et un métal, peut présenter un caractère extrêmement non-ohmique et, comme la diode à vide, unidirectionnel. Des éléments non linéaires sont indispensables à l'électronique (comme à la vie). Si tous les systèmes obéissaient à la loi d'Ohm, il n'y aurait pas de technologie électronique.

4.6 Conductivité électrique des métaux

Les métaux sont les meilleurs conducteurs que nous connaissions. C'est pour expliquer la conductivité des métaux que Drude et quelques autres introduisirent au début du dix-neuvième siècle le modèle simple que nous venons de décrire. Cette théorie fut poussée à un haut degré de raffinement par Lorentz et elle eut des aspects très féconds. On ne doutait pas que la haute conductivité des métaux ne soit due aux électrons libres, c'est-à-dire à des électrons qui ne sont liés à aucun atome, mais au contraire libres de se déplacer à travers tout le réseau cristallin. La preuve la plus convaincante de ceci était fournie par l'absence totale de toute trace de transport de matière chimiquement identifiable dans un circuit métallique venant d'être parcouru par un courant. La chimie des éléments métalliques et la théorie quantique de la structure atomique, alors à peine naissante, s'unirent pour suggérer que des atomes de métal pouvaient facilement pardue du de nombreux atomes semblables seraient empilés pour former un cristal. Le réseau lui-mëme est alors composé des ions positifs résiduels, fixés en alignements réguliers et rigides. Les « électrons de conduction » se déplacent à travers ce réseau d'ions. Même s'il n'y a qu'un électron par atome de métal qui puisse s'en détacher, la densité résultante de porteurs de charge est infiniment plus grande que dans des substances où les ions peuvent être créés par d'autres moyens. Le nombre d'atomes par mètre cube dans le sodium est, par exemple, de $2,5 \times 10^{28}$, soit $2,5 \times 10^{22}$ par centimètre cube, ce qui est énorme.

Comme nous l'avons vu plus haut, la mobilité d'rtn porteur de charge est essentiellement déterminé par le temps τ pendant lequel il peut recevoir de la quantité de mouvement du champ électrique. Ceci est vrai quel que soit le processus mis en jeu. Si nous supposons que le nombre de porteurs de charge dans le sodium est de un par atome, et que ce sont des électrons de masse $m_{e,\tau}$ il nous suffira d'avoir la conductivité (mesurée expérimentalement) du sodium pourcalculer τ .

La conductivité σ du sodium à la température ambiante est de 2,1 × 10⁷ (ohm-m)⁻¹. A partir de l'équation 4.16, on obtient, en négligeant les porteurs de charge positive,

$$\tau_{-} = \sigma m_{e} / N_{-} e^{2} = \frac{(2.1 \times 10^{7})(9 \times 10^{-31})}{(2.5 \times 10^{28})(2.5 \times 10^{-38})} \approx 3 \times 10^{-14} \text{ s}$$
(4.18)

Cela parait étonnamment long pour le temps pendant lequel un électron peut se déplacer à travers le réseau sans subir de déviation sensible. En effet, la vitesse thermique d'un électron à la température ambiante est, d'après la théorie cinétique des gaz, de l'ordre de 10^5 m/s, de sorte qu'en 3×10^{-14} s un électron parcourt 30 angströms - plus de 10 distances interatomiques.

Pourquoi les électrons traversent-ils si facilement le réseau des ions ? Pour autant que l'on puisse parler de dimensions, les ions se touchent presque dans un réseau compact. Les variations de potentiel électrique le long d'un trajet à travers le réseau devraient donc être beaucoup plus grandes que l'énergie, exprimée en électron volts, d'un électron à la température ambiante. D'autre part, si ce ne sont pas les collisions avec les ions qui perturbent le mouvement des électrons, quest-ce qui en est done la cause? On ne pouvait répondre à ces questions cruciales avant d'avoir découvert la nature ondulatoire de l'électron. D'ailleurs, le comportement de l'électron dans les métaux mil la physique face à de stupéfiants paradoxes, avant l'avènement de la mécanique quantique. Nous reviendrons plus lard sur ces questions quand nous aurons quelque connaissance de physique quantique. Pour l'instant, nous considérerons comme établie la remarquable conductivité électrique des métaux - comme avaient dû le faire de nombreuses générations de physiciens.

Nous pouvons cependant garder quelques traits essentiels de notre modèle de conduction. Le courant de conduction est transporté par les électrons ; il correspond à une dérive lente et continue des porteurs, qui se superpose à leur mouvement

aléatoire, qui est beaucoup plus rapide. C'est la diffusion ou la déviation de l'électron par le réseau qui rend la vitesse de dérive proportionnelle au champ, ce qui fait obéir le courant à la loi d'Ohm.

Dans la plupart des métaux, la loi d'Ohm est très précisément suivie, même à des densités de courant si élevées qu'on ne peut les maintenir très longtemps et on n'y a jamais clairement démontré expérimentalement d'écart à cette loi. Selon certaines prédictions théoriques, on doit s'attendre à des écarts de l'ordre de 1 pour cent à des densités de courants de 10¹³ amp/m². C'est-à-dire pour une densité de courant environ un million de fois plus forte que celle que l'on rencontre dans les circuits électriques ordinaires.



Fig. 4.6 Conductivités électriques de quelques substances. Remarquez qu'on a utilise une échelle logarithmique aussi bien pour la conductivité que pour la température.

La conductivité des métaux purs augmente quand la température baisse. Ce serait assez difficile à expliquer avec notre théorie précédente. Et toute tentative de rendre compte de tous les aspects de la conduction métallique au moven d'un modèle du genre « boule de billard » est condamnée au ridicule par le phénomène qu'est étonnant la supraconductivité. En effet de nombreux métaux commencent à très basse température à conduire le courant d'une manière qui, pour décrite être en terme de conductivité, impose que celle-ci infinie! devienne (Et cette hypothèse ne suffit même pas à tout expliquer).

Le tableau de la figure 4.6 présente les conductivités d'un certain nombre de substances pures ainsi que leur variation en fonction de la température. Son but principal est de mettre en évidence le large éventail des valeurs rencontrées et la diversité des comportements observés. Prenez garde au fait que échelles des abscisses les (températures) aussi bien que celles des ordonnées (conductivités) sont logarithmiques.

4.7 Résistance des conducteurs

Il est très simple de calculer la résistance d'un fil conducteur uniforme quand on connaît la résistivité du matériau. Nous avons déjà écrit dans l'équation 4.11 la formule nécessaire

$$R = \frac{\text{longueur} \times \text{résistivité}}{\text{aire de la section transverse}}$$
(4.19)

La résistance *R* n'a de signification que pour un passage de courant bien défini. Dans le cas d'un fil, il n'y a aucune ambiguïté. Si nous sommes dans le cas plus général d'une distribution de courant en volume, nous ne pouvons parler de résistance sans préciser les « bornes de connection » par où le courant entre dans le système et le quitte. C'est notre relation de départ $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ qui déterminera la distribution de la densité de courant à travers le volume.

Pour illustrer ceci, considérons le passage de courant dans un objet représenté sur la figure 4.7 *a* et *b*, qui consiste en deux gaines cylindriques coaxiales en cuivre dont l'intervalle est rempli de graphite. Quelle est la résistance entre les bornes ? Si la résistance du cuivre au courant longitudinal est très petite comparée à la résistance du graphite au courant radial, elle ne doit pas dépendre beaucoup des points par où le courant entre et sort du cuivre (c'est-à-dire des points où sont placées les bornes). Dans ce cas, nous pouvons dire que chaque tube de cuivre est une équipotentielle. Si l'on regarde le tableau de la figure 4.6, on voit qu'il y a plus d'un facteur 10^3 entre les conductivités du graphite et du cuivre aux températures ordinaires, ce qui rend très licite l'hypothèse que l'on a faite, pourvu que le cuivre ne soit pas extrêmement fin. Soit alors V₀ la différence de potentiel entre les électrodes de cuivre. Pour déterminer le champ électrique dans le graphite, nous nous rappelons que le champ entre deux cylindres chargés est proportionnel à 1/r, nous posons donc E = k/r et déterminons la constante *k* en écrivant que



Fig. 4.7 Du graphite remplit l'intervalle entre les tubes de cuivre cylindriques (a, b). Si les tubes ont une résistance négligeable, le courant circule radialement dans le graphite. Sinon les lignes de courant ressembleraient a (c) ou (d), selon la position des bornes.

$$V_0 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = k \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = k \operatorname{Log}(r_2 / r_1)$$
(4.20)

La valeur du champ en tout point situé à r de l'axe dans le graphite est donc

$$E = V_0 / (r \log(r_2 / r_1))$$
(4.21)

et la densité de courant est σ E. L'aire totale à travers laquelle passe le courant est, toujours à la distance *r* de l'axe, $2\pi rL$, de sorte que le courant total est

$$I = \frac{2\pi L\sigma V_0}{\log(r_2 / r_1)}$$
(4.22)

Remarquez qu'il est indépendant de r, comme il se doit. La résistance vaut

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{2\pi L\sigma} \log(r_2 / r_1)$$
(4.23)

Que se passerait-il si les gaines de cuivre étaient extrêmement minces de sorte que leur résistance au courant longitudinal ne soit *pas* négligeable devant la résistance transverse du graphite? Nous n'essayerons pas de résoudre ce problème, mais il est instructif de se demander à quoi ressembleraient les lignes de courant. La figure 4.7 c et d montre leur aspect prévisible, pour deux positions différentes des bornes.

4.8 Circuits et éléments de circuits

Les appareils électriques ont habituellement des bornes bien déterminées auxquelles on puisse relier des fils conducteurs. Les charges peuvent entrer dans l'appareil ou en sortir par ces bornes. En particulier, si, alors cue des câbles retient deux bornes, et deux bornes seulement, à un circuit extérieur, on a un courant stationnaire avec des potentiels partout constants, il est évident cue le courant doit être égal en valeur absolue et de signe opposé aux deux bornes ⁽⁶⁾. Dans ce cas, nous pouvons parler du courant ! qui passe à travers le système et de la tension $V \ll$ entre les bornes » ou « appliquée aux bornes » c'est-à-dire leur différence de potentiel. Pour un courant I donné, le rapport V/I vaut un certain nombre d'unités de résistance (des ohms, si V est en volts et I en ampères). Si tous les éléments du système à travers lequel le courant passe obéissent à la loi d'Ohm, ce nombre sera une constante indépendante du courant. Et ce nombre décrira complètement le comportement électrique du système, pour un courant stationnaire (on dit aussi « courant continu ») passant par les bornes considérées. Nous introduisons au moyen de cette seule remarque la notion d'élément de circuit.

Regardons les cinq boîtes de la figure 4.8. Chacune d'elles possède deux bornes, et à l'intérieur de chaque boîte il y a un système différent. Si l'on insère l'une quelconque de ces boîtes dans un certain circuit électrique au moyen de fils connectés à ses bornes, on trouve que le rapport de la différence de potentiel au courant circulant à travers les fils de connexion est 65 ohms. On dit alors que la résistance entre bornes est 65 ohms pour chaque boîte. Cet énoncé ne serait sûrement pas correct pour



(a) Une longueur de 28 cm de fil de nichrome de diamètre 0,1 mm.



(c) Deux résistances de 70 ohms et une de 30 ohms.



(e) Une solution 0,5 N de KCl munie d'électrodes ayant des dimensions particulières.

Fig. 4.8 Systèmes, variés, tous equivalents, en courant continu, à une resistance de 65 ohms



(b) Une bobine de 225 g de fil de cuivre émaillé de 0,4 mm de diamètre (314



(d) Une ampoule à filament de tungstène (115 volts, 25 Watts) quand elle est froide.

toutes les valeurs possibles du courant ou de la différence de potentiel. Quand on augmente la différence de potentiel ou tension entre les bornes, il peut se produire beaucoup de choses, et plus tôt dans certaines des boîtes que dans d'autres, qui changeront le rapport tension/courant. Vous êtes sûrement capables de dire dans quelles boîtes on aura le plus tôt des ennuis. Il y a cependant une certaine limite au dessous de laquelle toutes les boîtes se comportent linéairement, et elles sont alors toutes identiques pour des courants stationnaires. Elles sont toutes identiques au sens suivant : si

un certain circuit contient une de ces boîtes, il aura le même comportement quelle que soit la boîte utilisée. Chaque boîte

⁽⁶⁾ Il peut très bien exister un système tel que le courant entrant par l'une des bornes soit 4 A tandis que le courant sortant par l'autre soit de 3 A. Mais alors le système accumule de la charge à la vitesse de 1 C/s. Son potentiel doit alors changer rapidement et cela ne peut durer toujours. Le courant n'est donc pas *stationnaire*, c'est-à-dire indépendant du temps.

est équivalente à une résistance de 65 ohms⁽⁷⁾. Nous la représentons par le symbole β et la remplaçons par cette abstraction dans la description de tout circuit dont elle est un élément. Un circuit électrique est donc constitué d'un ensemble de tels éléments reliés par des fils de résistance négligeable.



Fig. 4.9 Quelques résistances reliées ensemble (a), le schema du circuit (b) et les résistances équivalentes (c) et (d) entre certaines bornes.



Fig. 4.10 Résistances en séries.



$$R = R_1 + R_2$$
 (4.24)

 $R_1 R_2$

Si l'on prend un circuit constitué par de nombreux éléments reliés entre eux et que l'on choisisse deux points du circuit comme bornes d'entrée et de sortie, on peut considérer qu'il est équivalent, tant qu'on ne considère que les deux bornes, à une simple résistance. Nous disons que le système d'objets physiques dessiné sur la figure 4.9 a est représenté par le schéma de la figure 4.9 b et est équivalent pour les bornes A_1 et A_2 au schéma de la figure 4.9 c. Le circuit équivalent pour les bornes B_1 et B_2 est donné par la figure 49 d. Si vous mettez ce système dans une boîte et que seules les bornes B_1 et B_2 soient accessibles, on ne pourra pas le distinguer d'une résistance de valeur 57,6 ohms. Mais, attention, tout ce que nous venons de dire ne concerne que des mesures en courant continu ! Il fallait que les courants et les champs électriques soient constants dans le temps; s'ils ne le sont pas, le comportement

d'un élément de circuit ne dépendra pas que de sa résistance. On peut étendre le concept de circuit équivalent à des systèmes où le courant et la tension varient dans le temps. C'est d'ailleurs dans ces cas qu'il est le plus intéressant. Mais nous ne sommes pas encore prêts à étudier ce régime.

Nous allons maintenant voir les méthodes de calcul des résistances équivalentes d'un circuit. Les cas des groupements en série et en parallèle sont faciles. Un montage comme celui de la figure 4.10 constitue la mise en série de deux résistances de valeurs R_1 et R_2 . La résistance équivalente vaut

La figure 4.11 représente deux résistances en parallèle. On trouve par un raisonnement que vous devez être capables de faire tous seuls, que la résistance équivalente *R* vaut

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ ou } R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$
(4.25)

Voilà tout ce dont on a besoin pour étudier un circuit comme celui de la figure 4.12 qui, malgré sa complexité, peut se réduire à des montages en série ou en parallèle. On *ne peut* cependant réduire ainsi le circuit pourtant simple de la figure 4.13, ce qui montre la nécessité d'une méthode plus générale. Tout circuit formé de résistances dans lequel circule un courant constant doit satisfaire les conditions suivantes

(i) Le courant à travers chaque élément doit être égal au quotient de la tension aux bornes de cet élément par la résistance de celui-ci.

⁷ Nous utilisons le terme de résistance pour tout objet conçu spécialement pour cette fonction. Une « résistance bobinée de 200 ohms, 10 watts », est un objet constitué par une bobine de fil enroulée sur une armature isolante, munie de bornes, qui fonctionne normalement tant que la puissance qui y est dissipée ne dépasse pas 10 watts.



Fig. 4.12 Simplification d'un circuit formé uniquement de montages en série et en parallèle.



Fig. 4.14 Courants et potentiel aux noeuds d'un circuit.



Fig. 4.15 Dans le générateur de Van de Graff, les porteurs de charges sont mécaniquement transportés dans une direction opposée à celle dans laquelle le champ électrique les ferait se déplacer.

d'intégration fermé). L'écriture algébrique de ces conditions dans le cas d'un circuit quelconque fournira le nombre exact d'équations linéaires indépendantes nécessaires pour affirmer qu'il y ait une solution

(ii) En tout *noeud* du circuit, c'est-à-dire en tout point où se rejoignent trois fils conducteurs ou plus, la somme algébrique des courants doit être nulle. (C'est l'expression, en language de circuit, de la conservation de la charge, équation 4.7).

(iii) La somme des différences de potentiel prises dans l'ordre autour d'une *boucle*, qui est un morceau du circuit commençant et finissant au même noeud, est nulle. (C'est ainsi que se traduit dans la théorie des circuits la propriété bien connue de tout champ électrique statique :

E ds = 0, pour tout contour



Fig. 4.13 Un circuit simple en pont. On ne peut le simplifier comme la figure 12 et en parallèle.

et une seule donnant la résistance équivalente entre deux noeuds. Nous énonçons ceci sans le prouver. Il est intéressant de remarquer que la structure d'un problème de circuit en courant continu ne dépend que de la topologie du circuit, c'est-à-dire des caractéristiques du schéma des connections qui sont indépendantes de toute déformation des lignes de connection.

Un circuit de résistances en courant continu est un système linéaire -

courants et tensions sont déterminés par un ensemble d'équations linéaires, traduisant les conditions (i), (ii) et (iii). La superposition de différents états d'équilibre du circuit est done encore un état d'équilibre. La figure 4.14 représente une section d'un circuit avec certains courants, I_1 , I_2 , ..., circulant dans les fils et certains potentiels, V_1 , V_2 , ..., existant aux noeuds. Si un autre système de courants et de potentiels, à savoir I_1 , ..., V_1 , ..., est un autre état d'équilibre pour cette section du circuit, il en est de même pour le système ($I_1 + I_1$), ..., ($V_1 + V_1$),... Ces courants et tensions, correspondant à la superposition, satisferont également les conditions (i), (ii) et (iii). C'est l'origine d'un certain nombre de théorèmes généraux de la théorie des circuits, qui sont intéressants et utiles pour l'ingénieur électricien.

4.9 Dissipation d'énergie au passage du courant

Le passage du courant dans une résistance entraîne une dissipation d'énergie. S'il faut une force **F** pour déplacer un porteur avec une vitesse moyenne **v**, cela nécessite une dépense d'énergie par unité de temps égale à $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Si un champ électrique **E** agit sur un ion de charge q, on a $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$

et le travail fourni par unité de temps est $q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$. L'énergie ainsi mise en jeu peut apparaître sous forme de chaleur. Sur notre modèle de conduction ionique on peut voir clairement comment ceci se produit. L'ion reçoit une énergie cinétique supplémentaire, entre les collisions, de la même façon qu'il reçoit de la quantité de mouvement. Une collision, ou quelques

collisions au plus, suffit à réorienter au hasard sa quantité de mouvement mais ne lui restitue pas nécessairement son énergie cinétique originale. Pour que cela se produise, il faut que l'on communique de l'énergie cinétique à l'obstacle qui le fait dévier. Supposons que le porteur de charge ait une masse considérablement plus petite que l'atome neutre avec lequel il fait une collision. Le transfert moyen d'énergie cinétique entre une boule de billard et une boule de pétanque est faible. Aussi l'ion (boule de billard) continuera-t-il à accumuler de l'énergie jusqu'à ce que son énergie cinétique moyenne soit assez élevée pour que sa perte moyenne d'énergie par collision soit égale à la quantité d'énergie qu'il gagne entre les collisions. De cette façon, après avoir d'abord « chauffé » les porteurs de charge eux-mêmes, le travail fourni par la force électrique agissant sur les porteurs de charge est ensuite transféré au reste du milieu sous la forme d'une énergie cinétique désordonnée, c'est-à-dire de chaleur.



Fig. 4.16 La pile de Weston, qu'on utilise comme étalon pour des mesures précises de tension. Ceci représente la pile « non saturée ». Dans le modèle « saturé » il y a du S0₄Cd en excès non dissous sur chaque électrode, en plus des constituants représentés ici.

Supposons qu'un courant stationnaire de *I* ampères circule à travers une résistance de *R* ohms. A chaque seconde, une charge de *I* coulombs passe à travers une différence de potentiel de *V* volts, avec V = RI. Le travail effectué en 1 s est done RI^2 , en joules (1 coulomb × 1 volt = 1 joule = 10^7 ergs). Le *watt*, ou volt-ampère, est l'unité correspondante de puissance *P* (1 watt = 1 joule/s).

$$P = RI^2 \qquad (4.26)$$

Le passage d'un courant stationnaire dans un circuit nécessite évidemment une source d'énergie capable de maintenir le champ électrique qui agit sur les porteurs de charge. Jusqu'ici, nous avons évité le problème de la *force*

charge. Jusqu'ici, nous avons évité le problème de la *force électromotrice* en ne nous intéressant qu'à des fragments de circuits ; nous avons maintenu à l'écart la « pile ». Dans la section 4.10, nous allons étudier quelques sources de force électromotrice.

4.10 Force électromotriee et générateur électrochimique

L'origine de la force électromotrice dans un circuit en courant continu est un certain mécanisme qui transporte les porteurs de charge dans une direction opposée à celle dans laquelle le champ électrique les déplace. Un générateur électrostatique Van de Graaff (fig. 4.15) en est un modèle à grande échelle. En fonctionnement normal, nous trouvons un courant circulant dans la résistance extérieure dans la direction du champ E, ce qui correspond à une dissipation d'énergie dans la résistance (elle apparaît sous forme de chaleur) à la cadence de V_0I ou RI^2 par unité de temps. A l'intérieur de la colonne de la machine, il y a aussi un champ électrique dirigé vers le bas. Les porteurs de charge peuvent y être déplacés contre le champ dans la mesure où ils sont fixés sur une courroie isolante. Ils adhèrent si fort à celle-ci qu'ils ne peuvent glisser vers le bas le long de la courroie sous l'action du champ électrique dirigé vers le bas. (On peut néanmoins les retirer de la courroie au moyen d'un champ beaucoup plus fort existant sur les peignes de l'électrode du haut. Nous n'avons pas besoin de nous étendre ici sur les movens utilisés pour apporter les charges à la courroie ou les en retirer au niveau des poulies.) L'énergie nécessaire pour entraîner la courroie est fournie par l'extérieur, généralement par un moteur électrique relié au réseau de distribution, mais ce pourrait être un moteur à essence ou même un homme tournant une manivelle.) Ce générateur Van de Graaff apparait comme une alimentation dont la force électromotrice est de V_0 volts.

Dans les piles ordinaires, c'est l'énergie chimique qui assure le transport des charges dans une région où le champ électrique s'oppose à leur mouvement. Une charge *positive* pourra donc aller vers un point à plus haut potentiel électrique si, ce faisant, elle participe à une réaction chimique qui fournit plus d'énergie qu'il n'en cope pour faire remonter à la charge une telle « dénivellation » électrique.



Fig. 4.17 Voici d'une manière très schématique, ce qui se passe en (a) à l'interface de l'électrode positive, et en (b) à l'interface de électrode négative quand on relie la pile de Weston à une charge extérieure.

Pour voir comment cela se passe, examinons un générateur électrochimique particulier; on appelle ainsi toute source chimique de force électromotrice. C'est dans les expériences de Galvani vers 1790 sur les pattes de grenouilles qu'est apparue la première production chimique de courant électrique. Ce fut Volta qui prouva que Porigine n'en était pas due à de « l'électricité animale », comme le pensait Galvani, mais au contact de métaux différents dans le circuit. Volta construisit la première pile, fait d'un empilement d'éléments constitués chacun d'un disque de zinc et d'un disque de cuivre séparés par un buvard humecté d'eau. La pile de Volta fut la première source pratique de courant électrique continu. II existe différentes sortes de générateurs électrochimiques y compris la « pile sèche » dont le nom est discutable! La batterie d'une automobile est composée, si c'est une batterie de 12 volts, de six éléments au plomb et à l'acide sulftrique en série. Nous allons maintenant décrire un autre générateur chimique, la pile de Weston, qui a un comportement chimique simple. Cette pile présente en outre un intérêt particulier au laboratoire comme étalon de tension.

La figure 4.16 représente un modèle de pile de Weston. C'est un récipient de verre en forme de H remplie d'une solution aqueuse de sulfate de cadmium, CdSO₄, Un fil métallique extérieur est scellé au bas de chaque « jambe » du récipient, pour assurer le contact avec les électrodes intérieures. Celles-ci sont constituées, à gauche, par du mercure pur et, à droite, par du



Fig. 4.18 La distribution de potentiel en circuit ouvert. On a pris arbitrairement comme zero de potentiel celui de la borne de droite.



Fig. 4.19 La distribution de potentiel quand du courant traverse la résistance extérieure. Remarquez la chute de potentiel au travers de l'électrolyte. Ce n'est PAS la façon de traiter une pile de Weston utilisée comme étalon. On doit utiliser une pile étalon de manière à ce que le courant débité soit extrêmement faible.

mercure dans lequel on a dissous du cadmium. (Beaucoup de métaux se dissolvent dans le mercure; on appelle *amalgame* une telle solution.) Au dessus du mercure de l'électrode de gauche, il y a un dépôt de cristaux de sulfate de mercure, SO_4Hg_2 , composé qui est très peu soluble dans l'eau. Il existe une différence de potentiel entre les électrodes, celle de gauche étant positive par rapport à celle de droite. (La valeur exacte du potentiel de chaque électrode est sans intérêt; ce qui compte ici, c'est la différence de potentiel). Ce qui l'explique, c'est que des ions cadmium ont diffusé dans la solution aqueuse à partir de l'amalgame,

laissant chacun derrière eux deux électrons, de sorte que l'électrode en amalgame a une charge négative importante. Ce déplacement d'ions s'arrête néanmoins quand l'électrode en question contient suffisamment d'ions en excès pour que leur attraction empêche d'autres atomes de cadmium d'abandonner leurs électrons et de s'en aller.

Si nous fermons maintenant le circuit en reliant une résistance aux bornes de la pile, les électrons iront dans ce circuit extérieur de l'électrode négative à l'électrode positive. Ceci permettra à des ions Cd⁺⁺ Supplémentaires de diffuser dans la solution, les électrons qu'ils laissent derrière eux servant simplement à maintenir la charge négative de l'électrode de droite. Il y aura donc un courant continu, accompagné d'un déplacement d'ions, refermant le circuit à travers la solution aqueuse. Pendant ce temps, d'autres phénomènes se produisent sur l'autre électrode. La figure 4.17 montre ce qui se passe, quand le courant circule, à chacune des interfaces entre électrode et solution (électrolyte). Sur la figure 4.17 a, des ions mercure Hg^+ quittent la solution quand ils rencontrent des électrons venant de l'extérieur et deviennent ainsi des atomes neutres de mercure. Ils sont remplacés dans la solution par la dissolution de SO₄Hg₂ qui fournit en même temps de nouveaux ions sulfate à l'électrolyte. Sur la figure 4.17 b les atomes de cadmium continuent à perdre leurs deux électrons et ils pénètrent ce faisant dans la solution sous la forme d'ions Cd⁺

L'effet global de tout cela est l'extraction d'électrons des atomes de cadmium et l'addition simultanée d'électrons aux ions mercure. Un chimiste dirait que le cadmium est oxydé et que le mercure est réduit. Le système fonctionne parce que cet échange est énergétiquement favorable. Les énergies de liaison des électrons duns l'atome de cadmium et celui de mercure sont telles que, pour parler simplement, les ions de mercure ont plus d'intérêt à gagner des électrons que les atomes de cadmium de crainte d'en perdre. Remarquez qu'à chaque interface, des ions se déplacent en sens contraire à l'effet du champ électrique. Ce sont ces couches de transition, épaisses de quelques angstroms à peine, qui correspondent à la courroie du générateur Van de Graaff.



Fig. 4.20 (a) Le circuit équivalent à un générateur électrochimique est compose simplement d'une résistance R_i en série avec une force électromotrice de valeur fixe &

(*b*) Calcul du courant dans un circuit, manière à ce que le courant débité soit extrêmement faible.



Fig. 4.21 Charge et courant dans un circuit *RC*. La charge diminue d'un facteur 1/e en un temps *RC*.

Considérons maintenant les variations de potentiel électrique le long du système, en circuit fermé et en circuit ouvert. On a tracé sur la figure 4.18 la variation du potentiel le long du circuit quand il n'y circule pas de courant. La différence de potentiel existant entre les bornes en circuit ouvert est la force électromotrice de la pile, de symbole ε . Le champ électrique est égal au gradient du potentiel changé de signe. Comme pour tout champ électrostatique, la circulation de **E** autour du circuit complet est nulle. (En passant, remarquons que la valeur attribuée sur le dessin au potentiel de l'électrolyte est assez arbitraire - on ne peut le mesurer directement.)

La figure 4.19 représente la distribution de potentiel quand le courant passe à travers une résistance extérieure. Dans l'électrolyte règne un champ électrique ayant la direction du courant. La solution de sulfate de cadmium se comporte comme une résistance ordinaire. La différence de potentiel aux bornes vaut dans ce cas moins que ε , en raison de la chute de potentiel dans l'électrolyte, et peut-être aussi à cause de la résistance des couches de transition. La circulation du champ électrique le long du circuit complet est toujours nulle. Si on fait passer le courant jusqu'à ce qu'une charge de Q coulombs ait traversé le circuit, une énergie de εQ joules, avec ε en volts, aura été dissipée à l'intérieur aussi bien qu'à l'extérieur, au dépens de l'énergie chimique des constituants de la pile.

La force électromotrice d'une pile dépend des propriétés atomiques de ses constituants. Elle a des valeurs de l'ordre du volt, car les énergies de liaison des électrons des couches externes des atomes sont de l'ordre de quelques électron-volts, et ce sont essentiellement les différences entre énergies de liaison qui déterminent la force

électromotrice. Celle-ci dépend quelque peu de la température, ce qui nous rappelle que le traitement complet des processus électrochimiques est un problème de thermodynamique. C'est un des grands sujets de la chimie physique. Pour être rigoureux, ce n'est pas l'énergie, mais ce qu'on appelle *l'énergie libre*, qui intervient, mais nous ne ferons pas cette distinction, que nous laisserons aux thermodynamiciens.

On n'utilise pas la pile de Weston comme source d'énergie électrique mais comme étalon de différence de potentiel. C'est pourquoi la situation décrite par la figure 4.19, où le courant circulant dans la pile est si grand qu'il y a une chute de tension aux bornes de 10 pour cent, correspond à une utilisation anormale. La force électromotrice de la pile de Weston est extrêmement constante. Dans un modèle légèrement différent, où la solution aqueuse est saturée par du sulfate de cadmium placé près des deux électrodes, la force électromotrice est de 1,0183 volts à 20° C. En utilisant une pile de Weston comme étalon et un montage potentiométrique, on peut mesurer des tensions avec une précision de 10⁻⁵.

Tant qu'on ne s'intéresse qu'à son rôle dans un circuit extérieur, on peut très bien représenter une pile par un circuit équivalent formé d'une force électromotrice ε en série avec une certaine résistance interne R_i . Si la pile est reliée à une résistance extérieure R, il passe dans le circuit un courant

$$I = \frac{\mathcal{E}}{(R+R_i)}$$

comme on l'a figuré sur la figure 4.20.

4.11 Courants variables dans les condensateurs et les résistances

Considérons un condensateur de capacité C que l'on a chargé à un certain potentiel V_0 et que l'on a déchargé en le mettant en parallèle avec une résistance R. La figure 4.21 représente le condensateur de symbole conventionnel ||, la résistance R et un interrupteur que nous imaginons que l'on ferme au temps t = 0. Il est évident que, au fur et à mesure que le courant passe, le condensateur perd graduellement sa charge, ce qui, en retour, diminue l'intensité du courant. Pour voir ce qui se passe exactement, il nous suffit d'écrire les conditions qui gouvernent le circuit. Soit Q la charge du condensateur à un instant, V la différence de potentiel entre les plaques de celui-ci; V est aussi la tension aux bornes de la résistance R. Soit I l'intensité du courant, comptée positivement quand le courant sort de la borne positive du condensateur. Il existe entre ces quantités, qui dépendent toutes du temps, les relations suivantes

$$Q = CV \qquad I = V / R \qquad -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I \tag{4.27}$$

En éliminant I et V, on obtient l'équation qui gouverne la variation de Q en fonction du temps

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q}{RC} \tag{4.28}$$

En l'écrivant sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC} \tag{4.29}$$

nous pouvons intégrer chaque membre, ce qui nous donne

$$\operatorname{Log} Q = \frac{-t}{RC} + C^{te} \tag{4.30}$$

La solution de notre équation différentielle est donc

$$Q = (\text{une autre constante}) \times e^{-t/RC}$$
(4.31)

Nous avons dit qu'à t = 0, $V = V_0$, de sorte que $Q = CV_0$ u t = 0. Ceci détermine la constante et nous aeons maintenant la loi exacte de variation de Q après que l'on ait fermé l'interrupteur

$$Q = CV_0 e^{-t/RC} \tag{4.32}$$

La loi de variation de l'intensité du courant I s'en déduit aussitôt

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R_0} e^{-t/RC}$$
(4.33)

A la fermeture de l'interrupteur, le courant monte instantanément jusqu'à la valeur V_0/R puis décroît exporientiellement vers zéro. Le temps caractéristique de cette décroissance est la constante *RC*. On parle souvent de la « constante de temps » *RC* associée à un circuit ou à une partie d'un circuit.

Dans le système d'unités M.K.S., l'unité de capacité est le *farad*. Un condensateur de un farad a une charge de un coulomb pour une différence de potentiel de un volt. Avec *R* en ohms et *C* en farads, le produit *RC* est un temps en secondes. Pour vérifier cela, remarquez simplement que un ohm = un volt / un ampère = 1 volt-s/1 coulomb, tandis que 1 farad = 1 coulomb/volt. Si on réalise le circuit de la ligure 4.21 avec un condensateur de 0,05 microfarad et une résistance de 5 mégohms, qu'on trouve tous les deux très couramment dans n'importe quel laboratoire, on obtient $RC = 5 \times 10^6 \times 0,05 \times 10^{-6} = 0,25$ s.

De façon tout à fait générale, dans tout système composé de conducteurs chargés et de réseaux résistifs, il existe un produit résistance capacité qui fixe une échelle de temps caractéristique de certains processus physiques du système. Prenons un condensateur plan parallèle ayant des armatures de surface S, séparées par une distance e. Sa capacité C est $\varepsilon_0 S/e$. Imaginons

alors que l'on remplisse l'intervalle entre les plaques avec un milieu conducteur de résistivité ρ . Afin d'éviter d'avoir à se demander comment cela peut modifier la capacité, on suppose que le milieu en question est un gaz très faiblement ionisé; une substance d'aussi faible densité ne modifiera pratiquement pas la capacité. Le condensateur se déchargera dans le milieu conducteur de la même façon que dans la résistance extérieure de la figure 4.21. Quelle sera la rapidité de ce phénomène? La résistance *R* du milieu résistif vaut $\rho e/S$. La constante de temps *RC* est donc

$$\rho e/S \times \varepsilon_0 S/e = \rho \times \varepsilon_0$$

Ce temps est donc indépendant de la géométrie et de la taille du condensateur. Ce que nous avons obtenu est tout simplement la constante correspondant au processus de redistribution des charges (ou relaxation du champ électrique) dans un milieu conducteur. Les plaques du condensateur ne nous sont absolument pas nécessaires pour décrire le phénomène en question. Si nous plaçons deux couches de charges de même valeur absolue et de signe contraire dans un milieu conducteur, elles se neutraliseront, le champ électrique s'annulera, et le milieu retrouvera un potentiel constant. Le *temps de relaxation* est déterminée par la résistivité ρ . Par exemple, si notre gaz faiblement ionisé avait une résistivité de 10^8 ohm-cm, le temps de relaxation devrait être de l'ordre de 10μ s.

Si nous nous rappelons que les corps vraiment bons conducteurs comme les métaux ont une résistivité de l'ordre de 10^{-5} ohm-cm, nous voyons alors qu'ils doivent avoir un temps de relaxation de l'ordre de 10^{-18} s. Mais un nombre si petit doit éveiller notre sens critique. Peut-on réellement le considérer comme le temps nécessaire pour que la densité volumique de charge dans un conducteur revienne à zéro après qu'on y ait créé une concentration de charge? Remarquons d'abord qu'il est beaucoup plus court que tout temps de collision ou de corrélation que l'on puisse déduire de notre modèle de conductivité électrique. A partir de l'équation 4.18, nous avons trouvé $\tau = 3 \times 10^{-14}$ s pour le sodium à la température ambiante. Ceci nous montre que, pour des phénomènes ayant lieu sur une échelle de temps aussi faible, nous n'avons pas le droit d'utiliser la résistivité ρ du régime continu. Ceci jette le doute sur toute estimation quantitative du temps de relaxation.

Il y a en outre une très profonde raison de penser que le tableau que nous venons de brosser était incomplet. Elle se trouve dans le fait que notre temps de relaxation $T = \rho \varepsilon_0$ apparaît comme indépendant de la *dimension* de la région concernée. Ce n'est pas gênant si le système considéré est assez petit ; mais si, pour un certain temps do relaxation fini *T*, le milieu considéré a une dimension plus grande que *T* fois la vitesse de la lumière, il s'ensuit que la propagation de la redistribution de charge doit se faire à une vitesse plus grande que *c*. Ceci serait en contradiction avec la théorie de la relativité. Nous voyons donc que, pour que les systèmes de charges et de champs électriques satisfassent aux postulats de la relativité restreinte, il faut rajouter quelque chose à tout ce que nous avons introduit jusqu'ici. Ce sera l'objet des chapitres suivants.

Problèmes

- 4.1 Nous considérons 5 ×10¹⁶ ions positifs ionisés deux fois par mètre cube, se déplaçant tous vers l'ouest à la vitesse de 10⁵ m/s. Dans la même région de l'espace, il y a 10¹⁷ électrons par mètre cube, se déplaçant vers le nord-est à la vitesse de 10⁶ m/s. (Ne nous demandez pas comment nous avons réalisé cela!) Quelle est la direction de J? Quel est son module en ampères par mètre carré ? Rep. 48,8° à l'ouest du sud; 18 500 amp/m².
- 4.2 Dans un synchrotron à électrons de 6 BeV, les électrons effectuent un trajet approximativement circulaire d'une longueur de 240 m. Il est normal d'avoir environ 10¹¹ électrons qui décrivent ce cercle à chaque cycle d'accélération. La vitesse des électrons est pratiquement celle de la lumière. Que vaut l'intensité du courant ? Nous proposons ce problème extrêmement simple pour mettre en évidence le fait que rien, dans notre définition de l'intensité du courant, n'exige que les vitesses des porteurs de charge soient non-relativistes et que rien n'empêche de compter plusieurs fois par seconde la même particule dans l'estimation du courant.
- 4.3 Dans un générateur électrostatique Van de Graaff, une courroie caoutchoutée d'une largeur de 30 cm est entraînée à la vitesse de 20 m/sec. On communique à la courroie, sur la poulie du bas, une charge de surface assez élevée pour créer un champ électrique de 1 200 kV/m sur chaque face de la courroie. Que vaut le courant en milliampères ?
- 4.4 Considérons une diode à vide dont la cathode et l'anode sont des plans parallèles (fig. 4.2). La distance entre anode et cathode est *s* en m, la surface de chacune est *A* en m² et le courant électrique émis par la cathode et collecté par l'anode a une intensité de *I* ampères. Le potentiel de la cathode étant pris comme origine, celui de l'anode est maintenu à V_0 volts, où V_0 est positif. Quelle est, en fonction de sa distance *x* à la cathode, la vitesse *v* de l'électron et quelle est la densité ρ de charge d'espace? On supposera que l'intensité du courant est si faible que le champ électrique n'est pas modifié par la cathode avec une vitesse initiale nulle.

- 4.5 Si on estime que le nombre des électrons de conduction d'un métal tel que l'argent est le même que le nombre d'atomes, quelle est la vitesse oyenne de dérive des électrons de conduction dans un fil d'argent de 1 mm de diamètre traversé par un courant de 30 ampères ? Donnez une réponse approchée; vous n'avez qu'à estimer toute constante nécessaire à votre calcul que vous ne trouveriez pas dans nos tables de constantes.
- 4.6 Un récipient rempli d'air aux conditions normales de température et de pression est exposé à un faisceau de rayons X qui ionisent une petite partie des molécules qu'il contient. Les ions négatifs sont constitués par des molécules d'O₂ possédant un électron supplémentaire. Dans les limites de ce problème, vous pouvez traiter toutes les molécules comme si elles avaient un mème poids moléculaire compris entre celui de O_2 et N_2 . Le récipient est une boîte de 10 cm × 10 cm × 2 cm dont les faces de 10 cm × 10 cm sont métalliques tandis que les autres sont isolantes. Une tension de 1 000 volts appliquée sur les faces métalliques fait passer un courant de $1,5 \times 10^{-6}$ amp. Quelle est la conductivité de ce gaz faiblement ionisé ? Si on prend comme vitesse moyenne des ions 5×10^2 m/s et comme libre parcours moyen 10^{-7} m, quel est le temps de collision? Quelle fraction du nombre total de molécules du gaz est-elle ionisée? (On supposera qu'il y a un nombre égal d'ions chargés positivement et négativement ionisés une fois).



- 4.7 Un expérimentateur veut obtenir une couche d'aluminium de 50 angstroms d'épaisseur par évaporation du métal dans le vide sur une surface de verre propre. 11 commence par évaporer une couche assez épaisse en masquant une bande centrale de façon à ce qu'elle reste nue. Puis, en utilisant un autre cache, il évapore sur le verre une bande de la même largeur en travers de la précédente, tout en utilisant les dépbts épais comme bornes de mesure de la résistance. A quelle valeur de la résistance doit-il arrêter l'évaporation'?(La résistivité de l'aluminium pur est de 2,83 × 10⁻⁶ ohm × cm).Prob. 4.7
- 4.8 Le fer pur a une résistivité de $10,0 \times 10^{-6}$ ohm × cm à 20°C. La résistivité du cuivre à cette température est de $1,77 \times 10^{-6}$ ohm × cm. Considérons deux conducteurs composites différents. Chacun d'eux a un métre de long et une section carrée de 8 mm de côté. Le conducteur *A* est fait de deux barreaux de section carrée de 50 cm de long, l'un en fer et l'autre en cuivre, reliés bout à bout. Le conducteur *B* est fait de deux barreaux de 1 m de long, de section transverse 4 mm × 8 mm, l'un en cuivre, l'autre en fer, serrés côte à côte. Quelle est en ohms la résistance de chacun des conducteurs *A* et *B*? Si un courant continu passe à travers *A*, dans quel matériau la dissipation d'énergie sera-t-elle la plus grande ? Répondez à la même question pour le conducteur *B*.
- 4.9 Si vous étiriez un fil de cuivre jusqu'à augmenter sa longueur de 0,1 pour cent, de combien pensez-vous que cela changerait sa résistance? Quelles hypothèses faites-vous sur les caractéristiques électriques du cuivre qui se déforme?
- 4.10On suspend en plein océan, au bout de deux câbles isolés, deux electrodes formées par des sphères métalliques de 30 cm de diamètre. Les sphères sont à une profondeur de 60 m; elles sont séparées par une distance horizontale de 300 m. Le circuit se referme par un câble isolé maintenu près de la surface et qui retourne vers un bateau situé au-dessus de l'une des sphères. En prenant 4(ohm-m)⁻¹ comme conductivité de l'eau de mer, évaluez la résistance présentée par ce circuit. Vous devrez d'abord décider si la résistance entre les sphères est due surtout à la région au voisinage immédiat de chaque sphère ou à tout le grand volume d'océan mis en jeu. Pour éclaircir vos idées sur la question, vous pouvez considérer la résistance entre deux sphères concentriques de rayons très inégaux, séparées par un milieu, très homogène. Vous pouvez aussi tracer grossièrement les lignes de courant dans l'océan entre les sphères. Cette question de la résistance d'un circuit dont une partie consiste en une sonde introduite dans un milieu faiblement conducteur a de l'importance non seulement en géophysique, mais aussi pour de nombreuses mesures physiologiques.



- 4.11 Dans le circuit de droite, R_0 étant donnée, quelle valeur doit avoir R_1 afin que la résistance d'entrée entre les bornes snit égale à R_0 .
- 4.12Quand on branche sur une résistance R une pile de force électromotrice inconnue V et de résistance interne nulle, un ampèremètre placé dans le circuit indique 4 ampères. Quand on place en série avec R une resistance supplémentaire de 10

ohms, le courant indiqué par l'appareil chute à trois ampères. Quelles sont les valeurs de R et de V? Si la pile *avait eu* une résistance interne R_i , quel ensemble d'expériences aurait pu nous donner R, V et R_i ?

4.13Montrer que si une pile de force électromotrice ε , et de résistance interne R_i est reliée à une resistance extérieure variable R, la puissance fournie à la résistance extérieure est maximum quand $R = R_i$.



4.14On désire fournir de la chaleur avec une puissance constante à un certain appareil contenu dans un appareil à haute pression. Durant le cours d'une expérience, la pression varie et cela modifie la résistance du fil de chauffage. La figure représente un circuit qui peut étre d'un grand secours dans un cas pareil. La résistance R_3 est l'élément de chauffage monté à l'intérieur du cylindre à haute pression. R_1 et R_2 sont des résistances fixes situées à l'extérieur qui gardent des valeurs constantes; V_0 est la tension constante appliquée. Le but recherché est de rendre la puissance dissipée dans la resistance R_3 indépendante de sa valeur, au moins au premier ordre. Le raisonnement suivant montre que cela est realisable. Si R_3 tend vers l'infini, la puissance qui y est dissipée tend encore vers zéro, car la tension aux bornes de R_3 est limitée. Il doit donc y avoir un maximum entre 0 et l'infini. Votre problème sera de le trouver,

c'est-à-dire de trouver la condition que doivent satisfaire R_1 , R_2 et R_3 pour obtenir une puissance dépendant peu de la variation de R_3 .



4.15Dans le circuit en pont représenté sur la figure, les résistances $R_1, ..., R_5$ sont connues, ainsi que le courant I_0 qui entre à gauche et sort à droite. Il s'agit de trouver les courants circulant dans chaque branche. On leur a assigné arbitrairement des directions représentées par des flèches sur la figure. Si un courant circule dans le sens contraire à la flèche dans une certaine branche, il y aura une valeur négative. Pour chacun des quatre noeuds, on a une équation du type $I_0 - I_1 - I_3 = 0$. Écrivez-les et montrez qu'il n'y en a que trois d'indépendantes. Trouvez deux équations supplémentaires en appliquant la condition (iii), sect. 4.8 aux deux boucles. (Remarquez que l'on peut trouver trois boucles, mais vous pouvez voir qu'il existe seulement deux équations de telles boucles qui

soient indépendantes). Vous avez maintenant 5 équations à 5 inconnues et il ne vous reste plus qu'à effectuer le calcul. Si vous le faites, vous pouvez vérifier aisément vos résultats en faisant tendre vers zéro une ou plusieurs des résistances, ce qui réduit le circuit du pont à un réseau simple où le partage des courants est évident. Par exemple, que devez-vous obtenir pour I_1 si vous faites $R_5 = 0$?

- 4.16Pour illustrer la remarque faite dans la première note de bas de page de la section 4.8, considérons une « boîte noire » qui a à peu près la forme d'un cube de 10 cm de côté avec deux bornes. Chacune de ces bornes est reliée par un fil conducteur à des circuits extérieurs. A part cela, la boîte est parfaitement isolée de tout conducteur. Un courant dont l'intensité vaut environ un ampère circule à travers cet élément de circuit. Supposons maintenant que le courant d'entrée et le courant de sortie diffèrent d'un millionième d'ampère. Combien de temps faudra-t-il, s'il ne se produit rien d'autre, pour que la boite voit son potentiel s'élever de l 000 volts?
- 4.17Reprenons l'exemple déjà traité dans le texte du condensateur C qui se décharge à travers une résistance R et montrons que l'énergie totale dissipée dans la résistance est égale à l'énergie emmagasinée à l'origine dans le condensateur. Supposez que quelqu'un nous objecte que le condensateur n'est jamais réellement déchargé, puisque Q ne devient nul que pour t = ∞. Que lui répondriez-vous ? Vous pouvez trouver le temps que met la charge à se réduire à un électron, en faisant des hypothèses raisonnables.
- 4.18Une petite particule de graphite à peu près sphérique et d'environ 10 microns (10⁻⁵ m) de diamètre tombe dans le vide à travers un faisceau de protons de 3 kilovolts. On l'a faite tomber à partir d'une surface placée à quelques centimètres au-dessus du bord supérieur du faisceau. Le faisceau des protons, qui est horizontal, transporte un courant de 10 mA uniformément réparti sur une section circulaire de 2 cm de diamètre. Vous pouvez supposer qu'un proton de 3 kV ne peut traverser 10µ de graphite, ce qui entraine que tout proton atteignant du graphite y reste prisonnier. Que pouvez-vous prédire à propos de ce qui va arriver à la particule de graphite? Posez-vous donc les questions suivantes : combien la particule doit-elle capturer de protons pour que son potentiel soit assez élevé pour repousser tout proton supplémentaire? Pouvez-vous estimer grossièrement le temps que cela prendra? Ce temps est-il plus long que celui mis par la particule pour traverser le faisceau dans sa chute ? La particule acquerra-t-elle une vitesse horizontale non négligeable? S'échauffera-t-elle beaucoup? Pensez-vous qu'un tel faisceau de protons, dirigé vers le haut au lieu d'être horizontal, pourrait être utilisé pour maintenir une particule de graphite en sustentation dans le vide? (Remarque .sur les unités : dans ce problème comme dans la plupart des problèmes auxquels on a affaire dans la physique de tous les jours, les données sont exprimées dans divers systèmes d'unités. A vous de convertir celles qui le nécessitent dans un système cohérent).

4.19On peut être tenté de penser que la vitesse des porteurs de charge fixe une limite à la vitesse avec laquelle peut « relaxer » une distribution de charge dans un conducteur. Cependant, considérez un barreau de métal neutre sur lequel on dépose simultanément une unité de charge positive à une extrémité et une unité de charge négative à l'autre extrémité. Quel mouvement de charge est-il nécessaire dans la réalité pour que le barreau retrouve sa neutralité ? Ou considérez ceci : un proton de 10 MeV, dont vous trouverez aisément la vitesse égale à $4,5 \times 10^7$ m/s, se déplace parallèlement à la surface d'une plaque de cuivre à une distance de 1 cm de celle-ci. La vitesse des électrons de conduction dans le cuivre ne dépasse pas 10^6 m/s. Pensez-vous que la distribution de charge de surface induite « suivra » le mouvement du proton ou qu'elle sera en retard sur celui-ci?

Chapitre 5 Champs créés par les charges en mouvement

5.1 D'Oersted à Einstein



Fig. 5.1 (a) Des fils parallèles traverses par des courants de même sens s'attirent.



(*b*) Des fils parallèles traverses par des courants de sens opposes se repoussent.



(*c*) Ces forces ne sont pas modifiées si l'on place une plaque métallique entre les fils..

Durant l'hiver de l'année 1819, Hans Christian Oersted donnait, devant les étudiants en fin d'études de l'université de Copenhague, un cours intitulé « Électricité, Galvanisme et Magnétisme ». Par *électricité*, on entendait alors l'électrostatique; le *galvanisme* était relatif à l'étude des effets produits par les courants continus obtenus à l'aide de piles, il avait commencé par l'expérience de Galvani, suivie de celle de Volta; le *magnétisme* décrivait des phénomènes déjà connus depuis assez longtemps comme les propriétés des aimants naturels, de l'aiguille aimantée et du champ magnétique terrestre. Il semblait clair à beaucoup qu'il devait y avoir une relation entre les courants galvaniques et la charge électrique, bien qu'il n'existât pas de preuve plus directe que le fait qu'ils pouvaient tous deux causer des chocs. Par contre, le magnétisme et l'électricité ne semblait rien avoir de commun. Pourtant Oersted

avait le sentiment, de façon vague mais tenace, que le magnétisme pourrait être, au même titre que les courants galvaniques, une sorte de « forme cachée » de l'électricité. Cherchant à mettre ceci en évidence il essaya devant ses étudiants de faire passer un courant galvanique à travers un fil tendu au-dessus et à angle droit d'une aiguille aimantée. Cela n'eut aucun effet. Après le cours, mû par une impulsion incontrôlée, il recommença l'expérience, mais en mettant cette fois le fil parallèle à l'aiguille aimantée. Cette fois-ci l'aiguille dévia largement -et quand il inversa le courant, elle dévia dans l'autre sens !

Cette révélation venait à son heure dans le monde scientifique de l'époque. Dès que la chose fut connue, elle déclencha dans les autres laboratoires une fièvre d'expérimentation qui conduisit à d'importantes découvertes. Et Ampère, Faraday et quelques autres eurent tôt fait de donner une description complète et exacte de l'action magnétioue des courants électriques. La découverte par Faraday de l'induction électromagnétique, qui couronna le tout, ne survint que douze après l'expérience d'Oersted. Alors que, durant les deux siècles précédents, les connaissances humaines en matière de magnétisme n'avaient fait aucun progrès depuis la publication en 1600 du grand traité de William Gilbert *De Magnete*. Et c'est à partir de ces découvertes expérimentales que l'on construisit toute la théorie classique de l'électromagnétisme.

Maxwell en donna la formulation mathématique et elle connut une triomphale vérification quand Hertz mit en évidence, en 1888, les ondes électromagnétiques.

Historiquement, c'est de l'électromagnétisme que la relativité restreinte tire ses origines. Lorentz s'approcha beaucoup, quand il étudia l'électrodynamique des corps en mouvement, de la formulation d'Einstein. Et le célèbre article d'Einstein de 1905 ne s'intitulait pas « Théorie de la Relativité » mais « Sur l'électrodynamique des corps en mouvement ». Nous voyons aujourd'hui dans les postulats de la relativité et leurs conséquences un système général, régissant l'ensemble des lois physiques et pas seulement celles de l'électromagnétisme. Nous exigeons de toute théorie physique qu'elle soit relativistement invariante. C'est-à-dire qu'elle fournisse le même résultat dans tous les référentiels galiléens. Ce qui s'est produit à l'époque, c'est qu'il existait déjà une théorie physique relativistement invariante - la théorie électromagnétique de Maxwell - bien avant qu'on ait introduit le concept d'invariance relativiste. On doit laisser à l'historien des sciences le soin de spéculer sur la question de savoir comment auraient évolué les concepts de la relativité restreinte en l'absence d'une théorie complète de l'électromagnétisme; on ne peut d'ailleurs probablement pas y répondre. En tout cas, l'histoire de la science met clairement en évidence une évolution des idées allant de l'aiguille de boussole d'Oersted aux postulats d'Einstein.

Dans ce chapitre et le suivant, nous allons suivre ce développement *presque à l'envers*. Ceci n'implique aucun mépris pour l'histoire des idées. Nous pensons d'ailleurs que celui qui veut étudier l'histoire de ces splendides découvertes ne sera en aucun cas gêné par le fait de posséder une vue claire de la relation fondamentale existant entre électricité et magnétisme. On peut exposer très directement et très simplement cette relation en considérant sous l'angle de la relativité restreinte ce que nous avons déjà appris sur la charge électrique et sur le champ électrique. Mais avant, passons d'abord en revue quelques-uns des phénomènes que nous essayerons d'expliquer.

5.2 Forces magnétiques



Fig. 5.2 Une aiguille de boussole (*a*) et une bobine de fil traversée par un courant subissent les mêmes effets au passage du courant dans un conducteur voisin.



Fig. 5.3 Un exemple de l'attraction entre courants de même sens. Comparez avec la figure 5.1 (*a*). Nous pouvons aussi décrire ceci comme la deviation d'un faisceau d'électrons par un champ magnétique.

affaire avec une hypothétique charge électrique statique à la surface du fil. Une telle charge peut d'ailleurs exister et les deux fils être à des potentiels différents, mais la force qui nous intéresse ne dépend que du *mouvement* des charges dans les fils conducteurs, c'est-à-dire des deux courants. Vous pouvez intercalez une feuille de métal entre les deux fils sans affecter en rien cette force (fig. 5.1 c). On appelle forces *magnétiques* ces nouvelles forces qui sont mises en jeu quand des charges sont en mouvement.

L'aiguille aimantée d'Oersted (fig. 5.2 a) ne ressemble pas, à première vue, à un circuit parcouru par un courant continu. Nous savons maintenant ce qu'Ampère fut le premier à soupçonner, à savoir que le fer aimanté contient une foule de charges en mouvement perpétuel - qui sont des courants électriques à l'échelle atomique. Une mince bobine de fil munie d'une pile qui y fait passer un courant (fig. 5.2 b) se comporte tout à fait, sous l'influence d'un courant, comme une aiguille aimantée.

Si nous observons le mouvement d'une particule libre chargée, au lieu d'un fil transportant du courant, nous trouvons qu'il se passe la même chose. Dans un tube à rayons cathodiques, les électrons, qui sans cela iraient en ligne droite, sont déviés par un fil extérieur transportant du courant, ils se rapprochent ou s'éloignent de celui-ci selon la direction relative du courant darts ce fil (fig. 5.3). Des travaux pratiques vous ont sans doute rendus familiers avec ceci, et vous savez que l'on peut rendre compte de cette interaction entre les courants et d'autres charges en mouvement en introduisant un

champ magnétique. (Le champ électrique, rappelez-vous-en, n'était qu'une façon de rendre compte de « l'action à distance » entre charges statiques que la loi de Coulomb exprime mathématiquement.) Nous disons qu'à tout courant électrique est associé un champ magnétique régnant dans tout l'espace environnant. Tout autre courant, on toute particule chargée en mouvement qui se trouvent dans ce champ subissent une force proportionnelle à l'intensité du champ magnétique dans cette région de l'espace. Pour une particule chargée, cette force est toujours perpendiculaire à la vitesse. Elle est donnée, si la particule porte une charge q, par

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$
 (5.1) où **B** est le champ magnétique.

L'équation 5.1 sera notre définition de **B**. Le champ magnétique est un vecteur qui détermine la partie proportionnelle à la vitesse de la force agissant sur une particule chargée. En d'autres termes, l'exécution de l'ordre : « mesurez la direction et le module du vecteur **B** en un certain point » nécessite les opérations suivantes : prendre une particule de charge connue q.

Deux fils parallèles parcourus par des courants de même sens sont attirés l'un vers l'autre. La force par unité de longueur agissant l'un des fils apparaît comme sur proportionnelle au produit des deux courants et inversement proportionnelle à la distance séparant les deux fils (fig. 5.1 a). Si l'on inverse le sens d'un des courants, on obtient une force de répulsion. Les deux sections de fil de la figure 5.1 b, qui font partie du même circuit, tendent donc à s'écarter. Il existe donc une sorte « d'action à distance » entre deux éléments de circuits parcourus par des courants continus. Cela ne semble rien avoir avec une hypothétique charge affaire

Mesurer la force sur q au repos pour déterminer **E**. Puis mesurer la force sur la particule quand sa vitesse est **v**; recommencer avec **v** dans une autre direction. Trouver enfin un B qui mette en accord avec tous ces résultats l'équation 5.1. C'est le champ magnétique au point en question.

Il est évident que ceci n'*explique* rien. Pourquoi l'équation 5.1 est-elle valable ? Pourquoi *pouvons-nous* toujours trouver un **B** compatible avec cette relation simple, quelles que soient les vitesses ? Nous aimerions pouvoir comprendre pourquoi la force



Fig. 5.4 (a) La valeur d'une charge au repos est déterminée par la force agissant sur une charge d'essai au repos et par la loi de Coulomb.



(*b*) Dans le cas d'une charge en mouve. ment la force peut dépendre de la position de la charge d'essai; s'il en est ainsi nous ne pouvons utiliser le procédé indiqué en (*a*).



(c) A l'instant où Q passe à travers le centre de la distribution sphérique de charges d'essai, mesurez la composante radiale de la force agissant sur chaque charge et utilisez cette valeur \mathbf{F}_{r} . pour déterminer Q. Ceci équivaut à mesurer l'intégrale de. surface de \mathbf{E} .

est proportionnelle à la vitesse. Il est vraiment très remarquable que la force soit strictement proportionnelle à \mathbf{v} , et que l'effet du champ électrique ne dépende pas de \mathbf{v} du tout ! Nous verrons dans les pages suivantes d'où vient tout ceci.

5.3 Mesure d'une charge en mouvement

Comment ferons-nous pour mesurer la valeur de la charge électrique portée par une particule en mouvement ? Jusqu'à ce qu'on ait résolu ce problème, il sera vain de se demander quel est l'effet du mouvement sur la charge elle-même.

On ne peut mesurer une charge que par les effets qu'elle produit. On peut mesurer une charge ponctuelle Q au repos en déterminant la force qui agit sur une charge d'essai q placée à une distance connue de la précédente (fig. 5.4 a). Ceci se base sur la loi de Coulomb. Mais si la charge à mesurer se déplace, nous voilà plongés dans l'incertitude. Il y a maintenant une direction privilégiée de l'espace, celle du mouvement instantané de la charge. Il se pourrait que la force agissant sur la charge d'essai q dépende aussi bien de la direction de Q à q, que de la distance entre les deux charges. On observerait alors différentes valeurs de la force pour différentes positions de la charge d'essai comme sur la figure 5.4 b. Et en essayant d'appliquer la loi de Coulomb, on trouverait donc des valeurs différentes pour la même quantité Q. Et rien ne nous dit que la force sera toujours dans la direction du rayon vecteur **r**.

Pour tenir compte de cela, définissons Q en faisant une moyenne sur toutes les directions. Imaginons un grand nombre de charges d'essai infinitésimales réparties régulièrement sur une sphère (fig. 5.4 c). A l'instant t, où la charge en mouvement passe par le centre de la sphère, on mesure la composante radiale de la force sur chaque charge d'essai, et on utilise la moyenne de ces forces pour calculer Q. Or c'est juste la méthode qu'on utiliserait pour déterminer l'intégrale de surface du champ électrique sur cette sphère à l'instant t. Les charge agissant sur q est, par définition, le champ électrique en ce point. Ceci suggère que c'est le théorème de Gauss ⁽¹⁾, plutôt que la loi de Coulomb qui fournit la façon la plus naturelle de définir la quantité de charge pour une particule chargée en mouvement, ou pour un ensemble de charges en

mouvement. Nous pouvons donner une telle définition de la façon suivante.

La quantité de charge électrique contenue dans une région donnée de l'espace est définie par l'intégrale de surface du champ électrique \mathbf{E} prise sur une surface S entourant la région concernée. La surface S est fixée dans un certain

référentiel R. Le champ E est mesuré, en un point (x, y, z) et à un instant t dans R, par la force agissant sur une charge d'essai unité *au repos dans R*, à cet instant et en ce point. L'intégrale de surface doit être calculée au temps t. C'est-à-dire que les valeurs de champ qui sont intégrées sont celles que pourraient mesurer simultanément au temps t des observateurs placés sur toute la surface S. (Ceci ne présente aucune difficulté, puisque S est stationnaire dans le référentiel R.) Notons par

⁽¹⁾ Ce n'est pas la seule façon *possible*. Vous pourriez, par exemple, adopter une règle arbitraire qui dirait que la charge d'essai doit toujours être placée directement devant (dans la direction du mouvement) la charge à mesurer. Mais la charge ainsi définie n'aurait pas les propriétés simples que nous allons établir maintenant et votre théorie serait compliquée et peu élégante.

$$\int_{\mathcal{S}(t)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \mathbf{a}$$
(5.2)

une telle intégrale prise sur S au temps t. Nous définissons la quantité de charge contenue dans S comme étant le produit de cette intégrale par ε_0 .



Fig. 5.5 Le théorème de Gauss reste valable dans le cas du champ créé par des charges . en mouvement. Le flux de \mathbf{E} à travers S_2 , est égal au flux de \mathbf{E} à travers S_1 , évalué au même instant.



Fig. 5.6 Le flux de **E** à travers *S* depend-il de l'état de mouvement des particules chargées ? L'intégrale de surface de **E** sur *S* est-elle la même que sur la figure 5.5 ? Ici les particules sont liées comme dans une molécule d'hydrogène.

$$Q = \varepsilon_0 \int_{\mathcal{S}(t)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \mathbf{a}$$
 (5.3)

Ce serait bien ennuyeux si la valeur de Q ainsi déterminée dépendait de la taille et de la forme de la surface S. Pour une charge fixe, il n'en est rien c'est le théorème de Gauss. Mais le théorème de Gauss est-il toujours valable quand les charges sont en mouvement? Heureusement oui. Nous considérerons que c'est un résultat de l'expérience. Cette propriété fondamentale du champ électrique produit par les charges en mouvement nous permet alors de définir une quantité de charge à l'aide de l'équation 5.3. A partir de maintenant, nous pouvons parler de la quantité de charge contenue dans une région ou portée par une particule et ceci aura un sens parfaitement défini même si la charge est en mouvement.

La figure 5.5 résume ceci sur un exemple. Deux protons et deux électrons y sont figurés en mouvement, à un instant particulier. C'est un fait établi que l'intégrale de surface du champ électrique \mathbf{E} prise sur la surface S, est exactement égale à celle prise sur la surface S_2 calculée au même instant, et nous pouvons utiliser cette intégrale, comme nous avons toujours utilisé le théorème de Gauss en électrostatique pour déterminer la charge totale contenue dans S_1 . La figure 5.6 soulève une nouvelle question. Que se passe-t-il si les mêmes particules ont d'autres vitesses que précédemment ? Par exemple, supposez que les deux protons et les deux électrons se combinent pour former

une molécule d'hydrogène. La charge totale apparaîtra-t-elle exactement la même qu'avant ?

5.4 Invariance de la charge

Il existe des preuves expérimentales convaincantes du fait que la charge totale d'un système ne puisse être changée du fait du mouvement des porteurs de charge. Nous sommes si habitués à tenir cela pour acquis que nous prenons rarement le temps de voir combien ce fait est remarquable et fondamental. Nous en avons pour preuve la parfaite neutralité des atomes et des molécules. Nous avons déjà décrit au chapitre 1 une expérience sur la neutralité de l'atome d'hydrogène qui a démontré que la charge du proton et celle de l'électron étaient égales avec une précision meilleure que 10⁻²⁰. On a réalisé une expérience similaire avec des atomes d'hélium. L'atome d'hélium contient deux protons et deux électrons, soit les mêmes particules chargées que la molécule d'hydrogène. Dans l'atome d'hélium, cependant, leur mouvement est très différent. Les protons, en particulier, au lieu de tourner lentement en étant séparés par une distance de 0,7 angstroms, sont fortement liés dans le noyau d'hélium où ils se déplacent avec des énergies cinétiques de l'ordre du million d'électron-volts. Si

le *mouvement* avait un effet quelconque sur la quantité de charge, nous ne pourrions avoir une compensation exacte de la charge électronique par la charge nucléaire à *la fois* dans la molécule d'hydrogène et l'atome d'hélium. En fait on a pu montrer la neutralité de l'atome d'hélium avec une précision expérimentale presque aussi bonne.

On peut encore trouver des preuves de cela dans les spectres optiques des isotopes du même élément, c'est-à-dire des atomes ayant des masses nucléaires différentes mais la même charge nucléaire. On trouve de nouveau ici une différence marquée entre les mouvements des protons dans le noyau, mais la comparaison des raies spectrales de deux isotopes ne montre pas d'écart que l'on puisse attribuer à une différence, même faible, dans la charge nucléaire totale.

La masse n'est *pas* invariante de la même façon. Nous savons que la masse d'une particule est changée par son mouvement d'un facteur $1/(1-\upsilon^2/c^2)^{1/2}$. Pour insister sur cette différence, nous avons représenté sur la figure 5.7 une expérience imaginaire. Dans la boîte de droite, les deux particules chargées, qui sont fixées aux extrémités d'un barreau pivotant, ont un mouvement de rotation de vitesse v. La masse totale de droite est *plus grande* que la masse de gauche, comme on peut le démontrer en pesant la boite avec un peson à ressort ou en mesurant la force nécessaire pour l'accélérer⁽²⁾. La charge électrique totale est cependant inchangée. On peut réaliser une expérience réelle équivalente à celle-ci au moyen d'un spectrographe de masse, qui peut facilement mettre en évidence une différence de masse entre une molécule de deutérium ionisée (2 protons, 2 neutrons, 1 électron) et un atome ionisé d'hélium (2 protons, 2 neutrons et 1 électron aussi). Ce sont deux structures très différentes, dans lesquelles les particules élémentaires qui les composent se déplacent à des vitesses très différentes. La différence d'énergie se traduit par une différence mesurable sur la masse. Il n'y a pas de différence détectable, même avec une très grande sensibilité, dans la charge électrique des deux ions.



Fig. 5.7 Une expérience imaginaire destinée à prouver l'invariance de la charge. La charge contenue à l'intérieur de la boite doit être mesurée en mesurant le champ électrique tout autour de la boite ou, ce qui est équivalent, la force agissant sur une charge d'essai.

$$\int_{S_{(0)}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S'(t')} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{a}'$$



Fig. 5.8 L'intégrale de surface de \mathbf{E} sur *S* est égale à l'intégrale de \mathbf{E} ' sur *S'*. La charge est la même dans tous les systèmes de référence.

L'invariance de la charge confère une signification spéciale à la quantification de la charge. Nous avons insisté, au chapitre 1, sur l'importance - et le caractère mystérieux - du fait que chaque particule élémentaire chargée a une charge égale à celle de toute autre particule du même type. Nous voyons maintenant que cette égalité reste vraie, non seulement pour deux particules identiques au repos, mais encore quel que soit leur état de mouvement relatif.

Les expériences que nous avons décrites, et beaucoup d'autres montrent que la valeur de notre intégrale de surface $\int_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ ne dépend que du nombre et du type des particules contenues dans S et non de la façon dont elles se déplacent. D'après le postulat de relativité, un tel énoncé doit rester vrai dans tout référentiel galiléen, s'il est vrai dans un référentiel particulier. Donc, si R' est un quelconque référentiel d'inertie en mouvement par rapport à R, et si S' est une surface fermée dans ce référentiel qui contient au temps t' les mêmes corps chargés que contient S au temps t, nous devons avoir

$$\int_{\mathcal{S}(t)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = \int_{\mathcal{S}'(t')} \mathbf{E} \cdot \mathbf{da}'$$
(5.4)

Le champ \mathbf{E}' est bien entendu mesuré dans \mathbf{R}' , c'est-à-dire qu'il est défini au moyen d'une charge d'essai au repos dans \mathbf{R}' . Il ne faut pas sous-estimer la distinction entre t et t'. Comme nous le savons, des événements qui sont simultanés dans \mathbf{R} ne sont pas obligés de l'être en \mathbf{R}' . Chacune des intégrales de surface de l'équation 5.4 doit être évaluée à un instant dans son référentiel. Si une charge est située à la frontière de S, ou de S', on doit prendre grand soin à ce que les charges contenues dans S à t soient les mêmes que celles contenues dans S' au temps t'. Si les charges sont situées à bonne distance des frontières, comme sur la figure 5.8, qui illustre la relation de l'équation 5.4, on n'aura aucun problème.

L'équation 5.4 est un énoncé formel de l'invariance relativiste de la charge. Nous pouvons choisir notre surface de Gauss dans un référentiel galiléen *quelconque*; l'intégrale de surface donnera un résultat indépendant du référentiel choisi. Ceci n'a rien à voir avec la conservation de la charge, telle qu'on l'a énoncée et exprimée mathématiquement au chapitre 4 dans l'équation :

⁽²⁾ La différence de masse ne dépend pas seulement de l'énergie cinétique des particules, mais aussi de tout éventuel changement de l'énergie potentielle comme celui dû à la variation de l'élasticité du barreau qui supporte les particules. Si le barreau est assez rigide, cette contribution sera faible comparée à $v^2/c^{2'}$. Essayez de le démontrer.

div
$$\mathbf{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

La conservation de la charge signifie que, si nous prenons une surface fermée fixe dans un certain système de coordonnées, qui contient des corps chargés, et si aucune particule chargée ne franchit les limites de la surface, la charge totale contenue dans cette surface reste constante. *L'invariance* de charge signifie que, si nous regardons ce paquet de charges à partir d'un autre référentiel, nous mesurons exactement la même quantité de charge. L'énergie est conservée, mais l'énergie n'est *pas* un invariant relativiste. La charge est conservée et c'est aussi un invariant relativiste. Dans le langage de la théorie de la relativité, l'énergie est un composant d'un quadrivecteur, tandis que la charge est un scalaire, un nombre invariant par rapport aux transformations de Lorentz. Ce fait d'observation a des conséquences très profondes. Il détermine complètement la nature des champs créés par les charges en mouvement.

5.5 Champ électrique mesuré dans des référentiels diférents



Fig. 5.9 A quoi ressemble le champ électrique dans un autre référentiel (de vitesse relative perpendiculaire à la direction du champ). (*a*) Deux couches planes stationnaires de densité uniforme.





Si la charge doit être invariante dans une transformation de Lorentz, le champ électrique E doit se transformer d'une façon particulière. « Transformer E » signifie répondre à une question comme celle-ci :

si un observateur mesurant un champ électrique \mathbf{E} dans un certain référentiel galiléen \mathbf{R} trouve un certain nombre de volts/nn en un certain point, à un certain instant, quelle sera la valeur du champ mesuré au même point de l'espace-temps par un observateur situé dans un autre référentiel galiléen \mathbf{R}' ? Pour des champs d'un certain type, nous pouvons répondre à cette question en appliquant le théorème de Gauss à quelques systèmes simples.



Dans le référentiel *R* (fig. 5.9 *a*), il y a deux plaques fixes chargées de densité uniforme de charge de surface $+\sigma$ et $-\sigma$ C/m², respectivement. Ce sont des carrés de *b* m de côté parallèles au plan *xy*, et leur distance est supposée être assez inférieure à leurs côtés pour qu'on puisse considérer le champ existant entre eux comme uniforme. La valeur du champ mesuré par un

observateur situé dans *R* est bien sûr σ/ε_0 Considérons maintenant un référentiel galiléen *R'* qui se déplace vers la gauche avec une vitesse **v** par rapport à *R*. Pour un observateur situé dans *R'*, les « carrés » chargés ne sont plus des carrés. Leur dimension *x'*

est contractée de *b* à $\lambda \sqrt{1-\beta^2}$ ou $\beta = \nu/c$, comme d'habitude Mais la charge totale est invariante, c'est-à-dire indépendante

du référentiel, de sorte que la *densité* de charge mesurée dans R' est plus grande que σ dans le rapport $1/\sqrt{1-\beta^2}$. La figure 5.9 montre le système en section transversale, vu de R en (b), et vu de R' en (c). Que pouvons-nous dire sur le champ électrique en R', si tout ce que nous connaissons sur le champ électrique créé par des charges en mouvement est contenu dans l'équation 5.4 ?

En tout cas, nous pouvons être sûrs que le champ électrique est nul à l'extérieur des plaques, et uniforme entre elles, du moins à la limite où leurs dimensions tendent vers l'infini. Le champ créé par un plan infini ne pourrait pas dépendre de la distance au plan ni de la position du point considéré. (Il n'y a rien dans le système pour fixer une échelle de dimension ou privilégier un point; si le champ variait selon une loi semblable à celle du champ créé par une charge ponctuelle ou une distribution linéaire, il serait infini sur le plan.) Cependant, en l'état de nos connaissances⁽³⁾, le champ créé par une plaque isolée chargée positivement pourrait ressembler à celui de la figure 5.9 *d*. Mais, s'il en était ainsi, le champ créé par une plaque chargée négativement ressemblerait à celui de la figure 5.9 *e*, et la superposition de ces deux champs donnerait un champ comme celui de la figure 5.9 *f*.



Fig. 5.10 Le champ électrique dans un autre système de référence (de vitesse relative parallèle à la direction du champ). (*a*) Dans le référentiel R; (*b*) Coupe transverse dans le référentiel R'.

Nous pouvons appliquer le théorème de Gauss à une boîte stationnaire dans le référentiel R', boîte dont la section transverse est représentée sur la figure 5.9 f: La charge qu'elle contient est déterminée par σ' , et le champ est nul à l'extérieur des plaques. Le théorème de Gauss nous dit que la valeur de E_z' , qui est la seule composante non nulle du champ à l'intérieur des plaques, est égale à σ'/ε_0 , soit $\sigma/\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}$,

$$E_{z}' = \frac{E_{z}}{\sqrt{1-\beta^{2}}} = \gamma E_{z} \tag{5.5}$$

(Au lieu du facteur $1/\sqrt{1-\beta^2}$, nous utiliserons souvent le symbole γ , introduit au volume 1, chapitre 11, équation 13. Cela raccourcit l'écriture. Rappelez-vous que l'on a toujours $\gamma \ge 1$.)

Imaginons une situation différente où les plaques chargées fixes dans le référentiel R sont orientées perpendiculairement à l'axe x, comme sur la figure 5.10. L'observateur au repos dans **R** trouve cette fois-ci un champ orienté dans la direction des x de valeur $E_x = \sigma/\epsilon_0$. Dans ce cas, la densité de charge de surface mesurée dans le référentiel R' est la même que celle mesurée dans R. Les plaques ne sont pas soumises à la contraction de Lorentz; seule la distance qui les sépare l'est, mais elle est sans influence sur le champ. Cette fois-ci, nous trouvons, en appliquant le théorème de Gauss à la boîte au repos dans R'

$$E'_{x} = \sigma' / \varepsilon_{0} = \sigma / \varepsilon_{0} = E_{x}$$
(5.6)

Tout ceci marche très bien pour le système de charges particulièrement simple que nous avons décrit; nos conclusions ont-elles une validité plus générale? Cette question pose le problème de la signification même du champ. Si le champ électrique en un point de l'espacetemps doit avoir une définition sans ambiguïtés il faut que la façon dont apparaît \mathbf{E} dans d'autres systèmes de référence, dans le même voisinage de l'espace-temps, ne dépende pas de la nature des sources, quelles qu'elles soient, qui produisent \mathbf{E} . En d'autres termes, quand l'observateur au repos dans R a mesuré le

⁽³⁾ Rappelez-vous que la nappe de charge est en mouvement dans R'; rien ne nous garantit encore que le champ qu'elle crée soit semblable à celui d'une nappe stationnaire. En fait, dans la réalité, le champ électrique d'une nappe de charge en mouvement *est* perpendiculaire à la nappe et non comme ceux dont on a fait l'hypothèse sur les fig. 5.9 d et e.

champ existant autour de lui à un certain instant, il doit être en mesure de prédire, à *partir* seulement de ses propres résultats, ce que mesureraient des observateurs au repos dans d'autres référentiels au même point de l'espace-temps. S'il n'en était pas ainsi, le concept de champ n'aurait pas de valeur. Et on en trouvera la preuve dans l'accord éventuel de notre théorie du champ avec l'expérience.

De ce point de vue, les relations exprimées par les équations 5 et 6 prennent un sens qui dépasse le cas particulier des charges sur des plans parallèles. Considérons une distribution quelconque de charges qui soit entièrement au repos dans un référentiel R. Si un observateur au repos dans R mesure un champ E_z dans la direction z, un observateur au repos dans R' mesurera au même point de l'espace-temps un champ $E_z' = \gamma E_z$. C'est-à-dire qu'il obtient, comme résultat de sa mesure de E_z un nombre qui sera égal au produit par le facteur y du nombre que l'observateur au repos dans R obtient comme mesure de E_z . D'autre part, si l'observateur au repos dans R mesure un champ E_x dans la direction des x, c'est-à-dire la direction de la vitesse de R' par rapport à R, l'observateur au repos dans R' mesure un champ E_x' égal à E_x . Les directions y et z sont évidemment équivalentes puisqu'elles sont toutes deux perpendiculaires à la vitesse \mathbf{v} . Tout ce que nous avons dit de E_z s'applique donc à E_y . Si E a une direction quelconque dans le repère R, nous pouvons le décomposer en ses composantes sur les directions x, y et z, et à partir des transformations de chacunes d'elles, trouver le vecteur \mathbf{E}' au même point de l'espace-temps dans R' un repère qui se déplace avec la vitesse \mathbf{v} relative à R. En chaque point de R, on décompose \mathbf{E} en une composante « longitudinale » E_{tt} parallèle à \mathbf{v} et une composante « transverse » E_{\pm} perpendiculaire à la direction de \mathbf{v} . Au même point de l'espace-temps dans R', on doit décomposer \mathbf{E}' en \mathbf{E}'_{tt} et \hat{E}'_{tt} étant parallèle à \mathbf{v} et \hat{E}'_{tt} lui étantperpendiculaire. Nous avons obtenu

Notre conclusion n'est valable que pour des champs créés par des charges au repos dans R. Comme nous allons le voir, si les charges sont en mouvement dans le repère R, la détermination du champ électrique dans R' nécessite la connaissance de deux champs dans *R*, le champ électrique et le champ magnétique. Mais nous avons obtenu un résultat fort utile, qui nous suffira chaque fois que nous pourrons trouver un référentiel d'inertie dans lequel les charges sont au repos. Nous allons l'utiliser pour étudier le champ électrique créé par une charge ponctuelle se déplaçant avec une vitesse constante.



Fig. 5.11 Le champ électrique créé par une charge ponctuelle (a) dans un référentiel où la charge est au repos; (b) dans un référentiel où la charge a une vitesse constante.

5.6 Champ créé par une charge ponctuelle se déplaçant avec une vitesse uniforme

Dans le repère *R*, la charge ponctuelle *Q* est au repos à l'origine (fig. 5.11 *a*). En chaque point, le champ électrique **E** a un module $Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ et est dirigé radialement vers l'extérieur. Dans le plan xz ses composantes en un point quelconque (*x*, *z*) sont

$$E_{x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{0}r^{2}}\cos\theta = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_{0}(x^{2}+z^{2})^{3/2}}$$

$$E_{z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{0}r^{2}}\sin\theta = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_{0}(x^{2}+z^{2})^{3/2}}$$
(5.8)

Soit un repère R' qui se déplace dans la direction des x négatifs, avec la vitesse v. Les relations entre coordonnées d'un événement (ou point de l'espace-temps) dans les deux repères sont données par

$$x = \gamma(x' - \beta ct') \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \gamma(t' - \beta x'/c)$$
(5.9)

C'est la transformation de Lorentz donnée par l'équation 15 du chapitre 11, volume 1. Nous avons des signes négatifs dans les équations précédentes parce que notre repère R' se déplace dans la direction des x négatifs, quand on le regarde de R. On a pris les origines des temps dans les deux repères pour que les horloges indiquent le zéro quand x = 0 et x' = 0 coincident.

Selon les équations 5.5 et 5.6 $E'_z = \gamma E_z$ et $E'_x = E_x$. En utilisant les équations 8 et 9, nous pouvons exprimer les composantes E'_z et E'_x du champ en fonction des coordonnées dans R'. A l'instant t' = 0, quand Q passe à l'origine dans R', nous avons

$$E'_{x} = E_{x} = \frac{\gamma Q x}{4\pi\varepsilon_{0} [(\gamma x')^{2} + z'^{2}]^{3/2}}$$

$$E'_{z} = E_{z} = \frac{\gamma Q z'}{4\pi\varepsilon_{0} [(\gamma x')^{2} + z'^{2}]^{3/2}}$$
(5.10)



Fig. 5.12 Valeur, dans diverses directions, du champ créé par une charge en mouvement. A cet instant, la charge passe par l'origine du référentiel x', y', z'. Les nombres donnent le rapport entre le champ et $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$.

Remarquons d'abord que $E'_{z}/E'_{x} = z'/x'$. Ceci nous montre que le vecteur **E**' fait le même angle avec l'axe des x' que lerayon vecteur **r**'. **E**' est donc dirigé radialement le long d'une ligne tracée à partir de la position instantanée de Q, comme indiqué sur la figure 5.11 b. Arrêtons nous un moment pour réfléchir à ce que cela implique! Cela signifie que, si Q passe à l'origine du repère R' à 12 h exactement, dans l'horloge de ce système, un observateur placé n'importe où au repos dans R' dira que le champ électrique régnant autour de lui avait, à 12 h, la direction du rayon vecteur issu de l'origine. Cela ressemble, à première vue, à une transmission instantanée de l'information ! Comment un observateur placé à un km de distance peut-il savoir où est la particule au même instant ? Il ne le peut pas. Et ce n'est pas ce qu'implique notre énoncé. Cette particule, rappelez-vous en, était en mouvement à vitesse constante bien avant, elle avait en quelque sorte un « plan de vol» qui la faisait passer à l'origine à midi. Cette information était disponible depuis longtemps. C'est l'histoire passée de la particule qui a déterminé le champ observé, si nous voulons chercher une relation de cause à effet. Nous nous occuperons plus loin de ce qui se passe quand il y a un changement inopiné dans le plan de vol

quand il y a un changement inopiné dans le plan de vol. Pour trouver le module du champ, nous calculons $E_x^{2} + E_z^{2}$, qui est égal au carré du champ E^{2} .

$$E^{'2} = E_{x}^{'2} + E_{z}^{'2} = \frac{\gamma^{2}Q^{2}(x^{'2} + z^{'2})}{(4\pi\varepsilon_{0})^{2} [(\gamma x^{'})^{2} + z^{'2}]^{3}} = \frac{Q^{2}(x^{'2} + z^{'2})}{(4\pi\varepsilon_{0})^{2} \gamma^{4} [\gamma x^{'2} + z^{'2} - \beta^{2} z^{'2}]^{3}} = \frac{Q^{2}(1 - \beta^{2})^{2}}{(4\pi\varepsilon_{0})^{2} (x^{'2} + z^{'2})^{2} \left(1 - \frac{\beta^{2} z^{'2}}{x^{'2} + z^{'2}}\right)^{3}}$$

(5.11)

(Ici, il était plus clair, pour une fois, de réintroduire 0 dans l'expression.) Soit r' la distance de la charge Q, qui est, pour le moment considérée à l'origine, au point (x', z') où l'on mesure le champ : $r' = (x'^2 + z'^2)^{1/2}$. Soit θ' l'angle entre le rayon vecteur et la vitesse de la charge Q, qui se déplace dans la direction des x' positifs dans le repère R'. Comme $z' = r' \sin \theta'$, le module du champ peut s'écrire



Fig. 5.13 Une autre représentation du champ créé par une charge en mouvement uniforme.



Il n'y a rien de spécial à dire sur l'origine des coordonnées, ni sur le le plan x' z' par rapport à un autre plan passant par l'axe x'. C'est pourquoi nous pouvons dire de façon très générale que le champ électrique d'une charge en mouvement uniforme, à un instant donné, est dirigé selon le rayon vecteur issu de la position instantanée de la charge, tandis que son module est donné par l'équation 5.12 où θ' est l'angle entre la direction du mouvement de la charge et le rayon vecteur allant de la position instantanée de la charge au point d'observation. A de faibles vitesses, lechamp se réduit simplement à $E' \approx Q/4\pi\varepsilon_0 r'^2$, et est pratiquement égal, à chaque instant, au champ créé par une charge ponctuelle



Fig. 5.14 Le champ électrique créé par une charge en mouvement, représenté à trois instants différents v/c = 1/3.



stationnaire dans R'coïncidant avec la position instantanée de O. Mais, si β n'est pas négligeable, le champ est plus intense perpendiculairement au mouvement que dans la direction du mouvement, à la même distance de la charge. Si nous voulions indiquer l'intensité du champ par la densité des lignes de force, comme on le fait souvent, les lignes tendraient à se concentrer en une sorte de galette à perpendiculaire 1a direction du mouvement. La figure 5.12 représente la densité des lignes passant au travers d'une sphère unité dues à une charge se déplaçant dans la direction x' avec une vitesse telle que v/c = 0,866. Sur la figure 5.13, on a représenté plus simplement le champ par une coupe à travers le champ oà sont représentées quelques lignes de force du plan $x'z'^{(4)}$.

Ce champ électrique est remarquable. Il n'est pas à symétrie sphérique, ce qui

Fig. 5.15 Le champ électrique d'une charge en mouvement représenté à trois instants différents : v/c = 4/5.

n'est pas surprenant parce que, dans le repère R', il y a

une direction privilégiée, celle du mouvement de la charge. En outre, c'est un champ que ne peut créer *aucune distribution* stationnaire de charge, quelle que soit sa forme. En effet, dans ce champ, la circulation de **E'** autour d'un circuit fermé *n'est pas*

⁽⁴⁾ Un diagramme à deux dimensions comme celui de la fig. 5.13 ne peut représenter fidèlement l'intensité du champ par la densité des lignes de force. A moins que nous ne supprimions arbitrairement certaines des lignes, leur densité sur le dessin ne peut diminuer qu'en 1/r', tandis que la décroissance du champ que l'on veut représenter suit une loi en $1/r^2$. La figure 5.13 ne donne donc qu'une vue qualitative de la variation de E' en fonction de r' et θ' .

nulle. Considérons par exemple, le circuit fermé *ABCD* de la figure 5.13. Les arcs de cercle ne contribuent en rien à l'intégrale curviligne, puisqu'ils sont perpendiculaires au champ; sur les sections radiales, le champ est *plus intense* le long de *BC* que de *DA*, de sorte que la *circulation* de *E'* autour de ce circuit n'est pas nulle. Mais, pensez-y, ceci n'est pas un champ *électrostatique*.

Le champ électrique en un point quelconque du repère R' change au cours du temps au fur et à mesure que la charge se déplace. Les figures 5.14 et 5.15 représentent le champ électrique observé à certains instants à partir d'un système de référence dans lequel un électron se déplace à vitesse uniforme dans la direction des $x^{(5)}$. Sur la figure 5.14, l'électron a une vitesse de 0,33 c, son énergie cinétique est donc (vol. 1, chap. 12) de l'ordre de 30 000 électron-volts (30 keV). La valeur de β^2 est 1/9 et le champ électrique n'est pas très différent de celui créé par une charge au repos. Sur la figure 5.15, sa vitesse est de 0,8 c, correspondant une énergie cinétique de 335 keV. Si on prend $1,0 \times 10^{-10}$ s pour unité de temps dans chaque diagramme, l'échelle des distances est alors grandeur nature. Il est évident que ces diagrammes sont aussi valables pour une charge quelconque ayant les vitesses indiquées. Nous n'avons mentionné les énergies équivalentes, pour un électron que pour montrer au lecteur que les vitesses relativistes n'ont rien d'extraordinaire au laboratoire.

5.7 Champ créé par une charge accélérée ou freinée



Fig. 5.16 Une charge initialement au repos à x = 0 est accélérée brutalement au temps t = 0 et se déplace ensuite à vitesse constante.



Fig. 5.17 Une charge qui se déplace à une vitesse constante atteint l'origine à t = 0, est alors brutalement freinée, et reste ensuite en ce point.

L'expression vitesse uniforme que nous avons utilisée impliquait, et il faut que ce soit clair dans votre esprit, que le mouvement était à vitesse constante en ligne droite et continuait tout le temps. Que se serait-il passé si notre électron ne s'était pas déplacé le long de l'axe des x négatifs avant d'apparaître dans notre diagramme à t = 0? Supposons qu'il ait été fixé à l'origine, attendant pour démarrer que l'horloge indique t = 0. Juste avant l'instant t =0, il se passe quelque chose qui donne à l'électron une forte accélération, jusqu'à ce qu'il ait la vitesse v, et il se déplace ensuite le long de l'axe des x positifs à cette vitesse. Son mouvement reproduit exactement, à partir de cet instant, le mouvement de l'électron à propos duquel on a dessiné la figure 5.15. Mais la

figure 5.15 ne représente pas le champ créé par l'électron dont nous venons de parler. Afin de mieux voir pourquoi, considérons le champ régnant au point marqué P, au temps t = 2, ce qui signifie 2×10^{-10} s. En 2×10^{-10} s, un signal lumineux parcourt 6 cm. Puisque ce point est à plus de 6 cm de l'origine, il ne peut avoir reçu l'information que l'électron a commencé à bouger à t = 0. A moins d'admettre là un désaccord important avec la relativité - et nous prenons les postulats de la relativité comme base même de notre discussion - le champ au temps t = 2 en P, et d'ailleurs en tous les points situés à l'extérieur de la sphère de rayon cm centrée à l'origine, devrait être le champ créé par une charge au repos à l'origine.

D'un autre côté, très près de la charge

elle-même, ce qui est arrivé dans un passé éloigné ne fait pas grande différence. Le champ doit quelque peu différer, quand nous considérons des régions de plus en plus éloignées de la charge, à l'instant t = 2, de celui représenté dans le second

⁽⁵⁾ Dans ce qui précède, la charge était au repos dans le repère R, en mouvement dans le repère R'. Ici, nous prenons le repère xyz comme celui où la charge est en mouvement pour éviter d'obscurcir la discussion avec des x', y', z', t'.

diagramme de la figure 5.15 pour ressembler de plus en plus à celui créé par une charge fixe à l'origine. Nous ne pouvons en déduire beaucoup plus que ceci sans savoir à quelle vitesse l'information est transmise. Supposons - ce n'est qu'une supposition - qu'elle soit transmise à la vitesse maximum permise par les postulats de la relativité. Si l'on néglige la période d'accélération, on peut s'attendre à ce que le champ régnant à l'intérieur de la sphère de rayon 6 cm, à t = 2, soit celui créé par une charge en mouvement uniforme. S'il en est ainsi, le champ créé par un électron qui, initialement au repos, acquiert la vitesse v à t = 0, doit ressembler à ce que représente la figure 5.16. Il y a une fine coquille sphérique (dont l'épaisseur dans le cas réel doit dépendre de la durée de l'accélération) dans laquelle s'effectue le passage d'un type de champ à l'autre. Cette coquille se dilate simplement à la vitesse c, son centre restant fixé en x = 0. Les flèches sur les lignes de force indiquent la direction du champ quand la source est une charge négative, ce qu'on a supposé ici.

La figure 5.17 représente le champ créé par un électron qui s'est déplacé avec une vitesse uniforme *jusgu'à ce que t* = 0, instant auquel il a atteint x = 0 et où il a été brutalement freiné. Ici, c'est l'information qu'il a été freiné en x = 0 qui ne peut plus atteindre au temps *t*, aucun point éloigné de plus de et de l'origine. Le champ régnant à l'extérieur de la sphère de rayon R = ctdoit être celui qui aurait été créé si l'électron avait continué à se déplacer à sa vitesse initiale. C'est pourquoi nous voyons que les lignes de force sur la droite de la figure 5.17 sont dirigées justement vers le point de l'axe *x* où l'électron serait s'il n'avait pas été arrêté. (Remarquons que cette dernière conclusion n'a rien à voir avec l'hypothèse que nous avons faite au paragraphe précédent, à savoir que l'information se transmet à la vitesse maximum.) Le champ semble presque avoir une certaine autonomie !



Fig. 5.18 La calotte intérieure engendrée par la rotation de *AE* sur la figure 5.17 et la calotte extérieure engendrée par la rotation de *DF*. Le champ sur *AE* est celui créé par une charge au repos. Le champ sur *DF* est celui créé par une charge se déplaçant à vitesse constante. Nous voulons que les flux passant à travers ces deux surfaces soient égaux.

Il est relativement simple de raccorder les lignes de force intérieures et extérieures. Il n'existe qu'une seule façon de le faire qui soit compatible avec le théorème de Gauss. Prenant l'exemple de la figure 5.17, suivons, à partir d'un point tel que A situé sur la ligne de force faisant un angle θ_0 avec l'axe des x, la ligne de force jusqu'à ce qu'elle arrive dans la partie extérieure à la sphère de rayon R = ct où elle fait un angle φ_0 avec l'axe des x. (Cette ligne est évidemment dirigée alors selon le rayon vecteur issu du point où serait la charge si elle avait continué son mouvement.) Relions A et D à l'axe des x par des arcs de cercle, un arc de cercle AE centré sur la source du champ intérieur, un arc de cercle DF centré sur la source apparente du champ extérieur à la sphère. Faisons tourner la courbe EABCDF autour de l'axe des x pour engendrer une surface de révolution. Comme cette surface ne contient pas de charge, l'intégrale de surface de E prise sur la surface toute entière doit être nulle. Les seules contributions à l'intégrale proviennent des calottes sphériques, puisque le reste de la surface engendrée par ABCD est parallèle au champ par construction. Le champ sur la calotte intérieure est celui créé par une charge ponctuelle au repos, celui sur la calotte extérieure est le champ créé par une charge ponctuelle de vitesse constante v, donné par l'équation 5.12. Calculons le flux à travers la calotte

intérieure, représentée sur la figure 5.18. L'intégrale de E sur cette calotte est

$$\int_{0}^{\theta_{0}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_{0}r^{2}} 2\pi r^{2} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{q}{2\varepsilon_{0}} \int_{0}^{\theta_{0}} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \tag{5.13}$$

L'intégrale de E sur la calotte extérieure est

$$\int_{0}^{\Phi_{0}} \frac{q(1-\beta^{2})}{2\varepsilon_{0}r^{2}(1-\beta^{2}\sin^{2}\varphi)^{3/2}} r^{2}\sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{q}{2\varepsilon_{0}} \int_{0}^{\Phi_{0}} \frac{1-\beta^{2}}{(1-\beta^{2}\sin^{2}\varphi)^{3/2}} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \tag{5.14}$$

La condition pour que le flux entrant à gauche soit égal au flux sortant à droite est donc

$$\int_{0}^{\theta_{0}} \sin \theta \, \mathrm{d}\theta = \int_{0}^{\Phi_{0}} \frac{1 - \beta^{2}}{\left(1 - \beta^{2} \sin^{2} \phi\right)^{3/2}} \sin \phi \, \mathrm{d}\phi \tag{5.15}$$
Vous pouvez faire vous-mêmes cet exercice d'intégration⁽⁶⁾. On obtient la relation suivante entre θ_0 et φ_0

$$\cos\theta_0 = \frac{\cos\varphi_0}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\varphi_0}} \tag{5.16}$$

On peut exprimer la même relation sous une forme plus simple

$$tg\varphi_0 = \gamma tg\theta_0 \tag{5.17}$$

Cette relation entre θ_0 et φ_0 a la même forme que la relation entre les angles qu'un barreau rigide fait avec la direction du mouvement relatif, dans le référentiel où il est au repos et dans celui où il est en mouvement. Ceci nous permet de représenter le champ créé par une charge en mouvement d'une façon très simple : nous disons que chaque « ligne de force » représente une certaine quantité de flux et nous imaginons que les lignes de force sont, dans le référentiel où la charge est au repos, des barreaux fixes ayant toutes les directions. Dans le repère en mouvement, chaque barreau représente la même quantité de flux, et les barreaux apparaissent sous des angles plus forts, ce qui donne à leur faisceau l'aspect représenté sur la figure 5.13.

Ce n'est que la largeur de la région de transition de la figure 5.17 qui dépend de notre hypothèse de départ, à savoir que l'« information est transmise avec la vitesse maximum ». La relation exprimée par l'équation 5.17 doit être valable s'il existe une région proche de la charge maintenant au repos où ait disparu toute trace de son histoire antérieure à t = 0. Il doit donc y avoir dans les lignes de force qui relient le champ proche de la charge au champ en des points éloignés une composante transverse, c'est-à-dire non radiale.

Les lignes de force des figures 5.16 et 5.17 ont été tracées de façon à satisfaire l'équation 5.17. Il en résulte un champ assez intense dans la région de transition, où le champ a une direction pratiquement perpendiculaire au rayon vecteur issu de l'origine. Si nous nous rappelons que cette configuration de champ se dilate avec une vitesse c au cours du temps, nous voyons que nous avons quelque chose qui ressemble beaucoup à une onde progressive dont le champ électrique est transverse - transverse par rapport à la direction de propagation.

Nous sommes arrivés à ces conclusions en nous appuyant sur les postulats de la relativité et le fait d'expérience que constitue l'invariance de la charge électrique. Nous serons capables d'utiliser plus tard ces idées pour comprendre la nature du rayonnement créé par une charge accélérée. Mais nous devons d'abord retourner à l'étude de la charge en mouvement uniforme, qui nous réserve encore des surprises.

5.8 Forces sur une charge en mouvement

L'équation 5.12 nous donne la force agissant sur une charge fixe placée dans le champ créé par une autre charge qui se déplace à vitesse constante. Nous nous posons maintenant une autre question : quelle est la force qui agit sur une charge en mouvement, c'est-à-dire une charge qui se déplace dans le champ créé par d'autres charges? Nous nous intéresserons d'abord au cas dune charge se déplaçant dans le champ créé par des charges fixes. Ce peut être le cas d'un électron se déplaçant entre les plaques chargées d'un oscilloscope, ou celui d'une particule alpha se déplaçant dans un champ coulombien autour d'un noyau atomique. Dans ce cas, les sources du champ sont toutes au repos dans un certain référentiel que nous appellerons référentiel du « laboratoire ». A un certain point et à un certain instant dans le repère du « laboratoire », nous observons une particule portant une charge q qui se déplace, avec, à cet instant, une vitesse v à travers le champ électrostatique. Quelle est la force qui semble agir sur q ?

La force n'est dans le fond qu'un nom pour la variation de la quantité de mouvement par unité de temps et la question que nous sommes réellement en train de nous poser, c'est celle de savoir quel est le $d\mathbf{p}/dt$ de la particule que l'on mesure dans notre référentiel du laboratoire, au point et à l'instant considérés. (C'est tout le sens de l'expression force sur une particule en mouvement.) La réponse à cette question est contenue implicitement dans ce que nous avons déjà vu. Regardons le système à partir d'un système de coordonnées R' se déplaçant, à l'instant en question, en *coïncidence avec* la particule. Dans ce repère « de la particule » la particule sera au repos, au moins instantanément. Ce sont les autres charges qui y sont en mouvement. Nous

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \left(a^2 + x^2\right)^{1/2}}$$

⁽⁶⁾ Vous aurez besoin de l'intégrale indéfinie suivante

savons comment traiter un tel problème. La force sur la charge stationnaire q est juste $q\mathbf{E}'$ où \mathbf{E}' est le champ électrique que l'on observe dans le repère R'. Nous savons maintenant trouver \mathbf{E}' quand \mathbf{E} est connu; l'équation 5.7 nous en donne les moyens. Connaissant \mathbf{E} , nous pouvons donc trouver la variation de quantité de mouvement de la particule par unité de temps, tel qu'on l'observe dans R'. Il nous reste à transformer *cette* quantité en sa correspondante dans R. Notre problème repose donc sur cette question : comment se transforme d'un référentiel d'inertie à un autre la force, c'est-à-dire la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement.

On a déjà étudié cette question au volume 1, chapitre 12. Vous devez vous en souvenir. Au lieu, cependant, d'extraire les formules « ad hoc » du volume 1, nous allons les retrouver ici. Cela nous aidera à comprendre ce qui se passe exactement. Considérons alors un certain référentiel R' se déplaçant par rapport à un autre repère R avec une vitesse v dans la direction des x positifs. Considérons, dans R', une particule de masse au repos m qui se déplace dans la direction des x' positifs avec une vitesse v'. Désignons par p_x la composante selon x de la quantité de mouvement (mesurée dans R) et p'_x la composante selon les x' de la quantité de mouvement (mesurée dans R'). Pour trouver la relation existant entre p_x et p'_x nous remarquons que

$$p'_{x} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v'^{2}/c^{2}}} = mc\beta'\gamma'$$
 (5.18)

Nous avons utilisé les abréviations évidentes, $\beta' = \nu'/c$ et $\gamma' = 1/\sqrt{1-\beta'^2}$ Dans le repère *R*, la vitesse de la particule est égale à

 $(v + v')/(1 + vv'/c^2)$ que l'on peut écrire $c(\beta + \beta')/(1 + \beta\beta')$ de sorte que

$$p_{x} = \frac{mc(\beta + \beta')}{(1 + \beta\beta') \left[1 - \left(\frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'}\right)^{2}\right]^{1/2}} = \frac{mc(\beta + \beta')}{\left[(1 - \beta^{2})(1 - \beta'^{2})\right]^{1/2}} = mc\gamma\gamma'(\beta + \beta')$$
(5.19)

En comparant l'équation 5.18 avec l'équation 5.19, nous trouvons quepx est relié à p'x comme suit

$$p_x = \gamma (p_x + \beta \gamma mc) \tag{5.20}$$

Nous remarquons que, dans le terme $\beta \gamma' mc$, $\gamma' mc = \gamma' mc^2/c$, soit E'/c où E' (qu'il ne faut pas confondre avec le champ électrique dont nous ne nous occupons plus pour l'instant!) est l'énergie totale, celle au repos plus l'énergie cinétique, de la particule dans R'. Écrivons l'équation 5.20 de cette façon $p_x = \gamma (p'_x + \beta E'/c)$, et arrêtons-nous un instant pour comparer cette équation avec le résultat de la transformation de Lorentz de la coordonnée x dans les mêmes conditions

 $x = \gamma(x' + \beta ct')$. L'analogie évidente nous rappelle un fait général, à savoir que, dans une transformation de Lorentz, les quatre quantités p_x , p_y , p_z et E/c se comportent exactement comme les quatre coordonnées d'espace-temps x, y, z et ct. D'ailleurs, si vous possédez à fond ceci, vous avez pu écrire directement l'équation 5.20 et vous avez le droit de trouver que notre petit retour en arrière est une perte de temps. Utilisons ceci pour trouver la dérivée des composantes transverses de la quantité de mouvement. Puisque y = y', dans une transformation de Lorentz où la vitesse relative est dirigée selon l'axe des x, nous devons nous attendre à ce que

$$p_{\rm y=} p'_{\rm y}$$
 (5.21)

La relation entre t et t' est donnée par la formule connue

$$t = \gamma \left(t' + \frac{\beta x'}{c} \right) \tag{5.22}$$

Nous nous intéressons à la relation existant entre dp_x/dt et dp'_x/dt' . Nous obtenons, en différenciant l'équation 5.22

$$dt = \gamma dt' + \gamma \frac{\beta}{c} (dx'/dt') dt' = \gamma dt' (1 + \beta \beta')$$
(5.23)

puisque dx'/dt' est simplement égal à v'. L'équation 5.21 nous donne

$$d p_y = d p'_y \tag{5.24}$$

et la diférenciation de l'équation 5.20 nous donne

$$d p_{x} = \gamma d p'_{x} + \gamma \beta mc (d\gamma'/dp'_{x}) dp'_{x}$$
(5.25)

Dans cette dernière expression, on peut calculer le facteur $mc(d\gamma'/dp'_x)$ à partir de l'équation 5.18 qui nous donne

$$p'_{x} = mc\gamma'\beta' = mc\sqrt{\gamma'^{2} - 1}$$
(5.26)

Donc

$$dp'_{x}/d\gamma' = \frac{mc\gamma}{\sqrt{\gamma'^{2}-1}} = \frac{mc}{\beta'}$$
(5.27)

On a alors $d\gamma'/dp'_x = 1/(dp'_x/d\gamma') = \beta'/mc$ et, en portant ceci dans l'équation 5.25, nous obtenons

$$dp_{x} = \gamma dp'_{x} (1 + \beta \beta')$$
 (5.28)

En comparant les équations 5.23 et 5.28 nous voyons que

$$dp_{x/} dt = dp'_{x} / dt'$$
(5.29)

et ceci ne dépend pas de la valeur de v' puisque le facteur $(1+\beta\beta')$ s'élimine. En réalité, nous ne nous intéresserons qu'à des situations où v' est très petite, c'est-à-dire où la particule est presque au repos dans le repère *R'*. Dans ce cas, on peut négliger le terme $\beta\beta'$ et, si nous comparons alors les équations 5.23 et 5.24, nous trouvons pour la dérivée de la composante transverse de la quantité de mouvement

$$dp_{y}/dt = \frac{1}{\gamma} dp'_{y}/dt'$$
 (5.30)

Résumons ces importants résultats : R' est un référentiel d'inertie dans lequel une particule est au repos à un instant donné ou se déplace très lentement. R est un autre repère d'inertie par rapport auquel R' se déplace avec une certaine vitesse. En utilisant les signes // et \perp pour repérer les composantes de quantité de mouvement respectivement parallèle et perpendiculaire à la vitesse relative de R et R', nous pouvons écrire que

$$\frac{\mathrm{d}p_{\prime\prime\prime}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p_{\prime\prime\prime}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_{\perp}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\mathrm{d}p_{\perp}}{\mathrm{d}t}$$
(5.31)

Armés de la loi de transformation des forces, équation 5.31, et de la loi de transformation du champ électrique, équation 5.7, nous retournons maintenant à notre particule chargée en mouvement à travers le champ **E** et nous allons découvrir quelque chose d'étonnamment simple. Considérons d'abord $\mathbf{E}_{l/l}$, la composante de **E** parallèle à la direction instantanée du mouvement de notre particule chargée. Cherchons sa transformée dans un repère R' se déplaçant, à cet instant, avec la particule. Dans ce repère, le champ électrique longitudinal est $E'_{l/l}$ et, selon l'équation 5.7, $E'_{l/l} = E_{l/l}$. La force dp'/dt' est donc

$$\frac{dp'}{dt'} = E'_{//}q = qE_{//}$$
(5.32)

Retournons au repère *R*, où des observateurs sont en train de mesurer la force longitudinale, c'est-à-dire la dérivée par rapport au temps de la composante longitudinale de la quantité de mouvement, $dp_{//}/dt$. D'après l'équation 5.31, $dp_{//}/dt = dp_{//}/dt$; de sorte que, dans le repère *R*, la force que trouvent les observateurs est

$$\frac{dp_{//}}{dt} = \frac{dp_{//}}{dt} = qE_{//}$$
(5.33)

La particule ne reste évidemment pas au repos dans R' tout le temps. Elle sera accélérée par le champ **E'**, et **v'**, la vitesse de la particule dans le référentiel d'inertie R', augmentera graduellement à partir de zéro. Cependant, dans la mesure où nous ne nous intéressons qu'à l'accélération instantanée, les valeurs de v' ne seront jamais qu'infinitésimales et les conditions de validité de l'équation 5.31 sont rigoureusement satisfaites. Pour E_{\perp} , la composante transverse du champ dans R, la transformation donne $E'_{\perp} = \gamma E$, de sorte que $(dp'_{\perp}/dt') = qE'_{\perp} = q\gamma E_{\perp}$.

Mais, en retransformant la force dans le repère *R*, nous avons $\frac{dp_{\perp}}{dt} = \frac{1}{\gamma} (dp'_{\perp} / dt')$ de sorte que le y s'élimine finalement

$$\frac{\mathrm{d}p_{\perp}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma} (\gamma E_{\perp} q) = q E_{\perp}$$
(5.34)



Fig. 5.19 Dans un référentiel dans lequel les charges produisant le champ **E** sont au repos, la force sur une charge q se déplaçant avec une vitesse quelconque est simplement $q\mathbf{E}$.

Ce que veulent dire les équations 5.33 et 5.34 c'est simplement ceci : la force agissant sur une particule chargée en mouvement à travers R est égale au produit de q par le champ électrique **E** dans ce repère, elle est *rigoureusement indépendante* de la vitesse. La figure 5.19 est là pour rappeler ce fait et la manière dont nous l'avons établi.

Vous nous avez déjà vu utiliser ce résultat un peu plus haut, quand nous vous avons dit que la contribution à la force agissant sur une charge en mouvement due au champ électrique est qE. Comme ceci paraît simple et connu, vous pouvez penser que c'est évident et que nous avons perdu notre temps à le démontrer. Nous aurions pu considérer que c'était un résultat de l'expérience. Cela a, en effet, été vérifié sur un énorme domaine de valeurs de la vitesse. On a atteint, dans le cas des électrons, des vitesses assez proches de celle de la lumière pour que le facteur γ vaille 10⁴. De ce point de vue, c'est une loi très remarquable. La démonstration de ce chapitre a établi que c'était une conséquence directe de l'invariance de la charge.

5.9 Interaction d'une charge en mouvement et un système de charges en mouvement

Nous savons qu'il peut y avoir une force dépendante de la vitesse agissant sur une charge en mouvement. Cette force est associée à un *champ magnétique*, dont l'origine est due à des courants électriques, c'est-à-dire à d'autres charges en mouvement. L'expérience d'Oersted a montré que des courants électriques pouvaient agir sur des aimants, mais, à cette époque, la nature même des aimants était totalement mystérieuse. Mais bientôt Ampère et d'autres physiciens mirent en évidence l'interaction des courants électriques entre eux, dont un exemple est donné par l'attraction existant entre deux fils parallèles transportant du courant dans la même direction. Ceci conduisit Ampère à émettre l'hypothèse qu'une substance magnétique contient des courants électriques permanents. S'il en était ainsi, on pouvait interpréter l'expérience d'Oersted comme une interaction entre le courant « galvanique » passant dans le fil et les courants microscopiques permanents qui donnent à l'aiguille aimantée ses propriétés particulières. Ampère donna une formulation mathématique élégante et complète de l'interaction des courants



Fig. 5.20 Une rangée de charges en mouvement positives et négatives, observées de deux référentiels. (*a*) Les charges négatives se déplacent vers la gauche, les positives vers la droite, avec des vitesses égales dans le repére du « laboratoire ». Dans le repère du « laboratoire » les densités de charge sont égales, mais comme on peut le voir dans (*b*) le repére « de la particule » où la charge d'essai q est stationnaire, les densités linéaires de charge sont inégales.

stationnaires et de l'équivalence de la matière aimantée avec un système de courants permanents. Sa brillante hypothèse concernant la nature réelle du magnétisme du fer allait attendre un siècle environ pour trouver une confirmation.

Que les effets magnétiques des courants électriques ne soient dus à rien de plus qu'un simple transport de charges n'était pas très clair aux yeux d'Ampère et de ses contemporains. Le mouvement d'un objet chargé électrostatiquement produirait-il des effets semblables à ceux créés par un courant galvanique continu ? Un peu plus tard au même siècle le travail théorique de Maxwell suggéra que la réponse devait être *oui*. C'est Henry Rowland qui en obtint la première preuve expérimentale, et nous reviendrons sur son expérience à la fin du chapitre 6.

Dans l'état de nos connaissances, l'interaction magnétique des courants de conduction doit apparaître comme un corollaire obligatoire de la loi de Coulomb. Si on admet les postulats de la relativité, si la charge électrique est invariante et si le loi de Coulomb est valable, alors les effets que nous appelons communément a magnétiques » ne peuvent manquer de se produire. Its vont intervenir dès que l'on considèrera l'interaction électrique entre une charge en mouvement et d'autres charges en mouvement. Le très simple exemple qui suit illustre très bien cela.

Dans le repère du « laboratoire » (fig. 5.20 *a*), il y a une suite infinie de charges positives qui se déplacent vers la droite avec une vitesse v_0 . Une suite identique de charges négatives qui se déplacent vers la gauche avec la même vitesse est superposée à la précédente. On supposera que ces charges sont si nombreuses et si proches les unes des autres que l'on peut ignorer leur caractère discret dès qu'on en est assez éloigné. Ce sera notre cas. Sur la figure nous avons, pour la clarté du dessin, tracé les deux suites légèrement écartées. Pour un tel système, il n'existe aucun système de référence où toutes les charges soient au repos. Supposons que la densité linéaire des charges positives, mesurée dans le repère du laboratoire, soit λ , en C/m, et que la densité des charges négatives soit la même. La densité totale linéaire de charge, dans le repère du laboratoire, est donc zéro. Il s'ensuit que le champ électrique **E** est nul dans le repère du laboratoire. Ce que nous avons là est l'équivalent d'un fil neutre transportant un courant électrique continu. Dans un fil métallique, seules les charges négatives (les électrons) seraient en mouvement, et les charges positives au repos. Nous avons pris un modèle plus symétrique, dans le but de simplifier légèrement la discussion. Si vous vous déplaciez à la même vitesse que les charges positives, vous trouveriez que leur densité linéaire est différente. La situation ressemble à celle du condensateur de la figure 5.19. Dans le repère du laboratoire, la distribution positive de charge devrait être contractée dans la direction x du facteur $(1-v_0^2/c^2)^{1/2}$, ce qui la rendrait *plus* forte que dans un repère où les charges positives seraient au repos. Puisque nous avons dit que la densité dans le repère du laboratoire était λ , la densité dans le repère des charges positives doit être plus faible, à savoir égale à $\lambda(1-v_0^2/c^2)^{1/2}$. On obtient la même valeur pour la densité linéaire des charges négatives dans *leur* référentiel (celui où elles sont au repos). Ceci va nous être utile.



Fig. 5.21 Un dessin dans « l'espace des vitesses » pour y voir plus clair. (On doit cependant effectuer l'addition des vitesses de manière relativiste.) Les divers v représentent les valeurs des vitesses, quantités positives, ici et dans les équations 5.35 \hat{a} 5.44.

Une charge fixe d'essai q placée à une distance r du « fil » n'est soumise à aucune force puisque le champ électrique est nul. Nous nous intéressons maintenant à la force agissant sur une charge d'essai en mouvement. Supposons que la charge q soit en mouvement vers la droite avec une vitesse v, dans le repère du laboratoire. Quelle est la valeur de la force qui agit sur elle, mesurée dans le repère du laboratoire? Nous savons maintenant comment répondre à une telle question. Nous nous plaçons dans un système de coordonnées en mouvement avec la charge q. Dans ce référentiel « de la particule » la charge q est au repos et la force qu'elle subit n'est déterminée que par le champ électrique régnant dans ce repère.

Pourquoi existerait-il un champ électrique dans le repère « de la particule » quand il n'y en a pas dans le

repère « du laboratoire »? Parce que les valeurs des densités linéaires de charge observées dans le référentiel « de la particule », que nous désignerons par λ_+ ', et λ_- ' respectivement, ne sont pas égales. Quand on l'observe dans le repère « de la particule », le fil est chargé! Il possède un excès de charge négative par unité de longueur ⁽⁷⁾.

Pour faire le calcul exact de la force, nous avons besoin de connaître la vitesse des charges positives et celle des charges négatives dans le nouveau référentiel. Il est évident qu'elles ne seront pas égales. En fait, puisque notre repère « de la particule » se déplace vers la droite, quand on le regarde du laboratoire, il tend à rattraper les charges positives et à s'éloigner encore plus vite des particules négatives. La figure 5.21 vous aidera à identifier les vitesses dont il est question. Nous n'allons faire aucune approximation, nous devons donc utiliser les formules relativistes d'addition des vitesses pour trouver les vitesses v'_+ et v'_- des charges positives et négatives dans le repère « de la particule ». Ces vitesses sont

$$\upsilon_{+}^{'} = \frac{\upsilon_{0} - \upsilon}{1 - \upsilon_{0}\upsilon/c^{2}} \qquad \upsilon_{-}^{'} = \frac{\upsilon_{0} + \upsilon}{1 + \upsilon_{0}\upsilon/c^{2}}$$
(5.35)

Les symboles β et γ sont ici tout indiqués. Soit $\beta_0 = v_0/c$, $\gamma_0 = (1 - \beta_{0}^2)^{-1/2}$; $\beta'_{+} = v'_{+}/c$

Avec cette notation l'équation 5.35 s'écrit

$$\beta_{+}^{'} = \frac{\beta_{0} - \beta}{1 - \beta_{0}\beta} \qquad \beta_{-}^{'} = \frac{\beta_{0} + \beta}{1 + \beta_{0}\beta} \tag{5.36}$$

Les deux distributions de charge sont l'objet de contractions de Lorentz *diférentes* - c'est là le noeud du problème. Nous pouvons trouver la densité linéaire des charges positives en partant de leur densité dans leur propre référentiel et en appliquant le facteur de contraction correspondant au repère « de la particule ». Nous avons obtenu plus haut la densité des charges positives dans le référentiel où elles sont au repos; c'était $\lambda(1-v^2_0/c^2)^{1/2}$, soit λ/γ_0 dans notre nouvelle notation. Le facteur de contraction qu'il faut appliquer à cette distribution linéaire pour obtenir celle qui est mesurée dans le repère de la particule est $1/\gamma'_+$ de sorte que son inverse, γ'_+ est le rapport, supérieur à l'unité, de la densité linéaire de charge dans le repère de la particule

⁽⁷⁾ « Et l'invariance de la charge? » vous demandez-vous peut-être. Nous avons toujours insisté sur le fait que la charge totale contenue dans une certaine surface fermée est la même quel que soit le référentiel où on lamesure. Dans ce cas, aucune surface fermée ne peut contenir la charge totale du fil, qui s'étend jusqu'à l'infini; ce qui se passe aux « extrémités » n'intervient pas ici.

à la densité dans le repère des charges positives. La densité linéaire de charge positive dans le repère de la particule doit donc être

$$\lambda'_{+} = \gamma'_{+} \left(\frac{\lambda}{\gamma_0} \right)$$
(5.37)

De la même façon, la densité de charge négative dans le repère de la particule est



Fig. 5.22 (a) Repère du laboratoire, avec deux conducteurs transportant du courant dans des directions opposées. Le courant est dû aux deux types d'ions positifs et négatifs qui se déplacent à la même vitesse.

$$\lambda'_{-} = \gamma'_{-} \left(\frac{\lambda}{\gamma_{0}}\right) \tag{5.38}$$

Nous devons trouver la densité totale de charge linéaire $\lambda'_{+} - \lambda'_{-}$, en éliminant γ'_{+} et γ'_{-} de ces équations au moyen de l'équation 5.36.

Ceci peut paraître un calcul assez lourd, mais on est vite conduit à une merveilleuse simplification, de la façon suivante

$$\lambda_{+'} - \lambda_{-}' = \frac{\lambda}{\gamma_{0}} (\gamma_{+}' - \gamma_{-}')$$
(5.39)

A partir de l'équation 5.36

$$\begin{split} \gamma_{+}^{'} - \gamma_{-}^{'} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_{0} - \beta}{1 - \beta_{0}\beta}\right)^{2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_{0} + \beta}{1 + \beta_{0}\beta}\right)^{2}}} = \frac{1 - \beta_{0}\beta}{\sqrt{1 - \beta_{0}^{2} - \beta^{2} + \beta_{0}^{2}\beta^{2}}} - \frac{1 + \beta_{0}\beta}{\sqrt{1 - \beta_{0}^{2} - \beta^{2} + \beta_{0}^{2}\beta^{2}}} \\ &= \frac{-2\beta_{0}\beta}{\sqrt{(1 - \beta^{2})(1 - \beta_{0}^{2})}} = -2\beta_{0}\beta\gamma_{0}\gamma \end{split}$$



(b) Repère où les ions négatifs du conducteur 1 et les ions positifs du conducteur 2 sont au repos.



(c) Repère où les ions positifs du conducteur 1 et les ions négatifs du conducteur 2 sont au repos.

(5.40)

La densité linéaire totale de charge est donc

$$\lambda'_{+} - \lambda'_{-} = -2\beta_{0}\lambda\beta\gamma = -\frac{2\lambda\gamma\upsilon\upsilon_{0}}{c^{2}}$$
(5.41)

Cette densité linéaire de charge électrique crée dans le repère de la particule le même champ électrique que n'importe quelle charge linéaire de même densité. Il nous suffix d'appliquer le théorème de Gauss à un cylindre entourant la ligne chargée pour obtenir le résultat classique d'un champ électrique radial de valeur

$$E_{r}' = \frac{(\lambda_{+}' - \lambda_{-})}{2\pi\varepsilon_{0}r} = -\frac{\lambda\gamma\upsilon\upsilon_{0}}{\pi\varepsilon_{0}rc^{2}}$$
(5.42)

La force agissant sur la charge positive d'essai q est dirigée radialement vers l'intérieur, c'est-à-dire dans la direction des y' positifs dans le repère de la particule et sa valeur est

$$F'_{y} = \frac{q\gamma\lambda\upsilon\upsilon_{0}}{\pi\varepsilon_{0}rc^{2}}$$
(5.43)

99

C'est une force transverse dans le repère de la particule. Si on la mesure dans le repère du laboratoire, sa valeur sera différente. D'après nos formules de transformation des forces (éq.5.31), $F_y = \left(\frac{1}{\gamma}\right)F_y$. Ceci élimine le γ . Nous en concluons que la valeur de la force agissant sur la charge q, qui se déplace avec une vitesse v parallèle au « fil » dans le repère du laboratoire, est

$$F_{y} = \frac{q\lambda \upsilon \upsilon_{0}}{\pi \varepsilon_{0} r c^{2}}$$
(5.44)

Remarquons que la quantité $2\lambda v_0$, que nous pouvons mettre en facteur dans l'équation 5.44, si nous le voulons, est justement le courant électrique passant dans notre « fil » en ampères. En effet λv_0 est la quantité de charge transportée par seconde vers la droite et le transport de charge négative vers la gauche donne une contribution égale au courant. En désignant ce courant par *I*, la valeur de la force agissant sur une charge en mouvement est donnée par



Fig. 5.23 (a) Repère du laboratoire avec deux fils transportant des courants de sens opposes. Comme dans un fil métallique le courant est dû au mouvement des ions négatifs (electrons) seulement.



(b) Repère où les electrons du fil 1 sont au repos. Remarquez que les ions positifs sont comprimés dans le conducteur 2 mais que la distribution d'électrons l'est encore plus.



(c) Repère où les electrons du fil 2 sont au repos. De même qu'en (b) l'autre fil apparaît à ces electrons comme étant au repos avec une charge negative.

$$F = \frac{qvI}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r} \tag{5.45}$$

C'est un fait remarquable que la force agissant sur la charge d'essai en mouvement ne dépende pas séparément de la vitesse ou de la densité des porteurs de charge dans le fil, mais seulement de la combinaison de ces deux quantités qui définit le transport total des charges. Si nous avons un certain courant, par exemple 3,3 milliampères, il importe peu que ce courant soit dû à des électrons de haute énergie se déplaçant avec une vitesse égale à 99 pour cent de celle de la lumière, ou à des électrons dans un métal ayant un mouvement thermique aléatoire avec une légère dérive dans une direction, ou à des ions chargés d'une solution avec des ions positifs allant dans un sens et des ions négatifs allant dans l'autre sens. De même la force sur la charge d'essai est strictement proportionnelle à la vitesse de la charge d'essai. Dans notre calcul, nous n'avons pas fait l'hypothèse de faibles vitesses, ni pour les porteurs de charge du fil, ni pour la charge d'essai. L'équation est exacte, sans conditions.

Voyons maintenant si nous pouvons expliquer la répulsion mutuelle des conducteurs transportant des courants de sens opposés, comme on en voit sur la figure 5.1 b au début de ce chapitre. Supposons d'abord qu'il y ait dans chaque conducteur un nombre égal de porteurs de charges positives et négatives qui se déplacent en sens contraire à la même vitesse. Dans le repère du « laboratoire » nous avons quelque chose qui ressemble à la figure 5.22 a. En nous plaçant dans un repère qui se déplace avec les charges négatives dans le conducteur I et les charges positives dans le conducteur 2, nous voyons le système comme il est représenté sur la figure 5.22 b. Dans ce repère, le conducteur 1 a un excès de charge positive par unité de longueur; il repousse donc les charges positives du conducteur 2. De la même façon, les charges négatives du conducteur 1 sont repoussées par la charge négative en excès du conducteur 2. Pour trouver les forces agissant sur les porteurs qui restent - les positifs dans 1 et les négatifs dans 2 - nous nous plaçons dans un repère où ils sont au repos, figure 5.22 c. Ici le conducteur 2 apparaît avec un excès de charge positive, les charges positives en 1 subissent donc une répulsion. De même pour les porteurs négatifs de 2. Chaque porteur de charge est donc soumis, dans son propre référentiel, à une force de répulsion de la part des porteurs de charge de l'autre conducteur. Pour trouver la valeur exacte de la force de répulsion dans le repère du laboratoire, nous aurons à retransformer la force, comme nous l'avons fait de l'équation 5.43 à l'équation 5.44. Mais ceci ne pourra pas changer le signe de la force. Nous sommes donc obligés d'observer, dans le repère du laboratoire, une force de répulsion entre chaque conducteur.

Le modèle que nous venons de décrire représente bien la conduction dans un électrolyte ou un gaz ionisé, bien qu'en général les deux types de porteurs puissent avoir des vitesses plutôt différentes. Dans un métal, cependant, seuls les porteurs de charge négative (les électrons) se déplacent, tandis que les charges positives qui leur correspondent restent fixées sur le réseau cristallin. Sur la figure 5.23 a on a représenté deux tels fils transportant des courants de sens opposés tels qu'on les voit du repère du laboratoire. Les fils étant neutres, il n'y a pas de forces électriques produites par le fil opposé sur les ions positifs qui sont stationnaires dans le repère du laboratoire. Si l'on se place dans un repère dans lequel un des ensembles d'électrons estau repos, figure 5.23 *b*, nous trouvons que, dans l'autre fil, la distribution des électrons subit la contraction de Lorentz plus que la distribution des ions positifs. On trouve une telle situation sur la figure 5.23 *c*. Ce modèle prédit donc aussi une répulsion entre courants parallèles circulant en sens opposés. Il illustre, de façon qualitative, l'énoncé fait plus haut, à savoir que les forces entre courants ne dépendent que de l'intensité des courants et non de la façon dont sont transportées les charges. (Le problème 5.15 indique une démonstration général ed ect énoncé.)

Dans ce chapitre, nous avons vu comment l'invariance de la charge implique l'existence de forces entre courants électriques. Ceci ne doit pas nous conduire à considérer ce dernier fait comme la conséquence du précédent. Ce sont simplement deux aspects de l'électromagnétisme et le fait qu'ils soient reliés illustre de très belle façon la loi plus générale suivante : la physique est la même dans tons les référentiels d'inertie.

Si nous avions à analyser chaque système de charges en mouvement en utilisant des transformations d'un système de coordonnées à un autre, notre tâche serait bien ennuyeuse et difficile. Il existe une méthode plus élégante. L'effet d'un courant sur un autre ou d'un courant sur une charge en mouvement, peut se décrire complètement et avec concision en introduisant un nouveau champ, le champ *magnétique*.

Problèmes

- 5.1 Un condensateur est formé de deux plaques parallèles rectangulaires horizontales séparées par une distance de 2 cm. La dimension de direction est-ouest des plaques est de 20 cm, celle de direction nord-sud est de 10 cm. On a chargé le condensateur en le reliant momentanément à une batterie de 300 volts. Combien y a-t-il d'électrons en excès sur la plaque négative ? Quelle est la valeur du champ électrique régnant entre les plaques ? Donner les valeurs des quantités suivantes mesurées dans un référentiel qui se déplace vers l'est, avec une vitesse de 0,6 c, par rapport au laboratoire dans lequel les plaques sont au repos : les trois dimensions du condensateur; le nombre d'électrons en excès sur la plaque négative; le champ électrique régnant entre les plaques. Répondre aux mêmes questions pour un référentiel qui se déplace vers l'est.
- 5.2 Comme mesure grossière de l'« aplatissement » relativiste des lignes de force du champ électrique créé par une charge en mouvement, nous pouvons utiliser l'angle a entre deux surfaces coniques qui contiennent entre elles la moitié du flux électrique total. C'est-à-dire que la moitié du flux à travers une sphère devrait être contenue dans la zone sphérique équatoriale comprise entre $\theta' = \pi/2 + \alpha/2$ et $\theta' = \pi/2 - \alpha/2$. On considérera seulement le cas d'extrême limite relativiste, avec $\gamma \text{ tm} 1$. On n'a alors besoin de ne considérer que des angles θ' tels que $\theta' = \pi/2 - \varepsilon$ avec $|\varepsilon| \vee 1$. Montrez d'abord que l'équation 5.12 peut s'écrire, de façon approchée, dans ce cas, sous la forme

 $E' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} \frac{\gamma}{(1+\gamma^2\varepsilon^2)^{3/2}}$ Faites ensuite varier ε de $-\alpha/2$ à $+\alpha/2$ et intégrez pour obtenir le flux passant à travers

l'étroite ceinture équatoriale. Rép. $lpha=2/\sqrt{3\gamma}$.

- 5.3 Un proton de 30 BeV passe à une distance de 10⁻⁹ m d'un atome d'hydrogène. Évaluer la valeur maxima du champ électrique et la durée approximative de l'impulsion de champ électrique auxquels est soumis l'atome. Faites la même chose pour un électron de 30 Bev passant à la même distance. Utiliser les valeurs approchées en énergie équivalente pour les masses au repos, à savoir l Bev pour le proton, 0,5 Mev pour l'électron.
- 5.4 Considérez la trajectoire d'une particule chargée qui se déplace à la vitesse de 0,8 *c* dans la direction des *x* au moment où elle entre dans une grande région de l'espace où règne un champ électrique uniforme dans la direction des *y*. Montrer que la vitesse selon l'axe des x de la particule doit *décroître*. Qu'en est-il de la composante *x* de la quantité de mouvement?
- 5.5 Les plaques de déflexion d'un oscilloscope à rayons cathodiques à haute tension sont formées par deux plaques rectangulaires de 4 cm de long et 1,5 cm de large, écartée de 0,8 cm. Il existe une différence de potentiel de 6 000 volts

entre les plaques. Un électron qui a été accéléré à travers une différence de potentiel de 250 kilovolts entre dans ce système de déflexion en venant de la gauche avec un mouvement parallèle aux plaques, à mi-distance de celles-ci. Nous voulons trouver la position de l'électron et la direction de son mouvement quand il quitte l'espace de déflexion à l'autre extrémité des plaques. Nous négligerons le champ dû à l'effet de bord et supposerons que le champ électrique régnant entre les plaques est toujours uniforme. On pourra prendre 500 keV comme équivalent en énergie de la masse au repos de l'électron. Commencer l'analyse du mouvement dans le repère du laboratoire en répondant à ces questions : $\gamma = ?$; $\beta = ?$; p_x , en unités de mc = ?; temps passé entre les plaques par l'électron = ? (Négliger la variation de vitesse horizontale discutée par le problème 5.4); composante transverse de la quantité de mouvement à la sortie? Décrire ensuite ce mouvement comme il apparaîtrait dans un référentiel d'inertie qui se déplacerait avec l'électron à l'instant où celui-ci pénètre dans la région de déflexion : quel y est l'aspect des plaques? Quel est le champ régnant entre elles ? Qu'arrive-t-il à l'électron dans ce système de coordonnées. Le but principal de cet exercice est de vous convaincre que les deux descriptions sont complètement compatibles l'une avec l'autre.

- 5.6 On se demande ce que représenterait la superposition des figures 5.16 et 5.17. Les champs existant dans la région de transition tendent-ils à se renforcer ou à s'annuler? Pouvez-vous expliquer ceci par la nature du mouvement de charge que représente une telle superposition ?
- 5.7 Une charge se déplace le long de l'axe des x positifs, en se dirigeant vers l'origine avec la vitesse v. Elle atteint l'origine à t = 0, y est instantanément arrêtée et sa vitesse inversée (comme si elle avait subi un choc élastique) de sorte qu'elle se déplace ensuite avec la même vitesse dans la direction des x positifs. Représentez le champ un moment après que la particule ait été réfléchie.



- 5.8 La figure représente une particule positive fortement relativiste qui s'approche de l'origine en venant de la gauche et une particule négative se dirigeant vers l'origine en venant de la droite avec la même vitesse. Elles se heurtent à l'origine à t = 0, trouvent une certaine façon de perdre leur énergie cinétique et y restent sous la forme d'une entité neutre. Comment vous représentez-vous le champ à un certain instant t >0 ? Représentez les lignes de force. Comment le champ change-t-il au cours du temps ?
- 5.9 Une particule 1, de charge q₁, est au repos. Une particule 2, de charge q₂, passe avec une vitesse v à proximité de la première, sa distance la plus proche de celle-ci étant b. La première particule a une masse si élevée que la vitesse qu'elle acquiert en raison de la loi de Coulomb ne se traduit que par un déplacement négligeable durant le temps du passage de la particule 2. De la même façon, la deuxième particule est si massive que toute variation de la vitesse, ou tout écart à sa trajectoire rectiligne peuvent être considérés comme négligeables. Quelle quantité de mouvement transverse est-elle gagnée par chaque particule 2). Répondez d'abord à ceci pour la particule 2, en vous plaçant dans le référentiel où la particule 1 est au repos. Le théorème de Gauss appliqué à un cylindre rendra toute intégration inutile. Votre formule est-elle relativistement exacte? Considérez maintenant la quantité de mouvement gagnée par la particule 1. Le champ qui agit sur elle est celui créé par une charge en mouvement, que donne l'équation 5.12. Par une intégration appropriée, on pourrait calculer la quantité de mouvement transverse. Cependant vous pouvez aussi employer le théorème de Gauss à la place de l'intégration, ou utiliser directement votre premier résultat. Expliquez en détail tout cela.Rép. (valable pour les deux parties) : q₁ q₂/2πε₀vb.
- 5.10Dans la section 5.9 on a insisté sur la distinction existant entre l'invariance de la charge et la conservation de la charge et on a remarqué que la conservation n'implique pas nécessairement l'invariance. Dire cependant que le théorème de Gauss est valable dans un système de référence pour une surface quelconque et que les postulats de la relativité sont satisfaits *implique* la conservation de la charge. Montrez ceci en discutant la situation suivante on crée soudain une charge positive, à t = 0. A un certain instant $t = t_1$ des observateurs mesurent l'intégrale de surface de **E**, sur des surfaces de rayons divers. Partez de là.

Chapitre 6 Le champ magnétique

6.1 Définition du champ magnétique

Une charge qui se déplace parallèlement à un courant créé par d'autres charges subit une force perpendiculaire à sa vitesse. C'est ce qui résulte de l'analyse que nous avons faite de la situation représentée sur la figure 5.20 du dernier chapitre. Nous pouvons voir que c'est ce qui se passe dans la déviation d'un faisceau d'électrons par un courant, comme sur la figure 5.3. Il nous reste à trouver ce qui se passe si nous avons une charge en mouvement dans une direction quelconque. Vous pouvez cependant déjà reconnaître le comportement habituellement décrit en disant qu'il y a un champ magnétique autour d'un fit transportant du courant et qu'une charge en mouvement dans un champ magnétique subit une force. Nous avons défini le vecteur champ électrique \mathbf{E} comme étant la force agissant sur une charge d'essai unité au repos, nous pouvons définir de même un *autre* champ par la partie proportionnelle à la vitesse de la force qui agit sur une charge d'essai en mouvement. Pour dire ceci avec précision, supposons que, en un certain point et à un certain instant, dans un référentiel particulier, l'expérience montre que la force sur une charge d'essai q se déplaçant avec une vitesse uniforme \mathbf{v} est donnée par

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \tag{6.1}$$

où **E** et **B** sont des vecteurs qui ne dépendent pas de **v**. Si ceci est valable, nous *définissons* **E** comme le champ électrique en ce point et nous *définissons* **B** comme le champ magnétique en ce point.

Pour justifier entièrement cette définition, nous devrions montrer, expérimentalement ou autrement, qu'on trouve toujours une telle relation. Ce n'est pas ce que nous avons fait jusqu'ici, nous nous sommes contentés de montrer qu'elle est valable dans certains cas particuliers importants et instructifs. Dans la section 5.8 nous avons démontré que la force sur la charge d'essai est strictement indépendante de sa vitesse si toutes les autres charges sont stationnaires. Dans ce cas, l'équation 6.1 est valable avec $\mathbf{B} = 0$ partout. Le raisonnement que nous avons fait montre qu'une particule en mouvement parallèle au déplacement des porteurs de charge dans le «fil» subit une force qui est proportionnelle à sa vitesse et qui lui est perpendiculaire, comme l'exige le produit vectoriel de l'équation 6.1. En fait nous pouvons dire exactement quel champ magnétique \mathbf{B} serait en accord avec ce que nous avons trouvé et la symétrie du système. Ce devrait être un vecteur perpendiculaire au plan de la figure, c'est-à-dire perpendiculaire à la fois au fit et à la vitesse \mathbf{v} de la charge d'essai. Pour rendre l'équation 5.45 et l'équation 6.1 compatibles, le module de B doit être

$$B = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r} \tag{6.2}$$

Il est d'usage dans le système M.K.S.A. d'introduire une nouvelle constante μ_0 définie par la relation $c^2 = 1/(\mu_0 \varepsilon_0)$, les formules de la magnétostatique prennent alors une forme plus symétrique de celles de l'électrostatique; la relation précédente s'écrit alors

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{6.2'}$$

la constante μ_0 vaut 4 π 10⁻⁷ M.K.S.A.



Nous avons obtenu le champ magnétique créé par un courant rectiligne en analysant seulement le champ électrique des charges mouvement. en Notre démonstration est incomplète, mais sur des points qui ne sont pas essentiels. Nous devrions montrer qu'il existe aussi une force dépendante de la

Fig. 6.1 (a) Une charge d'essai se déplace dans le repère du « laboratoire » perpendiculairement à l'alignement des charges. Dans le repère de la « particule », la ligne de charge avance vers la charge d'essai.

vitesse, de même module et de direction appropriée, quand nous faisons se mouvoir la charge d'essai radialement, vers le a fil » ou en s'en éloignant. Ceci peut se faire de la même façon, bien que les détails mathématiques soient un peu plus délicats, si l'on essaye de ne faire aucune approximation. Ce qui nous intéresse, ce ne sont pas les mathématiques des transformations de coordonnées mais les raisons de l'existence de la force. Nous pouvons les découvrir sans faire aucun calcul.



Fig. 6.2 Pour démontrer l'origine des forces dans le repère de la particule de la figure 6.1 *b*. Champs électriques créés (*a*) par deux charges positives symétriquement et (*b*) par deux charges négatives placées symétriquement.



Fig. 6.3 Deux fils dans lesquels on suppose que les électrons de conduction se déplacent à une vitesse moyenne de dérive de 0,5 cm/s.

Sur la figure 6.1 *a* nous avons représenté le repère « du laboratoire » avec la particule chargée d'essai se dirigeant vers le fil. Dans le repère « de la particule » (fig. 6. 1 *b*) où la charge d'essai est au repos, nous voyons la rangée de charges positives et négatives allant vers le bas à la rencontre de la charge d'essai, les charges individuelles se déplaçant en oblique, les positives vers le bas à droite, les négatives vers le bas à gauche. Cela ressemble un peu à l'une des manoeuvres d'un défilé de « majorettes ». Ce que nous espérons trouver dans ce repère, c'est un champ électrique **E**' dirigé vers la gauche⁽¹⁾. Pourtant, tout paraît bien symétrique; comment peut-il se créer un tel champ ?

Considérons dans le repère de la particule deux charges positives P_1 et P_2 placées symétriquement par rapport à la particule (fig. 6.2 a) (Si nous voulions sommer les contributions de toutes les charges positives, nous pourrions toujours les grouper ainsi en paires symétriques.) Le champ électrique créé par ces deux charges est représenté sur la figure 6.2 *a*. On voit alors clairement pourquoi elles ne produisent pas des effets identiques sur *q*. La contraction relativiste du champ, décrite par le facteur $(1 - (\beta^2 \sin^2 \theta))^{-3/2}$ de l'équation 5.12 rend le champ créé par P_2 en *q* plus intense que celui créé par P_1 . Si les champs avaient la symétrie sphérique, ils s'annuleraient, du moins en ce qui concerne leur composante *x'*. Ici P_2 l'emporte, il en résulte donc une composante *x'* dirigée vers la gauche.

Prenons maintenant deux charges négatives N_1 et N_2 placées symétriquement comme indiqué sur la figure 6.2 *b*. Dans ce cas N_1 produit le champ le plus intense et ceci aussi crée une composante x' du champ électrique dans la direction des x' négatifs. D'autre part, les composantes y' des champs créés par les charges positives et négatives s'annulent évidemment. Il nous reste un champ électrique **E'**, donc une force sur *q*, parallèle au fil, dans le sens des x'négatifs.

Nous pouvons maintenant nous rendre compte clairement du fait que l'interaction magnétique entre charges en mouvement est un effet relativiste. On pouvait déjà s'en douter à l'apparition du facteur vv_0/c^2 dans l'équation 5.44. Dans un monde où se déplacent des charges électriques, le magnétisme disparaîtrait si *c* était infini. Ceci étant, il peut sembler curieux que les forces magnétiques soient assez intenses pour faire tourner des armatures de moteurs et soulever des poids. Nous avons remarqué plus haut que les forces électrostatiques entre objets à grande échelle ne sont, en générale, pas très impressionnantes. Pourquoi les forces magnétiques ne sont-elles pas encore plus faibles? La raison doit en être trouvée dans la neutralité électrique presque totale de la matière. L'exemple suivant illustrera bien cela. Nous calculerons la force existant, dans un cas réel, entre deux fils parallèles

transportant du courant.

Comme cet exemple va nous entraîner, pour la première fois, à considérer un champ magnétique *dans* la matière, il est bon de faire une remarque préliminaire à ce sujet. La plupart des métaux, y compris le cuivre (mais pas le fer), et la plupart des substances en général, n'ont presque pas d'influence

⁽¹⁾ Nous cherchons une force qui apparaisse à un observateur au repos dans le repère du laboratoire comme une force perpendiculaire à la vitesse de la particule d'essai, comme dans le premier cas, et dirigée vers la gauche du vecteur vitesse vu de dessus.

sur un champ magnétique. Nous pouvons supposer que le champ B à l'intérieur du cuivre est pratiquement le même que celui créé dans le vide, par la même distribution de courants. Nous examinerons de près ces questions au chapitre 10. Jusque là, nous éviterons le fer.

Considérons deux fils de cuivre de 1 mm de diamètre, parallèles et distants de 5 cm (fig. 6.3). Un courant circule dans chaque fil; supposons que la vitesse moyenne des électrons de conduction dans chaque fil soit de 0,5 cm/s. Comme nous le savons déjà, la vitesse moyenne de dérive est beaucoup plus petite que la vitesse aléatoire des électrons. Si nous supposons qu'il y a un électron de conduction par atome de cuivre, nous pouvons aisément trouver le nombre d'électrons de conduction présents dans une longueur de 1 m d'un fil de 1 mm de diamètre. Il vaut environ 6×10^{22} . (Pour faire cette estimation, nous avons besoin de la densité du cuivre qui vaut 8, de son poids atomique, 64, et du nombre d'Avogadro.) La densité linéaire λ de charge négative en mouvement est alors

$$\lambda = (6 \times 10^{22}) \times (1,6 \times 10^{-19}) \approx 10^4 \text{ C/m}$$
(6.3)

Les charges positives sont stationnaires. Le produit de λ par la vitesse de dérive est do $(10^4)(5 \times 10^{-3}) = 50$ ampères. Cherchons maintenant la force agissant sur un électron de l'autre fil, à une distance r = 5 cm. Cet électron se déplace aussi à la vitesse moyenne de 0,5 cm/s, si le même courant circule dans les deux fils. En appliquant l'équation 5.44, nous obtenons

$$F = \frac{q\lambda\nu\nu_0}{2\pi\varepsilon_0c^2r} = \frac{0.5(1.6\times10^{-19}\,\text{C})(10^4\,\text{C/m})(5\times10^3\,\text{m/s})^2}{3.1416\times(8.8\times10^{-12}\,\text{f/m})(3\times10^8\,\text{m/s})(0.05\,\text{m})} \approx 1.6\times10^{-25}\,\text{N}$$
(6.4)

Puisque chaque électron de conduction de l'autre fil subit une telle force, la force totale sur les électrons contenus dans 1 m de fil sera (6×10^{22}) X $(1,6 \times 10^{-25})$ soit environ 10^{-2} N/m. Nous constatons par l'observation que cette force agit sur le fil lui-même; toute quantité de mouvement donnée aux électrons est transférée au réseau qui les contient. Pour ce qui est de la direction de la force, l'analyse que nous avons faite de la situation décrite par la figure 5.20 montre que, quand des charges de même signe se déplacent parallèlement, l'interaction magnétique tend à les rapprocher. Nos fils de cuivre, s'ils sont parcourus par des courants de même sens, seront donc attirés l'un vers l'autre avec une force de 10^{-2} newton par mètre de fil. Ceci sera valable pour toute paire de fils rectilignes parallèles séparés par la même distance et parcourus par un courant de 50 ampères.



Fig. 6.4 Le conducteur 1 créé un champ magnétique **B** à l'endroit où se trouve le conducteur 2. La force agissant sur le conducteur 2, par unité de longueur, est donnée par l'équation 6. 5

Une force de 10^{-2} N n'est pas énorme, mais elle peut facilement se mesurer. Comparons-la à la force électrostatique qui agirait sur les deux fils s'ils portaient une charge statique de 10^4 C/m chacun. Le champ électrique créé par une ligne chargée de densité linéaire à étant $\lambda/(2\pi\epsilon_0 r)$ (éq. 1.26), la force par mètre de longueur exercée sur une ligne semblable placée à une distance r devra être $\lambda^2/(2\pi\epsilon_0 r)$. Si nous prenons la densité linéaire de charge que nous avons supposé être celle des électrons dans le fil, 104 C/m, nous obtenons une force qui est juste $(c/v)^2$ fois plus grande que l'interaction magnétique de 10^{-2} N/m, soit une force de 36 x 10^{11} N/m, ce qui est énorme ! Les phénomènes magnétiques passeraient donc relativement inaperçus, si la Nature ne fournissait deux types de charges capables d'annuler

l'interaction électrostatique - un monde où il n'y aurait qu'un seul type de charge serait de toute façon extraordinairement différent. Dans le domaine atomique, où sont mises en jeu des forces de Coulomb entre particules

élémentaires, les phénomènes magnétiques occupent d'ailleurs la seconde place, loin derrière les interactions électriques. Ils sont généralement plus faibles, d'un facteur juste égal au carré du rapport de la vitesse de la particule à la vitesse de la lumière.

L'interaction magnétique entre courants parallèles ne dépend que du produit des courants, et non des densités de charge et des vitesses séparément. Nous avons introduit la densité de charge et la vitesse dans l'exemple ci-dessus afin de permettre la comparaison entre les interactions électrostatique et magnétique. Habituellement, on ne connaît que le courant total dans chaque fil, et le mécanisme de transport des charges n'a pas d'importance, qu'il soit effectué par de nombreuses charges se déplaçant lentement, ou par un petit nombre de charges se déplaçant rapidement. Supposons que le conducteur 1 de la figure 6.4 soit parcouru par un courant de I_1 ampères. Supposons que, dans le conducteur 2, situé à une distance *r*, il y ait une densité linéaire de charge de λ C/m qui se déplace à la vitesse v_2 . Nous savons que la force par unité de longueur agissant sur le conducteur 2 doit être $I_1\lambda v_2/(2\pi\epsilon_0c^2r)$, mais ceci est équivalent à :

Force par mètre =
$$\frac{I_1 I_2}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$$
 (6.5)

parce que λv_2 est égal au courant I_2 circulant dans le deuxième conducteur.

Cette relation est utilisée pour définir l'unité d'intensité de courant dans le système M.K.S.A. Si on fait $I_1 = I_2 = I$, r = I m, l = 1A quand la force par mètre vaut $\mu_0/2\pi = 2 \ge 10^{-7}$ Newton.

Exprimée en fonction du champ magnétique **B**, le module de la force agissant sur un conducteur parcouru par d'autres courants, est *IB* par mètre de conducteur. La force est perpendiculaire au conducteur et au champ magnétique, de sorte que nous pouvons écrire ceci sous la forme vectorielle suivante

$$\mathbf{dF} = I \, \mathbf{dI} \wedge \mathbf{B} \tag{6.6}$$

Dans l'équation 6.6, d**F** est la force qui agit sur un petit élément du conducteur de longueur d**I**, parcouru par un courant continu *I* mesuré en ampères. Le vecteur d**I** est dirigé dans la direction du courant. L'équation 6.6 résulte directement de notre définition de **B** dans l'équation 6.1 et de la définition du courant comme un transport de charges. Elle est valable pour un conducteur de forme quelconque; on a simplement besoin de connaître **B** en chaque point du conducteur. Remarquez que vous pouvez obtenir l'équation 6.6 en vous rappelant que la force sur un élément de charge dq se déplaçant à la vitesse **v** est d**F** = dq(**v** \wedge **B**). Avec **v** = d**I**/dt et dq = *I* dt, ceci devient

$$d\mathbf{F} = Idt \frac{d\mathbf{l}}{dt} \wedge \mathbf{B} = Id\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$$
(6.7)

Si on exprime le courant en ampères, le champ magnétique à une distance de r m du fil vaut

$$B(\text{Tesla}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{I(\text{amp})}{r(\text{m})} = \frac{\mu_0 I(\text{amp})}{2\pi r(\text{m})}$$
(6.8)

La force agissant sur un conducteur parcouru par un courant de I ampères placé dans un champ de B Teslas vaut

$$d\mathbf{F} \text{ (Newtons)} = I(\text{amp}) d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}(\text{m Teslas})$$
(6.9)

L'unité de champ magnétique est ici le Tesla, unité M.K.S.A. Le Tesla vaut 10^4 Gauss où le Gauss, unité du système C.G.S. gaussien, est l'unité pratique la plus répandue. L'intensité du champ magnétique terrestre est, près de la surface, de l'ordre de un demi-gauss. Le champ créé sur l'un des fils de la figure 6.3 par le courant passant dans l'autre fil, vaut environ 2 gauss, soit 2 10^{-4} Teslas. Le champ existant entre les pôles d'un grand électroaimant est généralement mesuré en milliers de Gauss (kilogauss). Il est assez facile d'atteindre 10 à 20 kilogauss, soit 1 à 2 Teslas, dans un électroaimant à noyau de fer, et 60 à 80 kilogauss, soit 6 à 8 Teslas, dans une bobine supraconductrice. Des champs au-dessus de 10^5 Gauss, soit 10 Teslas, sont nettement plus difficiles à obtenir. A la surface du soleil, de petites régions (taches solaires) sont le siège de champs magnétiques de l'ordre de quelques centaines de Gauss, et on connaît quelques étoiles qui possèdent à leur surface des champs plus grands qu'un kilogauss. De façon générale, les champs magnétiques à l'échelle de l'univers sont plutôt faibles en comparaison. Une mesure récente (par une méthode spéciale de spectroscopie) du champ magnétique interstellaire régnant dans



Fig. 6.5 Champ magnétique autour d'un fil rectiligne traverse par un courant.

une petite région de notre Galaxie a fourni une valeur de l'ordre de 10⁻⁵ Gauss, soit 10⁻⁹ Teslas. A l'échelle de la Galaxie, un champ de cet ordre n'est pas insignifiant. En fait, le champ magnétique joue un rôle essentiel, parfois dominant, dans la dynamique Galactique. C'est pourquoi un Gauss, qui fut pendant des siècles la valeur du seul champ magnétique étudié par l'homme, représente maintenant à peu prés la moyenne géométrique entre les champs les plus intenses produits au laboratoire et les champs les plus élevés de la cosmologie.

Nous ajouterons que la quantité que nous avons désigné par **B** et que nous avons appelée intensité du champ magnétique (ou champ magnétique) se trouve appelée *induction* magnétique dans de nombreux livres.

6.2 Quelques propriétés du champ magnétique



Fig. 6.6 La circulation du champ magnétique **B** sur un contour fermé ne dépend que du courant entouré par celui-ci.

Le champ magnétique est, comme le champ électrique, un artifice pour décrire comment des particules chargées interagissent entre elles. Si nous disons que le champ magnétique au point (4,5; 3,2; 6,0), à 12 h, est dirigé dans la direction des y négatifs et a un module de 5 10^{-4} Teslas, nous fixons implicitement l'accélération qu'aurait une particule chargée en mouvement en ce point de l'espace-temps. Ce qui est remarquable dans un tel énoncé, c'est que la donnée du vecteur **B** dit tout ce qu'il y a à dire. Si on le connaît, on peut prédire sans ambiguïté la partie dépendante de la vitesse de la force agissant sur une particule quelconque se déplaçant avec une vitesse quelconque. Et il n'est nullement besoin de connaître les autres particules chargées qui sont à l'origine du mouvement. En d'autres termes, si deux systèmes tout à fait différents de charges en mouvement produisent les mêmes E et B en un point particulier, le comportement d'une particule d'essai en ce point sera exactement le même pour les deux systèmes. C'est pour cette raison seulement que le concept de champ est utile, comme intermédiaire dans le calcul de l'interaction des particules. Et c'est pour cette raison que nous considérons que le champ est une entité indépendante.

Selon notre point de vue du moment, le champ a été inventé pour décrire l'interaction de particules : est-il plus ou moins réel que celles-ci? C'est une question fondamentale que nous ferions mieux de laisser de côté un certain temps. Des physiciens pour qui les champs électriques et magnétiques étaient des entités fort réelles - Maxwell et Faraday par exemple - furent de ce fait amené à faire de grandes découvertes. Considérons donc le champ magnétique aussi concrètement qu'ils le firent et étudions quelques-unes de ses propriétés.

Nous nous sommes bornés jusqu'ici à l'étude du champ magnétique créé par un fit rectiligne ou un élément rectiligne parcourus par un courant continu. Nous avons trouvé qua la direction du champ est toujours perpendiculaire à un plan contenant l'élément de courant et le point où on observe le champ. Le module du champ est proportionnel à l/r. Les lignes de force ont l'aspect de cercler entourant le conducteur, comme on le voit sur la figure 6.5. L'orientation de **B** est déterminée par la convention qua nous avons précédemment adoptée pour le produit vectoriel par la décision (arbitraire) d'écrire le second terme de l'équation 6.1 sous la forme $q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ et par le fait *physiquement* établi qu'est l'attraction par un courant positif d'une charge positive se déplaçant parallèlement à celui-ci. Tout ceci est cohérent si nous relions la direction de **B** à celle du courant qui le crée de la manière indiquée sur la figure 6.5. Si l'on regarde dans la direction du courant, les lignes de force de **B** sont dirigées dans le sans de rotation des aiguilles d'une montre. Vous pouvez aussi, si vous le préférez, vous servir de la règle du tire-bouchon.

Considérons la circulation de **B** autour d'un contour fermé situé dans le champ. (Rappelons-nous qu'une étude similaire dans le cas du champ électrique créé par une charge ponctuelle nous a conduit à découvrir une propriété simple et fondamentale de tous les champs électrostatiques.) Considérons d'abord le contour *ABCD* de la figure 6.6 *a*. I1 est dans un plan perpendiculaire au fit conducteur; en fait, il nous suffit de considérer ce plan, puisque **B** n'a pas de composante parallèle au fit. La circulation de **B** autour du contour représenté est nulle, pour la raison suivante : les contours *BC* et *DA* sont perpendiculaires à **B** et n'apportent donc aucune contribution. Le long de AB, **B** est plus fort d'un facteur r_2/r_1 , que le long de *CD*; mais *CD* est plus long que *AB* du même facteur, car ces deux arcs sous-tendent le même angle. Les deux arcs fournissent des contributions égales en module et de signes opposés, et l'intégrale est donc nulle.

Il s'ensuit que ceci se produit pour tout contour qua l'on puisse construire à partir de segments radiaux et d'arcs, tels qua celui représenté sur la figure 6.6 *b*. A partir de là, il ne faut qu'un pas pour conclure que l'intégrale curviligne est nulle autour de tout contour qui n'entoure pas le fil. Pour ne pas être gêné par les coins des contours, il nous suffira de montrer qua la circulation autour d'un circuit infinitésimal triangulaire s'annule à un ordre suffisamment élevé. On a fait un raisonnement analogue dans le cas du champ électrique.

Un contour qui n'entoure pas le fil est comme celui de la figure 6.6 *c*; si on le matérialise avec une ficelle, celle-ci ne restera pas attachée au fil si on la tire. La circulation est nulle autour d'un tel contour.

Considérons un contour circulaire qui entoure le fil comme sur la figure 6.6 *d*. Le périmètre du cercle vaut $2\pi r$, le champ magnétique $\mu_0 I/2\pi r$ et il est partout parallèle au contour, si bien que la valeur de la circulation autour de ce circuit particulier est $\mu_0 I$. Nous disons maintenant que l'on obtiendrait la même valeur avec *tout* contour entourant une fois le fil. Considérons, par exemple, le contour sinueux *C* de la figure 6.6 *e*. Construisons alors le contour *C'* de la figure 6.6 *f* à partir du contour *C* et d'un contour circulaire *C'* n'entoure pas le fil. La circulation autour de *C'* doit être nulle et l'intégrale autour de *C* doit donc être égale à l'opposée de celle autour de cercle, qui vaut $\mu_0 I$. Le signe dépendra de manière évidente du sens de parcours du contour. Nous en concluons que :



Faisceau d'électrons accélérés dans le vide sous haute tension; vitesse des électrons ~%. 2,4 x 10^8 m/s.

Accélérateur Van de Graaff; charge négative transportée vers le haut, charge positive vers le bas, v20 m/s.

Fil de cuivre; électrons de conduction dérivant vers la gauche avec une vitesse moyenne -.. 10^{-6} m/s.

Fig. 6.7 La circulation de **B** a exactement la même valeur autour de chaque partie du circuit, bien que la vitesse des porteurs de charge soit très différente dans les diverses parties du circuit.



Fig. 6.8 Une superposition de courants rectilignes. La circulation de B autour du contour fermé, parcouru dans le sens indiqué par la flèche, est égale à $\mu_0(-I_4 + I_5)$.

L'équation 6.10 n'est valable que quand le contour ne fait qu'un tour autour du courant. Il est évident qu'un contour qui ferait *N* tours autour du fil, comme celui de la figure 6.6 *g*, fournirait un résultat *N* fois plus grand pour la circulation.

Comme nous l'avons déjà remarqué, le champ magnétique ne dépend que de l'intensité du courant, c'est-à-dire du nombre d'unités de charges passant en un point donné du circuit par seconde. La figure 6.7 représente un circuit parcouru par un courant de 5 mA (milliampères). La vitesse moyenne des porteurs de charge varie de 10^{-6} m/s dans une des parties du circuit à 0.8 fois la vitesse de la lumière dans une autre. La circulation de **B** sur un contour fermé a la même valeur autour de chaque partie de ce circuit, à savoir

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I = 4\pi \times 10^{-7} \text{ M.K.S.A} \times 5 \times 10^{-3} \text{ A}$$

= 6,28×10⁻⁹ Tesla - m (6.11)

Ce que nous venons de prouver dans le cas d'un long fil conducteur rectiligne est évidemment valable, par superposition, pour le champ créé par un système de conducteurs rectilignes. Sur la figure 6.8, on a représenté plusieurs fils qui transportent des courants dans différentes directions. Si l'équation 6.10 est valable pour le champ magnétique créé par l'un de ces fils, elle doit le rester pour le champ total qui est la somme vectorielle, en chaque point, des champs créés par les fils individuels. C'est un champ plutôt complexe. Nous pouvons néanmoins prédire la valeur de la circulation de **B** autour du contour fermé de la figure 6.8 en connaissant seulement quels courants le circuit entoure et dans quel sens.

Nous nous intéressons cependant à d'autres choses qu'à des conducteurs rectilignes. Nous voulons connaître le champ magnétique créé par une distribution quelconque de courant-par exemple celle constituée par un courant circulant dans une boucle fermée. Il se trouve que ces champs plus généraux *obéissent exactement à la même loi*, donnée par l'équation 6.10. La circulation de **B** autour d'un fil courbe est égale à la circulation autour d'un fil rectiligne parcouru par un courant de même intensité. Ceci dépasse de loin ce que nous avons démontré jusqu'ici, aussi nous le considérerons comme un postulat confirmé par ses conséquences.

Pour énoncer celte loi de la façon la plus générale, nous devons introduire les distributions volumiques de courant. Toute distribution de courant continu peut se décrire par une densité de courant en volume $\mathbf{J}(x, y, z)$ qui varie dans l'espèce mais est constante dans le temps. Un courant passant dans un fil n'en est qu'un cas particulier dans lequel \mathbf{J} a une valeur non nulle à l'intérieur du fil et une valeur nulle à l'extérieur. Nous avons discuté des distributions volumiques dans le chapitre 4 où nous avons établi que, pour des courants indépendants du temps, \mathbf{J} doit satisfaire l'équation de continuité, dite encore équation de conservation de la charge



Fig. 6.9 **J** est la densité locale de courant. L'intégrale de surface de **J** sur S est égale au courant entouré par la courbe C.

Prenons une courbe fermée quelconque *C* dans une région où circulent des courants. Le courant total entouré par *C* est égal au flux de **J** à travers la surface qui sous-tend *C*, c'est-à-dire à l'intégrale de surface $\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ prise sur cette surface *S* (fig. 6.9). On aura une forme plus générale de l'équation 6.10 en écrivant

$$\int_{C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_{S} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$
(6.13)

Comparons cette expression avec le théorème de Stokes, que nous avons introduit au chapitre 2

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S} (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a}$$
(6.14)

Nous voyons alors que l'énoncé suivant:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{6.15}$$

est équivalent à l'équation 6.13. C'est l'énoncé le plus simple et le plus général de la relation existant entre le champ magnétique et les charges en mouvement qui lui ont donné naissance.

Cependant l'équation 6. 1 5 ne suffit pas à déterminer $\mathbf{B}(x, y, z)$, $\mathbf{J}(x, y, z)$ étant donné, puisque différents champs de vecteurs peuvent avoir le même rotationnel. Il nous faut donc lui rajouter une autre condition. Nous ferions mieux de penser à la divergence de **B**. Si nous revenons au champ magnétique créé par un simple fil rectiligne, nous remarquons que la divergence de ce champ est nulle. On ne peut tracer nulle part une petite enceinte qui soit telle que le flux total à travers ses parois ne soit pas nul, même si elle entoure le fil. Il suffit de remarquer que les deux boîtes V_1 et V_2 de la figure 6,10 ont un flux total à travers leurs parois nul et que cela ne varie pas si on les fait se contracter vers un volume nul. On a donc, dans le cas de ce champ, div **B** = 0 et il en est de même pour toute superposition de tels champs. Nous postulons de nouveau que l'on peut étendre ce résultat au champ créé par une distribution quelconque de courant, de sorte qu'on obtient une condition complémentaire de l'équation 6.12



Fig. 6.10 Le flux de B à travers les deux boîtes est nul.

L'ensemble des équations 6.15 et 6.16 détermine **B** de façon univoque pour un **J** donné. Si nous avions deux champs $B_1(x, y, z)$ et $B_2(x, y, z)$ qui soient tous deux solutions des équations 6.15 et 6.16, leur différence B_1 - B_2 serait alors un champ de divergence nulle et de rotationnel nul en tous points. Un tel champ ne peut être qu'un vecteur B_0 constant en tout point de l'espace. A un champ magnétique constant dans tout l'espace près, les équations rot $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ et div $\mathbf{B} = 0$ déterminent donc de façon univoque le champ magnétique créé par une distribution donnée de courants. Il est intéressant de comparer ces relations avec leurs analogues en électrostatique. Ce sont les équations

div
$$\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$$
 et rot $\mathbf{E} = 0$ (6.17)

Dans le cas du champ électrique, cependant, nous avons commencé par introduire la loi de Coulomb, qui exprime directement la contribution de chaque charge au champ électrique en tout point. Nous devrons ici retrouver une relation de ce type ⁽²⁾. Nous allons le faire au moyen d'une fonction potentiel.

6.3 Potentiel vecteur

Nous avons trouvé que la fonction scalaire potentiel V(x, y, z) nous donnait une façon simple de calculer le champ électrostatique créé par une distribution de charges. Pour une distribution de charge donnée $\rho(x, y, z)$, le potentiel en un point quelconque (x_1, y_1, z_1) est donné par l'intégrale de volume

$$V(x_1, y_1, z_1) = \int \frac{\rho(x_2, y_2, z_2)}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} dv_2$$
(6.18)

L'intégrale est prise sur le volume comprenant toute la distribution de charge, et r_{12} est le module du rayon vecteur reliant (x_2 , y_2 , z_2) à (x_1 , y_1 , z_1). Le champ électrique **E** est égal au gradient de *V* changé de signe

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V \tag{6.19}$$

Une astuce du même genre ne marchera pas ici, à cause du caractère essentiellement différent que présente **B**. Le rot de **B** n'est *pas* nécessairement nul, de sorte que **B** ne peut, en général, être le gradient d'une fonction scalaire. Nous connaissons cependant une autre sorte de dérivée vectorielle, le rotationnel. Il se trouve que nous pouvons représenter **B**, non pas comme le gradient d'une fonction scalaire, mais comme le rotationnel d'une fonction *vectorielle*, comme ceci

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \tag{6.20}$$

Par une analogie évidente, nous appellerons A le *potentiel vecteur*. Il n'est pas évident, à ce point de l'exposé, qu'une telle formulation soit utile. Cela se verra au fur et à mesure que nous avancerons. Il est encourageant de voir que l'équation 6.16 est

⁽²⁾ L'étudiant peut s'étonner de ce que nous ne sommes pas partis d'un équivalent de la loi de Coulomb pour l'interaction des courants. C'est qu'un élément de courant n'est pas, à la différence d'une charge électrique, un objet que l'on puisse physiquement isoler. Vous ne pouvez faire une expérience qui détermine le champ créé par une *partie* d'un circuit; si le reste du circuit est absent, le courant ne peut être stationnaire sans violer la condition de continuité.

alors automatiquement satisfaite, puisque div rot $\mathbf{A} = 0$, quel que soit $\mathbf{A}^{(3)}$. On peut aussi dire que le fait que div $\mathbf{B} = 0$ nous fournit la possibilité de représenter \mathbf{B} comme le rotationnel d'une autre fonction vectorielle. Notre travail consistera maintenant à chercher comment calculer \mathbf{A} , quand on connaît la distribution de courant \mathbf{J} , afin que l'équation 6.20 fournisse le champ magnétique correspondant. A partir de l'équation 6.15 on obtient comme relation entre \mathbf{J} et \mathbf{A}

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} \tag{6.21}$$

L'équation 6.21, étant une équation vectorielle, représente, en fait, trois équations. La composante x de rot **B** est $\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}$.

Les composantes z et y de **B** sont respectivement

$$B_{z} = \frac{\partial A_{y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x}}{\partial y} \qquad B_{y} = \frac{\partial A_{x}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z}}{\partial x}$$
(6.22)

Nous supposons que nos fonctions sont assez régulières pour que l'on puisse intervertir l'ordre des dérivées partielles. On peut alors, en regroupant des termes de façon adéquate, écrire l'équation 6.23 de la façon

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \mu_0 J_x$$
(6.24)

Pour rendre ceci plus symétrique, ajoutons et retranchons $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$ au membre de gauche

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \mu_0 J_x$$
(6.25)

Nous pouvons maintenant reconnaître dans les trois premiers termes le Laplacien changé de signe de A_x . La quantité entre parenthèses est la divergence de **A**. Une certaine latitude nous est laissée dans la construction de **A**. C'est son rotationnel qui nous importe. *Posons la condition*⁽⁴⁾



$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \mathbf{0} \tag{6.26}$$

En d'autres termes, parmi toutes les fonctions variées qui peuvent satisfaire l'équation rot $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, nous ne considérons plus que celles qui ont une divergence nulle. Une partie de l'équation 6.25 s'élimine alors et il nous reste simplement

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu_0 J_x$$
(6.27)

 J_x est une fonction scalaire de *x*, *y*, *z* connue. Comparons l'équation 6.27 avec l'équation de Poisson, équation 2.70, qui s'écrit

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\rho/\varepsilon_0$$
(6.28)

⁽³⁾ Si vous avez un doute à ce sujet, refaites le problème 2.15.

⁽⁴⁾ Pour voir que nous sommes libres de le faire, supposons que nous ayons un A tel que rot $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ mais div $\mathbf{A} = f(x, y, z) \neq 0$. En traitant *f* comme une densité de charge électrostatique *o* à ε_0 près, nous pouvons évidemment trouver un champ **F**, analogue au champ électrostatique **E**, tel que div $\mathbf{F} = f$. Mais nous savons que le rotationnel d'un tel champ est nul. Nous pouvons donc ajouter - **F** à **A** obtenant ainsi un nouveau champ qui a le rotationnel correct et une divergence nulle.

Les deux équations ont une forme identique. Nous *savons* déjà comment trouver une solution à l'équation 6.28. L'intégrale de volume de l'équation 6.18 la donne. On a donc une solution de l'équation 6.27 sous la forme

$$A_{x}(x_{1}, y_{1}, z_{1}) = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \int \frac{J_{x}(x_{2}, y_{2}, z_{2})}{r_{12}} dv_{2}$$
(6.29)

Fig. 6.11 Quelques lignes de force autour d'un élément de courant. Le courant s'écoule vers vous (en sortant du plan de la page).

Les autres composantes doivent satisfaire à des équations semblables. On peut toutes les condenser en une seule formule vectorielle :

$$A(x_1, y_1, z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(x_2, y_2, z_2)}{r_{12}} \mathrm{d}v_2$$
(6.30)

Mais il reste un problème. Nous avons stipulé que div A = 0 afin d'obtenir l'équation 6.27. Comment savoir si le A obtenu par l'équation 6.30 possède cette propriété particulière ? On peut heureusement le démontrer.

Pour donner un exemple de potentiel-vecteur, considérons un long fil rectiligne à travers lequel circule un courant *I*. Sur la figure 6.11, le courant est figuré circulant dans le sens de l'axe des *z* positifs, c'est-à-dire vers l'extérieur du livre. Nous savons à quoi ressemble le champ magnétique créé par le fil rectiligne. Ses lignes de force sont des cercles, comme on l'a déjà représenté sur la figure 6.5. On en a figuré quelques unes sur la figure 6.11. Le module de **B** est $\mu_0 I/2\pi r$. En utilisant un vecteur unitaire $\hat{\varphi}$ dans la direction « tangentielle au cercle » nous pouvons écrire le vecteur **B** sous la forme

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\varphi} \tag{6.31}$$

En remarquant que le vecteur unitaire $\hat{\varphi}$ est égal à $-\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}$, nous pouvons écrire **B** en fonction de *x* et *y* de la manière suivante

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{I(-\sin\varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi \hat{\mathbf{y}})}{2\pi\sqrt{x^2 + y^2}} = \mu_0 \frac{I(-y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}})}{2\pi(x^2 + y^2)}$$
(6.32)

la fonction vectorielle suivante :

$$\mathbf{A} = -\hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_{0I}}{4\pi}\mathrm{Log}(x^2 + y^2) \tag{6.33}$$

est une de celles qui satisfont $\nabla \wedge \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Pour le vérifier, calculons les composantes de $\nabla \wedge \mathbf{A}$

$$(\nabla \wedge \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2)} \qquad (=$$

$$(\nabla \wedge \mathbf{A})_{y} = \frac{\partial A_{x}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z}}{\partial x} = \frac{\mu_{0}Ix}{2\pi(x^{2} + y^{2})} \qquad (=$$

$$\left(\nabla \wedge \mathbf{A}\right)_{z} = \frac{\partial A_{y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x}}{\partial y} = 0 \qquad (= B)$$
(6.34)

Ce n'est, bien sûr, pas la seule fonction qui puisse servir de potentiel vecteur pour ce **B** particulier. On pourrait ajouter au **A** de l'équation 6.33 toute fonction de rotationnel nul. Ceci est valable pour l'extérieur du fil. A



l'intérieur, **B** est différent, de sorte que **A** doit l'être aussi. Il n'est pas difficile de trouver une fonction potentiel-vecteur à l'intérieur du fil conducteur, voir le problème 6.13.

Remarquons incidemment que l'on n'aurait pu obtenir le A de cet exemple particulier au moyen de l'équation 6.30. En effet, l'intégrale aurait divergé à cause de la dimension infinie du fil. Ceci vous rappelle peut-être la difficulté que nous avons rencontré au chapitre 2 en cherchant le potentiel scalaire d'un fil chargé. Les deux problèmes sont d'ailleurs étroitement reliés, comme on pouvait s'y attendre en remarquant qu'ils présentent une symétrie identique et que les équations 6.30 et 6.18 sont très semblables. Nous avons trouvé (éq. 2.19) qu'un potentiel scalaire adapté au problème de la ligne chargée était :

Fig. 6.12 Chaque élément de la boucle de courant fournit une contribution au potentiel vecteur **A** au point (x_i, y_i, z_i) .

$$-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \log{(x^2+y^2)} + une \ constante \ arbitraire$$

Ceci attribue le potentiel zéro à un point arbitraire qui n'est ni sur le fil ni à une distance infinie de celui-ci. Ce potentiel

scalaire et le potentiel vecteur de l'équation 6.33 ont tous deux des singularités à l'origine et à l'infini.

6.4 Champ créé par un élément infinitésimal de courant

La figure 6.12 représente une boucle de fil conducteur parcourue par un courant *I*. Le potentiel vecteur **A** au point (x_1,y_1, z_1) s'obtient à partir de l'équation 6.30 au moyen d'une intégrale prise sur la boucle. Le courant passant dans un fil fin, nous pouvons prendre comme élément de volume dv_2 un petit morceau de fil de longueur dI. La densité de courant est I/a, où *a* est l'aire de la section transversale du fil, et $dv_2 = a dI$. On a donc $J dv_2 = I dI$, et si nous dirigeons le vecteur dl dans la direction du courant positif, nous pouvons remplacer **J** dv_2 par *I* dl. Pour un fil fin, nous pouvons donc écrire l'équation 6.30 sous la forme d'une intégrale curviligne le long du circuit

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{r_{12}} \tag{6.35}$$



Fig. 6.13 Si nous pouvons trouver dA, contribution à A de l'élément



Calculer **A** en tout point et trouver ensuite **B** en prenant le rotationnel de **A** peut être fort long. Il sera plus utile d'isoler une contribution élémentaire à l'intégrale curviligne donnant **A**, savoir la contribution d'un segment de fil à l'origine, où on peut prendre comme axe des x la direction du courant (fig. 6.13). Nous désignerons par dl la longueur de ce segment. Soit d**A** la contribution à **A** de cette partie de l'intégrale. Au point (x, y, 0) du plan xy, d**A**, qui est dirigé dans la direction des x positifs, vaut

$$d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\mu_0 I dl}{4\pi \sqrt{x^2 + y^2}}$$
(6.36)

Il est clair pour des raisons de symétrie que la contribution au rotationnel de A due à cette partie de A doit être perpendiculaire au plan *xy*. En désignant la partie correspondante de B par dB, nous avons

$$d\mathbf{B} = \operatorname{rot}(d\mathbf{A}) = \hat{\mathbf{z}}\left(-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \frac{\hat{\mathbf{z}}\mu_0 I dl y}{4\pi (x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\hat{\mathbf{z}}\mu_0 I dl \sin \varphi}{4\pi r^2}$$
(6.37)

Avec ce résultat nous pouvons nous affranchir aussitôt d'un système particulier de coordonnées. Il est évident que la seule chose qui compte, c'est l'orientation de l'élément dl et du rayon vecteur **r** allant de cet élément au point où l'on veut calculer le champ **B**. On peut considérer que la contribution à **B** de tout élément de fil dl est un vecteur perpendiculaire au plan contenant dl et **r**, de module $\mu_0 I dl \sin \phi / 4\pi r^2$, où ϕ est l'angle entre dl et **r**. On peut écrire ceci de façon condensée en utilisant le produit vectoriel, et la figure 6.14 illustre cette formule

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0 I \mathbf{dl} \wedge \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} \tag{6.38}$$

Si vous êtes familiers avec les règles du calcul vectoriel, vous pouvez passer directement de l'équation 6.35 à l'équation 6.38. En écrivant, Fig. 6.14 Le champ créé par un circuit quelconque peut se calculer

en utilisant cette relation exprimant la contribution d'un élément de circuit.

 $d\mathbf{B} = \nabla \wedge d\mathbf{A}$, avec $d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}}{4\pi r}$, on peut traiter ∇ comme un vecteur et changer l'ordre du produit vectoriel à condition de changer son signe. Ici dl est une constante, de sorte que ∇ n'agit que sur 1/r, heureusement d'ailleurs, sinon on ne s'en sortirait pas ; Rappelez-vous que $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$ (comme dans le passage du potentiel

au champ électrique.) On a donc

$$\mathbf{dB} = \nabla \wedge \frac{\mu_0 I \mathbf{dI}}{4\pi r} = -\frac{\mu_0 I \mathbf{dI}}{4\pi r} \wedge \nabla \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mu_0 I \mathbf{dI}}{4\pi r} \wedge \left(-\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right) = \frac{\mu_0 I \mathbf{dI} \wedge \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r} \tag{6.39}$$



Fig. 6.15 Champ magnétique créé par une spire circulaire de courant. (a) Calcul du champ sur l'axe; (b) quelques lignes de force.

Historiquement, la relation 6.38 est connue sous le nom de loi de Biot-Savart. Elle signifie que, si on calcule B en intègrant sur le circuit complet la contribution de chaque élément donnée par cette formule, on trouve un résultat correct. Comme nous en avons déjà fait la remarque dans la note en bas de page située à la fin de la section 6.2, la contribution due à une partie d'un circuit n'est pas physiquement identifiable. En fait, l'équation 6.38 n'est pas la seule formule qu'on puisse utiliser pour obtenir un résultat correct pour **B** - on pourrait lui ajouter toute fonction dont l'intégrale sur un circuit fermé serait nulle.

Nous avons l'air d'avoir rejeté le potentiel vecteur après qu'il nous ait rendu un service essentiel. Il est souvent plus facile, d'un point de vue pratique, de calculer le champ créé par un système de courants directement à l'aide de l'équation 6.38 que de chercher d'abord le potentiel vecteur. Nous agirons ainsi dans beaucoup d'exemples de la section suivante. Le potentiel vecteur a cependant son importance pour des raisons plus fondamentales. Il nous a déjà révélé un parallèle étonnant entre la relation reliant le champ électrique à ses sources, les charges électriques, et celle reliant le champ magnétique aux courants stationnaires. Son utilité la plus grande se verra dans l'étude des champs variables avec le temps et du rayonnement électromagnétique.

6.5 Champs créés par des spires et des bobinages

On a représenté sur la figure 6.15 a un circuit parcouru par un courant avant la forme d'une spire circulaire de rayon b. Nous pouvons prédire sans aucun calcul que le champ magnétique de cette source doit ressembler à ce que l'on a dessiné sur la figure 6.15 b, où sont représentées quelques lignes de force dans un plan contenant l'axe de symétrie. Le champ doit avoir une symétrie de rotation autour de cet axe, l'axe z de la figure 6.15 a, et les lignes de force doivent être elles mêmes symétriques par rapport au plan de la spire, le plan xy. Très près du conducteur, le champ doit ressembler à celui régnant près d'un long fil rectiligne, puisqu'alors les parties éloignées de la spire ne jouent qu'un rôle relativement secondaire.

Il est facile de calculer le champ sur l'axe, en utilisant l'équation 6.38. Chaque élément de longueur dl de l'anneau fournit une contribution d**B** perpendiculaire à r. Il nous suffit de

considérer la composante z de dB, puisque nous savons que le champ total sur l'axe z doit être porté par celui-ci,

$$dB_z = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r r^2} \cos\theta = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r} \frac{b}{r}$$
(6.40)

En intégrant sur toute la spire, nous obtenons simplement $dl = 2\pi b$ de sorte que le champ sur l'axe est, en un point z

$$B_{z} = \frac{\mu_{0}b^{2}I}{2r^{3}} = \frac{\mu_{0}b^{2}I}{2(b^{2}+z^{2})^{3/2}} \quad \text{(champ dans l'axe)}$$
(6.41)

Au centre de la spire, z = 0, la valeur du champ est

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2b}$$
 (champ au centre) (6.42)

La bobine cylindrique de fil de la figure 6.16 est ce qu'on appelle usuellement un solénoïde. Nous supposons que le bobinage est assez régulier et serré pour que le nombre n de tours dans l'enroulement par unité de longueur le long du cylindre, exprimé en tours par mètre, soit une constante. Le circuit du courant est hélicoïdal mais, si les tours sont nombreux et serrés, nous pouvons l'ignorer et considérer le solénoïde comme équivalent à un empilement de spires de courant. Nous pouvons alors utiliser l'équation 6.41 comme départ pour calculer le champ en tout point tel que le point z sur l'axe du bobinage. Prenons



d'abord la contribution du courant circulaire compris entre les rayons vecteurs issus du point z faisant des angles θ et θ + d θ avec l'axe. La longueur de ce segment de solénoïde, indiqué sur la figure 6.16 b, est $r d\theta / \sin \theta$, et il est donc équivalent à une spire parcourue par un courant d'intensité *I*nr $d\theta / \sin \theta$. Puisque $r = b / \sin \theta$, nous avons pour la contribution au champ axial due à cette spire

$$dB_z = \frac{\mu_0 b^2}{2r^3} \frac{Inr d\theta}{\sin \theta} = \frac{\mu_0 In \sin \theta}{2} d\theta$$
(6.43)

En intégrant entre les limites θ_1 et θ_2 , on obtient

$$B_{z} = \frac{\mu_{0} In}{2} \int_{\theta_{1}}^{\theta_{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\mu_{0} In}{2} (\cos\theta_{1} - \cos\theta_{2})$$
(6.44)

Nous avons utilisé l'équation 6.44 pour tracer la courbe, figure 6.17, donnant la valeur du champ magnétique sur l'axe d'un bobinage dont la longueur est égale à quatre fois le diamètre. En ordonnée, on a porté le rapport de B_z au champ créé par un



le rapport de B_z au champ créé par un solénoïde de longueur infinie ayant le même nombre de tours par mètre parcouru par le même courant. Pour le solénoïde infini, $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \pi$ de sorte qu'on a :

 $B = \mu_0 n I$ (solénoïde infiniment long) (6.45) Au centre de la bobine « de rapport quatre » le champ est presque aussi intense que cela et il varie peu jusqu'à ce qu'on approche des extrémités.

La figure 6.18 montre les lignes de force du champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur d'un solénoïde ayant ces proportions. Remarquez que certaines lignes de force pénètrent effectivement à travers l'enroulement. Le feuillet cylindrique est une surface de discontinuité pour le champ magnétique. Si nous devions examiner le champ en détail au voisinage des spires, nous ne trouverions bien sûr aucun saut brutal mais seulement un contour très sinueux autour des spires et à travers elles.

Fig. 6.17 Valeur B_z du champ sur l'axe pour le solénoïde représenté sur la figure 6.18.

Il est fort possible de réaliser un long solénoïde avec un tour *unique* d'un conducteur de large section, comme sur la figure 6.19. Notre calcul et

le dessin de la figure 6.18 s'appliquent alors exactement dans ce cas, la quantité *nI* étant simplement remplacée par la densité de courant par unité de longueur dans le feuillet. Le changement de direction d'une ligne de force qui pénètre dans le conducteur a entièrement lieu dans l'épaisseur du conducteur plat, comme le suggère la partie agrandie de la figure 6.19.



Fig. 6.18 Lignes de force à l'intérieur et à l'extérieur d'un solénoïde.



Fig. 6.19 Un solénoïde réalisé avec une seule feuille cylindrique conductrice. La vue détaillée montre comment les lignes de force changent de direction à l'intérieur du conducteur de courant.

Nous aurions pu trouver le champ créé par un solénoïde infini sans passer par les calculs menant à l'équation 6.45. Dans le cas du solénoïde infini, il est évident que rien ne peut dépendre de *z*, coordonnée ayant la direction de l'axe. Le champ doit être partout parallèle à z. Considérons la circulation de **B** autour d'un contour rectangulaire tel que *ABCD* sur la figure 6.20. Les côtés horizontaux donnent une contribution nulle. Le côté *CD* aussi, car sinon on pourrait démontrer que l'intégrale le long de *C'D'* donnerait une contribution finie égale à celle le long de *CD*, ce qui donnerait un champ magnétique constant remplissant tout l'espace extérieur au solénoïde. Nous en concluons que le champ magnétique est nul à l'extérieur ⁽⁵⁾. Ceci ne nous laisse que l'intégrale de **B** le long de *AB* qui vaut $B_z l$ et nous savons que la circulation toute entière doit valoir μ_0 fois le courant entouré. Donc $B_z l = \mu_0 nI l$, soit $B_z = \mu_0 nI$, en accord avec l'équation 6.45.

6.6 Discontinuité de B au passage d'une nappe de courant

Dans l'exemple de la figure 6.19, nous avons construit un solénoïde à partir d'un conducteur plat, mis en forme. Considérons maintenant quelque chose de plus simple, une nappe de courant plane et uniforme. On peut imaginer qu'on la réalise au moyen d'une feuille de cuivre d'épaisseur uniforme dans laquelle passe un courant de densité et de direction uniformes dans tout le métal. Afin de fixer les directions, prenons le plan de la nappe comme plan xz, et soit x la direction du courant. Comme on suppose que la nappe est de dimensions infinies il est difficile d'en faire un dessin ! Nous en avons représenté un fragment sur la figure 6.21; vous pouvez imaginer qu'elle s'étend sur tout le plan. L'épaisseur de la plaque n'aura finalement pas beaucoup d'importance, mais nous supposons qu'elle a une certaine épaisseur finie t. Si la densité de

courant à l'intérieur du métal est J en A/m², chaque largeur de un mètre dans la direction z sera parcourue

⁽⁵⁾ Pourquoi un tel solénoïde ne pourrait-il produire un champ uniforme dans l'espace extérieur ? Après tout, la plaque de courant infinie que nous considérons plus loin crée bien un champ uniforme remplissant le demi-espace sur chacune de ses faces. Le solénoïde peut cependant être rendu aussi mince que l'on veut, et il serait étrange qu'un solénoïde de diamètre tendant vers zéro puisse encore créer un champ fini partout. Vous pouvez peut-être trouver un autre argument plus convaincant.

par un courant de Jt ampères. Nous l'appellerons « densité superficielle de courant » et utiliserons le symbole \Im pour la distinguer de la densité volumique de courant J. L'unité de \Im sera l'amp/m. Si nous ne nous soucions pas de ce qui se passe à l'intérieur du conducteur, il nous suffit de connaître \Im . C'est en effet cette quantité qui détermine la *discontinuité* subie par le champ magnétique au passage de la nappe de courant, comme nous allons le voir.

Le champ représenté sur la figure 6.21 n'est pas dû à la seule nappe de courant. Il existe un autre champ parallèle à la direction z qui est dû à une autre source. Les vecteurs **B**, tracés devant et derrière la nappe, représentent le champ total, y compris l'effet de la nappe de courant.

Considérons la circulation de **B** autour du rectangle 12341 de la figure 6.21. L'un de ses grands côtés est situé devant la nappe, l'autre derrière elle, ses petits côtés la traversent. Soit B_z^+ la composante selon z du champ magnétique juste devant la nappe, $B_z^$ la composante du champ juste derrière la nappe. Nous parlons ici du champ créé par *toutes* les sources existantes, y compris la nappe de courant elle-même. La circulation de **B** autour du rectangle est simplement égale à $l(B_z^+ - B_z^-)$. (Même s'il y avait des sources qui créaient une composante du champ parallèle aux petits côtés du rectangle, on pourrait toujours négliger les contributions de ces côtés, car on peut toujours les prendre beaucoup plus petits que les grands, puisqu'on suppose, dans tous les cas, que la nappe de courant est mince, vis-à-vis des dimensions à l'échelle desquelles le champ varie.) Le rectangle entoure un courant égal à \Im . Nous avons donc la relation



Fig. 6.20 Pour démontrer que le champ est nul à l'extérieur d'un solénoïde infiniment long.

nous avons déjà remarqué dans notre discussion à propos de la figure 6.19. A \Im donné, plus la nappe de courant est mince, plus la transition est abrupte. Nous avons considéré un phénomène analogue dans les chapitres 1 et 2 quand nous avons étudié la discontinuité de **E** au passage d'une couche de charge superficielle. Il s'était alors avéré très instructif d'étudier la force agissant sur la charge superficielle et nous allons faire de même ici.

$$B_z^+ - B_z^- = \mu_0 \Im$$
 (6.46)

Une nappe de courant de densité superficielle de courant \Im donne naissance à un saut dans la composante de **B** qui est parallèle à sa surface et perpendiculaire à \Im . Ceci doit vous rappeler la discontinuité du champ électrique **E** au passage d'une couche superficielle de charge. Dans ce cas, la composante *perpendiculaire* de **E** était discontinue, la valeur de cette discontinuité dépendant de la densité de charge superficielle.

Si nous n'avons pas d'autre source de champ que la nappe de courant, le champ est évidemment symétrique par rapport à celle-ci. B_z^+ vaut

 $\frac{\mu_0}{2}$ \Im et B_z vaut $-\frac{\mu_0}{2}$ \Im C'est ce qui est figuré sur la Figure 6.22a,

Les figures 6.22 *b* et *c* représentent deux situations différentes où, à l'effet dû à la nappe de courant, se superpose celui dû à d'autres sources de champ magnétique. Supposez que nous ayons deux nappes planes de courant avec des densités de courant égales en module et de signe opposé et aucune autre source, comme le représente la figure 6.23. La direction du courant est perpendiculaire au plan de la page du livre, elle en sort sur la nappe de gauche et y rentre sur celle de droite. Le champ compris entre les nappes vaut $\mu_0 \Im$ et il est nul à l'extérieur des nappes. On trouve un résultat de ce genre quand du courant est transporté par des conducteurs ayant la forme de rubans parallèles, ayant un écart faible par rapport à leur largeur (fig. 6.24). Les « barres

» d'amenée du courant dans les centrales électriques ont souvent cette géométrie.

La discontinuité de **B** se produit à l'intérieur de la nappe do courant, ce que



Considérons un élément carré de la nappe de courant, de côté unité. Le courant qui y passe vaut \Im , la longueur de l'élément de courant est l'unité, et le champ *moyen* qui agit sur ce courant vaut, en supposant que le courant est uniformément distribué dans toute l'épaisseur de la nappe est $1/2(B_z^+ + B_z^-)$ La force agissant sur cet élément de la distribution de courant est alors

Fig. 6.21 Au passage d'une nappe de courant, il doit y avoir une discontinuité dans la composante de **B** parallèle à la nappe.

Force sur 1m² de nappe =
$$\frac{1}{2} (B_z^+ - B_z^-)\Im$$
 (6.47)

A l'aide de l'équation 6.46, nous pouvons substituer $(B_z^+ - B_z^-)/\mu_0$ à \Im de sorte que l'on peut exprimer la force par mètre carré de la façon suivante

Force par m² =
$$\frac{(B_z^+ + B_z^-)}{2} \frac{(B_z^+ + B_z^-)}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \Big[(B_z^+)^2 - (B_z^-)^2 \Big]$$
 (6.48)

La force est perpendiculaire à la surface et proportionnelle à l'aire, comme la force correspondant à la pression hydrostatique. Pour nous assurer de la justesse du signe, nous pouvons chercher la direction de la force dans un cas particulier, tel que celui de







Fig. 6.22 Quelques formes possibles du champ magnétique total au voisinage d'une nappe de courant. Le courant circule dans la direction x (il sort de la page). (*a*) Le champ créé par la nappe seule; (*b*) superposition à celui-ci d'un champ uniforme de direction z (situation analogue à celle de la figure 6.21); (*c*) superposition à celui-ci d'un 11 amp uniforme ayant une autre direction. Dans

chacun de ces cas la composante B_z subit une discontinuité i.co à au passage de la nappe, sans qu'il y ait de changement dans $B_{y'}$.

la figure 6.23. La force sur chaque conducteur est dirigée vers *l'extérieur*. Tout se passe comme si la région de champ magnétique élevé était une région de haute pression. Nous devons nous rappeler, cependant, que c'est seulement la composante de **B** parallèle à la surface qui joue un rôle dans la détermination de cette force.

Nous avons considéré le cas d'une nappe infinie plane, mais on obtient un résultat identique au voisinage immédiat de toute surface courbe. Chaque fois que la composante de **B** parallèle à une surface passe d'une valeur B_1 , à une valeur B_2 au passage de cette surface, nous pouvons conclure non seulement qu'il existe une nappe de courant circulant dans cette surface, mais encore que la surface est soumise à une force normale de $(B_1^2 - B_2^2)/2$ mesurée en newtons/tn2. C'est l'un des principes de base de la *magnétohydrodynamigue*, ou étude des fluides conducteurs, qui est un sujet d'intérêt commun aux ingénieurs électriciens et aux astrophysiciens.

6.7 Comment se transforment les champs

Un plan chargé superficiellement constitue, s'il se déplace parallèlement à lui-même, un courant superficiel. Si nous avons une densité uniforme de charge σ sur une surface qui glisse parallèlement à elle même à une vitesse v, la densité superficielle de courant correspondante est $\Im = \sigma v$. Cette idée simple va nous aider à trouver comment les champs électriques et magnétiques doivent se transformer quand on passe d'un référentiel d'inertie à un autre.

Imaginons deux feuillets plans de charge de surface, parallèles au plan xz (fig. 6.25). Nous ne figurons de nouveau que des fragments de ces surfaces; elles sont infinies dans la réalité. Dans le référentiel inertiel R, où les coordonnées sont x, y, z, la densité de charge superficielle est σ sur l'une des plaques et - σ sur l'autre. Dans ce repère, le champ électrique **E** est dirigé dans la direction des y positifs et le théorème de Gauss nous permet d'obtenir sa valeur

 $E_{\rm y} = \sigma / \varepsilon_0 \tag{6.49}$

Dans ce repère *R*, les plaques se déplacent dans la direction des *x* positifs avec la vitesse v_0 , ce qui nous donne une paire de nappes de courant. La densité superficielle de courant est $\Im = \sigma v_0$ pour une des nappes et l'opposé pour l'autre. Comme dans le système de la figure 6.23, le champ entre deux telles nappes est

$$B_z = \mu_0 \mathfrak{I}_x = \mu_0 \sigma v_0 \tag{6.50}$$

Le référentiel d'inertie R' se déplace, quand on le regarde de R, avec une vitesse v dans la direction des x positifs. *Quel champs un observateur au repos dans R' mesurera-t-il*? Pour répondre à cette question il nous suffit de trouver comment on voit les sources à partir de R'.

Dans R', la vitesse des plaques porteuses de charge est $\dot{v_0}$, donnée par la formule d'addition des vitesses



Fig. 6.23 Champ magnétique entre deux nappes parallèles de courant.

relativité. Les lois de la physique doivent être les mêmes dans tous les repères d'inertie, et ceci vaut pour les formules reliant le champ électrique à la densité superficielle de charge, et le champ magnétique à la densité superficielle de courant. Il s'ensuit donc que

$$E'_{y} = \sigma' / \varepsilon_{0} = \gamma \left[\frac{\sigma}{\varepsilon_{0}} - \left(\frac{\sigma v_{0}}{\varepsilon_{0} c} \right) \left(\frac{v}{c} \right) \right]$$
(6.55)
$$B'_{z} = \mu_{0} \Im = \gamma \left[\mu_{0} \sigma v_{0} - \mu_{0} \sigma c \left(\frac{v}{c} \right) \right]$$
(6.56)

Si nous regardons de nouveau es valeurs de E_y et B_z données par les équations 6.49 et 6.50, nous nous apercevons que notre résultat peut s'écrire comme suit

$$v_0' = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v / c^2} = c \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta}$$
(6.51)

Il se produit une contraction de Lorentz qui modifie la densité de charge, dans ce repère, exactement de la même façon, que dans l'exemple vu plus haut de la ligne chargée en mouvement (sect. 5.9). En répétant le raisonnement que nous avions alors fait, la densité de charge dans le repère où les charges sont au repos est $\sigma(1 - v^2_0/c^2)^{1/2}$, ou σ/γ_0 , et la densité dans le repère R' est donc

$$\sigma' = \sigma \frac{\gamma_0}{\gamma_0} \tag{6.52}$$

Comme d'habitude $\gamma'_0 = (1 - v_0'^2 / c^2)^{-1/2}$. A l'aide de l'équation 6.51 nous pouvons éliminer γ'_0 , en l'exprimant en fonction de β_0 et β ou γ_0 et γ . En opérant ainsi, on obtient

$$\sigma' = \sigma \gamma (1 - \beta_0 \beta) \tag{6.53}$$

La densité superficielle de courant dans R' est donc

$$\mathfrak{F}' = \sigma' v_0' = \sigma \gamma (1 - \beta_0 \beta) c \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta} = \sigma \gamma (v_0 - v) \tag{6.54}$$

Nous savons maintenant comment l'on voit les sources dans le repère R', nous savons donc ce que doivent être les champs dans ce repère. En disant cela, nous faisons de nouveau appel au postulat de



Fig. 6.24 Champ magnétique créé par une paire de barres de cuivre d'amenées de courant (figurées en section transverse) transportant des courants de sens opposes.

$$E'_{y} = \gamma (E_{y} - \beta c B_{z})$$

$$B'_{z} = \gamma (B_{z} - \beta E_{y} / c)$$
(6.57)

Si le sandwich formé par les deux nappes de courant avait été orienté parallèlement au plan xy, au lieu du plan xz, nous aurions obtenu des relations reliant \vec{E}_z à \vec{E}_z et \vec{B}_y et \vec{B}_y à \vec{B}_y et \vec{E}_z . Elles auraient bien sûr eu la même forme que celles ci-dessus mais, si vous faites le calcul en détail, vous trouverez qu'il y a des différences sur les signes qui proviennent des règles donnant la direction de **B**.

Il nous reste à trouver comment se transforment les composantes du champ dans la direction du mouvement. Nous avons déjà découvert dans la section 5.5 qu'une composante longitudinale de E a la même valeur dans les deux repères. Nous allons voir qu'il en est de même pour la composante longitudinale de **B**. Supposons qu'une composante longitudinale de **B**, la composante B_x dans les coordonnées de la figure 6.25, soit produite par un solénoïde placé autour de l'axe *x* dans le repère *R*. L'intensité du champ à l'intérieur d'un solénoïde ne dépend, comme nous le savons déjà, que du courant 1 dans le fil, et du nombre *n* de tours de fil par unité de longueur. Dans le repère *R'* le solénoïde subit une contraction de Lorentz, ce qui augmente le nombre de tours par unité de longueur. Mais le courant mesuré par l'observateur de *R'* sera réduit, puisque, de son point de vue, l'observateur de



Fig. 6.25 L'observateur au repos dans le repère R voit le repère R' se déplacer avec une vitesse **v** dans la direction des x positifs. Les plans charges se déplacent à la vitesse \mathbf{v}_o pour un observateur au repos dans R.

R qui mesure le courant en comptant le nombre d'électrons passant par un certain point du fil en une seconde utilise une montre qui retarde. La dilatation du temps compense juste la contraction des longueurs dans le produit *nI*. D'ailleurs toute quantité de dimensions (longueur longitudinale)⁻¹ x (temps)⁻¹ est invariante par transformation de Lorentz. On a donc $B'_x = B_x$.

Rappelez-vous la remarque faite au chapitre 5 lors de la discussion qui a suivi l'équation 5.6 : les propriétés de transformation du champ sont des propriétés *locales*. Les valeurs de **E** et **B** mesurées en un certain point de l'espace-temps dans un certain repère déterminent sans ambiguïté les valeurs des composantes des champs observées dans tout autre repère au même point de l'espace-temps. C'est pourquoi le fait d'avoir utilisé une forme particulièrement simple de source (des

plaques parallèles uniformément chargées) dans notre raisonnement ne restreint en aucune façon la généralité de notre résultat. Nous avons obtenu en fait la loi générale de transformation de toutes les composantes du champ électrique et du champ magnétique, quelles qu'en soient l'origine et la configuration.

Nous donnons ci-après la liste complète des transformations. Toutes les quantités affectées du symbole prime sont mesurées dans le repère R', qui se déplace dans le repère R avec une vitesse v dans la direction des x positifs. Les autres quantités sont les résultats des mesures effectuées dans R. Comme d'habitude, on a écrit β pour v/c et γ pour $(1 - \beta)^{-1/2}$.

$$\begin{bmatrix}
E'_{x} = E_{x}E'_{y} = \gamma(E_{y} - \beta cB_{z}) & E'_{z} = \gamma(E_{z} - \beta cB_{y}) \\
B'_{x} = B_{x}B'_{y} = \gamma(B_{y} + \beta E_{z}/c) & B'_{z} = \gamma(B_{z} - \beta E_{y}/c)
\end{bmatrix}$$
(6.58)

Les équations encadrées ont un caractère étonnant, leur symétrie par rapport à \mathbf{E} et $c\mathbf{B}$. Si l'imprimeur avait interverti par erreur les \mathbf{E} et les $c\mathbf{B}$, et les y et les z, les équations seraient inchangées ! Pourtant nous avons considéré au début le magnétisme comme une sorte d'effet « au deuxième ordre » dû aux modifications relativistes des champs électriques des charges en mouvement. Les phénomènes magnétiques, tels que nous les observons dans la nature, sont très différents des phénomènes électriques. Le monde qui nous entoure n'est en aucune façon symétrique pour ce qui est de l'électricité et du magnétisme. Il se trouve néanmoins que les champs eux-mêmes, \mathbf{E} et \mathbf{B} , sont reliés l'un à l'autre de façon très symétrique.

Il nous apparaît aussi que les champs électriques et magnétiques sont, dans un certain sens, des aspects différents d'une même entité. Nous pouvons parler du champ *électromagnétique*, et nous pouvons considérer que E_x , E_y , E_z , cB_x , cB_y et cB_z sont les six composantes du champ *électromagnétique*. Le *même* champ vu de différents repères inertiels sera représenté par différents ensembles de valeurs pour ces composantes un peu comme un vecteur est représenté par différentes composantes dans des systèmes de coordonnées en rotation les uns par rapport aux autres. Le champ électromagnétique ainsi introduit n'est cependant pas un vecteur, mathématiquement, mais plutôt un être mathématique appelé *tenseur*. La totalité des équations encadrées représente la règle de transformation des composantes d'un tel tenseur quand on passe d'un repère à un autre. Nous n'allons pas ici développer plus avant cette formulation mathématique. Nous allons revenir maintenant à notre formulation habituelle : le champ électrique est un champ de vecteur, et le champ magnétique un autre champ de vecteur couplé au précédent d'une manière qui sera détaillée au chapitre 7. Pour en savoir plus que cette suggestion sur l'unité du champ électromagnétique représenté dans l'espace-temps à quatre dimensions, il vous faudra attendre un cours de niveau plus avancé.

Les transformations de l'équation 6.58 fournissent des relations extrêmement simples dans un certain nombre de cas. Supposons que, dans le repère R, le champ magnétique soit nul partout. Les champs observés dans le repère R' seront alors

$$E'_{x} = E_{x} \qquad E'_{y} = \gamma E_{y} \qquad E'_{z} = \gamma E_{z}$$

$$B'_{x} = 0 \qquad B'_{y} = \beta \frac{\gamma E_{z}}{c} \qquad B'_{z} = -\beta \frac{\gamma E_{y}}{c} \qquad (6.59)$$

Ceci implique l'existence d'une certaine relation entre le champ électrique et le champ magnétique valable dans tout le repère R', à savoir

$$B'_{x} = 0$$
 $B'_{y} = \beta \frac{E'_{z}}{c}$ $B'_{z} = -\beta \frac{E'_{y}}{c}$ (6.60)

En se rappelant que, dans ce cas, la vitesse du repère R vue du repère R' est un vecteur dans la direction des x négatifs, nous pouvons exprimer la relation précédente avec un produit vectoriel, et obtenir ainsi la règle générale

$$\mathbf{B}' = \left(\frac{\mathbf{v}'}{c}\right) \wedge \frac{\mathbf{E}'}{c} \quad (\text{si } \mathbf{B} = 0 \text{ partout dans un certain repère})$$
(6.61)

v' représente ici la vitesse, comme on l'observe du repère R', du repère particulier où B est partout nul.

De la même façon nous déduisons de l'équation 6.58 que si $\mathbf{E} = 0$ partout dans un repère donné, que nous appellerons *R*, alors dans tout autre repère

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$
 (si $\mathbf{E} = 0$ partout dans un certain repère) (6.62)

Ici, comme dans l'équation 6.61, \mathbf{v}' est la vitesse du repère R (celui dans lequel \mathbf{E} est partout nul) vue du repère R'. Les conditions entre parenthèses concernant les équations 6.61 et 6.62 sont très strictes, bien sûr. Il arrivera souvent qu'il n'y ait aucun repère dans lequel \mathbf{B} soit nul partout, et *aucun* repère dans lequel la densité de charge électrique et par conséquent \mathbf{E} soient nuls.

Comme l'équation 6.61 ne met en jeu que des quantités mesurées dans le même système de référence, il est aisé de l'appliquer, chaque fois que la condition est satisfaite, à des champs variables dans l'espace⁽⁵⁾.



Un bon exemple nous est fourni par le champ créé par une charge q se déplaçant à vitesse constante, problème que nous avons étudié au chapitre 5. Prenons pour repère R celui où la charge est au repos. Dans ce repère, il n'y a, bien sûr, pas de champ magnétique. L'équation 6.61 nous dit alors que, dans le repère « du laboratoire », où nous voyons la charge se déplacer avec une vitesse v, il doit exister un champ magnétique perpendiculaire au champ électrique et à la direction du mouvement. Nous avons déjà calculé la forme exacte du champ électrique dans ce repère : nous savons que le champ est radial à partir de la position instantanée de la charge, avec un module donné par l'équation 5.12. Les lignes de force du champ magnétique doivent être des

gnification de l'éq. 6.58 est E'(x', y', z', r') = E(x, y, z, t), etc. Si nous voulons donc put le repère R' à l'instant t', nous devrons utiliser pour chaque point (x', y', z') le le le x le y et le z qui se déduisent de x', y', z', t'. Par exemple, c'est la valeur de B, gure dans le membre de droite de la dernière des équations de l'encadré.

Fig. 6.26 Champs électrique et magnétique créés par une charge en mouvement. uniforme, à un instant donné.

cercles ayant pour axe la direction du mouvement, comme on le voit sur la figure 6.26. Quand la vitesse de la charge est élevée, de sorte que γ^{TM} 1, les « rayons » qui sont les lignes de force du champ électrique sont « comprimés » en forme de disque mince, les lignes de force du champ magnétique sont alors aussi concentrées dans ce disque. Le module de **B** est alors à peu près égal au quotient du module de **E** par *c*.

Dans les deux derniers chapitres, nous avons parcouru un long chemin depuis la loi de Coulomb. Nous n'avons pourtant fait qu'appliquer à chaque pas les postulats de la relativité et l'invariance de la charge électrique. Nous pouvons commencer à nous rendre compte que l'existence du champ magnétique et la curieuse symétrie qu'il présente avec le champ électrique sont des conséquences nécessaires de ces principes généraux. Nous rappelons de nouveau au lecteur que ce n'est pas du tout ainsi que se sont faites la découverte et la formulation des lois de l'électromagnétisme. Un aspect du couplage entre champs électriques et champs magnétiques contenu dans l'équation 6.58 avait été bien mis en évidence par les expériences en courants variables de Faraday. Mais il fallut que s'écoulent soixante-cing ans avant que quiconque écrive de telles équations.

SUR L'EFFET MAGNETIQUE DU AU MOUVEMENT DES CHARGES ELECTRIQUES⁽⁶⁾ [American ournal of Science [3], XV, 30-38, 1978]



Fig. 6.27 Les parties essentielles de l'appareil de Rowland. Dans le tube de gauche sont suspendues horizontalement deux petites aiguilles magnétiques.

On a fait les expériences décrites dans cet article dans le but de déterminer si un corps chargé électriquement produit ou non des effets magnétiques quand on le met en mouvement. II ne semble pas exister de bases théoriques assez fermes pour répondre à cette question, dans la mesure où l'on peut attribuer l'action magnétique d'un courant électrique de conduction à une interaction entre le conducteur et le courant. D'où l'intérêt de l'expérience. Le professeur Maxwell a calculé, dans son «traité sur l'électricité», Art. 770, l'effet magnétique dû à une surface chargée électriquement en mouvement mais on n'a jusqu'ici prouvé ni théoriquement ni expérimentalement que cet effet existe.

L'appareil employé était constitué par un disque d'ébonite de 21,1 centimètres de diamètre et de 0,5 centimètre d'épaisseur, disque que l'on pouvait faire tourner autour d'un axe vertical à la vitesse de 61 tours par seconde. On trouvait de part et d'autre du disque, à une distance de 0,6 cm de celui-ci, des plaques de verre fixes d'un diamètre de 38,9 cm percées de trous de 7,8 cm. Le disque en ébonite était doré sur ses deux faces et chaque plaque de verre portait un anneau doré de diamètres extérieur et intérieur de 24 cm et 8,9 cm respectivement sur une de ses faces. Les faces dorées des plaques de verre pouvaient être placées indifféremment face au disque tournant ou de l'autre côté mais on les placait

habituellement face à celui-ci afin de simplifier les calculs et pour que l'électrisation ne puisse se faire que dune seule façon. On reliait généralement les plaques extérieures à la terre ; le disque intérieur était relié à une batterie électrique

au moyen d'une pointe que l'on approchait à un tiers de mm du disque. Comme le disque était épais, la pointe ne pouvait se décharger que s'il existait une certaine différence de potentiel entre celle-ci et le bord du disque. Entre la batterie électrique et le disque.

6.8 Expérience de Rowland

⁽⁶⁾ Les expériences décrites ici ont été réalisées au laboratoire de l'Université de Berlin grâce à l'accueil du Professeur Helmholtz, dont les conseils éclairés ont permis, pour une grande part, qu'elles fussent menées à bien.

Comme nous l'avons remarqué dans la section 5.9, il y a un siècle il n'était évident pour personne qu'un courant circulant dans un conducteur et un objet chargé en mouvement fussent des sources de champ magnétique d'une nature essentiellement identique. La théorie unifiée de l'électricité et du magnétisme, dont l'origine se trouve dans les travaux de Maxwell, suggérait bien que toute charge en mouvement devait créer un champ magnétique, mais la preuve expérimentale fut loin d'en être immédiate.

C'est Henry Rowland, physicien américain connu pour les progrès qu'il avait réalisé dans la fabrication des réseaux de diffraction, qui fut le premier à démontrer expérimentalement que le mouvement d'une couche chargée électrostatiquement créait un champ magnétique. Rowland avait réalisé de nombreuses mesures électriques extrêmement délicates, mais aucune ne mit autant en valeur son habileté expérimentale que la détection et la mesure du champ magnétique créé par un disque chargé en rotation. Le champ qu'il devait détecter était de l'ordre de 10⁻⁵ fois le champ magnétique terrestre en module - cela représente une expérience extraordinaire, même avec les moyens actuels ! Sur la figure 6.27, vous pouvez voir un schéma de l'appareil utilisé par Rowland et une traduction de la première page de la publication où il décrivit son expérience. Dix ans avant la découverte des ondes électromagnétiques par Hertz, l'expérience de Rowland constitua une confirmation indépendante, bien que moins frappante, de la théorie de Maxwell du champ électromagnétique.

6.9 Conduction électrique en présence d'un champ magnétique l'effet Hall



Fig. 6.28

(*a*) Un courant circule dans un barreau métallique. On n'a figure qu'une petite section du barreau; les électrons de conduction sont schématises (ni leur taille, ni leur nombre n'est â l'échelle 1) par des points blancs, les ions positifs par des points noirs. Les flèches indiquent la vitesse moyenne v des électrons.

(b) On applique un champ magnétique dans la direction x entraînant (au début) une déflexion vers le bas des électrons en mouvement.

(c) La distribution de charge ainsi modifiée crée un champ électrique transverse Et. Dans ce champ les ions positifs stationnaires subissent une force dirigée vers le bas.

Quand un courant circule dans un conducteur en présence d'un champ magnétique, la force $q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ agit directement sur les porteurs de charge en mouvement. On observe pourtant une force agissant sur le conducteur en son entier. Voyons comment se produit ceci. La figure 6.28 a représente une section d'un barreau de métal conducteur dans lequel circule un courant stationnaire. Sous l'influence d'un champ électrique E, les électrons sont entraînés vers la gauche avec une vitesse moyenne \overline{v} , qui a la même définition que le \overline{u} de notre discussion de la conduction au chapitre 4. Les électrons de conduction sont représentés, très schématiquement, par les points blancs. Les points noirs sont les ions positifs qui constituent la structure fixe du solide métallique. Les électrons étant de charge négative, le courant est dirigé dans la direction des y positifs. La densité de courant **J** et le champ **E** sont reliés comme d'habitude par la conductivité σ du métal : $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Dans le cas de la figure 6.28 *a*, il n'existe pas de champ magnétique autre que celui créé par le courant lui-même, que nous négligerons. On applique alors un champ magnétique extérieur **B** dans la direction x. La figure 6.28 b représente l'état de mouvement des charges, immédiatement après. Les électrons sont déviés vers le bas. Mais comme ils ne peuvent s'échapper du barreau, ils s'empilent en bas de celui-ci jusqu'à ce que l'excès de charge négative au bas du barreau et l'excès correspondant de charge positive au sommet du barreau créent un champ électrique \mathbf{E}_t tel que la force vers le haut, de module eE_t compense exactement la force vers le bas, de module $e\overline{v}B$. Dans l'état stationnaire (que l'on atteint très rapidement !) le mouvement est de nouveau horizontal en moyenne, et il existe à l'intérieur du métal ce champ électrique transverse \mathbf{E}_{t} comme on peut l'observer dans un système de coordonnées fixé au réseau métallique (fig. 6.28 c). Ce champ crée une force dirigée vers le bas agissant sur les ions positifs. C'est ainsi que la force $-e\overline{\mathbf{v}} \wedge \mathbf{B}$ est transmise au barreau solide. Le barreau exerce à son tour une force sur le support qui le tient, ou, s'il n'y en a pas, est accéléré vers le bas.

L'existence du champ transverse \mathbf{E}_t peut se démontrer par une mesure électrique directe (fig. 6.29). Des fils sont reliés aux points P_1 et P_2 situés sur les bords opposés du barreau, ces points étant soigneusement choisis pour être au même potentiel quand le courant passe dans le barreau, et que le champ **B** est nul. Les fils sont reliés à un galvanomètre. Après qu'on ait établi le champ magnétique **B**, un courant stationnaire circule dans le circuit du galvanomètre, indiquant ainsi que P_1 , et P_2 ne sont plus au même potentiel. Dans le système que nous venons de décrire, P_1 est positif par rapport à P_2 .

Cet effet fut découvert en 1879 par E. H. Hall, qui était alors un étudiant de Rowland à l'université John Hopkins, aux États-Unis. A cette époque, personne n'avait encore compris le mécanisme de la conduction dans les métaux. L'électron lui-même n'avait pas encore été découvert. L'effet Hall s'avéra par la suite un phénomène très instructif. Dans les recherches modernes sur la conduction électrique, les mesures d'effet Hall sont maintenant indispensables, particulièrement dans l'étude des semi-conducteurs.

Nous avons vu que le champ magnétique créé par un courant, de même que la force agissant sur un conducteur parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique extérieur, ne dépendent en aucune façon des détails du processus de conduction. L'effet Hall, cependant, révèle certaines caractéristiques du processus de conduction. Remarquons que, si le courant dans le barreau de la figure 6.28 avait été dû à des charges positives se déplaçant vers la droite, il se serait créé un champ électrique transverse \mathbf{E}_t dans la direction opposée. Le signe de la « différence de potentiel de Hall » existant entre P_1 et P_2 nous dit donc si les porteurs de charge sont positifs ou négatifs. D'un point de vue quantitatif, le module \mathbf{E} , du champ transverse est déterminé par l'égalité

$$qE_t = q\overline{v}B$$
 ou $E_t = \overline{v}B$ (6.63)



Fig. 6.29 L'effet Hall. Quand on applique à un conducteur transportant du courant un champ magnétique perpendiculaire à celui-ci, il apparaît une différence de potentiel entre des points situés sur les côtés opposes du barreau, qui seraient au même potentiel en l'absence de champ. Ceci prouve l'existence d'un champ Et à l'intérieur du barreau. En mesurant la « tension de Hall » on peut déterminer le nombre de porteurs de charge par mettre cube et leur signe.

D'autre part, la vitesse moyenne \overline{v} des porteurs de charge est reliée à la densité de courant *J* par

$$J = nq\overline{v} \tag{6.64}$$

où n est le nombre de porteurs de charge par unité de volume, q étant la charge de chacun d'eux. En rapprochant les équations 6.63 et 6.64 nous pouvons éliminer \overline{v}

$$E_t = \left(\frac{1}{nq}\right) JB \tag{6.65}$$

 $E_{\rm t}$, *J* et *B* peuvent être mesurés avec un montage du genre de celui de la figure 6.29. $E_{\rm t}$ est égal au quotient de la différence de potentiel entre P_1 et P_2 par la largeur du barreau, *J* est égal au quotient du courant total par l'aire de la section transverse du barreau. Nous pouvons donc en tirer (1/*nq*). On appelle ce facteur « coefficient de Hall » du matériau considéré. Dans beaucoup de

métaux, le coefficient de Hall a à peu près la valeur à laquelle on peut s'attendre s'il y a environ un électron de conduction par atome, avec un signe indiquant que les porteurs de charge sont négatifs. Mais certains métaux ont des coefficients de Hall du signe opposé ! Ceci resta longtemps un stupéfiant paradoxe jusqu'à ce que la théorie quantique des électrons dans les métaux parvienne à l'expliquer.



Problèmes

- 6.1 Un courant de 30 A circule dans le circuit de la figure 5.1 *b*. Les conducteurs parallèles sont distants de 5 cm. Quelle est la force agissant sur l'un des conducteurs ?
- 6.2 La figure représente une bobine rectangulaire suspendue à un des bras du fléau d'une balance de précision. Elle est suspendue entre les pôles d'un électro-aimant, le

plan de la bobine étant maintenu parallèle aux faces des pôles. Le champ magnétique est uniforme dans la région indiquée par le cercle blanc et quasi négligeable au voisinage du fil supérieur. La bobine a 15 tours et son côté inférieur une longueur de 8 cm. On équilibre la balance avec une tare et on fait ensuite passer un courant de 0,5 A à travers la bobine. Si on doit rajouter sur le plateau de droite de la balance un poids de 60,5 g pour rééquilibrer le système, quelle est l'intensité du champ magnétique? On utilise une méthode de ce type pour les mesures de champ magnétique de haute précision.



- 6.3 Considérons le champ magnétique créé par une spire circulaire de courant en des points de son axe, donné par l'équation 6.41. Calculez explicitement la circulation du champ le long de l'axe de ∞ à + ∞ , pour vérifier la formule générale $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$ Pourquoi devons-nous ignorer le « circuit de retour » qui serait nécessaire pour obtenir une boucle fermée?
- 6.4 Un long fil est courbé en épingle à cheveux comme sur la figure. Trouver une expression du champ magnétique existant au point *P*, centre du demi-cercle.
- 6.5 Un atome d'hydrogène est constitué d'un proton et d'un électron que l'on peut se représenter (dans quelques applications) comme décrivant autour du proton une orbite circulaire de rayon $a_0 = 4\pi\epsilon_0 h^2/me^2 = 0.53 \ 10^{-10}$ m, avec une vitesse $v = e^2/4\pi\epsilon_0 h$. Ici *e* est la charge de l'électron 1,6 10^{-19} C, $h = 10^{-34}$ J/s est le quotient de la constante de Planck par 2π , et *m* la masse de l'électron. A quel courant cette charge en mouvement est-elle équivalente ? Quelle est la valeur en Teslas et en Gauss du champ magnétique créé sur le proton par le mouvement de l'électron ?
- 6.6 Les conducteurs d'amenée du courant à un grand électro-aimant dans lequel circule un courant continu de 5 000 A sont ainsi constitués un solide barreau d'aluminium de 5 cm de diamètre est entouré par un conducteur de retour ayant la forme d'un cylindre creux d'aluminium de 7 em de diamètre intérieur et de 9 cm de diamètre extérieur. (L'espace annulaire compris entre le barreau et le cylindre creux est rempli d'huile dont la circulation permet d'évacuer la chaleur.) Dans chacun des conducteurs, la densité de courant sera pratiquement constante sur toute la section transverse. Calculer le module du champ magnétique *B* en fonction de la distance à l'axe pour des points situés aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du système. (La présence de l'aluminium et de l'huile n'affecte pas le champ magnétique - voir la remarque de la section 6.1.)
- 6.7 On fabrique un solénoïde en enroulant une couche de fil de cuivre de 1,63 mm de diamètre sur une forme cylindrique d'un diamètre de 6 cm. il y a 5 tours par centimètre et la longueur du solénoïde est de 0,3 m. En consultant des tables, on trouve que le fil de cuivre de ce diamètre a une résistance de 10⁻² ohm par mètre à 75 °C. (Nous voulons que cela chauffe!) Si on relie ce solénoïde à un générateur de 24 volts, quelle sera la valeur du champ magnétique dans le solénoïde, et la puissance dissipée? Rép. 5,2 x 10-2 T, 2 000 watts.
- 6.8 Au voisinage de l'origine d'un système de coordonnées x, y, z, règne un champ électrique E de module 3 x 10⁶ V/m, dirigé dans une direction qui fait un angle de 30° avec l'axe des x, et un angle de 60" avec l'axe des y. Le repère R' a ses axes parallèles à ceux dont on vient de parler, mais il se déplace, par rapport au repère précédent, avec une vitesse de 0,6 c dans la direction des y positifs. Trouver la direction et le module du champ électrique que mesurerait un observateur au repos dans le repère R'. Quel champ magnétique cet observateur verrait-il ?
- 6.9 Un courant océanique circule à une vitesse de 2 noeuds (environ 1 m/s) dans une région où la composante verticale du champ magnétique terrestre vaut 0,35 G. La conductivité de l'eau de mer dans cette région est de 4 (ohm-m)-1. En supposant qu'il n'y a pas d'autre composante horizontale de **E** que le terme $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, trouver la densité de courant électrique horizontale en ampères par mètre carré. Si vous transportiez une bouteille d'eau de mer à travers le champ magnétique terrestre à cette vitesse, un tel courant la parcourrait-elle ?
- 6.10Pour des vitesses faibles devant c, les transformations du champ peuvent s'écrire sous la forme très simple suivante

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$
 $\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \frac{\mathbf{E}}{c}$ où \mathbf{v} est la vitesse avec laquelle le repère *R'* est en mouvement quand on le regarde

du repère R. Soit $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}} \beta c$ pour être en accord avec la situation particulière décrite par les équations 6.58. Montrer que les

équations précédentes sont cohérentes avec les équations 6.58 dans l'approximation $(1 - \beta^2)^{1/2} \approx 1$. Supposons que le repère R' soit celui d'un avion à réaction volant dans la direction du nord magnétique dans une région où le champ magnétique terrestre a un module de 0,4 gauss, fait un angle de 30° avec la verticale et pointe vers le bas comme dans l'hémisphère nord. Quelle est la direction de la composante supplémentaire du champ électrique, dans les coordonnées de l'avion, qui est créée par le mouvement à travers le champ magnétique ? Quel est son module en V/m?

- 6.11 Prouvez que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ est un invariant par rapport aux transformations de Lorentz, en utilisant les équations 6.58. C'est-à-dire : prouvez que si $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ a une certaine valeur dans un référentiel inertiel, il a la même valeur dans tous les autres référentiels inertiels. Prouvez de la même manière que $E^2 - c^2 B^2$ est invariant par transformation de Lorentz.
- 6.12Essayez de construire un potentiel vecteur qui corresponde à un champ magnétique uniforme dans la direction z : $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = B_0$.
- 6.13Remarquez que le potentiel vecteur **A** est relié au champ magnétique **B** de la façon dont **B** est relié à la densité de courant **J**. C'est-à-dire que rot **A** = **B** tandis que rot **B** = μ_0 **J**. Quel énoncé avec **A** correspond-il à l'énoncé disant que la circulation de **B** autour de tout contour fermé est égal à μ_0 fois le courant entouré par le circuit d'intégration? Considérez le champ magnétique créé par un long barreau cylindrique métallique où passe un courant uniformément distribué sur toute sa section transverse parallèlement à son axe. Vous connaissez quel est le champ créé par une telle distribution de courant. Tracez un graphique montrant la distribution de courant et les lignes de force du champ magnétique. En utilisant l'analogie que l'on vous a fait remarquer, trouver un potentiel vecteur cohérent avec le champ créé par un solénoïde infiniment long. Il est intéressant de noter que dans ce cas le potentiel vecteur est *non nul* dans une région où le champ magnétique est nul.
- 6.14 Puisque des filaments parallèles de courant s'attirent les uns les autres, on devrait penser qu'un courant passant dans un barreau solide comme le conducteur intérieur du problème 6.6 tendrait à se concentrer près de l'axe du barreau. C'est-à-dire que les électrons de conduction, au lieu de se distribuer eux-mêmes comme d'habitude au hasard à l'intérieur du métal, se concentreraient vers l'axe et qu'ainsi la plus grande partie du courant y passerait. Quel phénomène, d'après vous peut-il empêcher cela? Cela ne se produit-il absolument pas? Pouvez-vous suggérer une expérience destinée à mettre en évidence un tel effet, s'il devait exister ?
- 6.15Considérez deux électrons qui sont en train de se déplacer côte à côte sur des trajectoires parallèles, à la même vitesse v, dans un tube à rayons cathodiques. La distance qui les sépare, mesurée perpendiculairement à leur vitesse, sera appelée r. Quelle est la force qui agit sur l'un d'eux en raison de la présence de l'autre, telle qu'on l'observe dans le repère du laboratoire? Si v était très petit devant c, vous pourriez répondre $e^2/4\pi\varepsilon_0 r^2$ et tout serait dit. Mais v n'est pas petit, il faut donc être prudent.
 - (1) La façon la plus facile d'obtenir un résultat est celle-ci : placez-vous dans le repère qui se déplace avec les électrons. Dans ce repère les électrons sont au repos, la distance qui les sépare est encore r (pourquoi ?), et la force est juste $e^{2/4}\pi\varepsilon_{0}r^{2}$. Trouvez alors la force dans le repère du laboratoire en utilisant la formule de transformation des forces, équation 5.31. (Attention au choix du repère R'; la force dans le repère du laboratoire est-elle plus ou moins grande que celle dans le repère de l'électron ?)
 - (2) Il devrait être possible d'obtenir le même résultat en travaillant entièrement dans le repère du laboratoire. Dans ce repère, pour une position instantanée de l'électron 1, il existe à la fois un champ électrique et un champ magnétique créés par l'électron 2 (voir la figure 6.26). Calculez la force agissant sur l'électron 1, qui se déplace à travers ces champs avec la vitesse v, et montrez que vous obtenez le même résultat qu'en (1). Dessiner un graphique montrant la direction des champs et des forces.
 - (3) A la lumière de ce qui précède, que pouvez-vous dire de la force s'exerçant entre deux électrons se déplaçant côte à côte, dans la limite $v \rightarrow c$?

Chapitre 7 Induction électromagnétique et équations de Maxwell

7.1 Découverte de Faraday



Fig. 7.1 (a-e) Interprétation par l'auteur de quelques-unes des expériences de Faraday décrites dans ses « Experimental Researches in Electricity ».

- On a exprimé par le terme général d'Induction le pouvoir qu'a l'électricité de tension de créer un état électrique opposé dans son voisinage; on peut aussi utiliser avec raison, ce terme tel qu'il a été introduit dans le langage scientifique, dans le même sens général pour exprimer que des courants électriques peuvent posséder le pouvoir d'induire tout état particulier sur la matière par ailleurs indifférente, qui se trouve dans leur voisinage immédiat. C'est dans ce sens que nous comptons l'utiliser dans le présent article.
- 2. On a déjà reconnu et décrit certains effets de l'induction des courants électriques : ceux de l'aimantation: les expériences d'Ampère consistant à porter un disque de cuivre près d'une spirale plane; sa répétition avec des électroaimants des expériences extraordinaires d'Arago et peut-être de quelques-autres. Pourtant, il apparaissait improbable que ce fussent tous des effets dus à l'induction par les courants; étant donné spécialement que lorsqu'on ne prend pas de fer, les effets disparaissent presque tous, tandis qu'il reste encore une infinité de corps qui



présentent des phénomènes d'induction par l'électricité de tension, corps sur lesquels on doit faire agir l'induction par l'électricité en mouvement

- 3. En outre : qu'on adoptât la belle théorie d'Ampère, ou n'importe quelle autre, et quelque réserve mentale que l'on fit, il apparaissait encore très extraordinaire que, comme tout courant électrique est accompagné par une intensité correspondante d'action magnétique à angle droit du courant, il n'y ait aucun courant induit dans les bons conducteurs d'électricité, quand on les place dans la sphère de cette action, ou qu'aucun effet sensible ne soit produit avec une force équivalente à un tel courant.
- 4. Ces considérations, avec leurs conséquences, et l'espoir d'obtenir de l'électricité à partir du magnétisme ordinaire, m'ont poussé à divers moments à étudier expérimentalement l'effet inductif des courants électriques. Je suis arrivé récemment à des résultats positifs; non seulement mes espoirs ont été satisfaits, mais j'ai obtenu une clé qui m'a paru ouvrir une pleine explication des phénomènes magnétiques d'Arago; j'ai aussi découvert un nouvel étal, qui peut probablement avoir une grande influence dans quelques-uns des effets les plus importants des courants électriques.
- 5. J'ai l'intention de décrire ces résultats, non pas de la façon dont ils furent obtenus, mais de façon à donner la vue la plus concise du tout.

Ainsi commence le récit de Michael Faraday de la découverte de l'induction électromagnétique. Ce passage fait partie d'un article présenté par Faraday en 1831. Il est cité d'après ses « *Experimental Researches in Electricity* » publiés à Londres en 1839. Dans cet article on trouve les descriptions d'une douzaine ou plus d'expériences, par lesquelles Faraday mit en lumière tous les aspects essentiels de la production des effets électriques par l'action magnétique.

Par « électricité de tension » Faraday voulait dire les charges électrostatiques, et l'induction à laquelle il se réfère dans la première phrase ne fait intervenir rien de plus que ce que nous avons étudié dans le chapitre 3 : la présence d'une charge entraîne des charges sur les conducteurs voisins. Voici la question de Faraday : pourquoi un courant électrique ne produit-il pas de courant électrique dans les conducteurs voisins ?

On avait étudié à fond la production de champs magnétiques par les courants électriques après la découverte d'Oersted. Dans les laboratoires, la source habituelle de ces courants « galvaniques » était la batterie de Volta. Pour de tels courants, le détecteur le plus sensible était le galvanomètre. Il était constitué par une aiguille aimantée placée sur un pivot comme une aiguille de boussole, ou suspendue par une fibre légère entre deux bobines de fil. Parfois, on utilisait une autre aiguille, à l'extérieur des bobines mais rigidement liée à la première aiguille, pour compenser l'influence du champ magnétique terrestre (fig. 7.1 a). Les schémas des figures 7.1 b à e représentent quelques expériences d'induction de Faraday. Vous devez lire son propre récit, l'un des classiques de la science expérimentale, pour apprécier l'inventivité avec laquelle il faisait progresser la recherche, et l'esprit alerte et ouvert avec lequel il regardait l'évidence.

Dans ses premières expériences, Faraday fut troublé de trouver qu'un courant constant ne produit pas d'effet détectable sur un circuit voisin. Il construisit diverses bobines de fil, dont la figure 7.1 *a* montre un exemple, en enroulant deux conducteurs de sorte qu'ils se trouvent très proches l'un de l'autre tout en restant séparés par un isolement de tissu ou de papier. L'un des conducteurs formait un circuit avec le galvanomètre. Il envoyait à travers l'autre un fort courant issu d'une batterie. A sa déception, il n'y avait pas de déviation du galvanomètre. Mais dans l'une de ces expériences, il remarqua que le galvanomètre était très légèrement perturbé quand il branchait le courant ou quand il le débranchait. Continuant sur cette piste, il établit rapidement, sans aucun doute, que des courants sont induits dans d'autres conducteurs, non pas par un courant constant mais par un courant variable. A ce stade, l'une des brillantes tactiques expérimentales de Faraday fut de remplacer son galvanomètre, qui, réalisa-t-il, n'était pas un bon détecteur pour une impulsion brève de courant, par une simple petite bobine dans laquelle il plaça une petite aiguille d'acier non aimantée (fig. 7.1 *b*). Il trouva que l'aiguille devenait aimantée par l'impulsion de courant induit quand il branchait le courant primaire, et qu'elle devenait aimantée dans le sens opposé par l'impulsion de courant induit quand il coupait le circuit primaire.

Voici sa propre description d'une autre expérience

Dans les expériences précédentes les fils étaient placés l'un près de l'autre, et on faisait le contact du fit inducteur avec la batterie quand on voulait obtenir l'effet d'induction; mais comme on pouvait supposer que l'action particulière ne se produisait qu'aux instants où l'on faisait ou défaisait le contact, on produisit l'induction d'une autre façon. On disposa plusieurs mètres de cuivre en grands zigzags représentant la lettre W sur une face d'un grand plateau; on disposa un second fil avec précisément les mêmes formes sur un second plateau de sorte qua quand on l'approchait du premier plateau, les fils auraient pu se toucher partout si on n'avait pas placé entre eux une épaisse feuille de papier. L'un des fils était relié au galvanomètre et l'autre à la batterie de Volta. On déplaçait alors le premier fil vers le second : quand il se rapprochait, l'aiguille était déviée. En le retirant, l'aiguille était déviée dans la direction opposée. En rapprochant d'abord les fils puis en les écartant simultanément avec les vibrations de l'aiguille, celles-ci devinrent vite très importantes; mais quand on arrêta le va-et-vient des file, l'aiguille du galvanomètre revint vite à sa position initiale.

Quand les fils se rapprochaient, le courant induit était dans la direction *opposée* à celle du courant inducteur. Quand les fils s'éloignaient, le courant induit avait la même direction que le courant inducteur. Quand les fils restaient stationnaires, il n'y avait pas de courant induit.

Dans ce chapitre, nous étudions l'interaction électromagnétique qua Faraday étudia dans ces expériences. D'après notre point de vue actuel, on peut voir l'induction comme une conséquence naturelle de la force sur une particule en mouvement dans un champ magnétique. Dans un sens limité, nous pouvons déduire la loi d'induction de ce que nous savons déjà. Dans la suite du cours, de nouveau, nous ne suivrons pas l'ordre du développement historique *afin* (empruntant les propres mots de Faraday à la fin du premier passage cité) *de donner la vue la plus concise du tout*.

7.2 Une tige conductrice se déplace dans un champ magnétique uniforme

La figure 7.2 *a* montre un morceau de fil rectiligne, ou une mince tige de métal qu'on suppose se déplacer à la vitesse constante **v** dans une direction perpendiculaire à sa longueur. Partout dans la région dans laquelle se déplace la tige, il y a un champ magnétique uniforme **B** constant dans le temps. Il pourrait être fourni par un grand solénoïde entourant la région entière du diagramme. Le système de référence *R* avec les coordonnées *x*, *y*, *z* est celui dans lequel ce solénoïde est au repos. En l'absence de tige, il n'y a pas de champ électrique dans ce repère, il n'y a qua le champ magnétique uniforme **B**.


Fig. 7.2 (a) Une tige conductrice se déplace dans un champ magnétique. (b) Toute charge q qui se déplace avec la tige subit une force $q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$. (c) Le système de référence R' se déplace avec la tige; dans ce repère, il y a un champ électrique **E'**.

Étant un conducteur, la tige contient des particules chargées qui vont se déplacer si on leur applique une force. Toute particule chargée qui est transportée en même temps qua la tige, telle que la particule de charge q sur la figure 7.2 b, se déplace nécessairement dans le champ magnétique **B** et subit donc une force

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \tag{7.1}$$

Avec **B** et **v** dirigés comme sur la figure 7.2, la force est dans la direction des x positifs si q est une charge positive; elle est dans la direction opposée pour les électrons chargés négativement qui constituent en fait les porteurs de charge mobile dans la plupart des conducteurs. Les conséquences seront les mêmes, que les charges mobiles soient positives, négatives ou les deux.

Quand la tige se déplace à vitesse constante et qu'on a atteint un régime permanent, la force **f** donnée par l'équation 7.1 doit être équilibrée, en tout point à l'intérieur de la tige, par une force égale et opposée. Ceci ne peut être dû qu'à un champ électrique présent dans la tige. Le champ électrique se développe de la façon suivante : la force **f** pousse les charges négatives vers un bout de la tige, laissant l'autre bout chargé positivement. Cela continue à avoir lieu jusqu'à ce que les charges séparées produisent elles-mêmes un champ électrique **E** tel que, partout à l'intérieur de la tige

$$q\mathbf{E} = -\mathbf{f} \tag{7.2}$$

Le mouvement relatif des charges par rapport à la tige cesse alors. Cette distribution de charge produit un champ électrique à l'extérieur de la tige aussi bien qu'à l'intérieur. A l'extérieur ce champ ressemble quelque peu à celui produit par des charges positives et négatives séparées avec la différence que les charges ne sont pas entièrement concentrées aux bouts de la tige, mais qu'elles sont distribuées tout le long. La figure 7.3 *a* montre un schéma du champ extérieur. La figure 7.3 *b* est une vue agrandie de l'extrémité positivement chargée de la tige, montrant la distribution de champ à la surface et quelques lignes de champ à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur. Voilà comment les choses se présentent, à tout instant, dans le repère R.



Fig. 7.3 (a) Le champ électrique tel qu'il est vu à un instant donné dans le repère R. Il y a un champ électrique au voisinage de la tige, et aussi à l'intérieur de la tige. Les sources du champ sont des charges à la surface de la tige, comme on le montre en (b), vue agrandie de l'extrémité de droite de la tige.

Observons ce système à partir d'un repère R' qui se déplace avec la tige. Oubliant la tige pour le moment, nous voyons dans ce repère R', indiqué sur la figure 7.2 c, un champ magnétique **B'** (pas très différent de **B** si v est petit) avec un champ électrique uniforme donné par l'équation 6.62.

$$\mathbf{E'} = -\mathbf{v'} \wedge \mathbf{B'} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B'} \tag{7.3}$$

Quand nous ajoutons la tige au système, tout ce que nous faisons, c'est de mettre une tige conductrice stationnaire dans un champ électrique uniforme. Il y aura une redistribution des charges à la surface de la tige en vue de rendre nul le champ électrique à l'intérieur, comme dans le cas de la boîte métallique de la figure 3.6, ou de tout autre conducteur dans un champ électrique. La présence du champ magnétique **B'** n'a pas d'influence sur cette distribution statique de charge. La figure 7.4 *a* montre quelques lignes de champ électrique dans le repère R' et sur la vue agrandie du bout de la tige sur la figure 7.4 *b* nous observons que le champ électrique à l'intérieur de la tige est nul.









Fig. 7.5 (a) Ici la boucle de fil se déplace dans un champ magnétique uniforme B.
(b) Observes du repère R', où la boucle est au repos, les champs sont B' et E'.

A part la contraction de Lorentz, qui est du second ordre en v/c, la distribution de charge vue à tout instant dans le repère R, figure 7.3 b, est la même que celle qu'on voit dans R'. Les champs électriques différent car le champ sur la figure 7.3 est celui de la distribution superficielle de charge seule, tandis que le champ électrique que nous voyons sur la figure 7.4 est le champ de la distribution superficielle de charge, plus le champ électrique uniforme qui existe dans ce système de référence. Un observateur dans R dit: « il règne dans la tige un champ électrique $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ exerçant une force $q\mathbf{E} = -q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ qui équilibre juste la force $q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ qui autrement pousserait toute charge q à se déplacer le long de la tige ». Un observateur dans R' dit : « A l'intérieur de la tige, il n'y a pas de champ électrique, et bien qu'il y ait ici un champ magnétique uniforme, il n'apparaît aucune force car aucune charge ne bouge. » Chaque description est correcte.

7.3 Une boucle se déplace dans un champ magnétique non uniforme

Que se passe-t-il si nous fabriquons une boucle de fil rectangulaire, comme on le voit sur la figure 7.5, et que nous la déplaçons à vitesse constante dans un champ uniforme **B**? Pour prédire ce qui va se passer, nous n'avons qu'à nous demander adoptant le repère R' - ce qui se passerait si nous mettions une telle boucle dans un champ électrique uniforme. Évidemment, deux côtés opposés du rectangle vont acquérir une certaine charge, mais ce sera tout. Supposons, en revanche, que le champ **B** dans le repère R, bien que constant dans le temps, ne soit *pas uniforme* dans l'espace. Pour rendre cela plus réel, nous présentons sur la figure 7.6 un champ magnétique **B** produit par un petit solénoïde. Ce solénoïde, avec la batterie qui fournit

son courant constant, est fixé près de l'origine dans le repère R. (Nous avons dit précédemment qu'il n'y a pas de champ électrique dans R; en réalité, si nous utilisons un solénoïde de résistance finie pour créer le champ, il y aura un champ électrique associé à la batterie et à ce circuit. Il n'a pas de rapport avec notre problème, et on peut l'oublier. Ou bien, nous pouvons placer tout le solénoïde, avec sa batterie, dans une boîte métallique).

Maintenant, la boucle se déplaçant à la vitesse v dans la direction y, dans le repère R, supposons qu'à un certain instant t sa position soit telle que l'intensité du champ magnétique soit B_1 sur le côté gauche de la boucle, et B_2 sur le côté droit (fig. 7.6). Appelons **f** la force qui agit sur une charge q qui se déplace en même temps que la boucle. Cette force est une fonction de la position sur la boucle, à



cet instant-là. Évaluons la circulation de f, prise autour de toute la boucle : sur les deux côtés de la boucle qui sont parallèles à la direction du mouvement, f est perpendiculaire aux éléments de circuit dl, ils ne donnent donc rien. En tenant compte des contributions des deux autres côtés, chacun de longueur w, nous avons

$$\int \mathbf{f} \cdot \mathbf{dl} = qv(B_1 - B_2)w$$
(7.4)

C ds1

Si nous imaginons que la charge q fait tout le tour de la boucle en un temps assez court pour que la position de la boucle n'ait pas changé de façon appréciable, alors l'équation 7.4 donne le travail produit par la force **f**. Le travail produit *par unité de charge* $1/q \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$. Nous appelons cette quantité *force électromotrice*. Nous employons le symbole $\boldsymbol{\varepsilon}$ pour la représenter, et souvent l'abréviation « f.e.m. ». fi a les mêmes dimensions que le potentiel électrique, et on le mesure en volts dans le système MKSA.

Fig. 7.7 (a) Le flux à travers C est

varient d'un endroit à un autre.



(*b*) S2 est une autre surface limitée par *C*. Elle fait aussi bien l'affaire pour calculer Cb.



(c) En combinant SI et S2 pour faire une surface fermée, pour laquelle $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ doit s'annuler, on prouve que $\int_{S1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_1 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_2$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{q} \int \mathbf{f} \cdot \mathbf{d} \mathbf{l} \tag{7.5}$$

On a introduit plus haut, section 4.10, le terme *force électromotrice*. On l'a défini comme le travail par unité de charge qui intervient quand on déplace une charge autour d'un circuit contenant une pile de Volta. Nous étendons maintenant la définition de la f.e.m. en vue d'inclure toute influence qui entraîne la circulation des charges autour d'un circuit fermé. S'il se trouve que ce circuit est un circuit physique de résistance R, alors la f.e.m. ε produira un écoulement de courant selon la loi d'Ohm : $I = \varepsilon/R$. Dans le cas particulier que nous considérons, **f** est la force qui agit sur une charge se déplaçant dans un

champ magnétique; & a comme valeur absolue

$$\mathcal{E} = vw(B_1 - B_2) \tag{7.6}$$

La force électromotrice donnée par l'équation 7.6 est reliée de façon très simple au *taux de variation du flux magnétique* à travers la boucle. Par flux magnétique à travers la boucle, nous voulons dire l'intégrale de surface de **B** sur une surface limitée par la boucle. Le flux Φ à travers la courbe fermée ou boucle *C* sur la figure 7.7 *a* est donnée par l'intégrale de surface de *B* sur *S*₁

$$\boldsymbol{\Phi}_{(S_1)} = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS}_1 \tag{7.7}$$

Nous pourrions tracer une infinité de surfaces limitées par *C*. La figure 7.7 *b* en montre une autre, S_2 . Pourquoi n'avons-nous pas à spécifier la surface à prendre pour calculer le flux? Cela *ne fait aucune différence* car $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ aura la même valeur pour toutes ces surfaces. Prenons une minute pour établir ce



le haut !

ou

Fig. 7.8 Un tube de flux. Les lignes du champ magnétique se trouvent à la surface du tube. Le tube englobe une certaine quantité de flux 0. De quelque façon qu'on le découpe, on trouvera que fB dS pris sur la section a la même valeurJ~. Un tube de flux n'a pas besoin d'être rond. Vous pouvez partir quelque part avec n'importe quelle section, et le développement des lignes de champ déterminera comment la section change de taille et de forme quand on se déplace le long du tube.

point une fois pour toutes. Le flux à travers S_2 est $\int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_2$. Remarquez que nous faisons pointer les vecteur dS_2 vers l'extérieur à partir de la partie supérieure de S_2 , pour être cohérent avec notre choix du côté de S_1 . Cela donnera un nombre positif si le flux net à travers *C* est vers

$$\boldsymbol{\Phi}_{(S_2)} = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS}_2 \tag{7.8}$$

Nous avons appris dans la section 6.2 que le champ magnétique a une divergence nulle : div $\mathbf{B} = 0$. Il s'ensuit donc, d'après le théorème de Gauss, que si S est n'importe quelle surface *fermée* (« ballon »), et que V est le volume à l'intérieur

$$\int_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{V} \operatorname{div} \mathbf{B} \, \mathrm{d}v = 0 \tag{7.9}$$

Appliquons cela à la surface fermée, qui ressemble un peu au corps d'une bouilloire, formée en joignant nos surfaces S_1 et S_2 comme sur la figure 7.7 c. Sur S_2 la normale vers l'extérieur est opposée au vecteur d S_2 que nous avons utilisé pour calculer le flux à travers C. Ainsi

$$0 = \int_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_{1} + \int \mathbf{B} \cdot (-d\mathbf{S}_{2})$$

$$\int_{S_{1}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_{1} = \int_{S_{2}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_{2}$$
(7.10)

Cela montre que la surface qu'on utilise pour calculer le flux à travers C n'a pas d'influence.



Fig. 7.9 Pendant l'intervalle dt la boucle gagne une variation de flux B_2wvdt et perd une variation B_1wvdt .



Fig 7.10 Pendant le temps dt la boucle se déplace de la position C_1 à la position C_2 .

Tout cela est assez évident si vous réalisez que div $\mathbf{B} = 0$ implique un genre de conservation spatiale du flux. Il entre autant de flux dans tout volume qu'il n'en sort. (Nous considérons la situation dans tout l'espace à un instant donné.) Il est souvent utile de visualiser les « tubes » de flux. Un tube de flux (fig. 7.8) est une surface en tout point de laquelle les lignes de champ magnétique se trouvent dans le plan de la surface. C'est une surface à travers laquelle aucun flux ne passe, et nous pouvons penser qu'elle contient une certaine quantité de flux, comme un câble de téléphone contient des fils. Il passe le même flux à travers toute courbe fermée tracée juste autour du tube de flux. On ne pourrait dire cela du champ électrique \mathbf{E} que pour les régions où il n'y a pas de charge électrique, étant donné que div $\mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0$. Le champ magnétique a partout une divergence nulle.

Retournons maintenant à la boucle rectangulaire en mouvement, et trouvons le *taux de variation* du flux à travers la boucle. Pendant le temps dt la boucle se déplace d'une distance v dt. Cela change de deux façons le flux total à

travers la boucle, qui est $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ sur une surface qui s'appuie sur la boucle. Comme vous pouvez le voir sur la figure 7.9 on gagne la quantité de flux $B_{2}wv dt$ sur la droite, tandis qu'on perd la quantité de flux $B_{1}wv dt$ sur la gauche. La variation $d\Phi$ du flux à travers la boucle pendant le temps dt est donc

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\Phi} = -(B_1 - B_2) w v \mathbf{d}t \tag{7.11}$$

En comparant l'équation 7.11 à l'équation 7.6, nous voyons que dans ce cas au moins, on peut exprimer la force électromotrice par

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{7.12}$$

Nous pouvons montrer que cela s'applique en général, pour une boucle de n'importe quelle forme se déplaçant n'importe comment. La boucle C sur la figure 7.10 occupe la position C_1 , au temps t, et elle se déplace de sorte qu'elle occupe la position C_2 au temps t + dt. Un élément particulier de la boucle dl s'est déplacé vers sa nouvelle position à la vitesse **v**. S représente une surface qui s'appuie sur la boucle au temps t. A cet instant, le flux à travers la boucle est

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \int_{S} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} \tag{7.13}$$

Le champ magnétique **B** provient de sources qui sont stationnaires dans notre système de référence; il reste constant au cours du temps en tout point fixe dans ce repère. A l'instant t + dt, une surface qui s'appuie sur la boucle est la surface originale *S*, laissée fixe dans l'espace, augmentée des « bords » d*S*. (Rappelez-vous que nous avons le droit de prendre *n'importe quelle* surface qui s'appuie sur la boucle pour calculer le flux qui la traverse.) Ainsi



Fig. 7.11 Le flux à travers la boucle est dirigé vers le haut, et sa grandeur décroît quand le temps s'écoule. La flèche montre la direction de la force électromotrice, c'est-à-dire, la direction dans laquelle les charges ont tendance à être attirées.



Fig. 7.12 Quand la boucle tombe, le flux dirigé vers le bas à travers la boucle augmente. La loi de Lenz nous dit que la f.e.m. induite aura la direction indiquée par les flèches, car c'est la direction dans laquelle le courant doit s'écouler pour produire un flux vers le haut à travers la boucle. Le système réagit de façon à s'op. poser à la variation qui est en train de se produire.

$$\boldsymbol{\Phi}(t+\mathrm{d}t) = \int_{S+\mathrm{d}S} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = \boldsymbol{\Phi}(t) + \int_{\mathrm{d}S} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS}$$
(7.14)

Donc la variation de flux, pendant le temps dt, est juste le flux à travers les « bords » dS, $\int_{dS} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS}$. Sur les bords, on peut exprimer un élément de surface sous la forme (**v** dt) \wedge d**l**, de sorte que l'on peut écrire l'intégrale sur la surface dS sous forme d'intégrale le long du contour *C*; ainsi

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\Phi} = \int_{\mathrm{dS}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = \int_{C} \mathbf{B} \cdot \left[(\mathbf{v} \mathbf{d}t) \wedge \mathbf{dl} \right]$$
(7.15)

Comme d*t* est constant dans cette intégration, trous pouvons le mettre en facteur; nous obtenons:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \int_{C} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathrm{d}\mathbf{l}) \tag{7.16}$$

Suivant la règle du produit mixte (vol. I, p. 38, éq. 2.52) nous avons l'identité : $\mathbf{a} \land (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \land \mathbf{c}$. En nous servant de cela pour réarranger l'expression à intégrer dans l'équation 7.16, nous avons

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\int_{C} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$
(7.17)

Or la force sur une charge q qui se déplace en même temps que la boucle est juste $q(\mathbf{v} \land \mathbf{B})$, de sorte que la force électromotrice, qui est la circulation autour de la boucle de la force par unité de charge, est juste

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{C} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{d} \mathbf{l}$$
 (7.18)

En comparant l'équation 7.17 à l'équation 7.18, nous obtenons la relation simple déjà donnée par l'équation 7.12, mais elle s'applique maintenant pour une forme et un mouvement arbitraires de la boucle. (Nous n'avons même pas eu à supposer que v soit la même pour toutes les parties de la boucle!). En résumé, la circulation autour d'une boucle en mouvement de \mathbf{f}/q , la force

par unité de charge, est juste l'opposé du taux de variation du flux à travers la boucle.

On doit relier par la règle de la main droite le sens de la circulation et la direction dans laquelle on dit que le flux est positif. Par exemple, sur la figure 7.6, le flux traverse la boucle *vers le haut en décroissant*. En tenant compte du signe moins dans l'équation 7.12, notre règle prédit une force électromotrice qui tend à attirer une charge positive autour de la boucle dans la direction opposée à celle des aiguilles d'une montre, quand on regarde la boucle à partir du haut (fig. 7.11).



Fig. 7.13 Les deux bobines produisent un champ magnétique **B**, qui est approximativement uniforme au voisinage de la boucle. Il y a une force électromotrice induite dans la boucle qui varie sinusoïdalement, lorsque la boucle tourne à la vitesse angulaire ω .

Il y a une meilleure façon de considérer cette question de signe et de direction. Remarquez que si un courant s'écoulait dans la direction de la force électromotrice induite, dans la situation montrée sur la figure 7.11, ce courant créerait lui-même un certain flux à travers la boucle dans une direction telle qu'il *s'oppose* à la variation de flux qu'on a supposée. C'est un fait physique essentiel et non la conséquence d'une convention arbitraire sur les signes et les directions. C'est une manifestation de la tendance des systèmes à s'opposer au changement. Dans ce contexte, on l'appelle traditionnellement loi de Lenz.

La figure 7.12 illustre un autre exemple de la loi de Lenz. L'anneau conducteur est en train de tomber dans le champ magnétique do la bobine. Le flux à travers la boucle est dirigé *vers le bas* et sa valeur absolue *augmente*. Pour s'opposer à cette variation, il faut un certain flux nouveau

vers le haut. Pour produire un tel flux il faudrait un courant parcourant la boucle dans le sens des flèches. La loi de Lenz nous assure que la f.e.m. induite aura la bonne direction pour produire un tel courant.

Si la force électromotrice entraîne l'écoulement d'un courant dans la boucle qu'on montre sur les figures 7.6 et 7.11, ce qui arrivera si la boucle a une résistance finie, une certaine énergie sera dissipée dans le fil. Qu'est-ce qui fournit cette énergie? Pour y répondre, considérons la force qui agit sur le courant dans la boucle s'il s'écoule dans le sens indiqué par la flèche sur la figure 7.11. Dans le champ B_2 , le conducteur de droite subira une force vers la droite, tandis que le côté opposé de la boucle, dans le champ B_1 , sera poussé vers la gauche. Mais B_1 est plus grand que B_2 , donc la force totale sur la boucle est dirigée vers la gauche, elle s'oppose au mouvement. Pour conserver un mouvement uniforme de la boucle, une source extérieure doit produire du travail et l'énergie effectivement fournie se transformera en chaleur dans le fil. Imaginez ce qui se passerait si la loi de Lenz était violée, ou si la force sur la boucle agissait dans une direction telle qu'elle favorise le mouvement de la boucle!

Un élément très courant des machines électriques ou des instruments électriques est une boucle ou bobine tournant dans un champ magnétique. Appliquons ce que nous venons juste d'apprendre au système présenté sur la figure 7.13 : une boucle unique qui tourne à vitesse constante dans un champ magnétique approximativement uniforme. On n'a pas dessiné les parties mécaniques essentielles : axe, roulements, entraînement, etc... Deux bobines fixes fournissent le champ *B*. Supposons que la boucle tourne à la vitesse angulaire ω , en radians/s. Si on définit sa position à tout instant par l'angle θ , alors $\theta = \omega t + \alpha$, où la constante α est simplement la position de la boucle à t = 0. La composante de *B* perpendiculaire au plan de la boucle est *B* sin θ . Par conséquent le flux à travers la boucle à l'instant *t* est

$$\Phi(t) = SB\sin(\varpi t + \alpha)$$
(7.19)

où S est la surface de la boucle. Nous avons alors comme force électromotrice

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -SB\sin\left(\varpi t + \alpha\right) \tag{7.20}$$

Si, au lieu d'être fermée, la boucle est reliée par des contacts mobiles à des fils extérieurs, comme on le voit sur la figure 7.13, nous pouvons détecter une différence de potentiel alternative aux bornes.

Un exemple numérique pourra clarifier toutes les questions d'unités. Supposons que l'intensité du champ *B* soit de 0,05 tesla, que la vitesse de rotation soit de 30 tours par seconde et que la surface de la boucle soit de 10^{-2} m². On a alors $\omega = 2\pi \times 30$ soit 188 radians/s, et l'amplitude, c'est-à-dire la grandeur maxima, de la force électromotrice vaut

$$\mathcal{E}_{\text{max}} = SB\varpi = (188 \text{ s}^{-1})310^{-2} \text{m}^2)(53 \ 10^{-2} \text{ tesla}) = 9,403 \ 10^{-2} \text{ volt}$$
(7.21)

Comme & est un travail par unité de charge, on doit le trouver en volts dans le système MKSA que nous utilisons. On trouve que

 $\mathcal{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{L}^2 \times \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{B} \times \mathbf{L} \times \text{vitesse}$

ce qui est compatible avec ce que nous avons vu pour la force de Lorentz $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$ où \mathbf{E} a les mêmes dimensions que $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$. Donc $\mathbf{E} = \mathbf{E} \times \mathbf{L} = \text{vitesse} \times \mathbf{B} \times \mathbf{L}$.

7.4 Une boucle stationnaire avec la source du champ en mouvement



Si nous le désirons, nous observer pouvons les événements décrits sur la figure 7.6 à partir d'un système de référence qui se déplace avec la boucle. Cela ne peut pas changer la physique, seulement les mots utilisés pour la décrire. Soit R', avec les coordonnées x', y', z', le repère attaché à la boucle nous considérons que maintenant comme étant stationnaire (fig. 7.14). La boucle et la batterie, stationnaires dans le repère R, se déplacent dans la direction -y' à la vitesse $\mathbf{v'} =$

Fig. 7.14 Observée à partir du repère R', la boucle est au repos, et la source du champ se déplace. Les champs B' et E' sont tous les deux présents et ce sont des fonctions à la fois du temps et de l'espace.

- v. Soit B_1 et B_2 les champs magnétiques mesurés à un certain instant t' aux deux extrémités de la boucle par des observateurs de R'. En ces points il y aura un champ électrique dans R'. L'équation 6.62 nous dit que

$$\mathbf{E}'_{1} = -\mathbf{v}' \wedge \mathbf{B}'_{1} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}'_{1}$$

$$\mathbf{E}'_{2} = -\mathbf{v}' \wedge \mathbf{B}'_{2} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}'_{2}$$
(7.22)

Pour des observateurs dans R', c'est un vrai champ électrique. Ce n'est pas un champ électrostatique. En général la circulation de E' le long de tout contour fermé n'est pas nulle. En fait la circulation de E' autour de la boucle rectangulaire est

$$\int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}' = wv(B_1' - B_2')$$
(7.23)

Nous pouvons appeler la circulation dans l'équation 7.23, force électromotrice \mathcal{E}' sur ce contour. Si une particule chargée fait une fois le tour de ce contour, \mathcal{E}' est le travail qui lui est fourni, par unité de charge. \mathcal{E}' est relié au taux de variation du flux à travers la boucle. Pour le voir,

remarquez que, tandis que la boucle elle-même est stationnaire, c'est *la configuration du champ magnétique* qui se déplace maintenant à la vitesse - \mathbf{v} de la source. Par conséquent, nous obtenons un résultat analogue à l'équation 7.11 pour le flux gagné ou perdu à chaque extrémité de la boucle; nous en concluons que

$$\mathcal{E}' = -\frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}t'} \tag{7.24}$$

Nous pouvons résumer de la façon suivante les descriptions dans les deux systèmes de référence, R, où la source de **B** est au repos, et R', où la boucle est au repos

Un observateur dans *R* dit : « Ici nous avons un champ magnétique qui, bien que non uniforme dans l'espace, est constant dans le temps. Il n'y a pas de champ électrique. Cette boucle de fil là-bas se déplace à la vitesse v dans le champ magnétique, de sorte que les charges qu'elle contient subissent une force $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ par unité de charge. La circulation de cette force par unité de charge, prise tout autour de la boucle, est la force électromotrice $\mathbf{\mathcal{E}}$; elle est égale à - $d\Phi/dt$. Le flux Φ est $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ sur une surface *S* qui, à un certain instant *t* de mon horloge. s'appuie sur la boucle. »

Un observateur dans R' dit : « Cette boucle est stationnaire et seul un champ électrique peut produire un mouvement des charges qu'elle contient. Mais en fait il y a un champ électrique **E'**. Il semble être créé par cet objet qui ressemble à un aimant et qui en ce moment se trouve foncer à la vitesse - **v**, en produisant en même temps un champ magnétique assez fort **B'**. Le champ électrique est tel que $\int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}'$ autour de cette boucle stationnaire ne soit pas nul, mais au contraire soit égal à l'opposé du taux de variation du flux



Fig. 7.15 Nous imaginons que l'une ou l'autre des tables se déplace, ou que les tables restant fixes, on puisse graduellement varier le courant 1 dans la bobine.

à travers la boucle $d\Phi'/dt'$. Le flux Φ' est $\int \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{S}'$ à travers une surface qui s'appuie sur la boucle, les valeurs de B' devant être mesurées sur toute la surface à un certain instant t' lu sur mon horloge. »

Jusqu'ici nos conclusions sont exactes du point de vue de la relativité. Elles s'appliquent pour toute vitesse $v \le c$ à condition que nous observions scrupuleusement les distinctions entre **B** et **B'**, *t* et *t'*, etc... Si $v \lor c$, de sorte qu'on puisse négliger v^2/c^2 , *B'* sera pratiquement égal à *B*, et nous pouvons oublier sans risque la distinction entre *t* et *t'*.

7.5 Une Loi universelle de l'Induction

Réalisons trois expériences avec l'appareil que montre la figure 7.15. Les tables sont sur roues de sorte qu'on puisse les déplacer facilement. On a relié un galvanomètre sensible à notre bonne vieille boucle rectangulaire; pour augmenter toute force électromotrice induite nous mettons plusieurs tours de fil sur la boucle plutôt qu'un seul. Mais franchement, notre sensibilité pourra encore être marginale, avec la faible source de champ magnétique représentée. Peut-être pourrez-vous imaginer une meilleure version de l'expérience aux travaux pratiques.

Expérience I. Le courant dans la bobine étant constant, et la table 1 stationnaire, la table 2 se déplace vers la droite à la vitesse v. Le *galvanomètre dévie*. Cela ne nous surprend pas; nous avons déjà analysé cette situation dans la section 7.3 plus haut.

Expérience II. Le courant dans la bobine étant constant et la table 2 stationnaire, la table 1 se déplace vers la gauche à la vitesse *v*. Le *galvanomètre dévie*. Cela ne nous surprend pas non plus. Nous venons juste de discuter l'équivalence des expériences I et II, une équivalence qui est un exemple de l'invariance de Lorentz, ou pour les faibles vitesses de nos tables de l'invariance galiléenne. Nous savons que dans les deux expériences on peut relier la déviation du galvanomètre au taux de variation du flux de **B** à travers la boucle.

Expérience III. Les deux tables restant au repos, nous faisons varier le courant 1 à travers la bobine en faisant glisser le *contact* K le long du fil résistant. Nous le faisons de telle façon que *le taux de décroissance* du champ **B** sur la boucle soit le même que ce qu'il était dans les expériences 1 et 2. *Le galvanomètre dévie-t-il*?

Pour un observateur situé près de la boucle sur la table 2, qui mesure le champ magnétique dans ce voisinage en fonction du temps et de la position, il n'y a pas moyen de distinguer entre les expériences I, II et III. Imaginez qu'il y ait un rideau noir entre les deux tables. Bien qu'il y ait des différences mineures entre les configurations de champ pour II et III, un observateur qui ne saurait pas ce qu'il y a derrière le rideau ne pourrait décider de quel cas il s'agit à partir seulement d'une mesure locale de **B**. Par conséquent si le

galvanomètre ne répondait pas dans l'expérience III avec la même déviation, cela voudrait dire que la relation entre les champs magnétique et électrique dans une région dépend de la nature de la source éloignée- A deux champs magnétiques ayant des propriétés locales essentiellement similaires, dans un cas mais pas dans l'autre, on pourrait associer un champ électrique tel que

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$$

Nous trouvons par l'expérience que III est équivalent à I et II. Le galvanomètre dévie de la même quantité qu'avant. Les expériences de Faraday furent les premières à démontrer ce fait fondamental. La force électromotrice que nous observons ne dépend que du taux de variation du flux de **B** et de rien d'autre. Nous pouvons énoncer sous forme de relation universelle la Loi de Faraday de l'Induction

Si *C* est une courbe fermée, stationnaire dans les coordonnées *x*, *y*, *z*, si S est une surface s'appuyant sur *C* et si $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ est le champ magnétique mesuré dans *x*, *y*, *z*, à l'instant *t*, alors

(7.25)

$$\varepsilon = \int_{C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

En nous servant du rotationnel nous pouvons exprimer cette loi sous forme différentielle. Si la relation

$$\int_{C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$
(7.26)

est vraie pour toute courbe C et toute surface S s'appuyant sur C, comme le dit notre loi, il en résulte qu'en tout point

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} \tag{7.27}$$

Pour montrer que l'équation 7.27 se déduit de l'équation 7.26, comme d'habitude, nous réduisons C autour d'un point qui n'est pas un point singulier de la fonction **B**. Alors à la limite, la variation de **B** sur un petit morceau de surface S qui s'appuie sur C sera négligeable, et l'intégrale de surface tendra simplement vers **B** • **S**. Or, par définition

(équation 2.76) la limite vers laquelle tend $\int_{C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ lorsque la courbe est réduite est $\mathbf{S} \cdot \text{rot } \mathbf{E}$. A la limite, nous avons donc

$$\mathbf{S} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}) = \mathbf{S} \cdot \left(-\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}\right)$$
 (7.28)

Comme cela s'applique pour toute surface infinitésimale S, nous devons avoir (²⁴)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{d}\mathbf{B}}{\mathbf{d}t} \tag{7.29}$$

En reconnaissant que **B** peut dépendre de la position aussi bien que du temps, nous écrirons $\partial \mathbf{B}/\partial t$ à la place de d**B**/dt. Nous avons donc deux énoncés entièrement équivalents de la loi de l'induction

$$\int_{C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

rot $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (7.30)

ou

²⁴ Si ce n'est pas évident, remarquez qu'en choisissant **S** dans la direction x vous pouvez établir que (rot **E**)_x = - dB_z/dt , et ainsi de suite.

Dans l'équation 7.30, on doit exprimer le champ électrique **E** en volt/mètre et **B** en tesla. La force électromotrice $\varepsilon = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ sera exprimée en volts. On a

$$\sum_{(volts)} \int_{C} \underbrace{\mathbf{E}}_{(volts/m)} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \underbrace{\mathbf{B}}_{(teslas)} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \left(\frac{tesla - m^2}{s}\right)$$
(7.31)



Fig. 7.16 Le courant alternatif dans les bobines produit un champ magnétique qui, au centre, oscille entre 5 x 10^{-3} Tesla vers le haut et 5 X 10^{-3} Tesla vers le bas. A tout instant le champ est approximativement uniforme â l'intérieur du cercle *C*.

 $\Phi_{\rm max} = 1,57 \times 10^{-4}$ weber

Temps

L'expression différentielle, rot $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ fait apparaître assez clairement l'idée sur laquelle nous avons insisté précédemment au sujet de la nature locale des relations entre champs. La variation temporelle de **B** dans une petite zone détermine complètement rot **E**, rien d'autre ne compte. Bien sûr, cela ne détermine pas **E** lui-même complètement. On pourrait superposer n'importe quel champ électrostatique, pour lequel rot **E** = 0, sans affecter cette relation.

Comme exemple concret, supposons que l'on fournisse à des bobines comme celles de la figure 7.13 un courant alternatif à 50 Hz, au lieu d'un courant continu. Le courant et le champ magnétique varient comme $\sin(2 \pi \cdot 50 \cdot t)$, soit sin 314 t. Supposons que l'amplitude du courant soit telle que le champ magnétique dans la région centrale atteigne une valeur maxima de 5×10^{-3} tesla. Nous voulons étudier le champ électrique induit, et la force électromotrice, sur un trajet circulaire de 0,1 m de diamètre présenté sur la figure 7.16. Nous pouvons supposer que le champ *B* est pratiquement uniforme à l'intérieur de ce cercle à tout instant.



(b) La force électromotrice associée au circuit C.

$$B = 5 \times 10^{-3} \sin 314 t \tag{7.32}$$

B est en tesla et t en secondes. Le flux à travers la boucle C est

Fig. 7.17 (a) Le flux à travers le cercle C.

$$\Phi = \pi r^2 B = \pi \times 10^{-2} \times 5 \times 10^{-3} \sin 314 \ t = 1,57 \times 10^{-4} \sin 314 \ t \tag{7.33}$$

En nous servant de l'équation 7.31 pour calculer la force électromotrice en volts

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -(314)(1,57) \times 10^{-4} \cos 314 t = -0,049 \cos 314 t \text{ (volts)}$$
(7.34)

Le maximum atteint par \mathcal{E} est 49 millivolts. Le signe moins assure que la loi de Lenz est respectée, si nous avons défini nos directions de façon cohérente. On montre sur la figure 7.17 les variations de Φ et de ε en fonction du temps.

Φ

Que se passe-t-il pour le champ électrique lui-même ? D'habitude, nous ne pouvons pas déduire E en partant de la seule connaissance de rot E. Cependant, ici notre contour C est un cercle centré autour du centre d'un système symétrique. S'il n'y a pas d'autres champs électriques alentour, nous pouvons supposer que le long du cercle, E se trouve dans ce plan et a une valeur absolue constante. Il devient alors trivial de prédire sa valeur absolue, car $\int_{C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r E = \varepsilon$ que nous avons déjà calculé. Dans ce cas, le champ électrique sur le cercle pourrait ressembler à celui de la figure 7.18 a, à cet instant particulier. Mais s'il y avait d'autres sources de



Fig. 7.18 Le champ électrique dans le circuit C:(a) en l'absence de sources autres que le courant oscillant symétrique; (b) y compris le champ électrostatique de deux charges sur l'axe.



Fig. 7.19 Le courant I1 dans la boucle C_1 produit un certain flux à travers la boucle C_2 .



Fig. 7.20 Le courant I_1 dans la boucle C_1 produit un champ \mathbf{B}_1 qui est approximativement uniforme dans la région de la petite boucle C.

7.18 b, le champ électrique au voisinage du cercle serait la superposition du champ électrostatique des deux charges et du champ électrique induit.

7.6 Inductance mutuelle

Soit deux circuits, ou boucles, C_1 et C_2 de positions fixes l'un par rapport à l'autre (fig. 7.19). Par un certain moyen, tel qu'une batterie et une résistance variable, on fait passer un courant contrôlable I_1 dans le circuit C_1 . Soit **B**_l(x, y, z) le champ magnétique qui existerait si le courant dans C_1 gardait une valeur constante I_1 , et soit Φ_{21} le flux de **B**₁ à travers le circuit C_2 . Ainsi

$$\boldsymbol{\Phi}_{21} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{dS}_2 \tag{7.35}$$

où S₂ est une surface qui s'appuie sur la boucle C_2 . Les formes et positions relatives des deux circuits étant fixes, Φ_{21} sera proportionnel à I_1

$$\frac{\Phi_{21}}{I_1} = C^{te}$$
(7.36)

Supposons maintenant que Il varie au cours du temps, mais assez lentement pour que le champ B_1 en tout point au voisinage de C_2 soit relié au courant I_1 dans C_1 au même instant de la même façon qu'ils le sont pour

des courants constants. (Pour voir pourquoi une telle restriction est nécessaire, imaginez que C_1 et C_2 soient à 10 m de distance et que nous doublions la valeur du courant dans C_1 en 10 nanosecondes!). Lorsque I_1 varie, le flux Φ_{21} varie proportionnellement. Il y a dans le circuit C_2 une force électromotrice induite de grandeur

$$\varepsilon_{21} = -C^{te} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{7.37}$$

La constante est la même que dans l'équation 7.36. Nous la représentons par M_{21} et écrivons ainsi l'équation 7.37

$$\varepsilon_{21} = -M_{21} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{7.38}$$

On appelle la constante M_{21} coefficient d'inductance mutuelle. Sa valeur est déterminée par l'arrangement des boucles. Les unités dépendent bien sûr de notre choix d'unités pour ε , *I* et *t*. Dans le système MKSA, avec ε_{21} en volts et I_1 en ampères, *M* est exprimé en *henrys* (²⁵). C'est-à-dire que l'inductance mutuelle M_{21} vaut un henry si un courant I_1 variant à la vitesse de 1 ampère/seconde induit une force électromotrice de 1 volt dans le circuit C_2 .

Comme exemple, considérons les circuits de la figure 7.20, deux anneaux coplanaires et concentriques, un petit anneau C_2 et un anneau beaucoup plus grand C_1 . Quel est M_{21} dans ce cas? Au centre de C_1 , avec un courant I_1 , le champ B_1 est donné par

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} \tag{7.39}$$

avec I_1 en ampères et B_1 en tesla. (Revoyez le paragraphe du début de la section 6.5 qui conduit à l'équation 6.42, si vous avez oublié la façon de trouver le champ au centre d'un anneau de courant. Nous supposons $R_2 \vee R_1$ afin de pouvoir négliger la variation de B_1 à l'intérieur du petit anneau. Le flux à travers la petite boucle est alors

$$\Phi_{21} = (\pi R_2^2) \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} = \frac{\pi \mu_0 I_1 R_2^2}{2R_1}$$
(7.40)

Ainsi la « constante » dans l'équation 7.36, dans ce cas particulier, a la valeur $\mu_0 \pi R_2^2 / 2R_1$, et la force électromotrice induite dans C_2 est

$$\varepsilon_{21} = -\frac{\pi \,\mu_0 R_2^2}{2R_1} \cdot \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{7.41}$$

avec ε_{21} en volts, I_1 en ampères et R_1 et R_2 en mètres. Incidemment, le signe moins que nous avons mis ne nous dit pas grand chose à ce stade. Si vous voulez être sûrs du sens dans lequel la force électromotrice tend à produire un courant dans C_2 la loi de Lenz est votre guide le plus sûr.

Si le circuit C_1 comprenait N_1 tours de fil au lieu d'un seul anneau, le champ B_1 au centre serait N_1 fois plus intense pour un courant donné I_1 . De même si la petite boucle C_2 comprenait N_2 tours, tours du même rayon R_2 , la force électromotrice dans chaque tour s'ajouterait à celle du suivant, ce qui rend la force électromotrice totale dans ce circuit égale à N_2 fois celle d'un seul tour. Ainsi pour des *spires multiples* dans chaque bobine, l'inductance mutuelle est donnée par

$$M_{21} = \frac{\pi \,\mu_0 N_1 N_2 R_2^2}{2R_1} \tag{7.42}$$

Cela suppose que les spires soient nettement groupées ensemble, avec une section du groupe petite par rapport au rayon de la bobine. Cependant, l'inductance mutuelle a un sens bien défini pour deux circuits de n'importe quelle forme ou distribution. C'est le rapport de la force électromotrice en volts dans le circuit 2, produite par une variation du courant dans le circuit 1, et du taux de variation du courant I_1 en ampère/s. C'est-à-dire

²⁵ Le nom de cette unité provient de celui de Joseph Henry (1797-1878), le premier physicien américain de son temps. L'induction électromagnétique fût découverte indépendamment par Henry, pratiquement en même temps que les expériences de Faraday. Henry fut le premier à reconnaître le phénomène de self-induction. Il développa l'électroaimant, le prototype du moteur électrique, inventa le relais électrique, en un mot il inventa la télégraphie.

$$M_{21}(\text{henrys}) = \frac{\varepsilon_{21}(\text{volts})}{\left(\frac{dI_1}{dt}\right)\left(\frac{\text{amp}}{\text{s}}\right)}$$
(7.43)

7.7 Un théorème de « réciprocité »

En considérant les circuits C_1 et C_2 nous aurions pu chercher la force électromotrice induite dans le circuit C_1 due à une variation du courant dans C_2 . Cela ferait intervenir un autre coefficient d'inductance mutuelle

$$M_{12} = \frac{\varepsilon_{12}}{\left(\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}\right)} \tag{7.44}$$

C'est un fait remarquable que pour deux circuits quelconques

$$M_{21} = M_{12}$$
 (7.45)

Ce n'est pas une question de symétrie géométrique. Même l'exemple simple de la figure 7.20 n'est pas symétrique par rapport aux deux circuits. Noter que R_1 et R_2 interviennent de façons différentes dans l'expression de M_{21} . L'équation 7.45 dit que si, pour ces deux circuits non semblables

aussi - et non pas ce que nous obtiendrons en échangeant les 1 et les 2 partout!

Pour trouver le théorème, équation 7.45, nous devons montrer que le flux Φ_{12} à travers un certain circuit C_1 dû au courant I dans un circuit C_2 est égal au flux Φ_{21} qui traverse le circuit C_2 quand un courant égal I parcourt le circuit C_1 . Pour montrer cela, nous utilisons le potentiel vecteur.



Fig. 7.21 Calcul du flux Φ_{21} qui passe à travers C_2 en raison du courant I qui passe dans C_1 .

D'après le théorème de Stokes

$$\int_{C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S} (\operatorname{rot} \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$
(7.46)

En particulier si **A** est le potentiel vecteur du champ magnétique **B**, c'est-à-dire si **B** = rot **A**, nous avons

$$\int_{C} \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl} = \int_{S} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = \boldsymbol{\Phi}_{S}$$
(7.47)

C'est-à-dire, la circulation du potentiel recteur le long d'une boucle est égale au flux de \mathbf{B} à travers cette boucle.

Or, selon l'équation 6.35, le potentiel vecteur est relié à sa source de courant de la façon suivante

$$\mathbf{A}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{C_1} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}_1}{r_{21}}$$
(7.48)

 A_{21} est le potentiel vecteur, en un certain point (x_2 , y_2 , z_2), du champ magnétique créé par le courant I (amp) qui parcourt le circuit C_1

; dl est un élément de la boucle C_1 ; et r_{21} est la valeur absolue de la distance entre cet élément et le point (x_2, y_2, z_2) .

La figure 7.21 montre les deux boucles C_1 et C_2 , avec le courant I parcourant C_1 . Soit (x_2, y_2, z_2) un point de la boucle C_2 . Alors le flux à travers C_2 dû au courant I dans C_1 est

$$\boldsymbol{\Phi}_{21} = \int_{C_2} \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{dI}_2 = \int_{C_2} \mathbf{dI}_2 \cdot \mathbf{A}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{C_2} \mathbf{dI}_2 \cdot \int_{C_1} \frac{\mathbf{dI}_1}{r_{12}}$$
(7.49)

De même le flux à travers C_1 dû au courant I qui parcourt C_2 est donné par

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{C_2} \mathbf{dl}_1 \cdot \int_{C_1} \frac{\mathbf{dl}_2}{r_{12}}$$
(7.50)

Or, $r_{12} = r_{21}$ car ce ne sont que des valeurs absolues de la distance, et non des vecteurs. La signification de chacune de ces intégrales est la suivante : Prenez le produit scalaire d'une paire d'éléments de contour, un sur chaque boucle, divisez par la distance qui les sépare et faites la somme sur toutes les paires. La seule différence entre les équations 7.49 et 7.50 est l'ordre dans lequel on fait ces opérations; cela ne peut pas affecter le résultat final. Donc $\Phi_{12} = \Phi_{21}$, d'où il résulte directement que $M_{12} = M_{21}$. Grâce à ce théorème nous n'avons pas besoin de distinguer M_{12} de M_{21} . Dorénavant, nous pouvons parler de l'inductance mutuelle M de deux circuits quelconques.

On appelle souvent des théorèmes de ce genre, théorèmes de « réciprocité ». Il y a quelques autres théorèmes de réciprocité sur les circuits électriques, qui ne sont pas sans relation avec celui-ci. Cela vous rappellera peut-être la relation $C_{jk} = C_{kj}$ mentionnée dans la section 3.6 et traitée dans le problème 3.27.

D'habitude une relation de réciprocité exprime quelque loi générale de symétrie qui *n'est pas* apparente d'après la nature superficielle du système. Vous rencontrerez une loi de réciprocité extrêmement importante et à certains points de vue surprenante quand vous étudierez la transmission des ondes électromagnétiques.

7.8 Self-inductance

Quand le courant I_1 varie, il y a une variation du flux à travers le circuit C_1 lui-même, en conséquence il y a une force électromotrice induite. Appelons-la ε_{11} . La loi de l'induction s'applique, quelle que soit la source du flux



Fig 7.22 Une bobine toroïdale de section carrée. On ne montre que quelques spires.

 $\varepsilon_{11} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{11}}{\mathrm{d}t} \tag{7.51}$

où Φ_{11} est le flux à travers le circuit 1 du champ B_1 dû au courant I_1 dans le circuit 1. Le signe moins exprime le fait que la force électromotrice s'exerce toujours dans une direction telle qu'elle *s'oppose à la variation* du courant - c'est de nouveau la loi de Lenz. Comme Φ_{11} est proportionnel à I_1 , nous pouvons écrire

$$\varepsilon_{11} = -L_1 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{7.52}$$

on appelle la constante L_1 self-inductance du circuit.

Comme exemple de circuit pour lequel on peut calculer L_1 , considérons la bobine toroïdale à section rectangulaire du problème 6.19, qu'on montre de nouveau ici sur la figure 7.22. Vous avez trouvé (si vous avez fait ce problème) qu'un courant 1 en ampères, parcourant la bobine de *N* tours produit un champ dont l'intensité est donnée à une distance *r* de l'axe de la bobine par $B = \mu_0 NI/2\pi r$. Le flux total à travers une spire de la bobine est l'intégrale de ce champ sur la section de la bobine

$$\Phi(\text{un tour}) = h \int_{a}^{b} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \, \mathrm{d}r = \frac{\mu_0}{2\pi} NIh \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{7.53}$$

Le flux à travers le circuit des N spires est N fois plus grand

$$\Phi = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 Ih \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{7.54}$$

Par conséquent, la force électromotrice induite ε est

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0}{2\pi} N^2 h \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{dI}{dt}$$
(7.55)

Ainsi la self-inductance de la bobine est donnée par

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 h \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{7.56}$$

Vous pouvez penser que l'une des boucles que nous avons considérées précédemment aurait fourni un exemple plus simple pour illustrer le calcul de la self-inductance. Cependant, si nous essayons de calculer l'inductance d'une seule boucle circulaire de fil, nous rencontrons de grandes difficultés. Il paraît être une bonne idée de simplifier le problème en supposant que le fil a un diamètre nul. Mais nous découvrons site que si un courant fini parcourt un filament de diamètre nul, le flux à travers une boucle faite d'un tel filament est infini! La raison en est que le champ B, dans le voisinage d'un courant filamentaire, varie comme 1/r où r est la distance au filament, et l'intégrale de $B \times surface$ diverge comme $\int (dr/r)$ quand on la calcule jusqu'à r = 0. Pour éviter cela, nous pouvons prendre un rayon fini, non nul, ce qui, de toutes façons, est plus réaliste. Cela peut rendre le calcul un peu compliqué, dans un cas donné, mais cela ne nous ennuie pas. La vraie difficulté est que différentes parties du fil apparaissent maintenant comme des circuits différents, reliés par des quantités de flux différentes. Nous ne sommes plus sûrs de ce que nous voulons dire par le flux à travers le circuit. En fait, comme la force électromotrice est différente dans les différentes boucles filamentaires en lesquelles on peut diviser le circuit, il doit se produire une certaine redistribution de la densité de courant quand passent dans la boucle des courants qui varient rapidement. Par conséguent, l'inductance du circuit peut dépendre quelque peu de la rapidité de la variation de I; elle peut donc n'être pas strictement constante comme l'implique l'équation 7.52.

Nous avons évité ces embarras dans l'exemple de la bobine tonique en ne considérant pas le champ au voisinage immédiat des spires individuelles de l'enroulement. La plupart du flux *ne passe pas* à travers les fils eux-mêmes et chaque fois que c'est le cas, l'effet dont nous venons de nous préoccuper ne sera pas important.

7.9 Un circuit qui contient une self-inductance

Supposons que nous connections une batterie qui procure une force électromotrice ε_0 à une bobine, ou *self-inductance*, de self-inductance *L*, comme sur la figure 7.23 *a*. La bobine elle-même, les fils de liaison, et même la batterie auront une certaine résistance. Nous nous moquons de la façon dont elle est distribuée le long du circuit. On peut toute la regrouper en une résistance *R*, indiquée sur le diagramme du circuit de la figure 7.23 *b* par le symbole d'une résistance ayant cette valeur. De même, le reste du circuit, surtout les fils de liaison, contribuent un peu à la self-inductance de tout le circuit; nous supposons que ce soit inclus dans *L*. En d'autres termes, la figure 7.23 *b* représente un circuit physique idéalisé : la self-inductance *L*, représentée par \prod n'a pas de résistance; la résistance *R* n'a pas de self-inductance. C'est ce circuit idéalisé que nous allons analyser maintenant.

Si le courant *I* dans le circuit a un taux de variation dI/dt, il y a une force électromotrice induite *L* dI/dt, dans une direction telle qu'elle s'oppose à la variation. Il y a aussi la force électromotrice constante ε_0 de la batterie. Si nous définissons comme direction positive du courant celle dans laquelle la batterie tend à produire un courant, alors à tout instant la force électromotrice totale sera E° - *L* dI/dt. Elle entraîne le courant *I* à travers la résistance *R*. C'est-à-dire



Fig. 7.23 Un circuit simple avec une self-inductance (a) et une résistance (b).

$$\varepsilon_0 - L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = RI \tag{7.57}$$

Nous pouvons aussi décrire la situation de la façon suivante : la différence de potentiel entre les points A et B, que nous appellerons *tension aux bornes de la self-inductance*, est L dI/dt, avec la borne du haut de la self-inductance positive si I *augmente* dans la direction indiquée. La différence de potentiel entre B et C, la tension aux bornes de la résistance, est RI, avec la borne du haut de la résistance positive. Donc la somme des tensions à travers la self-inductance et la résistance est L dI/dt + RI. C'est la même que la différence de potentiel entre les bornes de la batterie, qui est g° (notre batterie idéalisée n'a pas de résistance interne). Nous avons ainsi

$$\varepsilon_0 = L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI \tag{7.58}$$

qui n'est qu'un nouvel énoncé de l'équation 7.57.

Avant de chercher la solution mathématique de l'équation 7.57, prédisons ce qui devrait se passer dans ce circuit quand on ferme l'interrupteur à t = 0. On a nécessairement I = 0 avant la fermeture de l'interrupteur. Longtemps après qu'on ait fermé l'interrupteur, on doit atteindre un certain état stationnaire, avec un courant qui a une valeur I_0 pratiquement constante. A ce moment et ensuite, d $\mathbf{I}/dt \approx 0$, et l'équation 7.57 se réduit à

(7.59)



Fig. 7.24 (a) Voici comment le courant doit se comporter initialement, et après qu'un temps très long se soit écoulé.



(*b*) Variation complète en fonction du temps du courant dans le circuit de la figure 7.23.

La transition entre le courant nul et le courant stationnaire ne peut pas se produire brusquement à t = 0, car dI/dt serait infini à cet instant. En fait, juste après t = 0, le courant I sera si petit que l'on peut négliger le second terme RI dans l'équation 7.57, d'où

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon_0}{L} \tag{7.60}$$

La self-inductance L limite le taux de croissance du courant.

Ce que nous savons maintenant est résumé sur la figure 7.24 *a*. Il ne reste qu'à trouver comment se passe toute la variation. L'équation 7.57 est une équation différentielle comme celles que vous avez déjà rencontrées dans la section 4.11 et dans le volume 1, chapitre 6. Sans rien chercher de plus, nous pouvons écrire une solution de l'équation 7.57 qui satisfait notre condition initiale, I=0 à t=0.

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R} (1 - e^{-(R/L)t})$$
(7.61)

Le graphique de la figure 7.24 b montre que le courant se rapproche exponentiellement de sa valeur asymptotique I_0 . La « constante de temps » de ce circuit est la quantité L/R. Si L est mesuré en henrys et R en ohms, elle est en secondes, car henrys ~ volts/(amp/s), et ohms ~ volts/ampères.

Que se passe-t-il si nous ouvrons le circuit après que le courant ait été établi, forçant ainsi le courant à tomber abruptement vers zéro? Cela rendrait le terme L dI/dt infiniment négatif ! La catastrophe peut être plus que mathématique. Des gens ont été tués en ouvrant des contacteurs dans des circuits fortement inductifs. Ce qui se passe généralement, est que la très forte tension induite produit une étincelle ou arc entre les contacts de l'interrupteur ouvert, de sorte qu'après tout le courant continue à passer. Retirons au contraire la batterie du circuit en fermant une liaison conductrice à travers la combinaison LR comme sur la figure 7.25 a, en débranchant la batterie au même instant. Nous avons maintenant un circuit décrit par l'équation



 $0 = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI \tag{7.62}$

avec la condition initiale $I = I_0$ à $t = t_1$ où t_1 est l'instant où l'on a fermé le court-circuit. La solution est une simple fonction exponentielle décroissante.

$$I = I_0 e^{-(R/L)(t-t_1)}$$
(7.63)

avec le même temps caractéristique qu'avant.

7.10 Énergie emmagasinée dans un champ magnétique

Pendant la décroissance du courant décrite par l'équation 7.63 et la figure 7.25 *b*, de l'énergie est dissipée dans la résistance. Comme l'énergie d*U* dissipée pendant tout intervalle de temps court d*t* est *RI*²d*t*, l'énergie totale dissipée après la fermeture de l'interrupteur au temps *t*, doit être

$$U = \int_{t_1}^{\infty} RI^2 dt = \int RI_0^2 e^{-(R/L)(t-t_1)}$$
(7.64)

Avec la substitution $x = 2R(t - t_1) / L$, on l'évalue facilement

$$U = RI_0^2 \left(\frac{L}{2R}\right) \int_0^\infty e^{-x} dx = \frac{1}{2} LI_0^2$$
(7.65)

La source de cette énergie était la self-inductance avec son champ magnétique. En fait, une quantité de travail exactement égale avait été fournie par la batterie pour créer d'abord le courant - en plus de l'énergie dissipée dans la résistance entre t = 0 et $t = t_1$ qui a aussi été fournie par la batterie. Pour voir qu'il s'agit d'une relation générale, remarquez que si nous avons un courant croissant dans une self-inductance, du travail doit être fourni pour pousser le courant *I* contre la force électromotrice induite *L* d*I*/d*t*. Donc pendant le temps d*t* le travail produit est

$$\mathrm{d}W = LI \,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t = LI \,\mathrm{d}I = \frac{1}{2} L \,\mathrm{d}(I^2) \,(7.66)$$

Par conséquent, nous pouvons assigner une énergie totale

$$U = \frac{1}{2} L I^{2}$$
(7.67)

à une self-inductance parcourue par un courant *I*. Quand ce courant décroît vers zéro, cette quantité d'énergie apparaît quelque part ailleurs.

Il est naturel de considérer cela comme de l'énergie emmagasinée par le champ magnétique de la self-inductance, juste comme nous avions décrit l'énergie d'un condensateur chargé comme étant emmagasinée dans son champ électrique. L'énergie d'un condensateur chargé à la différence de potentiel V est $\frac{1}{2} CV^2$; on en rend compte en assignant la quantité d'énergie $\varepsilon_0 E^2 dv/2$ à un élément de volume dv où l'intensité du champ électrique est E. Il est plaisant, mais assez peu surprenant, de trouver qu'une relation exactement

Fig. 7.25 (a) Circuit *LR.*(b) Décroissance exponentielle du courant dans le circuit *LR.*

similaire s'applique pour l'énergie emmagasinée dans une self-inductance. C'est-à-dire que nous pouvons assigner au champ magnétique une densité d'énergie $B^2/2\mu_0$; quand on somme l'énergie de tout le champ on obtient l'énergie $\frac{1}{2}LI^2$.

Pour montrer dans un cas comment cela s'applique, nous pouvons retourner au cas de la bobine toroïdale dont nous avons calculé la self-inductance dans la section 7.8. Nous avons trouvé (éq. 7.56).

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 h \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{7.68}$$

Pour un courant I, l'intensité B du champ magnétique était donnée par

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \tag{7.69}$$

Pour calculer l'intégrale de volume de $B^2/2\mu_0$ nous pouvons nous servir d'un élément de volume qui est constitué d'une coque cylindrique schématisée sur la figure 7.26 de volume $2\pi rh dr$. Quand cette coque croît de r = a à r = b, elle balaie tout l'espace qui contient le champ magnétique. (Le champ *B* est nul partout en dehors du tore, rappelez-vous en.)

$$\frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dv = \frac{\mu_0}{8\pi^2} N^2 I^2 \int_a^b \frac{2\pi r h}{r^2} dr = \frac{\mu_0}{4\pi} N^2 h I^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$
(7.70)

En comparant ce résultat à l'équation 7.68, nous trouvons qu'en effet

$$\frac{1}{2\mu_0} \int B^2 \mathrm{d}v = \frac{1}{2} L I^2 \tag{7.71}$$

L'énoncé plus général, la contrepartie de notre énoncé pour le champ électrique dans l'équation 1.36 est que l'énergie U qu'on doit associer à tout champ magnétique B(x, y, z) est donnée par

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{toutle}} B^2 \mathrm{d}\nu$$
 (7.72)

Avec B en tesla, et v en mètres cubes, U dans l'équation 7.72 sera donné en joules.



Fig. 7.26 Calcul de l'énergie emmagasinée dans le champ magnétique de la bobine toroïdale de la figure 7.22.

7.11 « Il manque quelque chose »

Passons en revue les relations entre champs et charges. Comme nous l'avons appris dans le chapitre 2, un énoncé équivalent à la loi de Coulomb est la relation différentielle

div
$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
 (7.73)

reliant la densité de charge électrique ρ au champ électrique **E**. Cela s'applique aux charges en mouvement aussi bien qu'aux charges stationnaires. C'est-à-dire que p peut être une fonction du temps aussi bien que de la position. Comme nous avons insisté dans le chapitre 5, le fait que l'équation 7.73 s'applique aux charges en mouvement est compatible avec *l'invariance de la charge* : Quelle que soit la façon dont se déplace une particule chargée, sa charge, telle qu'on la mesure comme intégrale de **E** sur une surface qui l'entoure, apparaît la même dans tous les systèmes de référence. Une charge en mouvement est un

courant électrique. Comme la charge n'est jamais ni créée ni détruite, la densité de charge et la densité de courant J satisfont toujours la condition

div
$$\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$
 (7.74)

Nous avons écrit pour la première fois cette « Équation de Continuité » sous forme de l'équation 4.9. Si la densité de courant **J** est constante au cours du temps, nous l'appelons distribution de courant stationnaire. Le champ magnétique d'une distribution de courant stationnaire satisfait l'équation

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{7.75}$$

Nous avons établi cette relation dans le chapitre 6.

Nous nous intéressons maintenant à des distributions de charge et à des champs qui varient au cours du temps. Supposons que nous ayons une distribution de charge $\rho(x, y, z, t)$ avec $\partial \rho / \partial t \neq 0$. Par exemple, nous pourrions avoir un condensateur en train de se décharger à travers une résistance. Selon l'équation 7.74, $\partial \rho / \partial t \neq 0$ implique

$$\operatorname{div} \mathbf{J} \neq \mathbf{0} \tag{7.76}$$

Mais selon l'équation 7.75, comme la divergence du rotationnel de *n'importe quelle* fonction vectorielle est identiquement nulle (voir le problème 2.15),

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) = 0 \tag{7.77}$$

La contradiction montre que l'équation 7.75 *ne peut pas être correcte* pour un système dans lequel la charge varie au cours du temps. Bien sûr, personne n'a dit qu'elle l'était; une distribution de courant stationnaire pour laquelle l'équation 7.75 s'applique vraiment, est telle que pas même la densité du courant **J** ne dépend du temps, encore moins la densité de charge.

On peut poser le problème en termes quelque peu différents en considérant la circulation du champ magnétique le long du fil qui emmène les charges loin du plateau du condensateur sur la figure 7.27. Selon le théorème de Stokes,

$$\int_{C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$$
(7.78)

La surface S passe juste à travers le conducteur dans lequel s'écoule un courant *I*. A l'intérieur du conducteur, rot **B** a une valeur finie, à savoir μ_0 **J** et l'intégrale à droite se trouve être égale à μ_0 **I**. C'est-à-dire que si la courbe *C* est proche du fil et bien éloignée de l'espace intérieur du condensateur, le champ magnétique n'y est pas différent du champ autour de n'importe quel fil parcouru par le même courant. Or la surface *S'* sur la figure 7.28 est aussi une surface qui s'appuie sur *C*, elle a autant le droit d'être utilisée dans l'énoncé du théorème de Stokes, équation 7.78. Cependant, à travers cette surface il ne passe *aucun courant* ! Néanmoins, rot **B** ne peut pas être partout nul sur *S'* sans violer le théorème de Stokes. Par conséquent, sur *S'*, rot **B** doit dépendre de quelque chose d'autre que de la densité de courant **J**.

Nous pouvons seulement conclure que l'équation 7.75 doit être remplacée par quelque autre relation, dans les situations plus générales où les distributions de charge varient. Écrivons à la place

rot
$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + (?)$$
 (7.79)

et voyons si nous pouvons découvrir ce que (?) doit être.

Une autre ligne de pensée suggère la réponse. Souvenez-vous que les lois de transformation du champ électromagnétique, équation 6.58, sont tout à fait symétriques en **E** et **B**. Or, dans le phénomène d'induction de Faraday, *un champ magnétique en train de varier* est accompagné par un *champ électrique* d'une façon décrite par notre équation 7.30



Fig. 7.27 Après avoir été chargé avec l'armature de droite positive le condensateur est en train de se décharger à travers la résistance. Il y a un champ magnétique **B** autour du fil. L'intégrale de rot **B**, sur la surface *S* qui passe autour du fil a la valeur $\mu_0 I$.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{7.30}$$

C'est une relation locale reliant les champs électrique et magnétique dans l'espace vide - des charges n'interviennent pas directement. Si la symétrie par rapport à \mathbf{E} et à \mathbf{B} doit prévaloir, nous devons nous attendre à ce qu'un champ électrique en train de varier donne

Fig. 7.28 Les flèches blanches montrent le passage du courant dans les conducteurs. Il ne passe pas de courant à travers la surface S' qui, comme S, est limitée par la courbe C.

lieu à un champ magnétique. Il devrait y avoir un phénomène d'induction décrit par une équation analogue à l'équation 7.30, mais avec les rôles de \mathbf{E} et \mathbf{B} échangés. Il se trouve que nous avons aussi besoin de changer le signe, mais c'est tout

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$
(7.80)

Cela procure le terme manquant qu'appelle l'équation 7.79. Pour l'essayer, écrivons

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$
(7.81)

et prenons la divergence des deux membres

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) = \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{J} + \mu_0 \operatorname{div} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$
(7.82)

Comme nous l'avons déjà remarqué, le côté gauche est nécessairement nul. Dans le second membre de droite nous pouvons échanger l'ordre de différentiation par rapport aux coordonnées d'espace et de temps. Ainsi

$$\operatorname{div}\left(\varepsilon_{0}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\varepsilon_{0}\mathbf{E}\right) = \frac{\partial\rho}{\partial t}$$
(7.83)

d'après l'équation 7.73. Le côté droit de l'équation 7.82 devient alors

$$\mu_0 \operatorname{div} \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

(7.84)

Fig. 7.29 Le champ électrique à un instant donné. La valeur absolue de **E** *décroît* partout à mesure que le temps s'écoule.

Fig. 7.30 Le courant de conduction (flèches blanches) et le courant de déplacement (flèches noires).





qui est nul en vertu de l'équation de continuité, équation 7.74.

Le nouveau terme résout la difficulté soulevée sur la figure 7.28. Lorsque la charge s'écoule vers l'extérieur du condensateur, le champ électrique, qui à tout instant a la configuration de la figure 7.29, *diminue* d'intensité. Dans ce cas $\partial \mathbf{E}/\partial t$ pointe en direction opposée de **E**. La fonction vectorielle $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$ est représentée par les flèches noires sur la figure 7.30. Avec $\partial \mathbf{E}$

rot $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ l'intégrale de rot \mathbf{B} sur *S'* a maintenant la même valeur que sur *S*. Sur *S'* le second terme contribue tout;

sur S le premier terme, le terme avec $\mu_0 \mathbf{J}$ est pratiquement le seul qui compte.

7.12 Le courant de déplacement

Observons que le champ de vecteurs $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$ paraît former une *continuation* de la distribution du courant de conduction. Maxwell l'appela *courant de déplacement*; ce nom lui est resté bien qu'il ne semble plus très approprié. Pour être précis, nous pouvons définir une « densité de courant de déplacement » \mathbf{J}_d , qu'on doit distinguer de la distribution de courant de conduction \mathbf{J} , en écrivant l'équation 7.81 de cette façon :

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_d) \tag{7.85}$$

et en définissant $\mathbf{J}_{d} \equiv \varepsilon_{0} \partial \mathbf{E} / \partial t$

Nous avions besoin du nouveau terme pour rendre la relation entre courant et champ magnétique compatible avec l'équation de continuité, dans le cas où les courants de conduction varient au cours du temps. S'il correspond à cela, il implique l'existence d'un nouvel effet d'induction dans lequel un champ électrique en train de varier est accompagné par un champ magnétique. Si l'effet est réel, pourquoi Faraday ne l'a-t-il pas découvert? D'abord, il ne le cherchait pas, mais il y a une raison plus fondamentale pour laquelle des expériences comme celles de Faraday ne pouvaient pas révéler tous les nouveaux effets qu'on peut attribuer au dernier terme de l'équation 7.81. Dans tout appareil dans lequel il y a des champs électriques en train de varier, il y a en même temps des courants de conduction et des charges en mouvement. Le champ magnétique **B**, partout autour de l'appareil, est juste celui que vous attendriez que ces courants de conduction produisent. En fait, c'est presque exactement le champ que vous calculeriez si, oubliant le fait que les circuits peuvent ne pas être continus, vous vous serviez de la formule de Biot et Savart, équation 6.38, pour trouver la contribution de chaque élément de courant de conduction au champ en un certain point de l'espace.

Considérons, par exemple, le point *P* dans l'espace entre les plaques de notre condensateur en train de se décharger, fig. 7.31. Chaque élément de courant de conduction, dans les fils et à la surface des plaques, contribue au champ en *P* selon la formule de Biot et Savart. Devons nous aussi inclure les éléments du « courant de déplacement » J_d ? La réponse est plutôt surprenante. Nous *pouvons* inclure J_d ; mais si nous faisons attention d'inclure la distribution entière des courants de déplacement, son effet global sera *nul* pour des champs qui varient relativement lentement.



Pour voir pourquoi il en est ainsi, remarquez que la fonction vectorielle J_d , indiquée par les flèches noires sur la figure 7.30, a la même forme que le champ électrique sur la figure 7.29. Ce champ électrique est pratiquement un champ électrostatique, à part qu'il s'annule lentement quand on s'éloigne. Par conséquent, nous nous attendons à ce que son rotationnel soit pratiquement nul ce qui impliquerait que rot **J** doit être pratiquement nul. Plus précisément, nous avons

rot **E** = -
$$\partial \mathbf{E} / \partial t$$

et avec le courant de déplacement $J_d = \varepsilon_0 \partial E / \partial t$, nous obtenons en interchangeant l'ordre des différentiations,

Fig. 7.31 Fans le cas de champs qui varient lentement, la contribution totale au champ magnétique en tout point est nulle. On peut calculer le champ magnétique en P à l'aide de la formule de Biot et Savart appliquée aux seuls courants de conduction.

 $\operatorname{rot} \mathbf{J}_{d} = \varepsilon_{0} \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \varepsilon_{0} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\varepsilon_{0} \frac{\partial^{2} \mathbf{B}}{\partial t^{2}}$ (7.86)

Cela sera négligeable pour des variations suffisamment lentes du champ. Nous pouvons appeler *quasi-statique* un champ qui varie lentement. Or si \mathbf{J}_d est un champ de vecteurs avec un rotationnel nul, il peut être constitué, de la même façon que peut l'être un champ électrostatique, par les champs de charges ponctuelles, en superposant des courants s'écoulant à partir de sources ponctuelles ou vers

des « puits » ponctuels (fig. 7.32). Mais le champ magnétique de toute distribution de courant de symétrie *radiale*, calculé à la $\binom{26}{}$ Biot et Savart, doit être nul par raison de symétrie, car il n'y a nulle part de direction unique, sauf la direction radiale elle-même.

Donc, dans le champ *quasi-statique*, les courants de conduction seuls sont les seules sources dont on a besoin pour rendre compte du champ magnétique. En d'autres termes, si Faraday avait utilisé quelque chose comme la figure 7.31 et avait été capable de mesurer le champ magnétique en P, disons en utilisant une aiguille de compas, il n'aurait pas été surpris. Il n'aurait pas eu besoin d'inventer un courant de déplacement pour l'expliquer.

Pour voir ce nouvel effet d'induction, nous avons besoin de champs qui varient rapidement. En fait, nous avons besoin de variations qui se produisent pendant le temps que met la lumière pour traverser l'appareil. C'est pourquoi il fallut attendre Hertz pour une démonstration directe; il fit ses expériences de nombreuses années après que la loi elle-même ait été découverte par Maxwell.



Fig. 7.32 On montre ce que l'on veut dire par courant de conduction radial. La densité de courant **J** pour une source ponctuelle en (*a*), ou pour un « puits » en (*b*), ressemble au champ électrique d'une charge ponctuelle. On pourrait réaliser toute distribution de courant pour laquelle rot J = 0 en superposant de telles sources et de tels puits. De telles distributions doivent donc avoir un champ magnétique nul.

7.13 Équations de Maxwell

James Clerk Maxwell, après qu'il se fut plongé dans les descriptions des recherches de Faraday sur l'électricité, se mit à chercher à formuler mathématiquement une théorie de l'électricité et du magnétisme. Maxwell ne pouvait pas exploiter la relativité - qui apparut cinquante ans plus tard. La constitution électrique de la matière était un mystère, et on ne suspectait pas la relation entre la lumière et l'électromagnétisme. Un grand nombre des arguments que nous avons utilisés pour que notre étape suivante apparaisse évidente, étaient impensables à l'époque. Néanmoins, à mesure que la théorie de Maxwell se développa, le terme que nous avons discuté $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, apparut de façon tout à fait naturelle dans sa formulation. Il l'appela « courant de déplacement ». Maxwell s'intéressait aux champs électriques aussi bien dans la matière condensée que dans le vide; quand il pane de « courant de déplacement », il inclut souvent aussi quelques charges en mouvement. En fait, Maxwell pensait que l'espace lui-même était un milieu, l'« éther », de sorte que même en l'absence de matière condensée le courant de déplacement se produisait dans quelque chose. Mais cela n'a pas d'importance - ses équations mathématiques étaient parfaitement claires et sans ambiguïté. Son introduction du courant de déplacement fut une découverte théorique du premier ordre.

La description de Maxwell du champ électromagnétique était essentiellement complète. Par différents chemins, nous sommes arrivés à diverses parties de cette théorie, que nous allons maintenant rassembler sous la forme qu'on appelle *traditionnellement équations de Maxwell*.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \varepsilon_{0} \mu_{0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_{0} \mathbf{J}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_{0}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

(7.87)

On les a écrites pour des champs dans le vide, en présence d'une densité de charge électrique ρ et d'un courant électrique, c'est-à-dire des charges en mouvement, de densité **J**.

La première équation est la *loi de l'induction* de Faraday. La seconde exprime la dépendance du champ magnétique par rapport à la densité de *courant de déplacement*, ou taux de variation du champ électrique et par rapport à la densité de *courant de conduction* ou taux de mouvement des charges. La troisième équation est équivalente à la loi de Coulomb. La quatrième équation énonce qu'il n'y a pas d'autre source de champ magnétique *que* les courants. Dans le chapitre 10, nous aurons d'autres choses à dire sur cet aspect de la Nature.

Remarquez que le manque de symétrie de ces équations par rapport à **B** et à **E** est entièrement dû à la présence de charges électriques et de courants électriques de conduction. Dans l'espace vide, les termes avec ρ et **J** sont nuls; les équations de Maxwell deviennent

²⁶ NET En français dans le texte.

rot
$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
 div $\mathbf{E} = 0$
rot $\mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ div $\mathbf{B} = 0$ (7.88)

Ici le terme de courant de déplacement est de première importance. Sa présence, avec sa contrepartie dans la première équation, implique la possibilité d'avoir des *ondes électromagnétiques*. Ayant reconnu cela, Maxwell se mit à développer, avec de brillants succès, une théorie électromagnétique de la lumière. Dans le volume III, vous explorerez la physique des ondes, en particulier des ondes électromagnétiques. Nous allons montrer dès maintenant qu'une perturbation électromagnétique se déplaçant à la vitesse c est compatible avec les équations de Maxwell. Pour cela, nous allons décrire un ensemble très simple de champs électrique et magnétique qui représente une perturbation en mouvement; nous montrerons ensuite que ces champs satisfont toutes les équations encadrées, équation 7.88.

Nous supposons qu'il existe à un instant t = 0, un champ électrique dans la région située entre deux plans y = 0 et y = 2a. Ce champ **E** a seulement une composante z, et sa composante z ne dépend que de y, de la façon suivante

$$E_{z} = E_{0} \frac{y}{a} \qquad (0 \le y \le a)$$

$$E_{z} = E_{0} \left(\frac{2a - y}{a} \right) \quad (a \le y \le 2a)$$
(au temps $t = 0$) (7.89)



Fig. 7.33 Une configuration particulière de champs électrique et magnétique qu'on a suppose se déplacer à la vitesse *c* dans la direction *y*. On montre en (*a*) les champs au temps 0, et en (*b*) à un instant ultérieur. Ces champs satisferont les équations de Maxwell à condition que $E_0 = cB_0$. Remarquez l'orientation relative de **E**, **B** et de la direction de propagation *y*.

Comme l'indique la figure 7.33 a, cela représente une distribution de l'intensité du champ en forme de pignon, maximum au centre en y = a et décroissant linéairement vers zéro en y = 0 et y = 2a. Pour y donné, le champ est le même pour tout x et tout z. C'est-à-dire que nous avons un champ électrique dans une tranche infinie, bien que nous ne montrions les vecteurs champ sur la figure que sur l'axe y. Les deux parties ombrées marquées I et II se trouvent à l'intérieur de cette tranche. Partout en dehors de la tranche, c'est-à-dire pour y <0 et v > 2a le champ électrique est nul à cet instant-là. Au même instant il existe un champ magnétique B dans cette tranche de l'espace. Il a seulement une composante *x* donnée par

$$B_{x} = B_{0} \frac{y}{a} \qquad (0 \le y \le a)$$

$$B_{x} = B_{0} \left(\frac{2a - y}{a} \right) \quad (a \le y \le 2a)$$
(au to a second se

Nous avons simplement inventé ce champ. Obligeons maintenant ce champ à se déplacer dans la direction y à la vitesse c, en gardant sa forme. Nous pouvons le faire en ordonnant ce qui suit Région I

$$E_{x} = E_{0} \left(\frac{y - ct}{a} \right)$$

$$B_{x} = B_{0} \left(\frac{y - ct}{a} \right)$$
(ct * y * ct + a) (7.91)

Région II

$$E_{x} = E_{0} \left(\frac{2a - y + ct}{a} \right)$$

$$B_{x} = B_{0} \left(\frac{2a - y + ct}{a} \right)$$
(7.92)
(7.92)

cela décrit la situation telle que nous la voyons sur la figure 7.33 6 ou à tout autre instant. On a simplement déplacé la région qui contient le champ d'une distance ct vers la droite. Dans les régions I et II, \mathbf{E} et \mathbf{B} ont tous les deux la même forme qu'avant. Ainsi nos équations décrivent une configuration de champ électrique et magnétique en mouvement, mais de tels champs peuvent-ils exister? Pour répondre à cela, nous devons voir si \mathbf{E} et \mathbf{B} , tels qu'ils sont donnés par les équations 7.91 et 7.92, satisfont les équations de Maxwell.

Commençons par les équations de divergence; il est facile de voir que div $\mathbf{E} = 0$ et que div $\mathbf{B} = 0$. (Évidemment $\partial \mathbf{E}_z/\partial z = 0$ et les autres composantes de \mathbf{E} sont elles-mêmes nulles). Mais rot \mathbf{E} n'est pas nul. Au contraire, il a comme valeur

Dans la région I:

rot
$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{E_0}{a} \hat{\mathbf{x}}$$

(7.93)

Dans la région II:

rot
$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{E_0}{a} \hat{\mathbf{x}}$$

De la même façon, nous calculons rot **B** :

Dans la région I:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = -\hat{\mathbf{z}} \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{B_0}{a} \hat{\mathbf{z}}$$
(7.94)

Dans la région II:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = -\hat{\mathbf{z}} \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{B_0}{a} \hat{\mathbf{z}}$$

Les dérivées partielles par rapport à t sont

Dans la région I:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{c}{a} E_0 \hat{\mathbf{z}} \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{c}{a} B_0 \hat{\mathbf{x}}$$
(7.95)

Dans la région II:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{c}{a} E_0 \hat{\mathbf{z}} \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c}{a} B_0 \hat{\mathbf{x}}$$

Les champs vont alors satisfaire les équations d' « induction » dans la région I si

et

 $\frac{E_0}{a}\hat{\mathbf{x}} = c\frac{B_0}{a}\hat{\mathbf{x}}$ $-\frac{B_0}{a}\hat{\mathbf{z}} = -\varepsilon_0\mu_0c\frac{E_0}{a}\hat{\mathbf{z}}$ (7.96)



Fig. 7.34 Diverses formes d'ondes obtenues par superposition de « pignons ».

On utilise alors le fait que $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. Les équations sont alors satisfaites à condition que $E_0 = cB_0$. Ces équations conduisent exactement à la même condition sur les champs dans la région II. Exactement au sommet du pignon, et aussi à chaque extrémité, il y a des singularités mathématiques dans les champs qu'on a supposés. Pour être sûrs que les équations du champ sont satisfaites *partout*, nous devons voir s'il n'y a pas d'ennuis en ces points. Il n'y en a pas, car **E** et **B** sont *continus* en ces points. (Un saut abrupt, ou une discontinuité, de **E** ou **B** ne serait pas possible dans l'espace vide.) Ainsi le champ électromagnétique particulier que nous avons décrit, qui représente une onde progressive, satisfait toutes les équations du champ, si l'intensité du champ électrique en volt/m est partout égale à *c* fois l'intensité du champ magnétique en tesla au même instant et au même endroit. Il est essentiel que **E** et **B** soient perpendiculaires l'un à l'autre et à la direction de progragation - autrement les équations du champ n'auraient pas pu être satisfaites.

Vous pouvez être frappés par le caractère plutôt particulier de cette onde progressive en forme de pignon. En fait, cet exemple simple révèle presque tout ce qu'il y a d'essentiel dans toute onde électromagnétique plane! Nous n'avons qu'à penser à la superposition. Comme nous l'avons fréquemment mis en relief, les équations du champ électromagnétique sont linéaires. Si deux ensembles de champs satisfont les équations de Maxwell, il en est de même pour leur somme. Nous pouvons avoir n'importe quel nombre de nos champs en pignon qui se déplacent dans l'espace, dans la même direction ou dans des directions différentes. (Naturellement, les champs ne se préoccupent pas de la façon dont les axes sont orientés, toute autre direction est aussi bonne comme axe y.) La figure 7.34 suggère quelques ondes que vous pourriez faire avec des « pignons ». Il est assez évident que l'on pourrait approximer d'aussi près que l'on veut toute fonction en superposant des pignons. Par conséquent, ce que nous avons appris sur le pignon doit s'appliquer pour toute onde dans laquelle E et B ne sont fonctions que de la coordonnée dans la direction du déplacement. Ces faits généraux sont

i) La perturbation se déplace à la vitesse *c*, sans changer de forme.

ii) **E** et **B** sont perpendiculaires l'un à l'autre et à la direction de propagation, avec le vecteur $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ pointant toujours dans la direction de propagation, comme c'est le cas dans notre exemple.

iii) En un point donné et à un instant donné E = cB.

Un champ électromagnétique qui a ces propriétés se transforme d'une manière simple et satisfaisante quand nous changeons de système de coordonnées. Dans le chapitre 6 nous avons déduit les formules pour la transformation de Lorentz des champs électrique

et magnétique (équat. 6.58). Utilisons les résultats du problème 6.11 qui étaient fondés sur ces équations, selon lesquelles les deux quantités scalaires $E^2 - c^2B^2$ et $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ restent *invariantes* dans le passage à un autre repère d'inertie. Dans ce cas, comme E = cB en tout point, la quantité invariante $E^2 - c^2B^2$ a la valeur zéro, l'autre invariant $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ est nul. Il en résulte que dans un autre repère les champs transformés \mathbf{E}' et $c\mathbf{B}'$ doivent avoir des valeurs absolues égales et être perpendiculaires l'un à l'autre. Une onde lumineuse ressemble à une onde lumineuse dans tout système de référence.

Problèmes

- 7.1 Quelle est la force électromotrice induite maximum dans une bobine de 4 000 tours, de rayon moyen 0,12 m, tournant à 30 tours par seconde dans le champ magnétique terrestre où l'intensité du champ est 5 x 10⁻⁵ tesla ? Rép. : 1,70 volts.
- 7.2 Une boucle rectangulaire se déplace dans un champ magnétique uniforme de telle façon que la force électromotrice soit et reste nulle. Décrivez les façons dont la boucle peut se déplacer.
- 7.3 Une bobine en forme d'anneau de *N* tours et de surface *A* se trouve dans le champ d'un aimant. Elle est reliée à un circuit externe par une paire de fils torsadés. La résistance du circuit, compte tenu de la bobine elle-même, est *R*. Supposez que le flux à travers la bobine varie quelque peu de sa valeur initiale stationnaire Φ_i vers une valeur finale stationnaire constante Φ_j . Montrez que la charge totale qui passe à travers le circuit, due à cela, est indépendante du taux de variation du flux. On utilise souvent une telle bobine, appelée « bobine de fluxmètre » pour mesurer l'intensité du champ dans un aimant. Supposez que l'on ait placé la bobine avec son plan perpendiculaire au champ **B**. Quelle est la relation entre *B*, *NA*, *R* et la charge *Q* quand on fait tourner la bobine de 90°? de 180°?



- 7.4 Calculez la force électromotrice dans la boucle en mouvement de la figure à l'instant où elle occupe la position que l'on voit. Supposez que la résistance de la boucle soit si grande que l'effet du courant dans la boucle elle-même est négligeable. Estimez très en gros quelle valeur devrait dépasser la résistance pour ne pas avoir d'ennui de ce côté-là. Indiquez la direction dans laquelle le courant s'écoulerait dans la boucle à l'instant indiqué.
- 7.5 Supposez que la boucle de la figure 7.6 ait la résistance R. Montrez que celui qui tire la boucle à vitesse constante produit pendant le temps dt une quantité de travail qui est exactement égale à l'énergie dissipée dans la

résistance pendant le même intervalle, à condition que l'on puisse négliger la self-inductance de la boucle. Quelle est la source de l'énergie sur la figure 7.11 où la boucle est stationnaire?

- 7.6 La prédiction d'une variation sinusoïdale simple de la force électromotrice pour la boucle qui tourne de la figure 7.13 dépend-elle du fait que la boucle est rectangulaire, ou du fait que le champ magnétique est uniforme, ou des deux ? Expliquez. Pouvez-vous suggérer un arrangement de la boucle qui tourne et des bobines qui donne une f.e.m. certainement non sinusoïdale ? Tracez la courbe tension-temps que vous attendez de voir sur un oscilloscope avec cet arrangement.
- 7.7 Calculez la self-inductance d'un solénoïde cylindrique de 0,1 m de diamètre et de 2 m de long. Il y a un enroulement contenant 1 200 tours en une seule couche. Supposez en première approximation que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est uniforme jusqu'aux extrémités. Estimez grossièrement l'erreur que cela entraîne. Le vrai *L* est-il plus grand ou plus petit que votre résultat approché ?
- 7.8 Comment bobineriez-vous une résistance en forme de bobine afin que sa self-inductance soit *petite* ?
- 7.9 Trouvez une formule approchée pour l'inductance mutuelle de deux anneaux circulaires de même rayon a, disposés comme des roues sur le même axe, avec leurs centres à b m de distance. Utilisez une approximation qui soit bonne pour $b^{TM}a$.
- 7.10Les bobines qui produisirent le premier choc faible mais détectable dans le galvanomètre de Faraday étaient faites, selon sa description, avec 61,9 m de fil de cuivre chacune, bobinés autour d'un grand morceau de bois. Les tours de la seconde spirale (c'est-à-dire un enroulement d'une seule couche) étaient interposés entre ceux de la première, mais séparés d'elles par du fil de lin. Le diamètre du fil de cuivre lui-même était de 1,27 mm. Il ne donne pas les dimensions des blocs de bois ni le nombre de tours des bobines. Dans l'expérience, l'une des bobines était reliée à une a batterie de 1110 plaques ». Voyez si vous pouvez faire une

estimation grossière de la durée en secondes et de la grandeur en ampères de l'impulsion de courant qui passa dans son galvanomètre

7.11La partie (a) de la figure montre deux bobines de self-inductance L_1 et L_2 . Dans la position relative que l'on montre, leur inductance mutuelle est M. La direction du courant positif et la direction de la force électromotrice positive dans chaque bobine sont définies par les flèches sur la figure. Les équations qui relient les courants et les forces électromotrices sont

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}M \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = -L_2 \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}M \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

Étant donné qu'on doit toujours prendre *M* comme une constante positive, comment doit-on choisir les signes dans ces équations ? Qu'en serait-il si nous avions choisi, comme nous aurions pu le faire, l'autre direction pour un courant positif et pour une force électromotrice positive dans la bobine du dessous? Relions maintenant les deux bobines comme dans la partie (*b*) de la figure





pour former un circuit unique. Quelle est la self-inductance L' du circuit, exprimée en fonction de L_1 , L_2 et de M? Quelle est la self-inductance L'' du circuit formé en reliant les bobines comme le montre (c)? Quel circuit, (b) ou (c), a-t-il la plus grande self-inductance? Considérant que la self-inductance de tout circuit doit être une quantité positive (pourquoi ne pourrait-elle pas être négative?), voyez si vous pouvez tirer une conclusion générale, valable pour toute paire concevable de bobines, concernant les grandeurs relatives de L_1, L_2 et M.

7.12 Dans l'espace interstellaire dans notre Galaxie, on croit que le champ magnétique est généralement de l'ordre de grandeur de 10⁻¹⁰ tesla. Dans cet espace la matière n'est typiquement rien de plus que des atomes d'hydrogène, environ un par centimètre cube, avec des vitesses thermiques de l'ordre de 10³ m/s. Comment la quantité d'énergie emmagasinée dans le champ magnétique dans un volume donné se compare-t-elle à celle qui est emmagasinée sous forme d'énergie cinétique de

la matière ?

7.13 Une bobine de 0,01 ohm de résistance et de 0,50 millihenry de self-inductance est reliée à une grosse batterie de 12 volts, de résistance interne négligeable. Combien de temps après qu'on ait fermé l'interrupteur le courant atteint-il 90 % de sa valeur finale ? A cet instant, quelle quantité d'énergie, en joules, est-elle emmagasinée dans le champ magnétique ?



7.14 En principe, on peut calculer le champ magnétique à l'intérieur du condensateur en train de se décharger qu'on montre sur la figure 7.27, en additionnant les contributions de tous les éléments de courant de conduction, comme on l'indique sur la figure 7.31. Cela pourrait être un long travail. Si nous pouvons supposer qu'il y a symétrie autour de l'axe, il est beaucoup plus facile de trouver le champ **B** en un point en se servant de la loi intégrale

$$\int_{C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S} \left(\varepsilon_{0} \mu_{0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_{0} \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

appliquée à un chemin circulaire passant par le point. Nous n'avons besoin de connaître que le courant total compris dans ce chemin. Utilisez cela pour trouver le champ en P, qui est à mi-chemin entre les plaques du condensateur et à une distance r de l'axe de symétrie. (Comparez cela au

calcul du champ électrique induit E, dans l'exemple de la figure 7.16.)

Rép.
$$2\pi r B = \mu_0 I \frac{r^2}{b^2}$$
 , $B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi b^2}$

7.15 Montrez que les champs électromagnétiques suivants satisfont les équations de Maxwell.

$$E_x = E_y = 0;$$
 $E_z = c \cos(y - ct)$
 $B_x = \cos(y - ct);$ $B_y = B_z = 0$

Chapitre 8 Circuits en courants alternatifs

8.1 Un circuit résonnant



Un circuit contenant une self-inductance, un condensateur et une résistance était l'un des exemples d'oscillateur harmonique amorti qu'on a discutés dans le volume 1, chapitre 7. Nous pouvons maintenant voir exactement ce qui se passe dans ce système. Le diagramme de circuit de la figure 8.1 représente un tel circuit « R, L, C en série ».

Soit Q la charge du condensateur de ce circuit à l'instant t. La différence de potentiel ou tension entre les bornes du condensateur est V; elle est évidemment égale à celle aux bornes de la combinaison self-inductance L et résistance R en série. Nous prenons V positif quand l'armature supérieure du condensateur est chargée positivement, et nous définissons la direction positive du courant au

moyen de la flèche sur la figure 8.1. Ayant ainsi choisi les signes, les relations entre la charge Q, le courant I et la tension V aux Fig. 8.1 Un circuit « RLC en série ».

$$I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \qquad Q = CV \qquad V = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI \tag{8.1}$$

Nous voulons éliminer deux des trois variables Q, I et V. D'après les deux premières équations, nous obtenons I = -CdV/dt, et la troisième équation devient $V = -LC (d^2 V/dt^2) - RC (d V/dt)$, soit

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R}{L}\right)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{1}{LC}\right)V = 0 \tag{8.2}$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Essayons une solution de la forme

$$V = A e^{-\omega t} \cos \omega t \tag{8.3}$$

où A, α et ϖ sont des constantes. Les dérivées première et seconde de cette fonction sont

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = A \mathrm{e}^{-\alpha t} \left[-\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t \right]$$
(8.4)
$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}t^2} = A \mathrm{e}^{-\alpha t} \left[(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha \omega \sin \omega t \right]$$
(8.5)

En les mettant dans l'équation 8.2 et en supprimant le facteur commun A $e^{-\alpha t}$ il nous reste

$$(\alpha^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\alpha\omega\sin\omega t - \frac{R}{L}(\alpha\cos\omega t + \omega\sin\omega t) + \frac{1}{LC}\cos\omega t = 0$$
(8.6)

Cela sera satisfait pour tous les t, si, et seulement si, les coefficients de sin ϖt et de cos ϖt sont tous les deux nuls. C'est-à-dire, nous devons imposer que

$$2\alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0 \tag{8.7}$$

et

$$\alpha^2 - \omega^2 - \alpha \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8.8}$$

La première de ces équations donne une condition sur α :

$$\alpha = \frac{R}{2L} \tag{8.9}$$

tandis que la seconde impose que

$$\omega^{2} = \frac{1}{LC} - \alpha \frac{R}{L} + \alpha^{2} = \frac{1}{LC} - \frac{R^{2}}{4L^{2}}$$
(8.10)

Comme notre constante ϖ est un nombre réel, ϖ^2 ne peut être négatif. Par conséquent, nous ne réussirons à obtenir une solution de la forme supposée dans l'équation 8.3 que si $R^2/4L^2 * 1/LC$. En fait, c'est le cas de l'« amortissement faible », c'est-à-dire d'une petite résistance, que nous voulons examiner. Nous supposons donc que les valeurs de *R*, *L* et *C* pour ce circuit soient telles que l'inégalité $R \langle 2\sqrt{L/C} \rangle$ s'applique.

La fonction $Ae^{-\alpha t} \cos \omega t$ n'est pas la seule solution possible. $Be^{-\alpha t} \sin \omega t$ marche tout aussi bien, avec les mêmes conditions, équations 8.9 et 8.10, pour α et ω respectivement. La solution générale est la Somme de celles-ci

$$V(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$
(8.11)

On pourrait ajuster les constantes arbitraires A et B en vue de satisfaire les conditions initiales. Cela n'est pas très intéressant. Savoir si dans un cas donné la solution fait intervenir la fonction sinus ou cosinus, ou une certaine superposition des deux, n'est qu'une question triviale de mise à l'heure de l'horloge. Le phénomène essentiel est une oscillation sinusoïdale amortie.

La figure 8.2 a montre la variation de la tension avec le temps. Bien sûr, cela ne peut pas s'appliquer réellement pour tout le passé. A un certain moment du passé on a dû fournir de l'énergie à ce circuit d'une certaine façon, et on l'a laissé évoluer. Par exemple, on aurait pu charger le condensateur, le circuit étant ouvert, puis le connecter à la bobine.

Sur la figure 8.2 b, on a dilaté l'échelle des temps, et on a ajouté la courbe en pointillé qui montre la variation du courant I. Prenons pour V le cosinus amorti, équation 8.3. Le courant à un certain instant est alors donné par

$$I = -C \frac{dV}{dt} = AC\omega \left(\sin\omega t + \frac{\alpha}{\omega}\cos\omega t\right) e^{-\alpha t}$$
(8.12)

Le rapport α/ϖ est une mesure de l'amortissement. Si α/ϖ est très petit, beaucoup d'oscillations se produisent tandis que l'amplitude ne diminue qu'un peu. Pour la figure 8.2, nous avons choisi un cas où $\alpha/\varpi \approx 0,04$. Le terme en cosinus dans l'équation 8.12 ne compte alors pas beaucoup. Tout ce qu'il produit, en effet, est une variation de phase d'un petit angle, Arc tg (α/ϖ) . Ainsi l'oscillation du courant est presque déphasée d'un quart de cycle par rapport à l'oscillation de la tension.

L'oscillation fait intervenir un va-et-vient d'énergie entre le condensateur et la self-inductance, ou entre champ électrique et champ magnétique. Aux instants marqués 1 sur la figure 8.2 b, toute l'énergie est dans le champ électrique. Un quart de cycle plus tard, en 2, le condensateur est déchargé et presque toute l'énergie se trouve dans le champ magnétique de la bobine. Pendant ce temps, la résistance R du circuit prend sa part, et à mesure que l'oscillation continue, l'énergie qui reste dans les champs diminue graduellement.

On exprime souvent l'amortissement relatif dans un oscillateur en donnant un nombre qu'on appelle Q. On l'a introduit dans la discussion générale des oscillateurs harmoniques dans le volume 1, chapitre 7. On dit que Q (qu'on ne doit pas confondre avec la charge du condensateur) représente la « qualité » ou le a facteur de surtension ». Plus l'amortissement est petit plus le nombre Q est grand. Pour un oscillateur de fréquence ϖ , Q est le rapport sans dimension qu'on forme ainsi



(b) Portion de (a) avec une échelle de temps agrandie à. laquelle on a ajouté la courbe du

(c) Transfert périodique d'énergie du champ électrique vers le champ magnétique et vice versa. Chaque image représente les conditions aux instants marqués en (b) avec les

 $Q = \omega \frac{\text{énergie emmagasinée}}{\text{puissance moyenne dissipée}}$ (8.13)

Ou bien, vous pouvez préférer vous rappeler que Q est le nombre de radians de l'argument $\overline{\sigma t}$ (c'est-à-dire 2 π fois le nombre de cycles) qu'il faut pour que l'énergie de l'oscillateur diminue d'un facteur 1/e.

Dans notre circuit l'énergie emmagasinée est proportionnelle à V^2 ou I^2 , donc à $e^{-2\alpha t}$ L'énergie décroît de 1/e en un temps t = 1/2 α qui couvre $\omega/2\alpha$ radians. D'où pour notre circuit *RLC*

$$Q = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\omega L}{R} \tag{8.14}$$

Comme estimation grossière, quel est le Q de l'oscillation représentée sur la figure 8.2?

Il est clair que le cas général que nous venons juste d'étudier recouvre des cas spéciaux simples. Si R = 0 nous avons l'oscillateur sans aucun amortissement, dont la fréquence ω_0 est donnée par

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{8.15}$$

La plupart du temps, nous avons affaire à des systèmes dans lesquels l'amortissement est assez petit pour qu'on puisse le négliger quand on calcule la fréquence. Comme le problème 8.9 le montrera, l'amortissement n'a qu'un effet du

C = 0,01 microfarad L = 100 microhenrys(a) C = 0,01 microfarad L = 100 microhenrys(b) C = 0,01 microfarad L = 100 microhenrys(c)

courant I.

nombres correspondants.

Fig. 8.3 (a) Le condensateur étant chargé, on ferme l'interrupteur à t = 0. (*b*) On présente quatre cas, l'un d'eux, R = 200 ohms, étant celui de l'amortissement critique.

second ordre sur ω .

Pour être complet, nous allons brièvement rappeler ce qui se passe dans le circuit suramorti, dans lequel $R \rangle 2\sqrt{L/C}$. L'équation 8.2 admet alors une solution de la forme $V = A e^{-\beta t}$ pour deux valeurs de β , la solution générale étant

$$V(t) = Ae^{-\beta_1 t} + Be^{-\beta_2 t}$$
(8.16)

Il n'y a pas d'oscillations, seulement une décroissance monotone. Dans le cas spécial de l'amortissement « critique » $R = 2\sqrt{L/C}$, $\beta_I = \beta_2$, et la solution de l'équation différentielle, équation 8.2, prend la forme

$$V(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}$$
 (8.17)

Pour un L et un C donnés, c'est la condition pour laquelle l'énergie totale dans le circuit est dissipée le plus rapidement (voir prob. 8.8).

Vous pouvez voir tout cet ensemble de comportements sur la figure 8.3 où on a porté V(t) pour deux circuits sous-amortis, un circuit à l'amortissement critique et un circuit sur-amorti. Le condensateur et la self-inductance restent les mêmes, seule la résistance

varie. La pulsation naturelle $\omega_0 = 1/\sqrt{L/C}$ est 10⁶ s⁻¹ pour ce circuit, ce qui correspond à une fréquence en Hertz de 10⁶/2 π , soit 159 KHz.

On a fait partir le circuit en chargeant le condensateur à une différence de potentiel de 1 volt, par exemple, et en fermant l'interrupteur à t = 0, c'est-à-dire qu'une condition initiale est V = 1 à t = 0. Aussi, I = 0 à t = 0, car la self-inductance empêchera le courant de croître de façon discontinue. Par conséquent, l'autre condition initiale sur V est dV/dt = 0 à t = 0. Remarquez que les quatre courbes d'amortissement démarrent toutes de la même façon. Dans le cas fortement amorti (R = 600 ohms) la plus grande partie de la courbe d'amortissement ressemble à l'amortissement exponentiel simple d'un circuit RC. Seul le tout début, où la courbe est arrondie de telle sorte qu'elle parte avec une pente nulle, trahit la présence de la self-inductance L.

8.2 Courant alternatif



Fig. 8.4 Un circuit avec une self-inductance entretenu par une force électromotrice alternative.

Le circuit résonnant que nous venons de discuter ne contenait pas de source d'énergie, il est par conséquent condamné à une activité *transitoire*, une oscillation qui doit mourir plus ou moins tard. Dans un circuit en courant alternatif, nous nous occupons *d'un état stationnaire*, un courant et une tension oscillant sinusoïdalement sans variation de l'amplitude. Une certaine force électromotrice alternative entraîne le système.

Appliquons une force électromotrice $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$ à un circuit qui contient une self-inductance et une résistance. Nous pourrions générer ε avec une machine ressemblant schématiquement à celle de la figure 7.13, en y ajoutant un moteur qui fasse tourner l'arbre à vitesse angulaire constante ω . On a représenté sur la figure

8.4 la force électromotrice couplée au circuit. Nous négligerons toute résistance interne du générateur, ou l'inclurons dans R. Nous posons que la somme des chutes de potentiel dans les éléments du circuit est égale à la force électromotrice ε , exactement comme nous l'avons fait en développant l'équation 7.58. L'équation qui gouverne le courant est alors

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = \varepsilon_0 \cos\omega t \tag{8.18}$$

Il peut y avoir un certain comportement transitoire, dépendant des conditions initiales, c'est-à-dire de quand et de comment on a branché le circuit. Mais nous ne nous intéressons qu'au régime stationnaire, quand le courant oscille en obéissant à la fréquence de la force d'entretien, avec l'amplitude et la phase nécessaires pour que l'équation 8.18 soit satisfaite. Pour montrer que c'est possible, considérons un courant décrit par



Fig. 8.5 Le courant I, dans le circuit de la figure 8.4,

représenté en même temps que la force électromotrice **E** avec la même échelle de temps. Remarquez la différence de phase.

$$I = I_0 \cos\left(\omega t + \varphi\right) \tag{8.19}$$

Pour déterminer les constantes I_0 et φ , nous mettons cela dans l'équation 8.18

$$-LI_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) + RI_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$
(8.20)

On peut séparer les fonctions $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$

$$-LI_0 \ \omega (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) + RI_0 (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi)$$
$$= \varepsilon_0 \cos \omega t \qquad (8.21)$$

En égalant séparément les coefficients de $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$ à zéro,

$$LI_0 \ \omega \cos \varphi - RI_0 \ \omega \sin \varphi = 0 \tag{8.22}$$

ce qui donne

$$tg\varphi = -\frac{\omega L}{R}$$
(8.23)

$$-LI_0 \ \omega \sin \varphi + RI_0 \cos \varphi \cdot \varepsilon_0 = 0 \tag{8.24}$$

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R\cos\varphi - \omega L\sin\varphi} = \frac{\varepsilon_0}{R(\cos\varphi + \sin\varphi \,\mathrm{tg}\varphi)} = \frac{\varepsilon_0\cos\varphi}{R}$$
(8.25)

ou, puisque

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{d'après l'équation 8.23}$$
(8.26)

$$I_{0} = \frac{\varepsilon_{0}}{\sqrt{R^{2} + \omega^{2}L^{2}}}$$
(8.27)



On a tracé sur la figure 8.5, les oscillations de ε et de *I* sur le même graphique. Comme φ est un angle négatif, le courant atteint son maximum un peu plus tard que la force électromotrice. On dit que « le courant est en retard par rapport à la tension dans un circuit inductif ». On appelle réactance inductive la quantité ωL qui a les dimensions d'une résistance qu'on peut exprimer en ohms.

Si nous remplaçons la self-inductance L par un condensateur C, comme sur la figure 8.6, nous avons un circuit gouverné par l'équation

$$-\frac{Q}{C} + RI = \varepsilon_0 \cos \omega t \qquad (8.28)$$

Fig. 8.6 Une force électromotrice alternative

Considérons la solution stationnaire

$$I = I_0 \cos\left(\omega t + \varphi\right) \tag{8.29}$$

Comme I = -dQ/dt, nous avons

$$Q = -\int I \, \mathrm{d}t = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \tag{8.30}$$

Remarquez qu'en passant de I à Q par intégration, il n'est pas question d'ajouter une constante d'intégration, car nous savons que Q doit osciller de façon symétrique autour de zéro dans le régime stationnaire.



Fig. 8.7 Le courant dans le circuit *RC*. Comparez la différence de phase ici présente à celle qu'on trouve dans le circuit inductif de la figure 8.5.

En introduisant cela dans l'équation 8.28, on obtient

$$-\frac{I_0}{\omega C}\sin(\omega t + \varphi) + RI_0\cos(\omega t + \varphi) = \varepsilon_0\cos\omega t$$
(8.31)

Juste comme avant, nous obtenons des conditions sur φ et sur I_0 en posant que les coefficients de cos ωt et de sin ωt s'annulent séparément. Dans ce cas, les résultats sont

$$tg\varphi = \frac{1}{R\omega C} \quad (8.32)$$

$$I_{0} = \frac{\varepsilon_{0}}{\sqrt{R^{2} + (1/\omega C)^{2}}}$$
(8.33)

Remarquez que l'angle de phase est positif maintenant. Comme on le dit, le courant « est en avance sur la tension » dans un circuit capacitif. Ce que cela veut dire est apparent sur la figure 8.7.

Mathématiquement parlant, la fonction

$$I = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{Arctg}\frac{\omega L}{R}\right)$$
(8.34)

est une solution particulière de l'équation différentielle homogène, équation 8.18. On peut lui ajouter une solution générale, c'est-à-dire toute solution de l'équation différentielle homogène

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = 0 \tag{8.35}$$

Or c'est juste l'équation 7.62 dont nous avons trouvé, dans la section 7.9, la solution qui est une fonction qui décroît exponentiellement

$$I \approx \mathrm{e}^{-(R/L)t} \tag{8.36}$$



Fig. 8.8 La self-inductance et la capacité en série sont équivalentes à un seul élément réactif qui est soit une self-inductance soit une capacité selon que $\omega^2 LC$ est plus grand ou plus petit que 1.



Fig. 8.9 Le circuit *RLC* entretenu par une force électromotrice sinusoïdale.

La signification physique est la suivante : on a une réponse transitoire. déterminée par les conditions initiales, qui est représentée par une composante de I(t) qui s'amortit, de la forme de l'équation 8.36. Puis après un temps t tm L/R, elle aura disparu, et il ne restera que l'oscillation sinusoïdale stationnaire à la fréquence d'entretien, représentée par la solution particulière, équation 8.34.

La similarité de nos résultats pour le circuit *RL* et le circuit *RC* suggère une façon de considérer la self-inductance et le condensateur en série. Supposons qu'on fasse passer d'une certaine façon un courant alternatif $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ à travers une telle combinaison (montrée sur la figure 8.8). La tension aux bornes de la self-inductance V_L est

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = -I_0 \omega L \sin(\omega t + \varphi)$$
(8.37)

La tension aux bornes du condensateur, avec un signe compatible avec celui de V_L est

$$V_C = -\frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I \, \mathrm{d}t = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi) \tag{8.38}$$

La tension aux bornes de la combinaison est alors

$$V = V_L + V_C = -\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$
(8.39)

Pour un \varpi donné, la combinaison est évidemment équivalente à un élément unique,

soit une self-inductance soit un condensateur suivant que la quantité (ϖL -1/ ϖC) est positive ou négative. Supposons par exemple que $\varpi L > 1/\varpi C$. La combinaison est alors équivalente à une self-inductance L' telle que

$$\omega L' = \omega L - \frac{1}{\omega C} \tag{8.40}$$

L'équivalence veut *seulement* dire que la relation entre courant et tension, pour une oscillation stationnaire à la fréquence particulière σ , est la même. Cela nous permet de remplacer *L* et *C* par *L'* dans tout circuit entretenu à cette fréquence.

On peut appliquer cela au circuit *RLC* simple de la figure 8.9. Nous n'avons qu'à nous souvenir des équations 8.23 et 8.27, solution du circuit *RL* entretenu par la force électromotrice $\varepsilon_0 \cos \omega t$ et remplacer ωL par ωL -1 / ωC

$$I = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$
(8.41)
$$tg\varphi = \frac{1}{R\omega C} - \frac{\omega L}{R}$$
(8.42)

Pour une amplitude fixe ε_0 de la force électromotrice, et des éléments de circuit donnés *L*, *C* et *R*, nous obtenons le courant maximum quand la fréquence d'entretien est telle que

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \tag{8.43}$$

ce qui équivaut à dire que $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$, fréquence de résonance du circuit *LC* non amorti. Dans ce cas, l'équation 8.39 se réduit à



Fig. 8.10 On applique une f.e.m. de 100 volts d'amplitude à un circuit *RLC* série. Les éléments du circuit sont les mêmes que dans l'exemple du circuit amorti de la figure 8.3. On a calculé l'amplitude au moyen de l'équation 8.41 et on l'a représentée en fonction de ω/ω_0 , pour trois valeurs différentes de la résistance.

$$I = \frac{\varepsilon_0 \cos \omega t}{R} \tag{8.44}$$

C'est exactement le courant qui passerait si le circuit contenait seulement la résistance.

Comme exemple, considérons le circuit de la figure 8.3 a relié maintenant à une source ou générateur de f.e.m alternative, $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \sigma t$. La fréquence d'entretien peut être différente de la fréquence de résonance $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, qui pour le condensateur donné (0,01 microfarads) et la self-inductance donnée (100 microhenrys), est 10⁶ radians/s (ou 10⁶/2 π Hertz). La figure 8.10 montre l'amplitude du courant oscillant, en fonction de la fréquence d'entretien ϖ , pour trois valeurs différentes de la résistance R du circuit. On a supposé que l'amplitude de la f.e.m. est de 100 volts dans tous les cas. Remarquez le pic de résonance pour $\varpi = \varpi_0$, qui est le plus important et pointu pour la valeur la plus faible de la résistance. C'est la même valeur de R que celle pour laquelle le circuit, fonctionnant en oscillateur amorti sans f.e.m. d'entretien, se comportait comme le montre le graphique du haut de la figure 8.3 Le Q du circuit, défini comme $\varpi_0 L/R$ par l'équation 8.14 (³⁰) est (10⁶ x 10⁻⁴)/20 soit 5 dans ce cas. Pour parler de façon générale, plus le Q du circuit est grand, plus le pic de sa réponse en fonction de la fréquence d'entretien ϖ est étroit et élevé. Pour être plus précis, considérons les fréquences au voisinage de ϖ_0 en écrivant $\varpi = \varpi_0 + \Delta \varpi$. Alors au premier ordre en $\Delta \varpi/\varpi_0$ on peut approximer l'expression $\varpi L-1/\varpi C$ qui apparaît au dénominateur dans l'équation 8.41, de la façon suivante

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L \left(1 + \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \right) - \frac{1}{\omega_0 C (1 + \Delta \omega / \omega_0)}$$
(8.45)

et comme ϖ_0 est $1/\sqrt{LC}$, cela devient

$$\omega_0 L \left[1 + \frac{\Delta \omega}{\omega_0} - \frac{1}{1 + \Delta \omega / \omega_0} \right] \approx \omega_0 L \left(2 \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \right)$$
(8.46)

Exactement à la résonance, la quantité sous le signe racine carrée dans l'équation 8.41 est juste R^2 . Quand on éloigne de la résonance, la quantité sous la racine carrée aura doublé quand $|\varpi L-1/\varpi C| = R$ ou quand, approximativement



Fig. 8.11 Variation de l'angle de phase avec la fréquence dans le circuit de la figure 8.10.



Fig. 8.12 Un réseau en courant alternatif.

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q}$$
(8.47)

Cela veut dire que l'amplitude du courant sera tombée à $1/\sqrt{2}$ fois le pic quand $\Delta \varpi / \varpi_0 = \frac{1}{2} Q$. Ce sont les points « à mi-puissance », car l'énergie, ou la puissance, est proportionnelle au carré de l'amplitude, comme nous l'expliquerons dans la section 8.5. On exprime souvent la largeur du pic de résonance en donnant la largeur totale entre points à mi-puissance. Évidemment cela est juste 1/Q fois la fréquence de résonance elle-même. Les circuits avec des Q

beaucoup plus grands que celui-ci sont tout à fait courants. Un récepteur radio peut sélectionner une station particulière parmi d'autres à l'aide d'un circuit résonnant dont le Q vaut plusieurs

centaines. Il est facile de faire une cavité résonnante pour micro-ondes avec un Q de 10^4 , ou même de 10^5 .

L'angle ω , qui exprime la phase relative entre les oscillations de courant et de f.e.m., varie avec la fréquence de la manière indiquée sur la figure 8.11. A très basse fréquence, le condensateur est l'obstacle dominant qui s'oppose à l'écoulement du courant et ω est positif. A la résonance $\omega = 0$. Plus le Q est grand, plus la phase ω varie abruptement entre les angles positifs et négatifs quand on fait croître la fréquence en passant par ϖ_0 .

8.3 Réseaux en courant alternatif

Un réseau en courant alternatif est un ensemble de résistances, condensateurs et self-inductances dans lesquels passent des courants qui oscillent régulièrement à une fréquence constante ϖ . Une ou plusieurs

forces électromotrices, à cette fréquence, entretiennent l'oscillation. La figure 8.12 est un schéma d'un tel réseau. On représente la source de force électromotrice alternative par le symbole.

³⁰ Dans l'équation 8.14 le ϖ était la fréquence de l'oscillateur amorti en train de décroître librement; ϖ est pratiquement égal à ϖ_0 pour un amortissement faible ou modéré. Nous utilisons ici ϖ_0 dans la définition de Q. Dans la discussion présente ϖ est *n'importe quelle* fréquence que nous choisissons d'appliquer au circuit.
Dans une branche du réseau, par exemple la branche qui contient la self-inductance L_2 , le courant en fonction du temps est

$$I_2 = I_{02} \cos(\omega t + \varphi_2) \tag{8.48}$$

Comme la fréquence est constante dans tout le réseau, il suffit de deux nombres, tels que l'amplitude I_{02} et la constante de phase ω_2 ci-dessus, pour déterminer le courant à tout instant dans une branche particulière. De même, la tension aux bornes d'une branche oscille avec une certaine amplitude et une certaine phase

$$V_2 = V_{02} \cos(\omega t + \theta_2)$$
 (8.49)

Si nous avons déterminé les courants et les tensions dans toutes les branches d'un réseau, nous l'avons complètement analysé. Bien sûr, il est possible de les trouver en établissant et en résolvant toutes les équations différentielles appropriées; si nous nous intéressions au comportement transitoire du réseau, nous devrions peut-être faire quelque chose de ce genre. Cependant, pour le régime stationnaire, nous pouvons nous servir d'une méthode beaucoup plus simple et plus élégante. Elle est fondée sur deux idées

i) On peut présenter un courant ou une tension alternatifs par un nombre complexe.

ii) On peut caractériser toute branche ou élément du circuit, à une fréquence donnée, par la relation entre la tension et le courant dans cette branche.

La première idée exploite l'identité mathématique remarquable selon laquelle

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \qquad (8.50)$$

avec $i^2 = -1$. Pour l'utiliser, nous adoptons la règle de représentation suivante

On doit *représenter* un courant alternatif $I_0 \cos(\varpi t + \omega)$ par le nombre complexe $I_0 e^{i\omega}$, c'est-à-dire le nombre dont la partie réelle

est $I_0 \cos \omega$ et dont la partie imaginaire est $I_0 \sin \omega$.

Dans l'autre sens, si le nombre complexe x + iy représente un courant *I*, alors le courant est donné en fonction du temps par la partie réelle du produit $(x + i y) e^{i\omega t}$

La figure 8.13 permet de se rappeler de cette correspondance à double-sens. Comme on peut représenter graphiquement un nombre complexe x + iy sur un plan à deux dimensions, il est facile de se représenter la constante de phase comme l'angle Arc

tg y/x, et l'amplitude comme le module $\sqrt{x^2 + y^2}$.



Fig. 8.13 Règles de représentation d'un courant alternatif au moyen d'un nombre complexe.

d'après notre règle, représentent I_1 et I_2 , est

Ce qui rend tout cela utile est le fait suivant : la représentation de la somme de deux courants est la somme de leurs représentations. Considérons la somme des deux courants I_1 et I_2 qui se rencontrent à la jonction des fils sur la figure 8.12. A tout instant t la somme des courants est

$$I_{1}+I_{2}=I_{01}\cos(\omega t + \varphi_{1})+I_{02}\cos(\omega t + \varphi_{2})=(I_{01}\cos\varphi_{1}+I_{02}\cos\varphi_{2})\cos\omega t - (I_{01}\sin\varphi_{1} + I_{02}\sin\varphi_{2})\sin\omega t - (I_{01}\sin\varphi_{1} + I_{02}\sin\varphi_{2})\sin\omega t$$
(8.51)

D'autre part, la somme des nombres complexes qui,

$$I_{01} e^{i\varphi I} + I_{01} e^{i\varphi Z} = (I_{01} \cos \varphi_1 + I_{02} \cos \varphi_2) + i(I_{01} \sin \varphi_1 + I_{02} \sin \varphi_2)$$
(8.52)

Si vous multipliez le côté droit de l'équation 8.52 par (cos ϖt + i sin ϖt) et que vous prenez la partie réelle du résultat, vous obtiendrez juste ce qui apparaît à droite dans l'équation 8.51.

Cela veut dire qu'au lieu d'additionner ou de soustraire les fonctions périodiques du temps elles-mêmes, nous pouvons additionner ou soustraire les nombres complexes qui les représentent. Ou autrement dit, il se trouve que l'algèbre des courants alternatifs est la même que l'algèbre des nombres complexes, en ce qui concerne l'addition. On *ne* peut *pas* étendre la correspondance à la multiplication. Le nombre complexe $I_{01}I_{02}e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ ne représente pas le produit des deux fonctions courant dans l'équation 8.51.

Cependant, nous n'avons besoin de faire que des sommes de courants ou de tensions dans l'analyse des réseaux. Par exemple, à la jonction où I_1 rencontre I_2 sur la figure 8.12, il y a la condition physique qu'à tout instant le flux total de courant vers la jonction doit être nul. Par conséquent la condition

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \tag{8.53}$$

doit s'appliquer, où I_1 , I_2 et I_3 sont les *vraies fonctions périodiques du temps*. Grâce à notre correspondance, on peut l'exprimer avec un énoncé algébrique simple, selon lequel la somme de trois nombres complexes est nulle. On peut manipuler les tensions de la même façon. Instantanément, la somme des chutes de potentiel le long de toute boucle du réseau doit être égale à la force électromotrice dans la boucle à cet instant. On peut de la même façon remplacer cette condition qui relie des fonctions périodiques de tension par un énoncé sur la somme de quelques nombres complexes, les représentations des diverses fonctions oscillantes, $V_1(t)$, $V_2(t)$, etc.

8.4 Admittance et impédance

On peut exprimer la relation entre le courant qui passe dans un élément du circuit et la tension aux bornes de cet élément sous la forme d'une relation entre les nombres complexes qui représentent la tension et le courant. Considérons la combinaison self-inductance-résistance de la figure 8.4. On représente l'oscillation de la tension par ε_0 et le courant par $I_0 e^{i\varphi}$ où $I_0 = \varepsilon_0 / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ et Arc tg $\varphi = \omega L/R$. La différence de phase φ et le rapport de l'amplitude du courant et de celle de la tension sont des propriétés du circuit à cette fréquence. Nous définissons un nombre complexe Y de la façon suivante

$$Y = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{avec} \quad \varphi = \text{Arctg}\left(-\frac{\omega L}{R}\right)$$
(8.54)

Alors la relation

I = YV (8.55)

s'applique, où *V* est le nombre complexe qui représente la tension aux bornes de la combinaison de *R* et *L*, et où *I* est le nombre complexe qui représente le courant. On appelle *Y* admittance. On peut exprimer la même relation avec l'inverse de *Y*, qu'on représente par *Z* et qu'on appelle *impédance*

$$V = \left(\frac{1}{Y}\right)I = ZI \tag{8.56}$$

lci nous nous sommes servis du produit de deux nombres complexes, mais un seul des deux nombres représente un courant ou une tension alternatif. L'autre est l'impédance ou l'admittance $\binom{31}{2}$.

On mesure l'impédance en ohms. En effet, si le circuit ne comprenait que la résistance R seule, l'impédance serait réelle et simplement égale à R, de sorte que l'équation 8.56 ressemblerait à la loi d'Ohm pour un circuit en courant continu : V = RI.

³¹ Notre algèbre contient donc deux catégories de nombres complexes, ceux qui représentent les impédances par exemple, et ceux qui représentent les courants. Le produit de deux « nombres pour impédances » comme le produit de deux « nombres pour courants » ne représente rien du tout.

L'admittance d'une self-inductance sans résistance est la quantité imaginaire $Y=-i/\omega L$. On peut le voir en faisant tendre *R* vers zéro dans l'équation 8.54. Le facteur - i montre que l'oscillation du courant a un retard de phase de $\pi/2$ par rapport à la tension. Sur le diagramme des nombres complexes, si on représente la tension par V (fig. 8.14 b), on pourrait représenter le courant par 1, localisé comme on le montre ici. Pour un condensateur $Y = i\omega C$, comme on peut le voir à partir de l'expression du courant sur la figure 8.7. Dans ce cas V et I sont reliés comme l'indique la figure 8.14 *c*. La légende sur chacune de ces figures montre comment on doit spécifier les signes relatifs de V et de I. Si on ne le fait pas de façon cohérente, les termes « en avance » et « en retard » n'ont pas de sens. Remarquez que nous définissons toujours la direction positive du courant telle qu'une tension positive appliquée à une résistance produise un courant positif (fig. 8.14 a).

Les propriétés des trois éléments de base des circuits sont résumées ci-dessous

Symbole	Admittance, Y	Impédance, Z=1/Y
R	1/R	R
L	-i/ <i>@L</i>	iωL
С	i <i>w</i> C	-i/ <i>@</i> C
	I=YV	V=ZI



Fig. 8.14 V et *I* sont des nombres complexes qui représentent la tension aux bornes d'un élément du circuit et le courant qui le traverse. La phase relative entre le courant et la tension est manifestée ici par l'angle entre les « vecteurs ». (*a*) Dans la résistance, le courant et la tension sont en phase.

(b) Dans la self-inductance, le courant est en retard par rapport à la tension.

(c) Dans le condensateur, le courant est en avance sur la tension.

Nous pouvons construire n'importe quel circuit à partir de ces éléments. Quand on relie en parallèle les éléments ou les combinaisons d'éléments, il est commode d'utiliser l'admittance, car dans ce cas les admittances s'ajoutent. Sur la figure 8.15 on a relié en parallèle deux « boîtes noires » d'admittance Y_1 et Y_2 . Nous avons alors

$$I = I_1 + I_2 = Y_1 V + Y_2 V = (Y_1 + Y_2)V$$
(8.57)

ce qui implique que la seule boîte noire équivalente a l'admittance $Y = Y_1 + Y_2$. D'après la figure 8.16, il sera évident que les impédances s'ajoutent pour les éléments reliés *en série*. Tout cela ressemble à ce que nous dirions pour un circuit en courant continu! En fait, nous avons maintenant réduit le problème du réseau en courant alternatif en un problème de réseau en courant continu, avec cette seule différence

les nombres que nous manipulons sont des nombres complexes. Comme exemple, considérons le circuit « *RLC* en parallèle » de la figure 8.17. L'admittance combinée des trois branches en parallèle est

$$Y = \frac{1}{R} + i\,\omega C - \frac{i}{\omega L} \tag{8.58}$$

La tension est simplement ε_0 , de sorte que le courant complexe est

$$I = YV = \varepsilon_0 \left[\frac{1}{R} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]$$
(8.59)

L'amplitude de l'oscillation du courant est le module du nombre complexe *I*, soit $\varepsilon_0 [(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2]^{1/2}$ et l'angle de phase est Arctg $(R\omega C - R/\omega L)$.

Nous ne pouvons opérer de cette façon qu'avec des éléments de circuit linéaires, des éléments dans lesquels le courant est proportionnel à la tension. En d'autres termes, notre circuit doit être décrit par une équation différentielle linéaire. Vous ne pouvez même pas définir une impédance pour un élément nonlinéaire. Les éléments de circuit nonlinéaires sont des appareils très importants et intéressants. Vous en avez étudié quelques-uns aux travaux pratiques, et vous pouvez voir pourquoi ils ne se plient pas à ce genre d'analyse.

Ceci repose aussi sur une oscillation continue à fréquence constante. Le comportement transitoire du circuit est un problème différent. Cependant, les outils que nous venons de développer ont quelque utilité, même pour les transitoires. La raison est qu'en superposant des oscillations permanentes à de nombreuses fréquences, nous pouvons représenter un comportement non permanent. on peut ainsi calculer la réponse à chaque fréquence individuelle comme si seule cette fréquence était présente. Nous laissons cela pour le volume III.

8.5 Puissance et énergie dans les circuits en courant alternatif

Si la tension aux bornes d'une résistance R est $V_0 \cos \omega t$ le courant est $I = (V_0/R) \cos \omega t$. La puissance instantanée qui est le taux de dissipation de l'énergie dans la résistance est



Fig. 8.15 Combinaison d'admittances en parallèle.



Fig. 8.16 Combinaison d'impédances en série.



Fig. 8.17 Un circuit résonnant « parallèle ». On ajoute les admittances complexes des trois éléments, comme dans l'équation 8.58.

$$P = RI^2 = \frac{V_0^2}{R} \cos^2 \omega t \qquad (8.60)$$

Comme la moyenne de $\cos^2 \omega t$ sur de nombreux cycles est 1/2, la puissance moyenne dissipée dans le circuit est

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} \tag{8.61}$$

On exprime d'habitude la tension et le courant dans les circuits en courant alternatif en donnant non pas l'amplitude mais $1/\sqrt{2}$ fois l'amplitude. On l'appelle souvent racine carrée de la valeur quadratique moyenne ou « valeurs efficace ». Cela englobe le facteur 1/2 dans l'équation 8.61, d'où

$$\overline{P} = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R} \tag{8.62}$$

Par exemple, la tension commune des lignes domestiques, 220 volts, correspond à une *amplitude* de $220\sqrt{2}$ volts. La différence de potentiel entre les bornes de la prise de courant dans votre chambre (si la tension est normale) est

$$V(t)=311\cos 314t$$
 (8.63)

avec *V* en volts et *t* en secondes. Un ampèremètre alternatif est calibré pour indiquer 1 amp. quand l'amplitude du courant est 1,414 ampères.

En général, le taux instantané auquel l'énergie est fournie à un élément de circuit est VI, produit de la tension par le courant instantanés, avec les signes convenables. Considérons cet aspect du passage du courant dans un circuit LR simple sur la figure 8.4. Sur la figure 8.18, nous avons retracé les graphiques du courant et de la tension, et ajouté une courbe proportionnelle au produit VI. Un VI positif veut dire que de l'énergie est transférée à la combinaison LR à partir de la source de force électromotrice, ou générateur. Remarquez que VI est négatif dans certaines parties du cycle. Dans ces périodes une certaine énergie est renvoyée au générateur. On l'explique par l'oscillation de l'énergie emmagasinée dans le champ magnétique de la self-inductance. Cette énergie emmagasinée (1/2)LP passe deux fois par un maximum au cours de chaque cycle complet.

La puissance moyenne \overline{P} correspond à la ligne horizontale en pointillés. Pour calculer sa valeur, considérons le produit *VI* avec $V = \varepsilon_0 \cos \omega t$ et $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$

$$VI = \varepsilon_0 I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \varepsilon_0 I_0 (\cos^2 \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \omega t \sin \varphi)$$
(8.64)

Le terme proportionnel à cos $\omega t \sin \omega t$ a une moyenne temporelle nulle, ce qui est évident si vous l'écrivez sous la forme 1/2 sin 2 ωt , tandis que la moyenne de cos² ωt est 1/2. Nous avons ainsi comme moyenne temporelle

$$\overline{P} = \overline{VI} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 I_0 \cos\varphi \qquad (8.65)$$

Si on exprime à la fois le courant et la tension en valeurs efficaces, respectivement en volts et ampères,



Fig. 8.18 La puissance instantanée VI est le taux de transfert d'énergie de la source de force électromotrice de gauche vers les éléments du circuit à droite. La ligne horizontale en pointillés indique la moyenne temporelle de la puissance.

i i i i

ν

v



Dans ce circuit toute l'énergie dissipée va dans la résistance R. Naturellement, toute self-inductance réelle a une certaine résistance. Dans le but d'analyser le circuit nous l'avons incluse dans la résistance R. Bien sûr, la chaleur se dégage à l'endroit réel de la résistance.

Pour s'entraîner avec les méthodes que nous avons développées dans la section 8.4, nous allons analyser le circuit de la figure 8.19 a. On a relié une résistance de 1 W de 10 000 ohms à deux condensateurs de 0,2 et 0,5 microfarads (μ F) de capacité. Nous nous proposons de mettre la fiche dans une prise de 120 volts, 50 Hertz. Question : la résistance de 1 W deviendra-t-elle trop chaude ? En vue de trouver si la puissance moyenne dissipée dans *R* dépasse l'indication de 1 watt, nous calculerons quelques-uns des



Fig. 8.19 Un réseau réel (a) prêt à être connecté à une source de force électromotrice, et (b) le schéma du circuit.

courants et des tensions que nous nous attendrions à mesurer dans ce circuit. On donne ci-dessous les grandes lignes d'une façon de traiter ce circuit.

Admittance de
$$C_2 = i \omega C_2 = (314)(2 \times 10^{-7}) i = (0,628) \times 10^{-4} i \text{ ohm}^{-1}$$

Admittance de la résistance = $1/R = 10^{-4} \text{ ohm}^{-1}$
Admittance de $= 10^{-4}(1 + 0,628 i) \text{ ohm}^{-1}$
Mil Admittance de $= 10^{-4}(1 + 0,628 i) \text{ ohm}^{-1}$
Mil Impédance de $\frac{1}{10^{-4}(1 + 0,628i)} = \frac{10(1 - 0,628i)}{1^2 + 0,628^2} = (7170 - 4500i) \text{ ohms}$
Mil Impédance de $C_1 = -\frac{i}{\omega C} = \frac{i}{(314)(5 \times 10^{-7})} = -6370i \text{ ohms}$

vi) Impédance du circuit entier = (7 170 - 10 870 i) ohms

ii)
$$I_1 = \frac{120}{(7170 - 10870i)} = \frac{120(7170 + 10870i)}{(7170)^2 + (10870)^2} = (5,08 + 7,69i) \times 10^{-3} \text{ amp.}$$

Comme nous avons utilisé 120 volts, qui est la tension efficace, nous obtenons le courant efficace. C'est-à-dire que, le module du nombre complexe *I*, qui est $[(5,08)^2 + (7,69)^2]^{1/2} \times 10^{-3}$ amp ou 9,2 milliampères (mA), est le courant efficace en Ampères. Un milliampèremètre alternatif branché en série avec le circuit indiquerait 9,2 mA. Ce courant fait un angle de phase φ =-Arc tg (0,769/0,508) soit - 0,987 radians par rapport à la tension du secteur. La puissance moyenne délivrée au circuit entier est

=

donc

viii) $P = (120 \text{ volts}) (0,0092 \text{ amp.}) \cos 0,987 = 0,61 \text{ watt}$

Dans ce circuit la résistance est le seul élément passif, donc ce doit être la puissance moyenne qui y est dissipée. Juste pour vérifier, nous pouvons trouver la tension V_2 aux bornes de la résistance

ix)
$$V_1 = I_1 \left(\frac{-i}{\omega C}\right) = (5,08 + 7,69 \text{ i})(-6370 \text{ i})10^{-3} = (49,0 - 32,4 \text{ i}) \text{ volts}$$

x) $V_2 = 120 - V_1 = (71,0 + 32,4 \text{ i}) \text{ volts}$

Le courant I_2 dans R sera bien sûr en phase avec V_2 , donc la puissance moyenne dans R sera

$$\overline{P} = \frac{V_2^2}{R} = \frac{(71)^2 + (32,4)^2}{10^4} = 0,61$$
 watt

ce qui concorde avec viii.

Ainsi les caractéristiques de la résistance ne sont pas dépassées, pour ce que vaut cette assurance. En réalité, la question de savoir si la résistance ne deviendra pas trop chaude ne dépend pas seulement de la puissance moyenne qui y est dissipée, mais aussi de la facilité avec laquelle elle peut se débarrasser de la chaleur. La puissance caractéristique d'une résistance n'est qu'un guide grossier.

Problèmes

- 8.1 Quelle est la valeur en henrys de la self-inductance qu'on devrait connecter en série à une ampoule de 60 watts-120 volts si on veut qu'elle marche normalement quand on branche la combinaison sur le secteur à 240 volts50 Hz? (Déterminez d'abord la réactance inductive nécessaire. Vous pouvez négliger la résistance de la self-inductance et la self-inductance de l'ampoule.)
- 8.2 On branche en série sur le secteur à 120 volts (efficace)-50 Hz une résistance de 2 000 ohms et un condensateur de 1 microfarad.
 - a) Quelle est l'impédance ?
 - b) Quelle est la valeur efficace du courant?
 - c) Quelle est la puissance dissipée dans le circuit?
 - d) Quelle sera l'indication d'un voltmètre alternatif branché aux bornes de la résistance? du condensateur?
 - e) On relie les plaques horizontales d'un tube à rayons cathodiques aux bornes de la résistance et les plaques verticales aux bornes du condensateur. Faire un schéma de ce que vous vous attendez à voir sur l'écran.
- 8.3 On relie tous en parallèle une résistance de 1 000 ohms, un condensateur de 500 pF et une self-inductance de 2 mH. Quelle est l'impédance de cette combinaison à la fréquence de 10 KHz? A la fréquence de 10 MHz? Quelle est la fréquence pour laquelle la valeur absolue de l'impédance est la plus grande ?



- 8.4 Dans le circuit résonnant de la figure, l'élément dissipatif est une résistance R' reliée en parallèle, plutôt qu'en série, avec la combinaison *LC*. Établissez l'équation, analogue à l'équation 8.2, qui s'applique à ce circuit. Trouvez aussi les conditions sur la solution analogues à celles qui s'appliquent au circuit *RLC* en série. Si un circuit *RLC* en série et un circuit *R'LC* en parallèle ont même *L*, *C* et *Q*, quelle doit être la relation entre *R* et *R'*?
- 8.5 Supposez que le courant dans le circuit de la figure 8.1 soit donné par l'équation 8.12. Calculez l'énergie emmagasinée dans le circuit à t = 0. Calculez ensuite l'énergie emmagasinée dans le circuit un quart de cycle plus tard, à $t = \pi/2\omega$. Vérifiez que la différence est égale à l'énergie dissipée dans la résistance *R* pendant cet intervalle. Pour ce problème supposez que l'amortissement soit faible, c'est-à-dire que $\alpha/\omega \vee 1$, et négligez les quantités proportionnelles à α^2 .

- 8.6 Pour le circuit de la figure 8.3 *a*, déterminez les valeurs de β_1 et β_2 pour le cas suramorti, avec R = 600 ohms. Déterminez aussi le rapport de *B* et de *A*, qui sont les constantes de l'équation 8.16.
- 8.7 Une cavité résonnante de la forme illustrée sur la figure est une partie essentielle de beaucoup d'oscillateurs en micro-ondes. On peut la considérer comme un simple circuit « *LC* ». La self-inductance est celle d'un tore avec un tour; on relie directement cette self-inductance à un condensateur à plaques parallèles. Trouvez une expression pour la fréquence de résonance de ce circuit, et montrez par un schéma la configuration des champs magnétiques et électriques.



Chapitre 9 Champs électriques dans la matière

9.1 Diélectriques

Le condensateur que nous avons étudié dans le chapitre 3 était constitué par deux conducteurs isolés l'un de l'autre, avec rien entre eux. Le système des deux conducteurs était caractérisé par une certaine capacité C, une constante reliant la grandeur de la charge Q portée par le condensateur (charge positive Q sur une plaque, charge négative égale sur l'autre) à V_{12} , différence de potentiel électrique entre les deux conducteurs

$$C = \frac{Q}{V_{12}} \tag{9.1}$$

Pour le condensateur à plaques parallèles, formé par deux plaques chacune de surface $S m^2$ séparées par une distance e, nous avons trouvé que la capacité est donnée par



Fig. 9.1 (a) Condensateur formé par des plaques conductrices parallèles.



(b) Les mêmes plaques entre lesquelles se trouve une lame d'isolant.

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{e} \tag{9.2}$$

On peut trouver des condensateurs comme celui-ci dans certains appareils électriques. On les appelle condensateur à vide; ils sont composés de plaques enfermées dans une bouteille où il y a un bon vide. On les utilise principalement quand interviennent des potentiels extrêmement élevés et variant très rapidement. Cependant, les condensateurs dans lesquels l'espace entre les plaques est rempli d'une substance isolante solide ou liquide, sont beaucoup plus courants. La plupart des condensateurs avec lesquels vous avez travaillé pendant les travaux pratiques sont de ce genre; il y en a des douzaines dans tout récepteur de télévision. Pour les conducteurs immergés dans un milieu matériel, l'équation 9.2 ne concorde pas avec l'expérience. Supposons que nous remplissions l'espace entre les deux plaques représentées sur la figure 9.1 a avec une lame de plastique, comme sur la figure 9.1 a. En faisant des expériences avec ce nouveau condensateur, nous trouvons encore une simple proportionnalité entre la charge et la différence de potentiel, de sorte que nous pouvons encore définir une capacité au moyen de l'équation 9.1. Mais nous trouvons que C est substantiellement plus grand que ce que prédit l'équation 9.2.

Les champs électriques et magnétiques existent en présence de matière, plutôt que dans le vide - sinon dans de la matière dense, du moins dans un gaz, à savoir l'air - non seulement dans les appareils

spéciaux qu'on appelle condensateurs, mais presque partout dans le monde autour de nous. Tout cela a pour but de nous rappeler qu'à part notre excursion au chapitre 4 dans le sujet de la conduction électrique, nous avons réellement étudié le champ électromagnétique dans l'espace vide occupé seulement par certaines charges ponctuelles ou par des distributions de charges régulières. Nous devons maintenant chercher à comprendre les interactions des champs électriques et magnétiques avec la matière prise en bloc.

Deux approches différentes nous sont ouvertes. En gardant un point de vue à grande échelle ou macroscopique, nous pourrions voir comment la présence d'un bloc de matière homogène, comme la lame de plastique de la figure 9.1 *b*, affecte le champ électrique dans les régions extérieures où nous pouvons mesurer le champ. Nous pourrions essayer de découvrir des lois simples qui décriraient de façon adéquate de tels effets dans tout système de conducteurs et d'isolants. Nous trouverions que l'on peut en effet caractériser assez simplement et complètement le comportement électrique macroscopique de substances homogènes. Par exemple, il suffit d'insérer à droite dans l'équation 9.2 un facteur constant ε_r caractéristique de la substance particulière, pour donner correctement la capacité de tout condensateur rempli avec ce matériau. On appelle ε_r constante

diélectrique relative de cette substance (relative par rapport au vide); on se réfère en général au matériau lui-même comme à un *diélectrique* quand on considère son comportement dans un champ électrique. On indique dans le tableau 9.1 les constantes diélectriques relatives de quelques matériaux particuliers. Une fois que la constante diélectrique relative d'un matériau particulier a été déterminée, peut-être en mesurant la capacité d'un condensateur rempli avec lui, nous

Substance	Conditions	Constantes diélectriques relatives			
Air	Gaz 0 °C, 1 atm	1 ,00059			
Anhydride chlorhydrique HCl	Gaz 0 °C, 1 atm	1,0046			
Eau, H ₂ 0	Gaz 110 °C, 1 atm Liquide, 20 °C	1,0126 80			
Benzène, C ₆ H ₆	Liquide, 20 °C	2,28			
Ammoniac, NH ₃	Liquide, - 34 °C	22			
Huile de transformateur	Liquide, 20 °C	2,24			
Chlorure de sodium NaCl	Cristal, 20 °C	6,12			
Soufre S	Solide, 20 °C	4,0			
Quartz, Si0 ₂	Cristal, 20 °C (?? axe) Cristal, 20 °C (⊥, optique)	4,34 4,27			
Polyéthylène	Solide, 20 "C	2,25-2,3			
Néoprène	Solide, 20 °C	4,1			
Porcelaine	Solide, 20 °C	6,0-8,0			
Paraffine	Solide, 20 °C	2,1-2,5			
Verre pyrex 7070	Solide, 20 °C	4,00			

Tableau 9.1 Constantes diélectriques relatives de diverses substances

sommes capables de prédire le comportement non pas uniquement du condensateur à deux plaques, mais de *n'importe quel* système électrostatique composé de conducteurs et de morceaux de cette substance de formes quelconques. C'est-à-dire, nous pouvons prédire tous les champs électriques qui existent dans le vide à l'extérieur des diélectriques pour des charges ou des potentiels donnés sur les conducteurs du système.

La théorie qui nous permet de faire cela a été complètement établie par les physiciens du dix-neuvième siècle. Comme ifs ne disposaient pas d'une description complète de la structure atomique de la matière, ifs furent plus ou moins obligés d'adopter une description macroscopique. De ce point de vue, l'intérieur d'un diélectrique est un espace sans détails d'une « gelée mathématique » parfaitement continue dont la seule propriété électrique qui la distingue du vide est d'avoir une constante diélectrique relative différente de l'unité.

Si nous ne développons qu'une description macroscopique de la matière dans un champ électrique, nous trouverons qu'il est difficile de répondre à certaines questions qui semblent évidentes - ou plutôt, qu'il est difficile de poser ces questions de façon telle qu'on puisse donner des réponses qui ont un sens. Par exemple, quelle est l'intensité du champ électrique à l'intérieur de la lame de plastique de la figure 9.1 *b*, quand il y a certaines charges sur les plaques? On définit l'intensité du champ électrique par la force sur une charge d'essai. Comment pouvons-nous mettre une charge d'essai à l'intérieur d'un solide parfaitement dense, sans rien perturber, et mesurer la force appliquée ? Que voudrait dire la force si nous pouvions la mesurer ? Vous pourriez penser faire un trou et y mettre la charge avec un peu de place pour vous déplacer autour, de sorte que vous puissiez mesurer la force qui est appliquée comme dans le cas d'une particule fibre. Mais alors vous ne mesurerez pas le champ électrique dans le diélectrique, mais le champ électrique dans une cavité creusée dans le diélectrique, ce qui est une chose tout à fait différente.

Heureusement, nous disposons d'une autre méthode d'attaque, qui part du niveau microscopique ou *atomique*. Nous savons que la matière est faite d'atomes ou de molécules; ceux-ci sont à leur tour composés de particules élémentaires chargées. Nous

savons quelque chose sur la taille et la structure de ces atomes, et nous savons aussi quelque chose sur leur disposition dans les cristaux, fluides et gaz. Au lieu de décrire notre lame comme un volume de gelée sans structure et sans trous, nous allons la décrire comme une collection de molécules occupant le vide. Si nous pouvons trouver ce que font les charges électriques dans une molécule quand cette molécule est toute seule dans un champ électrique, nous devrions être capables de comprendre le comportement de deux de ces molécules situées à une certaine distance l'une de l'autre dans le vide. Il ne sera nécessaire que d'inclure l'influence, sur chaque molécule, du champ électrique dû à l'autre. Les éléments de ce problème se trouvent dans le vide. Tout ce que nous avons à faire maintenant, c'est d'étendre cela à une population de, disons, 10²⁰ molécules qui occupent un centimètre cube environ de vide; nous aurons ainsi notre diélectrique réel. Nous espérons faire cela sans générer 10²⁰ problèmes différents.

Ce programme, si nous le menons à bout, nous récompensera de deux façons. Nous serons enfin capables de dire quelque chose de sensé sur les champs électriques et magnétiques à l'intérieur de la matière, répondant à des questions telles que celle que nous avons soulevée plus haut. Nous aurons quelque chose de plus précieux : nous comprendrons comment les phénomènes macroscopiques, électriques et magnétiques, proviennent de la nature de la structure atomique sous-jacente, et par conséquent la révèlent. Nous allons étudier séparément les effets électriques et magnétiques. Nous commençons par les diélectriques. Comme notre but premier est de décrire le champ électrique produit par un atome ou une molécule, il nous sera utile de faire quelques observations générales sur le champ électrostatique extérieur produit par n'importe quel petit système de charges.

9.2 Moments d'une distribution de charge



Un atome ou une molécule est constitué par quelques charges électriques qui occupent un petit volume, peut-être quelques angströms cubes (10⁻³⁰ m³). Nous nous intéressons au champ électrique à l'extérieur de ce volume, dû à cette distribution de charge plutôt compliquée. Nous nous occuperons particulièrement du champ loin de la source, en voulant dire loin par rapport aux dimensions de la source elle-même. Quelles sont les caractéristiques de la disposition des charges qui déterminent principalement le champ en des points distants? Pour répondre à cela, considérons une certaine distribution arbitraire de charges et regardons comment nous pourrions calculer le champ en un point à l'extérieur de la distribution. La figure 9.2 montre une distribution de charges situées au voisinage de l'origine des coordonnées. Cela pourrait être une molécule composée de plusieurs noyaux positifs et d'un assez grand nombre d'électrons. En tout cas, nous supposerons qu'on peut la décrire par une fonction densité de charge donna ρ (x, y, z). ρ est négatif là où se trouvent les électrons et positif là où se trouvent les noyaux. Pour trouver le champ électrique en des points distants, nous pouvons commencer par calculer le potentiel de la distribution de charges. Comme illustration, prenons un certain point A loin sur l'axe z. (Comme nous ne supposons aucune symétrie spéciale dans la distribution de charge, il n'y a rien de spécial pour l'axe z.) Soit r la distance de A à l'origine. On obtient comme d'habitude le potentiel en A, représenté par V_A en ajoutant les contributions de tous les éléments de la distribution de charge.

Fig. 9.2 Calcul du potentiel, au point A, d'une distribution de charge moléculaire.

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z')}{R} \mathrm{d}v'$$
(9.3)

Sous le signe somme, dv' est un élément de volume pris dans la distribution de charge, $\rho(x', y', z')$ est la densité de charge en ce point et *R* au dénominateur est la distance de *A* à cet élément de charge particulier. Bien sûr, on prend l'intégrale sur les coordonnées *x'*, *y'*, *z'*, et on l'étend à toute la région qui contient des charges. Nous pouvons exprimer *R* en fonction de *r* et de la distance *r'* de l'origine à l'élément de charge. En utilisant la loi des cosinus pour l'angle θ entre *r'* et l'axe sur lequel se trouve *A*

$$R = \left[r^{2} + r'^{2} - 2rr'\cos\theta\right]^{1/2}$$
(9.4)

En remplaçant R par cela, l'intégrale devient

$$V_{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \int \rho dv' \left[r^{2} + r'^{2} - 2rr'\cos\theta \right]^{1/2}$$
(9.4 a)

Nous voulons maintenant profiter du fait que pour un point distant tel que A, r' est beaucoup plus petit que r pour toutes les parties de la distribution de charge. Cela suggère que nous devrions développer la racine carrée de l'équation 9.4 en puissances de r'/r. Écrivant

$$\left[r^{2} + r'^{2} - 2rr'\cos\theta\right]^{1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'^{2}}{r^{2}} - \frac{2r'}{r}\cos\theta\right)\right]^{-1/2}$$
(9.5)







Fig. 9.3 Quelques distributions de charge avec $K_0 = 0$, $K_1 \neq 0$. C'est-à-dire que chacune a une charge totale nulle, mais un moment dipolaire non nul.

et utilisant le développement $(1 + \delta)^{-1/2} = 1 - 1/2 \delta + 3/8 \delta^2 + ...$ nous obtenons, après avoir rassemblé les termes de mêmes puissances en r'/r

$$\left[r^{2} + r'^{2} - 2rr'\cos\theta\right]^{1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r}\cos\theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^{2} \left(\frac{3\cos^{2}\theta - 1}{2}\right) + \left(\begin{array}{c} \text{termes de} \\ \text{puissance} \\ \text{supérieure} \end{array}\right)\right]^{1/2}$$
(9.6)

Or r est une constante dans l'intégration, nous pouvons donc le faire sortir et écrire de la façon suivante la règle pour obtenir le potentiel en A

$$V_{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \left[\frac{1}{r} \underbrace{\int_{K_{0}} \rho dv'}_{K_{0}} + \frac{1}{r^{2}} \underbrace{\int_{K_{1}} r' \cos\theta\rho dv'}_{K_{1}} + \frac{1}{r^{3}} \underbrace{\int_{K_{2}} r'^{2} \left(\frac{3\cos^{2}\theta - 1}{2} \right) \rho dv'}_{K_{2}} + \dots \right]$$
(9.7)

Chaque intégrale ci-dessus K_0 , K_1 , K_2 etc. a une valeur qui ne dépend que de la structure de la distribution de charge. On peut donc écrire le potentiel en tout point le long de l'axe z comme une série en puissances de 1/r à coefficients constants

$$V_{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \left[\frac{K_{0}}{r} + \frac{K_{1}}{r^{2}} + \frac{K_{2}}{r^{3}} + \dots \right]$$
(9.8)

Pour terminer le problème nous devrions trouver le potentiel en tous les autres points, en vue de calculer le champ électrique en prenant -grad V Nous sommes cependant allés assez loin pour faire apparaître le point essentiel : Le comportement du potentiel à grande distance de la source sera dominé par le premier terme de cette série dont le coefficient n'est pas nul.

Considérons ces coefficients de plus près. Le coefficient K_0 est $C = \frac{Q}{V_{12}}$, ce qui n'est rien d'autre que la charge totale de la distribution. Si nous avons des quantités égales de charge positive et

négative, comme dans une molécule neutre, K_0 , sera nul. Pour une molécule une fois ionisée, K_0 aura la valeur *e*. Si K_0 n'est pas nul, aussi grands que K_1 , K_2 etc. puissent être, si nous allons à une distance assez grande, le terme K_0 / r dominera. Au-delà de ce point, le potentiel tendra vers

celui d'une charge ponctuelle à l'origine, et de même pour le champ. Cela n'est pas très surprenant.

Supposons que nous ayons une molécule neutre, de sorte que K_0 soit nul. Notre intérêt se porte

maintenant sur le second terme, avec le coefficient $K_1 = \int r' \cos \theta \rho dv'$. Comme $r' \cos \theta$ est simplement z', ce terme mesure le déplacement relatif dans la direction de A, des charges positives par rapport aux charges r négatives. Il a une valeur non nulle pour les distributions schématisées sur la figure 9.3 où l'on a indiqué séparément les charges positives et négatives. En fait, toutes les distributions montrées ici ont approximativement la même valeur de K_1 .

Il vaut la peine de noter que si la distribution est neutre, la valeur de K_1 est indépendante de la position de l'origine. En effet, si nous remplaçons z' par $(z' + z'_0)$, ce qui revient à déplacer l'origine, la valeur de l'intégrale ne change pas : $\int (z'+z'_0)\rho dv' = \int z' \rho dv'+z'_0 \int \rho dv'$ et la dernière intégrale est toujours nulle pour une distribution neutre.

Bien sûr, si $K_0 = 0$ et $K_1 \neq 0$, le potentiel le long de l'axe *z* variera asymptotiquement (c'est-à-dire, avec une approximation d'autant meilleure que nous irons à des distances plus grandes) comme $1/r^2$. Nous nous attendrons alors à ce que l'intensité du champ électrique se comporte asymptotiquement comme $1/r^3$, en contraste avec la dépendance en $1/r^2$ pour le champ dune charge ponctuelle. Bien sûr, nous n'avons discuté que le potentiel le long de l'axe *z*. Nous reviendrons à la question de la forme exacte du champ après avoir acquis une vue générale de la situation.



Si K_0 et K_1 sont tous les deux nuls et si K_2 ne l'est pas, le potentiel se comportera comme $1/r^3$ à grande distance et l'intensité du champ décroîtra comme l'inverse de la quatrièmes puissance de la distance. La figure 9.4 montre une distribution de charge pour laquelle K_0 et K_1 sont tous les deux nuls (et cela quelque soit la direction choisie comme axe z) tandis que K_2 ne l'est pas.

Les quantités K_0 , K_1 , K_2 ... sont reliées à ce que l'on appelle les *moments* de la distribution de charge. Utilisant ce langage, nous appelons K_0 , qui est simplement la charge totale, *moment monopolaire* ou *intensité du monopôle*. K_1 est une composante du moment dipolaire de la distribution. Le *moment dipolaire* a les dimensions d'une charge multipliée par un *déplacement*; c'est un vecteur et notre K_1 est sa composante z. La troisième constante K_2 est reliée au *moment quadrupolaire* de la distribution, la suivante au *moment octupolaire*, etc. (³³)

L'avantage pour nous de décrire une distribution de charge par ses moments d'ordres successifs est de ne mettre en avant que les caractéristiques de la distribution de charge qui déterminent le champ à grande distance. Si nous ne nous intéressions qu'au champ dans le voisinage immédiat de la distribution, il s'agirait d'un exercice stérile. Pour notre but principal, comprendre ce qui se passe dans un diélectrique, il se trouve que seules comptent l'intensité du monopôle (la charge totale) et l'intensité du dipôle des molécules qui forment la matière. Nous pouvons négliger tous les autres moments. Si les molécules sont neutres, nous n'avons qu'à considérer leurs moments dipolaires.

9.3 Potentiel et champ d'un dipôle

La contribution du dipôle au potentiel au point A, à la distance r de l'origine, était donnée par $1/(4\pi\varepsilon_0 r^2)\int r'\cos\theta \rho dv'$. Nous

pouvons

écrire $r' \cos \theta$, qui est juste la projection de r' sur la direction de A, sous la forme $r \cdot r'$. Nous pouvons donc, sans référence à un axe arbitraire, écrire le potentiel sous la forme

$$V_{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}r^{2}} \int \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r'} \,\rho \mathrm{d}v' = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_{0}r^{2}} \cdot \int \mathbf{r'} \,\rho \mathrm{d}v' \tag{9.9}$$

³³ On peut montrer que la décomposition de la source en divers multipôles, si elle est faite de façon complète, spécifie de manière unique la distribution de charge. En d autres termes, si nous connaissons toutes les valeurs des multipôles, nous pouvons « en principe » en déduire Q(x', y', z'). Ce n'est pas très utile. Au fait, le quadripôle et les moments d'ordre supérieur ne sont pas des vecteurs, mais des quantités plus compliquées.

ce qui servira à donner le potentiel en tout point. L'intégrale à droite de l'équation 9.9 est le moment dipolaire de la distribution de charge. C'est évidemment un vecteur dont les dimensions sont celles d'une charge multipliée par une distance. Nous représenterons le vecteur moment dipolaire par \mathbf{p}

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r'} \,\rho \mathrm{d}v' \tag{9.10}$$

Utilisant le moment dipolaire p, nous pouvons récrire l'équation 9.9 sous la forme

$$V_{(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{r^2}$$
(9.11)

Le champ électrique est l'opposé du gradient de ce potentiel. Pour voir à quoi ressemble le champ dipolaire, plaçons un dipôle \mathbf{p} à l'origine, pointant dans la direction *z* fig. 9.5. Avec cette disposition

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^2}$$
(9.12)

Le potentiel et le champ sont bien sûr symétriques autour de l'axe z. Travaillons dans le plan xz où cos $\theta = z/(xz + z^2)^{1/2}$. Alors dans ce plan

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{pz}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$
(9.13)

On en déduit facilement les composantes du champ électrique

$$E_{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{3pxz}{(x^{2} + z^{2})^{5/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{3p\sin\theta\cos\theta}{r^{3}}$$

$$E_{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} p \left[\frac{3z^{2}}{(x^{2} + z^{2})^{5/2}} - \frac{1}{(x^{2} + z^{2})^{3/2}} \right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} p \frac{3\cos^{2}\theta - 1}{r^{3}}$$
(9.14)



Fig. 9.5 Champ électrique d'un dipôle indiqué par quelques lignes de champ.

En s'éloignant du dipôle dans n'importe quelle direction, nous trouvons que l'intensité du champ décroît comme $1/r^3$ ainsi que nous l'avions prévu. Le long de l'axe z, le champ est parallèle au moment dipolaire **p**, avec l'amplitude $2p/4\pi\varepsilon_0 r^3$. Dans le plan équatorial, le champ a une direction antiparallèle à celle de **p**; il a la valeur – **p**/ $4\pi\varepsilon_0 r^3$.

Ce champ peut vous rappeler un champ que nous avons déjà rencontré. Souvenez-vous de la charge ponctuelle placée au-dessus d'un plan conducteur, avec sa « charge image ». La distribution de charge la plus simple ayant un moment dipolaire est peut-être constituée par deux charges ponctuelles + q et -q séparées par une distance s. Pour un système de charges ponctuelles, l'équation 9.10 prend la forme d'une somme. Le moment dipolaire de notre paire de charges ponctuelles est juste qs; le vecteur pointe dans la direction allant de la charge négative à la charge positive. Sur la figure 9.6, nous avons schématisé le champ de cette paire de charges, surtout pour mettre en relief que le champ près des charges n'est pas un champ dipolaire. Cette distribution de charge a de nombreux moments multipolaires, en réalité une infinité, de sorte que ce n'est que le « champ à grande distance » pour r m s que l'on peut représenter par un champ dipolaire.



Fig. 9.6 Le champ électrique d'une paire de charges ponctuelles égales et opposées est une approximation du champ d'un dipôle pour des distances grandes par rapport \hat{a} la séparation s.

 $F_{-} = -qE$ $F_{+} = qE$ $F_{+} = qE$

Fig. 9.7 (a) Un dipôle dans un champ uniforme.



(c) Le travail produit en tournant le dipôle d'une orientation parallèle au champ vers l'orientation indiquée est $pE(1 - \cos \theta_0)$.

Pour générer un champ dipolaire complet jusqu'à l'origine nous devrions faire tendre *s* vers zéro, tout en augmentant *q* sans limite de façon à maintenir p = qs fini. Cette abstraction extrêmement singulière n'est pas très intéressante. Nous savons que nos distributions de charges moléculaires auront des champs compliqués à courte distance, de sorte que nous ne pourrions dans aucun cas représenter la région proche de l'origine. Heureusement, nous n'aurons pas besoin de le faire.

9.4 Couple et force agissant sur un dipôle ans un champ extérieur

Supposons que les deux charges q et -q soient reliées mécaniquement de sorte que s, la distance entre elles, reste fixe. Vous pouvez penser que les deux charges sont collées aux bouts d'une petite tige non conductrice de



(b) Le moment agissant sur le dipôle est $N = P \land E$; N est un vecteur pointant à travers la page vers le bas.

longueur *s*. Nous appellerons dipôle cet objet. Son moment dipolaire *p* est simplement *qs*. Mettons le dipôle dans un champ électrique extérieur, c'est-à-dire, un champ dû à une autre source. Le champ du dipôle lui-même ne nous concerne pas maintenant. Considérons d'abord un champ électrique uniforme, comme sur la figure 9.7 *a*. L'extrémité positive du dipôle est attirée vers la droite, l'extrémité négative vers la gauche, par une force de grandeur *Eq*. La force totale sur l'objet est nulle, de même pour le couple, dans cette position. Un dipôle qui fait un certain angle θ avec la direction du champ comme sur la figure 9.7 6 subit évidemment un couple. En général, le moment **N** est $\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$ où **F** est la force appliquée à la distance **r** de l'origine (vol. I, chap. 6). En prenant l'origine au centre du dipôle, de sorte que r = s/2, nous avons

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}_{+} + (-\mathbf{r}) \wedge \mathbf{F}_{-} \tag{9.15}$$

N est un vecteur perpendiculaire à la figure; sa grandeur est

$$N = \frac{s}{2}Eq\sin\theta + \frac{s}{2}Eq\sin\theta = sqE\sin\theta = pE\sin\theta$$
(9.16)

On peut l'écrire simplement



Fig. 9.8 La force sur un dipôle dans un champ non uniforme. (*a*) La force totale sur le dipôle dans cette position est dirigée radialement vers l'extérieur.

(b) La force totale sur le dipôle dans cette position est dirigée vers le haut.

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E} \tag{9.17}$$

L'orientation du dipôle sur la figure 9.7 *a* a l'énergie la plus basse. Il faut fournir du travail pour le tourner vers toute autre position. Calculons le travail requis pour tourner le dipôle d'un certain angle θ_0 à partir d'une position parallèle au champ, comme le montre la figure 9.7 *c*. La rotation d'un angle infinitésimal d θ requiert une quantité de travail *N* d θ . Le travail fourni est donc

$$\int_{0}^{\theta_{0}} N \mathrm{d}\theta = \int_{0}^{\theta_{0}} pE \sin\theta \mathrm{d}\theta = pE(1 - \cos\theta_{0})$$
(9.18)

Renverser le dipôle, le tourner de bout en bout, correspond à $\theta_0 = \pi$ et nécessite une quantité de travail égale à 2pE.

La force totale sur le dipôle dans tout champ uniforme est évidemment nulle, quelque soit son orientation. Dans un champ non uniforme les forces sur les deux bouts ne seront pas exactement égales et opposées en général, et il y aura une force totale sur l'objet. Un exemple simple est celui d'un dipôle dans le champ d'une charge ponctuelle Q. Si le dipôle est orienté radialement comme sur la figure 9.8 a, son extrémité positive étant la plus proche de la charge positive Q, la force totale sera dirigée vers l'extérieur, et sa grandeur sera

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} (q) \frac{Q}{r^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} (-q) \frac{Q}{(r+s)^2}$$
(9.19)

Pour $s \lor r$, nous n'avons qu'à évaluer cela au premier ordre en s/r, ce que nous faisons de la manière suivante

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{r}\right)^2} \right] \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \left[1 - \frac{1}{1 + 2\frac{s}{r}} \right] \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2sqQ}{r^3}$$
(9.20)

En fonction du moment dipolaire p, cela est simplement

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2pQ}{r^3}$$
(9.21)

Pour un dipôle à angle droit du champ, comme sur la figure 9.8 *b*, il y a aussi une force. Maintenant les forces sur les deux bout, bien

qu'égales, n'ont pas des directions exactement opposées.

Il n'est pas difficile d'établir une formule générale pour la force sur un dipôle dans un champ électrique non uniforme. La force dépend essentiellement des gradients des diverses composantes du champ. De façon générale, la composante x de la force sur un dipôle de moment **p** est

$$F_{\mathbf{x}} = \mathbf{p} \cdot \operatorname{grad} E_{\mathbf{x}} \tag{9.22}$$

avec des formules correspondantes pour F_y et F_z

9.5 Dipôles atomiques et moléculaires; moments dipolaires induits

Quand nous décrirons la distribution de charge dans un atome ou une molécule, nous aurons à utiliser des termes classiques pour décrire des systèmes quantiques. De plus, nous allons traiter comme statique une structure dans laquelle les particules ont, en quelque sorte, un mouvement incessant. Plus loin, dans le cours, volume IV, vous verrez comment la mécanique quantique, loin de discréditer l'image que nous allons brosser, la supporte de façon rassurante.



Fig. 9.9 Moyenne temporelle de la distribution de charge dans l'atome d'hydrogène normal. Le grisé représente la densité de charge électronique (négative).



Fig. 9.10 Dans un champ électrique la charge négative est attirée d'un côté, le noyau positif est attire de l'autre. Quand l'équilibre est atteint, l'atome est légèrement déformé.

Considérons l'atome le plus simple, l'atome d'hydrogène, qui est composé d'un noyau et d'un électron. Si vous imaginez que 'électron chargé négativement tourne autour du noyau positif comme une planète autour du soleil - comme dans le modèle atomique original de Niels Bohr - vous conclurez que l'atome possède, à tout instant, un moment dipolaire. Le vecteur moment dipolaire **p** pointe parallèlement au rayon vecteur électron-proton, et sa grandeur est e fois la distance électron-proton. La direction de ce vecteur varie continuellement et rapidement à mesure que l'électron tourne sur son orbite. Bien entendu, la moyenne temporelle de p sera nulle pour une orbite circulaire, mais nous devrions nous attendre à ce que les composantes du moment dipolaire qui varient périodiquement engendrent des champs électriques oscillant rapidement et du rayonnement électromagnétique. L'absence d'un tel rayonnement dans l'atome d'hydrogène normal fut l'un des grands paradoxes des débuts de la physique quantique. La mécanique quantique moderne nous dit qu'il vaut mieux penser à l'hydrogène dans son état d'énergie le plus bas (condition usuelle pour la plupart des atomes d'hydrogène dans l'univers) comme étant un système de symétrie sphérique avec la charge électronique distribuée, en moyenne temporelle, dans un nuage qui entoure le noyau. Rien ne tourne ni n'oscille. Si nous pouvions prendre une photographie avec un temps d'exposition inférieur à 10^{-16} seconde, nous pourrions discerner un électron localisé à une certaine distance du noyau. Mais pour des processus qui font intervenir des temps beaucoup plus longs que cela, nous avons, en effet, une distribution continue de charge négative qui entoure le noyau et qui s'étend dans toutes les directions avec une densité décroissant régulièrement. La charge totale dans cette distribution est juste - e, la charge de l'électron. En gros la moitié de cette charge se trouve dans une sphère de rayon 0,5 Angström $(0.5 \times 10^{-10} \text{ m})$. La densité décroît exponentiellement vers l'extérieur; une sphère de 2,2 angströms de rayon seulement contient 99% de la charge.

Le mieux est d'adopter une image similaire pour les autres atomes ou molécules. Nous pouvons traiter les noyaux dans les molécules comme des charges ponctuelles; pour notre propos actuel, leurs tailles sent trop petites pour qu'on s'en préoccupe. La structure électronique entière de la molécule doit être vue comme un seul nuage de charge négative dont la densité varie de façon continue. La forme de ce nuage et les variations de la densité de charge à l'intérieur seront bien sûr différentes pour des molécules différentes. Mais aux bords du nuage, la densité décroît

toujours exponentiellement, de sorte que parler de taille ou de forme pour une distribution de charge moléculaire a un sens.

La figure 9.9 représente la distribution de charge dans un atome d'hydrogène normal. C'est une coupe à travers le nuage de symétrie sphérique, la densité étant suggérée par le grisé. Évidemment le moment dipolaire d'une telle distribution est nul. La même chose est vraie pour tout atome dans son état d'énergie le plus bas, quel que soit le nombre d'électrons qu'il contienne, car dans de tels états la distribution électronique a la symétrie sphérique. C'est aussi vrai pour tout atome ionisé, bien qu'un ion, naturellement, ait un « monopôle », c'est-à-dire une charge nette.

Jusqu'ici nous n'avons rien de très intéressant. Mais plaçons maintenant l'atome d'hydrogène dans un champ électrique produit par une certaine source extérieure, comme sur la figure 9.10. Le champ électrique déforme l'atome, tirant les charges négatives vers le bas, et poussant le noyau positif vers le haut. L'atome déformé aura un moment dipolaire électrique car le « centre de gravité » de la charge positive ne coïncide plus avec celui de la charge négative.

Nous pouvons utiliser un modèle provisoire de l'atome d'hydrogène pour estimer, en ordre de grandeur, la quantité de distorsion qu'on peut attendre. Supposons qu'en l'absence de champ électrique la charge électrique *e* soit distribuée avec une densité *constante* dans une sphère de rayon *a*, et qu'elle soit nulle au dehors. La figure 9.11 montre ce substitut grossier pour la distribution réelle représentée sur la figure 9.9. Supposons que, lorsqu'on applique le champ **E**, cette boule de charge négative garde sa forme et sa densité, et qu'elle soit simplement déplacée, par rapport au noyau, de sorte que le centre de la sphère se trouve à une distance *b* du noyau (fig. 9.12). A l'équilibre, la force sur le noyau due au champ électrique **E**, une force *eE* newtons agissant vers le haut, doit être compensée par l'attraction vers le bas exercée sur le noyau par le nuage de charge négative, qui attire le noyau vers son centre. Pour trouver la grandeur de cette dernière force, nous rappelons qu'à l'intérieur d'une distribution de charge sphérique, en un point situé à *b* m du centre, le champ électrique est simplement dû à la charge à *l'intérieur* d'une sphère de rayon *b*. Dans ce cas, la quantité de charge à l'intérieur de la sphère de rayon *b* est (*b/a*)³, car a est la quantité de charge dans la sphère de rayon *a*. Par conséquent, là où se trouve le noyau, le champ dû au nuage électronique est juste ($1/4\pi\epsilon_0$)($1/b^2$)*e*(*b/a*)³ ou ($1/4\pi\epsilon_0$)*eb/a*³. En posant que cette valeur du champ est égale à celle du champ appliqué *E*, nous obtenons la condition d'équilibre

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{eb}{a^3} \qquad \text{d'où} \qquad b = 4\pi\varepsilon_0 \frac{a^3 E}{e} \tag{9.23}$$



Comme bon nombre arrondi, prenons 1 angström ou 10^{-10} m pour *a*. Nous avons suggéré qu'un rayon de cette grandeur engloberait la plus grande partie de la charge dans la vraie distribution. Pour *E* essayons 3×10^6 volts/m, ce qui est joliment fort pour un champ de laboratoire. Avec ces hypothèses, l'équation 9,23 donne la valeur 2×10^{-15} m pour *b*. La distorsion est *très faible*. Le déplacement est environ 10^{-6} fois le rayon atomique, pas beaucoup plus que le rayon du noyau. Le moment dipolaire électrique qui en résulte est *eb*, de sorte que dans ce modèle la relation entre moment dipolaire et champ appliqué est

$$p = eb = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E \tag{9.24}$$

La direction du vecteur moment dipolaire est vers le haut, c'est-à-dire dans la même direction que le champ électrique.

Remarquez que le moment dipolaire est simplement proportionnel au champ appliqué. Nous pouvons nous attendre à ce que cela soit vrai dans l'atome réel, au moins pour les petites distortions, et nos calculs suggèrent fortement que tout champ de laboratoire raisonnable ne perturbe que très légèrement les atomes. On peut polariser tout atome de cette façon. Nous disons que le moment dipolaire est *induit* par le champ électrique **E**. Dans chaque cas nous trouvons que **p** est proportionnel à **E**

 $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E} \tag{9.25}$

La constante α est une propriété de l'atome qu'on appelle *polarisabilité* atomique.

Pour notre modèle de l'atome d'hydrogène, la polarisabilité α est égale à $4\pi\epsilon_0 a^3$. Remarquez que α a les dimensions d'un volume multiplié par $4\pi\epsilon_0$. Un calcul quantique exact de la polarisabilité de l'atome d'hydrogène prédit $\alpha = 4\pi\epsilon_0 (9/2)a^3_0$ où

La charge négative remplit avec une densité uniforme une sphère de rayon *a*, centrée au noyau.

Fig. 9.11 Un modèle grossier d'un atome.



Fig. 9.12 Équilibre dans un champ **18** \Re térieur. Le noyau et le centre de la boule sphérique de charge négative se trouvent à une distance *b* l'un de l'autre.

 a_0 est le « rayon de Bohr », 0.52×10^{-10} m, distance caractéristique dans la structure de l'atome H dans son état normal. Le tableau 9.2 donne les polarisabilités électriques

Tableau 9.2 Polarisabilités électriques en unités 10⁻⁴⁰ Cm²/V

Élément	Н	He	Li	Bs	С	Ne	Na	А	Κ
$\alpha =$	0,73	0,23	13	10	1,7	0,45	30	1,8	38

de différentes espèces d'atomes. On a rangé les exemples donnés par ordre croissant du nombre d'électrons. Remarquez les grandes variations de α . Si vous êtes familiers avec le tableau périodique des éléments, vous pouvez discerner ici quelque chose de systématique. L'hydrogène et les métaux alcalins, lithium, sodium et potassium, qui occupent la première colonne du tableau périodique, ont de grandes valeurs de α , et il y a une augmentation régulière lorsque le nombre atomique augmente de l'hydrogène au potassium. Les gaz rares ont des polarisabilités atomiques beaucoup plus faibles, mais il y a une augmentation lorsque l'on va, dans la famille, de l'hélium au néon puis au krypton. Apparemment, les atomes alcalins, en tant que classe, sont



Il est intéressant de la comparer à la somme

 $\alpha_{\rm C} + 4\alpha_{\rm H} = 4.5 \times 10^{-40} \,{\rm Cm^2/V}.$

facilement déformés par un champ électrique, tandis que la structure électronique des atomes de gaz rares est beaucoup plus rigide. C'est à l'électron externe faiblement lié, ou électron de « valence », dans la structure de l'atome alcalin qu'on doit la polarisabilité facile.

Une molécule développe aussi un moment dipolaire induit quand on lui applique un champ électrique. La molécule de méthane représentée sur la figure 9.13 est composée de quatre atome d'hydrogène disposés aux sommets d'un tétraèdre autour de l'atome de carbone central. Cet objet a une polarisabilité électrique, déterminée expérimentalement, de

 2.9×10^{-40} Coulomb \times m²/volt.

Fig. 9.13 La molécule de méthane composée de quatre atomes d'hydrogène et d'un atome de carbone.

des polarisabilités d'un atome de carbone et de quatre atomes d'hydrogène isolés en prenant les données de la table 9.2. Évidemment, la liaison des atomes pour former une molécule a quelque peu modifié la structure électronique. Les mesures de polarisabilités atomiques et moléculaires ont longtemps été utilisées par les chimistes comme clefs des structures moléculaires.



Fig. 9.14 (a) La molécule d'anhydride carbonique se polarise plus facilement parallèlement â son grand axe que perpendiculairement.



(b) C'est-à-dire que la composante E_{ll} du champ appliqué a un effet plus grand que E_{\perp} .

9.6 Tenseur de polarisabilité

Les molécules sont nécessairement moins symétriques que les atomes. Cela offre la possibilité d'avoir un moment dipolaire induit *non* parallèle au champ électrique qui l'a induit. Considérons la molécule d'anhydride carbonique. C'est une molécule linéaire en « forme de cigare » dont les atomes constitutifs sont disposés comme le montre la figure 9.14 *a*. Il serait surprenant que cette structure électronique fût également rigide vis à vis des déformations longitudinales et transversales. En général, nous devrions nous attendre à ce qu'un champ électrique appliqué parallèlement à l'axe produise un moment dipolaire induit de grandeur différente de celui qu'induit un champ de même intensité appliqué à angle droit de l'axe



(*c*) Ainsi la polarisation induite **p** n'est pas parallèle au champ appliqué **E**.

moléculaire. En effet la polarisabilité observée de la molécule CO_2 est de 4,5 × 10⁻⁴⁰ C m²/V pour un champ appliqué parallèlement à l'axe, et un peu moins de la moitié pour un champ transverse. La molécule a deux polarisabilités que nous pourrions représenter par $\alpha_{//}$ et α_{\perp} . Que se prise-t-il si nous appliquons le champ dans quelque autre direction, comme sur la figure 9.14 *b* ? On peut le prédire facilement. Comme nous nous occupons d'un phénomène linéaire ⁽³⁴⁾ (l'effet est directement proportionnel à la cause) le principe de superposition s'applique. Nous pouvons décomposer le champ **E** en composantes parallèles et perpendiculaires à l'axe moléculaire. $E_{//} = E \cos \theta$ et $E_{\perp} = E \sin \theta$. Nous pouvons imaginer que l'on applique ces composantes séparément, puis que l'on combine les vecteurs moments résultants. $E_{//}$ induit un moment le long de l'axe moléculaire de grandeur $p_{//} = \alpha_{//} E_{//} = \alpha_{//} E \cos \theta$. E_{\perp} produit un moment perpendiculaire à l'axe : $p_{\perp} = \alpha_{\perp} E \sin \theta$. Ils se combinent pour donner le moment magnétique **p** créé par le champ original **E**. Le vecteur moment dipolaire **p** n'est pas parallèle à **E** si $\alpha_{//} \neq \alpha_{\perp}$. Il pointe au contraire dans une direction plus proche de celle de l'axe de polarisation facile. (Pouvez-vous imaginer un analogue mécanique de ce comportement ?)

Cet exemple montre que la polarisabilité d'une molécule n'est pas un simple nombre, un scalaire, mais plutôt un ensemble de coefficients qui expriment la dépendance linéaire de composantes d'un vecteur, **p** dans cet exemple, en fonction de celles d'un autre, **E**. On appelle tenseur un tel ensemble de coefficients. La relation de ce genre la plus générale semblerait faire intervenir neuf coefficients; on pourrait l'écrire ainsi

$$P_{x} = \alpha_{xx}E_{x} + \alpha_{xy}E_{y} + \alpha_{xz}E_{z}$$

$$P_{y} = \alpha_{yx}E_{x} + \alpha_{yy}E_{y} + \alpha_{yz}E_{z}$$

$$P_{z} = \alpha_{zx}E_{x} + \alpha_{zy}E_{y} + \alpha_{zz}E_{z}$$
(9.26)

Les neuf α définis de cette façon forment ce qu'on appelle le tenseur de polarisabilité.

Dans l'exemple de la molécule de CO₂, si nous orientons l'axe x le long de l'axe de la molécule, les coefficients deviennent $\alpha_{xx} = \alpha_{//}$; $\alpha_{yy} = \alpha_{zz}$, $= \alpha_{\perp}$; les six autres coefficients sont nuls. Si nous avions choisi une autre direction pour les axes de coordonnées, disons à 30° de l'axe moléculaire, un champ **E** dans la direction *x*, comme sur la figure 9.14 *c*, créerait un moment dipolaire **p** ayant une composante dans la direction *z*. Ainsi α_{zx} n'aurait pas été nul. (Vous pouvez trouver la valeur qu'il aurait en décomposant **E** en composantes parallèle et perpendiculaire à l'axe moléculaire, en trouvant la polarisation produite par celles-ci, puis la composante *z* de la résultante.) Ainsi les éléments du tenseur de polarisabilité dépendent de l'orientation des axes de coordonnées. Ils doivent se transformer dans une rotation des axes de coordonnées de telle façon que la relation entre les vecteurs **E** et **p** reste invariante. Cette relation ne peut dépendre que de la direction de **E** par rapport aux axes physiques de la molécule, et non de la façon dont il se trouve que nous avons choisi les axes *x*, *y* et *z*. Nous n'établirons pas les règles de transformation des coefficients du tenseur. Elles sont analogues aux règles de transformation des composantes d'un vecteur. Si vous voulez voir comment cela marche avec le minimum de travail, vous pouvez l'établir pour le cas à deux dimensions, comme on le suggère dans le problème 9.23.



Fig. 9.15 Une molécule n'ayant aucune symétrie du tout, le bromochlorofluorométhane. C'est du méthane où l'on a substitué trois hydrogènes avec trois halogènes différents. Les longueurs des liaisons et les arêtes du tétraèdre sont toutes un peu différentes.

Dans le tenseur de polarisabilité α , seuls six des neuf coefficients sont indépendants. On peut prouver que $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$, $\alpha_{yx} = \alpha_{zy}$, $\alpha_{zx} = \alpha_{xz}$. C'est-à-dire que le tableau carré des neuf nombres est toujours symétrique par rapport à la diagonale principale. La symétrie du tenseur exprime un fait physique des plus remarquables qui mérite quelque attention. Cela veut dire qu'un champ **E** appliqué dans la direction *x* produit toujours une composante *z* de la polarisation exactement égale à la composante *x* de la polarisation que produirait un champ égal appliqué dans la direction *z*. Si vous pensez que c'est évident ou trivial, réfléchissez au fait que cela est vrai même pour une molécule qui n'a aucune symétrie, telle que la molécule présentée sur la figure 9.15. C'est un genre de théorème de « réciprocité » qui, comme l'égalité des inductances mutuelles que nous avons démontrée dans la section 7.7, ne provient pas d'une simple symétrie géométrique, mais de quelque chose de plus général. Si vous vous demandez comment on peut le démontrer, le problème 9.22 vous le montrera.

Un corollaire important de la symétrie, de α est le fait qu'il est toujours possible d'orienter les axes, par rapport à la structure moléculaire, de sorte que les coefficients « non diagonaux », α_{xy} , etc., soient nuls. Dans ces coordonnées, la polarisabilité de la molécule est complètement décrite par trois nombres : α_{xx} ,

 α_{yy} , α_{zz} . Cela est vrai même pour une molécule qui ne possède, elle-même, aucune symétrie du tout. Nous ne nous servirons pas de ces faits dans notre: étude limitée des diélectriques. Ils sont extrêmement importants dans l'étude des propriétés optiques des

³⁴ Nous avons aussi affaire à une molécule *linéaire* (atomes disposés sur une ligne droite)! Bien sur, *linéaire* a deux sens entièrement différents dans les deux manières de l'utiliser.

molécules, et ils sont peut-être encore plus familiers pour les chimistes, de nos jours, que pour les physiciens. Le but principal de cette digression sur le tenseur de polarisabilité, était de vous permettre de faire connaissance, à l'aide de cet exemple facile à imaginer, avec la nature d'un tenseur.

9.7 Moments dipolaires permanents



Quelques molécules sont construites de façon telle qu'elles ont un moment dipolaire électrique même en l'absence de champ électrique. Elles sont déjà antisymétriques dans leur état normal. La molécule de la figure 9.15 est un exemple. Un exemple plus simple est fourni par n'importe quelle molécule diatomique constituée par deux atomes différents, telle que l'anhydride chlorhydrique, HCl. Il n'y a pas de point sur l'axe de cette molécule par rapport auquel la molécule soit symétrique de bout en bout; les deux extrémités de la molécule sont physiquement différentes. Ce serait un pur accident si le « centre de gravité » des charges positives et celui de:; charges négatives se trouvaient tomber au même point sur l'axe. Quand la molécule HCI est formée à partir des atomes H et Cl initialement sphériques, l'électron de l'atome H se déplace partiellement vers la structure Cl, laissant le noyau d'hydrogène partiellement dénudé. Il y a donc un certain excès de charge positive à l'extrémité hydrogène de la molécule, et un excès correspondant de charge négative à l'extrémité chlore. La grandeur du moment dipolaire électrique résultant, 3.4×10^{-30} Coulomb • mètre, est équivalente au fait de déplacer un électron d'environ un cinquième d'angström. Au contraire, un atome d'hydrogène dans un champ de 3×10^6 V/m, avec la polarisabilité indiquée dans la table 9.2, acquiert un moment dipolaire induit inférieur à 3×10^{-34} C • m. Les moments dipolaires permanents, quand ils existent, sont, en général, énormément plus grands que n'importe quel moment que l'on peut induire avec les champs électriques ordinaires du laboratoire ⁽³⁵⁾. A cause de cela, la distinction entre molécules polaires, comme on appelle les molécules ayant des moments dipolaires « tout faits », et les molécules non polaires, est très nette.

Nous avons dit au début de la section 9.5 qu'un atome d'hydrogène possède, à tout instant, un moment dipolaire. Mais ensuite nous l'avons éliminé comme étant nul en moyenne temporelle, en raison du mouvement rapide de l'électron. Il semble maintenant que nous parlons des moments dipolaires moléculaires comme si une molécule était un objet stationnaire ordinaire, tel qu'un os dont on pourrait examiner les deux bouts à loisir afin de voir lequel est le plus gros ! Les molécules se déplacent moins vite que les électrons, mais leurs mouvements sont rapides comparés à nos standards ordinaires. Pourquoi pouvons-nous les créditer de moments dipolaires électriques permanents? Si cette incohérence vous gênait, on doit vous féliciter. On ne peut donner de réponse complète sans un peu de mécanique quantique, mais la différence essentielle fait intervenir l'échelle de temps du mouvement. Le temps que met la molécule pour interagir avec ses voisins est en général plus court que le temps que le mouvement intrinsèque de la molécule met pour moyenner à zéro le moment dipolaire. Par conséquent, la molécule agit réellement comme si elle avait le moment dont nous avons parlé. Un temps très court est qualifié de « permanent » dans le monde de la molécule ou de ses voisins.

La figure 9.16 montre quelques molécules polaires communes avec la direction et la grandeur du moment dipolaire permanent indiquées pour chacune. La molécule d'eau a un moment dipolaire citrique car elle est pliée au centre, les

axes O-H faisant entre eux un angle, d'environ 105°. C'est une curiosité structurale qui a des conséquences de la plus grande

³⁵ II existe une bonne raison pour cela. Les champs électriques internes dans les atomes et les molécules sont naturellement de l'ordre de $e/(4\pi\varepsilon_0 \ 10^{-20} \ m^2)$ ce qui vaut en gros 10^{11} volts/m! Nous ne pouvons pas appliquer un tel champ â un matériau au laboratoire pour la raison assez directe qu'il ferait voler la matière en éclats.

importance. Le moment dipolaire de la molécule est largement responsable des propriétés de l'eau en tant que solvant; il joue un rôle décisif dans la chimie qui se passe en milieu aqueux. Il est difficile d'imaginer ce à quoi le monde ressemblerait si les parties de la molécule H_20 , étaient disposées linéairement, comme celles de la molécule CO_2 ; nous ne serions probablement pas là pour l'observer. Nous nous dépêchons d'ajouter que la forme de la molécule H_2O n'est pas un caprice de la nature. La mécanique quantique a clairement révélé pourquoi une molécule composée d'un atome à huit électrons relié à deux atomes à un électron doit préférer être pliée.

Il y a une différence frappante entre le comportement comme diélectrique d'une substance polaire et celui d'un matériau composé de molécules non polaires. La constante diélectrique relative de l'eau est environ 80, celle du méthanol 33, tandis qu'un liquide non polaire typique pourrait avoir une constante diélectrique relative de 2. Dans une substance non polaire l'application d'un champ électrique induit un faible moment dipolaire dans chaque molécule. Dans une substance polaire, les dipôles de grande force sont déjà présents, mais en l'absence de champ, ils pointent dans des directions aléatoires, de sorte qu'ils n'ont pas d'effet à grande échelle. Un champ électrique appliqué ne fait que les aligner à un certain degré. Dans les deux processus, cependant, les effets macroscopiques seront déterminés par la quantité totale de polarisation par unité de volume.

9.8 Champ électrique créé par la matière polarisée



Fig. 9.17 Une colonne de matière polarisée (a) produit le même champ en tout point extérieur *A*, que deux charges situées â chaque extrémité de la colonne (b).

Le potentiel dû à toute la colonne est 184

Supposons que nous construisions un bloc de matière en assemblant dans une région de l'espace préalablement vide un très grand nombre de molécules. Supposons de plus que chacune de ces molécules soit polarisée dans la même direction. Pour le moment, nous n'avons pas à nous préoccuper de la nature des molécules ou de la façon du maintenir la polarisation. Nous ne nous intéressons qu'au champ électrique qu'elles produisent quand elles sont dans cet état; plus tard nous pourrons introduire tous les champs dûs aux autres sources qui pourraient se trouver dans les parages. Si vous voulez, vous pouvez imaginer que ce sont des molécules avec un moment dipolaire permanent et qu'elles ont été nettement alignées puis gelées dans cette position. Tout ce que nous devons spécifier est N, le nombre de dipôles par mètre cube, et le moment **p** de chaque dipôle. Nous supposerons que N est si grand que tout petit volume macroscopique dv contient un nombre tout à fait grand de dipôles. La grandeur du dipôle total dans un tel volume est Np dv. En tout point éloigné de cet élément de volume en comparaison de sa taille, le champ électrique dû à ces dipôles particuliers sera pratiquement le même que si on les remplaçait par un seul moment dipolaire de grandeur $N\mathbf{p}$ dv. Nous appellerons $\mathbf{p}N$ densité de polarisation et la représenterons par P, une quantité vectorielle de dimensions charge m/m³, ou charge/ m². Ainsi P dv est le moment dipolaire qu'on doit associer à tout petit élément de volume dv en vue de calculer le champ électrique à distance. Au fait, notre matière est un assemblage de molécules neutres seulement; il n'y a pas de charge totale dans le système ou sur toute molécule, de sorte que nous n'avons à considérer que les moments dipolaires comme sources du champ distant.

Sur la figure 9.17, on montre une mince colonne, ou cylindre, de cette matière polarisée. Sa section est da, et elle s'étend verticalement de z_1 à z_2 . La densité de polarisation **P** à l'intérieur de la colonne est uniforme sur toute la longueur; elle pointe dans la direction des z positifs. Nous sommes sur le point de calculer le potentiel électrique, en un point extérieur à cette colonne de polarisation. Un élément du cylindre, de hauteur dz a un moment dipolaire **P** $dv = \mathbf{P} da dz$. On peut écrire sa contribution au potentiel au point A en se référant à notre formule, équation 9.12, pour le potentiel d'un dipôle.

$$dV_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{P \, da \, dz \cos\theta}{r^2} \tag{9.27}$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} P \mathrm{d}a \int_{z_1}^{z_2} \frac{\mathrm{d}z\cos\theta}{r^2}$$
(9.28)

C'est plus simple qu'il ne paraît : $dz \cos \theta$ est juste dr, de sorte que l'expression à intégrer est une différentielle parfaite, - d(1/r). Le résultat de l'intégration est donc

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} P \mathrm{d}a \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \tag{9.29}$$

L'équation 9.29 est précisément la même que l'expression du potentiel que produiraient en A deux charges ponctuelles, une charge positive de grandeur P da située au sommet de la colonne à une distance r_2 de A, et une charge négative de même grandeur située au bas de la colonne. La source qui est constituée par une colonne de matière uniformément polarisée est équivalente, tout au moins en ce qui concerne son champ électrique en tout point *extérieur*, à deux charges concentrées.

Nous pouvons prouver cela rigoureusement d'une autre façon sans mathématiques. Considérons une petite section de la colonne de hauteur dz, qui contient un moment dipolaire P da dz. Faisons une imitation de cette partie ou remplaçons-la par un isolant non polarisé de même forme et de même taille, et collons une charge + P da au sommet et une charge - P da dans la bas. Ce petit bloc a maintenant le même moment dipolaire que le morceau de notre colonne originale; il donnera donc une contribution identique au champ en tout point éloigné A. (Le champ à l'intérieur du remplacement, ou très près, pourra différer du champ de l'original - mais cela ne nous intéresse pas.) Préparons maintenant tout un ensemble de blocs et empilons-les pour imiter la colonne polarisée. Ils doivent donner la même contribution que sa contrepartie dans l'original (fig. 9.17 b). Regardons maintenant ce que nous avons ! A chaque joint la charge positive au sommet d'un bloc coïncide avec la charge négative du bas du bloc du bas, et la charge nulle. Les seules charges qui restent sans compensation sont la charge négative - P da au bas du bloc du bas, et la charge + P da sur le sommet du bloc du haut. Vues d'un point distant tel que A, elles ressemblent à des charges ponctuelles. Nous concluons, comme avant, que deux telles charges produisent en A exactement le même champ que celui de toute notre colonne de matière polarisée.

Sans plus de calculs, nous pouvons étendre cela à une lame, ou cylindre droit, de n'importe quelles proportions, polarisée uniformément dans une direction perpendiculaire à ses faces parallèles (fig. 9.18 *a*). On peut simplement diviser la lame en une gerbe de colonnes; le potentiel à l'extérieur sera la somme des contributions des colonnes, chacune d'entre elles pouvant être remplacée par une charge à chaque bout. Les charges du dessus, *P* da sur chaque bout de colonne de surface da, forment une couche uniforme de charge de surface de densité $\sigma = P$ Coulomb par unité de surface. Nous concluons que le potentiel partout à l'*extérieur* d'une lame ou d'un cylindre uniformément polarisée est précisément celui qui résulterait de deux couches de charges superficielles situées là où se trouvent les surfaces supérieure et inférieure de la lame, avec une densité de charge superficielle

constante $\sigma = +P$ et $\sigma = P$ respectivement (fig. 9.18 *b*).

Nous ne sommes pas encore tout à fait prêts pour dire quoi que ce soit sur le champ à l'intérieur de la lame. Cependant, nous connaissons le potentiel en tous points de la surface de la lame, dessus, dessous ou côtés. On peut relier tout couple de points *A* et *B* par un chemin qui se trouve entièrement dans le champ externe, de sorte que l'intégrale curviligne $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ est entièrement déterminée par le champ externe.



Fig. 9.18 Un bloc de matière polarisée (a) est équivalent à deux couches de charge (b), tout au moins en ce qui concerne le champ extérieur.

Elle doit être la même que l'intégrale le long du parcours A'B' sur la figure 9.18 *b*. Un point situé littéralement sur la surface du diélectrique pourrait être à portée des champs moléculaires intenses, le « champ au voisinage » de la molécule dont nous n'avons pas tenu compte. Mettons nous d'accord pour définir comme limite du diélectrique une surface assez éloignée du noyau atomique le plus extérieur - 10 ou 20 angströms seraient une marge suffisante -de sorte que pour tout point à l'extérieur de cette limite, les a champs au voisinage » des atomes individuels fournissent une contribution négligeable à toute

l'intégrale curviligne de A à B.

Avec cela en tête, considérons une plaque large, plutôt mince, de matière polarisée, d'épaisseur h, dont la figure 9.19 a montre

une section. La figure 9.19 *b* montre, aussi en section, les nappes de charges équivalentes. Pour le système de deux couches de charges nous connaissons bien sûr le champ dans l'espace à la fois à l'extérieur et entre les couches. L'intensité du champ à l'intérieur, bien loin des bords, doit être juste σ/ε_0 et il doit pointer vers le bas, de sorte que la différence de potentiel entre les points *A'* et *B'* est $\sigma h/\varepsilon_0$ volts. La même différence de potentiel doit exister entre les points correspondants *A* et *B* de notre lame polarisée, car le champ *extérieur* en enter est le même dans les deux systèmes.

Le champ est-il aussi identique à l'intérieur? Certainement *pas*, car la lame est pleine d'électrons et de noyaux positifs, avec des champs de millions de volts par centimètre pointant ici dans une direction, là dans une autre. Mais une chose *est* la même : la circulation du champ, calculée sur *tout* trajet interne de A à B, doit être juste $V_{\rm B} - V_{\rm A}$, ce qui d'après ce que nous avons vu, est identique à $V_{\rm B'} - V_{\rm A'}$, qui est égal à $\sigma h/\varepsilon_0$ ou Ph/ε_0 . Il doit en être ainsi car l'introduction des charges atomiques, quelle que soit leur distribution, ne peut pas détruire la propriété de conservation du champ électrique, qu'on exprime en

énonçant que $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ est indépendant du trajet ou que rot $\mathbf{E} = 0$.

Nous savons que sur la figure 9.19 b la différence de potentiel entre les couches du haut et du bas est presque constante, sauf près des bords, car le champ électrique interne est pratiquement uniforme. Par conséquent, dans la partie centrale de notre plaque polarisée la différence de potentiel entre le dessus et le dessous doit

de même être constante. Dans cette région la circulation f E • dl prise de *tout* point A du dessus de la lame à tout point B du dessous, sur n'importe quel trajet, doit toujours donner la même valeur Ph/ε_0 . La figure 9.20 est une « vue agrandie » de la région centrale de la lame, dans laquelle on a mis des molécules polarisées qui ressemblent un peu à des molécules H₂O pointant toutes dans le même sens. Nous n'avons pas essayé de décrire les champs très intenses qui existent à l'intérieur des molécules ou entre elles. (A dix angströms de distance d'une molécule d'eau, son champ se monte à plusieurs dizaines de millions de volts/m, comme vous pouvez le découvrir d'après le tableau 9.1 et l'équation 14) Vous pouvez imaginer certaines configurations de champ plutôt compliquées au voisinage de chaque molécule. Maintenant le **E** qui se trouve

dans $\mathbf{E} \cdot \mathbf{dI}$ représente le champ électrique total en un point donné de l'espace, à

l'intérieur ou à l'extérieur d'une molécule; il comprend ces champs intenses et compliqués que nous venons de mentionner. Nous avons atteint la conclusion remarquable que n'importe quel trajet à travers ce désordre de charges et de champs, qu'il évite les molécules ou qu'il les pénètre, doit donner la même valeur pour la circulation, c'est-à-dire la valeur que nous trouvons dans le système de la figure 9.19 *b*, où le champ est tout à fait uniforme et a la valeur P/ε_0 .

Ceci nous dit que la *moyenne spatiale* du champ électrique dans notre lame polarisée doit être - P/ε_0 . Par moyenne spatiale d'un champ **E** sur un certain volume *V*, que nous pourrions représenter par $\langle E \rangle_V$, nous voulons dire précisément ceci



Fig. 9.20 La circulation du champ m même le long de n'importe quel chem

les moments dipolaires pointent tous dans la même direction parallèle à l'axe.
(b) Coupe axiale du disque.
(c) Coupe du disque de charge équivalent.

(c)

Fig. 9.21 (a) Un disque compose de molécules polaires dont

 $= 0.18 \text{ C/m}^2$

$$\langle \mathbf{E} \rangle_{V} = \frac{1}{V} \int_{V} \mathbf{E} \, \mathrm{d}v$$
 (9.30)

Une façon d'échantillonner le champ de façon impartiale en de nombreux petits dv égaux, en lesquels on pourrait diviser *V*, serait de mesurer le champ le long de chaque ligne d'une « gerbe » de lignes parallèles proches les unes des autres. Nous venons juste de voir que la circulation de **E** le long de n'importe lequel ou de tous ces trajets est la même que si nous étions dans un champ électrique constant d'intensité - P/ε_0 . C'est la justification de notre conclusion selon laquelle $\langle \mathbf{E} \rangle = -P/\varepsilon_0$.

Ce champ moyen est une quantité *macroscopique*. Le volume sur lequel nous prenons la moyenne devrait être assez grand pour contenir un très grand nombre de molécules, sinon la moyenne va fluctuer d'un tel volume au volume voisin. Le champ moyen $< \mathbf{E} >$, défini par l'équation 9.30, est réellement le seul genre de champ électrique macroscopique à l'intérieur d'un diélectrique dont nous pouvons parler. Dans le contexte d'une description macroscopique de la matière, il fournit la seule réponse satisfaisante à la question : « qu'est le champ électrique à l'intérieur d'un matériau diélectrique ? »

Nous pouvons appeler champ *microscopique* le **E** sous le signe intégrale à droite de l'équation 9.30. Si nous envoyons quelqu'un pour mesurer les valeurs du champ dont nous avons besoin pour l'intégrale curviligne, il mesurera des champs électriques dans le vide, en présence, bien entendu, de charges électriques. Il aura besoin d'instruments très petits, car on pourra lui demander de mesurer le champ en un point particulier situé juste dans une extrémité d'une certaine molécule. Avons-nous le droit de parler de cette façon de prendre la circulation le long d'un certain trajet qui longe le coin sud-ouest d'une molécule particulière, puis passe à travers sa voisine comme dans un tunnel ? Oui. La justification provient de l'évidence très forte que les lois de l'électromagnétisme marchent jusqu'à une échelle de distances beaucoup plus petite que la taille des atomes. Nous pouvons même décrire une expérience qui servirait à mesurer la moyenne du champ électrique microscopique le long d'un trajet largement compris dans des limites ayant des dimensions atomiques. Tout ce que nous avons à faire est d'envoyer à travers le matériau une particule énergétique chargée, par exemple une particule alpha. On pourrait déduire d'après la variation totale de sa quantité de mouvement, le champ électrique moyen qu'elle a subi sur toute sa trajectoire.

Traitons un exemple numérique faisant intervenir un matériau polarisé. Imaginons un disque de 0,01 m de rayon et de 0,003 m d'épaisseur, comme sur la figure 9.21 *a*. Prenons 3×10^{28} molécules/m³ comme densité de molécules dans le disque. Supposons que ce soient toutes des molécules polaires, ayant chacune un moment dipolaire 6×10^{-10} C • m. Finalement, - ceci étant une hypothèse plutôt hardie- supposons qu'elles soient toutes alignées, comme les molécules de la figure 9.20, avec leurs moments dipolaires pointant dans la même direction, parallèlement à l'axe du disque. Nous allons en discuter le champ en un point *A* à l'intérieur du disque, en un point *B* juste à l'extérieur du disque et en un point *C* à 0,1 m de distance du disque. La polarisation **P** a la valeur

$$P = N_p = (3 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}) \times (6 \times 10^{-30} \text{ Coulomb} \bullet \text{m}) = 0,18 \text{ Coulomb/m}^2$$
(9.31)

On montre sur la figure 9.21 c les couches de charges équivalentes. Si ces couches s'étendaient à l'infini, le champ en un point A entre elles serait simplement a/co ou 2,04 × 10¹⁰ V/m. Ce sera une approximation joliment bonne dans ce cas, car la séparation des couches est relativement petite par rapport à leur diamètre. En réalité, le champ sera légèrement inférieur. Le champ juste à l'extérieur, au point *B*, serait nul pour des couches infinies, mais dans ce cas réel, il aura une valeur relativement petite, et pointera vers la droite. La discontinuité de *E* sur la couche positive sera exactement σ/ϵ_0 ou P/ϵ_0 . Si nous avions besoin de calculer avec précision les champs en *A* et en *B*, nous pourrions utiliser la formule que nous avons établie dans le chapitre 2 pour le champ en un point éloigné tel que *C*, tout ce que nous devons connaître est le moment dipolaire total de l'objet. Vu de *C*, la façon dont les dipôles individuels sont distribués n'a pas beaucoup d'importance. Le disque se comporte comme un seul dipôle de grandeur $P_{tot} = volume \times P = 0.942 \times 10^{-6}$

 $m^3 \times 0,18 \text{ C/m}^2 = 0,17 \times 10^{-6} \text{ Coulomb} \bullet \text{m}.$

 $P_{\text{tot}} = \text{volume} \times P = 0.942 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \times 0.18 \text{ C/m}^2 = 0.17 \times 10^{-6} \text{ Coulomb} \cdot \text{m}.$

Le champ sur l'axe d'un tel dipôle, à 0,1 m de distance, est

$$E_{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{2P_{\text{tot}}}{r^{3}} = 9 \times 10^{9} \frac{0.34 \times 10^{-6}}{(0.1)^{3}} = 3 \times 10^{-6} \,\text{V/m}$$
(9.32)

9.9 Condensateur rempli de diélectrique

Nous avons mis beaucoup de temps pour arriver au problème du condensateur rempli de diélectrique, mais nous allons ouvoir utiliser une certaine compréhension du diélectrique lui-même pour étudier ce problème. Considérons d'abord deux armatures conductrices dans le vide avec une charge - Q sur la plaque du haut et une charge + Q sur celle du bas. La figure 9.22 a est juste la section de la figure 9.1 a avec laquelle nous avons commencé ce chapitre. Le champ E_0 entre les plaques est égal à $Q/\varepsilon_0 S$, et il pointe vers le haut. La différence de potentiel V_{12} entre les plaques est égale à $Qh/\varepsilon_0 S$. La capacité C_0 du condensateur vide est donnée par la formule qui nous est maintenant familière



diélectrique (c), comme étant la superposition d'un

condensateur à vide chargé (a) et d'une lame de matière

polarisée (b).

$$C_0 = \frac{Q}{V_{12}} = \frac{\varepsilon_0 S}{h} \tag{9.33}$$

Plaçons maintenant un diélectrique entre les plaques, Le champ va polariser les atomes ou molécules du diélectrique. A ce stade, nous ne pouvons pas prédire la grandeur du moment dipolaire induit sur chaque molécule, car, dans cette situation, le champ qui agit sur la molécule, n'est pas que le champ \mathbf{E}_0 , mais il inclut aussi une contribution due aux autres molécules. En tout cas, la direction de la polarisation sera parallèle à \mathbf{E}_0 , pour un diélectrique isotrope. Représentons par **P** la grandeur de la densité de polarisation, quelle qu'elle soit.

Nous avons maintenant le système indiqué sur la figure 9.22 c qui consiste en deux couches réelles de charges plus une lime de matière polarisée. C'est la *superposition* de deux distributions de charge que nous avons déjà analysées : celle de la figure 9.22 a et celle de la figure 9.19 a qu'on montre de nouveau sur la figure 9.22 b. Le champ électrique va être la somme des champs de ces deux distributions, le champ E_0 de deux couches réelles de charge, de densité de charge superficielle $\sigma = Q/S$ plus le champ E' de deux couches de charge, de densité $\sigma' = P$ qui sont équivalentes à la lame polarisée. Remarquez que E' est dirigé dans le sens opposé à E_0 car P a la même direction que E_0 ; la couche de charge

positive équivalente se trouve à côté de la plaque chargée négativement. Bien sûr, la raison en est que la charge négative de la plaque a polarisé les atomes du diélectrique en attirant leurs parties positives et en repoussant leurs parties négatives, attirant ainsi la charge positive plus près de cette plaque. Le champ électrique **E** à l'intérieur du condensateur est donc

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{E'} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{P}/\varepsilon_0 \tag{9.34}$$

La grandeur de la différence de potentiel entre les plaques est devenue

$$V_{12} = (\boldsymbol{E}_0 - \boldsymbol{P}/\boldsymbol{\varepsilon}_0)\mathbf{h} \tag{9.35}$$

La charge du condensateur est encore la même. Si on reliait les plaques par un fil, une charge Q s'écoulerait, la diélectrique relaxant pendant ce temps-là vers sa condition non polarisée. Comme la différence de potentiel a été réduite d'un facteur $(E_0 - P/\varepsilon_0)/E_0$ comparé à celui du condensateur vide de même charge, la capacité, $C = Q/V_{12}$, a été multipliée par l'inverse de ce facteur

$$C = C_0 \frac{E_0}{E_0 - P/\varepsilon_0} \tag{9.36}$$

Il vaut mieux exprimer cela en fonction de E, le champ électrique (champ macroscopique, ou moyen) qui existe maintenant dans le condensateur. Comme d'après l'équation 9.34, $E_0 = E + P/\varepsilon_0$, nous avons

$$C = C_0 \frac{E + P / \varepsilon_0}{E} = C_0 \left[1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E} \right]$$
(9.37)

Le rapport de *P* à *E* est une propriété intrinsèque du matériau diélectrique. On appelle ce rapport *susceptibilité électrique* du matériau, et on emploie couramment le symbole $\xi_e = \varepsilon_0 \xi_r$, pour le représenter. La quantité ξ_r n'a pas de dimension. On appelle constante diélectrique relative du matériau toute la quantité entre parenthèses dans l'équation 37; on la représente par ε_r . On définit aussi la constante diélectrique ε par

$$P = \xi_{\rm e} E \qquad ; \qquad \qquad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \xi_{\rm e} = \mathcal{E}_0 \left(1 + \xi_{\rm r} \right) \qquad (9.38)$$

Ce sont juste des définitions; la physique est contenue dans les équations 9.34 et 9.37.



que nous pouvons appeler champ local. C'est le champ local \mathbf{E}_{loc} qui induit réellement le moment dipolaire de l'atome.

les conducteurs, la s intensités de tous condensateur vide n'augmente remplissons l'espace elles. Dans que la séparation dimensions des la petite quantité de bords, sont général les sur dispositions qui isotrope, homogène Avec n'importe conducteurs, le diélectrique est existerait au même conducteurs dans le potentiel seront inachevé se différentes

Nous avons besoin de comprendre le comportement de tout système d'isolants et de conducteurs, les constantes diélectriques des matériaux concernés étant connues. C'est-à-dire que nous voulons pouvoir calculer les champs électriques à l'extérieur des diélectriques, et le champ macroscopique E à l'intérieur, quels que soient les potentiels et les charges sur les conducteurs qu'on s'impose comme conditions aux limites.

La relation quantitative entre la polarisabilité d'un matériau qu'on exprime par la susceptibilité ξ_e , et la polarisabilité des atomes ou molécules dont le diélectrique est composé, reste plutôt mystérieuse. Pour la découvrir, nous aurons à décider quel est le champ que ressent réellement un atome polarisable quand on connaît la moyenne spatiale du champ, ou champ macroscopique, dans son entourage. Ce qu'un atome fixé ressent n'est pas la moyenne spatiale du champ, mais un autre champ en local **F** qui induit réellement la moment dipolaire de l'otome

Cette question appelle une autre vision « microscopique » de l'intérieur du diélectrique.



taillée dans la substance de la lame de la figure 9.18 *a*. A quoi le champ électrique doit-il ressembler, à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère? C'est un problème instructif dont les résultats seront utiles par ailleurs. Comme d'habitude, P représentera la densité de polarisation, constante en grandeur et en direction dans tout le volume de la sphère. On pourrait diviser la matière polarisée, comme la lame de la figure 9.18 a en colonnes parallèles à *P*, qui seraient chacune remplacée par une charge de grandeur ($P \times$ section de la colonne) au-dessus et au-dessous. Ainsi le champ que nous cherchons est celui dune distribution de charge superficielle répartie sur une sphère avec la densité $\sigma = P \cos \theta$. Le facteur cos θ apparaît, comme cela devrait être évident d'après la figure, car une colonne de section d*S* intercepte sur la surface un morceau de surface d'aire d*S*/cos θ . La figure 9.24 b est une coupe médiane à travers cette coque de charge superficielle équivalente dont on a indiqué la densité de charge en variant l'épaisseur du demi-cercle noir supérieur (densité de charge positive) et celle du demi-cercle blanc inférieur (densité de charge négative).

Si cela ne vous est pas déjà venu à l'esprit, cette figure peut suggérer que nous pensions à la polarisation **P** comme provenant d'un léger déplacement vers le haut d'une boule uniformément remplie de charge positive de densité volumique ρ , par rapport à une boule de densité de charge négative ρ . Cela laisserait non compensée la charge positive qui dépasse en haut et la charge négative qu'on voit en bas, la quantité de ces charges variant précisément comme cos θ sur toute la frontière. A l'intérieur, là où les densités de charge positive et négative se recouvrent encore, elles s'annuleraient exactement l'une l'autre. En adoptant cette façon de voir, nous percevons un moyen très facile de calculer le champ à l'extérieur qui est le même que si toute la charge était concentrée au centre. Donc la superposition de deux sphères de charge totale + Q et - Q respectivement, dont les centres sont séparés par un petit déplacement s, produira le même champ extérieur que celui de deux charges ponctuelles + Q et - Q à s m de distance. C'est juste un dipôle de moment dipolaire $p_0 = Qs$.

Fig. 9.26 Le champ à l'extérieur d'une sphère uniformément polarisée est exactement le même que celui d'un dipôle place au centre de la sphère.

Une description microscopique de la substance polarisée nous conduit à la même conclusion. Sur la figure 9.25 *a*, on a grossièrement représenté les dipôles moléculaires vraiment responsables de la polarisation **P** comme s'ils étaient composés individuellement d'une paire de charges q et -q à s m de distance, pour donner un

moment dipolaire p = qs. Pour N dipôles par mètre cube, P = Np = Nqs; le nombre total de tels dipôles dans la sphère est $(4\pi/3)r_{0}^{3}N$. Les charges positives, considérées séparément, sont distribuées dans toute une sphère qui contient la charge totale Q



polarisée, à la fois à l'intérieur et à l'extérieur.

rement, sont distribuees dans toute une sphere qui contient la charge totale $Q = (\pi/3)r^3_0Nq$. Les charges négatives occupent une sphère analogue dont le centre est déplacé (fig. 9.25 c). Il est clair qu'on peut remplacer chacune de ces distributions de charge par une charge ponctuelle en son centre, si nous ne nous préoccupons que du champ bien à l'extérieur de la distribution. « Bien à l'extérieur » veut dire assez loin de la surface pour que la granularité réelle de la distribution de charge ne compte pas; bien sûr c'est quelque close que nous devons toujours oublier quand nous parlons de champs macroscopiques. Ainsi pour nos buts présents, l'image des sphères de densités de charge uniformes qui se recouvrent, et la description en fonction des vrais dipôles dans le vide sont équivalentes (³⁶) cela montre que le champ à l'extérieur de la distribution est le même que celui d'un seul dipôle situé au centre. Le moment du dipôle p_0 est simplement la polarisation totale de la sphère

$$p_0 = Qs = \frac{4\pi}{3} r_0^3 Nqs = \frac{4\pi}{3} r_0^3 P$$
(9.39)

Les quantités Q et s, prises séparément, n'ont aucune signification et on peut

les laisser maintenant.

Le champ extérieur d'une sphère polarisée est celui d'un dipôle central p_0 , pas seulement à grande distance de la sphère; c'est le pur champ du dipôle jusqu'à la surface, macroscopiquement parlant. Tout ce que nous avons eu à faire pour construire la figure 9.26, qui est une représentation des lignes du champ extérieur, était de cacher une zone circulaire de la figure 9.5.

³⁶ Cela a pu paraître assez évident, mais nous avons donné tous les détails dans ce cas pour apaiser toute suspicion du fait que ce modèle de la « boule de charge continue », qui est si différente de ce que nous savons être l'intérieur dune substance réelle, puisse nous induire en erreur.

Le champ intérieur pose un problème différent. Considérons le potentiel électrique V(x, y, z). Nous connaissons le potentiel en tous points de la surface sphérique car nous connaissons le champ extérieur. C'est juste le potentiel du dipôle, $p_0 \cos \theta/(4\pi\epsilon_0 r^2)$, qui devient sur la surface sphérique de rayon r_0

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p_0 \frac{\cos\theta}{r_0^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3} Pr_0 \cos\theta$$
(9.40)

Comme $r_0 \cos \theta = z$, nous voyons que le potentiel en un point sur la sphère ne dépend que de sa coordonnée z :

$$V = \frac{P_z}{3\varepsilon_0} \tag{9.41}$$

Le problème qui consiste à trouver le champ intérieur s'est réduit à ceci : l'équation 9.41 donne le potentiel en tout point de la frontière de la région, à l'intérieur de laquelle V doit satisfaire l'équation de Laplace. D'après le théorème d'unicité que nous avons démontré dans le chapitre 3, cela suffit pour déterminer V partout à l'intérieur. Si nous pouvons trouver une solution, ce doit être la solution. Or, la fonction Cz, où C est n'importe quelle constante, satisfait l'équation de Laplace, donc l'équation 9.41 nous a en réalité fourni la solution pour le potentiel à l'intérieur de la sphère. C'est le potentiel d'un champ électrique uniforme dans la direction -z

$$E_{z} = -\frac{\partial V_{in}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{Pz}{3\varepsilon_{0}} \right] = -\frac{P}{3\varepsilon_{0}}$$
(9.42)

Comme la chose qui distinguait l'axe z était la direction de P, nous pouvons écrire notre résultat sous la forme plus générale

$$\mathbf{E}_{\rm in} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \tag{9.43}$$

C'est le champ macroscopique E dans le matériau polarisé.

La figure 9.27 montre à la fois le champ intérieur et le champ extérieur. Au pôle supérieur de la sphère, l'intensité du champ extérieur pointant vers le haut est, d'après l'équation 9.14 du champ d'un dipôle.

$$E_{z} = \frac{2}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{\mathbf{P}_{0}}{r^{3}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{2(4\pi r_{0}^{3} P/3)}{r_{0}^{3}} = \frac{2P}{3\varepsilon_{0}}$$
(9.44)

ce qui est juste deux fois la grandeur du champ intérieur qui pointe vers le bas.

Cet exemple illustre les règles générales du comportement des composantes du champ à la surface d'un milieu polarisé. A la surface d'un milieu polarisé, **E** a exactement la même discontinuité que celle qu'il aurait sur une surface portant une densité de charge superficielle $\sigma = P_n$ dans le vide. Le symbole P_n représente la composante de **P** normale à la surface, vers l'extérieur. Il en résulte que la composante normale de **E** doit varier brusquement d'une quantité P_n / ε_0 , tandis que la composante de **E** parallèle à la surface reste continue c'est-à-dire qu'elle a la même valeur des deux côtés de la surface. En effet, au pôle nord de notre sphère, la variation totale de E_z , est

$$2P/(3\varepsilon_0)-(-P/3\varepsilon_0))=P/\varepsilon_0$$

En vous référant à l'équation 9.14 du champ du dipôle, vous pouvez vérifier que la composante de **E** parallèle à la surface est continue partout sur la sphère en allant de l'intérieur à l'extérieur.

Aucune de ces conclusions ne dépend de la façon de produire la polarisation de la sphère. En supposant que n'importe quelle sphère est uniformément polarisée, la figure 9.27 présente *son* champ. A cela on peut superposer tout champ dû à d'autres sources, représentant ainsi de nombreux systèmes possibles. Cela n'affectera pas la discontinuité de **E** à la frontière du milieu

polarisé. Les règles que nous avons déjà énoncées s'appliquent dans n'importe quel système, la discontinuité de E étant seulement déterminée par la polarisation existante.

9.11 Sphère diélectrique dans un champ uniforme



Fig. 9.28 Les sources du champ \mathbf{E}_{o} restent fixes. La sphère diélectrique développe une certaine polarisation \mathbf{P} . Le champ total est la superposition de \mathbf{E}_{o} et de celui de la sphère polarisée.

dépend de la valeur de E à l'intérieur de la sphère

Comme exemple, mettons une sphère de matière diélectrique caractérisée par une constante diélectrique relative $\varepsilon_r = \varepsilon /\varepsilon_0$ dans un champ électrique uniforme \mathbf{E}_0 comme celui qui règne entre les plaques parallèles d'un condensateur dans le vide, comme sur la figure 9.28. On considère que les sources de ce champ, les charges sur les plaques, sont éloignées de la surface, de sorte qu'elles ne bougent pas quand on introduit la sphère. Alors, quel que soit le champ au voisinage de la sphère, il restera pratiquement égal à \mathbf{E}_0 à grande distance. C'est ce que nous voulons dire quand nous mettons une sphère dans un champ uniforme. Le champ total \mathbf{E} n'est plus uniforme au voisinage de la sphère. C'est la somme du champ uniforme \mathbf{E}_0 des charges distantes, et du champ \mathbf{E}' créé par la matière polarisée elle-même

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathrm{o}} + \mathbf{E'} \tag{9.45}$$

Le champ E' dépend de la polarisation P du diélectrique, qui, à son tour,

$$\mathbf{P} = \xi_{e} \mathbf{E} = (\varepsilon_{r} - 1) \varepsilon_{0} \mathbf{E}$$
(9.46)

Nous ne savons pas encore ce qu'est le champ total **E**; nous savons simplement que l'équation 9.46 doit s'appliquer en tout point à l'intérieur de la sphère. *Si* la sphère devient uniformément polarisée, une hypothèse qu'il faudra justifier d'après nos résultats,



la relation entre la polarisation de la sphère et son propre champ E', aux points intérieurs, a déjà été donnée par l'équation 9.43. (Dans l'équation 9.43, nous nous sommes servis du symbole E pour représenter ce champ; dans ce cas, seul ce champ était présent.)

$$\mathbf{E}'_{\text{in}} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \tag{9.47}$$

Nous avons maintenant assez d'équations pour éliminer **P** et **E'**, ce qui devrait nous donner une relation entre **E** et \mathbf{E}_{o} . En nous servant des équations 9.45 à 9.47, nous trouvons

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} = \mathbf{E}_0 - \frac{\varepsilon_r - 1}{3}\mathbf{E}$$
(9.48)

Fig. 9.29 Le champ total \mathbf{E} , à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère diélectrique.

D'où pour E,

$$\mathbf{E} = \left(\frac{3}{2 + \varepsilon_r}\right) \mathbf{E}_0 = \left(\frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon}\right) \mathbf{E}_0$$
(9.49)

Comme s, est supérieur à un, le facteur $3/(2 + \varepsilon_r)$ sera inférieur à un; le champ à l'intérieur du diélectrique est plus faible que \mathbf{E}_0 . La polarisation est

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\mathbf{E} = 3\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right) \mathbf{E}_0 = 3\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right) \mathbf{E}_0$$
(9.50)

On voit maintenant que l'hypothèse de la polarisation uniforme est cohérente (³⁶). Pour calculer le champ total **E** à l'extérieur de la sphère, nous devons ajouter vectoriellement \mathbf{E}_{o} au champ du dipôle central dont le moment dipolaire est égal à **P** fois le volume de la sphère. On montre sur la figure 9.29 quelques lignes du champ **E**, à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère diélectrique.

9.12 Champ d'une charge dans un milieu diélectrique, et théorème de Gauss

Supposons qu'il y ait quelque part à l'intérieur d'un très grand volume de diélectrique homogène une charge concentrée Q, qui ne fasse pas partie de la structure moléculaire régulière du diélectrique. Imaginons, par exemple, qu'on ait chargé une petite sphère métallique et qu'on l'ait fait tomber dans un récipient plein d'huile. Comme nous l'avons dit plus haut, le champ électrique dans l'huile est simplement $1/\varepsilon_r$, fois le champ que Q produirait dans le vide

$$E = \frac{1}{\varepsilon_{\rm r}} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$
(9.51)

Il est intéressant de voir comment marche le théorème de Gauss. L'intégrale de surface de \mathbf{E} (qui, rappelons-nous, est le champ macroscopique ou moyenné dans l'espace) prise sur une sphère entourant Q donne Q/ε si nous croyons l'équation 9.51, et non Q/ε_0 . Pourquoi pas ? La réponse est que Q n'est pas la seule charge à l'intérieur de la sphère. Il y a aussi toutes les charges qui composent les atomes et les molécules du diélectrique. Ordinairement tout volume d'huile est électriquement neutre. Mais maintenant l'huile est polarisée radialement, ce qui veut dire que la charge Q, qu'on suppose positive, attire vers elle les charges négatives des molécules d'huile et repousse les charge positives. Bien que le déplacement soit très petit dans chaque molécule, en moyenne toute sphère que nous traçons autour de Q contient tout de même plus de charge négative de molécule d'huile. Par conséquent la charge totale dans la sphère, y compris la charge « étrangère » Q au centre, sera inférieure à Q. En fait elle vaut Q/ε_r .

Il est souvent utile de distinguer entre la charge « étrangère » Q et les charges qui constituent le diélectrique lui-même. Nous avons un

certain degré de contrôle sur la première - on peut ajouter ou retrancher de la charge à un objet, tel qu'une plaque de condensateur. On l'appelle souvent charge « fibre ». On appelle d'habitude charges « liées » les autres charges qui font partie intégrale des atomes ou molécules du diélectrique. Charge *structurale* pourrait être un meilleur nom. Ces charges ne sont pas mobiles, mais elles sont plus ou moins liées élastiquement. Elles contribuent à la polarisation par de légers déplacements.

On peut définir une quantité vectorielle qui est reliée à la charge libre seulement, par quelque chose comme le théorème de Gauss. Dans le système que nous avons examiné - une charge ponctuelle Q immergée dans un diélectrique - le vecteur cE a cette propriété. C'est-à-dire que $\int \mathcal{E} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ pris sur une certaine surface fermée S, est égal à Q si S entoure Q et à zéro si elle ne l'entoure pas. Par superposition, cela doit s'appliquer à tout ensemble de charges libres décrites par une densité de charge ρ_{libre}

$$\int_{\mathbf{S}} \boldsymbol{\varepsilon} \, \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = \int_{V} \boldsymbol{\rho}_{libre} \, \mathbf{d} \boldsymbol{v} \tag{9.52}$$

(x, y, z) dans un milieu diélectrique homogène infini

où V est le volume compris à l'intérieur de la surface S. Une telle relation intégrale implique une relation « locale » entre la divergence du champ de vecteur εE et la densité de charge libre

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}\right) = \rho_{\operatorname{libre}} \tag{9.53}$$

³⁶ C'est ce qui rend ce système facile à traiter. Pour un cylindre de diélectrique de longueur finie dans un champ uniforme, cette hypothèse ne marcherait pas. Le champ **E'** d'un cylindre uniformément polarisé - ayant par exemple une longueur égale à son diamètre - ne serait pas uniforme à l'intérieur du cylindre. (A quoi doit-il ressembler?) Par conséquent $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E'}$ ne peut pas être uniforme - mais dans ce cas $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$ ne pourrait pas être uniforme après tout. En fait ce ne sont que les diélectriques de forme ellipsoïdale, dont la sphère est un cas particulier, qui peuvent acquérir une polarisation uniforme dans un champ uniforme.

Comme on a supposé ε constant dans tout le milieu, l'équation 9.53 ne nous dit rien de nouveau. Cependant, elle peut nous aider à isoler le rôle des charges liées. Dans quelque système que ce soit, la relation fondamentale entre le champ électrique **E** et la densité de charge totale $\rho_{\text{libre}}+\rho_{\text{liee}}$ s'applique

div
$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{libre} + \rho_{li\acute{e}})$$
 (9.54)

Il résulte des équations 9.53 et 9.54 que

$$\operatorname{div}\left(\varepsilon - \varepsilon_{0}\right)\mathbf{E} = -\rho_{\mathrm{liée}} \tag{9.55}$$

D'après l'équation 9.38 ($\varepsilon - \varepsilon_0$)**E** = **P**, donc l'équation 9.55 implique que

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho_{\mathrm{li\acute{e}e}} \tag{9.56}$$

L'équation 9.56 est un énoncé qui concerne deux aspects de la distribution de charge liée, et rien de plus. Par conséquent, elle ne peut pas dépendre des conditions qu'on trouve ailleurs dans le système, ni de la façon particulière de maintenir les charges liées. Tout arrangement de charge liée qui a un certain excès local, par unité de volume, de protons nucléaires par rapport aux électrons atomiques doit représenter une polarisation ayant une certaine divergence. Donc l'équation 9.56 doit s'appliquer universellement et non juste pour le diélectrique infini. Vous pouvez acquérir une compréhension de l'identité qu'exprime l'équation 9.56 en imaginant quelques molécules polaires disposées de façon à donner une polarisation ayant une divergence positive (fig. 9.30). Les dipôles pointent vers l'extérieur, ce qui laisse nécessairement une petite concentration de charge négative au milieu. Bien sûr, l'équation 9.56 se rapporte à des moyennes sur des volumes si grands que l'on puisse traiter **P** et ρ_{liee} comme des quantités variant continûment.

A partir des équations 9.54 et 9.56, nous obtenons la relation

$$\operatorname{div}\left(\varepsilon_{0}\mathbf{E}+\mathbf{P}\right)=\rho_{\mathrm{libre}} \tag{9.57}$$

Elle est tout à fait indépendante de toute relation entre **E** et **P**. Elle n'est pas limitée aux matériaux, qu'on appelle diélectriques, dans lesquels **P** est proportionnel à **E**.

On a l'habitude de donner à cette combinaison un nom spécial, celui de vecteur *déplacement électrique* ou *induction électriq*ue que l'on représente par le symbole **D**. C'est-à-dire que nous définissons **D** par

Fig. 9.30 Dipôles moléculaires disposés de telle sorte que div $\mathbf{P} > 0$. Remarquez la concentration de charge négative au milieu, en accord avec l'équation 9.56.

 $\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \, \mathbf{E} + \, \mathbf{P} \tag{9.58}$

Dans un diélectrique isotrope, D est simplement & mais la relation

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\operatorname{libre}} \tag{9.59}$$

s'applique dans toute situation où l'on peut définir les quantités macroscopiques **P**, **E** et ρ .

La forme de l'équation 9.59 peut suggérer que nous devrions considérer **D** comme un vecteur champ dont la source est la distribution de charge libre ρ_{libre} , dans le même sens que la distribution totale de charge est la source de **E**. Cela serait faux. Le champ électrostatique **E** est uniquement déterminé - à l'addition près d'un champ constant - par la distribution de charge ρ car, en plus de la loi div $\mathbf{E} = \rho_l / \varepsilon_0$, il y a l'autre condition universelle, rot $\mathbf{E} = 0$. Il *n'est pas* vrai, en général, que rot $\mathbf{D} = 0$. Ainsi la distribution de charge libre ne suffit pas pour déterminer **D** au moyen de l'équation 9.59. On a besoin de quelque chose d'autre, telle que les conditions aux limites sur les surfaces des divers diélectriques. Les

conditions aux limites sur **D** sont, bien sûr, seulement une façon d'exprimer les conditions aux limites sur **E** et **P**, que nous avons déjà énoncées presque à la fin de la section 9.10.

Dans notre façon de traiter les champs électriques dans la matière, l'introduction de **D** est un artifice, qui n'est pas, globalement, très utile. Nous avons mentionné **D** car il est sanctifié par la tradition depuis Maxwell (37), l'étudiant est sûr de le rencontrer dans d'autres livres, dont beaucoup le traitent avec beaucoup plus de respect qu'il ne mérite.

On peut ainsi résumer nos conclusions essentielles sur les champs électriques dans la matière.

- i) La matière peut être polarisée, sa condition pouvant être complètement décrite, tout au moins en ce qui concerne le champ macroscopique par une densité de polarisation **P**, qui est le moment dipolaire par unité de volume. La contribution d'une telle substance au champ électrique **E** est la même que celle d'une distribution de charge ρ_{lee} , existant dans le vide ayant la densité $\rho_{\text{liee}} = -\text{div } \mathbf{P}$. En particulier, à la surface d'une substance polarisée, où **P** est discontinu, cela se réduit à une densité de charge superficielle $\sigma = -P_n$. On ajoute alors toute distribution de charge libre qui peut être présente, et le champ électrique est le champ que produirait dans le vide cette distribution de charge totale. C'est le champ macroscopique **E** à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de la matière, étant bien entendu qu'à l'intérieur de la matière, il s'agit de la moyenne spatiale du vrai champ microscopique.
- ii) Si **P** est proportionnel à **E** dans une substance, on dit que c'est un diélectrique. Nous définissons la susceptibilité électrique χ_e et la constante diélectrique caractéristique de cette substance $\varepsilon : \chi_e = \mathbf{P}/\mathbf{E}$ et $\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi_r$. Les charges libres immergées dans un diélectrique donnent lieu à des champs électriques qui sont $\varepsilon_0/\varepsilon$ fois plus forts que ceux que ces mêmes charges produiraient dans le vide.

9.13 Relation entre la susceptibilité électrique et la polarisabilité atomique

Le rapport entre la densité de polarisation \mathbf{P} et le champ électrique macroscopique \mathbf{E} dans une substance est la susceptibilité électrique χ_e . Supposons que la substance soit composée d'atomes de polarisabilité atomique α . \mathbf{P} n'est rien d'autre que la somme, dans l'unité de volume, des moments dipolaires \mathbf{p} des atomes individuels. Nous pouvons prédire le moment dipolaire induit d'un atome si nous connaissons α et le champ électrique qui agit sur l'atome pour le polariser. Nous devrions donc pouvoir prédire la susceptibilité χ_e , si nous connaissons α et le nombre d'atomes par unité de volume, N. Essayons de faire une théorie qui relie χ_e et α .



Fig. 9.31 Un arrangement cubique d'atomes dans un cristal. Chaque atome est représenté polarisé.



Le moment dipolaire induit sur un certain atome A est déterminé par le champ, dû à toutes les *autres* sources, qui agit sur cet atome. Ce n'est pas le même que le champ électrique macroscopique dans le voisinage, car ce champ **E** comprend une contribution due aux charges de l'atome A lui-même. Ainsi, notre problème prend un tour intéressant dès le début. Pour rendre claire la situation, nous considérons un système très particulier. Notre substance est faite d'atomes identiques disposés sur un réseau cristallin cubique simple, avec un espacement de *b* m entre plus proches voisins. La polarisation de chaque atome est α . La figure 9.31 est une coupe à travers le réseau. On a indiqué la direction supposée du champ macroscopique **E** dans cette région, ainsi que la distortion des atomes polarisés. Notre question est : quelle est la grandeur du champ qui produit cette distortion ? On peut penser que chaque atome occupe sa propre boîte cubique, et nous supposerons que les atomes sont nettement plus petits que le pas du réseau, de sorte que toute la charge dans un atome se trouve assez près du centre de sa boîte.

Nous appellerons \mathbf{E}_{ext} , le champ qui agit sur l'atome A. Les sources de ce champ sont tout ce qu'il y a d'autre dans le système, ce qui comprend tous les autres atomes et toutes les charges extérieures. \mathbf{E}_{ext} est le champ que nous trouverions dans la boîte si nous pouvions magiquement enlever l'atome A en gelant toutes les autres distributions de charge dans la forme qu'elles ont quand l'atome A est présent. \mathbf{E}_{ext} ne sera pas tout à fait constant dans la boîte A, mais nous supposerons que sa *valeur*

tion de Maxwell de la théorie électromagnétique, et son choix du nom déplacement ar un genre de modèle mécanique de l' « éther ». Dans son livre classique, *A History* ol. I, p. 266 (Harper Torchbooks, New York, 1960) Whittaker a indiqué que ce en un point lorsqu'il a appliqué sa théorie au problème de la réflexion de la lumière par *moyenne* dans la boîte est assez proche de ce que nous voulons. Par moyenne sur le volume compris dans la boîte A nous voulons dire, comme d'habitude, l'intégrale $\int \mathbf{E} \, dv$ divisée par le volume de la boîte. Nous indiquerons de telles moyennes par \ll_{boite} . Soit $\mathbf{E}_{\text{propre}}$ le champ de l'atome A. Le champ microscopique total \mathbf{E}_{mic} est alors en tout point

Fig. 9.32 L'atome A et le champ E_{auto} qui provient de cet atome seulement.

Nous savons que le champ macroscopique \mathbf{E} est égal à la moyenne spatiale du champ microscopique \mathbf{E}_{mic} . La variation de \mathbf{E}_{mic} est bien sûr la même dans toutes les boîtes. De plus, les boîtes remplissent complètement l'espace, sans trous entre elles. Par conséquent, la moyenne de \mathbf{E}_{mic} à l'intérieur d'*une* boîte quelconque doit être la même que sa moyenne sur une région plus grande contenant de nombreuses boîtes (³⁷). Il en résulte que

 $\mathbf{E}_{mic} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_{prope}$

(9.60)

$$\langle \mathbf{E}_{\text{mic}} \rangle_{\text{boite}} = \mathbf{E}$$
 (9.61)

Mais

$$< E_{mic} >_{boite} = < E_{ext} >_{boite} + < E_{propre} >_{boite}$$

la moyenne d'une somme étant la somme des moyennes, de sorte que <Eext>boite, quantité que nous cherchons, est donné par

$$\langle \mathbf{E}_{\text{ext}} \rangle_{\text{boite}} = \mathbf{E} - \langle \mathbf{E}_{\text{propre}} \rangle_{\text{boite}}$$
 (9.62)

Notre problème est maintenant réduit au calcul de $\langle E_{\text{propre}} \rangle_{\text{boite}}$, la moyenne dans la boîte du champ de l'atome qui occupe la boîte.

$$\langle \mathbf{E}_{\text{propre}} \rangle_{\text{boite}} = \frac{1}{b^3} \int_{\text{boite}} \mathbf{E}_{\text{propre}} \, \mathrm{d}\nu$$
 (9.63)

Nous devons comprendre dans l'intégration tous les éléments de volume à l'intérieur de la boîte, à l'intérieur aussi bien qu'à l'extérieur de la distribution de charge atomique. La figure 9.32 suggère ce à quoi le champ \mathbf{E}_{propre} peut ressembler. Il fait apparaître notre tâche énorme. Cependant nous pouvons toujours nous occuper de la distribution de charge, un élément à la fois. Calculons la moyenne sur la boîte du champ \mathbf{E}_{q} dû à une seule charge ponctuelle *q*.



Si la charge ponctuelle était au centre de la boîte, comme sur la figure 9.33 *a*, l'intégrale $\int_{\text{boite}} \mathbf{E}_q dv$ serait nulle. Grâce à la symétrie,

tout élément de volume est équilibré par un autre dans lequel le champ a la même intensité dans la direction opposée. Déplaçons maintenant la charge q vers le haut d'une petite distance z, comme sur la figure 9.33 b. Il y a, au bas de la boîte, une

Fig. 9.33 Pour calculer la « moyenne dans la boîte » du champ de la charge ponctuelle q qui est très légèrement déplacée par rapport au centre de la boîte.

fine couche d'épaisseur 2z, qui n'est pas équilibrée par une couche au sommet. C'est cette couche qui donne maintenant la seule contribution à $\int_{\text{boite}} \mathbf{E}_q dv$. Évidemment, nous n'avons besoin que de calculer la moyenne E_{qz} ; E_{qx} et E_{qy} auront encore une moyenne nulle. Si nous négligeons la légère variation de E_{qz} . sur l'épaisseur de la couche, l'intégrale de volume de E_{qz} prise dans le volume de la couche est juste 2z fois l'intégrale de surface de E_{qz} prise sur un carré qui forme le plan moyen de la couche (fig. 9.33 c).

³⁷ N'acceptez pas cet énoncé crucial sans y réfléchir. Pourquoi des espaces entre les boites le modifierait-il? 196

$$\int_{\text{couche}} E_{qz} \, \mathrm{d}v = 2z \int_{\text{crré}} E_{qz} \, \mathrm{d}S \tag{9.64}$$

Le théorème de Gauss vient alors à notre aide, car l'intégrale de surface dans l'équation 9.64 est juste le flux de \mathbf{E}_q à travers un côté d'un cube centré autour de la charge q. Ce flux doit être juste $q/6\varepsilon_0$ car le cube a six faces équivalentes. Nous concluons que

de sorte que

$$2z \int_{\text{crré}} E_{qz} \, \mathrm{d}S = -2z(q/6\varepsilon_0) = -qz/3\varepsilon_0 \qquad (9.65)$$

$$\langle E_{qz} \rangle_{\text{boite}} = \frac{1}{b^3} \int_{\text{boite}} E_{qz} \, \mathrm{d}v = -\frac{qz}{3\varepsilon_0 b^3}$$

Le signe moins exprime le fait qu'un déplacement d'une charge positive vers le haut entraîne une prépondérance du champ vers le bas dans la boîte. Une formule analogue s'appliquerait à un déplacement dans la direction *x* ou *y*. Donc un petit déplacement **r** à partir du centre dans n'importe quelle direction entraîne un champ moyen dans la boîte égal à $-q\mathbf{r} / 3b^3\varepsilon_0$. Donc pour notre atome complet A, avec sa distribution de charge $\rho(x, y, z)$, le champ moyen dans la boîte sera

$$\langle E_{\text{propre}} \rangle_{\text{boite}} = -\frac{1}{3\varepsilon_0 b^3} \int \mathbf{r} \rho \, \mathrm{d} v$$
 (9.66)

Nous reconnaissons dans l'intégrale $\int \mathbf{r} \rho \, dv$ le *moment dipolaire* **p** de la distribution de charge (Comparez à la définition du moment dipolaire, équation 9.10). Nous avons maintenant

$$\langle E_{\text{propre}} \rangle_{\text{boite}} = -\frac{1}{3\varepsilon_0 b^3} \mathbf{P}$$
 (9.67)

Le reste coule de source. D'après l'équation9.62, nous obtenons aussitôt

$$\langle E_{\text{ext}} \rangle_{\text{boite}} = \mathbf{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0 b^3} \mathbf{P}$$
 (9.68)

Si nous disons que $\langle E_{autre} \rangle_{boite}$ est le champ effectif qui polarise l'atome, alors **p** est relié au champ par la polarisabilité atomique

$$\mathbf{p} = \alpha \left\langle E_{\text{ext}} \right\rangle_{\text{boite}} \tag{9.69}$$

Nous obtenons la relation entre **p** et **E** à partir des équations 9.68 et 9.69

$$\mathbf{p} = \alpha \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{3\varepsilon_0 b^3} \right]$$
(9.70)

On peut l'écrire en fonction de la densité macroscopique de polarisation **P**. Comme le nombre d'atomes polarisés par mètre cube, *N*, est égal à $1/b^3$, **P** = N**p** = **p**/ b^3 . En le substituant dans l'équation 9.70

$$\mathbf{P} = N\alpha \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{3\varepsilon_0} \right]$$
(9.71)

ce qui devient après réarrangement

$$\mathbf{P} = \left[\frac{N\alpha}{1 - N\alpha / \varepsilon_0}\right] \tag{9.72}$$

Le facteur entre crochets doit être la susceptibilité électrique χ_e .

Nous avons fait deux approximations pour arriver à l'équation 9.72. Nous avons supposé que toutes les parties de la distribution de charge atomique sont proches du centre de la boîte; les équations 9.65 et 9.66 ne sont pas précises si z ou \mathbf{r} ne sont pas petits devant b. D'autre part, nous avons utilisé, comme champ qui polarise l'atome, la moyenne de \mathbf{E}_{autre} dans la boîte, au lieu de la valeur de \mathbf{E}_{autre} au centre de la boîte. Pour des atomes empilés aussi serrés qu'ils le sont dans la plupart des cristaux, la première hypothèse n'est pas très réaliste, et la question qui intervient dans la seconde hypothèse ne se pose pas. Nous ne pouvons pas nous attendre à ce qu'un cristal réel obéisse exactement à l'équation 9.72.

Si les atomes de la substance sont très éloignés les uns des autres, de sorte que $N\alpha/3\varepsilon_0 \vee 1$, nous pouvons négliger ce terme dans le dénominateur de l'équation 9.72, ce qui nous laisse

$$\chi_{\rm e} = N\alpha \tag{9.73}$$

C'est le résultat que nous aurions obtenu si nous avions oublié l'influence des dipôles les uns sur les autres. Il s'applique tout à fait bien aux gaz à la densité normale, pour lesquels le terme qu'on a négligé est de l'ordre de 10^{-3} . Dans cette limite l'arrangement géométrique des atomes ne compte pas, seulement leur nombre par mètre cube. Ainsi en mesurant avec précision la constante diélectrique d'un gaz à basse pression, on peut déterminer la polarisabilité atomique sans toutes les complications dues à l'influence mutuelle des dipôles. On peut alors utiliser les mesures sur une forme plus dense de la même substance (³⁹) pour tester une formule théorique telle que l'équation 9.72.

Le terme - $N\alpha/3\varepsilon_0$ au dénominateur de l'équation 9.73 reflète l'interaction des atomes polarisés dans le cristal. Évidemment, l'interaction consiste en un genre de renforcement, conduisant à une polarisation plus grande que celle qui existerait sans elle. Si nous prenons la formule mathématique au sérieux, elle suggère une possibilité surprenante. Que se passerait-il si $N\alpha$ était si grand que $N\alpha/3\varepsilon_0$ devenait égal ou dépassait l'unité? Il apparaît que χ_e deviendrait infini. Cela pourrait vouloir dire une polarisation dans un champ appliqué nul! Cela paraît absurde mais ça ne l'est pas entièrement. On connaît quelques cristaux qui présentent une polarisation électrique spontanée. Cependant, il intervient dans ce cas quelque chose de plus que la polarisation induite, de sorte que notre théorie n'est pas applicable. En fait, pour rendre $N\alpha/3\varepsilon_0$ voisin de un, les atomes doivent être si proches les uns des autres que nos approximations ne sont pas bonnes du tout (voir problème 9.30).

9.14 Variations d'énergie accompagnant la polarisation



Pour charger un condensateur à la différence de potentiel , il faut fournir une quantité de travail égal à $1/2 \ CV^2$. On peut récupérer cette quantité d'énergie en laissant le condensateur se décharger à travers un circuit extérieur. L'énergie a été emmagasinée dans le condensateur chargé. On a montré dans le chapitre 2 que l'on peut calculer l'énergie emmagasinée dans tout système électrostatique en assignant $\varepsilon_0 \ E^2/2$ joules/m³ au champ électrique. Comme rappel, l'intensité *E* du champ dans un condensateur à lames parallèles dans le vide, de surface *S* et d'épaisseur *h* est *V/h*, de sorte que

$$(\varepsilon_0 E^2/2)$$
 3 volume = $\varepsilon_0 V^2 S/2h = 1/2 CV^2$.

Si le condensateur est rempli d'un diélectrique de constante diélectrique relative ε_r et s'il est chargé à la même différence de potentiel *V*, le travail fourni sera plus grand par un facteur ε_r car *C* a été multiplié par ce

³⁹ Ano pout nontrefie que als de la constante de sources de la constante diélectrique des gaz à des pressions et à des densités relativement élevées (voir le problème 9.28).

facteur. Cependant *E* est le même. Par conséquent, l'énergie qu'on doit associer à l'unité de volume du diélectrique n'est pas $\varepsilon_0 E^2/2$ mais $\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2/2 = \varepsilon E^2/2$. On peut généraliser cela à tout système électrostatique. Au lieu de l'équation 2.26, nous avons maintenant



situées aux bouts d'une tige rigide. Un champ E exerce un

couple sur la structure.

Energie =
$$\int \frac{\varepsilon E^2}{2} dv$$
 (9.74)

Comment cette énergie « supplémentaire » est-elle emmagasinée ? Considérons une molécule polarisable isolée à laquelle on peut appliquer un champ électrique. On a représenté la molécule sur la figure 9.34 par deux charges accrochées aux extrémités d'un ressort élastique. Son moment dipolaire \mathbf{p} est un vecteur de grandeur qs. Le champ \mathbf{E} provient d'une certaine source extérieure, telle que les plaques de la batterie qu'on voit sur la figure. Supposons que pendant que le champ \mathbf{E} est présent, les charges s'écartent d'une petite quantité ds. Le moment dipolaire varie alors de qs à q(s + ds). Il y a un mouvement de charge dans la direction de \mathbf{E} , équivalent au déplacement de la charge + q sur une distance ds. (Le fait qu'une extrémité bouge ou les deux n'a pas d'importance.) On a ainsi fourni une quantité de travail Eq ds à la molécule. Le fournisseur ultime de ce travail est la source du champ sur la figure 9.34, c'est la batterie qui maintient une différence de potentiel constante entre les plaques - Si dW représente le travail fourni à la molécule, alors

$$dW = Eq \ ds = \mathbf{E} \bullet d\mathbf{p} \ (9.75)$$

On peut trouver en deux endroits l'énergie emmagasinée qui correspond à cela : dans le

ressort élastique qui s'est allongé, et dans le champ électrique du dipôle moléculaire lui-même, qui a maintenant plus d'énergie totale car les deux charges sont plus éloignées. Dans le cas d'une molécule réelle, nous rte devrions pas faire une telle distinction. tout cela est de l'énergie qui appartient à la structure moléculaire, et si nous allions regarder de près cette structure dynamique, nous trouverions l'énergie sous forme d'énergie potentielle électrostatique et d'énergie cinétique du mouvement des électrons. Le point est simplement celui-ci le travail qui a été fourni à la molécule pour changer sa polarisation, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{p}$, a augmenté l'énergie contenue dans la molécule elle-même de juste cette quantité.

Regardons de quelle quantité d'énergie emmagasinée on peut rendre compte de cette façon. Avec *N* molécules par unité de volume, $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$. Quand \mathbf{P} varie de d \mathbf{P} , $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}$ est l'augmentation d'énergie interne des molécules dans 1 m³. Mais comme $\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} \bullet \mathbf{dP} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E} \bullet \mathbf{dE} = 1/2 \ (\varepsilon - \varepsilon_0) \ \mathbf{d}(\mathbf{E}^2) \tag{9.76}$$

Donc, des $\varepsilon E^2/2$ joules qui apparaissent comme emmagasinés dans le diélectrique, on peut dire que $(\varepsilon \cdot \varepsilon_0)E^2/2$ ont servi à augmenter l'énergie interne des molécules polarisées. Le reste $\varepsilon_0 E^2/2$ est juste l'énergie emmagasinée dans le champ dans le vide.

9.15 Diélectriques composés de molécules polaires

Les molécules ayant des moments dipolaires permanents, ou molécules *polaires*, répondent au champ électrique en essayant de s'aligner parallèlement à lui. Le modèle mécanique approprié, n'est pas constitué par deux charges aux extrémités d'un ressort, mais par deux charges accrochées aux bouts d'un bâton (fig. 9.35). Si le bâton n'est pas parallèle au champ, il y a un couple sur lui, de grandeur *Eqs* sin v. Le travail produit au cours d'un déplacement angulaire dv est (moment 3déplacement angulaire) ou *Eqs* sin dv. On peut aussi l'écrire en fonction du vecteur moment dipolaire **p**, qui est un vecteur de grandeur *qs*, et de la variation d**p** qui se produit pendant la rotation dv. D'après le diagramme, il est clair que la grandeur de dp est *p*dv, et que sa direction est telle que **E** • d**p** = *E*dp sin v. Ainsi dW = **E** • d**p**. Cela est en accord avec l'équation 9.75, comme il se doit.

Si une molécule isolée occupe la position indiquée sur la figure 9.35 à l'instant où on applique le champ électrique **E**, elle va tourner pour s'aligner le long du champ, mais ensuite elle va continuer à tourner au-delà de l'équilibre et elle oscillera comme un pendule, car elle n'a pas de moyen de perdre son énergie. Cependant, une molécule réelle entourée par d'autres molécules peut échanger de l'énergie avec ses voisines, ce qui procure un genre de « frottement » qui amortit l'oscillation. Il semblerait
que cela devrait produire un alignement parfait de toutes les molécules polaires de la substance parallèlement à tout champ appliqué, si petit soit-il. il en serait ainsi à la température du zéro absolu en supposant que la rotation soit encore possible. A toute température au-dessus du zéro absolu, le mouvement aléatoire dû à l'agitation thermique, qui est d'autant plus intense que la température est plus haute, s'oppose à l'alignement ordonné. Le champ appliqué rend énergétiquement favorable le fait qu'un dipôle moléculaire pointe parallèlement au champ, mais comme il est continuellement bousculé par ses voisins, le mieux qu'il puisse faire, c'est de passer un tout petit peu plus de temps à pointer dans la bonne direction plutôt que dans la mauvaise. Dans l'eau, par exemple, un champ de 10⁵ volts/in entraîne une polarisation équivalente à l'alignement parfait d'une molécule sur 3 000 environ. Même ainsi, c'est une polarisation beaucoup plus grande que celle qu'une substance non polaire présenterait dans le même champ; c'est pour cette raison que la constante diélectrique de l'eau est extraordinairement grande. La polarisation en volume dans un diélectrique polaire est en général proportionnelle à l'intensité du champ électrique appliqué et inversement proportionnelle à la température absolue.

9.16 Polarisation dans des champs variables

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que des champs électrostatiques dans la matière. Nous avons besoin de considérer les effets des champs électriques qui varient au cours du temps, comme le champ dans un condensateur utilisé dans un circuit alternatif. La question importante est : les variations de la polarisation arriveront-elles à suivre les variations du champ? Le rapport entre **P** et **E**, à tout instant, sera-t-il le même que dans un champ électrique statique? Pour des variations très lentes, nous ne devrions pas attendre de différence mais, comme toujours, le critère sur la lenteur dépend du processus physique particulier. Il se trouve que la polarisation induite et l'orientation des dipôles permanents sont deux processus qui ont des temps de réponse tout à fait différents.



Fig. 9.36 Variation avec la fréquence de la constante diélectrique relative de l'eau et de la glace. (D'après des informations de C. P. Smyth, « Dielectric Behavior and Structure », McGraw-Hill, New-York, 1955, pour l'eau et P. R. Auty et R. H. Cole, J. Chem. Phys. 24, 1309, 1952, pour la glace).

prochain volume. (Une conséquence en est l'arc en ciel!)

La polarisation induite des atomes et molécules se produit par distorsion de la structure électronique. La masse qui intervient est faible et la structure est très rigide; ses fréquences naturelles de vibration sont extrêmement élevées. Disons-le autrement, les mouvements des électrons dans les atomes et les molécules sont caractérisés par des périodes de l'ordre de 10⁻¹⁶ seconde - quelque chose comme la période d'une onde lumineuse visible. Pour un atome, 10⁻¹⁴ secondes est un temps long. Il n'éprouve pas de difficulté pour réajuster sa structure électronique en un temps de cet ordre. C'est pour cela que les substances strictement non polaires se comportent pratiquement de la même façon du continu jusqu'à des fréquences voisines de celle de la lumière visible. La polarisation suit le champ, et la susceptibilité $\xi_e = P/E$ est indépendante de la fréquence. Ce qui se passe quand la fréquence du champ alternatif se rapproche d'une fréquence naturelle de la structure électronique est une question intéressante que nous réservons pour le

L'orientation d'une substance moléculaire est un processus tout à fait différent de la simple distorsion d'un nuage électronique. Toute l'armature moléculaire doit tourner. A l'échelle microscopique, c'est plutôt comme retourner une cacahuète bout pour bout dans un sac de cacahuètes. Le frottement dû à la traînée tend à produire un retard entre la rotation et le couple, et à réduire l'amplitude de la polarisation résultante. L'endroit de l'échelle des temps où cet effet apparaît varie énormément d'une substance polaire à une autre. Dans l'eau, le « temps de réponse » pour la réorientation du dipôle est de l'ordre de 10^{-11} seconde. La constante diélectrique relative reste autour de 80 jusqu'à des fréquences de l'ordre de 10^{10} Hertz. Au-dessus de 10^{11} Hertz ε_r tombe vers une valeur modeste typique d'un liquide non polaire Les dipôles ne peuvent simplement pas suivre une oscillation du champ aussi rapide. Dans d'autres substances, les solides spécialement, le temps caractéristique peut être beaucoup plus long. Dans la glace juste au-dessous du point de congélation, le temps de réponse de la polarisation électrique est autour de 10^{-5} seconde. La figure 9.36 montre quelques courbes expérimentales de constante diélectrique relative en fonction de la fréquence pour l'eau et la glace. Vous pouvez vous demander si une molécule polaire peut effectivement se retourner dans une substance compacte et rigide telle qu'un cristal. Cela se produit dans de nombreux cristaux, où, grâce à la vibration de ses voisins, une molécule peut soudain trouver assez de « place pour ses coudes » et se retourner en bloc. Mais c'est une question pertinente, car dans quelques solides, il peut se produire des déplacements de charges électriques que l'on ne peut pas décrire comme des rotations de moments dipolaires moléculaires permanents. Nous allons tout de suite retrouver cette question.

9.17 Courant dû aux charges liées

Partout où la polarisation dans la matière varie dans le temps, il y a un courant électrique, un authentique mouvement de charge. Supposons qu'il y ait *N* dipôles dans un mètre cube de diélectrique, et que pendant l'intervalle de temps dt chacun varie de **p** à **p** + d**p**. Alors la densité de polarisation macroscopique **P** varie de $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$ à $\mathbf{P} + d\mathbf{P} = N(\mathbf{p} + d\mathbf{p})$. Supposons que la variation d**p** soit réalisée en déplaçant une charge *q* sur une distance d**s**, dans chaque atome : $q\mathbf{ds} = d\mathbf{p}$. Alors pendant le temps d*t*, il y a en réalité un nuage de charge de densité $\rho = Nq$, qui se déplace à la vitesse $\mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt$. C'est un courant de conduction d'une certaine densité **J** en A/m²

$$\mathbf{J} = \rho \, \mathbf{v} = Nq \, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = N \, \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} \tag{9.77}$$

La relation entre le taux de variation de la polarisation et la densité du courant, $\mathbf{J} = d\mathbf{P}/dt$, est indépendante des détails du modèle. Une polarisation qui varie est un courant de conduction qui ne diffère pas essentiellement de tout autre courant.

Naturellement, un tel courant est une source de champ magnétique. S'il n'y a pas d'autre courant alentour, nous devrions écrire la seconde équation de Maxwell, rot $\mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t + \mu_0 \mathbf{J}$ sous la forme



rot
$$\mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$
 (9.78)

La seule différence entre une densité de courant de conduction « ordinaire » et la densité de courant $\partial \mathbf{P}/\partial t$ est que l'une fait intervenir des charges *libres* en mouvement, l'autre des charges *liées* en mouvement. Il y a une distinction pratique plutôt évidente - vous ne pouvez pas avoir un courant permanent de charges liées, qui dure pour toujours sans varier. D'habitude, nous préférons tenir compte séparément du courant de charge liée et du courant de charge libre en conservant le symbole **J** pour la densité de courant de charge libre seulement. Alors, pour inclure tous les courants dans l'équation de Maxwell, nous devons l'écrire ainsi

rot
$$\mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0$$
 $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\partial \mu_0 \mathbf{J}}{\partial t}$ How the set of the

Dans un milieu diélectrique, $\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ ce qui permet une version plus courte de l'équation 9.79.

rot
$$\mathbf{B} = \varepsilon \,\mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}$$
 (9.80)

Plus généralement, on peut encore raccourcir l'équation 9.79 en introduisant le vecteur **D**, *défini* précédemment par $\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$;

201

rot
$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}$$
 (9.81)

D'habitude, on appelle le terme $\partial \mathbf{D}/\partial t$ courant de déplacement. En réalité, sa partie qui fait intervenir $\partial \mathbf{P}/\partial t$ représente, comme nous l'avons vu, un honnête courant de déplacement des charges réelles en mouvement. La seule partie de la densité totale de courant qui ne soit pas simplement une charge en mouvement, est la partie $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, le vrai courant de déplacement dans le vide que nous avons discuté à la fin du chapitre 7. Nous pouvons écrire pour résumer

Fig. 9.37 Le même réseau cristallin avec les charges groupées par paires en « molécules », de deux façons : vecteur polarisation dirigé vers le bas (a), ou vers le haut (b). Les systèmes sont physiquement identiques; la différence ne se trouve que dans la description.



Il intervient dans la distinction entre charge liée et charge libre une question à laquelle nous n'avons pas vraiment fait face : peut-on toujours identifier sans ambiguïté les « moments dipolaires moléculaires » dans la matière, spécialement dans la matière solide ? La réponse est non. Regardons une mince couche d'un cristal de chlorure de sodium d'un point de vue microscopique. On a montré la disposition des ions sodium positifs et des ions chlore négatifs sur la figure 1.7. La figure 9.37 est une coupe à travers le cristal qui s'étend vers la droite et vers la gauche. Si nous le désirons, nous pouvons considérer une paire d'ions adjacents comme une molécule neutre avec un moment dipolaire. En les groupant comme sur la figure 9.37 a, nous décrivons le milieu comme ayant une densité de polarisation macroscopique uniforme P, un vecteur dirigé vers le bas. En même temps, nous observons qu'il y a une couche de charge positive au sommet du cristal et une couche de charge négative en bas, qui, n'ayant pas été incluses dans nos molécules, doivent être comptées comme charge libre.

Maintenant, nous aurions aussi bien pu choisir des groupes d'ions comme sur la figure 9.37 b. Selon cette description, P est un vecteur vers le haut, mais nous avons une couche de charge libre négative en haut du cristal et une couche de charge libre positive en dessous. Chaque description est correcte. Vous n'aurez pas de mal à en trouver une autre, elle aussi correcte, dans laquelle **P** est nul et où il n'y a pas de charge libre. Chaque description prédit $\mathbf{E} = 0$. Le champ macroscopique **E** est une quantité physique observable. Il ne peut dépendre que de la distribution de la charge, et non de la façon dont nous choisissons de décrire la distribution de la charge.

Cet exemple nous apprend que dons le monde atomique réel, la distinction entre « charge liée » et « charge libre » est plus ou



oins arbitraire, et par conséquent qu'il en est de même pour le concept de densité de polarisation P. Le dipôle moléculaire n'est une notion bien définie que là où on peut identifier les molécules comme telles quand il existe quelque raison physique de dire « cet atome appartient à cette molécule et non à celle-là ». Dans beaucoup de cristaux, un tel alignement n'a pas de sens. Un atome ou un ion peut interagir à peu près aussi fortement avec tous ses voisins; on ne peut considérer comme molécule unique que le cristal en entier.

Tout le caractère arbitraire de la distinction entre charge libre et charge liée persiste, naturellement, dans la distinction entre densité de courant de charge libre **J** et $\partial \mathbf{P}/\partial t$. Considérons la polarisation d'un cristal tel que la glace. C'est un réseau à trois dimensions, mais nous avons dessiné sur la figure 9.38 un réseau à deux dimensions qui a des caractéristiques assez semblables. Appelons-le glace. Sur la figure 9.38 a nous pouvons facilement identifier les molécules H₂O car nous remarquons que chaque atome d'oxygène ajuste deux atomes H près de lui. Le cristal qu'on montre est polarisé. P

pointe vers le bas, car, comme on l'a mentionné plus haut dans ce chapitre, l'extrémité oxygène de la molécule d'eau porte un excès de charge négative. Nous pouvons penser que les parties noires représentant les hydrogènes portent une charge positive. Supposons maintenant que quelque chose se produise pour changer la condition interne du cristal en celle que montre la figure 9.38 *d*, qui est une vue microscopique de la même zone. Maintenant les dipôles sont renversés et nous disons que le cristal a une polarisation *vers* le *haut*.

Le changement *a pu* se produire de deux façons essentiellement différentes, illustrées par les figures 9.38 *b* et *c*. Sur la figure 9.38 *b*, on a appliqué un champ électrique **E** dirigé vers le haut; ce champ a poussé les extrémités positives des molécules vers le haut, retournant effectivement chaque molécule. Il y a un mouvement net de charge positive *vers le haut*; le courant qui le représente sera décrit par le terme $\partial \mathbf{P}/\partial t$ comme nous l'avons juste appris.

Fig. 9.38 On peut transformer le réseau de groupes de molécules polarisées (a) en un réseau de groupes polarises dans la direction opposée (d) de deux façons (b ou c).

La figure 9.38 c décrit un processus tout à fait différent dans lequel l'application d'un champ électrique encourage les hydrogènes à changer de partenaires. Chacun migre vers l'atome O au-dessous de lui le plus proche. (Cela est encore plus facile dans un cristal réel,

car l'hydrogène qui se trouve entre deux atomes O est dans une certaine mesure partagé entre eux, ce qui fournit la « liaison hydrogène » qui maintient le cristal.) La configuration finale apparaît exactement la même. Les dipôles se sont tous renversés - mais il s'est produit un courant de charge positive *vers le bas*. Si nous calculons le courant dans ce processus, pour le mettre dans le membre de droite de l'équation 9.79, nous devons mettre le même terme qu'avant, $\partial P/\partial t$, qui correspond à un courant vers le haut, mais nous devons ajouter un courant de conduction plus grand vers le bas J, correspondant au mouvement vers le bas de chaque charge sur *tout un pas du réseau d*. La différence sera le vrai courant total produit par le déplacement réel vers le bas de la charge positive, sur une distance *s*.

Remarquez que dans chaque cas le courant total s'écoule dans la direction du champ électrique appliqué. Nous ne pourrions pas dire quel processus microscopique se produit à partir de mesures macroscopiques seules. En effet les gens discutent encore du mécanisme de polarisation dans la glace. Pour mettre un terme à cette discussion, on doit connaître assez de choses sur la structure microscopique pour savoir avec sûreté ce qui est le plus facile : tourner une molécule sur elle-même ou transférer des protons. Pour nous, la leçon à tirer est simplement celle-ci : le mouvement microscopique réel de *toutes* les charges détermine le courant de conduction total, libre et lié.

Problèmes

- 9.1 Vous avez un stock de ruban de polyéthylène, de constante diélectrique relative 2,3, de 6 cm de large et de 12 microns d'épaisseur; vous avez aussi un stock de ruban d'aluminium de 5 cm de large et de 12 microns d'épaisseur. Vous voulez fabriquer un condensateur de 0,05 μF de capacité environ, ayant la forme d'un rouleau cylindrique compact. Décrivez comment vous pourriez faire cela, en estimant la quantité de ruban de chacun des stocks qu'il vous faudrait et le diamètre extérieur du condensateur terminé.
- 9.2 En 1726, un certain Professeur Musschenbroek à Leyde chargea de l'eau dans une bouteille en touchant avec une machine électrostatique un fil qui dépassait du col de la bouteille. Quand son assistant, qui tenait la bouteille d'une main, essaya de l'autre main d'enlever le fil, il reçut un choc violent. Ainsi le condensateur simple s'imposa-t-il à l'attention des savants électriciens. La découverte de la « bouteille de Leyde » révolutionna l'expérimentation électrique. Dès 1747, Benjamin Franklin décrivait ses expériences avec la « magnifique bouteille de M. Musschenbroek ». La bouteille n'était rien d'autre que du verre avec un conducteur sur chaque face. Pour voir pourquoi elle produisit une telle sensation, estimez la capacité d'une bouteille de 1 litre avec des parois de 2 mm d'épaisseur, le verre ayant une constante diélectrique relative de 4. Quel est le diamètre de la sphère qui aurait la même capacité dans l'air ?
- 9.3 Quelle est la grandeur du moment dipolaire pour chacune des distributions de charge représentées sur les parties (*a*), (*b*) et (*c*) de la figure? Quelle est la direction du vecteur moment dipolaire **p** ?



- 9.4 Dans la molécule de l'anhydride chlorhydrique, la distance entre le noyau de chlore et le proton d'hydrogène est 1,28 Å. Supposez que l'électron de l'atome d'hydrogène soit entièrement transféré à l'atome de chlore, se joignant aux autres électrons pour former une charge sphérique de symétrie sphérique centrée sur le noyau de chlore. Comment le moment dipolaire électrique dans ce modèle se compare-t-il au vrai moment dipolaire de HCl donné sur la figure 9.16 ? Où doit se trouver le vrai « centre de gravité » de la distribution de charge négative dans la molécule réelle? (Le noyau de chlore a une charge de 17 *e*, le noyau d'hydrogène une charge *e*).
- 9.5 Une molécule de HCl est située à l'origine, le segment H-Cl étant le long de l'axe z avec le Cl vers le haut. Quelle est la direction du champ électrique et son intensité en volts/mètres, en un point situé à 10 Å au-dessus de l'origine sur l'axe z ? en un point à 10 Å de l'origine sur l'axe y ?
- 9.6 On charge à une différence de potentiel de 1 800 volts un condensateur à armatures parallèles de 250 pF (1 picofarad = 10^{-12} Farad) de capacité mesurée. Les armatures sont distantes de 0,015 m. Nous nous intéressons au champ à l'extérieur du condensateur, le champ « de bord » que nous négligeons d'habitude. En particulier, nous aimerions connaître le champ à une distance du condensateur grande par rapport à sa taille. On peut le trouver en traitant comme un dipôle la distribution de charge sur le condensateur. Estimez l'intensité du champ électrique (*a*) en un point à 3 mètres du condensateur dans le plan des armatures, et (*b*) en un point, à la même distance, dans une direction perpendiculaire aux armatures.
- 9.7 Dans la section 4.11 nous avons discuté le temps de relaxation d'un condensateur rempli d'un matériau de résistivité ρ . Si vous revoyez cette discussion, vous verrez que nous avons évité la question de la constante diélectrique relative du matériau. Vous pouvez maintenant compenser cette omission. Introduisez correctement ε_r dans l'expression de la constante de temps. Un condensateur qui fuit, très important pour nous tous, est formé par la membrane d'une cellule vivante, qui est un isolant (parmi ses autres nombreuses fonctions!) qui sépare deux fluides conducteurs. Ses propriétés électriques présentent un intérêt particulier dans le cas des cellules nerveuses, car la propagation d'une impulsion nerveuse est accompagnée par des variations rapides de la différence de potentiel entre l'intérieur et l'extérieur. Dans la note de la page 97, section 3.5, nous avons remarqué que le condensateur formé par la membrane de la cellule a une capacité typique autour de 1 μ F/cm² de surface de membrane. On croit que la membrane est composée d'une matière de constante diélectriques ont indiqué que la résistance de 1 cm² de membrane, mesurée entre le fluide conducteur situé d'un côté et celui situé de l'autre, est autour de 1 000 ohms. Montrez que la constante de temps d'un tel condensateur à fuite est indépendante de la surface du condensateur. Quelle est ici sa valeur ? Où la résistivité ρ de la substance d'une telle membrane tomberait-elle sur la courbe de la figure 4.6?
- 9.8 Si tous les dipôles moléculaires d'une goutte d'eau de 1 mm de rayon pointaient dans la même direction, quelle serait l'intensité du champ maximum (*a*) à 10 cm de distance de la goutte ? (*b*) à la surface de la goutte ?
- 9.9 Notre formule pour la sphère diélectrique peut en réalité servir à décrire une sphère métallique dans un champ uniforme. Pour le démontrer, envisagez le cas limite, $\varepsilon \rightarrow$;, et montrez que le champ externe prend alors une forme qui satisfait les conditions aux limites du conducteur parfait. Qu'en est-il du champ interne ? Tracez quelques lignes de champ dans ce cas limite. Quelle est la grandeur du moment dipolaire induit par le champ E_0 dans une sphère conductrice de rayon a ? Quel serait le diamètre d'une sphère parfaitement conductrice qui aurait la même polarisabilité qu'un atome d'hydrogène ?
- 9.10 De quel pourcentage le moment dipolaire induit dans une gouttelette d'eau ($\varepsilon_r = 81$) diffère-t-il de celui d'une bille de roulement de même diamètre dans le même champ ?



- 9.11 Dans la section 9.10, on a déduit le fait que le champ électrique est uniforme à l'intérieur d'une sphère polarisée à partir de la forme du potentiel à la surface. Vous pouvez aussi le prouver en superposant les champs intérieurs de deux boules de charge dont les centres sont séparés. (*a*) Montrez qu'à l'intérieur d'une distribution de charge sphérique uniforme, **E** est proportionnel à **r**. (*b*) Prenez ensuite deux distributions sphériques de densité ρ et - ρ centrées en C_1 et C_2 , et montrez que le champ résultant est constant et parallèle au segment qui relie C_1 et C_2 . (*c*) Analysez de la même façon le champ d'une longue tige cylindrique qui est polarisée perpendiculairement à son axe.
- 9.12 La figure montre trois condensateurs qui ont même surface et même épaisseur. Appelez C_0 la capacité du condensateur vide. Chacun des autres est à moitié rempli du même diélectrique, de constante diélectrique relative ε_r mais disposé différemment, comme on le montre. Trouvez la

capacité de chacun de ces deux condensateurs. (Négligez les effets de bord.)

9.13 Considérez le condensateur simplement comme un appareil pour emmagasiner de l'énergie. Ce qui limite pratiquement la différence de potentiel entre les plaques d'un condensateur, c'est la « rigidité diélectrique » du diélectrique séparant les armatures, qui est l'intensité maximum du champ qu'on peut appliquer sans qu'il y ait d'étincelle. C'est typiquement autour de 10^7 volts/m pour un bon diélectrique liquide avec $\varepsilon_r \approx 2,3$ et une densité ≈ 1000 kg/m³. Négligeant le poids des électrodes et de la boîte, combien de joules d'énergie peut-on emmagasiner par kilogramme de condensateur ? (Remarquez que c'est indépendant de la capacité, de la forme, du nombre d'armatures, etc.) En prenant les joules/kilogramme comme « facteur de qualité » d'un réservoir d'énergie, comparez le condensateur à une batterie d'automobile et à un volant tournant. Vous devrez deviner raisonnablement le poids et, l'énergie fournie par une batterie, et vous devrez aussi décider quelles sont les limites de la vitesse du volant. Indiquez un avantage des condensateurs comme réservoir d'énergie.



- 9.14 La figure montre les schémas de deux processus différents, dans chacun desquels on introduit un bloc de diélectrique entre les armatures d'un condensateur chargé. Vous devez analyser les variations d'énergie mises en jeu, comme le suggèrent les questions sur les schémas. Que pouvez vous dire de la force sur un diélectrique ?
- 9.15 Une sphère métallique de rayon *a* est entourée par une couche épaisse de diélectrique de rayon intérieur *a*, de rayon extérieur *b* et de constante diélectrique relative $\varepsilon_{\rm r}$. La sphère métallique porte une charge *Q*. Il n'y a pas de charge libre sur ou dans le diélectrique. Analysez à fond ce système, pour déterminer le potentiel de la sphère métallique et la distribution de charge liée.

Chapitre 10 Champs magnétiques dans la matière

10.1 Comment diverses substances répondent à un champ magnétique

Imaginons que nous fassions des expériences avec un champ magnétique très intense. Pour fixer les idées, supposons que nous ayons construit un solénoïde de 0,1 m de diamètre intérieur de 0,4 m de longueur, comme celui que montre la figure 10.1. Son diamètre extérieur est de 0,4 m, la plus grande partie de l'espace étant remplie par des enroulements de cuivre. Cette bobine produirait en son centre un champ continu de 3 Teslas si on l'alimentait avec 400 kilowatts de puissance électrique - il faudrait lui fournir quelque chose comme 120 litres d'eau à la minute pour évacuer la chaleur. Nous mentionnons ces détails pratiques pour montrer que notre appareil, bien qu'il n'ait rien d'extraordinaire, est déjà un aimant de laboratoire plutôt respectable. Le champ en son centre est près de 10^5 fois celui de la terre, et probablement 5 à 10 fois plus fort que celui qui règne près de n'importe quel aimant en fer droit ou en forme de fer à cheval avec lequel vous avez pu faire des expériences. Le champ sera assez uniforme près du centre du solénoïde, tombant, aux deux bouts sur l'axe, à environ la moitié de sa valeur centrale. Il sera plutôt moins uniforme que celui du solénoïde de la figure 6.18, puisque notre bobine est équivalente à une superposition de solénoïdes de rapport longueur-diamètre variant de 4/1 à 1/1. En fait, il n'est pas difficile de calculer exactement le champ axial si nous analysons notre bobine de cette façon et employons la formule (6.44) qu'on a démontrée pour le champ sur l'axe d'un solénoïde dont l'enroulement ne comporte qu'une couche.

On a inclus, sur la figure 10.1, un graphique de l'intensité du champ sur l'axe, pour un champ central de 3 Teslas. L'intensité juste aux bouts de la bobine est 1,8 Teslas, et au voisinage de ces points le champ varie avec un gradient approximativement égal à 17 Tesla/m.

Mettons diverses substances dans ce champ et voyons si une force agit sur eux. En général, nous détectons une force. Elle s'annule quand on coupe le courant dans la bobine. Nous découvrons vite que la force est la plus grande non pas lorsque notre échantillon de la substance est au centre de la bobine où le champ magnétique B. est le plus intense, mais quand il se trouve près des bouts de la bobine où le gradient dB_z/dz est grand. A partir de maintenant, disposons chaque échantillon juste à l'intérieur de la partie supérieure de la bobine. La figure 10.2 montre un tel échantillon contenu dans un tube à essai suspendu à un ressort qu'on peut calibrer en vue d'indiquer la force supplémentaire due au champ magnétique. Naturellement, nous devons faire une expérience de contrôle avec le tube à essai et le fils de suspension seuls, pour tenir compte de la force magnétique sur tout ce qu'il y a en plus de l'échantillon.



Fig. 10.1 (a) Une bobine conçue pour produire un champ magnétique intense. On montre une coupe de l'enroulement refroidi par eau. (*b*) Graphique de l'intensité du champ B_z le long de l'axe de la bobine.

Dans une telle expérience, nous trouvons que la force sur une substance particulière - aluminium métallique, par exemple -est proportionnelle à la masse de l'échantillon et indépendante de sa forme, tant que l'échantillon n'est pas trop grand. (Des expériences avec un petit échantillon dans cette bobine montrent que la force reste pratiquement constante dans une région qui s'étend sur quelques centimètres à l'intérieur du bout de la bobine; si nous utilisons des échantillons de volume ne dépassant pas 1 à 2 cm³, nous pouvons les maintenir à l'intérieur de cette région.) Nous pouvons exprimer nos résultats quantitatifs, pour une substance donnée, en newtons par kilogramme d'échantillon dans les conditions B_z = 1,8 Tesla, $dB_z/dz = 17$ Tesla/m.

Mais donnons d'abord les résultats qualitatifs qui sont un brin étonnants : pour un grand nombre de substances pures tout à fait ordinaires, la force observée, bien qu'aisément mesurable, semble, après tous nos efforts pour fournir un champ magnétique intense, ridiculement faible. Elle vaut typiquement de un à deux dixièmes de newtons par kilogramme, pas plus que quelques pour cent du poids de l'échantillon. Elle est dirigée vers le haut dans certains

échantillons, vers le bas dans d'autres. Cela n'a rien à voir avec la direction du champ magnétique, comme nous pouvons le vérifier en renversant le sens du courant dans la bobine. Au contraire, il apparaît que certaines substances sont toujours attirées dans la direction où l'intensité du champ décroît, sans dépendre de la direction du champ.

Force suit un échantillon de 1 kg dans un champ magnétique, avec $B_z = 1,8$ Tesla, $dB_z/dz = 17$ Tesla/m		
Substance	Formule	Force ⁽¹⁾
Diamagnétique		
Eau	$H_{2}0$	- 0,22 Newtons
Cuivre	Cu	- 0,026
Plomb	Pb	- 0,37
Chlorure de sodium	NaCl	- 0,15
Quartz	SiO ₂	- 0,16
Soufre	S	- 0,16
Diamant	С	- 0,16
Graphite	С	- 1,10
Azote liquide	N_2	- 0,10 (78 -K)
Paramagnétique		
Sodium	Na	+ 0,20 Newtons
Aluminium	Al	+0,17
Chlorure cuivrique	CuCl ₂	+2,80
Sulfate de nickel	NiSO ₄	+ 8,30
Oxygène liquide	0_2	+ 75 (90 °K)
Ferromagnétique		
Fer	Fe	+ 4 000 Newtons
Magnétite	Fe_3O_4	+ 1 200



Fig. 10.2 Un dispositif pour mesurer la force agissant sur une substance dans un champ magnétique.

métallique peuvent complètement fausser le résultat.

d'une suspension différente.) Remarquez qu'il y a un facteur supérieur à 10^5 entre la force qui agit sur un kilogramme de fer et celle qui agit sur un kilogramme de cuivre, des éléments qui autrement rte sont pas très différents. Incidemment, cela suggère que des mesures magnétiques sûres puissent rte pas être faciles à faire pour une substance comme le cuivre. Une contamination de quelques parties par million par des particules de fer

Il y a une autre différence essentielle entre le comportement du fer ou de la magnétite et celui des autres substances dans la table. Supposons que nous fassions le test évident pour voir si la force appliquée à l'échantillon est proportionnelle au champ, en variant l'intensité du champ de l'aimant. Par exemple, nous pourrions réduire de moitié le courant du solénoïde, divisant ainsi par deux l'intensité du champ B_z et son gradient dB_z/dz . Nous trouverions, dans le cas de toutes les substances situées au-dessus du fer dans la

Nous trouvons que certaines substances sont attirées vers la bobine avec une force considérablement plus grande. Par exemple, les cristaux de chlorure de cuivre sont attirés vers le bas avec une force de 2,8 Newtons par kilogramme d'échantillon. L'oxygène liquide se comporte de facon spectaculaire dans cette expérience; il est attiré vers la bobine avec une force égale à près de huit fois son poids. En fait, si nous mettions une bouteille d'oxygène liquide sans couvercle au bas de notre bobine, le liquide serait soulevé hors de la bouteille. (Où pensez vous qu'il se retrouverait?). D'un autre côté, l'azote liquide rte se révèle pas être très excitant; un kilogramme d'azote liquide est repoussé par la bobine avec une faible force de 0,1 Newton. Dans la table, nous avons dressé une liste de quelques résultats que l'on pourrait obtenir dans une telle expérience. On a choisi les substances, y compris celles qu'on a déjà mentionnées, pour suggérer, aussi bien qu'on le peut avec un petit nombre d'échantillons, les grandes variations de comportement magnétique que nous trouvons dans les matériaux ordinaires.

Comme vous le savez, quelques substances, dont la plus familière est le fer métallique, semblent être beaucoup plus a magnétiques » que toutes les autres. Dans la table, nous donnons la force qui agirait sur un morceau de fer de 1 kilogramme mis dans le champ, dans la même position que tous les autres échantillons. La force est presque 4 000 Newtons! (Nous n'aurions pas été assez naïfs pour approcher de notre aimant plusieurs grammes de fer suspendus à un ressort délicat dans un tube à essai - il faudrait se servir

⁽¹⁾ Direction de la force : vers le bas +, vers le haut -. Toutes les mesures ont été faites à 20 °C, sauf indication contraire.

table, que la force est réduite au quart de sa valeur précédente, tandis que la force sur l'échantillon de fer, et celle sur la magnétite, rte seraient réduites que de la moitié, ou peut-être d'un peu moins. De façon évidente, la force, dans ces conditions tout au moins, est proportionnelle au carré de l'intensité du champ dans toutes les autres substances de la table, mais elle est presque proportionnelle à l'intensité du champ lui-même pour Fe et Fe_3O_4 .

Il apparaît que nous pouvons avoir affaire ici à plusieurs phénomènes différents, et par-dessus le marché compliqués. Pour avancer vers leur compréhension, nous pouvons introduire une certaine classification.

D'abord, on appelle *diamagnétiques* les substances qui sont faiblement repoussées par notre aimant : eau, chlorure de sodium, quartz, etc. La majorité des composés minéraux et pratiquement tous les composés organiques sont diamagnétiques. Il se trouve, en effet, que le diamagnétisme est une propriété de *tout* atome ou molécule. Quand on observe le comportement opposé, c'est parce que le diamagnétisme est contrebalancé par un autre effet plus fort, qui entraîne une attraction.

On appelle *paramagnétiques* les substances qui sont attirées vers la région où le champ magnétique est plus fort. Dans certains cas, notamment les métaux tels que Al, Na et beaucoup d'autres, le paramagnétisme n'est pas beaucoup plus fort que le diamagnétisme ordinaire. Dans d'autres matériaux, tels que NiSO₄ ou CuCl₂ dans notre liste, l'effet paramagnétique est beaucoup plus fort. Dans ces substances aussi, il *croît* lorsqu'on diminue la température, ce qui conduit à des effets tout à fait grands à des températures proches du zéro absolu. L'augmentation du paramagnétisme quand on abaisse la température est en partie responsable de la grande force enregistrée pour l'oxygène liquide. Si vous pensez que tout cela va être facile à expliquer, observez que le cuivre est diamagnétique tandis que le chlorure de cuivre est paramagnétique, mais le sodium est paramagnétique tandis que le chlorure de sodium est diamagnétique.

Finalement, on appelle *ferromagnétiques* les substances qui se comportent comme le fer et la magnétite. En plus des métaux courants de la classe du fer : fer, cobalt et nickel, on connaît un assez grand nombre d'alliages et de composés cristallins ferromagnétiques. Assurément la recherche actuelle sur le ferromagnétisme en allonge constamment la liste.

Dans ce chapitre, nous avons deux buts. L'un est de développer un traitement des phénomènes à grande échelle mettant en jeu de la matière aimantée, dans lesquels on ne caractérise le matériau lui-même que par quelques paramètres et par les relations entre eux déterminés expérimentalement. C'est comme si on traitait les diélectriques à partir d'une certaine relation observée entre le champ électrique et la polarisation en volume. Nous appelons parfois *phénoménologique* une telle théorie. L'autre but est d'essayer de comprendre, au moins d'une façon générale, l'origine atomique des divers effets magnétiques. Même plus que les phénomènes diélectriques les phénomènes magnétiques, une fois compris, révèlent certaines propriétés de base de la structure atomique.

Un fait général ressort de la table. A l'échelle des énergies moléculaires, très peu d'énergie est mise en jeu dans le diamagnétisme et le paramagnétisme. Prenons l'exemple extrême de l'oxygène liquide. Pour retirer 1 g d'oxygène liquide de notre aimant, il faudrait fournir une quantité de travail de l'ordre de grandeur de 7,5 x 10^{-2} Newtons multipliés par une distance de quelques centimètres (étant donné que l'intensité du champ décroît de façon substantielle en une distance de quelques centimètres.) Soit, en gros, 5 x 10^{-3} joules. Or il faut à peu près 300 fois autant d'énergie (0,4 calories ou 1,6 joules) pour élever de un degré la température de 1 gramme d'O₂ liquide, et il en faut 30000 fois plus pour vaporiser le liquide, c'est-à-dire, pour séparer les molécules les unes des autres. Quoiqu'il puisse arriver dans l'oxygène liquide au niveau moléculaire, c'est apparemment une affaire mineure en termes énergétiques.

Nous savons que même des champs magnétiques intenses n'ont pas d'effet sur les processus chimiques, de même pour ce qui se passe en biochimie. Vous pouvez mettre votre main et votre avant-bras (pas celui qui porte une montre-bracelet) dans notre solénoïde de 3 Teslas, sans aucune sensation ou conséquence particulière. Il est difficile de dire si votre bras sera paramagnétique ou diamagnétique, mais en tout cas la force ne sera pas supérieure à quelques grammes. On a fait naître et on a élevé des générations de souris dans des champs magnétiques intenses sans qu'il y ait de changements significatifs. Au moment où ceci est écrit, aucune autre expérience biologique n'a fourni quoi que ce soit de remarquable concernant les effets magnétiques sur les réactions chimiques ⁽²⁾. Ce n'est pas surprenant. Dans son interaction avec la matière, le champ magnétique joue un rôle entièrement différent de celui du champ électrique.

⁽²⁾ Ce n'est pas pour dire que les petits effets soient toujours sans conséquences. Après tout, un argument du genre de celui que nous venons d'utiliser montrerait que la gravité est peu importante du point de vue de l'énergie à l'échelle moléculaire, et pourtant les arbres à flanc de colline poussent verticalement. Cela fait probablement intervenir une force d'ensemble sur une unité biologique plus grande que la taille des molécules. En effet, on a démontré expérimentalement un « tropisme » similaire dans le cas de semences poussant dans un champ magnétique fortement inhomogène. Nous ne suggérons pas non plus que les propriétés magnétiques des molécules soient sans intérêt pour les biochimistes. Au contraire, on peut souvent détecter, et même identifier les intermédiaires dans des réactions chimiques par leurs propriétés magnétiques. Mais il s'agit d'une chose tout à fait différente de l'influence d'un champ externe *sur* un processus chimique. Au fait, si vous mettez votre tête dans un champ magnétique intense et que vous la secouez, vous « sentirez » des courants électrolytiques dans votre bouche - simple preuve de la force électromotrice induite.

Comme les atomes et molécules sont composés de charges électriques qui se déplacent rapidement, les forces électriques dominent de façon écrasante la scène moléculaire.



Fig. 10.3 (a) Deux disques chargés de signes opposes (on voit des électrodes en coupe sous forme de rectangles noirs) produisent un champ électrique qui est le même que celui d'une colonne polarisée.

C'est-à-dire que si vous imaginez qu'une telle colonne occupait la région comprise entre les tirets, son champ électrique serait analogue à celui qu'on a dessiné. On a rendu le champ électrique visible à l'aide d'une multitude de petites fibres noires, suspendues dans de l'huile, qui s'orientent le long de la direction du champ. Cette méthode élégante de démonstration des configurations de champ électrique ⁽³⁾ est due â Mr. Harold M. Waage, Palmer Physical Laboratory, Princeton University, qui a bien voulu préparer la photographie originale pour cette illustration.

(b) Le champ magnétique autour d'un cylindre aimanté, que montre l'orientation de petits bouts de fil de nickel plongés dans de la glycérine. (Cet essai d'améliorer la démonstration traditionnelle avec de la limaille de fer, en adaptant la technique de Waage ne fut pas très réussie - les fils de nickel tendent à se rapprocher pour former de longs fils qui sont alors attirés par l'aimant). Les diagrammes des champs calculés théoriquement seront montrés plus loin sur la figure 10.21.

10.2 Absence de « charge » magnétique

Le champ magnétique à l'extérieur d'un barreau aimanté tel que l'aiguille d'une boussole ressemble beaucoup au champ électrique extérieur d'un barreau polarisé électriquement, c'est-à-dire un barreau qui a un excès de charge positive à un bout et un excès de charge négative à l'autre (fig. 10.3). Il est concevable que le champ magnétique ait des sources qui lui sont reliées comme la charge électrique est reliée au champ électrique. Alors le pôle « nord » de l'aiguille de la boussole serait l'emplacement d'un excès d'un type de « charge magnétique » et le pôle sud celui d'un excès de charge opposée. Nous pourrions appeler la charge positive « charge nord » et la charge négative « charge sud », avec le champ magnétique dirigé de positif vers négatif, selon une règle analogue à celle que nous avons adoptée pour le champ électrique et la charge électrique. Historiquement, c'est comme cela qu'on a établi notre convention sur la direction positive du champ magnétique ⁽⁴⁾. On appelle d'habitude force du pôle magnétique ce que nous avons appelé charge magnétique.

Cette idée est parfaitement correcte jusqu'ici. Elle devient encore plus plausible quand nous nous rappelons que les équations fondamentales du champ électromagnétique sont tout à fait symétriques en **E** et **B**. Alors, pourquoi ne devrions-nous pas nous attendre à trouver une symétrie dans les sources du champ ? Avec la charge magnétique comme source possible du champ magnétique statique **B**, nous aurions div **B** = $\mu_0 \eta$ où η représente la densité de charge magnétique, en analogie complète avec la densité de charge électrique ρ . Deux charges magnétiques positives (ou pôles nord) de force unité, à 1 m de distance, se repousseraient l'une l'autre avec une force de $\mu_0/4\pi$ Newtons, et ainsi de suite.

L'ennui, c'est que les choses ne se passent pas comme cela. Pour une certaine raison, la nature ne s'est pas servie de cette possibilité. Le monde autour de nous apparaît totalement asymétrique en ce sens que nous ne trouvons *aucune charge magnétique*. Personne n'a jamais observé un excès isolé d'un genre de charge magnétique - un pôle nord isolé par exemple. Si un tel objet existait, on pourrait le reconnaître de plusieurs façons. Il donnerait naissance à un champ magnétique dirigé radialement en s'éloignant de l'objet et décroissant comme $1/r^2$ à grande distance. Ce qui peut être plus frappant est qu'un tel objet subirait une force si on le plaçait dans un champ magnétique *uniforme*. A la différence des échantillons dans notre solénoïde, la force maximum se produirait pour l'objet au centre de la bobine plutôt qu'au bout. Et contrairement à la force sur une particule *électriquement* chargée qui se déplace dans un champ magnétique, la force sur ce pôle nord au repos serait parallèle au champ plutôt que perpendiculaire.

Il y aurait un flux total de **B** non nul sortant d'une région de l'espace contenant un pôle magnétique isolé. On peut résumer l'absence apparemment totale d'un tel objet en énonçant qu'à la place de div $B = \mu_0, \eta$ nous trouvons simplement



Réellement *partout* ? Pourrait-il se faire qu'il y ait des pôles nord et sud inséparablement liés en paires de forces égales et opposées, et si près les uns des autres que nous ne puissions pas explorer la région entre les membres d'une paire ? Nous n'avons pas de raison de le

⁽⁴⁾ Dans le chapitre 6, souvenez-vous, nous avons établi la direction positive de **B** en se référant à la direction du courant (direction du mouvement des charges positives) et à la règle de la main droite. Maintenant « pôle nord » veut dire « pointer dans la direction du pôle nord » pour l'aiguille d'une boussole. A ce jour, nous ne comprenons pas pourquoi le champ magnétique terrestre devrait pointer dans une direction ou dans une autre. La désignation de l'électricité « positive » par Franklin n'avait rien à voir avec tout cela. Donc le fait qu'il faille prendre la règle de la main droite plutôt que la règle de la main gauche pour rendre tout cela cohérent est purement un accident.

penser, mais cela ne ferait aucune différence, car l'énoncé de l'équation 10.1 s'appliquerait partout où **B** lui-même aurait un sens. II y a eu de sérieuses spéculations, cependant, sur le fait que des paires de pôles, comme des paires de particules élémentaires, puissent être créées et se séparer dans des événements nucléaires très énergiques. Plusieurs recherches récentes de telles particules, appelées monopôles magnétiques, n'en ont détecté aucune(⁴²). La question reste posée de savoir s'ils *ne peuvent pas* exister et s'il en est ainsi pourquoi n'existent-elles pas. Si jamais quelqu'un découvrait un monopôle, il aurait le droit d'ajouter triomphalement après l'équation 10.1 la qualification «... sauf à l'emplacement de ce monopôle magnétique nord (ou sud) qui apparaît sur ma plaque photographique (ou photo de chambre à bulles, ou compteur, etc...) ». Mais même cela n'affecterait pas la conclusion principale: La matière ordinaire est faite de charges électriques, non de charges magnétiques.

Nous sommes forcés de conclure que les seules sources du champ magnétique sont les courants électriques. Cela nous ramène à l'hypothèse d'Ampère : son idée est que l'on doit rendre compte du magnétisme dans la matière au moyen d'une multitude de petits anneaux de courant électrique distribués à l'intérieur de la substance.

10.3 Champ d'une boucle de courant

Soit une boucle conductrice fermée située dans le plan xy autour de l'origine comme sur la figure 10.4 a. Un courant continu I, mesuré en Ampères, circule dans la boucle. Nous nous intéressons au champ magnétique que crée ce courant, - non pas près de la boucle, mais en des points distants comme P_1 sur la figure. Nous supposerons que r,, la distance à r_1 , est beaucoup plus grande que toute dimension de la boucle. Pour simplifier le diagramme, nous avons situé P_1 , dans le plan yz; il se trouve que ce n'est pas une restriction. C'est un bon moment pour utiliser le potentiel vecteur. Nous allons d'abord calculer le potentiel vecteur \mathbf{A} en P_1 , c'est-à-dire $\mathbf{A}(0,y_1,z_1)$. A partir de là ce qu'est le potentiel vecteur en tout autre point (x, y, z) éloigné de la boucle sera évident. Puis nous obtiendrons le champ magnétique \mathbf{B} en prenant le rotationnel de \mathbf{A} .

Pour un courant confiné dans un fil, nous avions, comme dans l'équation 6.35

$$\mathbf{A}(0, y_1, z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{boucle} \frac{d\mathbf{l}_2}{r_{12}}$$
(10.2)

A ce moment-là, nous ne nous intéressions qu'à la contribution d'un petit segment du circuit; maintenant nous devons intégrer autour de la boucle entière. Considérons les variations du dénominateur r_{12} pendant que nous faisons le tour de la boucle. Si P_1 est loin, la variation au premier ordre de r_{12} dépend seulement de la coordonnée y_2 du segment d $\mathbf{1}_2$ et pas de x_2 . Cela devrait être clair à partir de la vue latérale représentée sur la figure 10.4*b*. Ainsi, en négligeant des quantités proportionnelles à $(x_2/r_{12})^2$, nous pouvons traiter comme égaux r_{12} et r'_{12} qui se trouvent l'un au-dessus de l'autre sur la vue latérale. Donc, en général, au premier ordre dans le rapport (dimension de la boucle/distance à P_1) nous avons

$$r_{12} \approx r_1 - y_2 \sin \theta \tag{10.3}$$

Considérons maintenant les deux éléments de circuit dl_2 et dl'_2 qu'on voit sur la figure 10.4 *a*. Pour eux les dy_2 sont égaux et opposés comme nous l'avons déjà fait remarquer, et les r_{12} sont égaux au premier ordre. A cet ordre, leurs contributions à l'intégrale curviligne vont s'annuler : cela sera vrai pour toute la boucle. Donc **A** en P_1 n'aura pas de composante *z*, car l'élément de courant lui-même n'a nulle part de composante *z*. La composante *x* du potentiel vecteur provient de la partie dx de l'intégrale curviligne. Ainsi

$$\mathbf{A}(0, y_1, z_1) = \hat{\mathbf{x}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{boucle} \frac{\mathrm{d}x_2}{r_{12}}$$
(10.4)

⁴² Pour un exposé de la recherche des monopôles magnétiques, voir l'article de Kenneth Ford, « Magnetic Monopoles » Sci. American 209,30 (Décembre 1963). L'« asymétrie » évidente dans l'absence de charge magnétique est tout a fait différente de l'asymétrie électrique avec laquelle nous sommes familiers, à savoir la différence de caractère entre les particules positives et négatives. Les électrons sont les particules négatives stables; on trouve la charge positive sous forme de proton, une particule beaucoup plus lourde: Mais nous savons que cela n a pas besoin d'être universel, car on sait qu'il existe des antiparticules. Toutes les évidences montrent la possibilité d'une matière composée d'électrons positifs et de protons négatifs; cette « antimatière » serait le jumeau de la matière que nous trouvons dans notre partie de l'univers. Nous avons vu les ingrédients du monde de l'antimatière au laboratoire - mais on n'a pas vu les ingrédients d'un « jumeau magnétique ». Il y a de sérieux doutes qu'il puisse exister; et il y a un bon argument selon lequel s'ils existent, ils doivent être tout à fait différents, à certains autres points de vue, des particules chargées électriquement.

Sans sortir de notre approximation au premier ordre, nous pouvons transformer l'équation 10.3 en

$$\frac{1}{r_{12}} \approx \frac{1}{r_1} \left(1 + \frac{y_2 \sin \theta}{r_1} \right)$$
 (10.5)

et en nous servant de cela comme expression à intégrer, nous avons

$$\mathbf{A}(0, y_1, z_1) = \hat{\mathbf{x}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \left(1 + \frac{y_2 \sin \theta}{r_1} \right) dx_2$$
(10.6)

Dans l'intégration r_1 et θ sont constants. Évidemment $\int dx_2$ autour de la boucle s'annule. Maintenant, $\int y_2 dx_2$ autour de la boucle est juste la surface de la boucle, quelle que soit sa forme (voir la figure 10.4*c*). Nous obtenons donc finalement

$$\mathbf{A}(0, y_1, z_1) = \hat{\mathbf{x}} \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r_1^2} \times (\text{surface de la boucle})$$
(10.7)



Fig. 10.4 (a) Calcul du potentiel vecteur A en un point distant de la boucle de courant.
(b) Vue latérale le long de l'axe x montrant que r12 x rl - y2 sin 0 si rl) y2
(c) Vue du dessus montrant que y2 dx2 est la surface de la boucle

Voici un point simple mais crucial : comme la *forme* de la boucle n'est pas intervenue, notre restriction de P_1 au plan yz ne peut pas faire de différence essentielle. Nous devons avoir par conséquent dans l'équation 10.7 le résultat général que nous cherchons, si simplement nous l'énonçons de manière générale : le potentiel vecteur d'une boucle de courant de n'importe quelle forme, à une distance r beaucoup plus grande que la taille de la boucle, est un vecteur perpendiculaire au plan qui contient r et la normale au plan de la boucle, de grandeur

$$4 = \frac{\mu_0 I a \sin \theta}{4\pi r^2} \tag{10.8}$$

où a représente la surface de la boucle.

Ce potentiel vecteur est symétrique autour de l'axe de la boucle, ce qui implique que le champ **B** est symétrique lui aussi. L'explication en est que nous considérons des régions si éloignées de la boucle que les détails de la forme de la boucle ont une influence négligeable. Toutes les boucles ayant le même produit courant \times surface produisent le même champ éloigné. Nous appelons le produit *Ia moment dipolaire magnétique* de la boucle de courant, et le représentons par **m**. Le moment dipolaire magnétique est évidemment un vecteur, sa direction étant celle de la normale à la boucle, ou celle du vecteur **a**, vecteur surface représentant le morceau de surface entouré par la boucle.

$$\mathbf{m} = I\mathbf{a} \tag{10.9}$$

Pour le signe, nous disons que la direction de \mathbf{m} et le sens positif d'écoulement du courant dans la



boucle sont reliés par la règle de la main droite, illustrée sur la figure 10.5 (D'après cette règle, le moment dipolaire de la boucle de la figure 10.4 a pointe vers le bas.) On peut alors écrire proprement avec des vecteurs le potentiel vecteur d'un dipôle magnétique

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \wedge \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{10.10}$$

où $\hat{\mathbf{r}}$ est un vecteur unitaire dans la direction qui va *de* la boucle *vers* le point où on calcule **A**. Vous pouvez vérifier que cela est en accord avec notre convention de signe. Notez que la direction de **A** doit toujours être celle du courant au point de la boucle *le plus proche*.

Fig. 10.5 Par définition, le vecteur moment magnétique est relié au courant selon la règle de la vis de pas à droite comme on le montre ici.

^{1C1.} La figure 10.6 montre un dipôle magnétique situé à l'origine, avec son vecteur moment dipolaire **m** pointant dans la direction *z* positive. Pour exprimer le potentiel vecteur en tout point (x,

y, z), nous remarquons que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. et que sin $\theta = \sqrt{x^2 + y^2} / r$. La grandeur A du potentiel vecteur en ce point est

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m\sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m\sqrt{x^2 + y^2}}{r^3}$$
(10.11)

Comme A est tangent à un cercle horizontal autour de l'axe z, ses composantes sont

$$A_{x} = A \left(\frac{-y}{\sqrt{x^{2} + y^{2}}} \right) = -\frac{\mu_{0}}{4\pi} \frac{my}{r^{3}}$$

$$A_{y} = A \left(\frac{x}{\sqrt{x^{2} + y^{2}}} \right) = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \frac{mx}{r^{3}}$$
(10.12)



Fig. 10.6 Un dipôle magnétique situé à l'origine. En tout point distant de l'origine, A est un vecteur parallèle au plan xy, tangent à un cercle centre sur l'axe z.

Évaluons **B** pour un point du plan xz, en trouvant les composantes de rot **A** puis (pas avant!) en posant y = 0.

$$B_{x} = (\nabla \wedge \mathbf{A})_{x} = \frac{\partial A_{z}}{\partial y} - \frac{\partial A_{y}}{\partial z} = -\frac{\mu_{0}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{mx}{(x^{2} + y^{2} + z^{2})^{3/2}} = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \frac{3mxz}{r^{5}}$$

$$B_{y} = (\nabla \wedge \mathbf{A})_{y} = \frac{\partial A_{x}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z}}{\partial x} = -\frac{\mu_{0}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{-my}{(x^{2} + y^{2} + z^{2})^{3/2}} = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \frac{3myz}{r^{5}}$$

$$B_{z} = (\nabla \wedge \mathbf{A})_{z} = \frac{\partial A_{y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x}}{\partial y} = \frac{\mu_{0}}{4\pi} m \left[\frac{-2x^{2} + y^{2} + z^{2}}{(x^{2} + y^{2} + z^{2})^{5/2}} + \frac{x^{2} - 2y^{2} + z^{2}}{(x^{2} + y^{2} + z^{2})^{5/2}} \right] = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \frac{m(3z^{2} - r^{2})}{r^{5}}$$
(10.13)

Dans le plan xz, y = 0, sin $\theta = x/r$ et cos $\theta = z/r$. Les composantes du champ sont ainsi données en tout point de ce plan par

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m\sin\theta\cos\theta}{r^3}$$

$$B_y = 0$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m(3\cos^2\theta - 1)}{r^3}$$
(10.14)



Fig. 10.7 Quelques lignes de champ pour le champ d'un dipôle magnétique, c'est-à-dire une petite boucle de courant.



Fig. 10.8 (a) Le champ électrique d'une paire de charges égales et opposées. Au loin, il devient le champ d'un dipôle électrique.

Retournons maintenant à la section 9.3 où nous avons exprimé par l'équation 9.14 les composantes dans le plan xz du champ **E** d'un dipôle électrique qui était situé exactement comme notre dipôle magnétique **m**.

Les expressions sont identiques à condition de remplacer $1/4\pi\epsilon_0$ par $\mu_0/4\pi$.

Nous avons ainsi trouvé qu'en des points éloignés le champ magnétique d'une petite boucle de courant a la même forme que le champ électrique de deux charges séparées. Nous savons déjà à quoi ressemble ce champ, c'est le champ du dipôle électrique. La figure 10.7 tente de suggérer la forme tridimensionnelle du champ magnétique **B** provenant de notre boucle de courant de moment dipolaire **m**.

Près de la boucle de courant le champ magnétique est entièrement différent du champ électrique près d'une paire de charges positive et négative séparées, comme le montre la comparaison sur la figure 10.8. Remarquez que le champ électrique pointe vers le bas



(*b*) Le champ magnétique d'une boucle de courant. Au loin, il devient le champ d'un dipôle magnétique.

entre les charges, tandis que le champ magnétique pointe vers le haut à l'intérieur de la boucle de courant, bien que les champs à grande distance soient semblables. Cela reflète que notre champ magnétique satisfait $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ partout, *même à l'intérieur de la source*. Les lignes de champ magnétique ne finissent pas. Par proche ou éloigné, nous voulons dire, bien sûr, relativement à la taille de la boucle ou à la séparation des charges. Si nous imaginons que la boucle de courant diminue de taille, alors que le courant augmente de façon à maintenir le moment dipolaire $\mathbf{m} = Ia$ constant, nous nous rapprochons du dipôle magnétique infinitésimal, qui est la contrepartie de notre dipôle électrique infinitésimal du chapitre 9.

10.4 Force sur un dipôle dans un champ extérieur

Considérons une petite boucle de courant circulaire de rayon r, placée dans le champ magnétique de quelque autre système de courants, tel qu'un solénoïde. Sur la figure 10.9, on a tracé un champ **B** qui est généralement dans la direction z. Ce n'est pas un champ uniforme. Au contraire, il devient plus faible à mesure que nous nous déplaçons dans la direction z; c'est évident d'après l'évasement des lignes de champ. Supposons, pour simplifier, que le champ soit symétrique autour de l'axe z. Il ressemble alors au champ près de l'extrémité supérieure du solénoïde de la figure 10.1. Le champ représenté sur la figure 10.9 n'inclut *pas* le champ magnétique de l'anneau de courant lui-même. Nous voulons trouver la force sur l'anneau de courant due à l'autre champ, que nous appellerons, par manque d'un nom meilleur, champ extérieur. La force totale sur la boucle de courant due à son propre champ est certainement nulle, de sorte que nous sommes libres d'oublier son propre champ dans cette discussion.



Fig. 10.9 Une boucle de courant dans un champ magnétique inhomogéne (on ne montre pas le champ de la boucle elle. même). Il y a une force sur l'ensemble de la boucle en raison de la composante radiale B_r du champ.

Si vous étudiez la situation sur la figure 10.9, vous conclurez bientôt qu'il y a une force globale sur l'anneau de courant. Elle est due au fait que le champ extérieur **B** a une composante *radiale* B_r , partout autour de la boucle. Donc si le courant s'écoule dans la direction indiquée, chaque élément de la boucle, d**l**, doit subir une force vers le bas de grandeur $I B_r dI$. Si B_r a la même valeur en tous les points de la boucle, comme il le doit pour le champ qu'on a supposé s'étaler symétriquement, la force totale vers le bas aura la grandeur

$$F = 2\pi r I B_{\rm r} \tag{10.15}$$

On peut maintenant, relier directement B_r au gradient de B_z . Comme div $\mathbf{B} = 0$ en tous points, le flux total du champ magnétique sortant de tout volume est nul. Considérons un petit cylindre de rayon r et de hauteur Δz (fig. 10.10). Le flux vers l'extérieur à travers les côtés est $2\pi r(\Delta z) B_r$ et le flux global vers l'extérieur à travers les surfaces des bouts est

$$\pi r^2 [-B_z(z) + B_z(z + \Delta z)]$$

ce qui au premier ordre par rapport à la petite distance $\Delta z \operatorname{est} \pi r^2 (\partial B_z / \partial z) \Delta z$. En posant le flux total égal à zéro : $0 = \pi r^2 (\partial B_z / \partial z) \Delta z$, ce qui donne la relation

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{10.16}$$

Comme vérification sur le signe, remarquez que d'après l'équation 10.16, B_r est positif quand B_z décroît vers le haut; un coup d'oeil sur la figure montre que c'est correct.

On peut maintenant exprimer la force sur le dipôle en fonction du gradient de la composante B_z du champ extérieur

$$F = 2\pi r I \cdot \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \pi r^2 I \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z}$$
(10.17)

Nous reconnaissons dans le facteur $\pi r^2 I$ la grandeur *m* du moment dipolaire magnétique de notre anneau de courant. Ainsi, on peut exprimer très simplement la force sur le dipôle en fonction du moment dipolaire

$$F = m \frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{10.18}$$

Nous ne l'avons pas prouvé, mais vous ne serez pas surpris d'apprendre que pour de petites boucles de toute autre forme, la force ne dépend que du produit surface-courant, c'est-à-dire du moment dipolaire. La forme ne compte pas. Bien sûr, nous ne discutons qu'à propos de boucles assez petites pour que seules comptent les variations du premier ordre du champ extérieur, sur la surface de la boucle.

Notre boucle de la figure 10.9 a un moment dipolaire magnétique \mathbf{m} pointant vers le haut, et la force qui agit sur elle est dirigée vers le bas. Évidemment, si nous pouvions renverser le courant dans l'anneau, renversant ainsi \mathbf{m} , la force prendrait la direction opposée. On peut résumer la situation de la façon suivante

Moment dipolaire *parallèle* au champ extérieur : la force agit dans la direction où l'intensité du champ *augmente*. Moment dipolaire *antiparallèle* au champ extérieur : la force agit dans la direction où l'intensité du champ *décroît*. Champ extérieur *uniforme* : force *nulle*.



Fig. 10.10 On peut utiliser le théorème d'Odstrogradski pour relier B_r , et $\partial B_z/\partial z$, ce qui conduit à l'équation

10.16

Évidemment, ce n'est pas la situation la plus générale. Le moment **m** pourrait pointer dans quelque direction bizarre par rapport au champ **B**, et les différentes composantes de **B** pourraient varier, spatialement, de façons différentes. Il n'est pas difficile de développer une formule donnant la force **F** qui est subie dans le cas général. Elle serait exactement comme la formule générale que nous avons donnée, par l'équation 9.22 pour la force sur un dipôle électrique dans un champ électrique non uniforme. C'est-à-dire que la composante *x* de la force sur tout dipôle magnétique **m** est donnée par

$$F_{\rm x} = \mathbf{m} \cdot \operatorname{grad} B_{\rm x} \tag{10.19}$$

avec des formules correspondantes pour F_y , et F_z .

Dans les équations 10.18 et 10.19, les forces sont en newtons, avec le gradient du champ magnétique donné en tesla/m et le moment dipolaire en magnétique donné par l'équation 19.9, m = Ia où I est en ampères et a mètres carrés. Il y a plusieurs façons équivalentes d'exprimer les unités de m. Nous adopterons Amp. × mètre carré.

Comme vous pouvez voir d'après l'équation 10.18



Fig.10.11(a) Un modèle d'un atome dans lequel un électron se déplace à la vitesse v sur une orbite circulaire.

(b) Procession de charge équivalente. Le courant électrique moyen est le même que si la charge -e était divisée en petits bouts pour former un anneau de charge tournant. (c) Le moment magnétique est égal au produit du courant par la surface.

$$m = \operatorname{Amp} \times \operatorname{m}^2 = \frac{\operatorname{newton}}{\operatorname{tesla}/\operatorname{m}} = \frac{\operatorname{newton} - \operatorname{m}}{\operatorname{tesla}} = \frac{\operatorname{joule}}{\operatorname{tesla}}$$

Nous commençons maintenant à voir ce qui doit se passer dans l'expérience décrite au début de ce chapitre. Une substance située à la position de l'échantillon sur la figure 10.2 serait attirée *vers* le solénoïde si elle contenait des dipôles magnétiques *parallèles* au champ **B** de la bobine. Elle serait *repoussée* par le solénoïde si elle contenait des dipôles pointant dans la direction opposée, antiparallèle au champ. La force dépendrait du gradient de l'intensité du champ axial, elle serait nulle au centre du solénoïde. De plus, si la grandeur totale des moments dipolaires de la substance était proportionnelle à *B* fois $\partial B/\partial z$, donc au carré du courant du solénoïde. C'est le comportement qu'on observe dans le cas des substances diamagnétiques et paramagnétiques. Il semble que les échantillons ferromagnétiques doivent posséder un moment magnétique presque indépendant de l'intensité du champ, mais nous devons, de toute façon, les mettre de côté pour une discussion spéciale.

Comment l'application d'un champ magnétique dans une substance provoque-t-elle des moments dipolaires magnétiques dans la substance dont la force totale est proportionnelle au champ appliqué ? Et pourquoi devraient-ils être parallèles au champ dans certaines substances, et dirigés dans l'autre sens dans d'autres ? Si nous pouvons répondre à ces questions nous serons sur la bonne voie pour comprendre la physique du diamagnétisme et du paramagnétisme.

10.5 Courants électriques dans les atomes

Nous savons qu'un atome est constitué par un noyau positif entouré par des électrons négatifs. Pour le décrire complètement, nous aurions besoin des concepts de la physique quantique que vous étudierez plus loin dans ce cours. Heureusement, un modèle d'un atome simple et facile à visualiser peut très bien expliquer le diamagnétisme. C'est un modèle planétaire avec les électrons en orbite autour du noyau, comme le modèle de Bohr de la première théorie quantique de l'atome d'hydrogène.

Nous commençons par un électron se déplaçant à vitesse constante sur une trajectoire circulaire. Comme nous ne tentons pas ici d'expliquer la structure atomique, nous ne nous demanderons pas pourquoi l'électron a cette orbite particulière. Nous demandons seulement, s'il se déplace sur une telle orbite, quels sont les effets magnétiques qu'on doit attendre? Sur la figure 10.11 nous voyons l'électron, visualisé comme une particule qui porte une charge électrique concentrée -*e*, et se déplace à la vitesse v sur une orbite

circulaire du rayon r. Au milieu, il y a la charge nucléaire positive qui rend le système électriquement neutre, mais le noyau, à cause de sa masse relativement grande, se déplace si lentement qu'on peut négliger ses effets magnétiques.

A tout instant, l'électron et la charge positive apparaîtraient comme un dipôle électrique, mais en moyenne sur le temps le moment dipolaire électrique est nul, ce qui ne produit pas de champ électrique permanent à distance. Nous avons discuté ce point dans la section 9.5. Au loin, le champ *magnétique* du système *n*'est *pas* nul en moyenne sur le temps. Au contraire, c'est juste le champ d'un anneau de courant. Car, en ce qui concerne la moyenne temporelle, il ne peut y avoir de différence selon que nous avons toute la charge négative réunie en un bloc qui fait le tour de l'orbite, ou qu'elle est distribuée en fragments, comme sur la figure 10.11 *b*, pour former une procession uniforme sans fin. Le courant est la quantité décharge qui passe en un point donné de l'anneau, par seconde. Comme l'électron fait $v/2\pi r$ tours par seconde, le courant en Ampères, si *e* est en coulombs, est

$$I = \frac{ev}{2\pi r} \tag{10.20}$$

L'électron qui tourne est équivalent à une boucle de courant de cette grandeur, avec comme direction de l'écoulement positif la direction opposée à *v*, comme le montre la figure 10.11 *c*. Son champ à grande distance est donc celui d'un dipôle magnétique de force

$$m = \pi r^2 I = \frac{evr}{2}$$
(10.21)

Notons en passant qu'il y a une relation simple entre le moment magnétique **m** associé à l'électron orbital, et le moment cinétique orbital **L**. Le moment cinétique est un vecteur de grandeur $\mathbf{L} = m_e vr$ où ma représente la masse de l'électron ⁽⁵⁾; il pointe vers le bas si l'électron tourne dans le sens que montre la figure 10.11 *a*. Remarquez que le produit *vr* apparaît à la fois dans *m* et *L*. En tenant correctement compte des directions, nous pouvons écrire

$$\mathbf{m} = \frac{-e}{2m_e} \mathbf{L} \tag{10.22}$$

Cette relation ne fait rien intervenir d'autre que des constantes fondamentales, ce qui devrait vous faire suspecter qu'elle s'applique de façon tout à fait générale. C'est en effet le cas, bien que nous n'allions pas le démontrer ici. Elle s'applique aux orbites elliptiques et même aux orbites en forme de rosette qui se produisent dans un champ qui n'est pas en inverse du carré de la distance. Souvenez-vous de la propriété importante de toute orbite dans un champ central : le moment cinétique est une constante du mouvement. Il en résulte alors, d'après la relation générale exprimée par l'équation 10.22 (que nous avons démontrée dans un cas spécial seulement), que partout où le moment cinétique est conservé, le moment magnétique conserve une grandeur et une direction constantes. On appelle le facteur

$$\frac{c}{2m_e}$$

facteur magnétomécanique orbital de l'électron⁽⁶⁾. La relation intime entre moment magnétique et moment cinétique est au centre de toute description du magnétisme atomique.

Pourquoi n'observons-nous pas les champs magnétiques de tous les électrons qui orbitent dans tous les atomes de chaque substance ? La réponse doit être qu'il y a annulation mutuelle. Dans un morceau ordinaire de matière, il doit y avoir autant d'électrons qui tournent dans un sens que dans l'autre. On doit s'y attendre, car il n'y a rien qui rende un sens de rotation intrinsèquement plus facile que l'autre, ou autrement qui permette de distinguer n'importe quelle direction axiale unique. Il devrait y avoir quelque chose dans la structure du matériau pour distinguer non seulement un axe mais aussi un *sens de rotation autour de cet axe* !

⁽⁵⁾ Nous aurons affaire à des vitesses *v* très inférieures à *c*, de sorte que m_e représente la masse au repos 9,0 x 10⁻³¹kg. Notre choix de **m** comme symbole du moment magnétique rend nécessaire l'emploi, dans ce chapitre, d'un autre symbole pour la masse de l'électron. Pour le moment cinétique nous choisissons le symbole **L**, plutôt que **J** que nous avions dans le volume I chapitre 6, car on se sert traditionnellement de **L** en physique atomique comme moment cinétique orbital, qui est ce que nous considérons ici, et que nous nous sommes servis de **J** pour la densité de courant.

⁽⁶⁾ Beaucoup de gens se servent du terme rapport *gyromagnétique* pour cette quantité. Nous préférons rapport *magnétomécanique*, comme on l'a utilisé dans le volume 1, chapitre 8.







Fig. 10.12 La croissance du champ magnétique **B** induit un champ électrique E qui accélère le corps chargé en train de tourner.

Vous pouvez penser qu'un bout de matière, en l'absence de tout champ magnétique extérieur, contient des électrons en train de tourner avec leurs moments magnétiques associés distribués uniformément dans toutes les directions de l'espace. Considérons les orbites qui se trouvent avoir leurs plans approximativement parallèles au plan xy, qui sont en nombres à peu près égaux avec **m** vers le haut et **m** vers le bas. Essayons de trouver ce qui arrive à une de ces orbites quand nous appliquons un champ magnétique extérieur dans la direction z.

Nous allons d'abord analyser un système électromécanique qui ne ressemble pas beaucoup à un atome. Sur la figure 10.12, il y a un objet de masse M et de charge électrique q, relié à un point fixe par une corde de longueur fixe r. Cette corde procure la force centripète qui maintient l'objet sur son orbite circulaire. La grandeur de cette force F_0 est donnée comme nous le savons, par

$$F_0 = \frac{Mv_0^2}{r}$$
(10.23)

Dans l'état initial, figure 10.12 *a*, il n'y a pas de champ magnétique extérieur. Maintenant, au moyen d'un certain gros solénoïde approprié, nous commençons à créer un champ **B** dans la direction *z* négative, uniforme dans toute la région à tout instant donné. Tandis que ce champ croît au taux dB/dt, il y a un champ électrique induit **E** tout autour de la trajectoire, comme l'indique la figure 10.12 *b*. Pour trouver la grandeur de ce champ **E**, nous remarquons que le taux de variation du flux à travers la trajectoire circulaire est

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \pi r^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \tag{10.24}$$

Cela détermine la circulation du champ électrique, qui est réellement tout ce qui compte (ce n'est que par symétrie et simplicité que nous supposons qu'il est le même sur toute la trajectoire).

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} = 2\pi rE \qquad (10.25)$$

Nous trouvons ainsi que

$$E = \frac{r}{2} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \tag{10.26}$$

Jusqu'ici nous avons oublié les signes, mais si vous appliquez à l'équation 10.12 notre règle favorite pour trouver la direction d'une force électromotrice induite, vous verrez que **E** doit avoir une direction telle qu'il accélère le corps, si la charge q est positive. L'accélération tangentielle, dv/dt, est déterminée par la force qE

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = qE = \frac{qr}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$
(10.27)

de sorte que nous avons une relation entre la variation de v et celle de B

$$\mathrm{d}v = \frac{qr}{2M} \mathrm{d}B \tag{10.28}$$

Le rayon *r* restant fixé par la longueur de la corde, le facteur (qr/2M) est une constante. Appelons Δv la variation totale de v au cours du passage complet du champ de zéro à sa valeur finale B_1 . Alors

$$\Delta v = \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v} dv = \frac{qr}{2M} \int_0^{B_1} dB = \frac{qrB_1}{2M}$$
(10.29)

Remarquez que le temps a disparu - la vitesse finale est la même, que la variation soit lente ou rapide.

L'augmentation de vitesse de la charge dans l'état final veut dire une augmentation pour un moment magnétique **m** dirigé vers le haut. Un corps chargé *négativement* aurait été décéléré dans des circonstances similaires, ce qui aurait *diminué* son moment *dirigé vers le bas*. Ainsi, dans les deux cas, l'application du champ **B**₁ a-t-elle entraîné une variation du moment magnétique opposée au champ. La grandeur de la variation du moment magnétique Δm est

$$\Delta m = \frac{qr}{2}\Delta v = \frac{q^2r^2}{4M}B_1 \tag{10.30}$$

De même pour les charges, qu'elles soient positives ou négatives, qui tournent dans la direction opposée : la variation induite du moment magnétique est opposée à la variation du champ magnétique appliqué.



Fig. 10.13 La variation du vecteur moment magnétique est opposée à la direction de **B**, pour les deux directions du mouvement.

 $\vee v_0$. Dans l'état final, nous avons besoin d'une force centripète de grandeur

$$F_{1} = \frac{M(v_{0} + \Delta v)^{2}}{r} \approx \frac{Mv_{0}^{2}}{r} + \frac{2Mv_{0}\Delta v}{r}$$
(10.32)

en négligeant les termes proportionnels à $(\Delta v)^2$. Mais maintenant le champ magnétique lui-même procure à la charge en mouvement une force vers l'intérieur, donnée par $q(v_0 + \Delta v)B_1$. En nous servant de l'équation 10.29 pour exprimer B_1 en fonction de Δv , nous trouvons que cette force supplémentaire vers l'intérieur a comme grandeur :

$$q(v_0 + \Delta v) \cdot \frac{2M\Delta v}{qr}$$
 qui au premier ordre en $\Delta v/v_0$ est $2M v_0 \Delta v/r$.

C'est juste ce qu'il faut, d'après l'équation 10.32, pour éviter toute tension supplémentaire de la corde ! Donc la tension de la corde *reste* inchangée à la valeur F_0 .

Cela conduit à une conclusion surprenante : notre résultat, équation 10..31, doit être le même pour *n'importe quel* genre de force de liaison qui varie avec le rayon. On pourrait remplacer notre corde par un ressort élastique sans affecter le résultat - le rayon serait encore inchangé dans l'état final. Ou, pour aller directement au système qui nous intéresse, on pourrait le remplacer par l'attraction de Coulomb entre un noyau et un électron. Ou, ce pourrait être la force effective qui agit sur un électron dans un atome contenant beaucoup d'électrons, qui a une dépendance radiale encore différente. A partir d'une relation aussi générale que ce que l'équation 10.31 s'est

La figure 10.13 montre cela pour une charge positive. Il apparaît que la relation suivante s'applique pour chaque signe de la charge et chaque direction de rotation

$$\Delta \mathbf{m} = -\frac{q^2 r^2}{4M} \mathbf{B}_1$$
(10.31)

Dans cet exemple, nous avons obligé r à rester constant en utilisant une corde de longueur fixe. Regardons de combien la tension de la corde a varié. Nous supposerons que B_1 est assez petit pour que Δv trouvée être, nous pouvons espérer avoir quelques résultats sensés même en l'absence d'une bonne théorie de la structure atomique. La seule caractéristique de l'atome qui apparaisse explicitement est r^2 . Bien sûr, nous devons observer la restriction $\Delta v / v_0 \lor 1$, soit une restriction sur B_1 , qui a autorisé cette application générale.

On peut visualiser ainsi l'effet de l'application d'un champ magnétique **B** sur les orbites électroniques. Chaque électron continue à tourner avec le même rayon, mais sa vitesse angulaire, qui était $\pm v_0/r$, suivant le sens de rotation, a subi une petite augmentation $\Delta \varpi = \Delta v/r$. Selon l'équation 10.29, la valeur de cette augmentation est

$$\Delta \omega = \frac{\Delta v}{r} = \frac{eB}{2m_e} \tag{10.33}$$

une vitesse angulaire qui ne dépend que de l'intensité du champ appliqué et du rapport charge sur masse de l'électron. Toutes les rotations dans un sens sont accélérées de la même quantité, exprimée en radians par seconde, toutes celles dans l'autre direction sont ralenties de cette même quantité. Le nouveau système ressemble juste à l'autre quand on le voit à partir d'un système de référence tournant. On appelle « vitesse angulaire de Larmor » ou « fréquence de Larmor » la vitesse angulaire $eB/2m_e$ de l'équation 10.33. Sir Joseph Larmor physicien mathématicien britannique, démontra ce théorème général en 1895, avant que quiconque sût réellement comment est construit un atome.

Nous n'avons considéré que des orbites perpendiculaires à **B**. Nos conclusions devraient s'appliquer, grossièrement parlant, à un tiers des orbites électroniques dans la substance, car il y a trois directions mutuellement perpendiculaires. Ce qui arrive à des orbites disposées parallèlement aux plans xz et yz est intéressant; vous pouvez le trouver en faisant le problème 10.22. Elles contribuent aussi un moment induit opposé au champ et proportionnel au carré du rayon de l'orbite. On peut résumer l'effet de toutes les orbites dans une équation comme l'équation 10.31 où l'on remplace r^2 par $\langle r^2 \rangle$ la moyenne des carrés des rayons des orbites, et où on introduit un certain facteur numérique pour tenir compte de la moyenne sur les orientations des orbites.

Sans aller dans ces raffinements, utilisons l'équation 10.31 telle quelle pour tous les électrons, en prenant une estimation raisonnable pour le rayon de l'orbite. Le nombre d'électrons par kilogramme est à peu près le même dans la plupart des substances, car il y a un proton dans le noyau pour chaque électron dans l'atome, et en gros un neutron par proton. Ainsi le nombre d'électrons par kilogramme, *n*, est-il à peu près le même que dans une substance de poids atomique 2 et de numéro atomique 1, soit

$$n \approx \frac{6 \times 10^{26}}{2} = 3 \times 10^{26} \tag{10.34}$$

Pour *r* nous prendrons 0,5 x 10^{-10} m, distance avec laquelle vous deviendrez plus lard très familier en tant que « rayon » atomique. Naturellement dans les atomes à plusieurs électrons, certains électrons ont de grandes orbites, d'autres de petites. Nous substituons la masse de l'électron m_e à la place de *M*. Le champ magnétique à l'endroit de notre échantillon était 1,8 Teslas. Le moment dipolaire magnétique total induit dans un kilogramme de presque n'importe quoi devrait être en gros

$$n\Delta m = \frac{ne^2 r^2 B}{4m_e} = \frac{(3 \times 10^{26})(1.6 \times 10^{-19})(0.5 \times 10^{-10})(1.8)}{4(9 \times 10^{-31})} = 0.95 \times 10^{-2}$$
(10.35)

Le gradient du champ $\partial B_z/\partial z$ était de 17 Teslas/m. En nous servant de l'équation 10.18 pour calculer la force, nous prédisons une force de grandeur $17 \times 0.95 \times 10^{-2}$, soit environ 0.16 Newton. C'est voisin du nombre donné pour un certain nombre de substances de la table. En effet, c'est plus proche que ce que nous avions le droit d'attendre, de sorte que l'accord est à ce point de vue accidentel⁽⁷⁾.

Nous ferions mieux de nous assurer que notre hypothèse $\Delta v \lor v_0$ est satisfaite dans cette situation. En mettant les mêmes nombres dans l'équation 10.29, nous pouvons estimer

$$\Delta v = \frac{erB}{2m_e} = \frac{(1.6 \times 10^{-19})(0.5 \times 10^{-10})(1.8)}{2(9 \times 10^{-31})} \approx 10 \text{ m/s}$$
(10.36)

⁽⁷⁾ La formule exacte, obtenue en prenant la moyenne sur des orbites orientées de façon isotrope, remplace le facteur 1/4 dans l'équation 10.31 par 1/6 tandis que $< r^2 >$ remplace r^2 . Une théorie quantique rigoureuse conduit exactement au même résultat, et l'accord avec l'expérience est excellent. En réalité, pour beaucoup d'atomes diamagnétiques, les mesures magnétiques procurent le moyen le plus précis de déterminer $< r^2 >$.

Vous n'avez pas besoin de savoir beaucoup de physique atomique pour réaliser que 10 m/s est faible devant la vitesse d'un électron dans un atome. Un homme peut courir à cette vitesse-là ! Une vitesse typique pour un électron atomique s'approche plutôt de 10^6 m/s, ou plus. Cela montre que même notre aimant plutôt puissant fournit un champ qui est très faible, du point de vue de l'électron atomique, n'entraînant qu'une faible variation dans les vitesses de rotation.

Nous voyons maintenant pourquoi le diamagnétisme est un phénomène universel, mais qui passe plutôt inaperçu. Il est à peu près le même dans les molécules que dons les atomes. Le fait qu'une molécule puisse avoir une structure beaucoup plus grande que celle d'un atome - elle peut être composée de centaines ou de milliers d'atomes n'augmente pas en général la moyenne effective du carré du rayon de l'orbite. La raison en est que dans une molécule, tout électron donné est joliment bien localisé dans un atome. Il y a quelques exceptions intéressantes; nous en avons inclus une dons la table : le graphite. Le diamagnétisme anormal du graphite est dû à une structure inhabituelle qui permet à quelques électrons de circuler assez librement à l'intérieur d'un groupe plan d'atomes dans le réseau cristallin.

10.6 Spin et moment magnétique de l'atome



Fig. 10.14 Le moment cinétique intrinsèque, ou spin, et le moment magnétique associé de l'électron.



Fig. 10.15 Calcul du moment appliqué à une boucle de courant dans un champ magnétique **B**. Le moment magnétique de la boucle est **m**.

L'électron possède un moment cinétique qui n'a rien à voir avec son moment orbital. Il se comporte à beaucoup d'égards comme s'il était continuellement en train de tourner autour d'un axe qui lui est propre. On appelle *spin* cette propriété. Quand on mesure la grandeur du moment cinétique de spin, on obtient toujours le même résultat $h/4\pi$, où h est la constante de Planck. Le spin de l'électron est un phénomène quantique. Vous en entendrez plus sur sa découverte et ses implications dans le volume IV de ce cours. Sa signification pour nous maintenant repose sur le fait qu'il existe un *moment magnétique* associé à ce moment cinétique intrinsèque, ayant comme lui une grandeur invariable. Ce moment cinétique pointe dans la direction que vous attendriez si vous visualisiez l'électron comme une boule de charge négative tournant autour de son axe. C'est-à-dire que le vecteur moment magnétique pointe antiparallèlement au vecteur moment cinétique de spin, comme l'indique la figure 10.14. Cependant, le moment magnétique est deux fois plus grand, par

rapport au moment cinétique, que dons le cas du mouvement orbital.

Cela ne rime à rien d'essayer d'inventer un modèle classique de cet objet; ses propriétés sont essentiellement quantiques. Nous n'avons même pas besoin d'aller aussi loin que de dire que c'est une boucle de courant. Ce qui compte c'est qu'il se comporte comme tel des points de vue suivants : (i) il produit un champ magnétique qui, à distance, est celui d'un dipôle magnétique; (ii) dans un champ extérieur **B**, il subit un couple égal à celui que subirait une boucle de courant de moment dipolaire équivalent; (iii) à l'intérieur de la source, div **B** = 0 partout, comme dans les sources ordinaires de champ magnétique avec lesquelles nous sommes déjà familiers.

Comme la grandeur du moment magnétique de spin est toujours la même, la seule chose qu'un champ extérieur puisse influencer est sa

direction. Un dipôle magnétique dans un champ extérieur subit un couple. Si vous avez fait le problème 6.22 en entier, vous avez démontré que le moment N sur une boucle de courant de forme quelconque, de moment dipolaire \mathbf{m} , dans un champ \mathbf{B} est donné par

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B} \tag{10.37}$$

Pour ceux qui n'ont pas fait cette démonstration, prenons le temps de calculer le couple dans un cas spécial simple. Sur la figure 10.15 nous voyons une boucle de fil rectangulaire parcouru par un courant *I*. La boucle a un moment magnétique **m**, de grandeur m = Iab. Le

couple sur la boucle provient des forces \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 qui agissent sur les fils horizontaux. Chacune de ces forces a pour grandeur F = IbB, et le bras du couple est la distance (a/2) sin θ . Nous voyons que la grandeur du moment appliqué à la boucle est

$$N = 2IbB \cdot \frac{a}{2}\sin\theta = (Iab)B\sin\theta = mB\sin\theta \qquad (10.38)$$

Le couple agit dans une direction telle qu'il amène **m** parallèle à **B**; dans la situation indiquée, on le représente par un vecteur **N** dans la direction *x* positive. Tout cela est compatible avec notre formule générale : équation 10.37. Remarquez que l'équation 10.37 correspond exactement à la formule que nous avons démontrée dans le chapitre 9 pour le moment sur un dipôle électrique **p** dans un champ extérieur **E**, soit **N** = **p** \wedge **E**. L'énergie est minimum quand **m** est orienté dans la direction de **B**, comme quand le dipôle électrique est parallèle à **E**. De même, le travail requis pour tourner un dipôle **m** de la position parallèle à la position antiparallèle est 2 *mB*. (Voyez l'équation 9.18; nous pouvons simplement reprendre ce résultat pour le cas magnétique.)

Si les moments de spin des électrons d'une substance sont libres de s'orienter eux-mêmes, nous nous attendons à ce qu'ils préfèrent l'orientation dans la direction de n'importe quel champ appliqué **B**, soit l'orientation d'énergie la plus basse. Supposons que chaque électron d'un kilogramme de matière prenne cette orientation. Nous avons déjà calculé qu'il y a en gros 3×10^{26} électrons dans un kilogramme de n'importe quoi. La figure 10.14 donne 0.93×10^{-23} joules /tesla comme moment magnétique de spin m_s d'un électron. Le moment magnétique total de nos spins alignés est donc (3×10^{26})(0.9×10^{-23}) ou 2.7×10^3 joules/tesla. La force sur un tel échantillon, dans notre bobine où le gradient du champ est 17 teslas/m, serait de 46 000 newtons, soit près de 5 tonnes !

Évidemment, c'est beaucoup plus grand que la force enregistrée pour n'importe quel de nos échantillons paramagnétiques. L'explication est que l'alignement des moments électroniques est loin d'être parfait.

L'agitation thermique tend toujours à créer une distribution chaotique ou aléatoire des directions des axes des spins. Le degré d'alignement qui prévaut en réalité représente un compromis entre la préférence pour la direction d'énergie minimum et l'influence désorientante de l'agitation thermique. Il se trouve que le moment magnétique total est généralement proportionnel au champ appliqué **B**, et inversement proportionnel à la température absolue *T*. Nous devons laisser la discussion de ce fait pour le volume V de ce cours, dont on pourrait décrire le thème comme étant la compétition qui met en jeu l'énergie et le désordre. La paramagnétisme des spins électroniques fournira, à ce moment-là, un exemple illustratif. La physique quantique que vous apprendrez d'ici-là rendra le problème *plus simple* qu'il n'apparaît de notre point de vue présent.

Pourquoi toute substance n'est-elle pas paramagnétique? La raison est que dans la plupart des atomes ou molécules, les électrons sont groupés par paires, avec les spins dans chaque paire contraints de pointer dans des directions opposées quel que soit le champ appliqué. Il en résulte que les moments magnétiques des électrons d'une paire s'annulent exactement l'un l'autre. Tout ce qui reste est le diamagnétisme que nous avons déjà exploré. Quelques molécules contiennent un nombre impair d'électrons; en elles, l'annulation complète par paires est évidemment impossible. L'oxyde nitrique, NO, avec 15 électrons par molécule en est un exemple; il est paramagnétique. La molécule d'oxygène Oz contient un nombre pair d'électrons, mais il se trouve que sa structure électronique favorise la non annulation de deux spins électroniques. Dans certains groupes d'éléments, notamment les éléments autour du gadolinium dans la table périodique, ainsi que ceux autour du fer, les atomes contiennent des spins électroniques non appariés qui sont relativement libres de s'orienter dans un champ magnétique. (Le moment magnétique d'un tel atome comprend parfois aussi une certaine contribution due au mouvement orbital.) Dans les conducteurs métalliques, les électrons « libres » qui se déplacent dans le cristal ont eux-mêmes un comportement faiblement paramagnétique. Tout cela est fondamentalement de la physique quantique.

Même le diamagnétisme, fondamentalement, met en jeu la mécanique quantique. Considérons deux électrons circulant dans un atome dans des directions opposées. Nous avons expliqué que le diamagnétisme existe car un champ appliqué **B** fait qu'un électron accélère légèrement et que l'autre ralentit. Mais pourquoi les deux orbites ne finissent-elles pas par changer de sorte que leurs moments magnétiques orbitaux pointent dans la même direction, parallèlement au champ? La réponse est que dans la plupart des cas les lois de la mécanique quantique veulent que les deux électrons gardent des mouvements orbitaux de sens opposés, tout à fait comme les spins électroniques sont appariés deux par deux.

10.7 Susceptibilité magnétique

Nous avons vu que les substances diamagnétiques et paramagnétiques développent toutes un moment magnétique proportionnel au champ appliqué. C'est vrai au moins, dans la plupart des conditions. A très basse température, dans des champs assez forts, on peut observer que le moment paramagnétique induit approche une valeur limite quand on augmente le champ. Mettant cet effet de « saturation » à part, la relation entre moment et champ appliqué est tout à fait linéaire, de sorte que nous pouvons caractériser les propriétés magnétique absolue. Selon que l'on choisit le moment d'un kilogramme de matière, d'un mètre cube de matière ou d'une mole, on définit la susceptibilité *spécifique*, la susceptibilité *volumique* ou la susceptibilité *molaire*. Notre discussion de la section 10.5 suggère que pour des substances diamagnétiques la susceptibilité spécifique, basée sur le moment induit par kilogramme, devrait être à peu près la même d'une substance à une autre. Cependant, la susceptibilité volumique, basée sur le moment magnétique induit par mètre cube, correspond mieux à nos besoins présents.



Fig. 10.16 La lame mince aimantée perpendiculairement à sa surface la plus grande est équivalente à un ruban de courant en ce qui concerne son champ extérieur.

Nous appellerons polarisation magnétique ou *aimantation* le moment magnétique par unité de volume, et le représenterons par le symbole **M**. Maintenant, l'aimantation **M** multipliée par μ_0 et le champ magnétique **B** ont des dimensions semblables. Pour le vérifier, rappelez-vous que le champ **B** d'un dipôle magnétique est donné par

moment dipolaire magnétique

$$\mu_0 = \frac{1}{4\pi (\text{distance})^3}$$

tandis que **M**, tel que nous venons de le définir, a les dimensions moment dipolaire magnétique

volume . Si nous définissons maintenant la

susceptibilité magnétique volumique représentée par χ_m , au moyen de la relation

$$\mathbf{M} = \chi_m \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad (attention : voir les remarques ci dessous) \tag{10.39}$$

la susceptibilité sera un nombre sans dimension, négatif pour les substances diamagnétiques, positif pour les paramagnétiques. C'est exactement analogue à la façon exprimée par l'équation 9.38, de définir la susceptibilité électrique χ_e comme étant le rapport entre la polarisation électrique **P** et le champ électrique **E**. Nous allons voir immédiatement que l'analogie va plus loin car le champ macroscopique **B** à l'intérieur de la matière se trouvera être la moyenne du champ microscopique **B**, juste comme le champ macroscopique **E** s'est trouvé être la moyenne du champ microscopique **E**.

Malheureusement, l'équation 10.39 *n*'est *pas* la définition habituelle de la susceptibilité magnétique de volume. Dans la définition habituelle, il apparaît, à la place de **B**, un autre champ **H**, que nous rencontrerons en temps voulu (voir l'équation 10.55). Bien qu'illogique, la définition en fonction de **H** a une certaine justification pratique, et la tradition est si bien établie que nous finirons par nous incliner devant elle. Mais dans ce chapitre, nous voulons suivre aussi longtemps que nous le pouvons un chemin qui suit de façon cohérente et naturelle la description des champs électriques dans la matière.

La différence dans la définition n'a pas de conséquence pratique tant que χ_m est un nombre très petit devant un. Les valeurs de χ_m pour les substances purement diamagnétiques, solides ou liquides, se trouvent typiquement entre - 0.5×10^{-6} et 1,0 $\times 10^{-6}$ Même pour l'oxygène dans les conditions données dans la table, la susceptibilité paramagnétique est inférieure à 10^{-3} . Cela veut dire que le champ magnétique créé par les moments magnétiques dans la substance, tout au moins en moyenne à grande échelle, est beaucoup plus faible que le champ appliqué **B**. Cela nous permet de supposer avec quelque confiance que dans de tels systèmes le champ qui agit sur les dipôles atomiques pour les orienter est le même que le champ qui y existerait en l'absence de l'échantillon. Cependant, nous nous intéresserons à d'autres

systèmes dans lesquels le champ des moments magnétiques n'est pas petit. Par conséquent, nous devons étudier, juste comme nous l'avons fait dans le cas de la polarisation électrique, les champs que la matière polarisée produit elle-même, à la fois dans et hors du matériau.

10.8 Champ magnétique produit par la matière aimantée

On dit qu'un morceau de matière est uniformément aimanté quand il contient un grand nombre de dipôles magnétiques distribués uniformément dans le volume et pointant tous dans la même direction. Le vecteur aimantation **M** est simplement le produit du nombre de dipôles orientés par unité de volume par le moment magnétique m de chaque dipôle. Nous ne nous occupons pas de la façon de maintenir l'alignement de ces dipôles. Il peut y avoir un certain champ appliqué dû à une autre source, mais cela ne nous intéresse pas. Nous voulons seulement étudier le champ produit par les dipôles eux-mêmes.



Fig. 10.17 Un bloc uniformément aimanté est équivalent à une bande de courant superficiel.

Considérons d'abord une lame de matériau d'épaisseur dz coupée en tranches perpendiculairement à la direction de l'aimantation; comme le montre la figure 10.16 *a*. On peut diviser la lame en petits carreaux. Un tel carreau, dont le sommet a une surface d*a*, contient un moment dipolaire total valant *M* d*a* d*z*, car *M* est le moment dipolaire par unité de volume (fig. 10.16 *b*). Le champ magnétique que ce carreau produit en tout point *distant* - distant par rapport à la taille du carreau - est juste celui de n'importe quel dipôle de même moment magnétique. Nous pourrions construire un dipôle de cette intensité en pliant un ruban conducteur d'épaisseur dz pour lui donner la forme du carreau et en envoyant autour de cette boucle un courant I = M dz (fig. 10.16 *c*). Cela donnera à la boucle un moment dipolaire

$$m = I \times \text{aire} = M \, \mathrm{d}a \, \mathrm{d}z \tag{10.40}$$

qui est le même que celui du carreau.

Substituons une telle boucle de courant à la place de chaque carreau comme l'indique la figure 10.16 d. Le courant est le même dans toutes les boucles, par conséquent, à chaque frontière interne nous trouvons des courants égaux et opposés, ce qui équivaut à un courant nul. Nos boucles en forme de « casier à oeufs » sont donc équivalentes à un seul ruban le long du bord parcouru par un courant M dz (fig. 10.16 e). Maintenant, ces carreaux peuvent être rendus très petits, aussi longtemps que nos subdivisions n'atteignent pas des tailles moléculaires. Ils doivent être assez nombreux pour que leur aimantation ne varie pas de façon appréciable d'un carreau au suivant. Avec cette limitation, nous pouvons dire que le champ en tout point externe, même près de la lame, est le même que celui du ruban de courant.

Il reste seulement à reconstruire tout un bloc à partir de telles lamelles, ou couches, comme sur la figure 10.17 *a*. Le bloc entier est alors équivalent au ruban large de la figure 10.17 *b* autour duquel s'écoule un courant M dz, en ampères, dans chaque couche dz, ou dit plus simplement, un courant superficiel de densité *J* en Ampères/mètre, donnée par

$$J = M \tag{10.41}$$

Le champ magnétique **B** en tout point extérieur au bloc aimanté de la figure 10.17 a, et même près du bloc à condition qu'on ne s'approche pas à des distances moléculaires, est le même que le champ **B**' au point correspondant au voisinage du large ruban de courant de la figure 10.17 b.

Mais qu'en est-il du champ à l'intérieur du bloc aimanté? Ici nous sommes en face d'une question analogue à celle que nous avons rencontrée dans le chapitre 9. A l'intérieur de la matière, le champ magnétique n'est pas du tout uniforme si nous l'observons à l'échelle atomique qui est ce que nous avons appelé « microscopique ». Il varie brutalement à la fois en grandeur et en direction entre deux points à quelques angströms de distance seulement. Ce champ *microscopique* **B** est simplement un champ magnétique dans le vide, car selon le point de vue microscopique, comme nous y avons mis l'accent dans le chapitre 9, la matière est un ensemble de particules et de charges électriques dans un espace qui autrement est vide. Le seul champ à grande échelle que l'on puisse définir de façon unique dans la matière est la moyenne spatiale du champ microscopique.

A cause de l'absence des effets attribuables à la charge magnétique, nous voyons que le champ microscopique lui-même satisfait div \mathbf{B} = 0. Si c'est vrai, il en résulte tout à fait directement que la moyenne spatiale du champ microscopique interne dans notre bloc est la même que le champ \mathbf{B} ' à l'intérieur du ruban de courant équivalent.



Fig. 10.18 (a) Une barre cylindrique uniformément aimantée. (*b*) Le cylindre creux équivalent , ou couche de courant. (*c*) Nous pouvons échantillonner l'intérieur de la barre sur des surfaces parallèles S_1 , S_2 ... proches les unes des autres, pour obtenir la moyenne spatiale du champ microscopique.

Pour démontrer cela, considérons la longue tige aimantée uniformément parallèlement à sa longueur, que montre la figure 10.18 a. Nous venons de montrer que le champ extérieur sera le même que celui du long cylindre de courant (pratiquement équivalent à un solénoïde à une seule couche) que montre la figure 10.18 b. Sur la figure 10.18 a, S indique une surface qui comprend une portion S_1 passant à travers l'intérieur de la tige. Comme div $\mathbf{B} = 0$ pour le champ microscopique interne, aussi bien que pour le champ extérieur, div $\mathbf{B} = 0$ dans tout le volume contenu dans S. Il résulte ensuite du théorème de Gauss que l'intégrale de surface de **B** sur *S* doit être nulle. L'intégrale de surface de **B**' sur la surface fermée *S*' est aussi nulle. Sur les portions de S et S' extérieures au cylindre, **B** et **B**' sont identiques. Par conséquent l'intégrale de surface de **B** sur le disque interne S_1 doit être égale à l'intégrale de surface de **B**' sur le disque interne S'_1 . Cela doit s'appliquer aussi pour tout autre disque d'un ensemble de disques parallèles faiblement séparés tels que S₂, S₃, etc. indiqués sur la figure 10.18 c, car le champ à l'extérieur du cylindre dans ce voisinage est négligeable, de sorte que les parties extérieures ne changent rien. Maintenant, prendre l'intégrale de surface sur une série de tels plans équidistants est une façon parfaitement bonne de calculer la moyenne en volume du champ **B** dans ce voisinage, car elle échantillonne impartialement tous les éléments du volume. Il en résulte que la moyenne spatiale du champ microscopique \mathbf{B} à l'intérieur d'une tige aimantée est égale au champ B' à l'intérieur de la lame de courant de la figure 10.18 b.

Il est instructif de comparer les arguments que nous venons de développer avec notre analyse des questions correspondantes dans le chapitre 9. La figure 10.19 présente ces développements côte à côte. Vous verrez qu'ils avancent parallèlement, mais qu'à chaque étape il y a une différence qui reflète l'asymétrie essentielle résumée dans l'observation que *les charges électriques sont les sources des champs électriques*, tandis que les *charges électriques en mouvement* sont les sources des *champs magnétiques*. Par exemple, dans les arguments sur la moyenne du champ microscopique, la clé du problème dans le cas électrique est l'hypothèse que rot $\mathbf{E} = 0$ pour le champ électrique microscopique. Dans le cas magnétique, la clé est l'hypothèse que div $\mathbf{B} = 0$ pour le champ magnétique microscopique.

Si l'aimantation **M** à l'intérieur d'un volume de matière n'est pas uniforme mais au contraire varie avec la position comme $\mathbf{M}(x, y, z)$, la distribution du courant équivalent est simplement donnée par

$$\mathbf{J} = \operatorname{rot} \mathbf{M} \tag{10.42}$$

Regardons d'où cela provient dans une seule situation. Supposons qu'il y ait une aimantation dans la direction z, qui devient plus intense à mesure que nous

avançons dans la direction y. C'est représenté sur la figure 10.20 a, qui montre une petite région du matériau divisée en petits blocs. On suppose que les blocs sont si petits que nous pouvons considérer que l'aimantation est uniforme dans un seul bloc. Nous pouvons alors remplacer chaque bloc par un ruban de courant, avec une densité de courant $J = M_z$. Si le bloc a une hauteur Δz , un tel ruban transporte un courant $I = J \Delta z = M_z \Delta z$. Maintenant, chaque ruban a une densité de courant un brin plus forte que celui qui est à sa gauche. Le courant dans chaque boucle dépasse le courant dans la boucle à sa gauche de

$$\Delta I = \Delta z \Delta M_z = \Delta z \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \qquad (10.43)$$

A chaque interface dans cette rangée de blocs il y a un courant net dans la direction x de grandeur ΔI (fig. 10.20 c). Pour obtenir le courant par unité de surface qui s'écoule dans la direction x, nous devons multiplier par le nombre de blocs par unité de surface, qui est $1/(\Delta y \Delta z)$ Ainsi

$$J_{x} = \Delta I \left(\frac{1}{\Delta y \Delta z}\right) = \frac{\partial M_{z}}{\partial y}$$
(10.44)



Fig. 10.19 Comparaison des cas électrique (a) et magnétique (b).

Une

autr

e façon d'obtenir un courant dans la direction x est d'avoir une composante y de l'aimantation qui varie dans la direction z. Si vous traitez ce cas, en vous servant d'une colonne de blocs verticale, vous trouverez que la densité de courant net dans la direction x est donnée par

$$J_x = -\frac{\partial M_y}{\partial z} \tag{10.45}$$

Ainsi en général, en superposant les deux situations

$$J_{x} = \left(\frac{\partial M_{z}}{\partial y} - \frac{\partial M_{y}}{\partial z}\right) = (\text{rot } \mathbf{M})_{x}$$
(10.46)

qui suffit pour établir l'équation 10.42.

10.9 Champ d'un aimant permanent

On voit rarement, même au laboratoire, les sphères et tiges uniformément polarisées dont nous avons parlé dans le chapitre 9. Une polarisation électrique gelée peut se produire dans quelques substances, bien qu'elle soit en général cachée par quelque accumulation de charges libres. Pour faire la figure 10.3 *a* qui montre à quoi *ressemblerait* le champ d'une tige polarisée, il fut nécessaire d'utiliser deux disques chargés. En revanche, des matériaux ayant une polarisation magnétique permanente, c'est-à-dire une *aimantation* permanente, sont familiers et utiles. On peut faire des aimants permanents avec beaucoup d'alliages et de composés de substances ferromagnétiques. Nous laissons pour la section 10.11 la question de savoir ce qui rend cela possible; nous plongerons alors brièvement dans la physique du ferromagnétisme. Dans cette section, prenant pour acquise l'existence des aimants permanents, nous voulons étudier le champ magnétique **B** d'une tige cylindrique uniformément aimantée, et le comparer avec soin au champ électrique **E** d'une tige de même forme uniformément polarisée.

La figure 10.21 montre en coupe chacun de ces deux cylindres pleins. Dans chaque cas la polarisation est parallèle à l'axe et elle est uniforme. C'est-à-dire que la polarisation \mathbf{P} et l'aimantation \mathbf{M} ont mêmes grandeur et direction partout dans leur cylindre respectif.



permanents modernes.) Par champ à l'intérieur du cylindre, nous voulons bien sûr dire champ macroscopique défini comme moyenne spatiale du champ microscopique. En prenant ce sens-là, nous montrons sur la figure 10.21 les lignes de champ à la fois à l'intérieur et à l'extérieur des barreaux. Au fait, ces barreaux ne sont pas supposés être près l'un de l'autre; nous avons mis les deux diagrammes ensemble pour la commodité de la comparaison. Chaque barreau est isolé dans un espace qui autrement est vide. (Lequel, pensez-vous, déformerait le plus sérieusement le champ de l'autre, s'ils *étaient* proches l'un de l'autre ?)

Dans le cas magnétique, cela implique que chaque millimètre cube

d'aimant permanent a le même nombre de spins électroniques

alignés, pointant dans la même direction. (On peut réaliser une très bonne approximation de cela avec les matériaux des aimants

A l'extérieur les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} *se ressemblent*. En fait, les lignes de champ suivent précisément le même trajet. Cela ne devrait pas vous surprendre si vous vous rappelez que le dipôle électrique et le dipôle magnétique ont même champ à distance. Chaque petit bout de l'aimant est, un dipôle magnétique, chaque petit bout du barreau polarisé (qu'on appelle parfois un « électret ») est un dipôle électrique, et le champ à l'extérieur est la superposition de tous leurs champs à distance.

Le champ **B**, dedans et dehors, est le même que celui d'une couche cylindrique de courant. En fait, si nous enroulions de façon très régulière, sur un cylindre en carton, un solénoïde d'une seule couche de fil fin, nous pourrions lui brancher une batterie et reproduire le champ **B** extérieur et intérieur à l'aimant permanent. (La bobine chaufferait et la batterie s'épuiserait; les spins électroniques procurent le courant gratuitement et sans frottement !) Le champ électrique **E**, à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du barreau polarisé est celui de deux disques de charge, un à chaque bout du cylindre.



Observez que les champs *internes* \mathbf{E} et \mathbf{B} ont des formes essentiellement différentes : \mathbf{B} pointe vers la droite, est continu aux bouts du cylindre et subit une variation de direction brutale à la surface du cylindre.

E pointe vers la gauche, passe à travers la surface cylindrique comme si elle n'était pas là, mais est discontinu sur les surfaces des extrémités. Ces différences proviennent de la différence essentielle entre l'« intérieur » du dipôle électrique physique et l'« intérieur » du dipôle magnétique physique, qu'on voit sur la figure 10.8. Par *physique*, nous voulons dire ceux que la Nature nous a fournis en réalité.

Si nous ne nous intéressions qu'au champ extérieur, nous pourrions utiliser les deux images pour décrire le champ de notre aimant. Nous pourrions dire que le champ magnétique d'un aimant permanent provient d'une couche de charge positive -densité superficielle de pôles magnétiques « nord » - sur l'extrémité droite de l'aimant, et d'une couche de charge magnétique négative, pôles « sud », sur l'autre extrémité. Nous pourrions adopter une fonction potentiel scalaire V_{mag} , telle que $\mathbf{B} = -$ grad V_{mag} . La fonction potentiel V_{mag} serait reliée à la densité de pôle fictif comme le potentiel électrique est relié à la densité de charge. La simplicité du potentiel scalaire comparé au potentiel vecteur est plutôt attrayante. De plus, on peut relier de façon très nette le potentiel scalaire magnétique aux courants qui sont les sources réelles de \mathbf{B} , donc on peut utiliser le potentiel scalaire sans aucun emploi explicite des pôles fictifs. Vous pouvez vouloir

utiliser cet instrument si jamais vous avez à concevoir des aimants ou à calculer des champs magnétiques.

Fig. 10.21 (a) Le champ électrique **E** à l'intérieur et à l'extérieur d'un cylindre uniformément polarise. (*b*) Le champ magnétique **B** à l'extérieur et à l'intérieur d'un cylindre uniformément aimanté. Dans chaque cas, le champ intérieur présenté est le *champ macroscopique*, c'est-à-dire, la moyenne locale du champ atomique ou *microscopique*.

Cependant, nous devons abandonner la fiction des pôles magnétiques, si nous voulons comprendre le champ à l'intérieur d'un matériau magnétique. Le fait que le champ magnétique macroscopique à l'intérieur d'un aimant ressemble, dans un sens très réel, au champ de la figure 10.21 b plutôt qu'à celui de la figure 10.21 a, a été démontré

expérimentalement en déviant des particules chargées énergétiques dans du fer aimanté, aussi bien que par les effets magnétiques sur des neutrons lents, qui passent encore plus facilement à travers l'intérieur de la matière.

La figure 10.22 a montre un petit aimant permanent en forme de disque dans lequel l'aimantation est parallèle à l'axe de symétrie. Vous êtes probablement plus familiés avec les aimants permanents en forme de longs barreaux. Cependant, on peut faire des disques plats aimantés de force considérable avec certains matériaux nouveaux. On a choisi dans cet exemple les mêmes dimensions particulières que celles du disque polarisé électriquement de la figure 9.21. On donne $1,5 \times 10^5$ comme aimantation Men unités MKSA. Le moment magnétique de l'électron est $0,93 \times 10^{-23}$ joule/tesla, de sorte que cette valeur de *M* correspond à $1,6 \times 10^{28}$ spins électroniques alignés par mètre cube. Le disque est équivalent à une bande de courant autour de lui, de densité superficielle J = M. Le bord ayant 3 mm de large le courant *I* est de



$$3 \times 10^{-3} \times 1.5 \times 10^{5} = 450$$
 Ampères

plutôt plus de courant que ce que vous tirez d'une batterie d'automobile en la court-circuitant ! Le champ **B** en tout point de l'espace, y compris les points à l'intérieur du disque, est simplement le champ de cette bande de courant. Par exemple, près du centre du disque, **B** est approximativement

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 450}{2 \times 10^{-2}} = 2,8 \times 10^{-2} \text{ tesla}$$
(10.47)

L'approximation consiste à traiter une bande de courant de 3 mm de large comme si elle était concentrée en une seule boucle. (Dans l'approximation correspondante de l'exemple électrique, nous avions traité des lames de charge équivalentes comme grandes par rapport à leur séparation.) Quant au champ en un point distant, il serait facile de le calculer pour la boucle de courant, mais nous pourrions aussi, pour un calcul approché, procéder comme nous l'avons fait dans l'exemple électrique, c'est-à-dire que nous pourrions trouver le moment magnétique total de l'objet, et trouver le champ à distance d'un seul dipôle de cette grandeur.

10.10 Courants libres et champ H

Il est souvent utile de faire une distinction entre les courants liés et les courants *libres*. Les courants *liés* sont des courants associés aux moments magnétiques moléculaires ou atomiques, y compris le moment magnétique intrinsèque des particules avec spin. Ce sont les boucles de courant moléculaires envisagées par Ampère, la source de l'aimantation que nous venons de considérer. Les courants *libres* sont des courants de conduction ordinaires qui s'écoulent dans des circuits macroscopiques -des courants qu'on peut démarrer et arrêter avec un interrupteur et mesurer avec un ampèremètre.

Fig. 10.22 (a) Un disque uniformément aimanté parallèlement à son axe. (b) Vue en coupe du disque. (c) Le courant équivalent est une bande de courant de 450 ampères s'écoulant le long du bord du disque. Le champ magnétique **B** est le même que le champ magnétique d'un solénoïde très court, ou approximativement celui d'une seule boucle de courant de 0,01 m de rayon.

La densité de courant **J** dans l'équation 10.42 est la moyenne microscopique des courants liés; donnons lui donc à partir de maintenant l'étiquette $J_{lié}$

$$\mathbf{J}_{\text{lié}} = \text{rot } \mathbf{M} \tag{10.48}$$

Sur une surface où **M** est discontinu, telle que le bord du bloc aimanté de la figure 10.17, nous avons une densité de courant superficiel J qui représente aussi un courant lié.

Nous avons trouvé que **B**, à la fois à l'extérieur de la matière, et comme moyenne spatiale à l'intérieur de la matière, est relié à $\mathbf{J}_{\text{lié}}$ juste comme il l'est à toute densité de courant. C'est-à-dire rot $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{lié}}$.

Mais c'est en l'absence de courants libres. Si nous les rajoutons, le champ qu'ils produisent s'ajoute simplement au champ dû à la matière aimantée et nous avons

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_{\text{lié}} + \mathbf{J}_{\text{libre}} \right) = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{total}}$$
(10.49)

Exprimons $J_{lié}$ en fonction de M, grâce à l'équation 10.48. L'équation 10.49 devient alors

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0(\operatorname{rot} \mathbf{M} + \mathbf{J}_{\operatorname{libre}}) \tag{10.50}$$

qu'on peut réarranger sous la forme

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}\right) = \mathbf{J}_{\text{libre}}$$
(10.51)

Si nous définissons maintenant une fonction vectorielle $\mathbf{H}(x, y, z)$ en tout point de l'espace par la relation

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \tag{10.52}$$

on peut écrire l'équation 10.51

$$rot \mathbf{H} = \mathbf{J}_{libre} \tag{1053}$$

En d'autres termes, le vecteur **H**, défini par l'équation 10.52 est relié au courant *libre* de la même façon que \mathbf{B}/μ_0 est relié au courant total, lié plus libre. Le parallèle n'est cependant pas complet, car nous avons toujours div $\mathbf{B} = 0$, tandis que notre fonction vectorielle **H** n'a pas nécessairement une divergence nulle.

Cela vous a sûrement rappelé le vecteur **D** que nous avons introduit un peu à contre-coeur, dans le chapitre précédent. **D**, rappelez-vous, était relié à la charge libre comme $\varepsilon_0 \mathbf{E}$ était relié à la charge totale. Bien que nous ayons plutôt discrédité **D**, le vecteur **H** est réellement utile pour une raison pratique qu'il vaut la peine de comprendre. Dans les systèmes électriques, ce que nous pouvons facilement contrôler et mesurer, ce sont les différences de potentiel des corps, et non les quantités de charge libre sur eux. Ainsi, contrôlons-nous directement le champ électrique **E**. **D** échappe à notre contrôle direct, et comme ce n'est dans aucun sens une quantité fondamentale, ce qui lui arrive ne nous intéresse pas beaucoup. Dans les systèmes magnétiques, au contraire, ce sont précisément les courants libres qu'on peut contrôler le plus facilement. Nous les conduisons dans des fils, les mesurons avec des ampèremètres, leur faisons suivre des chemins bien définis avec des isolants, et ainsi de suite. En règle générale, nous avons beaucoup moins de contrôle direct sur l'aimantation, donc sur **B**. Ainsi le vecteur auxiliaire **H** est-il utile, même si **D** ne l'est pas.

La relation intégrale qui équivaut à l'équation 10.53 est

$$\int_{C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S} \mathbf{J}_{\text{libre}} \cdot d\mathbf{S} = I_{\text{libre}}$$
(10.54)



où I_{libre} est le courant total compris dans le contour *C*. Supposons que nous enroulions une bobine autour d'un morceau de fer et que nous envoyions dans cette bobine un certain courant *I* que nous pouvons mesurer en mettant un ampèremètre en série avec la bobine. C'est le courant libre, le seul courant libre dans le système. Par conséquent, une chose que nous sommes sûrs de connaître est la circulation de **H** le long de tout contour fermé, que ce contour passe ou non à travers le fer. L'intégrale ne dépend que du nombre de tours de notre bobine, qui sont traversés par notre contour, et non de l'aimantation dans le fer. La détermination de **M** et **B** dans ce système peut être plutôt compliquée. Il est utile d'avoir mis en avant une quantité que nous pouvons déterminer tout à fait directement.

La figure 10.23 illustre cette propriété de **H** par un. exemple, et elle nous rappelle les unités. **H** a comme dimensions celles de **B** divisées par μ_0 **H** est directement relié au courant en ampères. La formule (10.54) donne des ampères/mètre pour *H*. Comme vous le savez; on appelle tesla l'unité d'intensité de champ magnétique *B*. Il n'y a pas de besoin pressant de donner un nom spécial à l'unité de *H*. On parle d'ampère/ mètre.

Fig.10.23 Illustration de la relation entre le courant libre et la circulation de \mathbf{H} .

Nous avons considéré **B** comme étant le vecteur champ magnétique fondamental car l'absence de charge magnétique, dont nous avons discuté dans la section 10.2, implique div **B** = 0 partout, même dans les atomes ou molécules. D'après div **B**=0, il résulte, comme nous l'avons montré dans la section 10.8, que le champ macroscopique moyen à l'intérieur de la matière est **B**, et non **H**. Les implications de cela n'ont pas toujours été comprises ou prises en considération dans le passé. De plus, **H** possède l'avantage pratique que nous avons déjà expliqué. Dans certains livres anciens, vous trouverez qu'on a introduit **H** comme champ magnétique primaire. On définit alors **B** comme μ_0 (**H** + **M**) et on lui donne le nom *d'induction magnétique*. Même certains auteurs modernes qui traitent **B** comme le champ primaire se sentent obligés de l'appeler induction magnétique car le nom *champ magnétique* fut historiquement pris par **H**. Cela semble gauche et pédant. Si vous allez dans un laboratoire et si vous demandez à un physicien ce qui cause la déviation des trajectoires des pions dans sa chambre à bulles, il répondra probablement « champ magnétique » et non « induction magnétique ». Vous entendrez rarement un géophysicien se référer à l'induction magnétique de la terre ou un astronome parler de l'induction magnétique dans la Galaxie. Nous proposons de continuer à appeler **B** champ magnétique. Quant à **H**, bien qu'on ait inventé d'autres noms pour lui, nous l'appellerons « le champ **H** » ou même « le champ magnétique **H** ».

Ce ne sont que les noms qui créent des ennuis, pas les symboles. Tout le monde est d'accord pour dire que la relation qui relie **B**, **M** et **H** dans le système MKSA est celle qu'énonce l'équation 10.52. Dans le vide, il n'y a pas de distinction essentielle entre **B** et μ_0 **H** car **M** doit être nul quand il n'y a pas de matière. Vous verrez souvent les équations de Maxwell pour les champs dans le vide écrites avec **E** et **H**, plutôt qu'avec **E** et **B**.

Dans le système C.G.S. où il n'y a pas μ_0 dans les formules, on a **H** = **B** - 4π **M**. **H** et **B** ont alors les mêmes dimensions. Comme l'unité de **B** est le gauss, on pourrait employer le même nom pour l'unité de **H**, mais on lui a donné un nom : l'oersted. (Voir l'Appendice.)

Nous devrions noter ici que la définition couramment acceptée de la susceptibilité magnétique volumique χ_m n'est pas celle que donne l'équation 10.39 et qui est logiquement préférable, mais plutôt



$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\chi}_{\mathrm{m}} \, \mathbf{H} \tag{10.55}$$

L'aimant permanent de la figure 10.21 *b* est un exemple instructif de la relation entre **H** d'une part et **B** et **M** d'autre part. Pour obtenir **H** en un certain point à l'intérieur de la matière aimantée, nous devons ajouter vectoriellement au champ magnétique \mathbf{B}/μ_0 en ce point, le vecteur -**M**. La figure 10.24 décrit cela pour un point particulier *P*. Il se trouve que les lignes de **H** à l'intérieur de l'aimant ressemblent exactement à celles de **E** à l'intérieur du cylindre polarisé de la figure 10.21 *a*. C'est comme il se doit, car si les pôles magnétiques étaient réellement la source de l'aimantation, plutôt que les courants électriques, le champ magnétique macroscopique à l'intérieur de la matière serait **H**, et non **B**; la similarité entre polarisation magnétique et polarisation électrique serait alors complète.

Dans l'aimant permanent, il n'y a pas du tout de courants libres. En conséquence, la circulation de **H** doit, d'après l'équation 10.54, être nulle le long de tout contour fermé. Vous pouvez voir qu'il en sera ainsi si les lignes de **H** ressemblent vraiment aux lignes de **E** sur la figure 10.21 *a*, car nous savons que la circulation de ce champ électrostatique est nulle le long de tout contour fermé.

10.11 Ferromagnétisme

Le ferromagnétisme a été utile à l'homme et l'a rendu perplexe pendant longtemps. La *pierre d'aimant* (magnétite) était connue dans l'antiquité, et l'influence sur l'histoire du fer sous forme d'aiguilles de boussoles ne fut peut-être seconde qu'à celle du fer sous forme d'épées. Pendant près d'un siècle notre technologie électrique a fortement dépendu du fait qu'un métal abondant se trouve posséder cette propriété particulière. Néanmoins, ce n'est que récemment que l'on a atteint une compréhension fondamentale du ferromagnétisme.

Nous avons déjà décrit certaines propriétés des ferromagnétiques. Dans un champ magnétique très intense, la force sur une substance ferromagnétique est dans une direction telle qu'elle l'attire vers les champs croissants, comme pour les matériaux paramagnétiques, mais

Fig. 10.24 (a) La relation entre **B**, **H** et **M** en un point à l'intérieur du cylindre aimanté de la figure 10.21 *b*.
(*b*) Relation entre les vecteurs au point *P*.

au lieu d'être proportionnelle au produit du champ **B** par son gradient, la force est proportionnelle au gradient lui-même. Comme nous l'avons remarqué à la fin de la section 10.4, cela suggère que si le champ est assez intense, le moment magnétique acquis par le ferromagnétique atteint une certaine grandeur limite. La direction du

vecteur moment magnétique doit encore être contrôlée par le champ, car autrement la force n'agirait pas toujours dans la direction où l'intensité du champ augmente.

Dans les aimants a permanents » nous observons un moment magnétique même en l'absence de tout champ appliqué extérieurement, qui garde sa grandeur et sa direction même quand on applique des champs extérieurs, s'ils ne sont pas trop intenses. Le champ de l'aimant permanent lui-même est toujours présent, bien sûr, et vous pouvez vous demander s'il ne pourrait maintenir ses propres sources alignées. Cependant, si vous regardez de nouveau les figures 10.21 b et 10.24, en acceptant l'assurance que cela représente bien un véritable aimant, vous remarquerez que \mathbf{M} n'est généralement parallèle ni à \mathbf{B} ni à \mathbf{H} . Cela suggère que les dipôles magnétiques ont dû être bloqués en direction par quelque chose d'autre que des forces purement magnétiques.

L'aimantation qu'on observe dans les substances ferromagnétiques est beaucoup plus grande que celles auxquelles nous sommes habitués dans les substances paramagnétiques. Les aimants permanents ont très couramment des champs dans les parages de quelques dixièmes de tesla. Une quantité plus caractéristique est la valeur limite de l'aimantation, le moment magnétique par unité de volume, que la matière acquiert dans un champ très fort. On l'appelle aimantation à saturation. Nous pouvons déduire l'aimantation à *saturation* du fer à partir des données de la table (section 10 11. Dans un champ avec un gradient de 17 tesla/mètre, la force sur 1 kg de fer est 4000 Newtons. D'après l'équation 10.18, qui relie la force sur un dipôle au gradient du champ, nous trouvons

$$m = \frac{F}{(dB/dz)} = \frac{4000}{17} = 235 \text{ joule/tesla (pour 1 kg)}$$
 (10.56)

Pour obtenir le moment par mètre cube, nous multiplions par la densité du fer, 7 800 kg/m³. L'aimantation M est alors

$$M = 235 \times 7\ 800 = 1,83 \times 10^{6} \text{ joule/tesla-m}^{3}$$
(10.57)

C'est $\mu_0 M$ et non M que nous devrions comparer aux intensités du champ en tesla. Par exemple, si nous avions comme aimant permanent une très longue barre de fer ayant une aimantation de cette valeur, le champ H à l'intérieur serait tout à fait petit (imaginez la situation de la figure 10.21 *b* étirée axialement) de sorte que 1e champ B dans le fer serait approximativement égal à $\mu_0 M$, soit quelques 2,3 Teslas.

Il est plus intéressant de voir à combien de moments de spins électroniques correspond cette aimantation. En divisant *M* par le moment de l'électron donné sur la figure 10.14, soit 0.93×10^{-23} joule/tesla, nous trouvons environ 2 x 10^{29} moments de spin par mètre cube. Or un mètre cube de fer contient environ 10^{29} atomes. La limite de l'aimantation semble correspondre à environ deux spins alignés par



atome. Comme la plupart des électrons de l'atome sont appariés et n'ont pas d'effet magnétique du tout, cela indique que nous avons affaire à un alignement quasiment complet des quelques spins électroniques de la structure atomique qui ont la liberté de pointer dans la même direction.

Voici un fait très suggestif concernant les ferromagnétiques : une substance ferromagnétique donnée, le fer pur, par exemple, perd très brusquement ses propriétés

ferromagnétiques si on le chauffe à une certaine température. Au-dessus de 770 °C, le fer pur se comporte comme une substance paramagnétique. Si on le refroidit au-dessous de 770 °C, il retrouve immédiatement ses propriétés ferromagnétiques. Cette température de transition, qu'on appelle point de Curie d'après Pierre Curie qui fut l'un des premiers à l'étudier, est différente dans des substances différentes. Elle est de 358 °C dans le nickel pur.

Quel est ce « comportement ferromagnétique » qui distingue si brusquement le fer au-dessous de 770 °C du fer au-dessus de 770 °C ou du cuivre à toute température ? C'est l'alignement *spontané* dans une direction de tous les moments magnétiques atomiques, ce qui

Fig. 10.25 Les directions des spins sont bien ordonnées dans une petite région d'un cristal de fer. Chaque flèche représente le moment magnétique d'un atome de fer.

implique l'alignement des axes de spins de certains électrons dans chaque atome de fer. Par *spontané*, nous voulons dire qu'aucun champ magnétique extérieur n'a besoin d'intervenir. Dans une région du fer assez grande pour contenir des millions d'atomes, les spins et les moments magnétiques de presque tous les atomes pointent dans la même direction. Bien au-dessous du point de Curie, - à température ordinaire, par exemple, dans le cas du fer -

l'alignement est presque parfait Si vous pouviez regarder l'alignement à l'intérieur d'un cristal de fer métallique et voir les moments magnétiques élémentaires sous forme de vecteurs avec des pointes de flèches sur eux, vous verriez quelque chose comme la figure 10.25.

Il est peu surprenant qu'une forte température détruise un tel arrangement aussi net. Pour ainsi dire, l'énergie thermique est l'ennemi de l'ordre. Un cristal, arrangement ordonné d'atomes, se transforme en un liquide, arrangement beaucoup moins ordonné, à une température bien définie, la température de fusion. Le point de fusion, comme le point de Curie, est différent pour des substances différentes. L'analogie va plus loin, mais elle fait intervenir des idées qu'il vaut mieux laisser pour le moment où vous ferez l'étude de la chaleur et de la physique statistique dans une partie ultérieure du cours. Concentrons-nous ici sur l'état ordonné lui-même. Deux ou trois questions sont évidentes

Question 1 : Qu'est-ce qui fait aligner les spins et les garde alignés?



Fig. 10.26 Un atome *A* et ses plus proches voisins dans un réseau cristallin. (Bien sûr, en réalité le réseau est tridimensionnel.)



Fig. 10.27 bans le fer les directions énergétiquement les plus favorables pour l'aimantation se trouvent le long des axes cubiques du cristal.

Question 2 : S'il n'y a pas de champ extérieur présent, comment les spins choisissent-ils une direction plutôt qu'une autre ? Pourquoi tous les moments de la figure 10.25 ne pointent-ils pas tous vers le bas, ou vers la droite, ou vers la gauche ?

Question 3 : Si les moments atomiques sont tous alignés, pourquoi n'importe quel morceau de fer n'est-il pas un aimant puissant, à température ordinaire ?

Les réponses à ces trois questions nous aideront à comprendre, au moins d'une manière générale, le comportement des matériaux ferromagnétiques quand on applique un champ extérieur, ni très fort ni très faible. Cela inclut une variété très riche de phénomènes que nous n'avons même pas encore décrits.

Réponse 1 : Pour une certaine raison liée à la mécanique quantique de la structure de l'atome de fer, il est énergétiquement favorable pour les spins d'atomes de fer adjacents d'être parallèles. Cela n'est pas d0 à leur interaction magnétique. C'est un effet plus fort que cela; il favorise en plus le parallèlisme des spins qu'ils soient comme ceci $\uparrow\uparrow$ ou comme cela $\rightarrow \rightarrow$ (les interactions entre dipôles ne marchent pas de cette façon - voir le problème 9.26). Maintenant si l'atome A (fig. 10.26) veut avoir son spin dans la même direction que celle de ses voisins, les atomes B, C, D et E et chacun d'entre *eux* préfère avoir son spin dans la même direction que les spins de ses voisins, y compris l'atome A, vous pouvez facilement imaginer que si jamais une majorité locale se développe, il y aura une forte tendance à ce qu'elle « devienne unanime » et alors la mode va s'étendre.

Réponse 2 : Un accident détermine en quelque sorte laquelle des diverses directions du cristal sera choisie, si on part d'un état désordonné - comme par exemple si on refroidit du fer au-dessous de son point de Curie, sans aucun champ externe appliqué. Le fer pur est constitué par des cristaux cubiques centrés. Chaque atome a huit plus proches voisins. La symétrie de l'environnement s'impose à. tout aspect physique de l'atome, y compris le couplage entre spins. Il se trouve que dans le fer les axes du cube sont les axes d'aimantation la plus facile. C'est-à-dire que les spins aiment pointer dans la même direction, mais ils aiment cela encore plus si cette direction est l'une des six directions $\pm \hat{\mathbf{x}}$, $\pm \hat{\mathbf{y}}$, $\pm \hat{\mathbf{z}}$ (fig. 10.27). C'est important car cela veut dire que les spins ne peuvent pas facilement pivoter *en masse* de l'une de ces directions faciles à une autre direction équivalente à angle droit. Pour le faire, ils devraient passer en chemin par des

orientations moins favorables. C'est juste cet empêchement qui rend possible l'existence des aimants permanents.



Fig. 10.28 Disposition possible des domaines magnétiques dans un monocristal uniforme de fer.

Réponse 3 : Un morceau de fer apparemment non aimanté est en réalité composé de nombreux *domaines* dans chacun desquels les spins sont tous alignés dans un sens, mais dans une direction différente de celle des spins des domaines voisins. En moyenne sur tout le morceau de fer « non aimanté », toutes les directions sont également représentées, il n'en résulte ainsi aucun champ magnétique à grande échelle. Les domaines magnétiques s'établissent même dans un monocristal. D'habitude les domaines sont microscopiques dans le sens usuel du terme. En fait, on peut les voir avec un microscope de faible puissance. C'est encore énorme, bien sûr, à l'échelle atomique, de sorte qu'un domaine magnétique contient typiquement des milliards de moments magnétiques élémentaires. La figure 10.28 représente une division en domaines. La division provient du fait qu'elle est moins chère en énergie qu'un arrangement où tous les spins pointent

tous dans une même direction. Ce dernier arrangement serait un aimant permanent avec un champ intense s'étendant dans l'espace autour de lui. L'énergie emmagasinée dans ce champ extérieur est plus grande que l'énergie dont on a besoin pour tourner hors d'alignement de leur voisinage immédiat une petite fraction des spins du cristal, à savoir

ceux qui se trouvent à la frontière d'un domaine. La structure en domaine est ainsi le résultat d'une compétition pour minimiser l'énergie.



Fig. 10.29 Dispositif pour étudier la relation entre **B** et **M**, ou entre **B** et **H**, dans un matériau ferromagnétique.



assez pur. On obtient la courbe en pointillés quand on réduit ${\bf H}$ à partir d'une grande valeur positive.



Si nous enroulons une bobine de fil autour d'un barreau de fer, nous pouvons appliquer un champ magnétique au matériau en faisant passer un courant dans le fil. Dans ce champ, les moments qui pointent parallèlement au champ auront une énergie plus faible que ceux qui pointent antiparallèlement, ou dans quelque autre direction. Cela favorise certains domaines par rapport aux autres ; ceux qui se trouvent avoir une direction du moment⁽⁸⁾ orientée favorablement tendent à grandir aux dépens des autres, si c'est possible. Un domaine croît comme un club, c'est-à-dire en augmentant le nombre de ses membres. Cela se produit aux frontières. Les spins appartenant à un des domaines défavorisés, mais situés près de la frontière avec un domaine favorisé, changent simplement de camp en adoptant la direction privilégiée. Cela déplace simplement la frontière du domaine, qui n'est rien de plus que la surface qui sépare les deux classes de spins. Cela se produit assez facilement dans les monocristaux. C'est-à-dire qu'un champ appliqué très faible peut entraîner, par mouvement des frontières, un très grand accroissement des domaines, d'où une grande variation totale de l'aimantation. Cependant, selon la structure en grains du matériau, le mouvement des frontières des domaines peut être difficile.

Si le champ appliqué ne se trouve pas le long d'une des directions « faciles » (par exemple, dans le cas d'un cristal cubique) l'épuisement des domaines défavorisés laisse cependant des spins qui ne pointent pas exactement parallèlement au champ. 11 faudra peut-être alors des champs considérablement plus intenses pour les aligner dans la direction du champ, et ainsi pour finalement créer l'aimantation maximum possible.

Considérons les conséquences à grande échelle de cela, comme elles apparaissent dans le comportement d'un morceau de fer soumis à des champs appliqués variés. Un dispositif expérimental commode est un tore de fer autour duquel nous avons enroulé deux bobines (fig. 10.29). Cela fournit un champ pratiquement uniforme à l'intérieur du fer, sans effets aux extrémités pour compliquer les choses. En mesurant la tension induite dans l'une des bobines, nous pouvons déterminer les variations du flux Φ , et par conséquent celles de **B** à l'intérieur du fer. Si nous gardons trace des *variations* de **B**, partant de B = 0, nous savons toujours ce que vaut **B**. Un courant à travers l'autre bobine établit **H**, que nous prenons comme

s de manière presque interchangeable dans la discussion. Le moment est un aspect t aussi. Pour être méticuleux, nous devrions rappeler au lecteur que dans le cas de tique pointent dans des directions opposées (fig. 10.14).

variable indépendante. Si nous connaissons **B** et **H**, nous pouvons toujours calculer **M**. Il est plus courant de tracer **B** plutôt que **M**, en fonction de **H**. On montre sur la figure 10.30 une courbe *B*-*H* typique pour le fer. Remarquez que les échelles sur les abscisses et les ordonnées sont extrêmement différentes. S'il n'y avait pas de fer dans la bobine à 1 Ampère/m correspondrait $4\pi \times 10^{-7}$ tesla. Au contraire quand le champ *H* vaut seulement quelques dizaines d'ampère/mètre, *B* atteint des dixièmes de tesla. Bien sûr, ici *B* et *H* se rapportent à des moyennes sur tout l'anneau de fer; la structure fine en domaines ne se manifeste jamais telle quelle.

Partant du fer « non aimanté », B = 0 et H = 0, quand on augmente H, il en résulte une augmentation de B visiblement nonlinéaire, lente au début, puis plus rapide, puis très lente, finissant par plafonner. Ce qui devient constant en réalité à la limite n'est pas B mais M.

Fig. 10.31 L'Alnico V est un alliage d'aluminium, de nickel et de cobalt dont on se sert pour les aimants permanents. Comparez cette portion de sa courbe d'aimantation à la portion correspondante de la caractéristique pour un matériau « mou », montrée sur la figure 10.30.

nissant par plafonner. Ce qui devient constant en réalité à la limite n'est pas *B* mais *M*. Cependant sur ce graphique, comme $M = (B/\mu_0 - H)$ et $H \vee B/\mu_0$ la différence entre *B* et *M* n'est pas appréciable.

La partie inférieure de la courbe B-H est gouvernée par le mouvement des frontières des domaines, qui est la croissance des domaines « qui pointent bien » aux dépens des domaines « qui pointent mal ». Dans la partie de la courbe qui plafonne le champ attire « comme une brute » les moments magnétiques dans sa direction. Le fer ici est dans un métal polycristallin ordinaire, de sorte que seule une petite fraction des microcristaux

auront la chance d'avoir une direction « facile » alignée avec la direction du champ.

Si maintenant nous réduisons doucement le courant dans la bobine, diminuant ainsi *H*, la courbe *ne se retrace pas elle-même*. A la place, nous trouvons le comportement qu'indique la courbe en pointillé sur la figure 10.31. On appelle hystérésis cette irréversibilité. Elle est largement due au fait que les mouvements des frontières des domaines sont partiellement irréversibles. Les raisons ne sont pas évidentes d'après tout ce que nous avons dit, mais elles sont bien comprises par les physiciens qui travaillent sur le ferromagnétisme. Cette irréversibilité est gênante; elle produit des pertes d'énergie dans beaucoup d'applications techniques des matériaux ferromagnétiques - par exemple les transformateurs en courant alternatif. Mais elle est indispensable pour l'aimantation permanente, et pour de telles applications, on vent augmenter l'irréversibilité. La figure 10.31 montre la portion correspondante de la courbe *B-H* pour un bon alliage pour aimant permanent. Remarquez que *H* doit devenir 50000 A/m dans la direction *opposée* avant que *B* ne soit réduit à zéro. Si on coupe simplement la bobine et qu'on l'enlève, nous restons avec un *B* de 1,3 Tesla, qu'on rappelle *champ rémanent*. Comme *H* est nul, c'est essentiellement le même que l'aimantation *M* multipliée par μ_0 . L'alliage a acquis une aimantation permanente, c'est-à-dire une aimantation qui persistera indéfiniment s'il n'est exposé qu'à des champs magnétiques faibles. Toute l'information qui est stockée sur bandes magnétiques, de la musique aux programmes d'ordinateurs, doit sa permanence à ce phénomène physique. Les éléments magnétiques d'ordinateurs, les mémoires à tores magnétiques, et autres, font intervenir la même physique.

Problèmes

- 10.1Estimez (à un facteur deux ou trois près) la quantité d'énergie emmagasinée dans le solénoïde décrit dans la section 10.1. Exprimez votre estimation en joules. Étant donné que la puissance continue fournie par le générateur est de 400 kW, en gros combien de temps a-t-il fallu pour développer le champ, si on a branché soudainement toute la tension du générateur ?
- 10.2 En supposant que la susceptibilité paramagnétique volumique d'une substance soit proportionnelle au nombre de molécules par mètre cube et inversement proportionnelle à la température absolue, et en partant des données de la table dans la section 10.1, calculez la susceptibilité volumique de l'air dans les conditions standard de température et de pression. L'air contient à peu près un cinquième d'oxygène de poids moléculaire 32, et vous pouvez supposer qu'une molécule d'oxygène dans un gaz se comporte magnétiquement juste comme elle le fait dans l'oxygène liquide.
- 10.3 Dans le chapitre 6, nous avons calculé le champ en un point de l'axe d'une boucle de courant de rayon b : (voir l'équation 6.41). Montrez que pour z ™ b, cette valeur tend vers le champ d'un dipôle magnétique; trouvez jusqu'à quelle distance sur l'axe il faut aller avant que le champ ne devienne égal à 1 % près au champ que produirait un dipôle infinitésimal de même moment dipolaire.
- 10.4 Un solénoïde tel que celui qui est décrit dans la section 10.1 se trouve au sous-sol d'un laboratoire de physique. Un physicien au dernier étage du bâtiment, 18 mètres plus haut et déplacé horizontalement de 24 mètres, se plaint du fait que le champ de l'aimant gêne ses mesures. En supposant que le solénoïde fonctionne dans les conditions indiquées, et en le traitant comme un dipôle magnétique simple, trouvez l'intensité du champ à l'emplacement du physicien qui se plaint. Commentez, si vous avez des arguments pour le faire, la valeur de sa plainte.
- 10.5Au Pôle Nord magnétique, le champ magnétique terrestre est vertical, et a une intensité de 6.2×10^{-5} tesla. Le champ de la terre est approximativement celui d'un dipôle à la surface et plus loin. Quel est le moment dipolaire, et quelle est la grandeur en ampères

d'un courant qui, s'écoulant autour de l'Equateur, produirait un moment dipolaire de même force ? (La source réelle du champ terrestre n'est probablement pas un courant près de la surface mais une distribution de courant au coeur.)

- 10.6Une sphère de rayon *R* porte une charge *Q* uniformément distribuée à la surface de la sphère avec une densité $\sigma = Q/4\pi R^2$. Cette couche de charge tourne autour d'un axe de la sphère à la vitesse angulaire ω , en radians/s. Trouvez son moment magnétique. (Divisez la sphère en bandes étroites de charge qui tournent; trouvez le courant équivalent à chaque bande, puis son moment dipolaire, et enfin intégrez sur toutes les bandes.)Rép. : $QR^2\omega/3$.
- 10.7 En réalité, on a obtenu les nombres de la table 10.1 non pas en faisant toutes les expériences avec un solénoïde tel que celui qui est décrit, mais en regardant les susceptibilités des substances déterminées expérimentalement, puis en calculant la force qui agirait dans les conditions indiquées. Maintenant que vous savez comment on définit la susceptibilité, et de quels facteurs dépend la force, faites marcher le processus à l'envers pour deux corps c'est-à-dire, calculez la susceptibilité, puis cherchez la dans une table, telle que celle du « Handbook of Chemistry and Physics » (publié par Chemical Rubber Co.). Pendant que vous regardez les tables de susceptibilités magnétiques dans ce recueil de constantes, remarquez l'uniformité dans la longue table des substances organiques, et explorez la table des substances minérales pour trouver des cas paramagnétiques remarquables, ou des cas diamagnétiques inhabituels.
- 10.8Montrez que le travail fourni pour amener 1 kg de matière paramagnétique d'une région où l'intensité du champ magnétique est *B* vers une région où l'intensité du champ est négligeable, est $1/2 \chi B^2$, χ étant la susceptibilité spécifique. Calculez alors exactement la quantité de travail qu'il faudrait fournir, par kilogramme, pour retirer l'oxygène liquide de la position à laquelle on se réfère dans la table de la section 10.1. (Bien sûr, cela ne s'applique que si χ est une constante dans le domaine des intensités de champ mis en jeu.)
- 10.9 Déduisez d'après les données de la table de la section 10.1 (dans les conditions spécifiées) la grandeur du moment magnétique de 1 kg de fer. A peu près à combien de spins électroniques alignés par atome cela correspond-il ? (Densité du fer : 7 800 kg/m³; poids atomique : 56.)
- 10.10 Calculez le moment magnétique total **m** du disque aimanté décrit sur la figure 10.22. Le champ à *r* m de distance sur l'axe du disque est approximativement $\mu_0 m/2\pi r^3$ si *r* est assez grand pour que l'on puisse traiter le disque comme un simple dipôle. Considérons maintenant deux tels disques *A* et *B*. *A* se trouve à plat sur une table de bois, avec son moment m pointant vers le haut. On place *B* au-dessus de *A* avec son moment pointant vers le bas, et on l'empêche de se déplacer de côté. Estimez en gros la hauteur à laquelle *B* « flottera » au-dessus de *A*. Utilisez l'« approximation du dipôle simple » juste décrite. Elle sera justifiée si la hauteur estimée pour le flottement n'est pas trop petite.
- 10.11 Une longue tige cylindrique de rayon *a* a une aimantation *M* dans la direction de son axe. On coupe une tranche transverse d'épaisseur $b \lor a$ dans la partie centrale de la tige sans modifier l'aimantation du reste. Considérez l'intensité du champ magnétique *B* au centre de ce trou, et en un point à l'intérieur de la tige très éloigné du trou. Utilisez un argument de superposition pour calculer la différence entre les intensités du champ en ces deux emplacements.

10.12 Un tore de fer de diamètre intérieur 10 cm et de diamètre extérieur 12 cm est entouré par 20 tours de fil. Utilisez la courbe *B-H* de la figure 10.30 pour estimer le courant requis pour produire un champ de 1,2 tesla dans le fer.



10.13 Pour dévier un faisceau de particules de haute énergie dans une certaine expérience, on a besoin d'un champ magnétique de 1,6 tesla d'intensité, maintenu dans une région rectangulaire de 3 mètres de longueur dans la direction du faisceau, de 0,6 m de largeur



et de 0,2 m de hauteur. on pourrait concevoir un aimant convenable en suivant les lignes indiquées sur les parties (a) et (b) de la figure. En prenant les dimensions données, déterminez (i) le nombre total d'ampères-tours requis dans les deux bobines pour produire un champ de 1,6 tesla dans l'entrefer; (ii) la puissance en kilowatts qu'il faut fournir; (iii) le nombre de tours que chaque bobine doit contenir, et la surface de la section correspondante du fil, de sorte que le champ désiré soit atteint lorsqu'on connecte les deux bobines en série à une alimentation de 400 volts continus. On montre sur la partie (d) de la figure une portion de la courbe B-H du fer Armco pour aimant; cela servira pour la question (i). Tout ce que vous avez besoin de déterminer est la circulation de H le long d'un contour tel que abcdea. Dans l'entrefer $\mu_0 H = B$. Dans le fer vous pouvez supposer que B a la même intensité que dans l'entrefer. Les lignes de champ ressemblent quelque peu à celles qui sont tracées sur la partie (c) de la figure. Vous pouvez estimer en gros la longueur du contour dans le fer. Ce n'est pas très critique, car vous trouverez que le long parcours *bcdea* contribue une partie relativement faible

de l'intégrale curviligne devant la contribution de la partie dans l'air *ab*. (En fait, ce n'est pas une mauvaise approximation, pour des intensités de champ plus faibles, que de négliger *H* dans le fer.) Pour (ii) supposez que la résistivité du cuivre est $\rho = 2,0.3 \ 10^{-8}$ ohm-m, et prenez *N* tours pour chaque bobine. Vous trouverez que la puissance nécessaire pour un nombre donné d'ampères-tours ne dépend pas de *N*; c'est-à-dire qu'elle est la même pour beaucoup de tours de fil fin que pour peu de tours de gros fil, à condition que la section totale de cuivre soit fixée, comme on l'a spécifié. L'ingénieur sélectionne donc *N* et la section du conducteur pour accorder l'aimant à l'alimentation de puissance prévue.


Réponse (i) 270 000 ampère-tours; (ii) 82,5 kW; (iii) 2 N = 1310 tours (655 par bobine), $1,15 \text{ cm}^2$ = section du conducteur.

Chapitre 1.

- 1.23 Considérez les configurations de charge construites comme il suit :Mettez une charge positive unité au centre d'un cercle et mettez N unités de charge négative, également espacées, sur le cercle. Les charges négatives vont-elles s'envoler au loin ou converger si on les lâche instantanément. Répondez à la question pour N = 3, 4 et 5 en calculant l'énergie du système, et montrez, au moins pour un cas, que vous obtenez la même réponse en calculant la force résultante sur l'une des charges négatives.
- 1.24 Une goutte d'eau de rayon *R* porte une charge électrique *Q* distribuée sur sa surface. Supposez que nous divisions cette goutte en deux gouttelettes de même taille, et bien séparées, divisant ainsi également la charge entre elles Cela a-t-il augmenté ou diminué l'énergie potentielle électrique ? De combien ? Maintenant, tenons compte de l'énergie associée à la surface du liquide, qui est responsable de la « tension superficielle » qui donne une forme sphérique à la gouttelette. A cause des liaisons intermoléculaires, il faut de l'énergie pour créer une nouvelle surface; à une température donnée, l'énergie requise par unité de surface créée est une constante. Dans l'eau, c'est en gros 5×10^{-2} joules/m². Supposons que nous considérions la division en deux gouttelettes d'une goutte de 10^{-4} m de rayon. Quelle charge la goutte devrait-elle porter avant que la variation de l'énergie électrique compense le coût en énergie de liaisons moléculaires? Pour juger si c'est une charge élevée ou non, trouvez l'intensité du champ électrique qu'elle créerait à la surface de la goutte. (Un champ de 3×10^6 volts/mètre est un champ modérément élevé à faire supporter par l'air.)
- 1.25 Réfléchissez à notre dilemme de la charge ponctuelle puis discutez-en On pourrait le poser ainsi : une charge ponctuelle idéale a une énergie potentielle, ou « énergie propre » infinie. Pourtant nous la négligeons toujours quand nous faisons le total de l'énergie d'un système de charges ponctuelles: On peut laisser de côté sans danger toute énergie qui reste constante pour toujours, mais que veut-on dire quand on dit qu'une quantité infinie est constante? Une particule élémentaire, la chose la plus proche d'une charge ponctuelle que nous ayons dans la nature, semble ne pas présenter d'infinité embarrassante. Mais comme elle a une taille finie, nous pourrions nous attendre à ce que les champs électriques des autres sources aient quelque effet sur sa structure. Cela voudrait dire, cependant, que l'énergie électrique propre de la concentration de charge ne serait pas tout à fait la même dans des environnements différents. Dans quelles circonstances pensez-vous qu'il faudrait réellement en tenir compte?
- 1.26 La figure montre une coque sphérique de charge, de rayon *a* et de densité superficielle σ , d'où on a enlevé un petit morceau circulaire de rayon $b \lor a$. Quelle est la grandeur et la direction du champ au centre de l'ouverture ? Il y a deux façons d'obtenir la réponse. Vous pouvez faire l'intégration sur la distribution qui reste et faire la somme des contributions de tous les éléments au champ au point en question. Ou, en vous souvenant du principe de superposition, vous pouvez penser à l'effet qu'on obtiendrait si on remplaçait le morceau enlevé, qui est pratiquement lui-même un petit disque. Notez la relation entre ce résultat et notre discussion de la force sur une charge de surface peut-être y a-t-il une troisième façon d'arriver au résultat.
- 1.27 Une utilisation quelque peu similaire de la symétrie et de la superposition vous permettra d'établir le fait curieux que voici. Un bol hémisphérique porte une densité de charge uniforme sur sa surface. Nous affirmons qu'en tout point de la surface imaginaire qui s'appuie sur le bol, comme dans un tambour, le champ électrique est perpendiculaire à cette surface.
- 1.28 On apprend plus en inventant des problèmes qu'on peut résoudre en se servant de la symétrie et de la superposition. Essayez d'en inventer un.
- 1.29 Deux lames de charge planes et parallèles, de densité σ_A et σ_B coulomb/m², sont séparées par une distance *s*, la lame *A* se trouve à gauche de la lame *B*, quand nous regardons leur position par la tranche. Soit E_1 le champ électrique à gauche de la lame *A*, E_2 le champ électrique entre elles, et E_3 le champ électrique à droite de la lame *B*. Ce champ n'est pas seulement celui qui est dû aux lames elles-mêmes, mais il contient les effets des autres charges qui peuvent être présentes. Nous supposerons que les autres sources sont assez loin pour que le champ qu'elles contribuent soit uniforme dans toute la région que nous examinons. Supposons maintenant que les deux lames soient reliées mécaniquement d'une certaine façon, de sorte que nous puissions mesurer la force totale sur l'ensemble. Montrer que cette force par unité de surface de l'ensemble - c'est-à-dire pour 1 m² de chaque lame - est

donnée par $\mathbf{F} = (\sigma_A + \sigma_B) \left(\frac{\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3}{2} \right)$ C'est un cas spécial de distribution de charge non uniforme dans une « lame ».

1.30 On peut prouver de façon tout à fait générale le résultat démontré dans le problème 1.29 et énoncé dans la section 2.7. Soit une distribution de charge dans une lame plane donnée par la fonction densité de charge $\rho(x)$ entre x = 0 et x = b, épaisseur de la lame.

La densité de charge superficielle totale, en considérant cela comme une couche de charge, est donnée par $\sigma = \int_{0}^{b} \rho(x) dx$

Si E_x est la composante du champ électrique perpendiculaire à la lame, la force totale sur la lame (la composante x, en fait; nous ne nous intéressons pas aux autres composantes) est donnée par $\sigma = \int_0^b \rho E_x dx$. En reliant ρ et E_x et en appliquant le théorème de

Gauss à une tranche d'épaisseur dx, montrez que $F_x = \frac{\varepsilon_0}{2} (E_2^2 - E_1^2)$ et de là montrez que $F_x = \frac{1}{2} (E_{1x} - E_{2x}) \sigma$. \mathbf{E}_1 est le

champ en x = 0, \mathbf{E}_2 le champ en x = b.

- 1.31 Une distribution de charge statique en forme de cigare est située à l'origine des coordonnées. La grande dimension du « cigare » s'étend le long de l'axe z. La charge totale est q. On appellera E le champ en un point P sur l'axe z en dehors de la distribution de charge. Si q était concentrée à l'origine, le champ en P serait E'. E est-il plus grand, égal ou plus petit que E'?
- 1.32 Vous savez que le champ électrique à une distance r de l'origine d'une distribution de charge de symétrie sphérique est le même que si toute la charge qui se trouve dans la sphère de rayon r était concentrée à l'origine.
 - Ce fait dépend-il de la nature en inverse du carré de la loi de Coulomb ou seulement de la symétrie sphérique ? Serait-il vrai a) pour une loi en inverse du cube ?
 - b) Une distribution de charge donnée de symétrie sphérique, de charge totale Q, a toute sa charge confinée à une distance r_0 de l'origine. Supposez que la loi de force soit en inverse du cube de la distance au lieu d'être normalement en inverse du carré. On doit comparer le champ E en r ($r > r_0$) au champ E' qui existerait en r si toute la charge Q était concentrée à l'origine. E est-il plus grand, égal ou plus petit que E'? Essayez d'utiliser des arguments qualitatifs grossiers plutôt qu'une preuve mathématique.
- 1.33 Imaginez un monde où il y ait trois genres de charges, au lieu de deux, telles que les charges se repoussent quand elles sont du même genre, et qu'elles s'attirent autrement. Appelez ces charges A, B et C. La loi en inverse carré est obéie et le principe de superposition s'applique juste comme dans notre monde. Supposez que les charges semblables se repoussent exactement deux fois plus fortement que les charges différentes s'attirent. C'est-à-dire, des charges unités égales de type A se repoussent avec une force de $1/(4\pi\epsilon_0)$ newtons à 1 m, tandis qu'une charge unité A et une charge unité B s'attirent avec une force 1/2 ($1/4\pi\epsilon_0$) newtons à 1 m. Montrez que cela permet, de façon tout à fait générale, l'existence de corps neutres - c'est-à-dire des corps qui, bien que contenant des éléments chargés, ne subissent aucune force globale, et ne produisent aucune force, quand ils sont proches d'une charge de n'importe quel type. Comment pourriez-vous détecter la différence entre ce monde et le nôtre ? Pourrait-on généraliser la notion de champ électrique pour qu'elle soit utile dans ce monde ?
- 1.34 Dans un microscope électronique, un faisceau d'électrons énergiques accélérés au départ par une différence de potentiel de V_0 volts, passe devant un fil fin chargé, disposé à angle droit de la direction initiale du faisceau d'électrons. Le fil porte une charge négative, de densité linéaire λ coulomb par mètre de longueur. Le champ du fil est relativement faible, de sorte que les trajectoires des électrons ne sont que légèrement modifiées. Sachant cela, vous pouvez trouver, en fonction du temps, la force sur un électron donné, en première approximation, en supposant qu'il suive sa trajectoire initiale rectiligne à vitesse constante. Employez alors ce résultat pour calculer la composante transverse de la quantité de mouvement acquise par l'électron, pendant son passage, puis la déviation angulaire α que la trajectoire a réellement subie. Vous devriez trouver le résultat plutôt remarquable que la déviation angulaire est indépendante de la distance à laquelle l'électron est passé. C'est-à-dire, le champ électrique du fil a sur les trajectoires des électrons un effet qui ressemble à celui d'un prisme de petit angle sur des rayons lumineux. En fait, on a utilisé juste ce dispositif pour démontrer l'équivalent en optique électronique d'un phénomène d'interférence célèbre en optique classique, l'expérience d'interférence du biprisme de Fresnel (Möllenstedt et Düker, Zeitschrift für Physik, 145, 377 [1956]).

Chapitre 2.

- 2.18 Un cylindre circulaire creux, de rayon a et de longueur b, dont les extrémités sont ouvertes, porte une charge totale Q distribuée sur sa surface. Quelle est la différence de potentiel entre un point sur l'axe à un bout et le point milieu de l'axe? Montrez, en traçant quelques lignes de champ, la façon dont vous pensez que devrait se présenter le champ de cet objet.
- 2.19 Nous avons deux sphères métalliques, de rayons R_1 et R_2 très éloignées l'une de l'autre, par rapport à ces rayons. Étant donné une quantité de charge totale Q, que nous devons diviser entre les deux sphères, comment doit-on la diviser pour rendre l'énergie potentielle de la distribution de charge résultante aussi petite que possible? Pour répondre à cela, calculez d'abord l'énergie potentielle du système pour une division arbitraire de la charge, q sur l'une et O-q sur l'autre. Minimisez ensuite l'énergie comme fonction de q. Vous pouvez supposer que toute charge mise sur l'une de ces sphères se distribue uniformément sur la sphère,

l'autre sphère étant assez éloignée pour que l'on puisse négliger son influence. Quand vous aurez trouvé la division optimum de la charge, montrez qu'avec cette division, la différence de potentiel entre les deux sphères est nulle. (Par conséquent, on pourrait les relier par un fil, et il n'y aurait pas de redistribution. C'est un exemple spécial d'un principe très général que nous rencontrerons dans le chapitre 3 sur un conducteur, la charge se distribue elle-même afin de minimiser l'énergie potentielle totale du système.)

- 2.20 Le champ spécifié dans le problème 2.1, $E_x = -6 xy$; $E_y = 3x^2 3y^2$; $E_z = 0$ a un lien de famille avec le champ de la figure 2.2. Pour trouver cette forme, écrivez le potentiel *V*, développé dans le problème 2.1, en coordonnées cylindriques *r*, θ , avec $r^2 = x^2 + y^2$ et θ = Arc tg (*y/x*). Dessinez quelques équipotentielles et quelques lignes de champ.
- 2.21 Considérez une région sphérique qui contienne une charge ponctuelle q à l'intérieur de ses frontières, mais pas en son centre. Est-il vrai que le potentiel au centre est égal à la moyenne du potentiel sur la surface de la sphère? Cela contredit-il l'affirmation de la section 2.13 sur les fonctions harmoniques ?
- 2.22 Nous avons trouvé que le potentiel au centre d'un disque de rayon *a*, portant une densité de charge superficielle uniforme σ est $\sigma a/2\varepsilon_0$. Sachant cela, supposez que nous voulions estimer le champ au centre d'un carré uniformément chargé de côté *b*, avec une précision de quelques pour cent. Comment pourriez-vous l'estimer sans essayer de résoudre le problème du potentiel pour le carré? Pouvez-vous mettre des limites à l'erreur possible de votre estimation ?
- 2.23 Il n'est pas difficile de calculer exactement la valeur du potentiel au centre de la couche carrée de charge uniforme, discutée dans le problème 2.22. La figure suggère une bonne façon de faire l'intégration. Trouvez d'abord la contribution au potentiel en C due à la bande étroite de largeur dx allant de y = -x à y = x. Après cela, il est facile d'intégrer sur x de 0 à b/2 pour obtenir la

contribution de ce quart du carré. Le zéro du potentiel est bien sûr à l'infini. Rép. : $V_C = \frac{\sigma b}{\pi \varepsilon_0} \log(1 + \sqrt{2})$

2.24 Comment pourriez-vous être sûrs que le nombre défini par $\lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i}$ dans l'équation 2.76 représente réellement une composante

d'un vecteur ? On peut poser la question en termes concrets de la façon suivante : En prenant successivement $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ et $\hat{\mathbf{z}}$ comme direction de n, nous déterminons trois nombres pour un certain \mathbf{F} donné et un certain point de l'espace. Nous avions affirmé qu'il s'agissait des composantes d'un vecteur. Étant maintenant sceptiques, nous les mettrons entre guillemets et les représentons par « $A_x \gg$, « $A_y \gg$ et « $A_z \gg$. Si nous choisissons maintenant une autre direction $\hat{\mathbf{n}}$, et si nous déterminons la limite du rapport de la circulation et de la surface pour un morceau ainsi orienté, obtenons-nous toujours un nombre égal à $\hat{\mathbf{n}}$. ($\hat{\mathbf{x}} \ll A_x \gg + \hat{\mathbf{y}} \ll A_y \gg \hat{\mathbf{z}} \ll$ $A_z \gg$)? Si oui, nous pouvons enlever les guillemets et dire que notre façon de procéder a en effet produit un vecteur. Voyez si vous pouvez le prouver en considérant la circulation autour de chacune des quatre faces d'un petit tétraèdre, comme celui que montre la figure 2.18. Qu'en est-il de la somme des quatre circulations? Qu'en est-il de la somme des vecteurs surface ?

2.25 Comme nous le savons, la divergence d'une fonction vectorielle F est un scalaire. Supposez que nous essayions de définir un

vecteur, différent du rotationnel, de cette façon $G = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial F_x}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial F_y}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial F_z}{\partial z}$. Pouvons-nous certifier que cette créature est un

vecteur, ou au contraire devons-nous l'appeler imposteur? (Regardez comment il se comporte quand vous tournez les coordonnées par rapport auxquelles on a pris les composantes. Il suffit pour ce que nous voulons montrer, de considérer une rotation de 900 autour de l'axe z. Les nouvelles coordonnées sont alors reliées aux anciennes de cette façon : $\hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}}' = -\hat{\mathbf{x}}, F_x = F_y$, etc.)

2.26 Un canal d'irrigation a deux côtés rectilignes parallèles à 26 mètres de distance. A la surface de l'eau dans le canal, la vitesse de l'eau est maximum au centre, elle décroît vers zéro sur chaque bord. Supposez que l'écoulement. se trouve être tel que la vitesse à

la surface soit approximativement donnée par $v = v_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$ où y est la distance au centre, et **v** est partout dirigé vers l'aval.

(Dans un vrai canal l'écoulement pourrait être tout à fait différent de cela). On observe qu'un éclat de bois qui flotte à mi-chemin entre le centre et un bord, tourne pendant qu'il dérive vers l'aval. Expliquez cela. Comment cela est-il relié au problème 2.16 (*a*) ? Sur quelle distance l'éclat dérivera-t-il vers l'aval pendant qu'il tourne de 360°?

2.27 Ce problème va vous présenter l'opérateur Laplacien tel qu'il apparaît en coordonnées sphériques pour le cas spécial des fonctions à symétrie sphérique. Soit V une fonction de r seulement : V = V(r). Que devient alors div (grad V), ou $\nabla \cdot (\nabla V)$, ce que

nous avons appelé $\nabla^2 V$ ou ΔV ? On a expliqué dans la section 2.3 que dans ce cas ∇V est simplement i dV/dr, ainsi c'est cette fonction vectorielle dont nous allons considérer la divergence. L'essentiel du calcul de $\nabla \cdot (\nabla V)$ est indiqué sur la figure.

- a) Étudiez cette démonstration jusqu'à ce que vous en compreniez les étapes et que vous puissiez rajouter les arguments qui pourraient être nécessaires si vous deviez l'expliquer à quelqu'un d'autre. Notez les endroits où on a laissé tomber les termes du second ordre en ∇r .
- b) Montrez qu'on peut écrire le résultat ainsi V2 V = $1 \sim 2 \text{ f } rV(r)$
- c) Si tout ce que nous savons sur un certain V(r) est que $\nabla^2 V(r) = 0$, que pouvons-nous conclure sur V?
- d) Montrez que le potentiel de « Yukawa », $V(r) = (1/r)e^{-\lambda r}$, où λ est une constante, satisfait l'équation $\nabla^2 V \lambda^2 V = 0$.
- 2.28 Une particule est attirée vers un point fixe par une force qui est toujours radiale, et dont la grandeur est seulement une fonction de r, la distance radiale : $\mathbf{F} = f(r)$. Convainquez-vous vous-mêmes de ce que dans un tel champ la circulation le long de n'importe quel contour fermé s'annule, ce qui implique que rot $\mathbf{F} = 0$. Il doit alors être possible de représenter \mathbf{F} comme étant le gradient d'une certaine fonction potentielle V(r). (Cela nous rappelle que le fait que le champ électrostatique puisse dériver d'un tel potentiel, n'est pas dû à la propriété du champ d'être en inverse du carré de la distance, mais seulement au fait que le champ d'une charge élémentaire est un champ central et que la loi de superposition s'applique.) Le potentiel de Yukawa mentionné dans le problème 2.27 est associé à un genre particulier de champ qui n'est pas en inverse carré, genre qui est important en physique nucléaire et en physique des particules élémentaires. Quel est le champ de force qui va avec le potentiel de Yukawa écrit sous la forme $V = C e^{\lambda t}/r$, où C et λ sont des constantes ? En prenant $\lambda \rightarrow 0$ nous retrouvons le potentiel familier en 1/r du champ électrostatique. Montrez que pour $\lambda > 0$ la force à toute distance, pour un C donné, est plus petite que si $\lambda = 0$. La quantité $1/\lambda$ a les dimensions d'une longueur, on l'appelle souvent « portée » de la force. Qu'est-ce qui devrait prendre la place de l'équation de Poisson pour les sources qui produisent de tels champs ?
- 2.29 L'argument par lequel nous avons montré qu'un champ électrostatique ne pouvait maintenir une particule chargée en équilibre stable dépendait essentiellement de la nature en inverse carré de la force de Coulomb. Supposez que la force entre charges varie comme $r^{-1,5}$, et essayez d'imaginer une disposition de charges qui maintienne une charge positive en équilibre stable. De même pour une force $r^{-2,5}$.
- 2.30 Considérez le champ électrique de deux protons à *b* mètres de distance. D'après l'équation 2.36 (que nous avons énoncée, mais que nous n'avons pas démontrée) l'énergie potentielle du système devrait être donnée par

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathbf{E}^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathbf{E}_1^2 dv + \frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathbf{E}_2^2 dv + \varepsilon_0 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dv$$
 où \mathbf{E}_1 est le champ d'une particule seule,

et \mathbf{E}_2 celui de l'autre. On pourrait appeler « énergie électrique propre » d'un proton la première des trois intégrales de droite; propriété intrinsèque de la particule, elle dépend de la taille et de la structure du proton. Nous avons toujours laissé de côté une telle énergie en calculant l'énergie potentielle d'un système de charges, en supposant qu'elle reste constante; il en est de même pour la deuxième intégrale. Écrivez la troisième intégrale dans certaines coordonnées appropriées, et montrez, sans l'évaluer en réalité, qu'on doit pouvoir l'exprimer comme Ce^2/b , où C est une constante purement numérique, valeur d'une intégrale définie ne faisant intervenir que des quantités sans dimensions. Si l'équation 2.36 est correcte, que doit-on avoir comme valeur de C? Nous *savons* que l'équation 2.36 est correcte dans un cas spécial, que nous avons traité en détail, celui d'une charge de surface sphérique. Voyez si vous pouvez, par un argument qui se sert de la superposition, convertir cela en une preuve de la justesse de l'équation 2.36. Si oui, vous aurez établi incidemment la valeur de votre intégrale définie. (Si vous aimez vous attaquer à une intégrale définie, vous pourriez essayer d'évaluer celle-ci, ou la réduire à quelque chose que vous puissiez trouver dans une table d'intégrales définies. Celle-ci n'est pas facile.)

Chapitre 3.

3.18

- a) Montrez que le carré d'une différence de potentiel multiplié par ε_0 , ε_0 $(V_2 V_1)^2$, a les mêmes dimensions qu'une force. Cela nous montre que les forces électrostatiques entre corps seront largement déterminées, en ordre de grandeur, par les différences de potentiel mises en jeu. Les dimensions n'interviendront que dans des rapports, et il pourra y avoir quelques constantes comme ε_0 . Quel est l'ordre de grandeur de la force que vous attendez pour une différence de potentiel de 1 volt entre quelque chose et quelque chose d'autre?
- b) Les différences de potentiel pratiquement réalisables sont plutôt sévèrement limitées, pour des raisons qui ont à voir avec la structure de la matière. La plus forte différence de potentiel électrique faite par l'homme est environ 10⁷ volts, réalisée dans un générateur électrostatique Van de Graaff fonctionnant sous pression. (Les accélérateurs à des milliards de volts ne mettent pas en jeu des différences de potentiel aussi grandes). Combien de newtons vaut la force qu'il est probable de trouver associée

à un mégavolt carré ? Ces considérations peuvent suggérer pourquoi les moteurs électrostatiques n'ont pas trouvé beaucoup d'applications.

3.19 Imaginez que les plans xy, xz et yz soient tous faits en métal et qu'ils soient soudés ensemble à leurs intersections. Une charge ponctuelle unique Q se trouve à une distance d de chacun de ces plans. Décrivez par un croquis la configuration des « charges images » dont vous avez besoin pour satisfaire les conditions aux limites? Quelle est la grandeur et la direction de la force qui agit sur la charge Q?

3.20

- a) Trouvez la capacité d'un condensateur qui est constitué par deux cylindres coaxiaux, de rayon a et b, et de longueur L. Supposez L] b - a de sorte qu'on puisse négliger les corrections aux extrémités. Vérifiez votre résultat en montrant que si l'intervalle entre les cylindres, b - a, est très petit devant le rayon, votre formule se réduit à celle que vous auriez pu obtenir en utilisant la formule du condensateur à lames parallèles.
- b) Un cylindre de 5 cm de diamètre extérieur pend, avec son axe vertical, à un bras d'une balance. La partie inférieure du cylindre qui pend est entourée par un cylindre stationnaire coaxial, de 7,5 cm de diamètre intérieur. Calculez la grandeur de la force qui tend à tirer vers le bas le cylindre qui pend quand la différence de potentiel entre les deux cylindres est 5 kV.
- 3.21 Dans la section 3.3, nous sommes passés plutôt légèrement sur la question de la valeur absolue du potentiel à l'intérieur de la matière conductrice. Il était suffisant pour notre discussion d'alors qu'il n'y ait pas de champ à l'intérieur du matériau, c'est-à-dire que le potentiel soit constant. En réalité, il peut y avoir un saut de potentiel à l'interface entre le conducteur et le vide, comme l'indique la figure. Montrez qu'un tel saut ΔV , s'il est le même partout sur la frontière, n'invalide pas le fait que nous ayons conclu que s'il n'y a pas de champ électrique à l'intérieur du matériau conducteur, il ne peut y avoir de composante tangentielle de **E** immédiatement à l'extérieur dans le vide. Vous pouvez utiliser le fait que la circulation de **E** le long de tout contour fermé est nulle.
- 3.22 Ce problème est une illustration de la « méthode qui consiste à adapter les frontières à la solution » que nous avons expliquée dans notre discussion de la charge ponctuelle au-dessus du plan. En fait, le résultat que vous êtes sur le point de trouver est peut-être le succès le plus célébré de cette méthode plutôt limitée.
 - a) Considérez deux charges ponctuelles de signes opposés et de grandeurs *inégales*. Supposez que celle qui a la valeur absolue la plus grande soit positive, et situez-la à l'origine des coordonnées. Situez l'autre charge sur l'axe en x = b. Trouvez d'abord deux points de l'axe x où le potentiel V est nul, en excluant les points $x = +\infty$ et $x = -\infty$. Considérez maintenant une sphère dont le centre est sur l'axe x et qui passe par les deux points. Prouvez que le potentiel est aussi zéro en tous les points de cette surface sphérique. Y a-t-il d'autres surfaces équipotentielles qui soient des sphères ? De quel problème, mettant en jeu une charge ponctuelle et une sphère conductrice, avons-nous maintenant la solution ?
 - b) Nous ne sommes pas encore prêts pour nous attaquer à tout problème de charge et de sphère conductrice, car la grandeur de la charge ponctuelle, la grandeur de la charge sur la sphère, et le rapport du rayon de la sphère et de la distance à la charge ponctuelle pourraient ne pas être compatibles avec le champ tel que nous l'avons jusqu'ici. Par exemple, comment obtiendriez-vous le champ d'une charge ponctuelle q situé à une distance donnée d'une sphère qui porte une charge totale *nulle*? Vous *pouvez* obtenir cela a partir de votre travail, par un simple pas de plus, si vous pensez à utiliser la superposition. Essayez tout cela sur un exemple particulier : Une charge ponctuelle de 10⁻⁹ Coulomb est située à 0,2 m du centre d'une sphère métallique de 0,1 m de rayon qui n'est pas chargée, c'est-à-dire que sa charge totale est nulle. Quelle est l'intensité du champ électrique à la surface de la sphère au point le plus proche de la charge ponctuelle, et au point diamétralement opposé? Si vous obtenez les réponses justes à cela, et si vous comprenez comment vous les avez obtenues, vous pouvez considérer que vous avez convenablement maîtrisé la méthode qu'on appelle « inversion spatiale ». Rép. : 2 250 V/m ; 35 V/m.
- 3.23 Un problème typique de valeur aux limites à deux dimensions est celui de deux cylindres conducteurs circulaires parallèles, tels que deux tuyaux métalliques, de longueur infinie, à des potentiels différents. Il se trouve que ces problèmes à deux dimensions sont beaucoup plus faciles à manipuler mathématiquement que les problèmes à trois dimensions. En fait, la clé de tous les problèmes de la classe des « deux tuyaux » est donnée par le champ autour de deux lignes de charges parallèles et de densité linéaires égales et opposées. *Toutes* les surfaces équipotentielles dans ce champ sont des cylindres circulaires! Toutes les lignes de charge sont aussi circulaires. Voyez si vous pouvez démontrer cela. C'est plus facile de travailler avec le potentiel, mais vous devez noter que l'on ne peut pas prendre un potentiel nul à l'infini dans un système à deux dimensions. Prenons le potentiel nul sur une ligne à mi-distance entre les deux lignes chargées, c'est-à-dire à l'origine dans le diagramme en coupe. Le potentiel en tout point est la somme des potentiels calculés pour chaque ligne de charge séparément. Cela devrait vous conduire rapidement à découvrir que le potentiel est simplement proportionnel à log (r_1/r_2) et que par conséquent il est constant sur la courbe qui est le lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant. Faites un schéma montrant quelques équipotentielles.

- 3.24 Le champ électrique montré sur la figure 2.2 a d'importantes applications pratiques dans la focalisation des faisceaux de particules chargées. On l'appelle champ quadripolaire. Quelle est l'équation d'une surface équipotentielle, et à quoi ressemble-t-elle ? Décrivez comment vous pourriez obtenir une bonne approximation de ce champ dans une région limitée, bien sûr en utilisant des conducteurs à divers potentiels.
- 3.25La figure montre en coupe une boîte où il y a deux plaques planes, 1 et 2, chacune de surface A. On doit supposer que les diverses distances séparant les lames l'une de l'autre et du fond et du sommet de la boîte, appelées r, s et t sur la figure, sont petites par rapport à la longueur et à la largeur des plaques, de sorte que négliger les champs aux bords sera une bonne approximation pour estimer les charges sur les plaques. Dans cette approximation, calculez les coefficients de capacité, C_{11} , C_{22} et C_{12} . Vous pourriez aussi calculer C_{21} directement, pour voir s'il est bien égal à C_{12} comme l'affirme le théorème général discuté dans le problème 3.27.
- 3.26 Est-il possible d'avoir des conducteurs qui ont des dispositions ou des formes telles que l'un ou plus des coefficients de capacité « mutuels », C_{jk} soient positifs? Cela voudrait dire qu'un potentiel positif sur le conducteur *j*, avec tous les autres conducteurs, y compris le conducteur *k* mis à la masse, entraîne une charge positive nette sur le conducteur *k*. Voyez si vous pouvez produire soit (*a*) un arrangement qui devrait se comporter de cette façon soit (*b*) un argument convainquant que ce n'est pas possible. Est-il possible que l'un des coefficients de capacité « propre » C_{ij} soit négatif ?
- 3.27 Voici quelques suggestions qui devraient vous permettre de construire une preuve de ce que C_{12} doit toujours être égal à C_{21} . Nous savons que lorsqu'un élément de charge dQ est transféré du potentiel zéro vers un conducteur au potentiel V une certaine source extérieure doit fournir une quantité de travail V dQ. Considérez un système de deux conducteurs dans lequel les deux conducteurs ont été chargés de sorte que leurs potentiels soient respectivement V_{1f} et V_{2f} (f pour « final »). Cette condition a pu être atteinte, à partir d'un état avec toutes les charges et tous les potentiels nuls, de nombreuses façons. Deux façons possibles présentent un intérêt particulier
 - a) On garde V_2 nul pendant qu'on augmente graduellement V_1 de 0 à V_{1f} ; puis on augmente V_2 de 0 à V_{2f} en maintenant V_1 constant à V_{1f} .
 - b) On applique le même programme mais en échangeant les rôles de 1 et 2, c'est-à-dire qu'on augmente V_2 de 0 à V_{2f} d'abord, et ainsi de suite. Calculez le travail fourni par les sources extérieures, pour chaque programme de charge. Puis achevez le raisonnement.
- 3.28 Soit V(x, y, z) une fonction quelconque que l'on puisse développer en série autour d'un point (x₀, y₀, z₀). Écrivez un développement en série de Taylor pour la valeur de V en chacun des six points (x₀+δ, y₀, z₀), (x₀-δ, y₀, z₀), (x₀, y₀+δ, z₀), (x₀, y₀-δ, z₀), (x₀, y₀, z₀+δ), (x₀, y₀, z₀-δ) qui entourent symétriquement le point (x₀, y₀, z₀) à une distance δ. Montrer que si V satisfait l'équation de Laplace, la moyenne de ces six valeurs est égale à V(x₀, y₀, z₀) à des termes du troisième ordre en δ près.
- 3.29 Voici comment résoudre approximativement l'équation de Laplace, pour des valeurs aux limites données, en n'utilisant que de l'arithmétique. C'est la méthode de relaxation mentionnée dans la section 3.8; elle est fondée sur le résultat du problème 3.28. Par simplicité, nous prenons un exemple à deux dimensions. Sur la figure, il y a deux frontières équipotentielles carrées, l'une à l'intérieur de l'autre. Ce pourrait être une coupe à travers un condensateur fait avec deux tubes métalliques carrés de tailles différentes. Le problème consiste à trouver des valeurs en un réseau de points qui soient une bonne approximation de la vraie fonction potentiel, V(x, y), en ces points. Nous adoptons un réseau assez lâche pour maintenir le travail dans des limites. Assignons arbitrairement le potentiel 100 à la frontière interne et 0 à la frontière externe. Tous les points de ces frontières gardent ces valeurs. En principe nous pouvons partir de n'importe quelles valeurs pour les points intérieurs, mais nous gagnerons du temps en faisant un choix intelligent. Un ensemble de valeurs de départ est suggéré sur la figure. Vous pouvez peut-être en choisir de meilleures. Évidemment vous devriez profiter de la symétrie; on n'a besoin de calculer que sept valeurs intérieures. Ensuite, vous parcourez simplement le réseau d'une certaine manière symétrique en remplacant la valeur de chaque point intérieur par la moyenne de ses quatre voisins. Arrêtez-vous quand vous serez fatigués ou quand les variations résultant d'un passage sont d'une petitesse satisfaisante. Un bon moment pour s'arrêter pourrait être quand il ne se produit aucune variation supérieure à 1 unité pendant un passage complet. Incidemment, la « relaxation », c'est-à-dire la variation de la distribution des valeurs d'un passage au suivant, est reliée de près au phénomène physique de diffusion. Si vous partez avec une valeur beaucoup trop haute en un point, elle « s'étalera » sur ses plus proches voisins, puis de là sur les seconds plus proches voisins, jusqu'à ce que la bosse soit aussi bien amortie que les conditions aux limites le permettent.
- 3.30 Après avoir obtenu votre propre solution, vous pourriez essayer de la comparer avec la solution du même problème sur une grille d'espacement moitié, obtenue avec un ordinateur (voir la figure). On a programmé le calculateur pour qu'il s'arrête quand un nouveau passage n'entraîne aucune variation de plus de 0,1. Il a fait 41 passages sur le réseau et a mis 3 secondes pour tout le calcul. Mettez un morceau de papier calque sur la figure et localisez une ou deux courbes équipotentielles en utilisant une simple

interpolation linéaire entre les points. Comment calculeriez-vous, à partir des données de la figure, la capacité par unité de longueur d'un condensateur ayant cette section?

- 3.31 La façon dont le potentiel varie dans l'espace entre deux cylindres chargés trouve sa contrepartie dans un phénomène physique différent, la forme que prend une membrane élastique. Imaginez que l'on relie les points du réseau illustré dans le problème 3.29, y compris les points aux frontières, avec des élastiques tous étirés à la même tension. Imaginez maintenant que l'on soulève la frontière interne, comme sur l'illustration de notre problème, à une hauteur qui représente la différence de potentiel V_0 . En supposant que toutes les pentes sont assez petites pour que angles \approx tangentes, etc., la hauteur à l'équilibre de chaque point de jonction, ou noeud sera juste la moyenne des hauteurs de ses quatre voisins. Pourquoi ? Si nous avons une couche élastique continue à la place d'un filet, la hauteur de la surface obéit à l'équation de Laplace, et quand on soulève le support interne, la surface prend la forme illustrée sur la partie (b). C'est exactement la solution V(x, y) pour le potentiel électrostatique entre deux cylindres carrés, et c'est aussi la forme d'un film de savon tendu entre deux cadres, dessiné sur la partie (c). Visualiser le film de savon ou le réseau d'élastiques aide parfois à prévoir la nature d'un problème de conditions aux limites dans quelque autre partie de la physique. C'est ainsi que nous avons deviné les valeurs de départ suggérées pour le calcul de relaxation. La comparaison des parties (b) et (a) de la figure montre pourquoi nous ne pouvons pas nous attendre à ce qu'une solution sur un réseau nous donne tous les détails. La chute rapide du potentiel au voisinage immédiat du point du haut où en fait le champ électrique devient infini ne pourrait pas être révélée. Ayant le principe variationnel présent à l'esprit, nous reconnaissons que les systèmes élastiques, formés par une membrane ou des élastiques, se sont disposés pour minimiser l'énergie élastique. Dans le cas d'une couche ou d'un film de savon, cela veut dire que faire de la surface est minimum. La forme est simplement celle de la surface d'aire minimum qui joint, les limites données. Dans le système électrostatique, quelle quantité est-elle la contrepartie de la force totale vers le bas sur le cadre interne dans le système élastique ? Réfléchissez au sens de notre calcul de relaxation en termes mécaniques. Imaginez des pieux plantés à chaque point du réseau, avec au début chaque noeud du filet attaché à son pieu à une certaine hauteur arbitraire. Quel processus suivons-nous dans le calcul de relaxation ?
- 3.32 Les cylindres carrés du problème 3.29 constituent un bon sujet pour la méthode variationnelle. Supposons que nous voulions estimer la capacité par unité de longueur d'un tel condensateur. Cela revient à trouver l'énergie emmagasinée, par unité de

longueur, pour une différence de potentiel donnée, étant donné que $U = \frac{1}{2}CV_{12}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \int |\nabla V|^2 dv$. Le problème est d'évaluer

cette intégrale, en ayant remplacé la vraie fonction V, que nous ne connaissons pas, par une certaine fonction d'essai $\psi(x, y)$. ψ doit satisfaire aux conditions aux limites; c'est-à-dire, elle doit se réduire à V_0 sur le petit carré et à 0 sur le grand. A part cela nous sommes libres de la choisir comme il nous plaît. La stratégie est de choisir une fonction dont l'intégration soit faisable, et qui se comporte qualitativement comme la vraie solution doit le faire. Comme première étape, nous suggérons une simple fonction linéaire dans chacune des quatre parties en lesquelles on peut diviser l'espace intérieur. En se référant à la figure, avec 2*a* comme

côté du carré intérieur, et 2*b* comme côté du carré extérieur, prenez $\psi = V_0 \frac{b-x}{b-a}$ dans l'espace à droite, etc. Le graphique de ψ

est une pyramide tronquée. Maintenant, bien que $\nabla^2 \psi = 0$ presque partout, ψ *ne* satisfait *pas* l'équation de Laplace. Pourquoi ne le fait-elle pas ? Calculez l'intégrale qui donne *U* et obtenez ainsi une estimation de la capacité. La vraie capacité sera-t-elle inférieure ou supérieure à votre estimation? Vous attendez-vous à ce que l'estimation soit plus proche de la réalité pour $a \lor b$ ou pour $(b - a) \lor b$? Si on avait besoin d'une meilleure approximation, pourriez-vous suggérer une fonction d'essai améliorée qu'on puisse encore manipuler?

Chapitre 4.

- 4.20 Si les conditions sont telles que la loi d'Ohm ne s'applique pas pour les raisons discutées dans la section 4.5, vous attendez-vous à ce qu'une augmentation de l'intensité du champ de 10 % produise moins ou plus de 10 % d'augmentation pour la densité de courant ?
- 4.21 On peut exprimer la contribution d'un ion unique à la conductivité électrique au moyen d'une quantité qu'on appelle *mobilité* de l'ion. Telle qu'elle est définie, la mobilité a les dimensions d'une vitesse divisée par une intensité de champ électrique. C'est la vitesse moyenne que prennent de tels ions, quand un champ d'intensité unité agit sur eux. Dans la notation utilisée dans la section 4.4 la mobilité, que nous représenterons par jL, serait donnée par $\mu = \overline{\mathbf{u}} / \mathbf{E}$. A quelle dépendance de la mobilité d'un ion positif dans un gaz vous attendez-vous, en fonction de la densité du gaz à température constante ? Il y a une très vaste littérature expérimentale sur les mobilités ioniques. On donne d'habitude les mobilités en em/s par volt/em ou cm²/volt-s. Pour exprimer la mobilité en unités MKS, on doit multiplier la valeur en cm²/volt-s par 10⁻⁴. Dans l'hélium très pur à une atmosphère, la mobilité

observée des ions He⁺ est 5,4 cm²/volt-s, et dans le même gaz, la mobilité des ions négatifs, que nous pouvons supposer être des électrons, est de 500 cm²/volt-s. Calculez les valeurs τ_+ et τ_- qu'impliquent ces nombres. Si nous pouvons associer τ à un temps mis pour parcourir un « parcours moyen », le parcours est-il plus grand pour un électron ou un ion positif ? Pour quelle fraction les ions positifs contribuent-ils à la conductivité de l'hélium ionisé ? (Dans la plupart des gaz, les électrons libres s'attachent vite à des atomes. Ainsi encombré par de la masse, l'électron n'est plus très mobile, ces ions négatifs ont en gros la même mobilité que les ions positifs. Quelques gaz, dont l'hélium, ne forment pas d'ions négatifs par capture d'électrons e; ils sont donc idéaux pour les expériences sur la vraie mobilité électronique.)

- 4.22 Un ion qui progresse dans un gaz d'atomes neutres sous l'influence d'un champ électrique ressemble un peu à une bille dans un billard électrique. Développez l'analogie. Quelles sont les différences et les similitudes ? Énoncez l'équivalent de la loi d'Ohm pour le modèle du billard. Imaginez qu'on vous demande de concevoir un modèle de démonstration pour le Palais de la Découverte. Comment devrait-on concevoir le billard pour fournir la représentation bidimensionnelle la plus réaliste de la conduction ionique ? Considérez des questions telles que la localisation des obstacles, leur élasticité, la possibilité de simuler l'énergie thermique et celle de représenter à la fois les ions positifs et les ions négatifs dans le même environnement.
- 4.23 Le résultat du problème 3.17 nous a aidés à comprendre l'écoulement du courant dans un circuit, dont une partie est constituée par des particules chargées qui se déplacent dans l'espace entre deux électrodes. Voici la question : quelle est la nature du courant quand une seule particule traverse l'espace ? (Si nous pouvons traiter cela, nous pouvons facilement décrire tout écoulement mettant en jeu un plus grand nombre de particules arrivant n'importe quand.) Considérez le circuit simple de la figure il est constitué de deux électrodes dans le vide reliées par un fil court. Supposez que les électrodes soient à 2 mm de distance. Un noyau radioactif situé sur la lame de gauche émet une particule alpha de charge + 2e, plutôt lente. Elle se déplace directement vers la plaque de droite à la vitesse constante de 10⁶ m/s, puis s'arrête sur cette plaque. Tracez un graphique quantitatif du courant dans le fil de liaison, en portant le courant en fonction du temps. Faites la même chose pour une particule alpha qui traverse l'intervalle à la même vitesse, mais sous un angle de 45° par rapport à la normale. (En réalité pour des impulsions aussi courtes que cela, l'inductance du fil de liaison, qu'on a négligée ici, affecterait la forme des impulsions.) Supposez que l'on ait une disposition cylindrique pour les électrodes, les particules alpha étant émises par un fil occupant l'axe d'une petite électrode cylindrique., Les impulsions de courant auraient-elles la même forme?
- 4.24 Une chambre d'ionisation est constituée par la boîte métallique que montre la figure. Cette boîte contient de l'argon à la pression atmosphérique où les mobilités des ions positifs et des électrons sont respectivement 1,6 et 800 cm²/volt-s. La plaque métallique qui forme l'électrode centrale est supportée par un isolant, et elle est reliée par une forte résistance à un potentiel de 500 volts. Elle est aussi reliée à un amplificateur dont on peut supposer le signal de sortie proportionnel au courant dans le fil de l'électrode centrale, et qu'on peut représenter sur un oscilloscope. Décrivez le genre d'impulsions que vous vous attendriez à voir sur l'écran quand une particule de haute énergie traverse la chambre, laissant sur son passage une ligne d'ions. (Vous pouvez supposer qu'on a fourni un moyen de déclencher le balayage de l'oscilloscope juste avant le passage de la particule.) Quelles vitesses de balayage serait-il désirable d'avoir pour l'étude des impulsions ?
- 4.25 Référez-vous à la figure 4.2, et pour vous entraîner, vous feriez mieux de faire le problème 4.4 si vous ne l'avez pas déjà fait. Nous allons étudier l'écoulement des électrons dans une diode à vide. Nous supposerons, comme dans le problème 4.4 que le potentiel de la cathode est zéro et celui de l'anode V_0 . Mais maintenant, le champ électrique entre l'anode et la cathode est notablement affecté par la présence des électrons, c'est-à-dire, par la charge d'espace négative. Cela veut dire que V(x), la variation du potentiel entre l'anode et la cathode doit être compatible avec toutes les autres conditions, qui mettent en jeu la densité de charge d'espace $\rho(x)$ et la vitesse électronique v(x) à la distance x de la cathode, ces deux dépendant à leur tour de V. Les diverses conditions qui doivent être satisfaites sont
 - i. Chute de potentiel fixée : V(x) = 0 pour x = 0; $V(x) = V_0$ pour x = s
 - ii. Équation de Poisson : $d^2V/dx^2 = -\rho/\epsilon_0$
 - iii. Continuité du courant : $\rho v = J = -I/S$ (constante)
 - iv. Dynamique des électrons : $1/2 mv^2 = eV(x)$

Montrez que les trois derniers énoncés conduisent à une équation différentielle reliant V et x, de la forme $d^2V/dx^2 = K/V^{1/2}$, où K est une constante formée avec les diverses constantes du problème. Nous recherchons les solutions de cette équation qui satisfont les conditions (*i*), conditions aux limites sur V(x). En réalité toute une famille de solutions le font. Nous devons utiliser un argument physique pour imposer une restriction de plus. Nous sommes intéressés par le cas limite où, pour V_0 donné, l'effet répulsif de la charge d'espace est si grand qu'aucun électron supplémentaire ne peut traverser l'espace même si la cathode en fournissait d'autres. La propriété caractérisant cette condition est que le champ électrique est nul à la cathode. Réfléchissez-y. Que se passerait-il si le champ n'était pas nul, mais positif? S'il n'était pas nul, mais négatif ? Donc nous voulons imposer que dV/dx = 0 pour x = 0. Pour trouver une solution de l'équation différentielle, multipliez les deux membres par 2(dV/dx). Le membre de gauche est alors égal à $(d/dx)(dV/dx)^2$. Continuez à partir de là. Vous devriez être capables de montrer finalement que le courant *I*

est proportionnel à $V_0^{3/2}$ dans le cas où il est « limité par la charge d'espace ». C'est un exemple frappant et important d'un système qui n'obéit pas à la loi d'Ohm! Au fait, les électrons émis par la cathode d'une diode réelle ne partent pas avec une vitesse strictement nulle, mais au contraire avec des vitesses dépendant de la température de la cathode. Cela correspond à peu près à une énergie cinétique d'un dixième d'électron-volt. Tant que nous avons affaire à des potentiels beaucoup plus grands que cela, supposer une vitesse initiale nulle est une bonne approximation.

- 4.26 Le fait que les électrons sont responsables de la conduction dans les métaux fut montré de façon très directe par une expérience de Tolman et Stewart en 1917⁽¹⁾. Elle est fondée sur la simple idée que voici. Si les électrons sont relativement libres dans un métal, leur inertie les empêchera de suivre exactement les mouvements du réseau cristallin, si on le fait bouger en l'accélérant. Si vous secouez un morceau de métal, les électrons auront tendance à rester en arrière. Cela résulterait en un mouvement relatif de charges positives et négatives, donc en un courant. Dans ce problème, nous développons cette idée en suivant les grandes lignes de l'expérience de Tolman-Stewart. Considérez un anneau de cuivre qui tourne à grande vitesse constante autour de son axe principal. Il est électriquement neutre; il n'y a pas de courant car les ions cuivre et les électrons dans le réseau cristallin se déplacent à la même vitesse. Ensuite, arrêtons brusquement l'anneau. Les électrons ont tendance à continuer à se déplacer, et la seule force que le réseau puisse exercer sur eux pour les arrêter est le même a frottement » que celui qu'il produit pour limiter leur vitesse quand ils sont mis en mouvement par un champ électrique. Il doit y avoir une relation simple entre l'accélération des électrons dans cette expérience et le champ électrique E, qui, dans un conducteur stationnaire, produirait le même mouvement relatif des électrons par rapport au réseau. Si vous poursuivez cet argument, vous trouverez qu'arrêter l'anneau entraîne *l'écoulement d'une quantité définie de charge.* C'est-à-dire que l'intégral $\int Idt$ est simplement déterminée par la vitesse initiale de l'anneau avant qu'on ne l'arrête, la conductivité du cuivre et le rapport charge sur masse des porteurs libres. Obtenez la formule. L'expérience donne aussi le signe des porteurs. Tolman et Stewart se servirent d'une bobine de nombreux tours de fil fin, au lieu d'un seul tour, afin de pouvoir facilement transporter le courant vers un circuit extérieur de mesure.
- 4.27 On peut dessiner à plat tous les réseaux si l'on adopte une façon conventionnelle de représenter un « croisement sans contact » tel que χ . Supposez qu'un cube comporte une résistance sur chaque arête. A chaque sommet on a soudé ensemble les fils de jonction de trois résistances. Dessinez ce réseau à plat sous forme de schéma de circuit. Trouvez la résistance équivalente entre deux noeuds qui représentent des sommets diagonalement opposés du cube, dans le cas où toutes les résistances ont la même valeur R_0 . Pour cela, vous n'avez pas à résoudre un système d'équations simultanées; utilisez au contraire des arguments de symétrie. Trouvez maintenant la résistance équivalente entre deux noeuds qui correspondent à des sommets diamétralement opposés sur une face du cube. Ici aussi, les arguments de symétrie réduiront ce problème à un problème très simple. Pour ces deux calculs, aidez-vous d'un schéma de la structure ressemblant peut-être à un cube, en vue de trouver les symétries nécessaires entre les courants.
- 4.28 Certains genres de réseaux importants s'étendent à l'infini. La figure montre une chaîne de résistances, en série et en parallèle qui s'étire sans fin vers la droite. Le fil du bas est un fil de retour sans résistance pour elles toutes. On l'appelle parfois chaîne d'atténuateurs ou réseau en échelle. Le problème est de trouver la « résistance d'entrée », c'est-à-dire la résistance équivalente entre les bornes A et B. Notre intérêt pour ce problème réside principalement dans la méthode de solution, qui prend un tour curieux, et qu'on peut utiliser en beaucoup d'autres endroits de la physique où nous avons une itération d'appareils identiques (même une chaîne infinie de lentilles, en optique). Le point est que la résistance d'entrée que nous ne connaissons pas --- appelons-la R ne change pas quand on ajoute un nouvel ensemble de résistances au début de la chaîne pour l'augmenter d'une unité. Mais maintenant, en ajoutant cette section, nous voyons que la nouvelle résistance d'entrée est juste R_1 en série avec la combinaison de R_2 avec R. Nous obtenons immédiatement une équation qu'on peut résoudre pour trouver R. Montrez que si on applique la tension V_0 à l'entrée d'une telle chaîne, la tension aux noeuds successifs décroît comme une série géométrique. Quel rapport faut-il donner aux résistances pour faire un atténuateur qui divise la tension par deux à chaque noeud? Évidemment une vraie échelle infinie ne serait pas réalisable pratiquement. Pouvez-vous suggérez une façon de la terminer après quelques sections sans introduire aucune erreur dans son atténuation ?
- 4.29 La figure montre deux résistances en parallèle, de valeurs R_1 et R_2 . Le courant se divise entre elles, d'une certaine façon. Montrez que la condition $I_1 + I_2 = I_0$ en même temps que la condition de dissipation minimum d'énergie conduit aux mêmes valeurs des courants que celles que l'on calculerait à partir des formules ordinaires des circuits. Cela illustre un principe variationnel général qui s'applique aux circuits en courant continu : la distribution des courants dans le réseau, pour un courant d'entrée donné I_0 , est celle qui donne la dissipation d'énergie totale la plus petite.
- 4.30 Voici un problème « casse-tête » qui circulait il y a quelques années parmi les ingénieurs électriciens : un nombre infini de résistances de 1 ohm sont reliées entre elles pour former un filet infini à deux dimensions à mailles carrées. C'est-à-dire qu'en chaque noeud les fils de quatre résistances se rejoignent. Quelle est la résistance équivalente entre un noeud et les quatre noeuds

¹ R. C. TOLMAN et T. D. STEWART, Phys. Rev. 9, 164, (1917). Les expériences furent réalisées dans les laboratoires de chimie de l'Université de Californie.

voisins ? Ce problème est un exemple étonnant de la puissance des arguments de symétrie et de superposition. En vous servant avec sagacité de la superposition, vous pouvez presque le faire de tête. Essayez autrement et vous apprécierez l'élégance de la première solution. La réponse, au fait, est 0,5 ohm, mais nous ne déflorerons pas le casse-tête en vous disant quels courants superposer.

4.31 Dans ce problème vous allez étudier le comportement de deux circuits avec des tensions variant au cours du temps. Chaque circuit est composé de deux résistances, et d'un condensateur, mais branchés différemment (voir la figure). Notre objectif est de démontrer un fait plutôt étonnant. Si on donne des valeurs convenables aux résistances R₃ et R₄ et au condensateur C', le circuit de droite et celui de gauche sont complètement indiscernables pour toute mesure extérieure. Cela veut dire que si on applique *n'importe quelle* tension dépendant du temps V(t) aux bornes, le courant I(t) sera le même dans les deux circuits. La démonstration vous présentera une méthode plutôt générale et puissante, fondée sur le principe de superposition. D'abord, considérez ce qui se passe dans le circuit de gauche si on applique comme tension aux bornes une courte impulsion V = 0, t < 0; $V = V_0$, $0 < t < \Delta t$; V = $0, t > \Delta t$. C'est-à-dire, nous maintenons court-circuitées les bornes extérieures jusqu'à t = 0, enlevons le court-circuit, branchons instantanément une batterie pendant un temps court Δt , enlevons la batterie, puis remettons instantanément le court-circuit. Nous prenons un temps Δt si court que la tension aux bornes du condensateur ne peut atteindre qu'une très petite fraction de V_0 . Pour calculer le courant dans la résistance pendant cet intervalle, nous pouvons supposer que toute la tension s'applique aux bornes de R_1 . Au temps Δt le condensateur conserve une certaine quantité de charge, qu'il se met à décharger à travers R_1 et R_2 en parallèle. Une partie de ce courant de décharge se présente comme courant dans les fils extérieurs. Ainsi toute la réponse du courant à l'impulsion V(t) doit ressembler à quelque chose comme la partie (c) de la figure. Vous devez trouver lmax, I_{max} , I_{min} et la constante de temps de la longue queue. Analysez ensuite de la même façon le circuit de la partie (b) de la figure. Montrez qu'on observera un I(t) similaire comme réponse à l'impulsion. Montrez qu'en ajustant R_3 , R_4 et C' il est possible de rendre les deux réponses identiques. C'est en fait assez pour prouver que les deux circuits avec des valeurs correctement reliées, répondront de la même facon à tout V(t). Car on peut considérer tout V(t) comme la superposition de nombreuses impulsions; les circuits étant linéaires, leurs réponses seront de même la superposition de leurs réponses aux impulsions individuelles. En fait, on trouve en général le plus facilement la réponse d'un circuit à une fonction appliquée compliquée V(t) en analysant sa réponse pour une impulsion étroite. Vous pourriez essayer cela pour l'un de ces circuits. Supposez que la tension appliquée ait une forme carrée qui ne soit pas courte par rapport à la constante de temps RC. Voici une morale que ce problème nous apprend ; les circuits équivalents ne sont pas toujours uniques.

Chapitre 5.

- 5.11 Que se passerait-il si la charge variait avec la vitesse du porteur de charge comme le facteur (1 -v²/c²)^{-1/2}? Estimez (en ordre de grandeur seulement) la différence de charge totale qu'on pourrait attendre entre une molécule d'hydrogène et un atome d'hélium. Supposez que l'énergie cinétique du proton augmente de quelque chose de négligeable à environ 1 Mev en allant de la molécule H₂ au noyau He, tandis que l'énergie cinétique des deux électrons augmente d'environ quelques dizaines de volts en allant de H₂ à He. Si, dans ces circonstances, H₂ se trouvait accidentellement être exactement neutre, quel excès de charge vous attendriez-vous à trouver dans un litre d'hélium à température et pression normales? Quel serait l'ordre de grandeur du champ électrique résultant.
- 5.12 Supposez que dans la lame de la figure 5.20, les charges positives soient au repos et que seules les charges négatives se déplacent. Trouvez la force sur la charge d'essai en mouvement dans ce cas.
- 5.13 Dans un accélérateur de particules à « faisceau convergent » un électron et un positron ayant chacun une énergie de 2 Bev passent l'un à côté de l'autre en se déplaçant dans des directions opposées. Ils passent si près l'un de l'autre que chacun d'eux est dévié de sa direction de vol initiale d'un angle de 10⁻² radians. Utilisez les résultats du problème 5.9 pour estimer la distance minimum d'approche.
- 5.14 Quelle densité de charge non compensée faudrait-il le long de chaque fil de cuivre du dispositif de la figure 6.3 pour produire une force d'interaction électrostatique égale en valeur absolue à celle que nous avons calculée pour l'interaction magnétique ? Estimez l'intensité du champ à la surface d'un fil de 1 mm de diamètre qui porte une telle charge. Comparez la grandeur de ce champ, en volts/m, à la grandeur en tesla du champ magnétique à la surface du fil dans cet exemple. Le résultat est-il accidentel ou pouvez-vous montrer qu'il doit toujours en être ainsi ?
- 5.15 Considérez une ligne de charge composée de nombreux genres de porteurs, ayant chacun sa propre vitesse. Vue du repère de laboratoire, la $k_{\text{ème}}$ composante est constituée de n_k charges par mètre, chacune de charge q_k , se déplaçant à la vitesse $v_k = \beta_k c$. Dans ce repère, le courant total *I* et la densité de charge linéaire λ sont donnés par $I = c \sum_k n_k q_k \beta_k$ $\lambda = \sum_k n_k q_k$ Passez

maintenant à un repère de vitesse βc . Comme nous l'avons montré en rapport avec la figure 5.20, les vitesses et densités de charge

se transforment de la façon suivante $\beta'_{k} = \frac{\beta_{k} + \beta}{1 + \beta \beta_{k}}$ $n'_{k} = \frac{n_{k} \gamma'_{k}}{\gamma_{k}}$ $q'_{k} = q_{k}$ Montrez que dans ce nouveau repère

$$I' = \gamma (I + \lambda c \beta) \quad \lambda' = \gamma \left(\lambda + \frac{\beta I}{c} \right)$$

Cela montre que notre résultat précédent est tout à fait indépendant du modèle. Cela montre aussi que si une ligne a un courant *total* nul et une charge *totale* nulle dans un repère, il en sera de même dans *n'importe quel* repère, quoi que puissent faire les courants et les charges qui les constituent- fait d'une simplicité plaisante qui n'est peut-être pas si évident.

Chapitre 6.

- 6.16 Calculez approximativement le champ magnétique qu'on doit attendre juste au-dessus du disque tournant dans l'expérience de Rowland. Prenez les données qui ressortent de la description contenue dans la page de son article qui est reproduite sur la figure 6.27. Vous aurez aussi besoin de savoir que le potentiel du disque tournant, par rapport aux électrodes situées au-dessus et au-dessous de lui et qu'on a mises à la masse, était d'environ 10 KV dans la plupart de ses expériences. Cette information est bien sûr donnée plus loin dans son article, de même que la description de la partie cruciale de son appareil, le magnétomètre « astatique » montré dans le tube vertical sur la gauche. C'est un dispositif dans lequel deux aiguilles aimantées, orientées en opposition, sont reliées rigidement entre elles en un seul système afin que les couples produits par le champ terrestre s'annulent l'un l'autre. On peut alors détecter le champ produit par le disque tournant, qui agit principalement sur l'aiguille la plus proche, en présence d'un champ uniforme beaucoup plus fort. Ce n'est en aucune façon la seule précaution que Rowland dut prendre.
- 6.17 On peut trouver un certain nombre de faits simples sur les champs des solénoïdes en se servant du principe de superposition. L'idée est que deux solénoïdes de même diamètre et de longueur *L*, mis bout à bout forment un solénoïde de longueur 2*L*. Deux solénoïdes semi-infinis forment un solénoïde infini, et ainsi de suite. (Un solénoïde semi-infini est un solénoïde qui a un bout ici, et l'autre à une distance infinie.) Voici quelques faits que vous pouvez démontrer de cette façon
 - a) Dans le solénoïde de longueur finie de la partie (*a*) de la figure, le champ magnétique sur l'axe au point P_2 à une extrémité est approximativement la moitié du champ au point P_1 situé au centre. (Est-il légèrement supérieur ou inférieur à la moitié ?)
 - b) Dans le solénoïde semi-infini que montre la partie (*b*) de la figure, la ligne de champ *FGH* qui passe à travers l'extrémité de l'enroulement est une ligne droite de *G* à l'infini.
 - c) Le flux de **B** à travers l'extrémité d'un solénoïde semi-infini est juste la moitié du flux à travers la bobine à une grande distance à l'intérieur.
 - d) Toute ligne de champ qui est à r_0 m de l'axe loin à l'intérieur de la bobine sort par le bout de la bobine à une distance radiale r_1 qui vaut exactement $\sqrt{2r_0}$. Montrez que ces énoncés sont vrais. Que pouvez-vous trouver d'autre?
- 6.18 Une façon de produire un champ magnétique très uniforme est d'employer un solénoïde très long et de ne travailler que dans la section médiane de son intérieur. C'est parfois incommode, et cela gaspille de la place et de la puissance. Pouvez-vous suggérer des façons dont on pourrait combiner un certain nombre de bobines ou de solénoïdes courts pour réaliser une bonne uniformité du champ dans une région limitée? (Après avoir travaillé là-dessus, examinez « les bobines de Helmholtz » dans l'index de tout livre standard d'électricité et de magnétisme, et voyez si certaines de vos inventions correspondent à l'arrangement qui y est décrit.)
- 6.19 Une bobine est enroulée de façon régulière sur un tore de section rectangulaire. Il y a *N* tours de fil en tout. On n'en a montré que quelques-uns sur la figure. Avec un si grand nombre de tours, nous supposerons que le courant à la surface du tore s'écoule radialement, sur les faces planes annulaires et exactement longitudinalement sur les faces cylindriques internes et externes. Convainquez-vous premièrement de ce que cette hypothèse de symétrie entraîne que le champ magnétique pointe partout dans une direction « le long d'une circonférence », c'est-à-dire que toutes les lignes de champ sont des cercles autour de l'axe du tore. Deuxièmement, prouvez que le champ est nul en tous les points à l'extérieur du tore, y compris l'intérieur du tore central. Troisièmement trouvez la grandeur du champ à l'intérieur du tore, en fonction du rayon.
- 6.20 Pour une expérience magnétique délicate, un physicien veut annuler le champ terrestre dans un volume qui a en gros une taille de 30 par 30 par 30 cm, afin que le champ résiduel dans cette région ne soit pas supérieur à 10×10^{-7} tesla en aucun point. L'intensité du champ magnétique terrestre à cet endroit est de 5.5×10^{-5} tesla; sa direction fait un angle de 30° par rapport à la verticale. On peut supposer qu'il est constant à environ 1×10^{-7} tesla près dans le volume en question. (Le champ magnétique terrestre lui-même varierait difficilement d'une telle quantité sur 30 cm environ, mais dans le laboratoire, il y a souvent des perturbations

locales.) Suggérez une disposition de bobines qui conviennent pour cette tâche, et estimez le nombre d'ampère-tours requis dans le système de compensation.

- 6.21 Tout solénoïde ordinaire est en réalité une hélice. Il y a une composante longitudinale du courant qui accompagne le courant sur la circonférence car l'enroulement doit progresser d'un bout à l'autre. Supposez que nous considérions le courant comme la superposition d'une nappe de courant s'écoulant précisément le long de la circonférence et d'un « tube » de courant précisément longitudinal, comme le montre la figure. Décrivez le champ magnétique de la combinaison, à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre. (Supposez que le cylindre soit infiniment long.) Pouvez-vous relier le rapport des intensités des champs à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre au pas de l'enroulement en hélice que cette distribution de courant est supposée représenter ?
- 6.22 Le but principal de ce problème est de trouver le couple qui agit sur une boucle de courant dans un champ magnétique constant ? Le champ magnétique **B** pointe dans une certaine direction de l'espace. Nous allons orienter nos axes de coordonnées de sorte que **B** soit perpendiculaire à l'axe *x*, et que notre boucle de courant se trouve dans le plan *xy*, comme le montre la figure. La forme et la taille de la boucle sont arbitraires; nous pouvons penser que le courant est fourni par des fils torsadés sur lesquels toute force totale sera nulle. Considérez un petit élément de la boucle, et calculez sa contribution au moment du couple par rapport à l'axe *x*. Seule interviendra la composante *z* de la force qui agit sur lui, par conséquent seule comptera la composante *y* du champ **B**, que nous avons représentée par $\hat{\mathbf{y}} B_y$ sur le diagramme. Établissez l'intégrale qui donnera le moment du couple total. Montrez que cette intégrale donne, à des facteurs constants près, la *surface* de la boucle. On définit le *moment magnétique* de la boucle de courant comme étant un vecteur **m** de module *IS* où *I* est le courant en ampères et *S* la surface de la boucle en mètres carrés, et dont la direction est normale à la boucle, étant reliée au courant par la règle de la main droite, comme le montre la figure. (Nous rencontrerons de nouveau dans le chapitre 10 la boucle de courant est donné par l'équation vectorielle **N=m**∧**B** Qu'en est-il de la *force* totale sur la boucle ?
- 6.23 Pour certaines applications, il est utile d'accélérer des ions hydrogène négatifs dans un cyclotron. Un ion hydrogène, H^{*}, est un atome d'hydrogène auquel s'est attaché un électron supplémentaire. L'attachement est assez faible; un champ électrique de $4,5 \times 10^8$ volts/m (champ plutôt faible pour un champ atomique) suffit à libérer l'électron, laissant un atome d'hydrogène. Si nous voulons accélérer des ions H⁻ jusqu'à une énergie cinétique de 1 Bev, quel est le champ magnétique le plus fort que nous pouvons oser utiliser pour les maintenir sur orbite circulaire jusqu'à l'énergie finale ? (Pour trouver le γ de ce problème, vous n'avez besoin que de la masse au repos de l'ion H^{*}, qui est évidemment pratiquement la même que celle du proton, soit approximativement 1 Bev.)
- 6.24 Un inventeur propose de fabriquer un compteur de vitesse pour avion fondé sur la mesure du champ électrique « induit » $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$. Discutez les mérites de cette proposition. Il intervient dans cette discussion le fait météorologique que dans l'atmosphère terrestre on trouve couramment des champs électrostatiques, de grandeur et direction quelque peu variables et imprévisibles, de l'ordre de 300 volts/cm. A une époque, on avait mis en avant une théorie de la navigation des pigeons voyageurs, selon laquelle le pigeon connaissant d'une certaine façon sa propre vitesse, sent la grandeur du champ « induit » $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, déterminant ainsi \mathbf{B} et par conséquent quelque chose concernant sa position sur la terre. Cela a-t-il encore un sens ? Qu'en est-il au sujet de la mesure de \mathbf{B}' lui-même dans un véhicule en mouvement ? Quelle incertitude sur la valeur calculée de \mathbf{B} les champs électriques s'étendant sur de grandes régions et d'ordre de grandeur indiquée plus haut entraîneraient-ils ?
- 6.25 Une barre métallique de masse *m* glisse sans frottement sur deux longs rails conducteurs parallèles à une distance *b* l'un de l'autre. On a branché une résistance *R* entre les rails à un bout. La résistance de la barre et des rails est négligeable devant *R*. Il y a un champ magnétique uniforme **B** perpendiculaire au plan de la figure. Au temps t = 0, on donne à la barre une vitesse v_0 vers la droite. Que se passe-t-il alors? (*a*) La barre s'arrête-t-elle jamais de bouger ? Si oui, quand ? (*b*) Jusqu'où va-t-elle ? (*e*) Qu'en est-il de la conservation de l'énergie ?
- 6.26 Il n'y a rien de sacré dans le fait de définir la vitesse relative des repères *S* et *S'* le long de la direction *x* comme nous l'avons fait dans la démonstration des équations 6.58. Si nous avions choisi la vitesse le long de l'axe *y*, à quoi la transformation aurait-elle ressemblé (attention aux signes moins) ? Si vous préférez, vous pouvez déterminer à la place les formules générales pour $E_{l'}$, E_{\perp} , etc., où les indices indiquent une composante parallèle ou perpendiculaire à **v**.
- 6.27 Supposez que vous ayez un champ électrique uniforme E_y dans la direction y et un champ magnétique uniforme B_z dans la direction z; supposez $E_y < cB_z$ Trouvez un référentiel de Lorentz dans lequel le champ électrique est nul. Calculez la valeur de B dans ce repère. Supposez $E_y > cB_z$. Dans ce cas, pouvez-vous trouver un repère dans lequel le champ magnétique est nul ?
- 6.28 Un étudiant a dit : « Vous m'avez presque convaincu de ce que la force entre courants, que je croyais être du magnétisme, est expliquée par les champs électriques de charges en mouvement. Mais alors pourquoi la plaque métallique de la figure 5.1 *c* ne sert-elle pas d'écran pour un fil contre l'influence de l'autre ? » Pouvez-vous expliquer cela ?

- 6.29Supposez que nous ayons une situation dans laquelle la composante du champ magnétique parallèle au plan d'une lame ait la même grandeur des deux côtés, mais que sa *direction* varie de 90° en passant à travers la lame. Que se passe-t-il ici? Y a-t-il une force sur la lame? Notre formule pour la force sur un courant doit-elle s'appliquer dans des cas comme celui-ci?
- 6.30 Supposez qu'on utilise le solénoïde décrit dans le problème 6.7 pour créer un champ très fort pour un temps très court en le reliant brièvement à une source de haute tension, pour y faire passer un courant énorme. En mettant à part toutes les autres limitations, considérez la limite imposée par la tension de rupture du fil. La pression magnétique, telle que la pression dans un tuyau, tendra à faire éclater le solénoïde. Si la tension de rupture du fil est de 2×10^8 newtons/m², quel est le champ le plus fort qu'on pourrait contenir dans ce solénoïde ? Rép. : 3,5 teslas.
- 6.31 Dans une mesure d'effet Hall dans du sodium métallique, on a déterminé que le champ transverse était de $2,5 \times 10^{-3}$ volts/m quand la densité de courant dans le conducteur en sodium était de 10^7 Amp/m², dans un champ magnétique de 1 Tesla. Calculez le nombre d'électrons de conduction par mètre cube qu'implique cette observation, et comparez le au nombre d'atomes dans 1 m³ de sodium. (Densité du sodium : 970 kg/m³.)

Chapitre 7.

- 7.16 Faraday décrit avec les mots suivants un essai infructueux en vue de détecter un courant induit quand une partie d'un circuit est constitué par de l'eau qui se déplace dans le champ magnétique terrestre « J'ai donc fait les expériences (par faveur) au pont de Waterloo, en étendant un fil de cuivre de 293 mètres de long, le long du parapet du pont, et en faisant tomber de ses extrémités d'autres fils avec de grandes plaques de métal attachées aux bouts pour faire contact avec l'eau. Ainsi le fil et l'eau constituaient-ils un circuit conducteur; et au cours du flux et du reflux de l'eau dus à la marée, j'espérais obtenir des courants analogues à ceux de la boucle de laiton. J'obtenais constamment des déviations du galvanomètre, mais elles étaient très irrégulières, et l'une après l'autre je pouvais les référer à d'autres causes que celle que je cherchais. Les différentes conditions de pureté de l'eau aux deux bords de la rivière; les différences de température; de petites différences dans les plaques, dans la soudure utilisée, et dans les contacts plus ou moins parfaits obtenus en torsadant les fils ou autrement, produisirent tour à tour des effets : et cela bien que je ne fis d'expérience que sur l'eau qui passait à travers les arches centrales; bien que j'aie utilisé des plaques de platine à la place de cuivre, et que j'aie pris toute autre précaution, je ne pus obtenir, après trois jours, aucun résultat satisfaisant. » (*Experimental Researches in Electricity*, Vol. 1, p. 55, Londres, 1839). Supposez que la composante verticale du champ était de 5×10^{-5} tesla, faites une estimation raisonnable de la vitesse des courants de marée dans la Tamise et estimez la grandeur de la tension induite que Faraday essayait de détecter.
- 7.17 Un cadre métallique carré se trouve, comme le montre la figure entre les pôles d'un électroaimant. La partie supérieure du cadre est dans une région où règne un champ magnétique horizontal d'intensité *B* raisonnablement uniforme. Le côté inférieur est en dehors de l'entrefer de l'aimant où le champ, bien que non nul, est négligeable pour ce problème. Montrez que si on lâche le cadre, et s'il tombe sous l'influence de son propre poids, il acquiert une vitesse vers le bas qui ne dépend que de *B*, pour un matériau constituant le cadre donné, et qu'elle est indépendante de la taille du cadre et de la section du fil ou barreau qui le constitue. Quelle est cette vitesse, en m/s, si *B* est 1,5 Tesla et si le cadre est fait en aluminium (densité 2 700 kg/m³, résistivité 2,8 × 10⁻⁸ ohm-m)? De combien le cadre tombera-t-il environ avant d'atteindre sa vitesse limite ?
- 7.18 Supposez que la boucle qui se déplace dans le champ **B** de la bobine sur la figure 7.6 soit faite avec un fil de résistance extrêmement faible. La force électromotrice ε va-t-elle produire un courant énorme dans la boucle ? Soit I_2 le courant qui va s'écouler dans la boucle et **B**₂, le champ magnétique de ce courant. Que pouvez-vous dire sur la relation entre **B**₂ et le champ **B** ? Pouvez-vous deviner ce qui pourrait se produire si la boucle était faite avec un fil supraconducteur, de résistance strictement nulle ?
- 7.19 Discutez les implications du théorème $\Phi_{12} = \Phi_{21}$ dans le cas des anneaux concentriques grand et petit de la figure 7.20. Avec un courant fixe *I*, dans la boucle extérieure, il est évident que Φ_{21} le flux à travers la boucle intérieure, décroît si R_1 augmente, simplement parce que le champ au centre devient plus faible. Mais avec un courant fixe dans l'anneau intérieur, pourquoi Φ_{12} , le flux à travers l'anneau extérieur, devrait-il décroître quand R_1 croît, en gardant R_2 constant? Il doit en être ainsi pour satisfaire notre théorème.
- 7.20 Pouvez-vous penser à une façon d'utiliser le théorème $\Phi_{12} = \Phi_{21}$ pour trouver l'intensité du champ magnétique dû à un anneau de courant dans le plan de l'anneau à une distance de l'anneau beaucoup plus grande que son rayon? (Suggestion : Considérez l'effet d'une faible variation, du rayon de la boucle extérieure sur la figure 7.20; elle doit avoir le même effet sur Φ_{12} que sur Φ_{21} .)

- 7.21 La figure montre un solénoïde de rayon a_1 et de longueur b_1 situé à l'intérieur d'un solénoïde plus long de rayon a_2 et de longueur b_2 . Le nombre total de tours est N_1 pour la bobine intérieure, N_2 pour l'autre. Établissez une formule pour l'inductance mutuelle M.
- 7.22 Le conducteur intérieur de la ligne de transmission coaxiale sur la figure est constitué par une tige métallique pleine de rayon a. Le conducteur extérieur est un mince tube de métal de rayon b. A un bout on a soudé un disque métallique aux deux conducteurs. Nous voulons prédire la self-inductance L d'une section de ligne de longueur l. Supposez que le courant qui s'écoule dans le conducteur intérieur soit distribué uniformément dans la section de la tige. Pour un courant donné I, quelle est l'intensité du champ magnétique B en fonction du rayon à la fois à l'intérieur du barreau et dans l'espace annulaire ? Calculez l'énergie totale emmagasinée dans le champ magnétique. Utilisez maintenant la relation générale, énergie emmagasinée = 1/2LI² pour trouver L. Remarquez que cette façon de calculer évite toute question qui pourrait être soulevée du fait que différents filaments de courant dans le conducteur intérieur comprennent des quantités de flux différentes. Cependant, le résultat n'est valable que pour des courants qui varient lentement. Pourquoi?
- 7.23 Considérez la boucle de fil que montre la figure. Supposez que nous désirions calculer le flux de **B** à travers la boucle. On montre deux surfaces qui s'appuyent sur la boucle, respectivement sur les parties (*a*) et (*b*). Quelle est la différence essentielle entre elles ? Laquelle, s'il y en a une, est-elle la surface correcte pour calculer l'intégrale de surface $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ en vue de trouver le flux ? Décrivez la surface correspondante pour une bobine à trois tours. Montrez que tout cela est cohérent avec notre affirmation précédente selon laquelle pour une bobine compacte de *N* tours la force électromotrice est juste *N* fois ce qu'elle serait pour une boucle unique de même taille et de même forme.
- 7.24 Dans le second paragraphe cité au début du chapitre 7, Faraday se réfère aux « expériences extraordinaires d'Arago ». Plus loin, dans une section intitulée Explication du Phénomène Magnétique d'Arago, il les décrit ainsi « Si on fait tourner un plateau de cuivre près d'une aiguille magnétique ou d'un aimant, suspendu de telle sorte que ce dernier puisse tourner dans un plan parallèle à celui du plateau, l'aimant tend à suivre le mouvement du plateau; ou si l'on fait tourner l'aimant, le plateau tend à suivre son mouvement; et l'effet est si puissant que l'on peut ainsi entraîner des aimants ou des plateaux pesant de nombreux kilogrammes. Si l'aimant et le plateau sont au repos l'un par rapport à l'autre, on ne peut pas observer entre eux le moindre effet, attractif ou répulsif ou de tout autre genre. » C'est le phénomène découvert par M. Arago. Donnez votre propre « explication » du phénomène d'Arago.
- 7.25 On peut déterminer la constante $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ qui apparaît dans les équations de Maxwell par des expériences électriques ne faisant intervenir que des champs de basse fréquence. Considérez le dispositif que montre la figure. La force entre plateaux du condensateur est équilibrée par la force entre fils parallèles parcourus par un courant dans la même direction. On applique au condensateur à plaques parallèles C_1 et aussi au condensateur C_2 une tension variant sinusoïdalement à une fréquence f' hertz. La charge qui entre et qui sort de C_2 constitue le courant dans les anneaux. Supposez que l'on ait ajusté C_2 et les diverses distances qui interviennent afin que la force sur la plaque supérieure de C, dirigée vers le bas, équilibre exactement la force vers le bas qui agit sur l'anneau du haut. (Bien sûr, on doit ajuster les poids des deux côtés afin qu'ils s'équilibrent quand on coupe la tension.) Montrez que dans ces conditions, on peut calculer la constante $\varepsilon_0 \mu_0$ à partir des quantités mesurées, de la façon suivante

$$\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} = (2\pi)^{3/2} \left(\frac{ab}{h}\right) \left(\frac{C_1}{C_2}\right) f$$
 m/s Notez qu'on a besoin de mesures de *distance* et de *temps* (fréquence) en plus d'une

mesure du rapport de deux capacités C_1 et C_2 . Les unités électriques, par elles-mêmes, n'interviennent pas dans le résultat. (En réalité, l'expérience est faisable à des fréquences aussi faibles que 50 Hertz si on prend C_2 égal à 10⁶ fois C_1 et si on prend des anneaux de courant constitués par plusieurs tours pour multiplier l'effet d'un petit courant.)

7.26 Discutez la possibilité d'envoyer des signaux à distance par induction électromagnétique. Est-il possible d'avoir de la télégraphie sans fil qui ne repose que sur la loi d'induction de Faraday ?

Chapitre 8.

8.8 Trouvez pour le circuit amorti *RLC* de la figure 8.2 une expression pour l'énergie totale emmagasinée dans le circuit, l'énergie dans le condensateur plus l'énergie dans la self-inductance, à tout instant *t*. Montrez que la condition « d'amortissement critique »

 $R = 2\sqrt{L/C}$ est celle pour laquelle l'énergie totale est le plus rapidement dissipée.

- 8.9 Utilisant les équations 8.10 et 8.13, exprimez l'effet de l'amortissement sur la fréquence d'un circuit *RLC* en série. Prenez $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ comme fréquence du circuit non amorti. Supposez qu'on ajoute une résistance assez grande pour ramener Q de \propto à 1 000. De quel pourcentage la fréquence ω diffèrera-t-elle de ω_0 ?
- 8.10 Utilisez le résultat de problème 7.7 pour écrire une formule donnant la self-inductance du cylindre conducteur ouvert aux deux bouts que montre la partie (*a*) de la figure. On considère que le courant s'écoule le long de la circonférence. Comme dans le problème 7.7, nous adoptons l'approximation que le champ intérieur est uniforme jusqu'aux extrémités. Ouvrez maintenant le circuit et insérez un condensateur, comme sur la partie (*b*) de la figure. Calculez la fréquence de résonance de cette combinaison. Remarquez qu'elle est indépendante de la longueur *b*. Le premier magnétron à cavité qui rendit le radar en micro-ondes possible pendant la deuxième guerre mondiale contenait huit circuits résonnants de cette forme. On montre sur la partie (*c*) de la figure, une coupe à travers l'anode en cuivre de l'un de ces tubes, exactement à l'échelle. Estimez la fréquence du rayonnement émis. (La fréquence n'est pas beaucoup affectée par le fait qu'il y a huit cavités plutôt qu'une.) Supposez qu'avec *w* et *s* fixés nous essayions de rendre la fréquence de résonance aussi élevée que possible en diminuant le diamètre du cylindre jusqu'à ce que finalement a = 1/2s et que les choses ressemblent à la partie (*d*) de la figure. Vous attendez-vous à ce que votre formule marche bien dans ce cas? La fréquence réelle serait-elle plus élevée ou plus basse que ne le prédit votre formule ?

Chapitre 9.

- 9.16 On monte un circuit résonnant de « Q élevé », composé par une hélice de cuivre et un condensateur constitué par des plaques métalliques dans une cloche à vide de sorte qu'on puisse faire le vide. Avec de l'air à la pression normale dans la cloche, on mesure une fréquence de résonance de 41,405 ± 0,002 MHz. Quand on fait le vide dans la cloche, une nouvelle détermination donne 41,418 t 0,002 MHz. D'après ces données, que pouvez-vous conclure sur la constante diélectrique relative de l'air? Pouvez-vous penser à d'autres effets qui pourraient contribuer à la variation ?
- 9.17 Le phénomène de solvatation est important dans la chimie des solutions aqueuses. Il se réfère au fait qu'un ion en solution rassemble autour de lui un essaim de molécules d'eau, qui se collent assez fortement à lui [Voir, par exemple, G. C. Pimentel, ed., *Chemistry an Experimental Science*, p. 314 (Freeman, San Francisco, 1963)] ou L. Pauling, *General Chemistry*, p. 205 (Freeman, San Francisco, 1953).] La force d'attraction entre un dipôle et une charge ponctuelle est responsable de cela. Estimez l'énergie requise pour séparer un ion portant une seule charge *e* d'une molécule d'eau, en supposant qu'initialement l'ion se trouve à 1,5 Angströms de la position effective du dipôle H₂0. (En réalité, ce dipôle est une quantité plutôt mal définie, étant donné que la molécule d'eau, vue de près, est une distribution de charge, et non un dipôle infinitésimal.) Quelle partie de la molécule d'eau trouvera-t-on le plus près d'un ion négatif ?
- 9.18 A partir d'un examen des lignes de champ de la figure 9.29, il est possible de déduire la constante diélectrique relative du matériau. On a tracé les lignes avec une bonne précision. Voyez si vous pouvez trouver quelque caractéristique de la configuration du champ qu'il soit facile de mesurer et de comparer à la théorie, afin de déduire approximativement la valeur de ε_r utilisée pour préparer la figure.
- 9.19 Dans un grand condensateur de sous-station, l'intensité maximum du champ électrique dans l'huile qui serf de diélectrique est de 9×10^6 volt/m, à pleine charge. La constante diélectrique relative de l'huile est 2,24. Supposez qu'il y ail une bulle dans l'huile. Quelle est l'intensité du champ à l'intérieur de la bulle ? (C'est le problème de la sphère de diélectrique, pris à l'envers. Vous devriez être capable d'adapter à ce cas nos résultats pour la sphère diélectrique.) Les bulles de gaz sont-elles très indésirables dans l'huile ?
- 9.20 Quelle serait la signification d'une polarisabilité négative? Pensez-vous qu'il puisse en exister ?
- 9.21 Imaginez une molécule triatomique constituée par trois atomes identiques dans un configuration équilatérale. (En réalité, on ne connaît pas de telle molécule, mais cela ne fait rien.) Considérez la polarisation de cette molécule par un champ électrique appliqué dans le plan du triangle. D'après la symétrie de la molécule, il est évident que la polarisabilité doit être la même pour les champs E_1 , E_2 et E_3 appliqués dans les directions indiquées. Vous devriez être capable de montrer à partir de là, en vous servant des composantes et du principe de superposition, que la polarisabilité est la même pour un champ E appliqué dans n'importe quelle direction du plan. Vous aurez ainsi démontré qu'on ne peut distinguer aucune molécule de symétrie d'ordre trois d'une autre de symétrie de révolution complète, tout au moins en ce qui concerne sa polarisabilité dans ce plan. Un théorème comme celui-là pour trois dimensions nous assure que la molécule tétraédrique de méthane de la figure 9.13 doit avoir une polarisabilité de symétrie sphérique.

9.22 Le problème est de construire avec les conseils fournis une démonstration de la symétrie du tenseur de polarisabilité. Par simplicité, nous ne travaillerons qu'à deux dimensions, mais cela sera tout à fait suffisant pour montrer la nature du raisonnement - une troisième dimension n'apporterait rien de nouveau. Nous avons un certain objet polarisable, qui ne possède pas de symétrie du tout, que nous situons dans les coordonnées xy. Un champ E induit un moment dipolaire p, relié linéairement à E par

$$p_{x} = \alpha_{xx}E_{x} + \alpha_{xy}E_{y}$$

$$p_{y} = \alpha_{yx}E_{x} + \alpha_{yy}E_{y}$$
(1)

Notre but est de démontrer que α_{xy} et α_{yx} doivent être égaux. La démonstration est fondée sur la conservation de l'énergie. Si, dans un champ appliqué **E**, un système fait varier son moment dipolaire de **p** à **p** + d**p**, le travail fourni par le champ est d $W = \mathbf{E} \cdot \mathbf{q}$. Comme on l'a expliqué dans le section 9.14, la raison est que dp est juste la quantité de déplacement de charge pendant la variation, tandis que la projection de d**p** sur **E** est la quantité de déplacement de charge dans la direction du champ. Supposez que le système soit dans un champ \mathbf{E}_1 , avec un moment dipolaire correspondant \mathbf{p}_1 , qui est, bien sûr, donné par l'équation 1. Appelez cela état **I**. Faisons maintenant varier le champ appliqué jusqu'à \mathbf{E}_2 en faisant quelque chose à la source de ce champ. Le moment dipolaire variera jusqu'à \mathbf{p}_2 , et une certaine quantité de travail W_{12} sera produite, portant le système vers l'état II. Maintenant, le point est que l'on peut réaliser cette variation de nombreuses façons différentes. Cependant, le travail fourni doit être le même dans toutes ces façons, si l'énergie est conservée, car elles laissent le système dans le même état, à savoir, polarisé avec un moment dipolaire \mathbf{p}_2 . Prenons $\mathbf{E}_1 = 0$, $\mathbf{p}_1 = 0$ comme état I, et comparons deux façons particulièrement simples d'atteindre l'état II. On décrit ci-dessous les deux façons de faire varier le champ de 0 à \mathbf{E}_2

Laisser $E_y = 0$; faire varier E_x jusqu'à E_{2x} Travail fourni Laisser $E_x = E_{2x}$; faire varier E_y jusqu'à E_{2y} Travail fourni Travail total fourni

Deuxième méthode :

Laisser $E_x = 0$; faire varier E_y jusqu'à E_{2y} Travail fourni Laisser $E_y = E_{2y}$; faire varier E_x jusqu'à E_{2x} . Travail fourni Travail total fourni

Le travail fourni dans la première étape de la première méthode est $\int_{E_x=0}^{E_x=E_{2x}} E_x dp_x$ et on peut exprimer dp_x en fonction de dE_x grâce à l'équation 1. Trouvez le travail total fourni dans chaque méthode, et écrivez que les deux quantités sont égales.

- 9.23 Pour voir comment se transforment les éléments d'un tenseur dans une rotation des axes de coordonnées, considérons pour simplifier un cas à deux dimensions. Supposez que deux vecteurs **A** et **B** à deux dimensions soient reliés linéairement de la façon suivante dans un système de coordonnées *xy* particulier : $B_x = \alpha_{xx}A_x + \alpha_{xy}A_y$; $B_y = \alpha_{yx}A_x + \alpha_{yy}A_y$. Les coefficients α constituent un tenseur. Considérons maintenant un ensemble d'axes *x'* et *y'* obtenus par rotation d'un angle θ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre à partir des axes *x* et *y*. Dans les nouvelles coordonnées les vecteurs **A** et **B**, dont nous pouvons penser qu'ils sont restés fixes dans l'espace, ont des composantes différentes, A_x' , etc. Quelles sont les nouvelles composantes exprimées en fonction des anciennes ? Le tenseur α appliqué à **A** doit encore donner le même vecteur **B**. Si cela doit être vrai, quelles doivent être les relations entre les nouveaux éléments du tenseur et les anciens ? Supposez que $\alpha_{xx} = \alpha_{yx}$. Montrez que cette symétrie du tenseur est conservée dans la rotation, et qu'on peut trouver un angle θ qui rende nuls les coefficients non diagonaux. Il ne faut que plus de patience pour faire une telle analyse à trois dimensions, et obtenir ainsi les règles de transformation d'un tenseur tel que le tenseur de polarisabilité.
- 9.24 Etude de forces entre dipôles. Deux dipôles disposés comme ceci →→ s'attirent l'un l'autre; deux dipôles disposés comme ceci ↑↑ se repoussent l'un l'autre. Expliquez pourquoi. Trouvez la grandeur de la force, pour chaque cas. Vous pouvez représenter le dipôle par deux charges ponctuelles proches l'une de l'autre. Avec quelle puissance de la distance, la force varie-t-elle? Considérez maintenant deux dipôles disposés comme ceci /45°----/ Quelle est la *direction* de la force sur chaque dipôle? (C'est un bon exemple de force non centrale. Les forces *non centrales*, d'origine autre qu'électrique, jouent un rôle significatif dans le noyau. Elles sont responsables du fait que le noyau de deutérium n'est pas tout à fait sphérique mais légèrement allongé comme un cigare; la découverte de cela révéla pour la première fois la présence de telles forces entre nucléons.)
- 9.25 Deux dipôles permanents ont des moments dipôlaires \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 ; ils sont disposés comme le montre la partie (*a*) de la figure, à 2 m de distance, en faisant respectivement des angles θ_1 et θ_2 avec le segment qui les relie. Le problème est de calculer l'énergie de ce système, ce qui veut dire l'énergie requise pour lui donner cette configuration, en partant de deux tels dipôles infiniment éloignés l'un de l'autre. Cela ne comprend pas l'énergie associée à la création d'un tel dipôle. On suppose que les grandeurs des dipôles sont

fixées une fois pour toutes, mais qu'on peut les tourner pour les faire pointer dans diverses directions. Il y a de nombreuses façons d'amener les dipôles dans leurs positions finales; le travail total doit être le même dans chaque cas. Voici une méthode qui rend le calcul de ce travail assez facile : Partez avec \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 très éloignés et orientés comme sur la partie (b) de la figure. En gardant cette orientation, rapprochez \mathbf{p}_2 jusqu'à ce qu'il soit à la distance désirée r de \mathbf{p}_1 . Cela ne requiert pas de travail. Pourquoi pas? Tournez \mathbf{p}_1 jusqu'à son orientation finale. Calculez le travail requis pour effectuer cette rotation dans le champ de \mathbf{p}_2 qui pointe encore le long de $\theta = 0$. Faites maintenant tourner \mathbf{p}_2 jusqu'à son orientation finale $\theta = \theta_2$. On peut calculer le travail requis pour effectuer cette rotation dans le champ de \mathbf{p}_1 en décomposant \mathbf{p}_1 en une composante longitudinale $p_1 \cos \theta_1$, et en une composante transverse $p_1 \sin \theta_1$, et en traitant séparément les champs de celles-ci à la position de \mathbf{p}_2 . Ajoutez tous les travaux fournis et montrez qu'on

peut écrire le résultat $W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p_1 p_2}{r^3} \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3\cos\theta_1 \cos\theta_2 \right]$

- 9.26 Pour ce problème et le suivant, vous avez besoin du résultat du problème 9.25 pour certaines dispositions très simples d'une paire de dipôles. Considérez une chaîne linéaire de dipôles également espacés, s'étendant de moins l'infini à plus l'infini. Supposez que les positions des dipôles soient fixes et que chaque dipôle, de moment de grandeur p, soit libre de pointer dans n'importe quelle direction, comme s'il était monté sur un pivot complètement libre. Voici la question : quelle est la disposition d'énergie la plus basse ? Bien sûr, si vous avez une chaîne infinie, l'énergie totale pourra bien être infinie, mais nous nous intéressons à l'énergie par unité de la chaîne. Comparez les dispositions suivantes du point de vue de l'énergie moyenne par dipôle. Quelle est celle qui a l'énergie la plus grande ? Quelle est celle qui a l'énergie la plus petite ?
 - a) ... $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$... b) ... $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$...
 - c) $\dots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots$
 - d) $\dots \leftrightarrow \rightarrow \leftarrow \rightarrow \leftarrow \rightarrow \leftarrow \dots$
- 9.27 Trouvez la différence d'énergie entre une chaîne infinie de dipôles disposés comme ceci : ... $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$... et une autre dans laquelle tous les dipôles, situés à droite d'un certain point b, sont renversés $\dots \rightarrow \rightarrow b \leftarrow \leftarrow \leftarrow$...La différence d'énergie est l'énergie

associée à la frontière <i>b</i> entre les deux domaines	Note mathématique : $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$
--	--

Comparez, approximativement, l'énergie d'une chaîne avec deux telles frontières, assez éloignées l'une de l'autre, telle que celle-ci $\dots \rightarrow \rightarrow b \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow b \rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots$ à l'énergie d'une chaîne dans laquelle les deux frontières sont aussi rapprochées l'une de d'énergie, diriez-vous que les deux frontières tendent à se repousser ou à s'attirer l'une l'autre ?Y a-t-il une façon de produire un tel renversement de manière plus économique, c'est-à-dire avec une dépense d'énergie plus faible que dans le renversement abrupt considéré jusqu'ici? Comparez les schémas suivants de renversement. Vous pourrez peut-être concevoir une frontière encore moins chère.

- a) (Abrupte) : ... $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \dots$ $\begin{array}{c} \dots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \leftarrow \leftarrow \dots \\ \dots \rightarrow \rightarrow \uparrow \leftarrow \leftarrow \dots \end{array}$ b)
- c)

9.28 On appelle formule de Clausius-Mosotti : la relation exprimée par l'équation 9.72. On l'exprime d'habitude en fonction de la

constante diélectrique relative $\varepsilon_{\rm r}$. Montrez qu'une formule équivalente est $\frac{3\varepsilon_0}{N} \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right) = \alpha$ On a tabulé ci-dessous des

données prises dans un article de Michels, Jaspers et Sanders, (Physics, 1, 627 (1934)), qui ont mesuré la constante diélectrique relative de l'azote pur à des pressions et à des températures variées.

Température (°C)	23,8	23,8	23,8	23,8
Pression (atmosphères)	1,02	57,5	221,6	1011,6
Densité (g/cms)	0,00118	0,06604	0,2361	0,5780
Constante diélectrique relative	1,00052	1,03109	1,11413	1,29633

Cela est-il en bon accord avec la formule de Clausius-Mosotti ?

9.29 La catastrophe prédite par l'équation 9.72 dans le cas où $N\alpha/3\varepsilon_0 \ge 1$ peut-elle se produire en réalité? Pour voir ce que cela implique, considérez un « cristal » composé de deux atomes identiques seulement, A et B, fixés d'une certaine façon à d m l'un de l'autre. Montrez que si A est polarisé parallèlement au segment AB, il fournit en B un champ qui tend à polariser B dans la même direction. Est-il concevable que le système puisse se forcer à prendre un état polarisé dans lequel le champ A maintienne la polarisation de B, et vice-versa ? Discutez cette question de deux points de vue. Premièrement, calculez la distance à laquelle on prédirait que cela doive se produire pour deux atomes A et B ayant chacun la polarisabilité α . Comment se compare-t-elle aux tailles qu'on peut attendre pour A et B ? Deuxièmement, considérez l'énergie du système polarisé hypothétique.

9.30 Pour focaliser des ondes courtes radio, on a fabriqué des diélectriques artificiels en montant de petites sphères de métal clans une matrice de mousse de plastique, comme des atomes dans un réseau cristallin. La mousse elle-même ne sert qu'à maintenir les sphères en place et a un effet électrique négligeable. On peut calculer la polarisabilité d'une sphère métallique comme on le décrit dans le problème 9.9. Trouvez la constante diélectrique relative d'un réseau cubique de sphères métalliques de 2,5 cm de diamètre dont les centres sont deux à deux espacés de 5 cm. Est-il possible d'avoir $N\alpha/3\varepsilon_0 > 1$ pour une telle disposition ? Vous aurez le plus de chances avec un réseau cubique à faces centrées, l'un des empilements où les sphères sont les plus proches. Quel théorème serait violé si un réseau de sphères métalliques présentait une polarisation induite spontanée ?

Chapitre 10.

- 10.14 Dans la discussion de la figure 10.9, nous avons supposé pour simplifier, que le champ **B** avait une symétrie axiale, ce qui implique que B_r a une grandeur constante le long de la boucle. Montrez que ce n'est pas réellement nécessaire; c'est-à-dire, montrez que nous obtenons l'équation 10.18 même si B_r n'est pas constant le long de la boucle.
- 10.15 Un solénoïde cylindrique contient un enroulement sur une seule couche de rayon r_0 . Il est si long qu'on peut considérer que près d'un bout le champ est celui d'un solénoïde semi-infini. Montrez que le point de l'axe où un petit échantillon paramagnétique subira la force la plus grande est situé à une distance de $r_0/\sqrt{15}$ à l'intérieur en partant du bout.
- 10.16 Dans le cas d'un dipôle électrique constitué par deux charges Q et Q séparées d'une distance s, le volume de la région proche, où le champ diffère essentiellement de celui d'un dipôle idéal, est de l'ordre de s^3 . Dans cette région, l'intensité du champ est proportionnelle à Q/s^2 , en des points similaires quand on fait varier s. Le moment dipolaire est p = Qs, ainsi lorsqu'on diminue s en gardant p constant, que devient le produit du volume par l'intensité du champ? Développez l'argument correspondant pour le champ magnétique d'une boucle de courant. Voici la morale : si nous nous intéressons à la moyenne spatiale du champ dans n'importe quel volume contenant des dipôles, on ne peut pas oublier la différence essentielle entre les « intérieurs » des dipôles électriques et magnétiques, même si par ailleurs nous traitons les dipôles comme étant infinitésimaux.
- 10.17 Un sous-marin à coque en acier produit une perturbation locale du champ magnétique terrestre, qui rend possible la détection des sous-marins par un instrument sensible à de très faibles variations du champ. Supposons que nous ayons un magnétomètre que l'on remorque à une certaine distance d'un avion (pour le soustraire à la perturbation de l'avion lui-même) et qui soit capable d'indiquer une fluctuation de 10⁻⁵ dans le champ ambiant. En supposant qu'on ait désaimanté la coque du sous-marin, ce qui supprimerait toute aimantation rémanente, elle présente encore pour le champ terrestre un milieu magnétique anormal. Nous pouvons nous attendre à ce que la coque produise un moment dipolaire induit suffisant pour modifier le champ terrestre, à une distance égale à la longueur du bateau, d'une quantité en gros égale à la grandeur du champ non perturbé. Dans ce cas, quelle est la distance maximum à laquelle on peut espérer détecter? Supposez que par quelque amélioration de la conception, on puisse augmenter la sensibilité du magnétomètre par un facteur deux. Comment cela affecterait-il le nombre d'avions-kms nécessaires pour fouiller une surface d'océan donnée ? (En réalité, le problème n'est pas aussi simple que cela l'implique. Les fluctuations du champ produisent un « niveau de bruit » qui finira par masquer l'anomalie produite par le sous-marin, quelle que soit la sensibilité du magnétomètre. Une source de telles fluctuations est très simple : les vagues de l'océan déplacent de l'eau de mer dans le champ terrestre; l'eau de mer est un conducteur; des courants s'écoulent, produisant des champs magnétiques.)
- 10.18 Nous avons deux sphères creuses en verre de 1,25 cm de diamètre. L'une contient un petit barreau aimanté de 1 cm de longueur environ. L'autre contient un électret barreau d'une matière qui a une polarisation électrique permanente. On pourrait aussi bien le décrire comme étant un barreau constitué par un isolant excellent avec une charge positive collée à un bout et une charge négative à l'autre bout. Il se trouve que le moment dipolaire magnétique du premier objet a en gros la même grandeur que le moment dipolaire électrique du second. Considérez le problème de détecter la présence de l'un ou de l'autre si quelqu'un l'a mis dans son poing fermé, comme dans « dans quelle main ? » Comment expliqueriez-vous la différence à quelqu'un qui ne connaît pas plus de physique que vous, avant de suivre ce cours?
- 10.19 On place un moment magnétique de grandeur *m* dans un champ magnétique homogène d'intensité B_0 , avec le moment dipolaire dirigé en sens opposé au champ. Montrez que dans le champ combiné, il y a une certaine surface sphérique, centrée sur le dipôle, à travers laquelle aucune ligne de champ ne passe. Le champ extérieur, peut-on dire, a été repoussé à l'extérieur de cette

sphère. On a tracé sur la figure les lignes de champ à l'extérieur de la sphère. A quoi ressemblent les lignes de champ à l'intérieur de la sphère ? Quelle est l'intensité du champ immédiatement à l'extérieur de la sphère, à l'équateur ? En ce qui concerne seulement son effet sur le champ extérieur, on pourrait remplacer le dipôle par des courants s'écoulant sur la surface sphérique, si nous pouvions produire exactement la bonne distribution de courant. Quel serait le champ à l'intérieur de la sphère clans ce cas? Pourquoi pouvez-vous en être sûr? (C'est une configuration importante dans l'étude de la supraconductivité. En fait, une sphère supraconductrice repousse tout le champ qui était à l'intérieur.)

- 10.20 Considérez la sphère d'aimantation uniforme que montre la figure. En découpant la sphère en tranches de même épaisseur, vous pouvez montrer qu'elle est équivalente à la bobine parcourue par un courant de la partie (*c*) de la figure. En utilisant cette équivalence, discutez la forme du champ magnétique d'une telle bobine, à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de la bobine. Comparez la bobine à la couche tournante chargée du problème 10.6.
- 10.21 Ecrivez les équations de Maxwell telles qu'elles se présenteraient si nous avions des charges magnétiques et des courants de charge magnétique aussi bien que des charges électriques et des courants électriques. Inventez tous les nouveaux symboles dont vous avez besoin et définissez avec soin ce qu'ils représentent. Faites spécialement attention aux signes + et -.
- 10.22 Dans la section 10.5, illustrée par la figure 10.12, nous avons discuté ce qui se passe quand on applique un champ magnétique perpendiculairement a l'orbite d'une particule chargée qui tourne sur un cercle sous l'influence de quelque autre force. Dans ce problème, vous trouverez ce qui se passe quand le champ se trouve dans le plan de l'orbite. Tout ce que vous avez à faire, est de remplir les blancs dans l'analyse qui suit, en réfléchissant avec soin à chaque étape. Une particule de masse M, de charge q, tourne à la vitesse r sur une orbite circulaire dans le plan xz. Elle est maintenue sur cette orbite par une certaine force centrale dont l'origine ne nous intéresse pas; voir la partie (a) de la figure. Le moment cinétique L, associée à ce mouvement, est un vecteur , de grandeur L =_____. (Tracez-le sur le diagramme.) Nous appliquons maintenant le champ dans la direction magnétique $\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{z}} B$ comme sur la partie (b) de la figure. La particule se déplaçant encore dans le plan xz, cela créera une nouvelle force, de grandeur et de direction qui agira sur la particule. (Indiquez-la sur le diagramme.) Nous supposons que cette force est si faible qu'elle ne modifie que très graduellement le mouvement de la particule. Nous devons donc prendre la moyenne de l'effet sur une orbite circulaire complète. La moyenne de la force est nulle, mais celle du couple qui en résulte ne l'est pas. Le moment du couple instantané autour de l'axe ______ a la grandeur ____ : sa moyenne sur un tour complet est _____. Par conséquent, le moment moyen est un vecteur N, de grandeur N =_ et de direction ______. Comme le moment est égal au taux de variation du moment cinétique, cela nous dit qu'au cours du temps le vecteur moment cinétique L va ______. En comparant cela avec ce qui s'était passé quand l'orbite était perpendiculaire au champ (fig. 10.12), nous observons que _ _____. Dans le cas présent, le mouvement de la particule, tel qu'un observateur situé loin sur l'axe z positif le verrait, ressemblerait à peu près à ceci : (Faites un schéma.)
- 10.23 Dans la section 10.5, nous avons trouvé que le rayon de l'orbite d'une particule chargée ne varie pas quand on applique un champ extérieur uniforme **B** seule la vitesse orbitale varie. Mais cela n'est vrai que si $\Delta v \vee r_o$, ce qui revient à dire que la force magnétique qvB est beaucoup plus petite que la force F_o qui lie la particule à un certain centre d'attraction. Un cas intéressant où il est évident qu'une telle hypothèse ne, *peut pas* s'appliquer, est celui d'un électron libre, qui n'est lié à rien. Qu'arrive-t-il dans ce cas ? Pour l'étudier, partez avec une particule de charge, q, de masse M, se déplaçant sur un cercle dans un champ magnétique uniforme **B**. C'est la vieille situation « cyclotron », que gouverne la condition $Mv^2/r = qvB$. Supposez qu'on varie B lentement. Un champ électrique induit va accélérer la particule dans la direction du mouvement, et la relation dv = (qr/2M)dB va s'appliquer exactement comme dans l'autre cas. Montrez que cela et la condition cyclotron conduisent à une relation entre B et r. Prouvez que (I) le moment magnétique de l'orbite reste constant quand B varie. (2) la quantité de flux Φ du champ extérieur **B** qui est contenue à l'intérieur de l'orbite reste constant quand B varie. (2) la quantité de flux Φ du champ extérieur **B** qui est contenue à l'intérieur de une faible fraction de sa grandeur pendant un tour. Alors la trajectoire de la particule sera presque circulaire, et chaque tour sera presque fermé, de sorte que parler de moment orbital et de flux compris dans l'orbite aura un sens.)
- 10.24 Les conclusions (1) et (2) du problème 10.23 sont particulièrement utiles pour prédire les trajectoires d'électrons ou d'ions dans des champs magnétiques constants dans le temps mais qui varient graduellement dans l'espace, par exemple celles des électrons piégés dans la ceinture de Van Allen autour de la terre. Selon notre condition du problème 10.23 sur la variation lente de *B*, nous considérons ici des champs dont la variation spatiale est relativement faible sur une distance égale au « rayon cyclotron » de la particule en question. Considérez le cas particulier d'un champ magnétique qui pointe en général dans la direction *z* négative, mais dont l'intensité croît dans la direction *z* positive, comme l'indiquent les lignes de champ sur la figure Une particule positive traverse le plan *xy* comme on le montre, en se déplaçant à la vitesse v_0 légèrement orientée vers le haut. Si nous regardons cela à partir d'un repère qui se déplace dans la direction *z* à la vitesse v_{0z} , nous voyons un champ extérieur dont la composante B_z à travers l'orbite croît. Maintenant, utilisez les conclusions du problème 10.23 pour discuter et expliquer le comportement ultérieur de la particule comme l'indique la figure Remarquez qu'il y a une différence dans ce cas : Il semble y avoir une force vers le bas appliquée à la particule. Comment en tenez-vous compte? En vous rappelant qu'un champ magnétique statique ne peut pas fournir de travail à une particule chargée, discutez la variation des différentes composantes de la vitesse, vues du repère du laboratoire.

Qu'auriez-vous besoin de savoir pour prédire jusqu'où la particule fera un mouvement en spirale sur la surface en forme de trompette avant de faire demi tour et de revenir?

10.25 Quelqu'un qui connaît un peu la théorie quantique de l'atome pourrait être troublé par un point de notre analyse de la section 10.5 de l'effet d'un champ magnétique sur la vitesse orbitale d'un électron atomique. Quand la vitesse varie, tandis que r reste constant, le moment cinétique mvr varie. Mais le moment cinétique d'une orbite électronique doit être précisément un multiple entier de la constante $h/2\pi$, h étant la constante quantique universelle, la constante de Planck. Comment mvr peut-il varier sans violer la loi quantique fondamentale ? La solution de ce paradoxe est importante pour la mécanique quantique des particules chargées, mais elle n'est pas particulière à la théorie quantique. Quand nous considérons la conservation de l'énergie pour une particule qui porte la charge q, se déplacant dans un champ électrostatique extérieur **E**, nous incluons toujours, en plus de; l'énergie cinétique $1/2mv^2$, l'énergie potentielle qV, où V est le potentiel électrique scalaire à l'emplacement de la particule. Nous ne devrions pas être surpris de trouver que, lorsque nous considérons la conservation de la quantité de mouvement, nous devons considérer non seulement la quantité de mouvement ordinaire Mv mais aussi une quantité faisant intervenir le potentiel vecteur A du champ magnétique. Il se trouve que l'on doit prendre comme quantité de mouvement $M\mathbf{v} + q\mathbf{A}$, où \mathbf{A} est le potentiel vecteur du champ extérieur évalué à l'emplacement de la particule. Nous pourrions appeler $M\mathbf{v}$, « quantité de mouvement cinétique » et $d\mathbf{A}$ « quantité de mouvement potentielle ». (En relativité, l'inclusion du terme qA est une étape évidente, car exactement comme l'énergie et la quantité de mouvement constituent un « quadri-vecteur », il en est de même pour V et A, les potentiels scalaire et vectoriel du champ.) Le moment cinétique qui nous concerne ici doit donc être, non pas juste $\mathbf{r} \wedge (M\mathbf{v})$ mais $\mathbf{r} \wedge (M\mathbf{v} + q\mathbf{A})$ Retournez maintenant au cas d'une charge qui tourne au bout de la corde, sur la figure 10.12. Vérifiez d'abord que le potentiel vecteur approprié pour un champ **B** dans la direction z négative est $\mathbf{A} = B/2$ (- $\hat{\mathbf{x}} y + \hat{\mathbf{y}} \mathbf{x}$). Trouvez ensuite ce qui arrive au moment cinétique $\mathbf{r} \wedge (M\mathbf{v} + q\mathbf{A})$ quand on applique le champ.

Appendice

Une note sur le système CGS de Gauss d'unités électriques

Le texte original du présent ouvrage utilise un système d'unités électriques qu'on appelle *système CGS de Gauss*. Ce système utilise les unités mécaniques CGS fondées sur le *centimètre, le gramme et la seconde*. L'unité CGS de force est la *dyne*, définie comme la force qui fournit une accélération de 1 cm/sec² quand on l'applique à une masse de 1 gramme. L'unité d'énergie correspondante est le dyne-cm, ou *erg*, qui est équivalent à 10^{-7} joules.

Dans ce système, on définit l'unité de charge électrique comme étant telle que deux charges unités situées à 1 cm de distance produisent une force de 1 dyne. Autrement dit, la loi de Coulomb s'écrit

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{12}}{r_{12}^2} \tag{1}$$

On n'a pas de facteur $1/4\pi\varepsilon_0$ comme dans le système MKS. Mais la définition de l'unité de charge n'est plus la même que celle qui a été donnée dans le chapitre 1. On l'obtient à partir de la loi de Coulomb au lieu de l'obtenir à partir de la définition du courant au moyen de la force entre deux fils parallèles parcourus par des courants. Il faut de plus remarquer qu'on n'a pas inclus de facteur $1/4\pi$, on dit alors qu'on n'a pas un système d'unités « rationalisé ». Tout ce que le mot « rationalisé » veut dire est que l'introduction de $1/4\pi$ dans la loi de Coulomb supprime des facteurs 4π dans d'autres formules.

En comparant cet énoncé de la loi de Coulomb et la définition du Coulomb dans le système MKSA, on voit que 1 unité de charge électrostatique (qu'on représente par 1 ues) est équivalente à $1/(2,998 \times 10^9)$ Coulomb.

On mesure le potentiel électrostatique défini par V = q/r, en statvolts, (1 statvolt = 1 ues/1 cm = 299,8 volts) et le champ électrostatique (E = V/r) en statvolt/cm.

L'unité de courant est bien sûr 1 ues/sec. La force par centimètre de longueur sur chacun de deux fils parallèles, situés à 1 cm de distance, parcourus par un courant *I* mesuré en ues/cm vaut

$$f(\text{dyne/cm}) = \frac{2I^2 (\text{ues/s})^2}{rc^2 (\text{cm}^3 / s^2)}$$
(2)

où c est la vitesse de la lumière dans le vide au lieu de

$$f(\text{newtons/cm}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I^2 (\text{Amp})^2}{r(\text{m})}$$
(3)

On peut vérifier que ces deux formules concordent à condition qu'on ait la relation $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

On définit le champ magnétique B en écrivant la force de Lorentz

$$\mathbf{F} (dyne) = q\mathbf{E} + q \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B}$$
(4)

où **v** est la vitesse d'une particule en cm/s, q sa charge en ues et c la vitesse de la lumière dans le vide. Cela requiert une nouvelle unité pour B. On l'appelle le *gauss*. Un gauss est exactement équivalent à 10⁻⁴ tesla. Dans ce système le champ auxiliaire **H** est exprimé dans les mêmes unités que **B** bien qu'on lui donne un nom différent. Dans le vide

$\mathbf{B} = \mathbf{H}$ (gauss) (oersted)

La relation entre \mathbf{H} et le courant libre est

$$\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{I_{\text{libre}}}{c} \tag{6}$$

où Ilibre est le courant libre en ues/sec compris dans la boucle le long de laquelle on calcule l'intégrale de gauche.

Dans le vide, les équations de Maxwell prennent la forme

div
$$\mathbf{E} = 4\pi\rho$$
 rot $\mathbf{E} = -\frac{1\partial \mathbf{B}}{c\partial t}$
div $\mathbf{B} = 0$ rot $\mathbf{B} = \frac{1\partial \mathbf{E}}{c\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$ (7)

Si vous comparez cela à notre version MKSA, dans laquelle c n'apparaît pas clairement, vous verrez que ces équations (11) impliquent une vitesse *c* pour les ondes électromagnétiques dans le vide qui doit être égale à $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. C'est-à-dire que

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \tag{8}$$

On voit d'après les différentes façons de définir les unités que si on avait une nouvelle détermination de la vitesse de la lumière, μ_0 ne changerait pas mais que ε_0 devrait changer.

On donne ci-dessous une liste partielle des unités CGS de Gauss avec leurs équivalents en unités MKSA.

Le système CGS est moins commode pour l'ingénieur, mais il présente des avantages pour l'étude de la physique fondamentale des champs et de la matière. Dans ce système les équations de Maxwell sont symétriques entre les champs magnétique et électrique **B** et **E**, alors que les équations de Maxwell écrites dans le système MKSA ont l'air symétriques en **E** et **H**. Or, comme nous l'avons montré dans le chapitre 10, c'est **B** et non **H** qui est le champ magnétique fondamental dans la matière. Ce n'est pas une question de définitions ou d'unités, mais un fait de la nature, qui reflète l'absence de charge magnétique. On peut considérer que le système MKSA tel qu'il a été construittend à obscurcir soit la symétrie fondamentale du vide, soit l'asymétrie essentielle des sources. Mais un lecteur averti ne s'attachera pas à l'expression un peu particulière que peuvent prendre les lois de la Physique dans tel ou tel système d'unités (plus ou moins arbitraire), mais à leur structure générale.

Crandour	Symbole	Unité dans le système CGS de	Équivalent dans le système
Glandeur		Gauss	MKSA rationalisé
Distance	S	centimètre	10^{-2} m
Force	\mathbf{F}	dyne	10 ⁻⁵ newtons
Travail, énergie	W	erg	10 ⁻⁷ joules
Charge	q	ues	$1/(2,998 \times 10^9)$ Coulomb
Courant	Ι	ues/s	$1/(2,998 \times 10^9)$ Ampère
Potentiel électrique	V	statvolt	299,8 volts
Champ électrique	E	statvolt/cm	29 980 volts) cm
Résistance	R	s/cm	$1/(1,139 \times 10^{-12})$ ohms
Champ magnétique	В	gauss	10^{-4} tesla
Flux magnétique	${\Phi}$	gauss-cm ²	10^{-8} weber (tesla-m ²)
Champ auxiliaire	Η	oersted	$1/(4 \pi \times 10^{-3})$ ampères/m