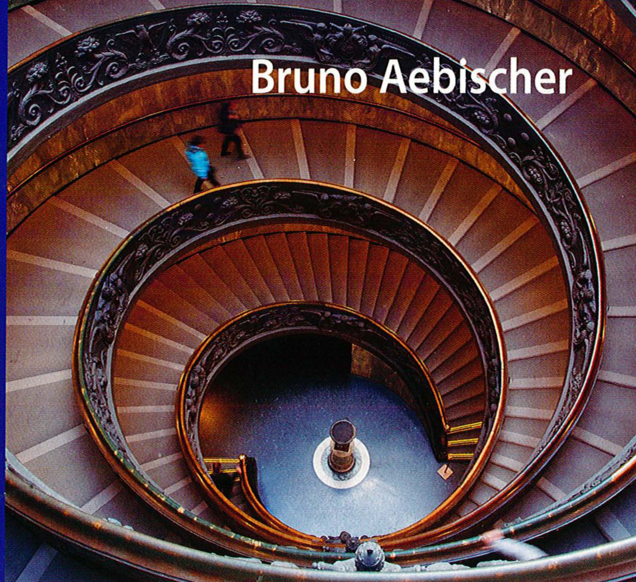


Bruno Aebischer

LICENCE 3
MATHÉMATIQUES

Géométrie

Géométrie affine, géométrie euclidienne & introduction à la géométrie projective

- Cours complet
- Près de 100 exercices
- Tous les corrigés détaillés

Vuibert

Géométrie

Bruno Aebischer

Géométrie

Géométrie affine, géométrie euclidienne & introduction à la géométrie projective

Cours & exercices corrigés

LICENCE 3
MATHÉMATIQUES

Vuibert

Du même auteur chez le même éditeur

Introduction à l'analyse. *Cours et exercices corrigés. Licence 1,* 288 pages.

Analyse. *Fonctions de plusieurs variables & géométrie analytique. Cours et exercices corrigés. Licence 2,* 432 pages.

et des dizaines d'autres livres de référence, d'étude ou de culture :
mathématiques, informatique et autres spécialités scientifiques

www.vuibert.fr

En couverture : Escalier en double spirale de Giuseppe Momo, Vatican.
© Sylvain Sonnet/Corbis

Maquette intérieure : Sébastien Mengin/Edilibre.net
Composition et mise en page de l'auteur
Couverture : Linda Skoropad/Prescricom

ISBN 978-2-311-00276-8

Registre de l'éditeur : 582

À Anne-Marie

Table des matières

Avant-propos

CET OUVRAGE, destiné aux étudiants de troisième année de licence de mathématiques, présente toutes les notions de géométrie dont on peut avoir besoin à ce niveau.
Mais il sera également très utile aux candidats aux concours de l'enseignement (CAPES et Agrégation de mathématiques) pour qui la géométrie est indispensable.
La particularité de cet ouvrage est qu'il essaie de ne pas trop faire de raccourci, les raisonnements étant en général parfaitement détaillés. Il est ainsi un outil idéal pour un étudiant isolé qui voudrait acquérir, comprendre et dominer par lui-même toutes les notions abordées.
Nous avons aussi fait le choix de nous placer systématiquement dans le cadre d'un corps de base réel. Nous avons en effet estimé qu'il était plus facile de commencer par bien « voir » les propriétés dans le cadre le plus concret, c'est-à-dire le cadre réel. Il est néanmoins possible, pour la plupart des propriétés, de changer le corps de base sans aucune modification, en prenant par exemple $\mathbb{C}$ ou un corps fini. Le lecteur qui en éprouverait le besoin peut ainsi, dans un deuxième temps, reprendre sa lecture en se plaçant dans un corps quelconque.

Ce manuel est constitué de six chapitres de cours très détaillés, rédigés dans un style clair et accessible :

1. un chapitre qui traite de la structure d'espace affine et présente rigoureusement le cadre affine dans lequel se placent la plupart des problèmes de géométrie ;
2. un chapitre sur les applications affines et leurs propriétés, qui se termine sur la présentation des grands théorèmes classiques de la géométrie : Thalès, Céva, Ménélaüs, etc. ;
3. un chapitre qui introduit l'espace universel, justifie toutes les notations qui semblent abusives au début, et permet une présentation très simple du calcul barycentrique ;
4. un chapitre qui donne les rudiments de la géométrie projective, illustre l'intérêt de l'espace universel, et s'achève sur la démonstration de deux grands théorèmes de la géométrie affine : ceux de Pappus et Desargues ;
5. un chapitre important sur la géométrie euclidienne dans lequel, après une révision rapide des propriétés d'un espace vectoriel euclidien, on étudie la structure affine euclidienne et en particulier les isométries affines ;

6. un dernier chapitre qui présente les coniques, étudiées dans les différents cadres possibles (affine, projectif ou euclidien). Quelques propriétés en sont données, sans pour autant prétendre être exhaustif tant ce sujet est large.

À la fin de chaque chapitre, est proposée une liste d'exercices dont la difficulté est très progressive.
Tous les exercices sont corrigés. Leurs solutions sont regroupées dans un chapitre distinct, situé en fin d'ouvrage. Le lecteur est ainsi incité à essayer de résoudre seul les exercices proposés, sans se précipiter sur les solutions, qui sont toujours très développées et dont la rédaction se veut pouvoir servir de modèle.
C'est à partir d'un cours par correspondance, qui a fait la preuve de son efficacité avec des générations d'étudiants, que ce livre a été réalisé.
Nous souhaitons une bonne réussite à tous nos lecteurs.
Je tiens à remercier tout particulièrement Anne-Marie Aebischer, dont le cours de géométrie m'a servi d'inspiration en particulier pour la rédaction du sixième chapitre.

CHAPITRE 1

Espaces affines

$\overrightarrow{E}$ désigne un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ commutatif de caractéristique différente de 2 (dans la plupart des cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et de dimension finie n.

1.1 Espace affine

1.1.1 Définition

Définition 1.1 Soit E un ensemble non vide.
On dit que E est un espace affine sur $\overrightarrow{E}$ lorsqu'il existe une loi de composition externe (notée $+$) de $E \times \overrightarrow{E}$ vers E qui vérifie
(i) $\forall A \in E$, $A + \overrightarrow{0} = A$;
(ii) $\forall A \in E$, $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$, on a $(A + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = A + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$;
(iii) $\forall A \in E$, l'application $\overrightarrow{u} \longmapsto A + \overrightarrow{u}$ est une bijection de $\overrightarrow{E}$ sur E.

Les éléments de E sont en général appelés des points, les éléments de $\overrightarrow{E}$ sont des vecteurs.
On dit que $\overrightarrow{E}$ est l'*espace vectoriel associé* à E, ou encore la *direction* de E.

Remarque : Attention, le symbole $+$ n'a pas la même signification selon qu'il est entre un point et un vecteur, ou entre deux vecteurs. Dans ce dernier cas, il s'agit de la classique addition des vecteurs, celle qui fait que $(\overrightarrow{E}, +)$ est un groupe abélien. Entre un point et un vecteur, il s'agit de la loi de composition externe dont on a besoin pour définir un espace affine.
En particulier, dans (ii), notez bien que les deux sortes de $+$ cohabitent : il y a trois $+$ qui sont des lois de composition externes, et un $+$ qui est celui de l'addition entre vecteurs (au fait, lequel ?) [1].

[1] Les trois premiers $+$ sont des lois de composition externe, le dernier, entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est bien sûr le $+$ de l'addition des vecteurs.

Un espace affine n'est donc pas seulement un ensemble : c'est une structure, c'est-à-dire ici la donnée de l'ensemble, de l'espace vectoriel et de la loi de composition externe $+$ (ou de l'action de groupe). En fait, en pratique, on confond souvent l'espace affine $(E, \overrightarrow{E}, +)$ avec l'ensemble sous-jacent E, et il n'y a pas d'inconvénient à le faire. Pour préciser de façon concise la direction d'un espace affine, nous noterons $(E, \overrightarrow{E})$ l'espace affine E dont la direction est $\overrightarrow{E}$.

Remarque : En utilisant le vocabulaire des groupes opérant sur un ensemble (ou « action de groupe »), cette définition peut être traduite savamment par :
Le groupe additif $(\overrightarrow{E}, +)$ opère librement et transitivement sur $\overrightarrow{E}$ (il s'agit d'une opération à droite).

Notation

Lorsque $\overrightarrow{u}$ est l'unique vecteur tel que $B = A + \overrightarrow{u}$, on notera $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A$.

1.1.2 Propriétés « immédiates »

- Pour tout $A, B, C \in E$, on a (relation de Chasles) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
  On peut écrire cette relation sous la forme « triviale » : $(B - A) + (C - B) = C - A$.
  En appliquant (ii) puis la définition de $\overrightarrow{XY}$, on a
  $A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{BC} = C = A + \overrightarrow{AC}$.
  On peut conclure grâce au fait que l'application $\overrightarrow{x} \longmapsto A + \overrightarrow{x}$ est injective, que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- Pour tout $X \in E$, on a $\overrightarrow{XX} = \overrightarrow{0} = X - X$.
  C'est une conséquence immédiate de $X + \overrightarrow{0} = X$ et de la définition de $\overrightarrow{XX}$.
- Pour tous $X, Y \in E$, on a $\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX}$ (« trivialement » : $Y - X = -(X - Y)$.)
  Il suffit d'appliquer la relation de Chasles : $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{XX} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YX}$.
- Pour tous $X, Y, Z \in E$, on a $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{ZY}$ (« trivialement » : $(Y - X) - (Z - X) = Y - Z$.)
  conséquence immédiate de la relation de Chasles $\overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{XY}$.

On peut retenir que toutes les simplifications « triviales » dans les soustractions de points sont légitimes. C'est d'ailleurs ce qui justifie a posteriori qu'il n'est pas gênant d'utiliser ces notations $+$ et $-$. Nous verrons une autre légitimation plus loin, avec le plongement de l'espace affine et de son espace vectoriel associé dans un « espace vectoriel universel ».

1.1.3 Translations

Proposition 1.2 (et définition) Pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, l'application $A \longmapsto A + \overrightarrow{u}$ est une bijection de E dans lui-même appelée translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. On la note $t_{\overrightarrow{u}}$.

Preuve Pour tout $B \in E$, on peut considérer le point $A = B + (-\overrightarrow{u})$;
en utilisant (ii) puis (i) on a $A+\overrightarrow{u} = (B+(-\overrightarrow{u}))+\overrightarrow{u} = B+(-\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}) = B+\overrightarrow{0} = B$, donc $t_{\overrightarrow{u}}$ est surjective.
Si $t_{\overrightarrow{u}}(A) = t_{\overrightarrow{u}}(A') = B$, on a $A+\overrightarrow{u} = A'+\overrightarrow{u}$, donc $(A+\overrightarrow{u})+(-\overrightarrow{u}) = (A'+\overrightarrow{u})+(-\overrightarrow{u})$ et on en déduit $A = A + \overrightarrow{0} = A + (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}) = A' - (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}) = A' + \overrightarrow{0} = A'$ et $t_{\overrightarrow{u}}$ est injective. □

Proposition 1.3 L'ensemble des translations de E, muni de la composition des applications est un groupe commutatif isomorphe au groupe additif $(\overrightarrow{E}, +)$. On le notera $\mathcal{T}(E)$. Son élément neutre est $\mathrm{id}_E = t_{\overrightarrow{0}}$. L'application réciproque de $t_{\overrightarrow{u}}$ est $(t_{\overrightarrow{u}})^{-1} = t_{-\overrightarrow{u}}$.

Preuve On montre que $\mathcal{T}(E)$ est un sous-groupe du groupe des bijections de E ; la propriété (ii) montre que $t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$, donc $\circ$ est interne dans $\mathcal{T}(E)$; (i) montre que $t_{\overrightarrow{0}} = \mathrm{id}_E$ et on a déjà vu que $B = t_{\overrightarrow{u}}(A) \iff A = t_{-\overrightarrow{u}}(B)$, donc $(t_{\overrightarrow{u}})^{-1} = t_{-\overrightarrow{u}} \in \mathcal{T}(E)$. L'isomorphisme entre $(\mathcal{T}(E), \circ)$ et $(E, +)$ est une conséquence immédiate de (ii) et de (iii). □

Point de vue équivalent

On pourrait (nous ne le ferons pas) de manière équivalente définir un espace affine comme un ensemble E pour lequel il existe une application θ : $\begin{cases} E \times E \longrightarrow \overrightarrow{E} \\ (A, B) \longmapsto \theta(A, B) \end{cases}$
telle que
(i') $\forall A, B, C \in E$, on a $\theta(A, B) + \theta(B, C) = \theta(A, C)$.
(ii') $\forall A \in E$, l'application $\theta_A : M \longmapsto \theta_A(M) = \theta(A, M)$ est une bijection de E sur $\overrightarrow{E}$.

Exemple : La structure affine d'un espace vectoriel

C'est un exemple standard qu'on utilise très souvent.
Soit V un espace vectoriel. On prend $E = V = \overrightarrow{E}$, et on définit la loi externe $+$ comme étant la loi interne $+$ de V. Il est clair que tous les axiomes (i), (ii) et (iii) sont vérifiés, et V est bien un espace affine sur V.
En particulier, si x, y sont deux éléments de V, le vecteur $\overrightarrow{xy}$ est exactement égal à $y - x$ (on utilise ici le $-$ de l'espace vectoriel V). En effet, $y - x$ est bien l'unique vecteur u de v tel que $y = x + u = x + (y - x)$.
Les premiers exemples « standards » d'espaces affines sont donc $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$.

1.1.4 Dimension

Définition 1.4 Soit E un espace affine sur l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$. On dit que E est de dimension finie lorsque $\overrightarrow{E}$ est un espace vectoriel de dimension finie. La dimension de l'espace affine E est égale à la dimension de son espace vectoriel associé $\overrightarrow{E}$.

Par exemple, $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$ sont en tant qu'espaces affines, également de dimensions finies respectivement égales à $1, 2, 3, \ldots, n$.
Dans tout ce qui suit, on ne considérera plus que des espaces affines de dimension finie.

Définition 1.5 Un *repère cartésien* de l'espace affine E est un couple $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ où O est un point de E et $\mathscr{B}$ une base de $\overrightarrow{E}$. Si $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$, on notera aussi $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$.
Les *coordonnées* d'un point M dans le repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ sont exactement les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM} = M - O$ dans la base $\mathscr{B}$.

Par exemple, si V est un espace vectoriel dont $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base, si x_0 est un élément de V, un repère de V considéré comme espace affine sur lui-même est $\mathscr{R} = (x_0, \mathscr{B})$, et si $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ d'un vecteur x de V, les coordonnées de x considéré comme point de l'espace affine V dans le repère $\mathscr{R}$ sont $(\lambda_1 - \lambda_1^0, \lambda_2 - \lambda_2^0, \ldots, \lambda_n - \lambda_n^0)$ si $(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_n^0)$ sont les coordonnées de x_0 (considéré comme vecteur) dans la base $\mathscr{B}$.

Remarquons aussi que les coordonnées de l'origine d'un repère dans ce repère sont le n-uple nul.

Proposition 1.6 Si E est un espace affine de dimension n, d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{E}$, alors la donnée d'un repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ de E définit une bijection entre E et $\mathbb{R}^n$: à tout n-uple $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de scalaires correspond un unique point M de E dont les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ sont égales à $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Preuve Il suffit de considérer l'unique vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ et le point $A = O + \overrightarrow{u}$. □

Nous verrons plus loin que cette bijection est un isomorphisme affine

1.1.5 Vectorialisé d'un espace affine

Dans la définition, la propriété (*iii*) montre que le choix d'un point A d'un espace affine définit aussitôt une bijection entre l'espace affine E et son espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ associé.
Un espace vectoriel est un ensemble dans lequel un élément joue un rôle particulier : $\overrightarrow{0}$.
Dans un espace affine au contraire, a priori, aucun point n'est privilégié. Mais si on particularise un point, puisqu'on met ainsi l'espace affine en bijection avec son espace vectoriel associé, on peut *identifier* l'espace affine dont un point est particularisé avec l'espace vectoriel associé. Un point M est identifié au vecteur $M - A = \overrightarrow{AM}$.

Définition 1.7 Soit $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine.
A étant un point fixé de E, on notera E_A l'espace vectoriel dont l'ensemble sous-jacent est E, et dont les lois $+_A$ et $\cdot_A$ sont définies à partir de celles de $\overrightarrow{E}$ par la bijection $\overrightarrow{u} \longmapsto A + \overrightarrow{u}$.
Si M, N sont deux points de E, on définit leur somme dans E_A par
$M +_A N = A + (M - A) + (N - A) = A + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$.
De même le produit externe dans E_A d'un point M par un scalaire λ est le point
$\lambda \cdot_A M = A + \lambda(M - A) = A + \lambda\overrightarrow{AM}$.
E_A est le *vectorialisé* de E (par le point A)

Il faut bien comprendre que E_A est forcément un espace vectoriel (si vous n'en êtes pas convaincu, essayez de le démontrer) : nous sommes en présence d'un transfert de structure par bijection. Pour additionner deux points, on considère leurs vecteurs images par la bijection $\varphi_A : M \longmapsto M - A$, on additionne ces images, et on prend l'image réciproque par cette bijection de la somme de ces deux images. C'est ce point qui est la somme des deux points. C'est la même démarche qui est utilisée pour la multiplication externe. La structure d'espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ est ainsi transférée à E. Remarquons que φ_A est trivialement un isomorphisme (c'est-à-dire une application linéaire bijective) entre les espaces vectoriels E_A et $\overrightarrow{E}$.

1.2 Sous-espaces affines

1.2.1 Définition

Définition 1.8 Soit E un espace affine d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{E}$. Une partie *non vide* F de E est un *variété affine* de E (ou *sous-espace affine*) s'il existe un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F}$ de $\overrightarrow{E}$ et s'il existe $A \in E$, tel que $F = A + \overrightarrow{F}$

Remarque : $F = A + \overrightarrow{F}$ signifie que $F = \{M \in E \mid \exists \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F} \text{ tel que } M = A + \overrightarrow{u}\}$. Mais pour tout $M \in E$, on sait qu'il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $M = A + \overrightarrow{u}$: c'est le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM} = M - A$. On peut donc écrire que
$F = A + \overrightarrow{F} = \{M \in E \mid M - A \in \overrightarrow{F}\} = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{F}\}$.

Proposition 1.9 Avec les notations précédentes, si $F = A + \overrightarrow{F}$ est une variété affine de E, alors $B \in F \iff B + \overrightarrow{F} = F$

Preuve Si $B \in F$, on a $B - A \in \overrightarrow{F}$. On peut en déduire que pour tout $M \in E$, on a $M \in A + \overrightarrow{F} \iff M - A \in \overrightarrow{F} \iff (M - A) - (B - A) \in \overrightarrow{F} \iff M - B \in \overrightarrow{F} \iff M \in B + \overrightarrow{F}$. On a bien montré que $F = A + \overrightarrow{F} = B + \overrightarrow{F}$.
Réciproquement, si $F = B + \overrightarrow{F}$, alors $B = B + \overrightarrow{0} \in B + \overrightarrow{F} = F$ donc $B \in F$. $\square$

On constate ainsi que $\overrightarrow{F}$ ne dépend pas du choix du point A de F. Cela permet d'introduire la définition suivante :

Définition 1.10 Si F est un sous-espace affine de l'espace affine E, d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{E}$, sa *direction* (ou son sous-espace *directeur*) est le sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F}$ de $\overrightarrow{E}$ tel que $\forall A \in F$, on a $F = A + \overrightarrow{F}$.
Pour préciser de façon concise la direction d'un sous-espace affine de l'espace affine $(E, \overrightarrow{E})$, nous noterons $(F, \overrightarrow{F})$, un sous-espace affine F de direction $\overrightarrow{F}$

Puisque pour tous points A, B d'une variété affine $(F, \overrightarrow{F})$, on a $B - A \in \overrightarrow{F}$, on a par restriction, de façon évidente

Proposition 1.11 Si $(F, \overrightarrow{F})$ est un sous-espace affine de l'espace affine $(E, \overrightarrow{E})$, alors F est un espace affine sur $\overrightarrow{F}$.

Les variétés affines sont donc des exemples d'espaces affines.
On peut donc parler de dimension d'une variété affine : c'est la dimension de sa direction.

Définition 1.12 Une variété affine de dimension 1 est une *droite affine*. Une variété affine de dimension 2 est un *plan affine*. Une variété affine de dimension $n - 1$ dans un espace affine de dimension n est appelé un *hyperplan affine*. Une variété affine de dimension 0, contenant un point A est réduite à ce point.

Deuxième exemple fondamental d'espace affine

Soit V un espace vectoriel et H un hyperplan (vectoriel) de V. Soit u un élément de V n'appartenant pas à H. Considérons l'ensemble $E = u + H$. C'est un sous-espace affine de V (considéré comme espace affine), dirigé par $\overrightarrow{E} = H$, donc c'est un hyperplan affine. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel de V (car $0_V \notin E$).
Cet exemple est fondamental, à cause des trois faits suivants :

- il est plongé dans un espace vectoriel, ce qui permet d'utiliser la « machinerie » algèbre linéaire; en particulier dans la somme $A + \overrightarrow{x}$, $A \in E$, $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$, le signe $+$ a le sens habituel de l'addition de vecteurs dans V, de même que le signe $-$ dans $\overrightarrow{x} = B - A$ désigne une soustraction usuelle;
- ce n'est pas un espace vectoriel, ce qui permet de bien distinguer les notions affines : par exemple la somme $A + B$ de deux points A, B de E, si elle a un sens dans V, ce n'est pas un point de E, ni un « vecteur » de $\overrightarrow{E}$. En particulier, aucun point n'a un statut particulier dans E (alors que dans le premier exemple fondamental d'espace affine, V considéré comme espace affine sur lui-même, le vecteur nul 0_V jouait un rôle particulier) ;
- nous verrons plus loin que cet exemple est « général » : tout espace affine peut être considéré comme hyperplan affine d'un espace vectoriel dit « universel ».

1.2.2 Intersection et inclusion de variétés affines

Proposition 1.13 Soit $(F_i, \overrightarrow{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines de E. Alors si $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \varnothing$, c'est une variété affine, dont la direction est $\overrightarrow{F} = \bigcap\limits_{i\in I} \overrightarrow{F}_i$ (mais il est tout à fait possible que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \varnothing$).

En particulier, si $(F, \overrightarrow{F})$ et $(G, \overrightarrow{G})$ sont deux variétés affines, alors

$$[F \subset G \iff \left[F \cap G \neq \varnothing \text{ et } \overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}\right],$$

et de la même manière,

$$A + \overrightarrow{F} \subset A + \overrightarrow{G} \iff \overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$$

Preuve Soit A un point commun à tous les F_i, dont l'existence est assurée par l'hypothèse. On a donc pour tout $i \in I$, $F_i = A + \overrightarrow{F_i}$.

Vérifions que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = A + \bigcap\limits_{i\in I} \overrightarrow{F_i} = A + \overrightarrow{F}$, ce qui terminera la démonstration puisque $\overrightarrow{F} = \bigcap\limits_{i\in I} \overrightarrow{F_i}$ est un sous-espace vectoriel.

- Si $M \in F_i$ pour tout i, c'est que $M - A \in \overrightarrow{F_i}$, ceci pour tout i, donc $M - A \in \bigcap\limits_{i\in I} \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{F}$ et $M \in A + \overrightarrow{F}$.
- Réciproquement, si $M \in A + \overrightarrow{F}$, c'est que $M - A \in \overrightarrow{F}$, donc $M - A \in \overrightarrow{F_i}$, ceci pour tout i, donc $M \in A + \overrightarrow{F_i} = F_i$ pour tout i, ce qui signifie exactement que $M \in \bigcap\limits_{i\in I} F_i$.

Pour la dernière partie de la proposition :

Si $F \subset G$, soit $A \in F \subset G$; on a donc $F = A + \overrightarrow{F}$ et $G = A + \overrightarrow{G}$. Pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$, puisque $A + \overrightarrow{u} \in F$, on a $A + \overrightarrow{u} \in G = A + \overrightarrow{G}$ donc $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{G}$.

Réciproquement, si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$ et $F \cap G \neq \varnothing$, soit $A \in F \cap G$, de sorte qu'ici aussi $F = A + \overrightarrow{F}$ et $G = A + \overrightarrow{G}$.
Pour $M = A + \overrightarrow{u} \in F$, on a $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ donc $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{G}$ et $M = A + \overrightarrow{u} \in A + \overrightarrow{G} = G$. □

1.2.3 Parallélisme

Définition 1.14 Soient $(F, \overrightarrow{F})$ et $(G, \overrightarrow{G})$ deux variétés affines de l'espace affine $(E, \overrightarrow{E})$.
On dit que F et G sont *parallèles* lorsque $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$ (Notation $F /\!/ G$)
On dit que F est *faiblement parallèle* à G lorsque $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$.

Proposition 1.15 Soient $(F, \overrightarrow{F})$ et $(G, \overrightarrow{G})$ deux variétés affines de l'espace affine $(E, \overrightarrow{E})$.
(a) Si $F /\!/ G$, alors $F = G$ ou $F \cap G = \varnothing$.
(b) Si F est faiblement parallèle à G, alors $F \subset G$ ou $F \cap G = \varnothing$.
(c) F est faiblement parallèle à G si et seulement si F est parallèle à un sous-espace affine de G.

Preuve (a) Supposons que $F \cap G \neq \varnothing$ et soit $A \in F \cap G$. Par hypothèse $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$. $F = A + \overrightarrow{F} = A + \overrightarrow{G} = G$.

(b) C'est exactement le même raisonnement.

(c) Soit $A \in F$ et $B \in G$. Si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$, $B + \overrightarrow{F}$ est un sous-espace affine de $G = B + \overrightarrow{G}$, et $F = A + \overrightarrow{F}$ est parallèle à ce sous-espace affine de G.

Réciproquement, si $F = A + \overrightarrow{F}$ est parallèle à un sous-espace affine de G c'est que G admet un sous-espace affine de la forme $C + \overrightarrow{F}$. On a donc $C \in G$ donc $G = C + \overrightarrow{G}$ et de $C + \overrightarrow{F} \subset C + \overrightarrow{G}$ on déduit $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$ donc F est faiblement parallèle à G. $\square$

Remarque : La relation de parallélisme (fort) est clairement une relation d'équivalence entre sous-espaces affines de même dimension p. Les classes d'équivalences sont très naturellement identifiables aux sous-espaces vectoriels de dimension p de $\overrightarrow{E}$.

1.2.4 Variété affine engendrée

Le fait que toute intersection de sous-espaces affines est un sous-espace affine permet de définir la notion très importante de variété affine engendrée.

Définition 1.16 Soit $\mathscr{X}$ une partie non vide de l'espace affine $(E, \overrightarrow{E})$. On appelle *variété affine engendrée par* $\mathscr{X}$ (ou *sous-espace vectoriel engendré par* $\mathscr{X}$*)* la plus petite variété affine de E contenant $\mathscr{X}$, c'est-à-dire l'intersection des s.e.a. de E contenant $\mathscr{X}$. On note aff $()X$ la variété affine engendrée par $\mathscr{X}$.

(C'est bien une variété affine d'après la proposition précédente.)

Proposition 1.17 Soient $(F, \overrightarrow{F})$ et $(G, \overrightarrow{G})$ deux sous-espaces affines de E, de dimensions respectives p et q. Soit $H = \operatorname{aff}(F \cup G)$ le sous-espace affine engendré par $F \cup G$.
- Si $F \cap G = \varnothing$:
  alors $\dim H = \dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) + 1 = p + q - \dim(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}) + 1$.
- Si $F \cap G \neq \varnothing$:
  alors H a pour direction $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ et $\dim H = \dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) = p + q - \dim(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G})$.

Preuve

Lorsque $F \cap G \neq \varnothing$, soit $A \in F \cap G$. Alors $H' = A + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ est un sous-espace affine qui contient clairement F et G donc $F \cup G \subset H'$. D'autre part, si $(K, \overrightarrow{K})$ est un sous-espace affine qui contient $F \cup G$, il contient A, donc $K = A + \overrightarrow{K}$. Puisque $A + \overrightarrow{F} \subset A + \overrightarrow{K}$, d'après la proposition précédente, on a $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{K}$. De même $\overrightarrow{G} \subset \overrightarrow{K}$, et par définition [2] de $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$, on en déduit que $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} \subset \overrightarrow{K}$ et donc $A + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} \subset A + \overrightarrow{K}$ c'est-à-dire $H' \subset K$. H' est donc bien le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace affine contenant $F \cup G$, en d'autres termes, $H' = \operatorname{aff}(F \cup G) = H$, H' est le sous-espace affine H engendré par $F \cup G$, et cette variété affine H est bien dirigée par $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$; la dimension de H est celle de sa direction $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ et la dimension de cette somme de sous-espaces vectoriels est connue classiquement

$$\dim H = \dim \overrightarrow{H} = \dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) = \dim \overrightarrow{F} + \dim \overrightarrow{G} - \dim(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}) = p + q - \dim(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}).$$

Si $F \cap G = \varnothing$, soit $A \in F$ et $B \in G$, de sorte que $F = A + \overrightarrow{F}$ et $G = B + \overrightarrow{G}$. On est sûr que $\overrightarrow{AB} = B - A \notin \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$. En effet, si on avait $B \in A + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$, il existerait $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ $(x \in \overrightarrow{F},\ y \in \overrightarrow{G})$ tel que $B = A + \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ et on aurait $B - \overrightarrow{y} = A + \overrightarrow{x} \in F \cap G$.

$< \overrightarrow{AB} >$ désigne la droite vectorielle engendrée par le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$.

Soit $\overrightarrow{H'} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} + < \overrightarrow{AB} > = (\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) \oplus < \overrightarrow{AB} >$. (On peut écrire une somme directe puisque $(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) \cap < \overrightarrow{AB} > = \{\overrightarrow{0}\}$).

$\overrightarrow{H'}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $\dim \overrightarrow{H'} = \dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) + 1$ et $H' = A + \overrightarrow{H'} = B + \overrightarrow{H'}$ est le sous-espace affine engendré par $F \cup G$; en effet, c'est un sous-espace affine, il contient clairement F et G, et tout sous-espace affine K qui contient $F \cup G$ doit contenir A, donc si sa direction est $\overrightarrow{K}$, on a $K = A + \overrightarrow{K}$. Comme précédemment, on a $A + \overrightarrow{F} \subset K$ donc $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{K}$. Ensuite, on a $B \in K$ donc $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{K}$ et donc $< \overrightarrow{AB} > \subset \overrightarrow{K}$. Enfin $K = B + \overrightarrow{K}$ et $G = B + \overrightarrow{G} \subset K$ donc $\overrightarrow{G} \subset \overrightarrow{K}$. $\overrightarrow{K}$ est donc un sous-espace vectoriel (de $\overrightarrow{E}$) qui contient les trois sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, < \overrightarrow{AB} >$, il contient donc leur somme $\overrightarrow{H'}$ et on a $H' = A + \overrightarrow{H'} \subset A + \overrightarrow{K} = K$, donc H' est bien le plus petit sous-espace affine qui contient $F \cup G$, il est égal à H, le sous-espace affine engendré par $F \cup G$. Donc $H = A + \overrightarrow{H'}$ et $\dim H = \dim \overrightarrow{H'} = \dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) + 1 = p + q - \dim(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}) + 1$. □

Un cas particulier intéressant apparaît lorsqu'un des deux sous-espaces affines est réduit à un point.

[2] Si $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ est non seulement l'ensemble des $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$, avec $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{y} \in \overrightarrow{G}$, mais c'est aussi le sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ engendré par $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$: c'est le plus petit sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ qui contient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$, il est inclus dans tout sous-espace vectoriel $\overrightarrow{H}$ qui contient à la fois $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$.

Proposition 1.18 (et définition)
(a) Si A est un point n'appartenant pas au sous-espace affine F, alors

$$\dim(\mathrm{aff}\,(F \cup \{A\})) = \dim F + 1.$$

(b) Le sous-espace affine F engendré par $p+1$ points $A_0, A_1, \ldots, A_p$ est de dimension au plus p et sa direction $\overrightarrow{F}$ est engendrée par les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}$. Lorsque $\dim F = p$, on dit que les $p+1$ points $A_0, A_1, \ldots, A_p$ sont *affinement libres.*
(c) Les $p+1$ points $A_0, A_1, \ldots, A_p$ sont affinement libres si et seulement si les p vecteurs $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p})$ forment un système libre.
(d) Si E est de dimension n, si $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont $n+1$ points affinement libres, on dit que $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ est un repère affine de E. Tout espace vectoriel de dimension n admet des repères affines.
(e) $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ est un repère affine de l'espace affine $(E, \overrightarrow{E})$ si et seulement si $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de $\overrightarrow{E}$.
(f) Si $(O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est un repère cartésien de E, alors en posant $A_0 = O$, puis pour tout i, $A_i = O + \overrightarrow{e_i}$, on a $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ qui est un repère affine de E.

Preuve (a) : Soit $\overrightarrow{F}$ est la direction de F ; $\{\overrightarrow{0}\}$ est la direction de $\{A\}$; on a bien sûr $\dim(\overrightarrow{F} \cap \{\overrightarrow{0}\}) = \dim\{\overrightarrow{0}\} = 0$. Par hypothèse, on a $F \cap \{A\} = \varnothing$, de sorte que la formule de la proposition qu'on vient de voir donne

$$\dim(\mathrm{aff}\,(F \cup \{A\})) = \dim F + 0 - 0 + 1.$$

On peut obtenir la première partie de (b) par une récurrence immédiate, mais c'est aussi une conséquence de la deuxième partie, à savoir que $\overrightarrow{F} = <\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}>$. Démontrons ce résultat : on doit montrer que $\overrightarrow{F}$ est un sous-espace vectoriel (évident) qui contient les p vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}$ et qui est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant ces p vecteurs.
Tout d'abord, puisque $A_0 \in F$, on a donc $F = A_0 + \overrightarrow{F}$ et puisque les $A_i \in F$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$), c'est que tous les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_i} \in \overrightarrow{F}$.
Soit maintenant $\overrightarrow{G}$ un sous-espace vectoriel qui contient tous les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Le sous-espace affine $G = A_0 + \overrightarrow{G}$ est un sous-espace affine qui contient A_0 et qui contient tous les $A_i = A_0 + \overrightarrow{A_0A_i}$, et puisque $F = \mathrm{aff}\,(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ est la plus petite variété affine contenant ces points, on a $F \subset G$ et $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$.

(c) est évident puisque $\dim F = \dim \overrightarrow{F}$.

(d) Une récurrence sur la dimension de E permet d'établir aisément le résultat sur l'existence de repères affines : c'est évident à l'ordre 0, et si c'est vrai à l'ordre $n-1$, on considère un hyperplan H de E, un repère affine $(A_0, \ldots, A_{n-1})$ de cet hyperplan, et un point A_n de $E \setminus H$.

(e) et (f) sont à peu près évidents. □

Nous reviendrons sur cette notion de repère affine au chapitre III. En particulier nous verrons que l'on peut aussi parler de coordonnées d'un point dans un repère affine (il s'agira de « coordonnées barycentriques »). Pour l'instant, c'est uniquement dans un repère cartésien que l'on parle de coordonnées d'un point.

Retenons qu'un repère affine est constitué (en dimension n) de $n+1$ points, alors qu'un repère cartésien est constitué d'un seul point et de n vecteurs. (Il y a toujours $n+1$ éléments dans un repère en dimension n, pour l'instant c'est le seul point commun).

1.3 Point de vue analytique

Un point de vue analytique utilise les coordonnées. Bien entendu, il s'agira ici de coordonnées de points dans des repères cartésiens. Dans cette section, on caractérisera analytiquement les sous-espaces affines, par représentations paramétriques et par équations cartésiennes.

1.3.1 Représentation paramétrique d'une variété affine

Proposition 1.19 (et définition) Soit $\overrightarrow{F}$ un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ de dimension p et $F = A + \overrightarrow{F}$ une variété affine de l'espace affine $(E, \overrightarrow{E})$.
E est rapporté à un repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ dans lequel les coordonnées d'un point X sont notées $(x_1, ..., x_n)$ et celles de A $(a_1, ..., a_n)$.

Soit $\overrightarrow{u_1}, \ldots \overrightarrow{u_p}$ une base de $\overrightarrow{F}$. On pose $\forall k = 1, \ldots, p$, $\overrightarrow{u_k} = \sum_{i=1}^{n} u_{ik} \overrightarrow{e_i}$ (en d'autres termes, les vecteurs $\overrightarrow{u_k}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} u_{1k} \\ \vdots \\ u_{nk} \end{pmatrix}$) ;

Alors on a $X \in F$ si et seulement si il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad x_i = a_i + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_{ik} \tag{1.1}$$

(1.1) est une représentation paramétrique de F. Les paramètres sont les p scalaires λ_k. En pratique on écrit le système d'équations paramétriques sous la forme

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + u_{11}\lambda_1 + \cdots + u_{1p}\lambda_p \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \\ x_n = a_n + u_{n1}\lambda_1 + \cdots + u_{np}\lambda_p \end{cases} \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \tag{1.2}$$

On lit facilement dans les colonnes d'un tel système d'équations paramétriques les coordonnées d'un point de F (1ère colonne) et les coordonnées des vecteurs de la base de $\overrightarrow{F}$ qu'on a utilisée (colonnes suivantes).
En supprimant les termes a_i, on retrouve une représentation paramétrique de $\overrightarrow{F}$.
Sont surtout utilisées les représentations paramétriques des droites, dans le plan et dans l'espace, et plus rarement, les représentations paramétriques des plans dans l'espace.

1.3.2 Changement de repère cartésien

Rappel : Si $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ et $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e'_1}, \ldots, \overrightarrow{e'_n})$ sont deux bases d'un même espace vectoriel, la matrice de passage $\mathrm{P} = (p_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une matrice inversible formée colonne par colonne par les coordonnées dans l'ancienne base ($\mathscr{B}$) des vecteurs de la nouvelle base $\mathscr{B}'$: cela signifie que :

$$\forall j = 1, \ldots, n, \quad \overrightarrow{e'_j} = p_{1j}\overrightarrow{e_1} + \cdots + p_{nj}\overrightarrow{e_n} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\overrightarrow{e_i}.$$

En particulier, si un vecteur $\overrightarrow{x}$ a pour coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et s'il admet pour coordonnées dans la nouvelle base $\mathscr{B}'$ le vecteur colonne $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ alors la relation entre les coordonnées dans l'ancienne base et les coordonnées dans la nouvelle base est :

$$X = \mathrm{P}\, X'$$

Nous allons établir une formule analogue pour lien entre les coordonnées d'un point dans un « ancien » repère et ses coordonnées dans un nouveau repère.

Théorème 1.20 *Soit $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B}) = (O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ un repère cartésien (nous dirons que c'est l'« ancien » repère) et $\mathscr{R}' = (O', \mathscr{B}') = (O', \overrightarrow{e'_1}, \ldots, \overrightarrow{e'_n})$ un autre repère cartésien (le « nouveau » repère) dans un espace affine $(E, \overrightarrow{E})$ de dimension n.*
Soit $\mathrm{P} = (p_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$
Soit M un point quelconque de E. On suppose que les coordonnées de M dans le repère cartésien $\mathscr{R}$ sont égales au vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et que ses coordonnées dans le

repère cartésien $\mathscr{R}'$ *sont égales au vecteur colonne* $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$.

Alors les formules de changement de repère *entre le repère* $\mathscr{R}$ *et le repère* $\mathscr{R}'$ *liant* X *à* X' *sont*

$$X = X_{O'} + \mathrm{P}\,X' \iff \begin{cases} x_1 = x_{O'1} + p_{11}x'_1 + \cdots + p_{1n}x'_n \\ \ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n = x_{O'n} + p_{n1}x'_n + \cdots + p_{nn}x'_n \end{cases}$$

(avec $X_{O'} = \begin{pmatrix} x_{O'1} \\ \vdots \\ x_{O'n} \end{pmatrix}$ *qui sont les coordonnées de* O' *dans l'ancien repère* $\mathscr{R}$*)*

Remarquons que comme pour les formules de changement de base, qui donnent les « anciennes » coordonnées d'un vecteur en fonction de ses « nouvelles », de même ces formules expriment pour un point M, ses coordonnées dans l'*ancien* repère cartésien en fonction de ses coordonnées dans le *nouveau* repère.

Preuve

On a d'une part $\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$ et d'autre part $\overrightarrow{O'M} = x'_1\overrightarrow{e'_1} + \cdots + x'_n\overrightarrow{e'_n}$.
Mais ces deux vecteurs sont liés par la relation $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$.
On connaît les coordonnées de O' dans l'*ancien* repère $\mathscr{R}$. On a donc

$$\overrightarrow{OO'} = x_{O'1}\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_{O'n}\overrightarrow{e_n}.$$

De même, dans l'expression de $\overrightarrow{O'M}$, nous allons remplacer chaque $\overrightarrow{e'_j}$ par son expression en fonction des e_i :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'M} &= x'_1\overrightarrow{e'_1} + \cdots + x'_n\overrightarrow{e'_n} = \sum_{j=1}^{n} x'_j\overrightarrow{e'_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} x'_j\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\overrightarrow{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x'_j\right)\overrightarrow{e_i} \end{aligned}$$

(*Il n'y a aucun problème pour échanger l'ordre des sommations, puisqu'il s'agit de sommes finies.*)
Récapitulons :
D'une part on a $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{e_i}$, et d'autre part, on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \sum_{i=1}^{n} x_{O'i}\overrightarrow{e_i} + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x'_j\right)\overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(x_{O'i} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x'_j\right)\overrightarrow{e_i}.$$

Comme $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est une base, il y a unicité des coordonnées dans cette base, donc pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a, par identification

$$x_i = x_{O'i} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j.$$

On peut écrire ces n égalités l'une au dessous de l'autre, et on obtient

$$\begin{cases} x_1 = x_{O'1} + p_{11}x'_1 + \cdots + p_{1n}x'_n \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \\ x_n = x_{O'n} + p_{n1}x'_n + \cdots + p_{nn}x'_n. \end{cases}$$

Matriciellement, ce système s'écrit bien $X = X_{O'} + \mathrm{P}\,X'$. □

1.3.3 Équations cartésiennes d'une variété affine de $\mathbb{R}^n$

Théorème 1.21 *Soit E un espace affine sur l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$, de dimension n, et F une variété affine de E de dimension p et de direction $\overrightarrow{F}$, $F = A + \overrightarrow{F}$.*
Soit $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}) = (O, \mathscr{B})$ un repère cartésien de E.
Alors, il existe des scalaires u_{ij} et b_i, $(i = 1, \ldots, n-p$ et $j = 1, \ldots, n)$
(on notera U la matrice $(u_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n-p \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ et b le vecteur colonne $b = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant n-p})$
tels que l'appartenance d'un point M (de coordonnées $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ dans le repère cartésien $\mathscr{R}$) à F est caractérisée par le système d'équations :
(1.3)

$$\forall i \in \{1, \ldots, n-p\},\ \sum_{j=1}^{n} u_{ij}x_j = b_i \iff \begin{cases} u_{11}x_1 + \cdots + \quad u_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \quad\quad\quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ u_{n-p,1}x_1 + \cdots + u_{n-p,n}x_n = b_{n-p} \end{cases}$$

ce système étant de rang de rang $n-p$ (ainsi d'ailleurs que la matrice U). On a ainsi un système d'équations cartésiennes *de F. Tout système équivalent à (Σ) est aussi un système d'équations cartésiennes de F.*

Le système « sans second membre »

$$(1.4) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n-p\},\ \sum_{j=1}^{n} u_{ij}x_j = 0 \iff \begin{cases} u_{11}x_1 + \cdots + \quad u_{1n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \quad\quad\quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ u_{n-p,1}x_1 + \cdots + u_{n-p,n}x_n = 0 \end{cases}$$

caractérise les vecteurs $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$ qui appartiennent à $\overrightarrow{F}$.

Réciproquement, s'il n'est pas vide, l'ensemble des points M de E dont les coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *dans le repère $\mathscr{R}$ de E sont solutions d'un système linéaire du type* $\mathrm{V}\,X = b$, *avec* $\mathrm{V} = (v_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ *et* $b = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ *(dont les inconnues sont les coordonnées) est une variété affine de E dont la dimension est égale $n - r$ (avec r qui est le rang du système), et dont la direction est caractérisée par le système homogène obtenu en remplaçant les constantes b_i par* 0.

Preuve Démontrons d'abord la réciproque.
Supposons que V est donc une matrice à q lignes et n colonnes. C'est pour le choix de la base $\mathscr{B}$ de $\overrightarrow{E}$, la matrice d'une application linéaire φ de $\overrightarrow{E}$ vers $\mathbb{R}^p$, ce dernier espace vectoriel étant muni de sa base canonique.
b étant un élément de $\mathbb{R}^p$, si on suppose que l'ensemble H des points M dont les coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ sont solutions de $\mathrm{V}\,X = b$ est non vide, soit M_0 un des points de cet ensemble H. Si $X_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{0,n} \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de M_0 dans le repère cartésien $\mathscr{R}$, c'est que $\mathrm{V}\,X_0 = b$, donc dans le calcul suivant nous pourrons sans problème remplacer b par $\mathrm{V}\,X_0$. On a :

$$M \in H \iff \mathrm{V}\,X = b \iff \mathrm{V}\,X = \mathrm{V}\,X_0 \iff \mathrm{V}(X - X_0) \iff \varphi(\overrightarrow{M_0M}) = 0_{\mathbb{R}^q}.$$

(On a utilisé que le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ a pour coordonnées $X - X_0$ dans la base $\mathscr{B}$).
Mais l'ensemble $\overrightarrow{H}$ des vecteurs $\overrightarrow{u}$ tels que $\varphi(\overrightarrow{u}) = 0_{\mathbb{R}^q}$ est le noyau $\overrightarrow{H} = \ker\varphi$ de l'application linéaire φ, c'est un sous-espace vectoriel.
Nous avons donc $M \in H \iff \overrightarrow{M_0M} \in \ker\varphi \iff M \in M_0 + \overrightarrow{H}$.
Nous avons prouvé que $H = M_0 + \overrightarrow{H}$ est un sous-espace affine et sa dimension est égale à $\dim\ker\varphi$, or, d'après le théorème du rang, on a $\dim\ker\varphi + \operatorname{rg}\varphi = \dim\overrightarrow{E} = n$. Comme $\operatorname{rg}\varphi = \operatorname{rg}\mathrm{V}$, et comme le rang de la matrice V est par définition égal au rang r du système $\mathrm{V}\,X = b$, on a bien $\dim H = n - r$. De plus la direction $\overrightarrow{H}$ de H est telle que $\overrightarrow{H} = \ker\varphi$, donc une caractérisation de $\overrightarrow{H}$ est $\varphi(\overrightarrow{x}) = 0_{\mathbb{R}^n}$, ce qui s'écrit analytiquement dans la base $\mathscr{B}$: $\mathrm{V}X = 0$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{H}$ est bien caractérisé analytiquement par le même système que celui qui caractérise H, sauf qu'on a remplacé les constantes b_i par des 0 : c'est un système homogène.

Démonstration du sens direct
Soit $F = A + \overrightarrow{F}$ une variété affine de dimension p. On suppose que $(e'_1, \ldots, e'_p)$ est une base de $\overrightarrow{F}$, et que $(e'_{p+1}, \ldots, e'_n)$ sont $n - p$ vecteurs qui complètent le système

libre $(e'_1, \dots, e'_p)$ en une base $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_p, e'_{p+1}, \dots, e'_n)$ de $\overrightarrow{E}$. Soit P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
$\mathscr{R}' = (A, \mathscr{B}') = (A, e'_1, \dots, e'_n)$ est un repère cartésien de E.
Soient $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ les coordonnées dans ce repère $\mathscr{R}'$ d'un point M quelconque, qui

a aussi comme coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathscr{R}$.

On a vu la formule de changement de repère : $X = X_A + \mathrm{P}\,X'$. On en déduit la formule exprimant les coordonnées dans le nouveau repère en fonction des coordonnées dans l'ancien repère : $X' = \mathrm{P}^{-1}(X - X_A) = \mathrm{P}^{-1}X - \mathrm{P}^{-1}X_A$.
Or, un point M appartient à F si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ appartient au sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F}$, et comme ce sous-espace vectoriel est engendré par les p premiers vecteurs $(e'_1, \dots, e'_p)$ de la base $\mathscr{B}'$, pour que ce vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit dans $\overrightarrow{F}$, il faut et il suffit que ses $n-p$ dernières coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$ soient nulles. Or, les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ dans la nouvelle base $\mathscr{B}'$ sont les mêmes que celles du point M dans le nouveau repère $\mathscr{R}'$. Donc $M \in F \iff x'_i = 0$ pour $p+1 \leqslant i \leqslant n$.
Si on pose $\mathrm{P}^{-1} = (p'_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, la formule $X' = \mathrm{P}^{-1}X - \mathrm{P}^{-1}X_A$ s'écrit, pour chaque i, $x'_i = \sum_{j=1}^{n} p'_{ij}x_j - \sum_{j=1}^{n} p'_{ij}x_{j,A}$, et donc en posant $c_i = \sum_{j=1}^{n} p'_{ij}x_{j,A}$ pour $p+1 \leqslant i \leqslant n$, la condition caractérisant $M \in F$ s'écrit donc

$$\sum_{j=1}^{n} p'_{ij}x_j = c_i \text{ pour } p+1 \leqslant i \leqslant n.$$

Pour retrouver les notations du théorème, il suffit de poser $u_{ij} = p'_{p+i,j}$ et $b_i = c_{p+i}$ pour tout $i = 1, \dots, n-p$.
On a bien trouvé un système de $n-p$ équations qui caractérise F.
Ces équations peuvent s'écrire matriciellement $\mathrm{U}X = b$. Les $n-p$ lignes de la matrice U sont exactement les $n-p$ dernières lignes de la matrice P^{-1}, donc elles sont indépendantes, et on est sûr que le rang de la matrice U est $n-p$.
D'autre part, l'appartenance d'un vecteur $\overrightarrow{v}$, de coordonnées X dans la base $\mathscr{B}$ et de coordonnées X' dans la base $\mathscr{B}'$ est caractérisée par le système homogène

$$\begin{cases} x'_{p+1} = 0 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ x'_n \quad = 0. \end{cases}$$

Compte tenu du fait que les formules de changement de base s'écrivent $X = \mathrm{P}\,X'$, ou encore $X' = \mathrm{P}^{-1}X$, ces $n-p$ équations s'écrivent aussi $\sum_{j=1}^{n} p'_{ij}x_j = 0$ pour $p+1 \leqslant i \leqslant n$, ou avec le changement d'indice $\sum_{j=1}^{n} u_{ij}x_j = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-p$, donc le système homogène obtenu en remplaçant les constantes par des zéros dans le système caractérisant F est bien un système qui caractérise $\overrightarrow{F}$. □

1.4 Relecture de quelques notions de géométrie élémentaire

Dans ce paragraphe, nous « révisons » des notions vues au lycée, à la lumière de ce que nous avons vu dans ce cours.

1.4.1 Propriétés d'incidence

Proposition 1.22 Soient $(F, \overrightarrow{F})$ et $(G, \overrightarrow{G})$ deux variétés affines de l'espace affine $(E, \overrightarrow{E})$.
Si $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} = \overrightarrow{E}$, alors $F \cap G \neq \varnothing$.
Si $\overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G} = \overrightarrow{E}$, l'intersection des variétés affines F et G est toujours réduite à un point.

Preuve Soit $A \in F$ et $B \in G$. Décomposons le vecteur $\overrightarrow{AB}$ selon $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$: il existe $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ tels que $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{y} \in \overrightarrow{G}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$, ou encore $B = A + \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$.
Soit $C = A + \overrightarrow{x}$. On peut dire que $C \in F$, et $C = B - \overrightarrow{y}$ donc $C \in G$: on vient de trouver un point de $F \cap G$.

$F \cap G$ est donc une variété affine de direction $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$, et si $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ sont supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$, c'est que leur intersection est réduite à $\{\overrightarrow{0}\}$, donc $F \cap G = C + \{\overrightarrow{0}\} = \{C\}$.□

En dimension 2, la conséquence « visible » de cet énoncé est que l'intersection de deux droites non parallèles est toujours un point ; en dimension 3, l'intersection de deux plans non parallèles n'est jamais vide, alors que deux droites peuvent ne pas se couper. L'intersection d'un plan et d'une droite qui ne lui est pas faiblement parallèle est toujours un point (voir exercices).

1.4.2 Milieu d'un segment

Nous allons définir le milieu d'un segment. On parle aussi du milieu d'un bipoint, ou d'une paire de points...

Définition 1.23 Soient A, B deux points d'un espace affine $(E, \overrightarrow{E})$.
Alors le milieu I du segment $[AB]$ est le point qui vérifie $I = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Cette définition est très désagréable parce qu'a priori, le milieu de $[AB]$ n'est pas le même que le milieu de $[BA]$ (A est privilégié). Nous y remédions immédiatement :

Proposition 1.24 Si I est le milieu de $[AB]$ alors I est aussi le milieu de $[BA]$, et plus généralement, quel que soit le point O, on a $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

Preuve Il suffit d'établir le dernier point, parce qu'alors, en l'appliquant avec le point O en B, on obtient exactement $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, ce qui s'écrit aussi $I = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et ce qui signifie exactement que I est le milieu de $[BA]$.
Soit O un point quelconque; en supposant que I est le milieu de $[AB]$, donc que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, on a :
$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} = (\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.
□

Voyons maintenant une version générale du « Théorème des milieux ».

Théorème 1.25 *Soit F et F' deux variétés affines strictement parallèles, de même direction $\overrightarrow{F}$.*
Soient A et C deux points de F et B et D deux points de F'.
Soit I le milieu de $[AB]$.
Soit $F'' = I + \overrightarrow{F}$ la variété affine parallèle à F et à F' qui passe par I. Alors F'' rencontre la droite (CD) en un point unique J qui est le milieu de $[CD]$.

Preuve Considérons la variété affine $(H, \overrightarrow{H})$ engendrée par F et F'. Comme $F \cap F' = \varnothing$, en application de la proposition 1.17 p. 8, et surtout de la démonstration de cette propriété, on a $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F} + < \overrightarrow{AB} >= \overrightarrow{F} \oplus < \overrightarrow{AB} >$.
Les points C et D sont des points respectivement dans F et dans F', donc ils appartiennent à H et $(CD) \subset K$. Comme $\overrightarrow{CD} \notin \overrightarrow{F}$ (sinon on aurait $F = C + \overrightarrow{F} = D + \overrightarrow{F} = F'$), on a aussi $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{F} \oplus < \overrightarrow{CD} >$, de sorte qu'en application de la proposition 1.22 p. 17 à l'espace affine H, on est sûr que $(CD) \cap F''$ est réduite à un point J.
Comme $J \in (CD)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{CJ} = \lambda\overrightarrow{CD}$.
Mais on a $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{IJ}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ d'une part et d'autre part $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ donc $\lambda\overrightarrow{CD} = (\lambda\overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{BD}) + \lambda\overrightarrow{AB}$.
Comme $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont des vecteurs de $\overrightarrow{F}$, on vient de trouver deux décompositions du vecteur $\overrightarrow{CJ}$ selon la somme directe $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{F} \oplus < \overrightarrow{AB} >$, on sait qu'une telle décomposition est unique, donc on a d'une part $(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{IJ}) = (\lambda\overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{BD})$ (nous n'utiliserons pas ce résultat) et d'autre part (c'est ceci qui nous intéresse) : $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AB}$, donc $\lambda = \frac{1}{2}$ et on a donc $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, on a bien montré que J est le milieu de $[CD]$.□

En exercice, on montrera la réciproque de ce théorème : si F et F' sont deux variétés affines strictement parallèles de direction $\overrightarrow{F}$, si $A, C \in F$, si $B, D \in F'$, si I est le milieu de $[AB]$, si J est le milieu de $[CD]$, alors la droite (IJ) (si elle existe) est faiblement parallèle à F et à F'.

1.4.3 Parallélogrammes

Définition 1.26 Soient A, B, C, D quatre points d'un espace affine $(E, \overrightarrow{E})$.
On dit que $ABCD$ est un parallélogramme lorsque $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Encore une fois, nous allons « symétriser » cette définition :

Proposition 1.27 Lorsque $ABCD$ est un parallélogramme, on a les propriétés suivantes
(a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;
(b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
(c) $BCDA$, $CDAB$, $DABC$, $ADCB$, $DCBA$, $CBAD$ et $BADC$ sont aussi des parallélogrammes ;
(d) $(AB) /\!/ (CD)$ et $(AD) /\!/ (BC)$;
(e) $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

Preuve Les points (a) et (b) sont une conséquence des relations de Chasles :
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.
Le fait que les sept autres quadrilatères soient des parallélogrammes se déduisent de ces relations vectorielles, il suffit de l'écrire.
Le point (d) est une conséquence immédiate de (a) et (b).
Montrons le point (e).
Soit I le milieu de $[AC]$. On va montrer que c'est aussi le milieu de $[BD]$ en calculant $\overrightarrow{BI}$, grâce à la propriété « universelle » du milieu d'un segment appliquée au point B.
$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ (puisque $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$)
Donc I est aussi le milieu de $[BD]$. □

On caractérise aussi un parallélogramme avec les points (a) à (e) de la proposition précédente.

Théorème 1.28 *Soient A, B, C, D quatre points d'un espace affine $(E, \overrightarrow{E})$.
Si on a (a) : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou (b) : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ ou (e) : $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu,
Alors $ABCD$ est un parallélogramme.
Si on suppose que A, B, C, D ne sont pas quatre points alignés, et si on a la propriété (d) : $(AB) /\!/ (CD)$ et $(BC) /\!/ (AD)$, alors on peut aussi conclure que $ABCD$ est un parallélogramme.*

Démonstration en exercices.

1.4.4 Mesure algébrique

Définition 1.29 Soit $\Delta = O + \mathbb{R}\,\vec{u}$ une droite affine, dont $\mathscr{R} = (O, \vec{u})$ est un repère cartésien.
Soient M, N deux points de Δ, dont l'abscisse (l'unique coordonnée) dans le repère $\mathscr{R}$ est respectivement x_M et x_N.
Alors la mesure algébrique du bipoint (M, N) (calculée dans le repère $\mathscr{R}$) est

$$\overline{MN} = x_N - x_M.$$

Proposition 1.30 La mesure algébrique vérifie la relation de Chasles et ses conséquences :
pour tous points A, B, C de la droite Δ (rapportée au repère $\mathscr{R}$), on a
- $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$
- $\overline{AB} = -\overline{BA}$
- $\overline{AA} = 0.$

La mesure algébrique ne dépend pas de l'origine du repère :
Pour tous points A, B, on a $\overline{AB} = \lambda \iff \overrightarrow{AB} = \lambda\vec{u}$.
Enfin, un quotient de mesures algébriques ne dépend plus du tout du repère :
Pour tous points A, B, C, D, tels que $C \neq D$ ($\overline{CD} \neq 0$), on a

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \lambda \iff \overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}.$$

Preuve La relation de Chasles et ses conséquences sont immédiates.
Si A et B ont pour abscisses respectives x_A et x_B dans le repère $\mathscr{R}$, alors $A = O + x_A\vec{u}$ et $B = O + x_B\vec{u}$.
Alors on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{u} &\iff B = A + \lambda\vec{u} \iff O + x_B\vec{u} = O + x_A\vec{u} + \lambda\vec{u}\\ &\iff (x_B - x_A)\vec{u} = \lambda\vec{u} \iff \overline{AB} = \lambda\end{aligned}$$

Enfin, si $\mathscr{R}' = (O', \vec{u'})$ est un autre repère cartésien de la droite Δ, on sait que la formule de changement de repère s'écrit $X = X_{O'} + \mathrm{P}\,X'$, mais ici, si $\vec{u'} = \alpha\vec{u}$, la matrice P de changement de base admet une seule ligne et une seule colonne, et donc on peut écrire cette formule sous la forme $x_M = x_{O'} + \alpha x'_M$.
Calculons alors le rapport $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ dans le repère $\mathscr{R}$ tout d'abord :
$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{x_B - x_A}{x_D - x_C} = \dfrac{(x_{O'} + \alpha x'_B) - (x_{O'} + \alpha x'_A)}{(x_{O'} + \alpha x'_D) - (x_{O'} + \alpha x'_C)} = \dfrac{x'_B - x'_A}{x'_D - x'_C}$ et on trouve la même valeur qu'en calculant ce quotient de mesures algébriques dans le repère $\mathscr{R}'$.
Pour finir, dans le repère $\mathscr{R}'' = (C, \overrightarrow{CD})$ (on a supposé $C \neq D$) puisque $\overrightarrow{CD} = 1\overrightarrow{CD}$, il est clair que $\overline{CD} = 1$ et alors on a

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD} \iff \overline{AB} = \lambda \iff \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \lambda. \qquad \square$$

Remarque : Cette dernière relation permet de définir un quotient de mesures algébriques non seulement pour des points alignés mais aussi pour des couples de points situés sur des droites parallèles : si les droites Δ et Δ' sont parallèles, si A, B sont deux points de Δ et C, D deux points distincts de Δ', on définit le quotient $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ par

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \lambda \iff \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}.$$

1.4.5 Thalès

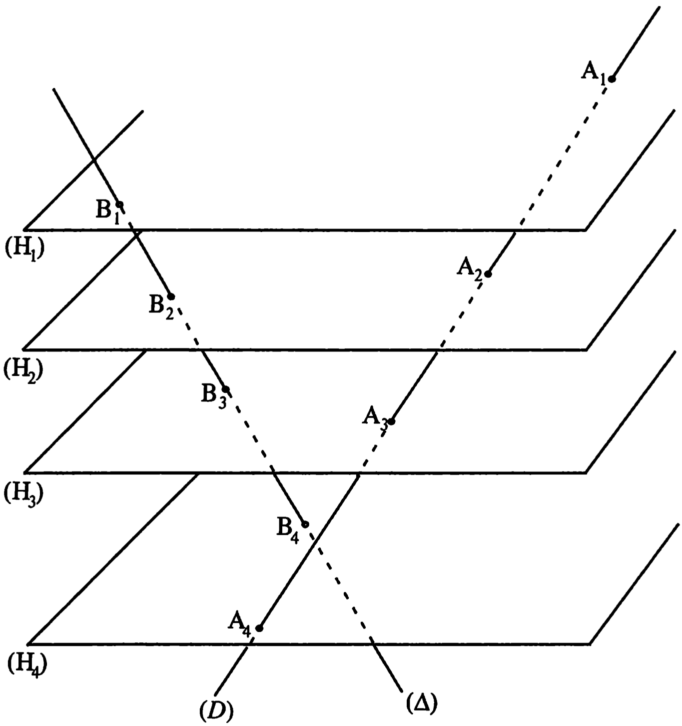


FIGURE 1.1. Théorème de Thalès.

Théorème 1.31 (de Thalès) *Soient H_1, H_2, H_3 et H_4 quatre hyperplans parallèles d'un espace affine E, tels que H_3 et H_4 sont distincts, et soient D et Δ deux droites de E qui ne sont pas faiblement parallèles à H_1 (les directions $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{\Delta}$ ne sont pas incluses dans la direction commune $\overrightarrow{H}$ des quatre hyperplans H_i).*

Alors les points A_i et B_i tels que $\{A_i\} = D \cap H_i$, $\{B_i\} = \Delta \cap H_i$, sont tels que $\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_3A_4}} = \dfrac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_3B_4}}$

Réciproquement, si deux droites D et Δ coupent 3 hyperplans parallèles H_2, H_3 et H_4 (avec $H_3 \neq H_4$) respectivement en A_i et B_i, si A_1 est un point de D et B_1 un point de Δ tels que $\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_3A_4}} = \dfrac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_3B_4}}$ alors la droite (A_1B_1) est faiblement parallèle aux hyperplans H_i (sauf si $A_1 = B_1$).

Preuve Soit $\lambda = \dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_3A_4}}$ et $\mu = \dfrac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_3B_4}}$.

(Remarquons que comme H_3 et H_4 sont distincts et parallèles, ils sont sans point commun donc $A_3 \neq A_4$ et $B_3 \neq B_4$.)

Comme $\vec{D} \not\subset \vec{H}$, on est sûr que $\vec{E} = \vec{D} \oplus \vec{H}$.

On a $\overrightarrow{A_1A_2} = \lambda\overrightarrow{A_3A_4}$ et de même, $\overrightarrow{B_1B_2} = \mu\overrightarrow{B_3B_4}$

Or, $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2B_2} = \lambda\overrightarrow{A_3A_4} + (\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_2B_2})$.

D'autre part, on a

$\overrightarrow{B_1B_2} = \mu(\overrightarrow{B_3B_4}) = \mu(\overrightarrow{B_3A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4B_4}) = \mu\overrightarrow{A_3A_4} + (\mu\overrightarrow{B_3A_3} + \mu\overrightarrow{A_4B_4})$

Or, on a $\overrightarrow{B_1A_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{B_3A_3}, \overrightarrow{A_4B_4} \in \vec{H}$, et $\overrightarrow{A_3A_4} \in \vec{D}$.

En écrivant $\overrightarrow{B_1B_2} = \lambda\overrightarrow{A_3A_4} + (\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_2B_2})$ et $\overrightarrow{B_1B_2} = \mu\overrightarrow{A_3A_4} + (\mu\overrightarrow{B_3A_3} + \mu\overrightarrow{A_4B_4})$, on écrit deux décompositions de $\overrightarrow{B_1B_2}$ selon la somme directe $\vec{E} = \vec{D} \oplus \vec{H}$, on sait qu'une telle décomposition est unique donc on a $\begin{cases} \lambda\overrightarrow{A_3A_4} = \mu\overrightarrow{A_3A_4} \\ \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_2B_2} = \mu\overrightarrow{B_3A_3} + \mu\overrightarrow{A_4B_4} \end{cases}$

La deuxième égalité est sans importance, mais la première égalité prouve (puisque $A_3 \neq A_4$) que $\lambda = \mu$.

Nous laissons la réciproque en exercice. □

1.5 Exercices

Exercice 1.1.

(Démonstration de la propriété suggérée dans le § « Point de vue équivalent » de la p. 3).

1° Soit E un ensemble. On suppose qu'il existe une application :

$\theta : \begin{cases} E \times E \longrightarrow \vec{E} \\ (A, B) \longmapsto \theta(A, B) \end{cases}$ telle que :

(i') $\forall A, B, C \in E$, on a $\theta(A, B) + \theta(B, C) = \theta(A, C)$.

(ii') $\forall A \in E$, l'application $\theta_A : M \longmapsto \theta_A(M) = \theta(A, M)$ est une bijection de E sur $\vec{E}$.

On veut montrer que E est un espace affine.

1° a) On définit, pour $A \in E$ et $\vec{u} \in \vec{E}$, $A \widehat{+} \vec{u}$ par

$$A \widehat{+} \vec{u} = (\theta_A)^{-1}(\vec{u}).$$

Montrer que cette définition a un sens, et que $\widehat{+}$ est une loi de composition externe sur E.

1° b) Montrer que $(E, \vec{E}, \widehat{+})$ est un espace affine.

2° Soit $(E, \vec{E}, +)$ un espace affine. Montrer qu'on peut définir une application θ de $(E \times E)$ vers $\vec{E}$ qui vérifie les propriétés (i') et (ii').

Exercice 1.2.
1° Montrer que dans la définition d'un espace affine, on peut affaiblir la troisième assertion (iii) en remplaçant $\forall$ par $\exists$, c'est-à-dire qu'on pourrait utiliser
(iii'') $\exists A \in E$ tel que l'application $\vec{u} \longmapsto A + \vec{u}$ est une bijection de $\vec{E}$ sur E.

2° Montrer que dans le « point de vue équivalent » (voir p. 3 du cours, et l'exercice précédent 1.1) on peut aussi remplacer un $\forall$ par un $\exists$: on peut remplacer (ii') par (ii'') $\exists A \in E$, l'application $\theta_A : M \longmapsto \theta_A(M) = \theta(A, M)$ est une bijection de E sur $\vec{E}$.

Exercice 1.3.
Soit E un espace affine, $\vec{E}$ son espace vectoriel associé.
Montrer que pour tous $A, B, C, D \in E$, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Comment s'écrit « trivialement » cette propriété en utilisant le symbole $-$?
Dans cette situation, on dit que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 1.4.
Soit V un espace vectoriel muni de sa structure affine et soit a dans V. Comparer V et les vectorialisés V_a, V_{0_V} (0_V est ici le vecteur nul de V).

Exercice 1.5.
Soit E un espace affine sur l'espace vectoriel $\vec{E}$. On pose $X_i = O + \vec{e_i}$ pour $i = 1, \dots, n$. Montrer que $(O, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est un repère cartésien de E équivaut à $(X_1, \dots, X_n)$ est une base du vectorialisé E_0.

Exercice 1.6.
Dans un espace affine de dimension 3, faire la liste de toutes les sortes de variétés affines, selon leurs dimensions.

Exercice 1.7.

1° Montrer que par deux points distincts passe une droite et une seule.

2° Montrer que par trois points non alignés, passe un plan et un seul.

Exercice 1.8.
Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni de sa structure affine canonique. Soit f une forme linéaire sur V ($f \in V^*$). Montrer que pour tout scalaire a, $f^{-1}(a)$ est en général un hyperplan affine de V. Dans quel cas y a-t-il exception ?

Exercice 1.9.
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $b \in F$, montrer que si $S_b = f^{-1}(\{b\}) \neq \varnothing$, alors S_b est une variété affine de E (muni de sa structure affine canonique) dont on précisera le sous-espace directeur.

Exercice 1.10.
Montrer qu'une variété affine d'un espace vectoriel muni de sa structure affine canonique est un sous-espace vectoriel si et seulement si il contient le vecteur nul.

Exercice 1.11.
Démontrer les « conséquences visibles » de la proposition 1.22 p. 17, c'est-à-dire :

1° Dans un espace affine $(E, \vec{E})$ de dimension 2, si $(F, \vec{F})$ et $(G, \vec{G})$ sont deux droites affines non parallèles, alors $F \cap G$ est un singleton.

2° Dans un espace affine $(E, \vec{E})$ de dimension 3, si $(F, \vec{F})$ et $(G, \vec{G})$ sont deux plans affines non parallèles, alors $F \cap G$ est une droite affine.

3° Dans un espace affine $(E, \vec{E})$ de dimension 3, si $(F, \vec{F})$ est un plan affine et $(G, \vec{G})$ une droite affine non faiblement parallèle à F, alors $F \cap G$ est un singleton.

Les trois exercices qui suivent ont pour but de rappeler et de faire redémontrer (à la lumière des notions abordées dans ce cours) quelques propriétés classiques et incontournables des sous-espaces affines des espaces affines de dimension 2 *et* 3.

Exercice 1.12. [Droites d'un plan affine]

Dans cet exercice, on se place dans un plan affine $(P, \vec{P})$, rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}) = (O, \mathcal{B})$.

1° **Représentations paramétriques d'une droite.**
Soit A un point de coordonnées (x_A, y_A) (dans $\mathcal{R}$) et $\vec{u}$ un vecteur non nul de coordonnées $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ (dans $\mathcal{B}$).

1° a) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite $D = A+ < \overrightarrow{u} >$ est $\begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha \\ y = y_A + \lambda\beta \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

1° b) Soient a, b, c, d quatre scalaires. Soit Δ l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ sont telles qu'il existe $t \in \mathbb{K}$ tels que $\begin{cases} x = a + bt \\ y = c + dt \end{cases}$

À quelle condition Δ est-elle une droite ? Dans ce cas, quel point et quel vecteur connaît-on facilement ? Si Δ est une droite, à quelle condition passe-t-elle par l'origine O du repère ?

1° c) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) lorsque $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

1° d) À quelle condition (nécessaire et suffisante) la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = a + bt \\ y = c + dt \end{cases}$ $t \in \mathbb{K}$ et la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \alpha + \beta\lambda \\ y = \gamma + \delta\lambda \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{K}$ sont-elles parallèles ? confondues ? sécantes ?

1° e) Étudier l'intersection des droites D et D' donnéese par leurs représentations paramétriques : $D : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et $D' : \begin{cases} x = -2 - t \\ y = -3 - t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

1° f) Même question avec les droites
$D : \begin{cases} x = 1 + (1 - \sqrt{2})t \\ y = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et $\Delta : \begin{cases} x = \sqrt{2} - t \\ y = -1 + (\sqrt{2} + 1)t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

2° Équations cartésiennes de droites.

2° a) Justifier qu'une équation cartésienne d'une droite Δ dans le repère $\mathcal{R}$ est de la forme
$ux + vy + w = 0$. Quelle condition doit-on imposer à α, β, γ pour que $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ soit l'équation cartésienne d'une droite Δ ?

2° b) Montrer que la droite $\Delta : ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur. À quelle condition passe-t-elle par l'origine O du repère ?

2° c) Soit $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur dont les deux coordonnées sont non nulles. Montrer que la droite D dirigée par $\overrightarrow{u}$ et passant par $A(x_A, y_A)$ admet comme équation cartésienne $\dfrac{x - x_A}{a} = \dfrac{y - y_A}{b}$.

2° d) À quelle condition deux droites $D : ax + by + c = 0$ et $D' : a'x + b'y + c' = 0$ sont-elles parallèles ? confondues ? sécantes ?

2° e) Soit D une droite ne passant pas par l'origine, et non parallèle aux axes de coordonnées.
Montrer qu'elle admet une équation cartésienne de la forme $\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} = 1$. Quelle interprétation graphique peut-on faire des nombres α et β ?

2° f) Montrer qu'une équation cartésienne de la droite D passant par $A(x_A, y_A)$ et admettant $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur est $\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = 0$.

2° g) Montrer qu'une équation cartésienne de la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ est $\begin{vmatrix} x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
Quelle condition nécessaire et suffisante d'alignement de 3 points peut-on écrire sous forme de la nullité d'un déterminant 3×3 ?

2° h) Comment trouver une représentation paramétrique d'une droite dont on connaît une équation cartésienne ? Et comment trouver une équation cartésienne d'une droite dont on connaît une représentation paramétrique ?

3° Faisceaux de droites.
Soient $D_1 : u_1x + v_1y + w_1 = 0$ et $D_2 : u_2x + v_2y + w_2 = 0$ deux droites distinctes.
On appelle ϕ_i (pour $i = 1$ ou 2) l'application de P dans $\mathbb{K}$ qui associe à un point M de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ le scalaire $\phi_i(M) = u_ix + v_iy + w_i$.
On appelle *faisceau (linéaire) de droites de base* (D_1, D_2) l'ensemble $\mathcal{F}(D_1, D_2)$ des droites D du plan dont une équation cartésienne est de la forme $\phi(M) = 0$ avec $\phi = \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$.

3° a) Montrer que si $D_1 /\!/ D_2$, alors $\mathcal{F}(D_1, D_2)$ est l'ensemble des droites parallèles à D_1 (et donc aussi à D_2).

3° b) Montrer que si D_1 et D_2 sont sécantes en Ω, alors $\mathcal{F}(D_1, D_2)$ est l'ensemble des droites qui passent par Ω.

3° c) Montrer que si $D : ux + vy + w = 0$, alors

$$D \in \mathcal{F}(D_1, D_2) \iff \exists(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0) \text{ tel que } \begin{cases} u = \lambda_1u_1 + \lambda_2u_2 \\ v = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 \\ w = \lambda_1w_1 + \lambda_2w_2 \end{cases}$$

3° d) Montrer que trois droites $\Delta_i : a_ix + b_iy + c_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

3° e) (Application.) Soit A le point d'intersection des droites $D_1 : x+y-4=0$ et $D_2 : x-2y+5=0$. Déterminer une équation cartésienne de la droite D qui passe par le point A et qui est parallèle à la droite $\Delta : 3x+y=0$.

Exercice 1.13. [Plans d'un espace affine de dimension 3]
Dans cet exercice, on se place dans un espace affine $(E, \overrightarrow{E})$ de dimension 3, rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}) = (O, \mathcal{B})$.

1° Représentations paramétriques d'un plan

Soit A un point de coordonnées (x_A, y_A, z_A) (dans $\mathcal{R}$) et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs linéairement indépendants de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$ (dans $\mathcal{B}$).

1° a) Justifier qu'une représentation paramétrique du plan $P = A + < \vec{u}, \vec{v} >$ est
$$\begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = y_A + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = z_A + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases} \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

1° b) Soient $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ neuf scalaires. Soit Π l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$ sont telles qu'il existe $t, u \in \mathbb{K}$ tels que $\begin{cases} x = a + bt + cu \\ y = d + et + fu \\ z = g + ht + iu \end{cases}$. À quelle condition Π est-il un plan ? Dans ce cas, quel point du plan Π et quels vecteurs de la direction $\overrightarrow{\Pi}$ connaît-on facilement ? Si Π est un plan, à quelle condition passe-t-il par l'origine O du repère ?

1° c) Donner une représentation paramétrique du plan (ABC) lorsque $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ et $C(x_C, y_C, z_C)$.

d) À quelle condition (nécessaire et suffisante) le plan P de représentation paramétrique $\begin{cases} x = a + bt + cu \\ y = d + et + fu \\ z = g + ht + iu \end{cases}$ $t, u \in \mathbb{K}$ et le plan Π de représentation paramétrique
$\begin{cases} x = \alpha + \beta\lambda + \gamma\mu \\ y = \alpha' + \beta'\lambda + \gamma'\mu \\ z = \alpha'' + \beta''\lambda + \gamma''\mu \end{cases}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ sont-ils parallèles ? confondus ? sécants ?

1° e) Étudier l'intersection des plans P et P' donnés par leurs représentations paramétriques :

$$P : \begin{cases} x = 1 + 3t - u \\ y = -3 - t \\ z = u \end{cases} \quad t, u \in \mathbb{R} \text{ et } P' : \begin{cases} x = -2 - t \\ y = -3 - t - 2u \\ z = t + u \end{cases} \quad t, u \in \mathbb{R}.$$

2° Équations cartésiennes des plans

2° a) Justifier qu'une équation cartésienne d'un plan Π dans le repère $\mathcal{R}$ est de la forme
$ux+vy+wz = h$. Quelle condition doit-on imposer à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour que $\alpha x+\beta y+\gamma z = \delta$ soit l'équation cartésienne d'un plan P ?

2° b) Montrer que le plan Π : $ax + by + cz = d$ est dirigé par $< \vec{u}, \vec{v} >$ avec $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$. Donner deux autres vecteurs non alignés avec $\vec{u}$ ni avec $\vec{v}$ du plan vectoriel $\vec{\Pi}$ qui dirige Π.

2° c) À quelle condition deux plans P : $ax + by + cz = d$ et P' : $a'x + b'y + c'z = d'$ sont-ils parallèles ? confondus ? sécants ?

2° d) Soit P un plan ne passant pas par l'origine. Montrer qu'il admet une équation cartésienne de la forme $\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} + \dfrac{z}{\gamma} = 1$. Quelle interprétation graphique peut-on faire des nombres α, β et γ ?

2° e) Montrer qu'une équation cartésienne du plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigé par $< \vec{u}, \vec{v} >$ avec $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ est $\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha & \alpha' \\ y - y_A & \beta & \beta' \\ z - z_A & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0$.

2° f) Montrer qu'une équation cartésienne du plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ et $C(x_C, y_C, z_C)$ est $\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C & x \\ y_A & y_B & y_C & y \\ z_A & z_B & z_C & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
Quelle condition nécessaire et suffisante de coplanarité de quatre points peut-on écrire sous forme de la nullité d'un déterminant 4×4 ?

2° g) Comment trouver une représentation paramétrique d'un plan dont on connaît une équation cartésienne ? Et comment trouver une équation cartésienne d'un plan dont on connaît une représentation paramétrique ?

3° Faisceaux de plans

Soient P_1 : $u_1x + v_1y + w_1z + h_1 = 0$ et P_2 : $u_2x + v_2y + w_2z + h_2 = 0$ deux plans distincts. On appelle ϕ_i (pour $i = 1$ ou 2) l'application de E dans $\mathbb{K}$ qui associe à un point M de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$ le scalaire $\phi_i(M) = u_ix + v_iy + w_iz + h_i$.

On appelle *faisceau (linéaire) de plans de base* (P_1, P_2) l'ensemble $\mathcal{F}(P_1, P_2)$ des plans P du plan dont une équation cartésienne est de la forme $\phi(M) = 0$ avec $\phi = \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$.

3° a) Montrer que si $P_1 /\!/ P_2$, alors $\mathcal{F}(P_1, P_2)$ est l'ensemble des plans parallèles à P_1 (et donc aussi à P_2).

3° b) Montrer que si P_1 et P_2 sont sécants en une droite Δ, alors $\mathcal{F}(P_1, P_2)$ est l'ensemble des plans qui contiennent Δ.

3° c) Montrer que si $P \ : \ ux + vy + wz + h = 0$, alors

$$P \in \mathcal{F}(P_1, P_2) \iff \exists(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0) \text{ tel que } \begin{cases} u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \\ v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \\ w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \\ h = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 \end{cases}$$

3° d) Montrer que trois plans $\Pi_i \ : \ a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ sont sécants en un point unique si et seulement si $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$

3° e) Soient quatre plans $\Pi_i \ : \ a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ de l'espace. Montrer que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

si et seulement si ces quatre plans ont au moins un point commun ou s'il existe une droite qui est faiblement parallèle à ces quatre plans.

Exercice 1.14. [Droites d'un espace affine de dimension 3.]
Dans cet exercice, on se place dans un espace affine $(E, \vec{E})$ de dimension 3, rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}) = (O, \mathcal{B})$.

1° Représentations paramétriques d'une droite de l'espace

1° a) Soit A un point de coordonnées (x_A, y_A, z_A) (dans $\mathcal{R}$) et $\vec{u}$ un vecteur non nul de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ (dans $\mathcal{B}$). Justifier qu'une représentation paramétrique de la

droite $D = A + < \overrightarrow{u} >$ est
$$\begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha \\ y = y_A + \lambda\beta \\ z = z_A + \lambda\gamma \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

1° b) Soient a, b, c, d, e, f six scalaires. Soit Δ l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$ sont telles qu'il existe $t \in \mathbb{K}$ tels que $\begin{cases} x = a + bt \\ y = c + dt \\ z = e + ft \end{cases}$

À quelle condition Δ est-elle une droite ? Dans ce cas, quel point et quel vecteur directeur en connaît-on facilement ? Si Δ est une droite, à quelle condition passe-t-elle par l'origine O du repère ?

1° c) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) lorsque $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$.

1° d) À quelle condition (nécessaire et suffisante) la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = a + bt \\ y = c + dt \\ z = e + ft \end{cases}$ $t \in \mathbb{K}$ et la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \alpha + \beta\lambda \\ y = \alpha' + \beta'\lambda \\ z = \alpha'' + \beta''\lambda \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{K}$ sont-elles parallèles ? confondues ? sécantes ?

1° e) Étudier l'intersection des droites D et D' données par leurs représentations paramétriques : $D : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 - t \\ z = 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et $D' : \begin{cases} x = -2 - t \\ y = -3 + t \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

2° Équations cartésiennes de droites

1° a) Justifier qu'un système d'équations cartésiennes d'une droite Δ dans le repère $\mathcal{R}$ est de la forme $\begin{cases} ux + vy + wz = h \\ u'x + v'y + w'z = h' \end{cases}$. Quelle condition doit-on imposer à $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ pour que $\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta' \end{cases}$ soit un système d'équations cartésiennes d'une droite D ?

1° b) Montrer que la droite Δ : $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ est dirigée par $< \overrightarrow{u} >$ avec

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

1° c) À quelle condition deux droites $D\ :\ \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$ et $\Delta\ :\ \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z=\delta' \end{cases}$ sont-elles parallèles ? confondues ? sécantes ?

1° d) Soit D la droite passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ dont les trois coordonnées sont non nulles. Montrer qu'un système d'équations cartésiennes de la droite D est $\dfrac{x-x_A}{\alpha}=\dfrac{y-y_A}{\beta}=\dfrac{z-z_A}{\gamma}$.

1° e) Comment trouver une représentation paramétrique d'une droite dont on connaît un système d'équations cartésiennes ? Et comment trouver un système d'équations cartésiennes d'une droite dont on connaît une représentation paramétrique ?

3° Déterminer l'équation du plan qui contient la droite $D\ :\ \begin{cases} x-1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$ et qui passe par le point $A(3,-1,1)$.

Exercice 1.15.
Démontrer la réciproque du théorème des milieux (théorème 1.25 p. 18) : si F et F' sont deux variétés affines strictement parallèles de direction $\overrightarrow{F}$, si $A, C \in F$, si $B, D \in F'$, si I est le milieu de $[AB]$, si J est le milieu de $[CD]$, alors la droite (IJ) (si elle existe) est faiblement parallèle à F et à F'. Dans quel cas la droite (IJ) n'existe-t-elle pas ?

Exercice 1.16.
Démontrer la réciproque du théorème de Thalès (théorème 1.31 p. 21) : si deux droites D et Δ coupent 3 hyperplans parallèles H_2, H_3 et H_4 (avec $H_3 \neq H_4$) respectivement en A_i et B_i, si A_1 est un point de D et B_1 un point de Δ tels que $\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_3A_4}}=\dfrac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_3B_4}}$ alors la droite (A_1B_1) (si elle existe) est faiblement parallèle aux hyperplans H_i . Est-il possible que (A_1B_1) n'existe pas ?

CHAPITRE 2

Applications affines

2.1 Introduction et définition

Nous considérerons deux espaces affines $(E, \overrightarrow{E})$ et $(E', \overrightarrow{E'})$.
On cherche à étudier les morphismes de structure affine entre E et E'. Soit f une application de E vers E'. On va étudier des conditions nécessaires pour que f « conserve la structure affine », c'est-à-dire soit un morphisme.
Fixons arbitrairement un point A de E, et soit $A' = f(A)$. On sait qu'à tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{E}$, on peut associer l'unique point $B = A + \overrightarrow{u}$. f fait ensuite correspondre à ce point B un point $B' = f(B)$ de E', et grâce au point A', on associe maintenant un vecteur $\overrightarrow{u'} = B' - A'$.
En résumé, la donnée d'une application f de E vers E' et d'un point A de E définit toujours une application φ_A de $\overrightarrow{E}$ vers $\overrightarrow{E'}$. On dit que φ_A est l'*application vectorielle* associée à f par le point A.
On a, pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, $\varphi_A(\overrightarrow{u}) = f(A + \overrightarrow{u}) - A' = f(A + \overrightarrow{u}) - f(A)$.
La conservation de la structure affine qu'on veut obtenir suggère qu'il serait logique que l'application φ_A ainsi définie conserve la structure d'espace vectoriel, donc soit un morphisme d'espace vectoriel, donc soit une application linéaire de $\overrightarrow{E}$ vers $\overrightarrow{E'}$.
Considérons maintenant les conséquences de cette hypothèse : $\varphi_A \in \mathcal{L}(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{E'})$.
Soit $B = A + \overrightarrow{x}$ un autre point de E. Il permet de définir une autre application φ_B, (l'application vectorielle associée à f par B), qui est définie par :
pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, $\varphi_B(\overrightarrow{u}) = f(B + \overrightarrow{u}) - B' = f(B + \overrightarrow{u}) - f(B)$.
On peut alors faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\varphi_B(\overrightarrow{u}) &= f(A + \overrightarrow{x} + \overrightarrow{u}) - f(A + \overrightarrow{x}) \\ &= \Big(f(A + \overrightarrow{x} + \overrightarrow{u}) - f(A)\Big) - \Big(f(A + \overrightarrow{x}) - f(A)\Big) \quad \text{(relation de Chasles)} \\ &= \varphi_A(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{u}) - \varphi_A(\overrightarrow{x}) = \varphi_A(\overrightarrow{u}) \quad \text{(linéarité de } \varphi_A\text{)}\end{aligned}$$

et donc $\varphi_B = \varphi_A$.

On a donc obtenu, sous la seule hypothèse de la linéarité de φ_A que toutes les applications φ_B sont linéaires et sont égales à φ_A.
On définit alors l'application linéaire $\varphi = \varphi_A$, qui ne dépend plus de A.
De plus, pour tout $M \in E$, on peut déterminer $f(M)$ grâce à l'application φ et à $f(A)$: Puisque $\varphi(M - A) = f(A + (M - A)) - f(A) = f(M) - f(A)$, on a $f(M) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AM})$.
Récapitulons :

Définition 2.1 Une application f entre deux espaces affines $(E, \overrightarrow{E})$ et $(E', \overrightarrow{E'})$ est une *application affine* (on dit aussi un *morphisme affine*) si et seulement si il existe un point $A \in E$ tel que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \overrightarrow{E} & \longrightarrow & \overrightarrow{E'} \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & f(A + \overrightarrow{u}) - f(A) \end{array}$ est linéaire.

Dans ce cas, pour tout $B \in E$, pour tout $M \in E$, on a $f(M) = f(B) + \varphi(M - B)$, ce qui peut aussi se noter $\varphi(\overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{f(B)f(M)}$.
φ est l'*application linéaire associée* à l'application f ; on dit aussi que φ est la *partie linéaire* de f. On note $\varphi = L(f) = L_f$ ou aussi $\varphi = \overrightarrow{f}$.

Remarque : En interprétant différemment la définition, on s'aperçoit qu'une application f est affine de E vers E' s'il existe un point A tel que f soit linéaire entre les vectorialisés E_A et $E'_{f(A)}$. (Voir exercice 2.1 p. 56).

Une propriété très importante est la suivante :

Proposition 2.2 Soient $(E, \overrightarrow{E})$ et $(F, \overrightarrow{F})$ deux espaces affines.
Soit φ une application linéaire de $\overrightarrow{E}$ vers $\overrightarrow{F}$. Soit $A \in E$ et $B \in F$. Il existe une application affine f de E vers F telle que $f(A) = B$ et dont la partie linéaire est φ, et elle est unique en ce sens que si g est une autre application affine de E vers F telle que $g(A) = B$ et dont φ est aussi la partie linéaire, alors $f = g$.
En d'autres termes, une application affine est entièrement déterminée par sa partie linéaire et par la donnée de l'image d'un point :
Si f et g deux applications affines entre les espaces affines $(E, \overrightarrow{E})$ et $(F, \overrightarrow{F})$. Si f et g ont la même partie linéaire φ et s'il existe un point A tel que $f(A) = g(A)$, alors $f = g$.

Preuve Soit f l'application de E vers F définie par $f(M) = B + \varphi(M - A)$. Il est clair que $f(A) = B$. Montrons que f est affine (et ce faisant, nous verrons que sa partie linéaire est φ). Soit φ_A l'application vectorielle associée à f par le point A. Nous allons prouver que $\varphi_A = \varphi$.
Soit $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$, on a $\varphi_A(\overrightarrow{x}) = f(A + \overrightarrow{x}) - f(A) = B + \varphi((A + \overrightarrow{x}) - A) - B = \varphi(\overrightarrow{x})$.
On a donc trouvé une application affine ayant les propriétés recherchées.

Soit g une autre application affine de partie linéaire φ, et telle que $g(A) = B$. Soit M un point de E. On a $g(M) = B + \varphi(M - A) = f(M)$, ceci pour tout M, donc $g = f$.□

2.2 Exemples de référence

Dans tous ces exemples, $(E, \overrightarrow{E})$ et $(E', \overrightarrow{E'})$ sont des espaces affines *de dimension finie.* Nous allons étudier des applications classiques et montrer dans chaque cas que ce sont des applications affines.

2.2.1 Applications constantes

Proposition 2.3 Les applications constantes sont les applications affines dont la partie linéaire est l'application nulle.

Preuve Soit A' fixé dans E'. Considérons l'application constante $f : M \longmapsto A'$. Montrons que f est affine.
Soit $O \in E$: considérons l'application vectorielle associée à f par O
$\varphi_O : \overrightarrow{u} \longmapsto f(O + \overrightarrow{u}) - f(O) = A' - A' = \overrightarrow{0}$. C'est l'application constante nulle, on sait que c'est une application linéaire, donc f est affine et $L(f) = 0$ (application nulle).

Réciproquement, il est aisé de vérifier que toute application affine dont la partie linéaire est l'application nulle est une application constante. (Voir exercice 2.2 p. 56.) □

2.2.2 Translations

Une translation est une application entre l'espace affine E et lui-même ($E' = E$). (Nous avons défini les translations au chapitre précédent, § **1.1.3** p. 2)

Proposition 2.4 Les translations sont les applications affines dont la partie linéaire est l'identité.

Preuve Montrons que la translation $t_{\overrightarrow{u}}$ (où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur fixé de $\overrightarrow{E}$) est une application affine.
Soit $A \in E$. On étudie l'application vectorielle φ associée à $t_{\overrightarrow{u}}$ par A :
On a $\forall \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(\overrightarrow{x}) &= t_{\overrightarrow{u}}(A + \overrightarrow{x}) - t_{\overrightarrow{u}}(A) = ((A + \overrightarrow{x}) + \overrightarrow{u}) - (A + \overrightarrow{u}) \\
&= (A + (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{u})) - (A + \overrightarrow{u}) = ((A + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{x}) - (A + \overrightarrow{u}) \\
&= (A' + \overrightarrow{x}) - A' \qquad \text{(en posant } A' = A + \overrightarrow{u} = t_{\overrightarrow{u}}(A)) \\
&= \overrightarrow{x}
\end{aligned}$$

L'application φ est donc l'application identité de $\overrightarrow{E}$, qui est linéaire, et donc toute translation $t_{\overrightarrow{u}}$ est donc une application affine dont la partie linéaire est $\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$.

Réciproquement : soit f une application affine de E dans lui-même telle que $L(f) = \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$.
Soit $A \in E$ et soit $A' = f(A)$. Posons $\overrightarrow{u} = A' - A$. On a, pour tout $M \in E$,

$$f(M) = f(A) + L(f)(\overrightarrow{AM}) = A' + \overrightarrow{AM} = A + \overrightarrow{u} + M - A = M + \overrightarrow{u} = t_{\overrightarrow{u}}(M)$$

donc $f = t_{\overrightarrow{u}}$. □

Nous avons vu qu'on note $\mathcal{T}(E)$ l'ensemble des translations de $\overrightarrow{E}$, et que c'est un groupe.

2.2.3 Homothéties

Rappel : on appelle *homothétie vectorielle* d'un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$, de rapport $k \neq 1$ l'application linéaire $k\,\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$.
Nous allons définir les homothéties (affines) de l'espace affine E et nous montrerons que ce sont les applications affines de E dans lui-même admettant comme partie linéaire une homothétie (vectorielle) de $\overrightarrow{E}$, de rapport $k \neq 1$. (Les cas $k = 1$ et $k = 0$ ont déjà été étudiés : l'homothétie vectorielle de rapport 0 est l'application nulle, voir le § **2.2.1** p. 35 ; l'homothétie vectorielle de rapport 1 est l'identité de $\overrightarrow{E}$, voir le § précédent **2.2.2** p. 35.)

Définition 2.5 Soit $k \in \mathbb{K}^* \setminus \{1\}$, et $A \in E$ fixé.
On appelle homothétie de rapport k, de centre I, l'application $h = h_{I,k}$ définie par :

$$\forall M \in E, h(M) = I + k(M - I) = I + k\overrightarrow{IM}.$$

Proposition 2.6
Les homothéties de rapport $k \notin \{0, 1\}$ sont les applications affines dont la partie linéaire est $k\,\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$.
Le centre I d'une homothétie est son unique point fixe

Preuve Soit $h = h_{I,k}$ une homothétie. On remarque que $h(I) = I + k\overrightarrow{II} = I$, donc son centre est un point fixe de h. L'application vectorielle associée à f par I est $\varphi : \overrightarrow{u} \longmapsto h(I + \overrightarrow{u}) - h(I) = I + k\overrightarrow{u} - I = k\overrightarrow{u} = k\,\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}(\overrightarrow{u})$ donc $\varphi = k\,\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$ est l'homothétie vectorielle de rapport k, c'est bien une application linéaire et h est bien affine avec $L(h) = k\,\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$.

Réciproquement, si f est une application affine dont la partie linéaire est $L(f) = k\,\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$, soit A un point quelconque de E, et $A' = f(A)$.
Pour tout point M de E, on a $f(M) = f(A) + k\,\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}(M - A) = A' + k(M - A)$.
Cherchons si f admet des points fixes.
Un tel point I est tel que $f(I) = I$, ce qui équivaut à $I = A' + k(I - A)$ $(\mathcal{E})$ et « brutalement »(en résolvant cette équation comme s'il s'agissait d'une équation numérique,

en oubliant qu'on est en train de considérer des points) $I = \dfrac{1}{1-k}A' - \dfrac{k}{1-k}A$. Que signifie tout ceci ? Est-ce correct ? Lorsqu'on aura révisé le calcul barycentrique, et lorsqu'on aura compris l'existence de l'espace vectoriel universel associé à $(E, \overrightarrow{E})$, on pourra se contenter de ce calcul formel, qui prouve l'existence et l'unicité d'un point fixe I. Mais en attendant, il est plus prudent de procéder ainsi :

$$(\mathcal{E}) \iff I - A = A' - A + k(I - A) \iff (1-k)(I-A) = A' - A$$

$$\iff I - A = \frac{1}{1-k}(A' - A) \iff I = A + \frac{1}{1-k}(A' - A)$$

ou encore

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AA'} + k\overrightarrow{AI} \text{ et } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AA'}.$$

L'un ou l'autre de ces calculs (qui consistent en des raisonnements par équivalences) prouve l'existence d'un unique point fixe I de f.
Pour tout point M de E, on a alors

$$f(M) = f(I) + k\,\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}(M - I) = I + k(M - I) = h_{I,k}(M)$$

donc

$$f = h_{I,k}$$

et f est bien une homothétie. □

On a montré au passage l'*unicité* du point fixe d'une homothétie.

Notation : Nous noterons $\mathcal{H}(E)$ l'ensemble formé des homothéties affines de E (de rapport non nul, et différent de 1) et de l'identité de E, et $\mathcal{H}_A(E)$ l'ensemble formé des homothéties de E admettant A comme centre et de l'identité de E.

Remarque : Il est classique de considérer que $\mathrm{id}_E = h_{I,1}$ pour tout point I de E, c'est-à-dire que l'identité est une homothétie de rapport 1, dont le centre est quelconque. Cette convention a à la fois des avantages et des inconvénients. On trouve des avantages dans le fait que certaines propriétés ont des énoncés plus « légers » (par exemple, « l'ensemble des homothéties de centre I est un groupe » n'est vrai que si on considère que l'identité est une homothétie, sinon il faut écrire : « l'ensemble formé des homothéties de centre I et de l'identité est un groupe »). Cette convention serait aussi cohérente avec la définition d'une homothétie, grâce au fait que $h_{I,1}(M) = I + 1(M - I) = M = \mathrm{id}_E(M)$. Mais la particularité de l'identité d'avoir plus qu'un seul point fixe peut être très gênante. C'est pourquoi, dans cet ouvrage, nous avons choisi de ne pas la compter au nombre des homothéties ; le fait de devoir la compter à part, la nommer à chaque fois obligera le lecteur à réfléchir à son statut particulier.
$\mathcal{H}(E)$ et $\mathcal{H}_A(E)$ sont donc, pour nous, des ensembles qui ne contiennent que des homothéties de rapport $\neq 1$, et qui ne contiennent pas id_E.

2.2.4 Projections

On suppose, dans tout ce §, qu'on a une décomposition $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$ de $\vec{E}$ comme somme directe de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires $\vec{F}$ et $\vec{G}$.

Rappel sur les projections vectorielles.

La *projection vectorielle* sur $\vec{F}$ dans la direction de $\vec{G}$ est l'application $\pi = \pi_{\vec{F},\vec{G}}$ de $\vec{E}$ dans lui-même ainsi définie : pour tout vecteur $\vec{x}$ de $\vec{E}$, dont la décomposition selon la somme directe $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$ est $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ ($\vec{y} \in \vec{F}$, $\vec{z} \in \vec{G}$), alors $\vec{x}$ a pour image par π le vecteur $\pi(\vec{x}) = \vec{y}$.

Une projection vectorielle $\pi = \pi_{\vec{F},\vec{G}}$ est une application linéaire (un endomorphisme de $\vec{E}$) et elle vérifie

- $\ker \pi = \vec{G}$,
- $\operatorname{Im} \pi = \vec{F}$,
- $\vec{x} = \pi(\vec{x}) \iff \vec{x} \in \vec{F}$,
- $\pi \circ \pi = \pi$.

Un projecteur est une application g telle que $g \circ g = g$. Les projections vectorielles sont donc des projecteurs linéaires. Réciproquement, tout projecteur linéaire g est une projection vectorielle sur $\operatorname{Im} g$ dans la direction de $\ker g$.

La démonstration de ces rappels fait l'objet de l'exercice 2.5 p. 57.

Soient F et G deux variétés affines respectivement dirigées par $\vec{F}$ et $\vec{G}$; on sait que les sous-espaces affines F et G sont sécants (voir proposition 1.22 p. 17) et que leur intersection est réduite à un point : $F \cap G = \{A\}$.

De même, $\forall M \in E$, $M + \vec{G}$ est une variété affine et $(M + \vec{G}) \cap F$ est réduite à un point.

Définition 2.7 On appelle *projection sur F parallèlement à G* (ou *projection sur F dans la direction de G* ou *projection sur F de direction $\vec{G}$*) l'application $p = p_{F,\vec{G}}$ de E dans lui-même définie par : $M \longmapsto p(M) = M'$ avec $(M + \vec{G}) \cap F = \{M'\}$

Remarquons que dans cette définition, seule compte la direction $\vec{G}$ de G.

D'autre part, attention aux parenthèses :

$$M' = (M + \vec{G}) \cap F \neq M + (\vec{G} \cap \vec{F}) = M \qquad \text{(en fait } \vec{G} \cap F \text{ est un ensemble vide !)}$$

Proposition 2.8

(1) Une projection est une application affine, sa partie linéaire est une projection vectorielle de $\vec{E}$. Plus précisément, la partie linéaire de la projection affine sur F dans la direction de G est la projection vectorielle sur $\vec{F}$ de direction $\vec{G}$.

(2) Une projection affine p vérifie $p \circ p = p$ et $p(E) = F$. En particulier si $F \neq E$, p n'est pas bijective.

(3) Si $p = p_{F,\overrightarrow{G}}$, F est l'ensemble des points fixes de p. ($p(M) = M \iff M \in F$).

(4) Une application affine qui admet un point fixe et dont la partie linéaire est une projection vectorielle est une projection affine.

(5) Toute application affine f qui vérifie $f \circ f = f$ est une projection.

Preuve Notons $p = p_{F,\overrightarrow{G}}$.

(3) Soit $A \in F$. Tout d'abord, puisque $A \in A + \overrightarrow{G}$ et $A \in F$, $(A + \overrightarrow{G}) \cap F = \{A\}$ et $p(A) = A$.
Réciproquement, si $p(A) = A$, c'est que $A = p(A) \in F \cap (A + \overrightarrow{G})$, donc en particulier $A \in F$.

(1) Considérons l'application vectorielle π associée à p par A. Puisque par hypothèse $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ sont supplémentaires, tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$ peut s'écrire de façon unique $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{G}$.
Alors $\pi(\overrightarrow{u}) = p(A + \overrightarrow{u}) - p(A) = p(A + \overrightarrow{u}) - A = p(A + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) - A$.
Or, $A + \overrightarrow{v} \in A + \overrightarrow{F} = F$ et $A + \overrightarrow{v} = (A + \overrightarrow{u}) + (-\overrightarrow{w}) \in (A + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{G}$, donc

$$((A + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{G}) \cap F = \{A + \overrightarrow{v}\}$$

et

$$p(A + \overrightarrow{u}) = A + \overrightarrow{v},$$

d'où

$$\pi(\overrightarrow{u}) = A + \overrightarrow{v} - A = \overrightarrow{v}.$$

π est donc l'application qui associe à tout vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ le vecteur $\overrightarrow{v}$: c'est la projection vectorielle sur $\overrightarrow{F}$ de direction $\overrightarrow{G}$, c'est bien une application linéaire, donc p est bien une application affine.

(2) Pour tout $M \in E$, on a $M' = p(M) \in F \cap (M + \overrightarrow{G}) \subset F$ d'où $p(M) \in F$: on a montré que $p(E) \subset F$. D'autre part, on a vu que si $A \in F$ alors $A = p(A) \in p(E)$ donc $F \subset p(E)$, et on a établi l'égalité $p(E) = F$.
Si p est bijective, elle est en particulier surjective, et on a $E = p(E) = F$, donc p n'est pas bijective si $F \neq E$.
Enfin, pour tout $M \in E$, on a $p \circ p(M) = p(M') = M' = p(M)$ (car $M' \in F$) donc $p \circ p = p$.

(4) et (5) : voir l'exercice 2.8 p. 58. □

Remarque : il est faux qu'une application affine admettant comme partie linéaire une projection vectorielle est une projection affine.

2.2.5 Symétries

On suppose ici aussi qu'on a une décomposition $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$ de $\vec{E}$ comme somme directe de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires $\vec{F}$ et $\vec{G}$.

Rappel sur les symétries vectorielles

La symétrie vectorielle par rapport à $\vec{F}$ dans la direction de $\vec{G}$ est l'application $\sigma = \sigma_{\vec{F},\vec{G}}$ de $\vec{E}$ dans lui-même ainsi définie : pour tout vecteur $\vec{x}$ de $\vec{E}$, dont la décomposition selon la somme directe $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$ est $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ ($\vec{y} \in \vec{F}$, $\vec{z} \in \vec{G}$), alors $\vec{x}$ a pour image par σ le vecteur $\sigma(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z}$.
Une symétrie vectorielle $\sigma = \sigma_{\vec{F},\vec{G}}$ est une application linéaire (un endomorphisme de $\vec{E}$) et elle vérifie

- $\ker(\sigma - \mathrm{id}_{\vec{E}}) = \vec{F}$, (ou ce qui revient au même, $\vec{x} = \sigma(\vec{x}) \iff \vec{x} \in \vec{F}$) ;
- $\ker(\sigma + \mathrm{id}_{\vec{E}}) = \vec{G}$;
- $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{\vec{E}}$;
- $\sigma = \pi - \pi'$ avec $\pi = \pi_{\vec{F},\vec{G}}$ et $\pi' = \pi_{\vec{G},\vec{F}}$.

Une *involution* est une application g d'un ensemble E dans lui-même telle que $g \circ g = \mathrm{id}_E$. Les symétries vectorielles sont donc des involutions linéaires. Réciproquement, toute involution linéaire g est une symétrie vectorielle par rapport à $\ker(g - \mathrm{id}_{\vec{E}})$ dans la direction de $\ker(g + \mathrm{id}_{\vec{E}})$.
La démonstration de ces rappels fait l'objet de l'exercice 2.9 p. 58.

Comme pour les projections, nous supposerons aussi que $F = A + \vec{F}$ est un sous-espace affine dirigé par $\vec{F}$ et G est un sous-espace affine de direction $\vec{G}$.

Définition 2.9 On appelle *symétrie* par rapport à F, parallèlement à G (ou de direction $\vec{G}$) (ou dans la direction de $\vec{G}$) l'application $s = s_{F,\vec{G}}$ définie par :

$$\forall M \in E,\ s(M) = M + 2\overrightarrow{Mp(M)}$$

où $p = p_{F,\vec{G}}$ désigne la projection affine sur F parallèlement à G : $p(M)$ est donc le projeté de M sur F dans la direction de G.

Proposition 2.10 (1) La symétrie s par rapport à F parallèlement à G est une application affine.

(2) Elle est caractérisée par : $s(M)$ est l'unique point M' de E qui est tel que le milieu I de $[MM']$ est $I = p(M)$.

(3) Son application linéaire associée σ est une symétrie vectorielle de $\vec{E}$; σ est la symétrie vectorielle par rapport à $\vec{F}$ de direction $\vec{G}$.

(4) Une symétrie s est involutive (elle vérifie $s \circ s = \mathrm{id}_E$).

(5) F est l'ensemble des points fixes de s.

(6) Toute application affine admettant un point fixe et dont la partie linéaire est involutive est une symétrie.

(7) Toute application affine involutive est une symétrie.

La démonstration de cette propriété sera l'objet de l'exercice 2.10 p. 58.

2.2.6 Applications affines entre espaces vectoriels

Soient V et V' deux espaces vectoriels munis de leurs structures affines canoniques.
Une application f de V dans V' est affine lorsqu'il existe un élément $a \in V$ tel que l'application φ définie par $\varphi(x) = f(a+x) - f(a)$ est linéaire, et alors on a $\varphi(x) = f(u+x) - f(u)$ pour tout $u \in V$.
En particulier, si $u = 0_V$, on a $\varphi(x) = f(x) - f(0_V)$ qui est linéaire, donc pour tout $x \in V$, on a $f(x) = \varphi(x) + f(0_V)$. Posons $b = f(0_V)$, on a $f = \varphi + b$.
On a montré que toute application affine est la somme d'une application linéaire et d'une application constante.
Réciproquement, s'il existe une application linéaire φ de V vers V' et un élément b de V' tels que $f = \varphi + b$, on a clairement $b = f(0_V)$ et donc pour tout $x \in V$, $f(x) = f(0_V) + \varphi(x - 0_V)$, ce qui montre que f est une application affine.
Nous avons démontré le résultat suivant :

Proposition 2.11 Les applications affines entre deux espaces vectoriels sont les applications obtenues comme somme d'une application linéaire et d'une constante.

Remarquons qu'une application affine f entre deux espaces vectoriels est linéaire si et seulement si $f(0_V) = 0_{V'}$.

Cas particulier : une forme affine est la somme d'une forme linéaire et d'une constante, c'est la raison pour laquelle cette notion a peu d'intérêt pratique.

2.3 Étude des applications affines

Nous noterons $\mathcal{A}(E, E')$ l'ensemble des applications affines de E dans E' (espaces affines d'espaces vectoriels associés respectivement $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{E'}$). De même $\mathcal{A}(E)$ désigne l'ensemble des applications affines de E dans E (les endomorphismes affines).

2.3.1 Caractérisation des applications affines bijectives

Proposition 2.12
Soit $f \in \mathcal{A}(E, E')$ et φ sa partie linéaire.
f est injective (resp. surjective) si et seulement si φ est injective (resp. surjective).

En particulier, f bijective équivaut à φ bijective. On parle dans ce cas d'*isomorphisme affine*. Les isomorphismes affines d'un espace affine $(E, \overrightarrow{E})$ dans lui-même sont appelés des *transformations affines* de E.

Preuve Soit A un point fixé de E, et $A' = f(A)$. Pour tout $M' \in E'$, résoudre l'équation $f(M) = M'$ équivaut à résoudre $A' + \varphi(\overrightarrow{AM}) = A' + \overrightarrow{A'M'}$ ou encore $\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$. Dire que cette équation d'inconnue M admet pour tout point M' au plus une [resp. au moins une] [resp. exactement une] solution équivaut donc à affirmer que l'équation $\varphi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u'}$ d'inconnue $\overrightarrow{u}$, admet pour tout $\overrightarrow{u'} \in \overrightarrow{E'}$ au plus une [resp. au moins une] [resp. exactement une] solution. Ces trois cas correspondent exactement à la notion respectivement d'injection, surjection et bijection. □

2.3.2 Image directe et réciproque d'une variété affine

Proposition 2.13 Soit $f \in \mathcal{A}(E, E')$ et φ sa partie linéaire. Soient F une variété affine de E de direction $\overrightarrow{F}$, et soit G' une variété affine de E', de direction $\overrightarrow{G'}$.

Alors
(i) $f(F)$ est une variété affine de E' de direction $\varphi(\overrightarrow{F})$,

et
(ii) $f^{-1}(G')$ est soit vide, soit c'est une variété affine de E, de direction $\varphi^{-1}(\overrightarrow{G'})$.

En particulier,

Si f est surjective, $f^{-1}(G')$ n'est jamais vide.

Si f est injective, on a $\dim f(F) = \dim F$.

Si f est bijective (ce qui implique $\dim E = \dim E'$), alors $\dim f(F) = \dim F$ et $\dim(f^{-1}(G')) = \dim G'$ (cet ensemble est dans ce cas toujours non vide).

Remarque : En particulier, l'image d'une droite par une application affine est une droite ou un point et l'image d'une droite par une application affine bijective (translation, homothétie,...) est une droite.

Preuve Les dernières assertions sont des conséquences évidentes de cet énoncé et des propriétés des applications linéaires injectives et bijectives.

(i) Soit $A \in F$. Soit $F' = f(A) + \varphi(\overrightarrow{F})$; d'après les propriétés d'une application linéaire, $\varphi(\overrightarrow{F})$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E'}$ donc F' est un variété affine de E'. On va montrer que $f(F) = F'$, ce qui établira que $f(F)$ est un sous-espace affine.

Soit $M' \in f(F)$.
Il existe $M = A + \overrightarrow{u} \in A + \overrightarrow{F} = F$ tel que $M' = f(M) = f(A) + \varphi(M - A)$.

Or, $\varphi(M - A) \in \varphi(\overrightarrow{F})$ puisque $M - A \in \overrightarrow{F}$, donc $M' \in F' = f(A) + \varphi(\overrightarrow{F})$. On a montré la première inclusion $f(F) \subset F'$.

Réciproquement, si $M' \in F' = f(A) + \varphi(\overrightarrow{F})$, on écrit $M' = f(A) + \overrightarrow{u'}$ avec $\overrightarrow{u'} \in \varphi(\overrightarrow{F})$, donc il existe $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ tel que $\overrightarrow{u'} = \varphi(\overrightarrow{u})$; on a donc $M' = f(A) + \varphi(\overrightarrow{u})$. Soit $M = A + \overrightarrow{u}$; $M \in A + \overrightarrow{F} = F$ et on a $f(M) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AM}) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{u}) = M'$, donc on a bien $M' \in f(F)$, et on a établi que $F' \subset f(F)$.

(ii) Si on suppose que $G = f^{-1}(G')$ est non vide, soit $A \in f^{-1}(G')$. On a donc $f(A) \in G'$ et $G' = f(A) + \overrightarrow{G'}$. On sait que $\overrightarrow{G} = \varphi^{-1}(\overrightarrow{G'})$ est toujours un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. Montrons que $G = A + \overrightarrow{G}$.

Soit $M \in G$.
On a $f(M) \in G'$ donc $f(M) = f(A) + \overrightarrow{v'}$ avec $\overrightarrow{v'} \in \overrightarrow{G'}$, ce qui prouve que $\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{v'} \in \overrightarrow{G'}$ donc $\overrightarrow{AM} \in \varphi^{-1}(\overrightarrow{G'}) = \overrightarrow{G}$ et on a donc $M = A + \overrightarrow{AM} \in A + \overrightarrow{G}$: on a prouvé la première inclusion $G \subset A + \overrightarrow{G}$.

Soit $M \in A + \overrightarrow{G}$.
On a $\overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{G} = \varphi^{-1}(\overrightarrow{G'})$ donc $\varphi(\overrightarrow{AM}) \in \overrightarrow{G'}$.
D'où $f(M) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AM}) \in f(A) + \overrightarrow{G'} = G'$, ce qui signifie très précisément que $M \in G$: on a établi la deuxième inclusion $A + \overrightarrow{G} \subset G$.
On a donc montré que $G = A + \overrightarrow{G}$, donc $G = f^{-1}(G')$ est bien une variété affine. □

2.3.3 Ensemble des points fixes d'une application affine

Proposition 2.14 L'ensemble des points fixes d'une application affine $f \in \mathcal{A}(E)$ de partie linéaire φ est soit vide, soit c'est une variété affine de direction $\ker(\varphi - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$.

f a un unique point fixe équivaut à $\ker(\varphi - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}) = \{0\}$, ce qui se traduit par le fait que 1 n'est pas valeur propre de φ.

Preuve Supposons que f admet un point fixe A.
Soit F l'ensemble des points fixes de f. Soit M un point quelconque de E. M est un point fixe (invariant par f) (ou encore $M \in F$) si et seulement si : $f(M) = M \iff f(A) + \varphi(M - A) = M \iff A + \varphi(M - A) = A + (M - A)$ c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur invariant par φ. Or, l'ensemble des vecteurs invariants de φ est son sous-espace propre pour la valeur propre 1 (ou $\{\overrightarrow{0}\}$ si 1 n'est pas valeur propre de φ), c'est $\overrightarrow{E_1} = \ker(\varphi - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$. Finalement on a prouvé que $M \in F \iff M \in A + \overrightarrow{E}_1$, ce qui prouve que F est un sous-espace affine dirigé par $\overrightarrow{E}_1$.

Supposons maintenant que 1 n'est pas valeur propre de φ. Il reste à établir qu'il existe toujours un unique point fixe :

Soit O un point quelconque de E, et soit $O' = f(O)$. L'application linéaire $\varphi - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$ est bijective (puisque 1 n'est pas valeur propre de φ), donc il existe un unique $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$

tel que $\varphi(\vec{u}) - \vec{u} = O - O'$, et le point $M = O + \vec{u} = O' + \varphi(\vec{u}) = f(M)$ est bien invariant par f ; de plus, c'est le seul, puisque

$$f(M) = M \iff O' + \varphi(\vec{u}) = O + \vec{u} \iff \varphi(\vec{u}) - \vec{u} = O - O'$$

□

2.3.4 Composition d'applications affines

Proposition 2.15
Soient $f \in \mathcal{A}(E, E')$ et $g \in \mathcal{A}(E', E'')$ de parties linéaires respectivement $\vec{f}$ et $\vec{g}$. Alors $g \circ f \in \mathcal{A}(E, E'')$ et $L(g \circ f) = \vec{g} \circ \vec{f}$ (ce qu'on peut noter $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.)
Si de plus f est une bijection entre E et E', alors $f^{-1} \in \mathcal{A}(E', E)$ et $L(f^{-1}) = (L(f))^{-1} = \vec{f}^{-1}$ (ce qu'on peut noter $\overrightarrow{f^{-1}} = \left(\vec{f}\right)^{-1}$.)

Preuve Soit A un point quelconque de E, et soit $B = f(A)$. On sait que pour tout point $M \in E$ on a $f(M) = f(A) + \vec{f}(M - A) = M'$.
D'autre part on a $g(M') = g(B) + \vec{g}(M' - B)$.
On a donc

$$(g \circ f)(M) = g(M') = g(f(A)) + \vec{g}(f(A) + \vec{f}(M - A) - B) = g \circ f(A) + \vec{g} \circ \vec{f}(M - A)$$

et puisque la composée de deux applications linéaires est linéaire, ceci permet d'affirmer que $g \circ f$ est affine, de partie linéaire $L(g \circ f) = \vec{g} \circ \vec{f}$.

Si de plus f est bijective. Pour tout $M' \in E'$, soit $M = f^{-1}(M')$ son unique antécédent par f. On a donc $M' = f(M) = B + \vec{f}(M - A)$, d'où $M' - B = \vec{f}(M - A)$. Mais on a vu que $\vec{f}$ est également bijective, (et on sait que l'application réciproque d'une application linéaire est linéaire). On peut donc écrire $M - A = \vec{f}^{-1}(M' - B)$ et $f^{-1}(M') = f^{-1}(B) + \vec{f}^{-1}(M' - B)$. Ceci prouve que f^{-1} est affine et que sa partie linéaire est $L(f^{-1}) = \vec{f}^{-1}$. □

Nous noterons $GA(E)$ l'ensemble des applications affines bijectives de E dans lui-même. Rappelons que $GL(\vec{E})$ désigne le groupe linéaire de $\vec{E}$, c'est-à-dire l'ensemble des isomorphismes de $\vec{E}$ (applications linéaires bijectives de $\vec{E}$ dans lui-même). On note naturellement L l'application qui à une bijection affine associe sa partie linéaire.

De la proposition précédente on déduit immédiatement :

Proposition 2.16 (et définition) $(GA(E), \circ)$ est un groupe qu'on appelle *groupe affine de* E et l'application L de $GA(E)$ vers $GL(\vec{E})$ qui associe à un isomorphisme affine de E sa partie linéaire est un morphisme de groupe de $GA(E)$ vers $GL(\vec{E})$.

Ce groupe est bien sûr non commutatif. Il possède un sous-groupe remarquable.

2.3.5 Dilatations

Proposition 2.17 $(E, \overrightarrow{E})$ étant un espace affine de dimension finie, l'ensemble formé des translations et des homothéties est un sous-groupe *distingué* de $GA(E)$. On le note $\mathcal{D}(E) = \mathcal{T}(E) \cup \mathcal{H}(E)$; il est appelé groupe des *dilatations* de E (ou groupe des *homothéties-translations*).
$\mathcal{T}(E)$ est un sous-groupe commutatif de $\mathcal{T}(E) \cup \mathcal{H}(E)$, distingué dans le groupe des dilatations et dans le groupe affine de E.

Preuve Si $H(\overrightarrow{E}) = \mathbb{R}^* \operatorname{id}_{\overrightarrow{E}} = \{k \operatorname{id}_{\overrightarrow{E}} \mid k \in \mathbb{R}^*\}$ est l'ensemble des homothéties vectorielles, il est clair que $H(\overrightarrow{E})$ est un sous-groupe distingué de $GL(\overrightarrow{E})$ (c'est le centre de ce groupe, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $GL(\overrightarrow{E})$ qui commutent avec tous les autres éléments du groupe). Puisque L est un morphisme de groupe entre $GA(E)$ et $GL(\overrightarrow{E})$, on sait que $L^{-1}(H(\overrightarrow{E}))$ est un sous-groupe distingué du groupe $GA(E)$. Mais on a vu que la partie linéaire d'une application affine f de E dans E est $L_f = k \operatorname{id}_{\overrightarrow{E}}$ $(k \in \mathbb{R}^*)$ si et seulement si f est une translation $(k = 1)$ ou une homothétie $(k \neq 1)$. Donc $\mathcal{H}(E) \cup \mathcal{T}(E) = L^{-1}(H(\overrightarrow{E}))$ est bien un sous-groupe distingué de $GA(E)$.
Pour la fin de la démonstration, il suffit de remarquer que $\mathcal{T}(E) = \ker L$. $\square$

2.3.6 Décomposition de $GA(E)$

Soit Ω un point de E, nous noterons $GA_\Omega(E)$ l'ensemble des applications affines bijectives qui laissent Ω invariant.

Proposition 2.18 $(GA_\Omega(E), \circ)$ est un sous-groupe de $GA(E)$, et la restriction L_Ω de l'application L à $GA_\Omega(E)$ est un isomorphisme de groupe de $GA_\Omega(E)$ sur $GL(\overrightarrow{E})$.

Preuve $GA_\Omega(E)$ est le stabilisateur de Ω dans $GA(E)$ (l'ensemble des éléments f de $GA(E)$ qui sont tels que $f(\Omega) = \Omega$), et à ce titre c'est un sous-groupe de $GA(E)$ (résultat classique très facile à démontrer).

L_Ω est la restriction à un sous-groupe de $GA(E)$ d'un morphisme de groupes défini sur ce groupe, L_Ω est donc bien un morphisme de groupe.

Une application affine étant entièrement déterminée par l'image d'un point et sa partie linéaire (proposition 2.2 p. 34), pour toute application linéaire $\varphi \in GL(\overrightarrow{E})$, il existe une unique application affine f dans GA_Ω telle que $L(f) = L_\Omega(f) = \varphi$: c'est l'application f définie par $f(M) = \Omega + \varphi(M - \Omega)$. Cela montre bien que L_Ω est bijective, et donc que c'est un isomorphisme. $\square$

Rappel : *Un groupe G est produit semi-direct d'un sous groupe H par un sous groupe K lorsque H est distingué et de plus (e étant le neutre de G) $G = HK$, et $H \cap K = \{e\}$.*

Ces deux dernières conditions traduisent le fait que tout élément x de G peut s'écrire de façon unique $x = yz$, $y \in H$ et $z \in K$.
(Si K est aussi un sous-groupe distingué, alors on a un produit direct de sous-groupes).

Proposition 2.19 Quel que soit le point Ω de E, $GA(E)$ est produit semi-direct de $\mathcal{T}(E)$ par $GA_\Omega(E)$.

Preuve On a vu (proposition 2.17 p. 45) que $\mathcal{T}(E)$ est un sous-groupe distingué de $GA(E)$. De plus, pour toute bijection affine f, posons $\Omega' = f(\Omega)$. On a pour tout $M \in E$,

$$f(M) = f(\Omega) + L(f)(M - \Omega) = \Omega + L(f)(M - \Omega) + (\Omega' - \Omega) = t_{\overrightarrow{\Omega\Omega'}} \circ f_\Omega(M)$$

avec $f_\Omega = (L_\Omega)^{-1}(L(f)) \in GA_\Omega(E)$ et $t_{\overrightarrow{\Omega\Omega'}} \in \mathcal{T}(E)$.
On a montré que $GA(E) = \mathcal{T}(E) \cdot GA_\Omega(E)$.
De plus une translation qui admet Ω comme point fixe est bien sûr égale à l'identité, donc on a bien $\mathcal{T}(E) \cap GA_\Omega(E) = \{\mathrm{id}_E\}$. □

2.4 Détermination d'une application affine

Une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée de l'image des vecteurs d'une base. Nous allons établir une propriété analogue pour les applications affines. Auparavant, nous allons préciser la correspondance entre un point et ses coordonnés dans un repère cartésien que nous avons déjà étudiée avec la proposition 1.6 p. 4.

2.4.1 Isomorphisme avec $\mathbb{R}^n$

Proposition 2.20 Soit E un espace affine sur un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$, de dimension n. Soit $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un repère cartésien de E.
Alors l'application qui associe à un point M ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ est un isomorphisme affine entre E et $\mathbb{R}^n$, dont la partie linéaire est l'isomorphisme entre $\overrightarrow{E}$ et $\mathbb{R}^n$ que définit le choix de la base $\mathcal{B}$ (qui associe à un vecteur $\overrightarrow{x}$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$).

Preuve Il suffit d'appliquer les définitions. □

2.4.2 Formules analytiques d'un morphisme affine

Proposition 2.21 Soit f une application entre deux espaces affines $(E, \overrightarrow{E})$ et $(E', \overrightarrow{E'})$.
On suppose donnés un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}) = (O, \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ de E et un repère cartésien $\mathcal{R}' = (\Omega, \mathcal{B}') = (\Omega, \overrightarrow{e'_1}, \dots, \overrightarrow{e'_n})$ de E'.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ d'un point $M \in E$ quelconque ; si $M' = f(M)$, soient $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ les coordonnées de M' dans $\mathcal{R}'$.

Alors f est une application affine si et seulement si on peut exprimer les coordonnées X' de $M' = f(M)$ en fonction des coordonnées X de M par des formules du type

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad x'_i = \sum_{j=1}^{p} u_{ij} x_j + b_i$$

$b_1, \dots, b_n$ et $(u_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ étant des constantes réelles.

Preuve Supposons d'abord que f est affine, et soit φ sa partie linéaire.
Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ la matrice de φ pour les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit $O' = f(O)$ et soient $X'_{O'} = \begin{pmatrix} x_{O'_1} \\ \vdots \\ x_{O'_n} \end{pmatrix}$ les coordonnées de O' dans le repère $\mathcal{R}'$.

On considère un point M, de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, les coordonnées de son image $M' = f(M)$ étant $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont aussi X et les coordonnées de $\varphi(\overrightarrow{OM})$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont $\mathrm{A}X$, grâce aux propriétés de la matrice d'une application linéaire.
De la relation $M' = f(O) + \varphi(\overrightarrow{OM})$, en utilisant les hypothèses qu'on vient de formuler, en passant aux coordonnées, on obtient $X' = X'_{O'} + \mathrm{A}\,X$, ce qui permet d'écrire les *formules analytiques de* f :

$$x'_i = x_{O'_i} + \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

Ces formules analytiques sont bien du type annoncé.

Réciproquement

Si l'image d'un point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathcal{R}$ par une application f entre E et E' est le point $f(M) = M'$ dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathcal{R}'$ sont données par les formules

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad x'_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_j + b_j$$

alors f est une application affine dont la partie linéaire est l'application linéaire de matrice $\mathrm{U} = (u_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et qui est telle que $f(O) = O'$ de coordonnées $\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Pour s'en convaincre, il suffit de chercher les formules analytiques de l'application affine g ayant ces caractéristiques, de constater que ce sont les mêmes que celles définissant f, et de conclure que puisque $f = g$, f est bien affine. □

Les formules analytiques d'une application affine dépendent bien évidemment des repères cartésiens considérés. Pour un endomorphisme affine, on prendra presque toujours (sauf pour un changement de repère, au § suivant) le même repère « au départ » et « à l'arrivée ».

Remarquons que si on omet les $b_i = x_{O'_i}$ dans l'écriture des formules analytiques de f, on retrouve les formules analytiques de $\varphi = L(f)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Dans ce cas ces formules analytiques « homogènes » sont aussi celles de l'application affine admettant φ comme partie linéaire et qui transforme O en Ω.

Si $E = E'$, c'est-à-dire lorsque f est un endomorphisme affine, en prenant $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$, alors les formules « homogènes » associées aux formules analytiques de f sont celles de l'application affine qui admet φ comme partie linéaire et qui *fixe* O, alors que les formules analytiques de la translation t de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ sont $x'_i = x_{O'_i} + x_i$. On retrouve ici une illustration de la décomposition $f = t \circ f_O$ obtenue lors de la démonstration de la proposition 2.19 p. 46.

2.4.3 Retour sur les changements de repères cartésiens

Soient $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ et $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}')$ deux repères cartésiens d'un même espace affine E, de dimension n. Pour tout point M de E, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ses coordonnées (les anciennes coordonnées) dans le repère $\mathcal{R}$ (l'ancien repère) et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ ses coordonnées (nouvelles) dans le repère $\mathcal{R}'$ (nouveau). Alors l'application identité de E est une application affine. On peut écrire ses formules analytiques, en considérant que E est au départ muni du nouveau repère $\mathcal{R}'$ et à l'arrivée E est muni de l'ancien repère $\mathcal{R}$. La matrice de l'application linéaire identité $\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$, pour la base $\mathcal{B}'$ au départ et $\mathcal{B}$ à l'arrivée n'est rien d'autre que la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$; l'image par id_E de O' est lui-même, mais ses coordonnées dans le repère « d'arrivée » est $X_{O'}$, matrice colonne des coordonnées de O' dans l'ancien repère. On obtient, en application de ce que nous avons vu au paragraphe précédent, $X = X_{O'} + \mathrm{P}X'$. Nous avons ainsi retrouvé d'une autre manière les formules de changement de repère de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ que nous avons vues au § **1.3.2** (p. 12).

Nous verrons au chapitre suivant qu'une application affine est aussi naturellement déterminée par la connaissance des images des points formant un repère affine.

2.5 Quelques théorèmes de géométrie affine

2.5.1 Caractérisation des dilatations

Lemme 2.22

Une application affine de $(E, \overrightarrow{E})$ est une dilatation (i.e. une homothétie ou une translation) si et seulement si elle transforme toute droite de E en une droite parallèle.

Preuve Soit f une dilatation. Sa partie linéaire φ est une homothétie vectorielle $k\,\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$, $k \in \mathbb{R}^*$. En application de la proposition 2.13 p. 42, l'image d'une droite $\Delta = A + < \overrightarrow{u} >$ (passant par A, dirigée par $\overrightarrow{u}$) est la variété affine
$f(\Delta) = f(A) + \varphi(< \overrightarrow{u} >) = f(A) + k < \overrightarrow{u} > = f(A) + < \overrightarrow{u} >$,
qui est une droite ayant la même direction que Δ.

Réciproquement, si f est une application affine de $(E, \overrightarrow{E})$ dans lui-même, de partie linéaire φ, et qui transforme toute droite de E en une droite parallèle. Soit $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ un vecteur quelconque de $\overrightarrow{E}$. On va montrer que $\overrightarrow{x}$ est un vecteur propre de φ.
Soit $A \in E$, et soit $B = A + \overrightarrow{x}$. Soit $\Delta = A + < \overrightarrow{x} >$. Posons $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$.
On a $\varphi(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{A'B'}$. Mais comme $A \in \Delta$ et $B \in \Delta$, on a $A', B' \in f(\Delta)$; mais

$\Delta' = f(\Delta)$ est une droite parallèle à Δ, donc qui admet la même direction. Donc $\Delta' = A' + < \vec{x} >$ et comme $B' \in \Delta'$, on a $\overrightarrow{A'B'} \in < \vec{x} >$, c'est-à-dire $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. Remarquons que λ ne peut être nul, sinon l'image de tout point $M = A + k\vec{x}$ de Δ qui est a priori le point $M' = A' + k\varphi(\vec{x})$ serait dans tous les cas égal à $A' + \vec{0} = A'$ et l'image de la droite Δ serait non pas une droite mais un point. Nous avons ainsi prouvé que tous les vecteurs de $\vec{E}$ sont des vecteurs propres attachés à une valeur propre non nulle. Or, un résultat classique sur les applications linéaires est que seules les homothéties vectorielles admettent tous les vecteurs de $\vec{E}$ comme vecteurs propres (voir exercice 2.4). On a donc prouvé que φ est une homothétie vectorielle, de la forme $\varphi = \lambda \, \mathrm{id}_{\vec{E}}$, donc f est une dilatation. □

2.5.2 Le théorème de Ménélaüs

Théorème 2.23 *Soient A, B, C trois points non alignés, et soient $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$. On suppose que $A', B', C' \notin \{A, B, C\}$.*
Alors A', B', C' sont alignés si et seulement si $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$

Preuve On considère l'homothétie h_1 de centre A' et de rapport $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$. Elle envoie C sur B.
De même, l'homothétie h_2 de centre B' et de rapport $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ envoie A sur C.
Enfin l'homothétie h_3, de centre C' et de rapport $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ envoie B sur A.[1]
Soit $f = h_1 \circ h_2 \circ h_3$. f est une dilatation qui envoie B sur B, donc de centre B, et de rapport $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$.

Si on suppose que ce rapport vaut 1, c'est que f est l'identité, donc $h_3^{-1} = h_1 \circ h_2$, et le centre C' de h_3^{-1} est forcément aligné avec celui de h_1 et celui de h_2 (voir l'exercice 2.11), donc C', A', B' sont alignés.

Réciproquement, si A', B', C' sont alignés : on considère l'homothétie $h = h_1 \circ h_2$. D'après le résultat de l'exercice 2.11, son centre C'' est aligné avec A' et B'. D'autre part, $h_1 \circ h_2(A) = B$, donc C'', A et B sont aussi alignés, donc C'' est le point d'intersection de (AB) avec $(A'B')$, et donc forcément $C'' = C'$. Donc $f = h \circ h_3$ est la composée de deux homothéties de même centre C', donc on peut affirmer que $f(C') = C'$. Mais on a aussi $f(B) = B$, donc f est une dilatation qui admet deux

[1] Remarquons qu'aucun de ces trois rapports n'est égal à 1, sinon, par exemple si on avait $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = 1$, on aurait $B - A' = C - A'$ donc $B = C$...

points fixes distincts, f est l'identité. f est donc une dilatation de rapport 1, mais on a vu que son rapport est $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$, d'où le résultat. □

Une autre démonstration de ce théorème (basée sur le théorème de Thalès) est proposée en exercice (exercice

2.5.3 Le théorème de Ceva

Théorème 2.24 *Soient A, B, C trois points non alignés, et soient $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$. On suppose que $A', B', C' \notin \{A, B, C\}$.*
Alors $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Preuve Supposons que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes en D. Soit Δ_1 la parallèle à (AA') qui passe par B et Δ_2 la parallèle à (AA') qui passe par C. Soit E le point d'intersection de (CC') avec Δ_1, F le point d'intersection de (BB') avec Δ_2 et soit G le point d'intersection de (FA') avec Δ_1. Le théorème de Thalès

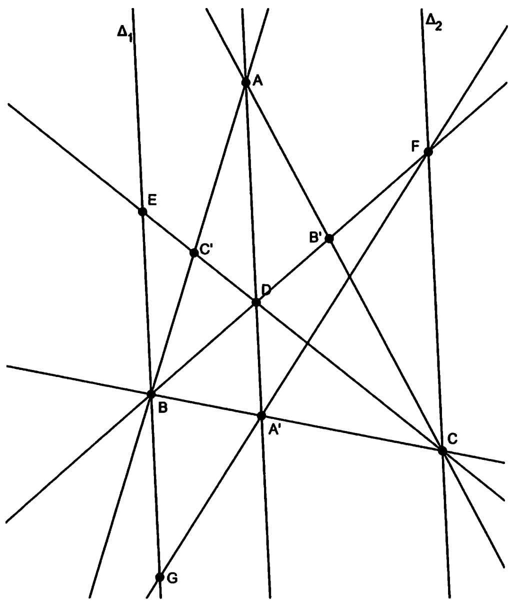


FIGURE 2.1. Théorème de Ceva, cas des droites parallèles.

permet d'affirmer que $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} = \dfrac{\overline{FB}}{\overline{FD}} = \dfrac{\overline{FG}}{\overline{FA'}}$.
Soit k la valeur commune de ces rapports. Soit h l'homothétie de centre C et de rapport k et h' l'homothétie de centre F et de rapport k. On a, par construction $h(D) = E$ et $h(A') = B$ donc $\overrightarrow{EB} = k\overrightarrow{DA'}$. De même, on a $h'(D) = B$ et $h'(A') = G$ donc $\overrightarrow{BG} = k\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{EB}$, et donc $\dfrac{\overline{BG}}{\overline{BE}} = -1$.

Considérons maintenant les homothéties h_1, h_2, h_3 qu'on avait introduites dans la démonstration du théorème de Ménélaüs (h_1 de centre A', de rapport $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ qui envoie C en B, h_2 de centre B', de rapport $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ qui envoie A en C et h_3 de centre C', de rapport $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ qui envoie B en A). On a vu que $f = h_1 \circ h_2 \circ h_3$ est une homothétie de centre B, de rapport $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$.

Or, grâce au théorème de Thalès, on a $\dfrac{\overline{C'D}}{\overline{C'E}} = \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ donc $h_3(E) = D$.

De même, on a $\dfrac{\overline{B'F}}{\overline{B'D}} = \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ donc $h_2(D) = F$.

Enfin, on a aussi $\dfrac{\overline{A'G}}{\overline{A'F}} = \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ donc $h_1(F) = G$.

On a donc $f(E) = h_1 \circ h_2 \circ h_3(E) = h_1 \circ h_2(D) = h_1(F) = G$, et comme B est le centre de l'homothétie $f = h_1 \circ h_2 \circ h_3$, et que $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ est son rapport, on a $\dfrac{\overline{BG}}{\overline{BE}} = \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$.

Mais on a vu que $\dfrac{\overline{BG}}{\overline{BE}} = -1$, d'où le résultat dans le sens direct lorsque les trois droites sont concourantes.

Si les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles, c'est beaucoup plus simple, car il suffit d'appliquer le théorème de Thalès et la relation de Chasles pour les mesures algébriques pour exprimer les trois rapports de mesures algébriques en fonction d'un seul d'entre eux.

Soit $\lambda = \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$;

grâce au théorème de Thalès, on a $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} = -\dfrac{\overline{BA'} + \overline{A'C}}{\overline{A'B}} = 1 - \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$,

et de même, $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CA'} + \overline{A'B}} = \dfrac{-\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}}{-\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} + 1} = \dfrac{-\frac{1}{\lambda}}{1 - \frac{1}{\lambda}} = \dfrac{1}{1 - \lambda}$.

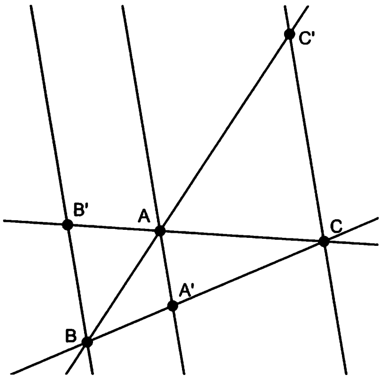


FIGURE 2.2. Théorème de Ceva, cas des droites parallèles.

En faisant la synthèse de ces trois égalités, on trouve bien

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \lambda \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1-\lambda} = -1.$$

Pour la réciproque, il suffit, comme souvent, d'utiliser à bon escient la propriété dans le sens direct :
Si on a

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1,$$

on considère deux cas :

- si (BB') et (CC') sont sécantes en un point D, on considère le point A'' intersection [2] de (AD) avec (BC). On est dans la situation du sens direct, donc on a

$$\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

  En comparant avec l'hypothèse, en en déduit $\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ donc si k est la valeur commune de ces rapports, on a $\overrightarrow{A''B} = k\,\overrightarrow{A''C}$ et $\overrightarrow{A'B} = k\,\overrightarrow{A'C}$.

[2] Notons qu'il est impossible que la droite (AD) soit parallèle à (BC) : si c'était le cas, l'homothétie $h_2 \circ h_3$ enverrait non seulement B en C (via A) mais aussi C, via D, en B. Ce serait donc forcément une involution, donc une homothétie de rapport $-1 = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$, donc l'hypothèse imposerait $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = 1$, ce qui est impossible.

On introduit le point B dans tous ces vecteurs, et on obtient :
$-\overrightarrow{BA''} = k(\overrightarrow{A''B} + \overrightarrow{BC})$, donc $\overrightarrow{BA''} = \dfrac{k}{k-1}\overrightarrow{BC}$. Avec exactement le même calcul pour A', on obtient $\overrightarrow{BA'} = \dfrac{k}{k-1}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA''}$, donc $A' = A''$ et (AA') passe aussi par D donc les trois droites sont concourantes en D.

- si $(BB')/\!/(CC')$, on considère la droite Δ parallèle à ces deux droites qui passe par A. Elle coupe (BC) en A''. On est encore dans la situation du sens direct et on peut affirmer de la même façon que

$$\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1,$$

donc que $\dfrac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} = \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ et on conclut de la même façon que $A' = A''$, donc que la droite $(AA') = (AA'') = \Delta$ est aussi parallèle aux deux droites (BB') et (CC').

□

Nous allons voir maintenant les formes particulières (les « cas parallèles ») de deux théorèmes classiques : le théorème de Pappus et le théorème de Desargues. Nous verrons la forme générale de ces deux théorèmes lors du chapitre suivant et en exercice.

2.5.4 Un théorème de Pappus

Proposition 2.25 (un aspect du théorème de Pappus) Soient D et D' deux droites distinctes d'un plan affine, X, Y, Z trois points distincts de D et X', Y', Z' trois points distincts de D', ces 6 points étant distincts de $D \cap D'$.
Si $(XY')/\!/(X'Y)$ et $(YZ')/\!/(Y'Z)$ alors $(XZ')/\!/(X'Z)$.

Preuve Si $D \cap D' = \{\Omega\}$, on considère les deux homothéties de centre Ω : h_1 qui transforme X en Y et h_2 qui transforme Y en Z. Le rapport de h_1 est $k_1 = \dfrac{\overline{\Omega Y}}{\overline{\Omega X}}$ et celui de h_2 est $k_2 = \dfrac{\overline{\Omega Z}}{\overline{\Omega Y}}$
Il est évident que $h_2 \circ h_1(X) = Z$. D'autre part h_2 transforme la droite (YZ') en une droite qui lui est parallèle et qui passe par $h_2(Y) = Z$: c'est la droite (ZY'). Comme l'image de Z' est un point de la droite D', on est sûr que $h_2(Z')$ est à l'intersection de D' et de (ZY'), donc $h_2(Z') = Y'$. Raisonnant de la même façon, on peut déterminer l'image de Y' par h_1 : c'est un point de D', qui est aussi sur l'image de la droite (XY') par h_1, c'est-à-dire une droite parallèle à (XY') et passant par $h_1(X) = Y$, donc qui sur (YX'). On a donc $h_1(Y') = X'$, de sorte que $h_1 \circ h_2(Z') = X'$.
Mais h_1 et h_2 sont des homothéties de même centre, donc elles commutent (voir l'exercice 2.11), et on a $h = h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$. Donc $h(X) = Z$ et $h(Z') = X'$, de sorte

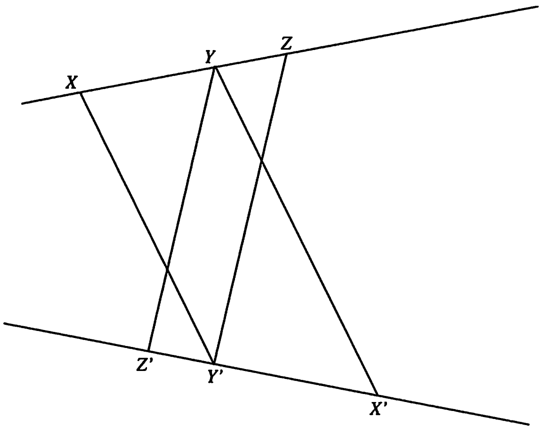


FIGURE 2.3. Théorème de Pappus, première version.

que l'image de la droite (XZ') par h est la droite (ZX') qui lui est parallèle : on a bien $(XZ') /\!/ (X'Z)$. □

Si $D /\!/ D'$, on fait le même raisonnement avec des translations (voir l'exercice 2.13).□

2.5.5 Un théorème de Desargues

Proposition 2.26 (un aspect du théorème de Desargues)
Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles d'un espace affine, sans sommet commun et aux côtés respectifs parallèles ($(AB) /\!/ (A'B')$, $(AC) /\!/ (A'C')$ et $(BC) /\!/ (B'C')$) Alors les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.
En d'autres termes, deux triangles à côtés parallèles sont homothétiques ou translatés.

Preuve Si (AA') et (BB') sont sécantes en un point Ω, on considère l'homothétie h de centre Ω, qui transforme A en A' et donc B en B' grâce au parallélisme $(AB) /\!/ (A'B')$ (h a pour rapport $k = \dfrac{\overline{\Omega A'}}{\overline{\Omega A}} = \dfrac{\overline{\Omega B'}}{\overline{\Omega B}}$. Ces rapports sont égaux grâce au théorème de Thalès).
h transforme la droite (AC) en une droite qui lui est parallèle et qui passe par A', donc en la droite $(A'C')$, et h transforme la droite (BC) en une droite parallèle et qui passe par B', donc en la droite $(B'C')$, de sorte que C, intersection de (AC) avec (BC), est transformé par cette dilatation en le point d'intersection de $(A'C')$ avec $(B'C')$, c'est-à-dire en C'. La droite (CC') passe donc par le centre de l'homothétie donc les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.
Si (AA') et (BB') sont parallèles, on raisonne de façon tout à fait analogue en utilisant une translation (voir l'exercice 2.14). □

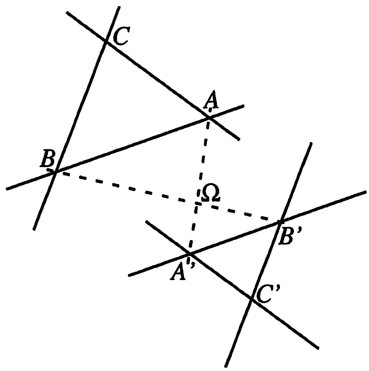


FIGURE 2.4. Théorème de Desargues, première version.

2.6 Exercices

Exercice 2.1.
Démontrer la remarque qui suit la définition des applications affines (définition 2.1 p. 34) : Une application f entre deux espaces affines $(E, \overrightarrow{E})$ et $(E', \overrightarrow{E'})$ est affine si et seulement si il existe un point $A \in E$, d'image $A' = f(A)$ par f, tel que f est une application linéaire entre les vectorialisés E_A et $E'_{A'}$.

Exercice 2.2.
Montrer que toute application affine dont la partie linéaire est la fonction nulle, est une application constante (voir p. 35).

Exercice 2.3.
Montrer que $\mathcal{H}_A(E) \cup \{\mathrm{id}_E\}$ est un groupe commutatif isomorphe à $\mathbb{R}^*$.

Exercice 2.4.
Le but de cet exercice est de déterminer le centre[3] Z du groupe $GL(\overrightarrow{E})$ des automorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ de dimension finie n

1° Montrer que si un automorphisme φ de $\overrightarrow{E}$ est tel que tout vecteur non nul de $\overrightarrow{E}$ est vecteur propre pour φ, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$, on a $\varphi(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$. *(En distinguant deux cas selon que le système $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ est libre ou lié, on montrera que si $\varphi(\overrightarrow{x}) = \lambda_x \overrightarrow{x}$ et $\varphi(\overrightarrow{y}) = \lambda_y \overrightarrow{y}$, alors on a $\lambda_x = \lambda_y$).*

[3] Rappelons que le centre d'un groupe G est le sous-ensemble Z de ce groupe formé des éléments qui commutent avec tous les éléments du groupe ; c'est un sous-groupe distingué et commutatif du groupe G.

2° Soit φ un automorphisme de $\overrightarrow{E}$ qui commute avec tous les autres automorphismes de $GL(\overrightarrow{E})$. On veut montrer que tous les vecteurs $\overrightarrow{x}$ de $\overrightarrow{E}$ sont des vecteurs propres pour φ.

2° a) Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur non nul de $\overrightarrow{E}$. Montrer qu'on peut trouver un automorphisme ψ de $\overrightarrow{E}$ qui soit tel que $\overrightarrow{x}$ est une base du sous-espace propre de $\overrightarrow{E}$ associé à la valeur propre 1. (On pourra définir ψ par sa matrice dans une base dont $\overrightarrow{x}$ est le premier élément).

2° b) En utilisant que φ commute avec ψ montrer que $\overrightarrow{x}$ est un vecteur propre de φ.

3° Conclure.

Exercice 2.5.
Démontrer les rappels sur les projections vectorielles du § **2.2.4** p. 38, à savoir :

1° Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de l'espace vectoriel de dimension n finie $\overrightarrow{E}$. ($\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$). Soit $\pi = \pi_{\overrightarrow{F},\overrightarrow{G}}$.

1° a) Montrer que π est linéaire.

1° b) Montrer que $\ker \pi = \overrightarrow{G}$.

1° c) Montrer que $\operatorname{Im} \pi = \overrightarrow{F}$.

1° d) Montrer que $\overrightarrow{x} = \pi(\overrightarrow{x}) \iff \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{F}$.

1° e) Montrer que $\pi \circ \pi = \pi$.

2° Soit g un projecteur linéaire de l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ (g est un endomorphisme de $\overrightarrow{E}$ tel que $g \circ g = g$).
Montrer que g est la projection vectorielle sur $\overrightarrow{F} = \operatorname{Im} g$ dans la direction de $\overrightarrow{G} = \ker g$.

Exercice 2.6.
1° Soit p une projection vectorielle de l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$. On considère l'endomorphisme q de $\overrightarrow{E}$ défini par $q = \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}} - p$. Montrer que q est une projection vectorielle dont on déterminera les éléments en fonction de ceux de p. Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0_{\overrightarrow{E}}$.

2° Soient p et p' deux projections vectorielles de l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$. Montrer que $p + p'$ est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ p' = p' \circ p = 0_{\overrightarrow{E}}$. Déterminer, dans ce cas, les éléments de $p + p'$ en fonction de ceux de p et ceux de p'.

3° Montrer qu'un endomorphisme φ de l'espace vectoriel de dimension finie $\overrightarrow{E}$ est un projecteur si et seulement si φ est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\{0, 1\}$. En déduire que $\overrightarrow{E} = \ker \varphi \oplus \ker(\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}} - \varphi)$ si et seulement si φ est une projection vectorielle.

Exercice 2.7.
1° Démontrer que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ est une projection vectorielle dont on déterminera les éléments caractéristiques.

2° Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de la projection vectorielle sur la droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ dirigée par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans la direction du plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ caractérisé par $x + y = 0$.

Exercice 2.8.
Démontrer les points (4) et (5) de la Proposition 2.8 p. 38 :

1° Une application affine qui admet un point fixe et dont la partie linéaire est une projection vectorielle est une projection affine.

2° Toute application affine f qui vérifie $f \circ f = f$ est une projection.

Exercice 2.9.
Démontrer les rappels sur les symétries vectorielles du § **2.2.5** p. 40, à savoir :

1° Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de l'espace vectoriel de dimension n finie $\overrightarrow{E}$. ($\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$). Soit $\sigma = \sigma_{\overrightarrow{F},\overrightarrow{G}}$.

1° a) Soient $\pi = \pi_{\overrightarrow{F},\overrightarrow{G}}$ et $\pi' = \pi_{\overrightarrow{G},\overrightarrow{F}}$. Montrer que $\sigma = \pi - \pi'$. En déduire que σ est linéaire.

1° b) Montrer que $\ker(\sigma - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}) = \overrightarrow{F} = \mathrm{Im}(\sigma + \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$.

1° c) Montrer que $\ker(\sigma + \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}) = \overrightarrow{G} = \mathrm{Im}(\sigma - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$.

1° d) Montrer que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$.

2° Soit g une involution linéaire de l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ (g est un endomorphisme de $\overrightarrow{E}$ tel que $g \circ g = \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$).
Montrer que g est la symétrie vectorielle par rapport à $\ker(g - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$ dans la direction de $\ker(g + \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$.

Exercice 2.10.
Démonstration de la proposition 2.10 p. 40.

1° Soient $(F, \overrightarrow{F})$ et $(G, \overrightarrow{G})$ deux sous-espaces affines de l'espace affine $(E, \overrightarrow{E})$. On suppose que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$ ($\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ sont supplémentaires). Soit $s = s_{F,\overrightarrow{G}}$ la symétrie par rapport à F dans la direction de G, et soit $p = p_{F,\overrightarrow{G}}$ la projection sur F dans la direction $\overrightarrow{G}$.

1° a) Montrer que s est une application affine. Identifier son application linéaire associée σ.

1° b) Montrer que s est caractérisée par : $s(M)$ est l'unique point M' de E qui est tel que le milieu I de $[MM']$ est $I = p(M)$.

1° c) Montrer que s est involutive.

2° Soit f une application affine de l'espace affine $(E, \overrightarrow{E})$, dont la partie linéaire est une symétrie vectorielle $\sigma = \sigma_{\overrightarrow{F},\overrightarrow{G}}$ ($\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\overrightarrow{E}$). On suppose que f admet un point fixe A. Montrer que f est la symétrie affine par rapport à $F = A + \overrightarrow{F}$ dans la direction $\overrightarrow{G}$.

3° Soit g une application affine involutive. Montrer que g est une symétrie affine.

Exercice 2.11.
1° Soit $h = h_{I,k}$ une homothétie ($k \notin \{0,1\}$) et $t = t_{\overrightarrow{u}}$ une translation ($\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$). Montrer que $h' = h \circ t$ et $h'' = t \circ h$ sont des homothéties dont on précisera le rapport. Montrer que leurs centres respectifs I' et I'' sont sur la droite D passant par I dirigée par $\overrightarrow{u}$ ($D = I + < \overrightarrow{u} >$). Est-il possible que $h' = h''$?

2° Soient $h = h_{I,k}$ et $h' = h_{I',k'}$ deux homothéties ($k, k' \notin \{0,1\}$). Montrer que selon que $I = I'$ ou $I \neq I'$, et selon que $kk' = 1$ ou $kk' \neq 1$, $f = h' \circ h$ est soit une homothétie de centre I, soit une homothétie de centre $J \in (II')$, soit une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ vecteur directeur de la droite (II'), soit l'identité. Est-il possible que $h \circ h' = h' \circ h$?

Exercice 2.12. Montrer que le groupe des dilatations est produit semi-direct de $\mathcal{T}(E)$ par $\mathcal{H}_A(E) \cup \{\mathrm{id}_E\}$, ceci pour tout point A.

Exercice 2.13.
Terminer la démonstration du théorème de Pappus 2.25 p. 54.

Exercice 2.14.
Terminer la démonstration du théorème de Desargues 2.26 p. 55.

Exercice 2.15.
On considère deux droites sécantes D et D' d'un dessin dont le point d'intersection Ω est situé hors de la feuille. Soit A un point de la feuille n'appartenant à aucune des deux droites. Construire la droite joignant A au point d'intersection des deux droites. (On n'a pas le droit d'écrire sur la table !) On suppose qu'on sait tracer des droites parallèles.

Exercice 2.16.
Dans l'espace affine $(E, \overrightarrow{E})$ de dimension 3 rapporté à un repère cartésien $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, on considère la droite D : $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 2. \end{cases}$

1° Déterminer par ses formules analytiques la projection sur le plan $P = O+ < \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath} >$ dans la direction de D.

2° Déterminer par ses formules analytiques la symétrie par rapport à D dans la direction $\overrightarrow{F} =< \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k} >$.

3° Déterminer une équation de la projection de la droite D sur le plan P dans la direction de $\overrightarrow{k}$.

CHAPITRE 3

Espace universel et barycentres

3.1 Plongement d'un espace affine comme hyperplan d'un espace vectoriel

3.1.1 Un espace universel

Nous considérons toujours E un espace affine, et $\overrightarrow{E}$ son espace vectoriel associé ; nous allons montrer que le « deuxième exemple fondamental » (voir § **1.2.1** p. 6) est « universel », c'est-à-dire que nous allons établir la proposition suivante :

Théorème 3.1 *Pour tout espace affine E de dimension finie, d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{E}$, il existe un espace vectoriel $\widehat{E}$ dit « espace vectoriel universel » tel que*
(i) $\dim \widehat{E} = \dim E + 1$
(ii) $\overrightarrow{E}$ est canoniquement isomorphe à un hyperplan vectoriel H de $\widehat{E}$.
(iii) E est canoniquement isomorphe comme espace affine à un hyperplan affine $\mathcal{H}$ de $\widehat{E}$, de direction H.
(iv) Il existe une forme linéaire φ sur $\widehat{E}$ telle que $H = \ker \varphi$ et $\mathcal{H} = \varphi^{-1}(\{1\})$.
Les deux isomorphismes sont canoniques, *ce qui permet d'identifier E et $\mathcal{H}$ d'une part, $\overrightarrow{E}$* et *H d'autre part.*

En pratique on considérera que E et $\overrightarrow{E}$ sont inclus dans $\widehat{E}$, et sont donc des hyperplans respectivement affine et vectoriel de $\widehat{E}$.

Nous voudrions en fait construire un espace vectoriel $\widehat{E}$ dont E serait un hyperplan affine de direction $\overrightarrow{E}$ (de façon à ce que la structure affine de E soit la même que celle induite par la structure affine canonique de $\widehat{E}$).
Nous devons avoir un souci permanent, celui de ne privilégier aucun point de E, de façon à ne pas se retrouver avec un vectorialisé, même implicite, et pour que les isomorphismes soient canoniques.

C'est pour cela que l'on essaiera de montrer que $\overrightarrow{E}$ est isomorphe au noyau d'une forme linéaire φ et que E est isomorphe à $\varphi^{-1}(\{1\})$. Il nous faudra donc aussi construire une forme linéaire φ.

Si nous supposons le problème résolu, nous voyons que tout élément z de $\widehat{E}$ qui n'est pas dans $\overrightarrow{E}$ (donc qui est tel que $\varphi(z) \neq 0$) s'écrit de manière unique $z = k\,A$ avec $k = \varphi(z) \in \mathbb{R}^*$ et $A = \frac{1}{k}z \in E$ puisque $\varphi(A) = \frac{1}{k}\varphi(z) = 1$. $\widehat{E}$ est donc naturellement en bijection avec $E \cup \overrightarrow{E} \cup \Big[(\mathbb{R} \setminus \{0,1\}) \times E\Big]$ ou avec $\overrightarrow{E} \cup \Big[(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times E\Big]$

Nous pourrions donc essayer de partir de $\widehat{E} = E \cup \overrightarrow{E} \cup \Big[(\mathbb{R} \setminus \{0,1\}) \times E\Big]$ mais il faudrait définir les opérations et vérifier que $\widehat{E}$ hérite bien ainsi d'une structure d'espace vectoriel, ce qui est forcément fastidieux (huit axiomes à vérifier, avec des lois forcément définies « selon les cas »).
Il est beaucoup plus simple de réaliser cela à travers un isomorphisme avec un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel « de référence ».

Rappelons que l'ensemble des applications d'un ensemble $\mathcal{X}$ quelconque vers un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ est lui-même un espace vectoriel qu'on note $\mathcal{F}(\mathcal{X}, \overrightarrow{E})$. En particulier, $\mathcal{F}(E, \overrightarrow{E})$ est un espace vectoriel.

Preuve Nous noterons :

- $\mathcal{C} = \{f : E \to \overrightarrow{E} \mid \exists \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E},\ \forall M \in E,\ f(M) = \overrightarrow{u}\} \subset \mathcal{F}(E, \overrightarrow{E})$
  $\overrightarrow{u}$ caractérise f. Un élément f de $\mathcal{C}$ se notera donc $f_{\overrightarrow{u}}$.
  $\mathcal{C}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, \overrightarrow{E})$ formé des applications constantes. Il est clairement et canoniquement isomorphe à $\overrightarrow{E}$.
- $\mathcal{C}' = \{g : E \to \overrightarrow{E} \mid \exists k \in \mathbb{R}^*,\ \exists A \in E,\ \forall M \in E,\ g(M) = k\,\overrightarrow{MA}\} \subset \mathcal{F}(E, \overrightarrow{E})$
  A et k caractérisent g. Un élément de $\mathcal{C}'$ se notera donc $g_{A,k}$.
  $\mathcal{C}'$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F}(E, \overrightarrow{E})$, mais ce n'est a priori pas un sous-espace vectoriel.

Remarquons que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \varnothing$. Les éléments de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$ sont des applications de E vers $\overrightarrow{E}$; il est d'usage d'appeler de telles applications des *champs*. $\mathcal{C}$ est l'ensemble des *champs constants*, tandis que $\mathcal{C}'$ est un ensemble de *champs centraux*.

Vérifions que l'ensemble $\widehat{E} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ est un espace vectoriel, comme sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, \overrightarrow{E})$.
C'est un sous-ensemble non vide de cet espace vectoriel.
Il est stable par la multiplication externe, car il est clair que $\lambda f_{\overrightarrow{u}} = f_{\lambda\overrightarrow{u}}$ et $\lambda\, g_{A,k} = g_{A,\lambda k}$ pour $\lambda \neq 0$, tandis que $0\, g_{A,k} = f_{\overrightarrow{0}}$.
Il est également stable par addition ; s'il est trivial que $f_{\overrightarrow{u}} + f_{\overrightarrow{v}} = f_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} \in \widehat{E}$, c'est un peu plus compliqué pour les autres sommes.

Pour la somme d'un élément de $\mathcal{C}$ et d'un élément de $\mathcal{C}'$:
$(g_{A,k} + f_{\vec{u}})(M) = k\overrightarrow{MA} + \vec{u} = k(A - M + \frac{1}{k}\vec{u})) = k(B - M) = g_{B,k}(M)$ en posant $B = A + \frac{1}{k}\vec{u}$, donc il existe B tel que $g_{A,k} + f_{\vec{u}} = g_{B,k} \in \widehat{E}$.

Quant à la somme de deux éléments de $\mathcal{C}'$, on doit étudier deux cas, selon que $k + k'$ est nul ou non nul.

<u>Si $k + k' \neq 0$</u>

$(g_{A,k} + g_{B,k'})(M) = k\overrightarrow{MA} + k'\overrightarrow{MB} = (k + k')\left(\frac{k}{k+k'}\overrightarrow{MA} + \frac{k'}{k+k'}\overrightarrow{MB}\right)$.

Considérons le point $C = A + \dfrac{k'}{k+k'}\overrightarrow{AB}$ (en anticipant, C est le barycentre de (A, k) et (B, k')). On a

$$\begin{aligned}(g_{A,k} + g_{B,k'})(M) &= (k + k')\left(\frac{k}{k+k'}\overrightarrow{MA} + \frac{k'}{k+k'}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})\right)\\ &= (k + k')\left(\overrightarrow{MA} + \frac{k'}{k+k'}\overrightarrow{AB}\right)\\ &= (k + k')\left(\left(A + \frac{k'}{k+k'}\overrightarrow{AB}\right) - M\right)\\ &= (k + k')\overrightarrow{MC} = g_{C,k+k'}(M)\end{aligned}$$

donc il existe C tel que $g_{A,k} + g_{B,k'} = g_{C,k+k'} \in \widehat{E}$.

<u>Si $k' = -k$</u>

On a

$$(g_{A,k} + g_{B,-k})(M) = k\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{BA} = f_{k\overrightarrow{BA}}(M)$$

donc

$$g_{A,k} + g_{B,-k} = f_{k\overrightarrow{BA}} \in \widehat{E}.$$

Ces calculs nous ont permis non seulement de montrer que $\widehat{E}$ est un espace vectoriel, mais il permet aussi, par la même occasion, de montrer que l'application $\varphi : \widehat{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f_{\vec{u}}) = 0$ et $\varphi(g_{A,k}) = k$ pour tous $\vec{u}, A, k$ est une *forme linéaire*[1].
On constate aisément que par définition $\ker\varphi = \mathcal{C}$, donc $\ker\varphi$ est canoniquement isomorphe à $\vec{E}$. $\widehat{E}$ est donc bien de dimension $n + 1$ puisque $\ker\varphi$ est un hyperplan. Quant à l'hyperplan affine $\mathcal{H} = \varphi^{-1}(\{1\})$, il est formé des applications $g_{A,1}$: $M \longmapsto$

[1] $\varphi(f_{\vec{u}} + f_{\vec{v}}) = \varphi(f_{\vec{u}+\vec{v}}) = 0 = 0 + 0 = \varphi(f_{\vec{u}}) + \varphi(f_{\vec{v}})$, $\varphi(f_{\vec{u}} + g_{A,k}) = \varphi(g_{B,k}) = k = 0 + k = \varphi(f_{\vec{u}}) + \varphi(g_{A,k})$, $\varphi(g_{A,k} + g_{B,k'}) = \varphi(g_{C,k+k'}) = k + k' = \varphi(g_{A,k}) + \varphi(g_{B,k'})$ pour $k + k' \neq 0$ et $\varphi(g_{A,k} + g_{B,k'}) = \varphi(f_{k\overrightarrow{BA}}) = 0 = k + (-k) = \varphi(g_{A,k}) + \varphi(g_{B,k'})$, donc, dans tous les cas, pour $x, y \in \widehat{E}$, on a $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$; et d'autre part, $\varphi(\lambda f_{\vec{u}}) = \varphi(f_{\lambda\vec{u}}) = 0 = \lambda.0 = \lambda\varphi(f_{\vec{u}})$, et $\varphi(\lambda g_{A,k}) = \varphi(g_{A,\lambda k}) = \lambda k = \lambda\varphi(g_{A,k})$, donc dans tous les cas, $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \widehat{E}$, $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$.

$\overrightarrow{MA}$, et sa direction est $\ker\varphi = \mathcal{C}$. Il est canoniquement en bijection avec E par $h : A \longmapsto g_{A,1}$. Il ne reste plus qu'à vérifier que h est affine.

Soit η_A l'application vectorielle associée à h par le point A. Pour tout $\vec{u} \in \vec{E}$, on a $\eta_A(\vec{u}) = h(A + \vec{u}) - h(A) = g_{A+\vec{u},1} - g_{A,1} = g_{A+\vec{u},1} + g_{A,-1} = f_{\vec{u}}$ grâce au calcul fait plus haut. On constate donc que η_A est l'isomorphisme canonique entre $\vec{E}$ et $\mathcal{C}$, donc c'est une application linéaire et h est bien affine. □

Remarque :
La seule chose à retenir de cette démonstration, c'est *l'existence* de l'espace vectoriel universel $\widehat{E}$. Il est unique à un isomorphisme près, comme on s'en aperçoit grâce à la canonicité des isomorphismes de la proposition. Il n'y a donc pas à retenir la forme particulière des éléments de $\widehat{E}$ utilisée dans cette démonstration, mais seulement admettre l'existence de $\widehat{E}$ *qui contient*[2] E et $\vec{E}$ comme hyperplans parallèles respectivement affine et vectoriel, ainsi que *l'existence de* $\varphi \in (\widehat{E})^*$ telle que $\vec{E} = \ker\varphi$ et $E = \varphi^{-1}(\{1\})$. Voici une figure dans le cas d'un plan affine $(E, \vec{E})$, qui est donc plongé (ainsi que sa direction) dans un espace vectoriel $\widehat{E}$ de dimension 3.

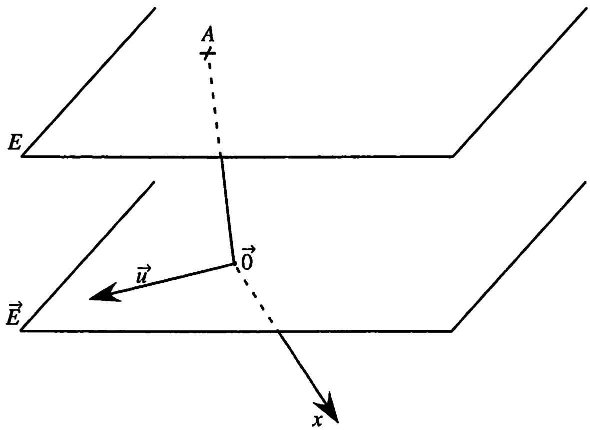


FIGURE 3.1. Visualisation de l'espace universel.

Sur cette figure, on peut comprendre la fonction φ comme donnant la cote (la troisième coordonnée) d'un élément de $\widehat{E}$, ou encore son « altitude ». On voit qu'un vecteur

[2] En toute rigueur, $\widehat{E}$ ne contient pas exactement E et $\vec{E}$, mais $\widehat{E}$ contient des sous-ensembles $\ker\varphi$ et $\varphi^{-1}(1)$ isomorphes à ces deux espaces et qu'on peut donc *identifier* :
on considérera, dans la suite, que $\vec{E} = \ker\varphi \subset \widehat{E}$ et $E = \varphi^{-1}(1) = \{x \in \widehat{E} \mid \varphi(x) = 1\} \subset \widehat{E}$.

(comme $\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{u}$) peut être compris comme un élément au niveau 0, au « rez-de-chaussée », alors qu'on trouve les points (comme A) au niveau 1, au « premier étage ». Tous les autres niveaux correspondent à des éléments « imaginaires » de $\widehat{E}$ (comme x, pour lequel on peut estimer qu'on a environ $\varphi(x) \simeq -0,8$), sans interprétation en géométrie classique.

3.1.2 Justification des notations abusives

Nous pouvons maintenant justifier les notations abusives que nous avions prises et celles que nous utiliserons par la suite :

- $A \in E$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, $A + \overrightarrow{u}$ a un sens dans l'espace vectoriel universel et comme $\varphi(A + \overrightarrow{u}) = \varphi(A) + \varphi(\overrightarrow{u}) = 1 + 0 = 1$, $A + \overrightarrow{u} \in E$.
- $(A, B) \in E^2$, $B - A$ a un sens dans l'espace vectoriel universel et comme

$$\varphi(B - A) = \varphi(B) - \varphi(A) = 1 - 1 = 0,\ B - A \in \overrightarrow{E}.$$

- D'une façon générale, toute combinaison linéaire d'éléments de $\widehat{E}$ a bien sûr un sens dans $\widehat{E}$, donc en particulier toute combinaison linéaire de points et de vecteurs $S = \sum\limits_{i=1}^{p} k_i x_i$, $x_i \in E \cup \overrightarrow{E}$ a un sens dans l'espace vectoriel universel, mais n'a pas forcément un sens dans les espaces « classiques » E ou $\overrightarrow{E}$. Précisément, si on écrit (en séparant les x_i selon leur nature) $S = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i x_i = \sum\limits_{j=1}^{q} \alpha_j A_j + \sum\limits_{k=1}^{r} \beta_k \overrightarrow{u_k}$, (les A_j sont dans E et les $\overrightarrow{u_k}$ sont dans $\overrightarrow{E}$) on a :

$$S \in E \iff \sum_{j=1}^{q} \alpha_j = 1 \text{ et } S \in \overrightarrow{E} \iff \sum_{j=1}^{q} \alpha_j = 0,$$

puisque $\varphi(S) = \sum\limits_{j=1}^{q} \alpha_j \varphi(A_j) + \sum\limits_{k=1}^{r} \beta_k \varphi(\overrightarrow{u_k}) = \sum\limits_{j=1}^{q} \alpha_j$ car $\varphi(A_j) = 1$ et $\varphi(\overrightarrow{u_k}) = 0$.

- Dans tous les autres cas, la combinaison linéaire désigne un élément de l'espace vectoriel universel qui n'appartient ni à E ni à $\overrightarrow{E}$, qui n'est donc ni un point, ni un vecteur, mais dont l'existence est aussi légitime que celle des nombres complexes qu'on qualifie aussi d'« imaginaires ».

3.2 Interprétation des notions affines dans l'espace universel

Dans tout ce qui suit, E est un espace affine, d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{E}$, et ils sont tous deux plongés dans un espace vectoriel $\widehat{E}$, dont ils sont des hyperplans respectivement affine et vectoriel.

3.2.1 Interprétation des variétés affines dans l'espace universel

Proposition 3.2 Il existe une bijection canonique entre les variétés affines de E et les intersections avec E des sous-espaces vectoriels de $\widehat{E}$ non inclus dans $\overrightarrow{E}$.
Cette bijection est une application qui fait correspondre à un sous-espace affine F de E, de direction $\overrightarrow{F}$, un unique sous-espace vectoriel $\widetilde{F}$ de $\widehat{E}$ tel que $F = \widetilde{F} \cap E$ et $\overrightarrow{F} = \widetilde{F} \cap \overrightarrow{E}$; $\widetilde{F}$ est la variété affine de $\widehat{E}$ engendrée par F et $\{\overrightarrow{0}\}$. C'est aussi le sous-espace vectoriel de $\widehat{E}$ engendré par F.
Dans ce cas, on a $\dim \widetilde{F} = \dim F + 1$ et $\widetilde{F}$ peut être considéré comme étant l'espace vectoriel universel contenant l'espace affine F et son espace vectoriel associé $\overrightarrow{F}$. ($\widetilde{F}$ est isomorphe à $\widehat{F}$).

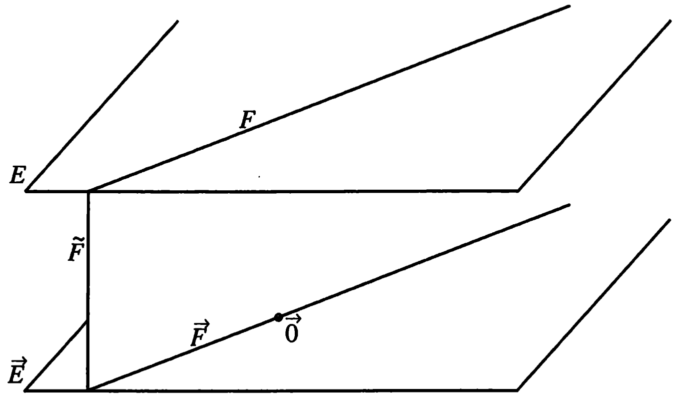


FIGURE 3.2. Sous-espace affine dans l'espace universel.

Preuve Soit F un sous-espace affine de E. Considérons le sous-espace affine de $\widehat{E}$ engendré par F et $\{\overrightarrow{0}\}$, et appelons-le $\widetilde{F}$. C'est un sous-espace affine d'un espace vectoriel qui contient $\overrightarrow{0}$, c'est un sous-espace vectoriel de $\widehat{E}$, et c'est le sous-espace vectoriel de $\widehat{E}$ engendré par F. D'après la proposition 1.18 p. 10, $\dim \widetilde{F} = \dim F + 1$. Comme $\overrightarrow{0} \notin E$, on a bien $\dim(E \cap \widetilde{F}) < \dim F + 1$, et comme $F \subset E \cap \widetilde{F}$, on a $\dim(E \cap \widetilde{F}) \geqslant \dim F$, donc forcément $\dim(E \cap \widetilde{F}) = \dim F$ et puisqu'une des deux inclusions est vraie[3], on a $F = E \cap \widetilde{F}$.

[3] Il est bien connu que lorsque deux sous-espaces vectoriels sont de même dimension, dès que l'un est inclus dans l'autre, ces deux sous-espaces vectoriels sont égaux. Cette propriété est aussi vraie pour des sous-espaces affines, il suffit de considérer leurs directions et d'utiliser la deuxième partie de la propriété 1.13 p. 7.

D'autre part, tout élément $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{F}$ peut s'écrire $\overrightarrow{u} = B - A$ avec $A, B \in F$, et $\widetilde{F}$ étant un sous-espace vectoriel, on a $\overrightarrow{F} \subset \widetilde{F}$, donc $\overrightarrow{F} \subset \widetilde{F} \cap \overrightarrow{E}$ et $\dim \overrightarrow{F} \leqslant \dim(\overrightarrow{E} \cap \widetilde{F})$. Mais $\widetilde{F} \not\subset \overrightarrow{E}$ puisque cet ensemble contient des points de F, donc $\dim(\overrightarrow{E} \cap \widetilde{F}) < \dim \widetilde{F} = \dim F + 1 = \dim \overrightarrow{F} + 1$. On peut donc affirmer que $\dim(\overrightarrow{E} \cap \widetilde{F}) \leqslant \dim \overrightarrow{F}$, donc $\dim(\overrightarrow{E} \cap \widetilde{F}) = \dim \overrightarrow{F}$ et on peut conclure $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{E} \cap \widetilde{F}$ puisqu'une des deux inclusions est établie.

Réciproquement, étant donné un sous-espace vectoriel $\widetilde{F}$ de $\widehat{E}$, non inclus dans $\overrightarrow{E}$. $\widetilde{F} + \overrightarrow{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\widehat{E}$ qui contient strictement l'hyperplan $\overrightarrow{E}$, c'est donc $\widehat{E}$ tout entier, et deux sous-espaces affines de directions respectives $\widetilde{F}$ et $\overrightarrow{E}$ ont donc une intersection non vide, d'après la proposition 1.22, p. 17. On peut donc affirmer que $F = E \cap \widetilde{F}$ est un sous-espace affine de $\widehat{E}$, inclus dans E, de direction $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{E} \cap \widetilde{F}$. Sa dimension vérifie $\dim F = \dim \overrightarrow{F} = \dim \overrightarrow{E} + \dim \widetilde{F} - \dim \widehat{E} = \dim \widetilde{F} - 1$.
La variété affine engendrée par F et $\overrightarrow{0}$ est incluse dans $\widetilde{F}$ et a la même dimension, donc c'est $\widetilde{F}$. □

Remarque : Une des conséquences intéressantes de ce théorème est à la base de l'interprétation pratique de la géométrie projective dans une carte affine : à toute droite vectorielle de $\widehat{E}$, non incluse dans $\overrightarrow{E}$ correspond un unique point (variété affine de dimension 0) de E et réciproquement.

3.2.2 Interprétation des applications affines dans l'espace vectoriel universel

Proposition 3.3 Soient E et E' deux espaces affines d'espaces vectoriels associés $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{E'}$ et qui sont inclus dans les espaces vectoriels universels $\widehat{E}$ et $\widehat{E}'$.
Alors pour toute application affine $f \in \mathcal{A}(E, E')$, il existe une unique application linéaire
$\widehat{f} \in \mathcal{L}(\widehat{E}, \widehat{E}')$ telle que $\widehat{f}_{|E} = f$ et $\widehat{f}_{|\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{f}$.
Réciproquement, une application linéaire $\widehat{g} \in \mathcal{L}(\widehat{E}, \widehat{E}')$ est le prolongement d'une application affine $g \in \mathcal{A}(E, E')$ si et seulement si $\widehat{g}(\overrightarrow{E}) \subset \overrightarrow{E'}$ et il existe un point $A \in E$ tel que $\widehat{g}(A) \in E'$, ou encore si et seulement si $\widehat{g}(E) \subset E'$.

Preuve Partant d'une application affine $f \in \mathcal{A}(E, E')$, de partie linéaire $\overrightarrow{f}$, on construit une application $\widehat{f}$ définie sur $\widehat{E}$, à valeurs dans $\widehat{E}'$, qui prolonge à la fois f et $\overrightarrow{f}$. Les éléments de $\widehat{E}$, sont par construction, de deux types : il y a d'une part les éléments de $\mathcal{C}$, qui après identification de cet ensemble avec $\overrightarrow{E}$ sont des vecteurs $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{E}$, et d'autre part les éléments de $\mathcal{C}'$ du type $g_{A,k}$, qui après l'identification des $g_{A,1}$ avec les points A, et parce que $kg_{A,1} = g_{A,k}$ peuvent s'écrire sous la forme kA, avec $k \in \mathbb{R}^*$ et $A \in E$.
On veut que $\widehat{f}$ soit linéaire, donc on doit nécessairement poser, pour $x = kA$, $\widehat{f}(x) = kf(A)$. On voit ainsi l'unicité d'un éventuelle prolongement linéaire de f et de $\overrightarrow{f}$.

Reste à montrer que cette application $\widehat{f}$ est linéaire (elle est bien à valeurs dans $\widehat{E'}$).
Il est tout à fait clair par construction que pour tout $x \in \widehat{E}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{f}(\lambda x) = \lambda \widehat{f}(x)$ (on le vérifie successivement pour $x = \overrightarrow{u}$ puis pour $x = kA$).
Il faut ensuite vérifier que $\widehat{f}(x+y) = \widehat{f}(x) + \widehat{f}(y)$ dans les différents cas possibles, selon la forme de x et y.

- Si x et y sont tous deux des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\widehat{E}$, c'est une conséquence immédiate de la linéarité de $\overrightarrow{f}$, puisque $\widehat{f}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$.
- Si x est un vecteur $\overrightarrow{u}$ et y un élément du type kA : on sait que $\overrightarrow{u} + kA = k(A + \frac{1}{k}\overrightarrow{u})$. Donc

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(x+y) &= \widehat{f}\big(k(A + \tfrac{1}{k}\overrightarrow{u})\big) = k\, f(A + \tfrac{1}{k}\overrightarrow{u}) \qquad \text{or, } f \text{ est affine, donc}\\
\widehat{f}(x+y) &= k\left(f(A) + \overrightarrow{f}(\tfrac{1}{k}\overrightarrow{u})\right) = k\left(f(A) + \tfrac{1}{k}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\right) \quad (\text{linéarité de } \overrightarrow{f})\\
&= kf(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \widehat{f}(\overrightarrow{u}) + \widehat{f}(kA)\\
&= \widehat{f}(x) + \widehat{f}(y)
\end{aligned}$$

- Si $x = kA$ et $y = k'B$, avec $k + k' \neq 0$. On sait que $x + y = kA + k'B = (k+k')C$ avec $C = A + \frac{k'}{k+k'}\overrightarrow{AB}$ donc

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(x+y) &= \widehat{f}(kA + k'B) = \widehat{f}\Big((k+k')C\Big)\\
&= (k+k')f(C) = (k+k')f(A + \tfrac{k'}{k+k'}\overrightarrow{AB}) \quad \text{or, } f \text{ est affine, donc}\\
\widehat{f}(x+y) &= (k+k')\Big(f(A) + \overrightarrow{f}(\tfrac{k'}{k+k'}\overrightarrow{AB})\Big)\\
&= (k+k')\Big(f(A) + \tfrac{k'}{k+k'}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})\Big) = (k+k')\Big(f(A) + \tfrac{k'}{k+k'}\overrightarrow{f(A)f(B)}\Big)\\
&= kf(A) + k'f(B) \quad (\text{par définition de l'addition dans } \widehat{E'})\\
&= \widehat{f}(kA) + \widehat{f}(k'B) = \widehat{f}(x) + \widehat{f}(y).
\end{aligned}$$

- Si $x = kA$ et $y = -kB$, on sait que $x + y = kA + (-k)B = k(A - B) = k\overrightarrow{BA}$, donc

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(x+y) &= \widehat{f}(kA - kB) = \widehat{f}(k\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{f}(k\overrightarrow{BA}) = k\overrightarrow{f}(\overrightarrow{BA})\\
&= k\overrightarrow{f(B)f(A)} = kf(A) + (-k)f(B) \ (\text{par définition de l'addition dans } \widehat{E'})\\
&= \widehat{f}(kA) + \widehat{f}(-kB) = \widehat{f}(x) + \widehat{f}(y).
\end{aligned}$$

Finalement, $\widehat{f}$ est bien linéaire.

Réciproquement, si $\widehat{g}$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(\widehat{E}, \widehat{E'})$ telle qu'il existe un point $A \in E$ tel que $\widehat{g}(A) \in E'$ et telle que $\widehat{g}(\overrightarrow{E}) \subset \overrightarrow{E'}$.
Considérons l'application affine $g \in \mathcal{A}(E, E')$ définie par $g(A) = A'$ et dont la partie linéaire est $\overrightarrow{g} = \widehat{g}_{|\overrightarrow{E}} \in \mathcal{L}(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{E'})$. Pour tout $B \in E$, on a $g(B) = g(A + (B - A)) = A' + \overrightarrow{g}(B - A) = \widehat{g}(A) + \widehat{g}(B - A) = \widehat{g}(A + (B - A)) = \widehat{g}(B)$ donc on a bien $g = \widehat{g}_{|E}$.

De même si $\widehat{g}$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(\widehat{E}, \widehat{E'})$ telle que $\widehat{g}(E) \subset E'$, tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$ peut s'écrire $\overrightarrow{u} = B - A$ avec $A, B \in E$. On a donc $\widehat{g}(\overrightarrow{u}) = \widehat{g}(B) - \widehat{g}(A) \in \overrightarrow{E'}$ puisque $\widehat{g}(B)$ et $\widehat{g}(A)$ sont des points de E'. On a établi que $\widehat{g}(\overrightarrow{E}) \subset \overrightarrow{E'}$, et puisque $\widehat{g}(E) \subset E'$, on peut se ramener à la première partie de la réciproque. □

3.3 Coordonnées augmentées

La section 3.1 nous a permis d'établir que tout espace affine $(E, \overrightarrow{E})$ de dimension n peut être considéré comme plongé dans son espace universel de dimension $n+1$. Il est donc logique qu'à ce titre, on puisse considérer que les coordonnées d'un élément de E ou de $\overrightarrow{E}$ sont au nombre de $n+1$. En pratique, il y a deux situations classiques de telles coordonnées :

3.3.1 Coordonnées cartésiennes augmentées

Soit $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}) = (O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ un repère cartésien d'un espace affine $(E, \overrightarrow{E})$. Dans l'espace universel $\widehat{E}$, il est clair que $\mathcal{R}$ est une base (O n'appartient pas à l'hyperplan vectoriel engendré par $\mathcal{B}$, donc le sous-espace vectoriel de $\widehat{E}$ engendré par O et $\mathcal{B}$ contient strictement celui engendré par $\mathcal{B}$, ce ne peut être que $\widehat{E}$). Un repère cartésien de E est donc une base de $\widehat{E}$ dont le premier élément est dans E et tous les autres dans $\overrightarrow{E}$.
Lorsqu'on se place dans l'espace $\widehat{E}$, tout élément de E a pour coordonnées dans $\mathcal{R}$ non pas n mais $n+1$ nombres, avec une première coordonnée toujours égale à 1. M a pour coordonnées $(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ signifie d'ailleurs que $M = 1O + \lambda_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{e_n}$, ce qui est très logique. De même, un vecteur a un $n+1$-uplet de coordonnées dont le premier terme est nul.

Remarque : Dans ce cadre, la forme linéaire φ liée à l'espace universel (qui permet de caractériser $\overrightarrow{E}$ et E dans $\widehat{E}$) est O^*, premier élément de la base duale $\mathcal{R}^* = (O^*, \overrightarrow{e_1}^*, \ldots, \overrightarrow{e_n}^*)$ de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire l'application de $\widehat{E}$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à tout élément x de $\widehat{E}$ sa première coordonnée dans $\mathcal{R}$.

En effet, pour tout point M, on a $\varphi(M) = O^*(M) = 1$ et pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on a $\varphi(\overrightarrow{u}) = O^*(\overrightarrow{u}) = 0$, donc pour tout élément x de $\widehat{E}$, on a $\varphi(x) = O^*(x)$, puisque les éléments de $\widehat{E}$ sont soit des vecteurs, soit de la forme λM avec $M \in E$.

Il est intéressant de voir ce que deviennent les équations cartésiennes d'une variété affine dans ce cadre. Par exemple une équation cartésienne d'une droite d'un plan affine P qu'on écrit $ux + vy + h = 0$ (dans un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$) peut se comprendre comme l'intersection dans l'espace à trois dimensions $\widehat{P}$ du plan $ux + vy + ht = 0$ avec le plan P qui a comme équation $t = 1$ (il suffit d'écrire les coordonnées d'un point dans l'ordre (t, x, y)).

De même, un endomorphisme affine f d'un plan affine P correspond à la restriction d'un endomorphisme linéaire $\widehat{f}$ de $\widehat{E}$ qui laisse $\overrightarrow{P}$ stable et tel que l'image d'un point (O par exemple) est un point. Il est donc caractérisé par le fait que sa matrice est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ qui est la matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de la partie linéaire $\overrightarrow{f}$, c'est à dire de la restriction de $\widehat{f}$ à $\overrightarrow{P}$. L'application affine f était ici caractérisée par les formules analytiques suivantes $\begin{cases} x' = a_0 + a_1 x + a_2 y \\ y' = b_0 + b_1 x + b_2 y. \end{cases}$
L'image de O était $f(O) = O'$ de coordonnées (a_0, b_0) dans le repère cartésien $\mathcal{R}$.

3.3.2 Coordonnées barycentriques

Relisons tout d'abord la définition 1.18 p. 10 vue en fin de chapitre I :

Définition 3.4 Une famille $(A_1, \ldots, A_k)$ de E est *affinement libre* lorsque le sous-espace affine engendré par ces k points est de dimension $k-1$.

Soit F le sous-espace affine engendré par les A_i. D'après ce qui précède, c'est l'intersection d'un sous-espace vectoriel $\widetilde{F}$ (de dimension $\dim F + 1$) de $\widehat{E}$ avec E. D'autre part, soit $\widehat{F}$ le sous-espace vectoriel de $\widehat{E}$ engendré par les A_i. Puisque $\widetilde{F}$ est un sous-espace vectoriel qui contient aussi les A_i, on a $\widehat{F} \subset \widetilde{F}$. Donc si $F' = \widehat{F} \cap E$, on a $\widehat{F} \cap E \subset \widetilde{F} \cap E$ c'est-à-dire $F' \subset F$. Mais F' est un sous-espace affine de E qui contient les A_i, donc $F \subset F'$ et $F = F'$ et $\widetilde{F} = \widehat{F}$ (à cause de la bijection entre les sous-espaces affines de E et les sous-espaces vectoriels de $\widehat{E}$ non inclus dans $\overrightarrow{E}$).
Par conséquent, $\dim(\mathrm{aff}\,(A_1, \ldots, A_k)) = k-1 \iff \dim(< A_1, \ldots, A_k >) = k$, c'est-à-dire si et seulement $(A_1, \ldots, A_k)$ forme une famille libre de $\widehat{E}$.
Des points forment donc une famille affinement libre (de E) si et seulement si ils forment une famille libre (de $\widehat{E}$) : en quelque sorte, « affinement » est de trop.

Remarque : On peut démontrer que $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ est affinement libre si et seulement si la famille de $k-1$ vecteurs de $\overrightarrow{E}$ $(\overrightarrow{A_1A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_k})$ est libre (exercice 3.7 p. 83).

Définition 3.5 Un *repère affine* de $(E, \overrightarrow{E})$ est une famille affinement libre de $n+1$ points.

On a évidemment l'équivalence :

Proposition 3.6 De même que $(O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est un repère cartésien de l'espace affine $(E, \overrightarrow{E})$ si et seulement si c'est une base de $\widehat{E}$, un n+1-uple de points $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ est un repère affine de E si et seulement si c'est une base de $\widehat{E}$.

Preuve vérification évidente à la lumière des remarques précédentes. □

Nous pouvons maintenant introduire les coordonnées barycentriques, qui sont les coordonnées dans un repère affine.

Définition 3.7 Soit $\mathcal{R} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ un repère affine de l'espace affine E. Les *coordonnées barycentriques* d'un point M dans ce repère sont les coordonnées de M considéré comme élément de $\widehat{E}$ dans la base $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ de $\widehat{E}$.

Proposition 3.8 Si un élément x de $\widehat{E}$ a pour coordonnées $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dans la base $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ de $\widehat{E}$ (qui est aussi un repère affine de E), alors

$$\left[x \in E \iff \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\right] \text{ et } \left[x \in \overrightarrow{E} \iff \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0\right].$$

Preuve En utilisant la forme linéaire φ qui est associée à $\widehat{E}$, on calcule $\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i A_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varphi(A_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i$ (puisque les A_i sont des points, on a $\varphi(A_i) = 1$), d'où le résultat annoncé. □

Corollaire 3.9 Les coordonnées barycentriques $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ d'un point M dans un repère affine $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ vérifient $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$.

On peut déterminer les équations cartésiennes d'une variété affine F dans un repère affine $\mathcal{R}$: ce sont les équations cartésiennes (voir la proposition 1.21 p. 14) dans la base $\mathcal{R}$ du sous-espace vectoriel $\widehat{F}$ de $\widehat{E}$ (muni de sa structure affine canonique) qui est tel que $F = \widehat{F} \cap E$.
Ces équations sont sous la forme d'un système *homogène* (puisque $\widehat{F}$ passe par $\overrightarrow{0}$) $\mathrm{M}\Lambda = 0$ (si F est de dimension $n - q$ et E de dimension n, M est une matrice q lignes et $n+1$ colonnes de rang q et Λ (« lambda » majuscule) est le vecteur colonne de $n+1$ lignes formé des λ_i) et elles sont complétées (souvent de manière implicite), par l'équation de E qui est $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$.

Remarque : La forme linéaire φ qui permet de caractériser les hyperplans E et $\overrightarrow{E}$ de $\widehat{E}$ s'exprime donc dans la base duale $(A_0^*, A_1^*, \ldots, A_n^*)$ de $\mathcal{R}$ par $\varphi = \sum_{i=0}^{n} A_i^*$.

Une application affine peut aussi être caractérisée grâce aux coordonnées barycentriques :

Proposition 3.10 Si $\mathcal{R} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ est un repère affine d'un espace affine $(E, \overrightarrow{E})$, alors pour tous $B_0, B_1, \ldots, B_n$ points d'un espace affine $(E', \overrightarrow{E'})$, il existe une unique application affine $f \in \mathcal{A}(E, E')$ telle que $f(A_i) = B_i$.
Cette application affine f est la restriction à E de l'application linéaire $\widehat{f} \in \mathcal{L}(\widehat{E}, \widehat{E'})$ définie par $\widehat{f}(A_i) = B_i$.
Elle associe à un point $M \in E$ dont les coordonnées barycentriques dans ce repère sont $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ le point $M' = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i B_i \in E'$.

Preuve S'il existe une application affine f vérifiant $f(A_i) = B_i$ pour tout i, d'après la proposition 3.3 p. 67 elle peut être prolongée en une application linéaire $\widehat{f}$ de $\widehat{E}$ vers $\widehat{E'}$, qui vérifiera $\widehat{f}(A_i) = B_i$.
L'existence et l'unicité de $\widehat{f}$ est une conséquence des propriétés des applications linéaires. Il reste juste à vérifier que sa restriction à E est une application affine, ce qui sera assuré si on arrive à établir $\widehat{f}(E) \subset E'$ (d'après la proposition 3.3 p. 67). Soient φ et φ' les formes linéaires associées aux espaces universels $\widehat{E}$ et $\widehat{E'}$, liés respectivement à $(E, \overrightarrow{E})$ et à $(E', \overrightarrow{E'})$.
Pour tout $M = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i A_i \in E$, on a $\varphi(M) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$, et $\widehat{f}(M) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i B_i$, donc $\varphi'(\widehat{f}(M)) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi'(B_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$ donc $\widehat{f}(M) \in E'$. □

3.4 Barycentres

3.4.1 Définition

Pour commencer un peu de vocabulaire :

Définition 3.11 Soit $I = \{1, \ldots, p\}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie de points de E, $(\alpha_i)_{i \in I}$ une suite de scalaires de $\mathbb{R}$. On dit que $(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$ est une famille (ou un système) de points pondérés de E. α_i est le « poids » ou la « masse » du point A_i.
$m = \sum_{i \in I} \alpha_i$ est la masse totale du système de points pondérés.

L'espace vectoriel universel va permettre de retrouver très facilement les définitions et propriétés classiques des barycentres.

Proposition 3.12 (et définition)
Soit $\Sigma = (A_i, \alpha_i)_{i\in I}$ un système de p points pondérés :

L'application ψ de E dans $\overrightarrow{E}$ qui associe à tout point M le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{A_iM}$ est la fonction vectorielle de Leibnitz associée au système de points pondérés Σ.
Si la masse totale du système est nulle, alors le vecteur $\psi(M) = \alpha_1\overrightarrow{A_1M} + \cdots + \alpha_p\overrightarrow{A_pM}$ ne dépend pas du point M : la fonction ψ est constante.
Si la masse totale m du système est non nulle, il existe un unique point G de E tel que : $\psi(G) = \overrightarrow{0}$.
G vérifie alors : $\forall M \in E,\ \psi(M) = m\overrightarrow{GM}$

En particulier, on a $\forall i = 1, \dots, p\quad \overrightarrow{A_iG} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p} \alpha_k \overrightarrow{A_iA_k}$

G est le *barycentre du système* de points pondérés $\Sigma = (A_i, \alpha_i)_{i\in I}$.

Preuve En se plaçant dans $\widehat{E}$, on a $\psi(M) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right) M - \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\alpha_i A_i\right) = mM - \widehat{G}$, avec $\widehat{G} = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\alpha_i A_i\right)$ est un élément de l'espace vectoriel universel.

Si φ est la forme linéaire associée à $\widehat{E}$, on a $\varphi(\widehat{G}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\varphi(A_i) = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i = m$ (puisque les A_i sont des points, on a $\varphi(A_i) = 1$).
Donc si $m = 0$,
$\widehat{G}$ est tel que $\varphi(\widehat{G}) = 0$ donc $\widehat{G} \in \overrightarrow{E}$ et
pour tout point M, $\psi(M) = 0M - \widehat{G} = -\widehat{G}$ est un vecteur fixe de $\overrightarrow{E}$.
Et si $m \neq 0$,
Soit $G = \frac{1}{m}\widehat{G}$. On a $\varphi(G) = 1$ donc $G \in E$ et $\widehat{G} = mG$, donc pour tout M, on a $\psi(M) = m(M - G)$.
Donc $\psi(M) = \overrightarrow{0} \iff M = G$ □

Remarque : Avec les notations d'espace vectoriel universel, le barycentre G du système de points pondérés $\Sigma = (A_i, \alpha_i)_{i\in I}$ peut s'écrire

$$G = \sum_{i=1}^{p}\frac{\alpha_i}{m}A_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{p}\alpha_i A_i = \frac{\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_p A_p}{m}$$

Il ne faut pas oublier de diviser par m : par exemple le milieu I du segment $[AB]$, isobarycentre de ces deux points est $I = \dfrac{A+B}{2}$, mais $A+B$ est un élément « imaginaire » de l'espace vectoriel universel.

Exemples : Soient A, B, C trois points d'un plan affine $(E, \overrightarrow{E})$; on considère le point G, barycentre de $((A,1),(B,1),(C,1))$; on dit que G est l'*isobarycentre* de ces trois points. En appliquant la proposition 3.12, on peut affirmer que $G = \frac{1}{3}(A+B+C)$, mais aussi, par exemple, que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AA'}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ (si A' est le milieu de $[BC]$). Lorsque (A, B, C) sont affinement libres, on dit que G est le *centre de gravité* du triangle ABC.

D'une façon générale, l'isobarycentre d'un n-uple de points est le barycentre de ces points affectés de la même masse 1.

On peut montrer assez facilement avec des propriétés élémentaires que trois point A, B, C d'un espace affine sont alignés si et seulement l'un d'entre eux est barycentre des deux autres : Si C est le barycentre de $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$, alors on a $\overrightarrow{AC} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$, donc A, B, C sont alignés, et si A, B, C sont alignés, si par exemple A et B sont distincts, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, donc C est le barycentre de $\{(A, 1-\lambda),(B,\lambda)\}$

Les propriétés classiques des barycentres deviennent des « trivialités » avec ce vocabulaire :

Proposition 3.13 (symétrie du barycentre)
Le barycentre d'un système de points pondérés ne dépend pas de l'ordre des points pondérés.

Preuve Il suffit d'utiliser la commutativité de l'addition des scalaires et de l'addition dans l'espace vectoriel universel $\widehat{E}$ pour changer l'ordre dans $G = \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{m} A_i$. □

Proposition 3.14 (homogénéité du barycentre) Soit $\Sigma = (A_i, \alpha_i)_{i\in I}$ un système de points pondérés dont la masse totale m est non nulle.
Soit k un scalaire non nul.
Alors les systèmes de points pondérés $\{(A_i, \alpha_i)_{i\in I}\}$ et $\{(A_i, k\alpha_i)_{i\in I}\}$ ont même barycentre.

Preuve Il suffit d'écrire $\dfrac{k\alpha_1 A_1 + \cdots + k\alpha_p A_p}{km} = \dfrac{\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_p A_p}{m}$. □

Proposition 3.15 (associativité du barycentre) Soit $\Sigma = (A_i, \alpha_i)_{i\in I}$ un système de points pondérés dont la masse totale m est non nulle.
On suppose que $I = I_1 \sqcup I_2 \sqcup \cdots \sqcup I_q$, (les $(I_k)_{1\leqslant k\leqslant q}$ forment une partition[4] de I), et

[4] Le symbole $\sqcup$ signifie « réunion disjointe » : on affirme donc ici que l'intersection de deux quelconques des I_k est vide.

que pour tout $k = 1, \dots, q$, $m_k = \sum_{i \in I_k} \alpha_i \neq 0$.

On peut alors définir pour chaque k le barycentre G_k du « sous-système » de points pondérés $\Sigma_k = (A_i, \alpha_i)_{i \in I_k}$ qui est $G_k = \sum_{i \in I_k} \frac{\alpha_i}{m_k} A_i$.

Alors le barycentre G du système de points pondérés Σ est le barycentre du système de points pondérés $(G_k, m_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$.

Preuve L'écriture de la démonstration dans $\widehat{E}$ est ici à peine plus subtile :

Tout d'abord, il est clair que $m = \sum_{k=1}^{q} m_k$ et on a

$$G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i A_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{q} \sum_{i \in I_k} \alpha_i A_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{q} m_k \sum_{i \in I_k} \frac{\alpha_i}{m_k} A_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{q} m_k G_k.$$

□

3.4.2 Barycentres et coordonnées barycentriques

On a défini les coordonnées barycentriques indépendamment de la notion de barycentre, mais ces notions sont, bien sûr, étroitement liées.

Proposition 3.16 Soit $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ un repère affine de l'espace affine $(E, \overrightarrow{E})$ et soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un $(n+1)$-uple de scalaires tel que $m = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$. Alors un point M a pour coordonnées barycentriques $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans ce repère si et seulement si M est le barycentre du système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{i=0,1,\dots,n}$.

Preuve C'est une banalité en comparant les écritures dans $\widehat{E}$. □

La notion de barycentre permet aussi de caractériser des points affinement libres.

Proposition 3.17 Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) La famille $(A_1, \dots, A_p)$ est affinement libre.

(2) Aucun point n'est barycentre des autres.

(3) $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $(\overrightarrow{A_i A_j})_{j \neq i}$ est une famille libre dans $\overrightarrow{E}$.

(4) La famille $(A_1, \dots, A_p)$ est libre dans $\widehat{E}$.

Preuve On a vu (juste après la définition 3.4 p. 70) que les points (1) et (4) sont équivalents.
Lorsqu'un point est barycentre des autres, on peut, dans $\widehat{E}$ l'écrire comme combinaison linéaire des autres, et la famille $(A_1, \ldots, A_p)$ est liée : ceci montre (non2) $\Longrightarrow$ (non4) donc (4) $\Longrightarrow$ (2).

Réciproquement, on sait qu'une famille de vecteurs est liée si et seulement l'un d'entre eux est combinaison linéaire des autres. Donc si $(A_1, \ldots, A_p)$ est une famille liée de $\widehat{E}$, un de ces points est dans $\widehat{E}$ combinaison linéaire des autres ; on peut supposer, sans nuire à la généralité que c'est A_1 (quitte à renuméroter), donc qu'on a $A_1 = \displaystyle\sum_{i=2}^{p} \lambda_i A_i$.
Mais puisque A_1 est un point, on a $1 = \varphi(A_1) = \varphi(A_i)$ pour tout i, et donc $\displaystyle\sum_{i=2}^{p} \lambda_i = 1$ et donc A_1 est barycentre du système de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{2 \leqslant i \leqslant p}$, ce qui établit (2) $\Longrightarrow$ (4) et termine l'équivalence de (2) et (4).

Reste à montrer (3) $\iff$ (4), ce qui s'écrit, dans $\widehat{E}$, dans le cas où $i = 1$ (ce qui bien sûr ne nuit pas à la généralité) :
$(A_1, \ldots, A_p)$ est libre $\iff$ $(A_2 - A_1, \ldots, A_p - A_1)$ est libre.
En fait, il est classique que $\mathrm{rg}(A_1, \ldots, A_p) = \mathrm{rg}(A_1, A_2 - A_1, \ldots, A_p - A_1)$ (on ne change pas le rang d'un système de vecteurs en additionnant à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres).
Et puisque $A_1 \notin \overrightarrow{E}$ et que $< A_2 - A_1, \ldots, A_p - A_1 > \subset \overrightarrow{E}$, on est sûr que

$$\mathrm{rg}(A_1, A_2 - A_1, \ldots, A_p - A_1) = 1 + \mathrm{rg}(A_2 - A_1, \ldots, A_p - A_1).$$

Pour finir, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(A_1, \ldots, A_p) \text{ est libre} &\iff \mathrm{rg}(A_1, \ldots, A_p) = p \\
&\iff \mathrm{rg}(A_1, A_2 - A_1, \ldots, A_p - A_1) = p \\
&\iff \mathrm{rg}(A_2 - A_1, \ldots, A_p - A_1) = p - 1 \\
&\iff (A_2 - A_1, \ldots, A_p - A_1) \text{ est libre.}
\end{aligned}$$

□

Remarque : Au passage, on a démontré l'équivalence :
$(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ est un repère affine de E si et seulement si $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est un repère cartésien de E. On a ainsi redémontré la remarque qui suit la définition 3.4 p. 70 ; voir aussi l'exercice 3.7 p. 83.

Voici maintenant une proposition qui est souvent bien utile en pratique

Proposition 3.18 Si $(A_0, \ldots, A_n)$ est un repère affine de E, alors pour tout point M, ses coordonnées barycentriques dans ce repère affine sont $(t_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ si et seulement si ses coordonnées cartésiennes dans le repère cartésien $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ sont $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$

Preuve Il suffit encore une fois d'écrire les relations vectorielles définissant les coordonnées d'un point ou d'un vecteur dans $\widehat{E}$ et de les comparer. Rappel : on a $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$ pour pouvoir avoir affaire à des coordonnées barycentriques : on en déduit donc que $t_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} t_i$. □

Par exemple, un point M d'un plan affine $(P, \overrightarrow{P})$, dont les coordonnées barycentriques dans un repère affine (A, B, C) sont (α, β, γ), admet, dans le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, comme coordonnées tout simplement (β, γ). (Mais ses coordonnées cartésiennes augmentées, dans la base $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de l'espace universel $\widehat{P}$, sont $(1, \beta, \gamma)$.)

3.4.3 Caractérisation barycentrique des applications affines

Proposition 3.19 Une application f de E dans E' est affine si et seulement si elle conserve le barycentre

Preuve Si f est affine, en passant par l'espace universel et son prolongement linéaire, et en interprétant dans $\widehat{E}$ la notion de barycentre, il est clair que f conserve les barycentres, c'est-à-dire que si G est le barycentre d'un système $\Sigma = (A_i, \alpha_i)_{i\in I}$ de points pondérés, alors $f(G)$ est le barycentre du système $f(\Sigma) = (f(A_i), \alpha_i)_{i\in I}$.
Réciproquement, si f conserve les barycentres, soit $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ un repère affine de E. On considère l'application affine $g \in \mathcal{A}(E, E')$ qui est définie par $g(A_i) = f(A_i)$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n$ (l'existence et l'unicité de g sont assurées par la proposition 3.10 p. 72). Pour tout point $M \in E$, si $(\alpha_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ sont ses coordonnées barycentriques dans ce repère affine, on sait que M est le barycentre de $\Sigma = (A_i, \alpha_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$. Par conservation du barycentre $f(M)$ est donc le barycentre du système $f(\Sigma) = (f(A_i), \alpha_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, ce qui s'écrit $f(M) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(A_i)$ (n'oublions pas que la masse totale vaut 1). D'autre part, on sait calculer $g(M)$: c'est $g(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(A_i) = f(M)$. On a donc $f = g$ et f est bien une application affine. □

Remarque : En utilisant l'associativité du barycentre, il est facile de montrer qu'une application qui conserve le barycentre de deux points est affine.

3.4.4 Caractérisation barycentrique des variétés affines

De la même façon, les barycentres permettent de caractériser les sous-espaces affines.

Proposition 3.20 Soit F un sous-ensemble non vide d'un espace affine E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) F est une variété affine.
(2) Le barycentre de toute famille finie de points de F est dans F (stabilité par barycentre).
(3) Toute droite contenant deux points distincts de F est incluse dans F.

Preuve Remarquons qu'en fait, (3) peut se traduire par le fait que F est stable pour le barycentre de deux points. En effet, si A et B sont deux points distincts, ils forment un repère affine de la droite $\operatorname{aff}(A, B) = (AB)$, et (AB) est donc l'ensemble des barycentres de A et de B. Il est donc trivial que (2)$\Longrightarrow$(3).
Soit F un sous ensemble non vide de E vérifiant (3).
Posons pour A dans F, $\widetilde{F} = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in F\}$.
Montrons que $\widetilde{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
Soit k un scalaire et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM} \in \widetilde{F}$ $(M \in F)$. Soit $N = A + k\overrightarrow{AM}$. N est barycentre de $\{(A, 1-k); (M, k)\}$ donc N est dans F donc $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u} \in \widetilde{F}$. $\widetilde{F}$ est stable pour la multiplication externe.
De même, soient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ deux éléments de $\widetilde{F}$. On a $B \in F$ et $C \in F$, donc le milieu $I = \dfrac{B+C}{2} \in F$. Le barycentre M de $\{(I, 2), (A, -1)\}$ est aussi dans F, et donc $\overrightarrow{AM} \in \widetilde{F}$. Or, $M = 2I - A = B + C - A = A + (B - A) + (C - A) = A + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in \widetilde{F}$. $\widetilde{F}$ est aussi stable pour l'addition des vecteurs.
Par construction, $F = A + \widetilde{F}$, donc F est une variété affine de direction $\widetilde{F}$.On a établi que (3)$\Longrightarrow$(1).
Pour terminer, en considérant un sous-espace affine F comme un espace affine, il est clair que (1)$\Longrightarrow$(2). □

Un corollaire spectaculaire de cette propriété est le suivant :

Proposition 3.21 La variété affine engendrée par une partie X non vide d'un espace affine E est l'ensemble des barycentres d'un nombre fini de points de X.

Preuve Il est assez évident, par associativité du barycentre, que cet ensemble de barycentres est stable par barycentre, donc est une variété affine, et elle est évidemment incluse dans toute variété affine contenant X. □

3.4.5 Convexité

Alors que tout ce que nous avons fait dans ce chapitre (et dans les chapitres précédents) restait valable quel que soit le corps de base (avec quelques précautions pour les calculs barycentriques dans le cas des corps finis), cette notion de convexité n'a de sens que lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$.

« Rappel » : Si A et B sont deux points distincts d'un espace affine E, le segment $[AB]$ est l'ensemble des points M tels qu'il existe $k \in [0,1]$ avec $M = A + k(B - A)$ (ou plus classiquement, mais c'est la même chose : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$). $[AB]$ est donc l'ensemble des barycentres des points A et B affectés de poids positifs ou nuls.

Définition 3.22 Une partie C d'un espace affine E est convexe lorsque

$$\forall M, N \in C, \quad [MN] \subset C$$

Il est assez évident que la notion de convexité est stable par intersection, (une intersection quelconque de parties convexes est convexe)(même si elle est vide, car les éléments de l'ensemble vide ayant toutes les propriétés, il est clair que $\varnothing$ est convexe). Cela permet de définir la notion de *partie convexe engendrée*, (on préfère dire *enveloppe convexe*) d'une partie X de E :

Définition 3.23 Soit $\mathcal{X}$ une partie non vide de l'espace affine $(E, \vec{E})$. L'enveloppe convexe de $\mathcal{X}$ est l'ensemble

$$\operatorname{conv}(\mathcal{X}) = \bigcap_{\substack{C \text{ convexe} \\ \mathcal{X} \subset C}} C.$$

$\operatorname{conv}(\mathcal{X})$ est la plus petite partie convexe (au sens de l'inclusion) qui contient $\mathcal{X}$.

Définissons aussi la notion de *combinaison convexe* :

Définition 3.24 Un point M est une combinaison convexe des p points A_i lorsqu'il existe une famille de p scalaires $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ telle que M est barycentre du système $\Sigma = \{(A_i, \alpha_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$, ou ce qui revient au même lorsque $M = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i A_i$ avec $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $\alpha_i \geqslant 0$.

Un segment $[AB]$ est donc l'ensemble des combinaisons convexes de ses extrémités.

On a la propriété suivante :

Proposition 3.25
Soit F une partie d'un espace affine E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) F est convexe.

(2) Toute combinaison convexe de points de F est dans F (stabilité par barycentre à poids positifs).
(3) Toute segment limité par deux points distincts de F est inclus dans F.

Preuve C'est l'associativité du barycentre qui permet d'obtenir aisément ce résultat, par exemple par récurrence. □

Signalons aussi le résultat suivant, facile à établir en copiant la démonstration de la proposition 3.21 (p. 78) :

Proposition 3.26 L'enveloppe convexe d'une partie $\mathcal{X}$ est l'ensemble des combinaisons convexes d'un nombre fini de points de $\mathcal{X}$.

Une « amélioration »de ce résultat est le théorème de Carathéodory, dont nous laissons la preuve en exercice (3.12, p. 84) :

Théorème 3.27 (de Carathéodory) *Dans un espace affine*[5] $(E, \overrightarrow{E})$ *de dimension* n, *l'enveloppe convexe d'une partie* $\mathcal{X}$ *de* E *est l'ensemble des combinaisons convexes d'au plus* $n+1$ *points de* $\mathcal{X}$.

En analyse, la notion de convexité est largement développée et enrichie.

3.5 Exercices

Exercice 3.1.
Soient A, B deux points d'un espace affine $(E, \overrightarrow{E})$, et soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$.

1° En utilisant les notations et définitions du § **3.1.1** p. 61 utilisées pour la démonstration de la proposition 3.1 et en revenant aux définitions, déterminer le point C et le scalaire λ tel que $g_{A,2} + 3g_{B,\frac{1}{2}} = g_{C,\lambda}$.

2° Toujours en revenant à ces mêmes notations et définitions, quelle est la nature de l'élément $g_{A,3} + 3g_{B,-1}$ de $\widehat{E}$?

3° Même question avec $g_{B,2} - 3f_{\overrightarrow{u}}$.

4° Comment s'écrivent ces résultats une fois qu'on a admis que $E \cup \overrightarrow{E} \subset \widehat{E}$?

[5] Ce théorème est aussi valable dans un espace vectoriel, puisqu'on a vu que tout espace vectoriel est aussi un espace affine sur lui-même.

Exercice 3.2.

Soient A, B, C des points non alignés du plan affine $(E, \overrightarrow{E})$ et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ des vecteurs de $\overrightarrow{E}$. Pour les éléments suivants, préciser s'il s'agit de points, de vecteurs ou d'autres éléments de $\widehat{E}$. On cherchera, pour ceux des éléments de $\widehat{E}$ qui ne sont ni des vecteurs ni des points, à les écrire sous la forme λM avec $M \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On exprimera les vecteurs sous forme classique avec des flèches, et on écrira les points en fonction des points A, B, C et des vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ avec une écriture permettant de les construire géométriquement.
$a = A+B+C$; $b = A+B-2C+\overrightarrow{w}$; $c = A+2\overrightarrow{u}-2(B-\overrightarrow{v})$; $d = 5A-3B-C+3\overrightarrow{u}$.

Exercice 3.3.

Soit $(P, \overrightarrow{P})$ un plan affine, rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère que P et $\overrightarrow{P}$ sont les hyperplans respectivement affine et vectoriel d'un espace vectoriel $\overrightarrow{E} = \widehat{P}$, de dimension 3, dont $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base.

1° (*Dans le plan affine*) Soient A, B, C les points de P dont les coordonnées dans le repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont respectivement $(1, 2)$, $(3, -1)$ et $(-1, -1)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite affine $D = (AB)$, et de la droite D' qui est parallèle à D et qui passe par C.

2° (*Dans le plan vectoriel*) Déterminer par ses coordonnées dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, un vecteur directeur de la direction $\overrightarrow{D}$ de la droite D ainsi qu'une équation cartésienne de $\overrightarrow{D}$. Que peut-on dire de la direction $\overrightarrow{D'}$ de la droite D' ?

3° (*Dans l'espace universel*) Les coordonnées dans la base $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'un élément X de $\overrightarrow{E}$ seront notées (t, x, y).

3° a) Déterminer dans cette base, une équation cartésienne du sous-espace vectoriel $\widetilde{D}$ de $\overrightarrow{E}$ qui est engendré par A et B ($\widetilde{D} = < A, B >$).

3° b) Comment caractériser la droite affine $D = (AB)$ dans l'espace vectoriel universel $\overrightarrow{E}$?

3° c) Caractériser dans $\overrightarrow{E}$ la droite vectorielle $\overrightarrow{D}$.

3° d) Déterminer une équation cartésienne du plan vectoriel $\widetilde{D'}$ de $\overrightarrow{E}$ qui correspond à D' par la bijection annoncée dans la proposition 3.2 p. 66.

3° e) Déterminer un système d'équations cartésiennes caractérisant la droite affine D' de l'espace $\overrightarrow{E}$.

Exercice 3.4.

Soit $(P, \overrightarrow{P})$ un plan affine rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et soient D et D' les droites d'équation $x + y = 2$ et $3x - y = 3$.
s est la symétrie par rapport à D parallèlement à D'.

1° Déterminer les équations des sous espaces $\widetilde{D}$ et $\widetilde{D'}$ associés à D et D' dans l'espace $\widehat{P}$ dans la base $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\widehat{P}$.

2° Déterminer par sa matrice dans la base $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ l'endomorphisme $\widetilde{s}$ de $\widehat{P}$ associé à s.

3° Que peut-on dire de l'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ dans la base $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$?

Exercice 3.5.
Soit (A,B,C) un repère affine du plan affine. Soit M de coordonnées barycentriques (α,β,γ) dans ce repère.
Soit A_1 le milieu de $[BC]$. Soit N le symétrique de M par rapport à A_1 (c-à-d. le point tel que A_1 est le milieu de MN).
Déterminer les coordonnées barycentriques de N dans (A,B,C).

Exercice 3.6.
Soit $(E,\overrightarrow{E})$ et $(F,\overrightarrow{F})$ deux espaces affines de dimensions respectives 2 et 3. On considère un repère cartésien $\mathcal{R} = (O,\vec{\imath},\vec{\jmath}) = (O,\mathcal{B})$ de E et un repère cartésien $\mathcal{R}' = (\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}) = (\Omega,\mathcal{B}')$ de F. $\widehat{E}$ et $\widehat{F}$ sont les espaces universels contenant respectivement $E \cup \overrightarrow{E}$ et $F \cup \overrightarrow{F}$.

1° Soit f l'application affine qui associe au point M de coordonnées (x,y) dans $\mathcal{R}$, le point $M' \in F$, de coordonnées (x'_1,x'_2,x'_3) telles que $\begin{cases} x'_1 = 2+2x-3y \\ x'_2 = -1-x-2y \\ x'_3 = 2y. \end{cases}$

1° a) Déterminer (en précisant les bases utilisées) la matrice de la partie linéaire de f. f est-elle injective ? surjective ?

1° b) Quelle est la matrice de l'application linéaire $\widetilde{f} \in \mathcal{L}(\widehat{E},\widehat{F})$ dont f est la restriction ? (On précisera bien les bases).

1° c) Quelle est l'image par f de la droite $D = A + < \vec{u} >$ de E, si $A(1,1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$?

1° d) Quelle est l'image réciproque par f du plan Π de F caractérisé par l'équation cartésienne $x_1 + x_2 - x_3 = 1$?

2° Soit $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

2° a) Montrer que $\mathcal{R}_1 = (A,\vec{u},\vec{v})$ est un repère cartésien de E.

2° b) Déterminer les formules analytiques de changement de repère entre $\mathcal{R}$ et ce nouveau repère $\mathcal{R}_1$ (on pourra utiliser l'espace universel).

2° c) Déterminer les formules analytiques de f pour le repère $\mathcal{R}_1$ de E et le repère $\mathcal{R}'$ de F, ainsi que la matrice de $\widetilde{f}$ pour ces repères considérés comme des bases de $\widehat{E}$ et $\widehat{F}$.

3° Soit $\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{F}$ définis par $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{e_1'} - \overrightarrow{e_2'}$, $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{e_2'} - \overrightarrow{e_3'}$, $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{e_1'} + \overrightarrow{e_3'}$.

3° a) Montrer que $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ est une base de F. On pose $\mathcal{R}_1' = (\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$. Justifier que $\mathcal{R}_1'$ est un repère cartésien de F. Préciser la matrice de passage entre les *bases* $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1'$ de $\widehat{F}$.

3° b) Déterminer, par ses formules analytiques dans les « anciens repères » $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ l'application affine g de E dans F définie par sa partie linéaire $\overrightarrow{g}$ et l'image du point A : $g(A) = \Omega + \overrightarrow{J} - 2\overrightarrow{K}$, $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{I} + \overrightarrow{J}$, $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{J} + \overrightarrow{K}$.

Exercice 3.7.
Démontrer la remarque qui suit la définition 3.4 p. 70, à savoir qu'un système de k points $(A_1, A_2 \ldots, A_k)$ de E est affinement libre si et seulement si le système de $k-1$ vecteurs $(\overrightarrow{A_1A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_k})$ de $\overrightarrow{E}$ est libre. (On raisonnera dans l'espace universel $\widetilde{E}$ qui contient E et $\overrightarrow{E}$.)

Exercice 3.8.
Soit $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine de dimension 3, rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. On considère les 4 points (A, B, C, D) de E, dont les coordonnées sont les suivantes, dans $\mathcal{R}$: $A(2,1,1)$; $B(1,0,-3)$; $C(0,3,1)$; $D(-1,-1,-3)$.

1° Montrer que (A, B, C, D) est un repère affine de E. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{R}$ vers (A, B, C, D), considérés l'un et l'autre comme des bases de $\widehat{E}$, l'espace universel contenant E et $\overrightarrow{E}$. Calculer P^{-1}.

2° Justifier l'existence et l'unicité d'une application affine f vérifiant $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $f(D) = D'$, pour les points A', B', C', D' dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont les suivantes : $A'(1,0,0)$; $B'(2,1,-2)$; $C'(-1,2,0)$; $D'(1,1,-1)$.

3° Déterminer les coordonnées barycentriques de A', B', C', D' dans le repère affine (A, B, C, D). Déterminer les images de A', B', C', D' par f. Que peut-on en déduire pour la nature de f ?

4° Soit $\widetilde{f}$ l'application linéaire de $\widehat{E}$ dans lui-même dont f est la restriction à E. Déterminer la matrice M de $\widetilde{f}$, lorsqu'on choisit (A, B, C, D) comme base de $\widehat{E}$ ensemble de départ et $\mathcal{R}$ comme base de $\widehat{E}$ ensemble d'arrivée.

5° Déterminer la matrice M_1 de $\widetilde{f}$ dans la base (A, B, C, D) et la matrice M_0 de $\widetilde{f}$ dans la base $\mathcal{R}$. Quelle relation existe-t-il entre les trois matrices $\mathrm{M}, \mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1$?

6° Préciser la nature et les éléments de f.

Exercice 3.9.
A, B, C, D étant quatre points du plan affine distincts deux à deux, on note I le milieu de $[AB]$, J celui de $[BC]$, K celui de $[CD]$, L celui de $[DA]$. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 3.10.
Soient A, B et C trois points non alignés et soit G barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ (ce qui suppose que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$)

1° Montrer que (AB) et (CG) sont sécantes si et seulement si $\alpha + \beta \neq 0$. Que se passe-t-il lorsque $\alpha + \beta = 0$?

2° Montrer que lorsque (AB) et (CG) sont sécantes, leur point d'intersection est le point H barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.

3° On suppose maintenant qu'on a $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ et aussi que $-\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, $\alpha - \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta - \gamma \neq 0$, ce qui permet de considérer les points G_1, G_2 et G_3, barycentres respectifs de $\{(-A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$, $\{(A, \alpha), (B, -\beta), (C, \gamma)\}$ et $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, -\gamma)\}$

3° a) Montrer que G est distinct de chacun des points G_1, G_2, G_3.

3° b) Montrer que (AG_1), (BG_2) et (CG_3) sont concourantes en G.

3° c) Montrer que (G_2G_3), (G_3G_1) et (G_1G_2) passent respectivement par A, B et C.

Exercice 3.11.
Cet exercice propose une nouvelle démonstration (barycentrique) des théorèmes de Ceva et de Ménélaüs.

Soit (A, B, C) un repère affine d'un plan affine $(E, \vec{E})$. On considère les points $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$. On suppose qu'aucun de ces points A', B', C' n'est confondu avec un des sommets du triangle ABC.

1° Comment traduire les hypothèses au niveau des coordonnées barycentriques des points A', B', C' dans le repère affine (A, B, C) ? (On notera $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ les coordonnées barycentriques de A', $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ celles de B' et $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ celles de C').

2° Exprimer le nombre $\rho = \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ en fonction des $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$.

3° Déterminer une équation barycentrique de chacune des trois droites (AA'), (BB') et (CC'). Retrouver le théorème de Ceva qui affirme que ces trois droites sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\rho = -1$.

4° Montrer que les trois points A', B', C' sont alignés si et seulement si $\rho = 1$ (Théorème de Ménélaüs).

Exercice 3.12. Démontrer le théorème de Carathéodory 3.27 (p. 80).

CHAPITRE 4

Rudiments de géométrie projective

4.1 Introduction

Comme nous l'avons annoncé, l'espace universel est un cadre permettant de comprendre plus facilement la géométrie projective.

Définition 4.1 Soit V un espace vectoriel de dimension $n+1$. On appelle espace projectif issu de V (on le note $\mathbb{P}(V)$) l'ensemble des droites vectorielles de V.
La dimension de $\mathbb{P}(V)$ est alors (par définition) : $n = \dim V - 1$.
L'espace projectif $\mathbb{P}(U)$ issu d'un sous-espace vectoriel U de V est un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$.
Un espace ou un sous-espace projectif de dimension 1 (issu d'un plan vectoriel) est une droite projective.
Un espace ou un sous-espace projectif de dimension 2 (issu d'un espace vectoriel de dimension 3) est un plan projectif.
Un sous-espace projectif de dimension $n-1$ d'un espace projectif $\mathbb{P}(V)$ de dimension n est un hyperplan projectif (il est issu d'un hyperplan vectoriel de V).
Les éléments d'un espace projectif sont des points (projectifs), les singletons de $\mathbb{P}(V)$ sont les sous-espaces projectifs de dimension 0.

Un espace projectif est donc a priori quelque chose d'assez compliqué puisque c'est un ensemble de droites vectorielles. Mais en fait, nous allons simplifier le point de vue : en appelant points les éléments d'un espace projectif, nous allons voir qu'on peut les assimiler aux points d'un espace affine, et que finalement, un espace projectif n'est qu'une sorte d'espace affine complété par des points « à l'infini ».

4.2 Carte affine de l'espace projectif

4.2.1 Utilisation de l'espace universel

Supposons d'abord que $V = \widehat{E}$ est l'espace vectoriel universel de dimension $n+1$ associé à un espace affine $(E, \overrightarrow{E})$. Il existe alors une bijection entre E et $\mathbb{P}(\widehat{E}) \setminus \mathbb{P}(\overrightarrow{E})$.

C'est la correspondance entre les droites vectorielles non incluses dans $\overrightarrow{E}$ (notons bien que les droites vectorielles de $\widehat{E}$ incluses dans $\overrightarrow{E}$ sont exactement les éléments de $\mathbb{P}(\overrightarrow{E})$) et leur point d'intersection avec E qu'on a annoncée dans la remarque qui précède la proposition 3.3, p. 67. Tout point de E correspond donc à un unique élément de l'espace projectif $\mathbb{P}(\widehat{E})$, et presque tous les éléments de l'espace projectif $\mathbb{P}(\widehat{E})$ peuvent être représentés par un point de E. On dit que E est une carte affine de $\mathbb{P}(\widehat{E})$. Les éléments de $\mathbb{P}(\widehat{E})$ qui ne peuvent pas être représentés dans cette carte affine E sont les *points à l'infini de la carte affine E de $\widehat{E}$*, ce sont les droites vectorielles de $\overrightarrow{E}$, donc les directions des droites affines de E ; ce sont aussi les éléments de l'hyperplan projectif $\mathbb{P}(\overrightarrow{E})$. On peut donc considérer que chaque droite affine Δ de E possède son point à l'infini ∞_Δ, qui est sa direction $\overrightarrow{\Delta}$. Notons que $\Delta = \widetilde{\Delta} \cap E$, $\widetilde{\Delta}$ étant l'espace universel qui contient Δ et $\overrightarrow{\Delta}$, et que tous les éléments de $\mathbb{P}(\widetilde{\Delta})$ sont représentés, dans cette carte affine par les points de Δ, à l'exception de $\overrightarrow{\Delta} = \infty_\Delta$, qui bien qu'étant une droite vectorielle du plan vectoriel $\widetilde{\Delta}$, ne peut être représentée, dans E.

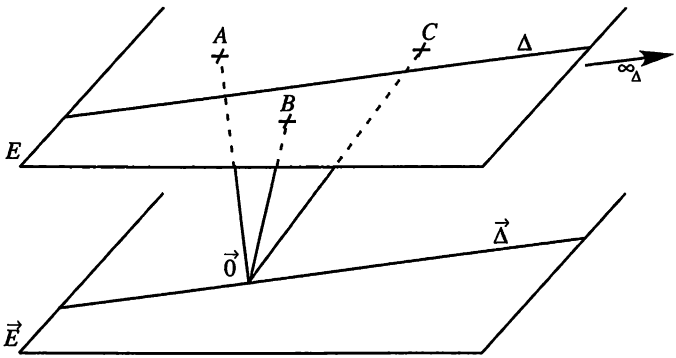


FIGURE 4.1. Carte affine.

On a ainsi mis en évidence dans ce cas une bijection entre $\mathbb{P}(\widehat{E})$ et $E \cup \mathbb{P}(\overrightarrow{E})$, pour cet hyperplan particulier E de $\widehat{E}$. Nous allons voir que cette démarche peut être faite avec n'importe quel hyperplan affine ne contenant pas le vecteur nul 0_V d'un espace vectoriel V.

4.2.2 Carte affine dans le cas général

Si V est un espace vectoriel de dimension $n + 1$, et si $(H, \overrightarrow{H})$ est un hyperplan affine (de dimension n) tel que $0_V \notin H$, alors un élément de $\mathbb{P}(V)$ (une droite vectorielle de V) rencontre H en un unique point sauf lorsqu'elle est incluse dans $\overrightarrow{H}$, c'est-à-dire lorsqu'elle appartient à $\mathbb{P}(\overrightarrow{H})$. Il y a donc bijection entre $\mathbb{P}(V)$ et $H \cup \mathbb{P}(\overrightarrow{H})$, et H est une carte affine de $\mathbb{P}(V)$, dont les *points à l'infini* sont les droites vectorielles incluses dans $\overrightarrow{H}$, c'est-à-dire les éléments de $\mathbb{P}(\overrightarrow{H})$.

En pratique, on est amené à identifier les points de H avec les éléments de $\mathbb{P}(V)$ n'appartenant pas à $\mathbb{P}(\overrightarrow{H})$. On se représente donc l'espace projectif de dimension n comme la réunion disjointe d'un espace affine de dimension n et de l'ensemble de ses directions de droites, qui sont les points à l'infini de cet espace affine. Pour qu'un espace affine E de dimension n puisse être considéré, identifié à un espace projectif, il suffit de lui ajouter l'ensemble des droites vectorielles de $\overrightarrow{E}$, c'est-à-dire l'ensemble des directions des droites affines de E, qui sont les points à l'infini de cette carte affine de l'espace projectif.

Remarque : Il n'y a pas qu'une représentation de $\mathbb{P}(V)$ par une carte affine, il y en a autant que d'hyperplans affines de V ne contenant pas 0_V. La notion de point à l'infini n'est donc pas intrinsèque, elle est liée au choix d'un hyperplan affine H de V. Concrètement, on peut toujours s'arranger pour choisir une carte affine de façon qu'un point donné M de l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ soit ou ne soit pas un point à l'infini : il suffit de choisir la direction $\overrightarrow{H}$ de l'hyperplan H de façon à ce que M soit ou ne soit pas une droite vectorielle incluse dans $\overrightarrow{H}$. (Notons que M est forcément une droite vectorielle, même si l'usage est d'utiliser une notation de point pour un élément de l'espace projectif.)

4.3 Relations d'incidences projectives en dimension 2

On peut obtenir des résultats spectaculaires en dimension 2, qui s'étendraient facilement en dimension quelconque, mais seraient plus difficiles à énoncer.

Proposition 4.2 Soit $\Pi = \mathbb{P}(V)$ un plan projectif ($\dim V = 3$).
Par deux points projectifs distincts passe toujours une unique droite projective.
Et deux droites (projectives) distinctes de Π ont toujours un unique point d'intersection.

(En d'autres termes, dans un plan projectif, il n'y a pas de droites parallèles, toutes les droites distinctes se coupent.)

Preuve Si A et A' sont deux éléments distincts de Π, c'est que ce sont des droites vectorielles distinctes de V et il existe un unique plan vectoriel $\widehat{D} = A + A'$ contenant ces deux droites. L'espace projectif $D = \mathbb{P}(\widehat{D})$ est une droite projective de Π qui contient A et A' et c'est clairement le seul qui convient.

Si D et D' sont deux droites projectives distinctes de Π, c'est qu'il existe deux plans vectoriels $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{P'}$ distincts de V tels que $D = \mathbb{P}(\overrightarrow{P})$ et $D' = \mathbb{P}(\overrightarrow{P'})$. Donc $D \cap D' = \mathbb{P}(\overrightarrow{P}) \cap \mathbb{P}(\overrightarrow{P'}) = \mathbb{P}(\overrightarrow{P} \cap \overrightarrow{P'})$. (en effet, une droite vectorielle de V est à la fois une droite de $\overrightarrow{P}$ et de $\overrightarrow{P'}$ si et seulement si c'est une droite de $\overrightarrow{P} \cap \overrightarrow{P'}$). Or deux plans vectoriels distincts d'un espace vectoriel de dimension 3 ont toujours comme intersection une droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta}$, donc on a $D \cap D' = \mathbb{P}(\overrightarrow{P} \cap \overrightarrow{P'}) = \mathbb{P}(\overrightarrow{\Delta}) = \{\overrightarrow{\Delta}\}$. $D \cap D'$ est bien un singleton. □

Interprétons ce dernier résultat dans une carte affine. Nous noterons $\widetilde{D}$ la droite projective qui correspond à une droite affine D. On peut considérer que $\widetilde{D}$ est la réunion de D et de son point à l'infini. Le point à l'infini d'une droite affine D de E est sa direction : on a $\infty_D = \overrightarrow{D}$, de sorte qu'on note abusivement $\widetilde{D} = D \cup \{\infty_D\} = D \cup \{\overrightarrow{D}\}$.

Proposition 4.3 Soit E un plan affine de direction $\overrightarrow{E}$. Il est plongé dans un espace universel $\widehat{E}$ et on peut considérer que $\mathbb{P}(\widehat{E}) = E \cup \Delta_\infty$, avec $\Delta_\infty = \mathbb{P}(\overrightarrow{E})$ est la droite projective à l'infini de E. Alors deux droites affines distinctes de E sont parallèles si et seulement si le point d'intersection des droites projectives qu'elles représentent est à l'infini :

$$D_1 /\!\!/ D_2 \iff \widetilde{D}_1 \cap \widetilde{D}_2 \subset \Delta_\infty \iff \widetilde{D}_1 \cap \widetilde{D}_2 = \{\overrightarrow{D}_1\} = \{\overrightarrow{D}_2\}$$

D'autre part, toute droite projective $\widetilde{D}$ représentée par une droite affine D de E rencontre la droite à l'infini Δ_∞ de E en $\infty_D = \overrightarrow{D}$. On a

$$\widetilde{D} \cap \Delta_\infty = \{\infty_D\} = \{\overrightarrow{D}\}.$$

Preuve Il suffit d'appliquer les définitions et la proposition précédente. □

Nous allons maintenant étudier une technique extrêmement utile en géométrie : l'envoi à l'infini d'une droite par un changement de carte affine.

Proposition 4.4 Soit E un plan affine, plongé dans son espace vectoriel universel $\widehat{E}$, et qui est donc une carte affine de $\mathbb{P}(\widehat{E})$. Alors pour toute droite Δ de E qui représente une droite projective $\widetilde{\Delta}$ de $\mathbb{P}(\widehat{E})$, il existe une carte affine E' de $\mathbb{P}(\widehat{E})$ dans laquelle $\widetilde{\Delta}$ est représentée par la droite à l'infini.
De plus, à tout couple de droites de E dont l'intersection était un point de Δ correspond deux droites projectives de $\widehat{E}$ qui sont représentées par des droites parallèles dans la carte E'.

Preuve On sait que Δ engendre un plan vectoriel $\widehat{\Delta}$ de $\widehat{E}$ (et d'ailleurs $\widetilde{\Delta} = \mathbb{P}(\widehat{\Delta})$). Il suffit de choisir pour E' n'importe quel plan affine de direction $\widehat{\Delta}$ ne passant pas par $\overrightarrow{0}$. Pour cette carte, la droite à l'infini est formée des droites vectorielles de la direction de E' : c'est $\widetilde{\Delta}$.
La dernière partie est évidente, il suffit de choisir une carte affine dans laquelle la droite à l'infini passe par le point d'intersection des deux droites (tout en évitant de choisir une de ces deux droites comme droite à l'infini). □

4.4 Exemple d'application : le théorème de Pappus

Nous avons vu en fin du chapitre II une version du théorème de Pappus, facile à démontrer avec les homothéties ou les translations. La géométrie projective permet de montrer le théorème de Pappus dans toute sa généralité, en se ramenant à la situation particulière dans laquelle on a obtenu le résultat, grâce à un changement de carte affine.

Théorème 4.5 (Pappus) *Soient D et D' deux droites distinctes du plan affine E. Soient X, Y, Z trois points distincts de D et X', Y', Z' trois points distincts de D'. Alors,*
(i) *si $(XY')/\!/(X'Y)$ et $(XZ')/\!/(X'Z)$, alors $(YZ')/\!/(Y'Z)$;*
(ii) *si $(XY') \cap (X'Y) = \{P\}$ et $(XZ')/\!/(X'Z)$, alors*
$$(YZ') \cap (Y'Z) = \{R\} \text{ et } (PR)/\!/(XZ')/\!/(X'Z) ;$$
(ii)' *si $(XZ') \cap (X'Z) = \{Q\}$ et $(XY')/\!/(X'Y)$, alors*
$$(YZ') \cap (Y'Z) = \{R\} \text{ et } (QR)/\!/(XY')/\!/(X'Y) ;$$
(iii) *si $(XY') \cap (X'Y) = \{P\}$ et $(XZ') \cap (X'Z) = \{Q\}$, alors*
soit $(YZ')/\!/(Y'Z)/\!/(PQ)$,
soit $(YZ') \cap (Y'Z) = \{R\}$ et P, Q, R sont alignés.

En d'autres termes, si on observe les trois couples de droites $((XY'), (X'Y))$, $((XZ'), (X'Z))$, $((YZ'), (Y'Z))$ ils sont soit tous formés de droites parallèles, soit deux d'entre eux sont formés de droites sécantes, et le troisième est formé de deux droites parallèles à la droite joignant ces deux points d'intersection, soit encore, ils sont tous les trois formés de droites sécantes, et dans ce cas, les trois points d'intersection sont alignés.

Avant de donner la démonstration de ce théorème, nous allons en donner la version projective, beaucoup plus facile à énoncer.

Théorème 4.6 (Pappus en projective) *Soient D et D' deux droites projectives distinctes du plan projectif $\Pi = \mathbb{P}(\widehat{E})$. Soient X, Y, Z trois points distincts de $D \setminus D'$ et X', Y', Z' trois points distincts de $D' \setminus D$.*
Soient $\{P\} = (XY') \cap (X'Y)$, $\{Q\} = (XZ') \cap (X'Z)$, $\{R\} = (YZ') \cap (Y'Z)$.
Alors P, Q, R sont alignés.

Preuve Il est important de comprendre tout d'abord que les différents cas du théorème de Pappus en affine sont tous compris dans l'énoncé projectif : (i) correspond à des points P, Q, R tous trois à l'infini, (ii) correspond à Q à l'infini, (ii)' correspond à P à l'infini, et (iii) correspond à aucun point à l'infini, ou seulement R à l'infini. Admettant la conclusion dans le cas projectif, par exemple dans le cas (ii), dire que Q est à l'infini et que P, Q, R sont alignés impose que Q soit le point à l'infini de la droite (PR).

Il suffit donc de démontrer Pappus en projective. Mais pour cela, on choisit une carte affine dans laquelle la droite à l'infini est la droite (PQ). Dans ce cas, forcément les représentants dans cette carte affine des droites (XY') et $(X'Y)$ sont parallèles, puisque leur intersection est le représentant de P qui est à l'infini. De même (XZ') et $(X'Z)$ sont également parallèles. Mais alors on peut appliquer le théorème de Pappus vu en fin de chapitre 2 : on peut affirmer que les représentants de (YZ') et $(Y'Z)$ sont parallèles, c'est-à-dire que leur point d'intersection R est lui aussi à l'infini. Mais ceci prouve que P, Q, R sont des points alignés (sur la droite à l'infini dans cette carte affine, mais simplement alignés, en tant que points projectifs, et avec des représentants alignés sur une vraie droite si on choisit une carte affine dans laquelle aucun de ces trois points n'est à l'infini). $\square$

En exercices, en application de cette technique, nous vous proposons d'énoncer et de démontrer un théorème de Desargues général, ainsi que sa réciproque (voir la proposition 2.26, p. 55 et l'exercice 4.6 p. 102).

4.5 Repères projectifs, coordonnées homogènes

4.5.1 Problèmes posés par le repérage dans un espace projectif

Soit $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif issu d'un espace vectoriel V de dimension $n+1$. Un point de $\mathbb{P}(V)$ étant en réalité une droite vectorielle de V, caractérisée par la donnée d'un vecteur directeur non nul $u \in V$. Notons $p(u)$ la droite vectorielle engendrée par u (ou le point projectif associé à u). Deux vecteurs u et u' de V définissent le même élément de $\mathbb{P}(V)$ (ce qu'on peut noter $p(u) = p(u')$) lorsqu'ils sont proportionnels, c'est-à-dire lorsqu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $u' = ku$.

Si on fixe une base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ de V, tout $(n+1)$-uple $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de réels non tous nuls définit un élément u non nul de V, donc un point projectif $p(u) \in \mathbb{P}(V)$. Si M est un point projectif de $\mathbb{P}(V)$, si $M = p(u)$, on peut trouver des coordonnées qui caractérisent M : ce sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ de u. Ces coordonnées sont définies à une constante multiplicative près, puisque tout autre vecteur non nul proportionnel à u est aussi un vecteur directeur de A. Ces coordonnées définies à une constante multiplicative près sont les *coordonnées homogènes* du point projectif A dans la base $\mathscr{B}$.

Le problème, dans cette définition, c'est que la base $\mathscr{B}$ n'est pas un élément de l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ que l'on veut « repérer ». Certes, on peut associer à chaque élément e_i de la base la droite vectorielle qu'il engendre $A_i = p(e_i)$. Mais à un $(n+1)$-uple de $\mathbb{P}(V)$ ne correspond pas une unique base de V. Nous allons donc voir qu'il suffit de fixer un point projectif de plus pour pouvoir définir un repère projectif et parler des coordonnées homogènes d'un point sans être obligé de passer par l'espace vectoriel dont est issu l'espace projectif.

4.5.2 Repères projectifs

Définition 4.7 Soit $\mathbb{P}(V)$ un espace projectif de dimension n. Un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$ est un $(n+2)$-uple de points projectifs $(A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$ vérifiant la propriété suivante :
pour toute famille extraite de $n+1$ points $(A_i)_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n+1 \\ i \neq j}}$, $\mathbb{P}(V)$ est le plus petit sous-espace projectif qui contient ces $n+1$ points.
(On peut décrire cette propriété ainsi : « aucune sous-famille de $n+1$ points n'est cohyperplanaire »).

Proposition 4.8
Soit $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V et soit $e_{n+1} = e_0 + e_1 + \cdots + e_n$. Si on pose pour tout $i = 0, 1, \ldots, n, n+1$: $A_i = p(e_i)$, alors $(A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$ est un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$.
Réciproquement, si $(A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$ est un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$,
alors il existe une base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ de V telle que pour tout $i = 0, 1, \ldots, n$, on a $p(e_i) = A_i$ et $p(e_0 + e_1 + \cdots + e_n) = A_{n+1}$. De plus $\mathscr{B}$ est unique à un coefficient multiplicatif près, ce qui signifie que si $\mathscr{B}' = (e'_0, e'_1, \ldots, e'_n)$ est une autre base de V telle que pour tout $i = 0, 1, \ldots, n$, on a $p(e'_i) = A_i$ et $p(e'_0 + e'_1 + \cdots + e'_n) = A_{n+1}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $e'_i = \lambda e_i$ pour tout i. On dit qu'une telle base $\mathscr{B}$ est une base associée au repère projectif $\mathscr{R}$.

Preuve Avec les notations de la proposition, on doit montrer que les $n+1$ points projectifs parmi $(A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$ ne sont jamais cohyperplanaires. Il est tout à fait clair que $A_0, A_1, \ldots, A_n$ (qui sont les droites vectorielles $p(e_0), p(e_1), \ldots, p(e_n)$) ne sont pas dans un même hyperplan projectif $\mathbb{P}(H)$ de $\mathbb{P}(V)$ sinon H serait un hyperplan vectoriel de V qui contiendrait tous les e_i, c'est contradictoire avec le fait que la base $\mathscr{B}$ engendre V.
De même, si tous les points $A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sauf A_j avec $0 \leqslant j \leqslant n$ étaient dans le même hyperplan projectif $\mathbb{P}(H)$ de $\mathbb{P}(V)$, c'est que l'hyperplan vectoriel H contiendrait tous les vecteurs $e_0, e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$ sauf le vecteur e_j. Or, si on pose $f_j = e_{n+1}$ et $f_i = e_i$ pour $\left\{ \substack{0 \leqslant i \leqslant n+1 \\ i \neq j} \right.$, on obtient un $(n+1)$-uple vecteurs $(f_i)_{0 \leqslant i \leqslant n+1}$ qui devraient tous appartenir à l'hyperplan H. Et si on calcule le déterminant dans la base $\mathscr{B}$ de ce système de vecteurs, on est amené à calculer le déterminant de la matrice obtenue en changeant la j-ème colonne de la matrice identité par une colonne ne contenant que des 1, et il est évident que le déterminant de cette matrice vaut 1, est donc non nul, ce qui prouve que la famille $(f_i)_{0 \leqslant i \leqslant n+1}$ forme une base de V, et n'est donc pas incluse dans un hyperplan.

Montrons maintenant la réciproque :
Soit $\mathscr{R} = (A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$ un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$.
Soient $u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}$ des vecteurs non nuls tels que $A_i = p(u_i)$ pour tout i. Le système de $n+1$ vecteurs $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est générateur, sinon il engendrerait un

sous-espace vectoriel inclus dans un hyperplan H, et clairement les $n+1$ premiers points du $\mathscr{R}$ appartiendraient tous à $\mathbb{P}(H)$. C'est donc une base de V, et il existe $n+1$ scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $u_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i$. Posons, pour tout $i \in [0, n]$, $e_i = \lambda_i u_i$ et $e_{n+1} = u_{n+1}$. Par construction, on a $e_{n+1} = e_0 + e_1 + \cdots + e_n$. il reste à montrer que le système de $n+1$ vecteurs $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ est une base. Le déterminant de ce système dans la base $(u_0, u_1, \dots, u_n)$ est égal à $\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Il suffit donc de prouver qu'aucun λ_i n'est nul.

Si un des λ_i était nul, par exemple si on avait $\lambda_j = 0$: alors l'égalité $u_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i$ deviendrait une relation de dépendance linéaire entre les $n+1$ vecteurs u_i (avec $\left\{ {}^{0 \leqslant i \leqslant n+1}_{\quad i \neq j} \right.$). Cela signifierait que ces $n+1$ vecteurs sont liés, et donc qu'ils ne forment pas une base, et que le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent n'est pas de dimension $n+1$, donc est strictement inclus dans V. Il existerait donc un hyperplan vectoriel H de V, qui contiendrait ces $n+1$ vecteurs, et les $n+1$ droites vectorielles que ces vecteurs engendrent (qui sont les points projectifs A_i avec $\left\{ {}^{0 \leqslant i \leqslant n+1}_{\quad i \neq j} \right.$) appartiendraient tous à l'hyperplan projectif $\mathbb{P}(H)$, ce qui est exclu par hypothèse. Donc les λ_i sont tous non nuls, et $\mathscr{B}$ est bien une base, et on a bien réussi à construire une base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ de V telle que $A_i = p(e_i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$ et $A_{n+1} = p(e_0 + e_1 + \cdots + e_n)$.

Supposons que $\mathscr{B}' = (e'_0, e'_1, \dots, e'_n)$ soit une autre base de V telle que $A_i = p(e'_i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$ et $A_{n+1} = p(e'_0 + e'_1 + \cdots + e'_n)$. Alors clairement, pour $0 \leqslant i \leqslant n$, puisque e_i et e'_i sont deux vecteurs non nuls de la droite vectorielle A_i, c'est qu'il existe λ_i tel que $e'_i = \lambda_i e_i$. On pose aussi $e_{n+1} = e_0 + e_1 + \cdots + e_n$ et $e'_{n+1} = e'_0 + e'_1 + \cdots + e'_n$, et ces deux vecteurs non nuls engendrent la même droite vectorielle A_{n+1}, donc il existe aussi un scalaire λ_{n+1} tel que $e'_{n+1} = \lambda_{n+1} e_{n+1}$. Mais cette égalité s'écrit aussi

$$\begin{aligned} & e'_0 + e'_1 + \cdots + e'_n = \lambda_{n+1}(e_0 + e_1 + \cdots + e_n) \\ \iff\ & \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \lambda_{n+1} e_0 + \lambda_{n+1} e_1 + \cdots + \lambda_{n+1} e_n \end{aligned}$$

Cette dernière égalité de deux combinaisons linéaires des vecteurs de la base $\mathscr{B}$ n'est possible que si tous les coefficients qui se correspondent sont égaux (unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base), donc on a $\begin{cases} \lambda_0 = \lambda_{n+1} \\ \lambda_1 = \lambda_{n+1} \\ \ \vdots \quad \vdots \\ \lambda_n = \lambda_{n+1}. \end{cases}$

On a prouvé que $e'_i = \lambda_{n+1} e_i$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n+1$, les deux bases trouvées sont bien proportionnelles. $\square$

4.5.3 Coordonnées homogènes

Cette propriété permet de définir les coordonnées homogènes d'un point dans un repère projectif ; on dit que ces coordonnées sont homogènes, car elles sont toujours définies à une constante multiplicative non nulle près.

Définition 4.9 Soit $\mathscr{R} = (A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$ un repère projectif d'un espace projectif $\mathbb{P}(V)$ de dimension n.
Alors les coordonnées homogènes d'un point projectif $M \in \mathbb{P}(V)$ sont les coordonnées de ce point dans toute base $\mathscr{B}$ associée à ce repère projectif. Ce sont les coordonnées dans $\mathscr{B}$ (définies à un coefficient multiplicatif non nul près) de tout vecteur directeur u de M (u est tel que $p(u) = M$.)

Remarque : En application de ce qui précède, il est immédiat de vérifier que le point A_0 admet comme coordonnées homogènes dans le repère $\mathscr{R}$ le $(n+1)$-uple $(1, 0, \ldots, 0)$, et de même A_i (pour $0 \leqslant i \leqslant n$) admet comme coordonnées homogènes un $(n+1)$-uple formé de n zéros avec un 1 (ou tout autre scalaire non nul) à la place $i+1$, tandis que les coordonnées homogènes de A_{n+1} sont le $(n+1)$-uple formé de termes tous égaux à 1 (ou à tout autre scalaire non nul).

Une autre remarque intéressante est le fait que les coordonnées homogène d'un point projectif sont, en fait, non pas un $(n+1)$-uple de réels, mais une classe d'équivalence pour la proportionnalité, et donc ces coordonnées homogènes ne sont rien d'autre qu'un élément de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, l'espace projectif issu de $\mathbb{R}^{n+1}$.

4.6 Repérage sur une droite projective, birapport

4.6.1 Repérage sur une droite projective

Soit $\widetilde{\Delta}$ une droite projective (qui est soit un espace projectif « isolé », soit un sous-espace projectif d'un espace projectif plus grand).
Un repère projectif de cette droite est un triplet de points (A_0, A_1, A_2) tous distincts (cette seule condition suffit). Pour tout point M de $\widetilde{\Delta}$, ses coordonnées homogènes dans ce repère projectif sont un couple (x, y) défini à un coefficient multiplicatif près. L'élément A_0 admet pour coordonnées homogènes le couple $(1, 0)$; A_1 a pour coordonnées homogènes le couple $(0, 1)$ et A_2 a pour coordonnées homogènes le couple $(1, 1)$.

4.6.2 Birapport

À l'exception du point A_0, tous les points M de D admettent comme coordonnées homogènes un unique couple $(\rho, 1)$ dont le deuxième terme est égal à 1. Ce nombre ρ est, par définition, le *birapport* des quatre points projectifs A_0, A_1, A_2, M.

Définition 4.10 Soit $\widetilde{\Delta}$ une droite projective, et soient A, B, C, D quatre points de $\widetilde{\Delta}$ tels que A, B, C sont *distincts*. Alors si $D \neq A$, le birapport de ces quatre points est le nombre $\rho = [A, B; C, D]$ tel que $(\rho, 1)$ soit un couple de coordonnées homogènes de D dans le repère projectif (A, B, C), et si $D = A$, on pose $[A, B; C, A] = \infty$. ρ est alors un scalaire ou ∞. Lorsque les quatre points sont distincts, ρ est un réel différent de 0 et de 1.

Bien sûr, cette définition n'est pas très maniable. Il existe de nombreuses façons de caractériser cette notion de birapport, essentiellement quand les quatre points sont distincts.

Théorème 4.11 *Soit $\widetilde{\Delta} = \mathbb{P}(V)$ est une droite projective, et soient A, B, C, D quatre points distincts de $\widetilde{\Delta}$. Soient a, b, c, d des vecteurs directeurs respectifs de ces quatre droites vectorielles. Alors on a*

$$\rho = [A, B; C, D] = \frac{\det(a, c)}{\det(a, d)} \Big/ \frac{\det(b, c)}{\det(b, d)}$$

Une remarque initiale : les déterminants apparaissant dans cette formule sont des déterminants calculés dans n'importe quelle base fixée du plan vectoriel V. Il serait plus rigoureux de préciser dans quelle base on fait le calcul, mais c'est sans importance, car si on change de base de V, on sait que le déterminant est simplement multiplié par une constante, et cette constante se simplifie.
De même, si on change n'importe quel vecteur directeur d'une des quatre droites, on le multiplie par une constante scalaire, qui elle aussi disparaîtra, car chaque vecteur apparaît deux fois dans cette formule, une fois au numérateur et une fois au dénominateur.

Preuve On sait, d'après ce qui précède, que (A, B, C) est un repère projectif de $\widetilde{\Delta}$, donc qu'il existe trois vecteurs directeurs a_0, b_0, c_0 respectivement de A, B, C qui sont tels que (a_0, b_0) est une base de V et $c_0 = a_0 + b_0$. Un couple de coordonnées homogènes de D dans ce repère projectif est $(\rho, 1)$, donc si on pose $d_0 = \rho a_0 + b_0$, on a $d_0 \in D$. Les quatre vecteurs a, b, c, d sont tels qu'il existe quatre scalaires t, u, v, w tels que $a = ta_0$, $b = ub_0$, $c = vc_0$ et $d = wd_0$.
Puisque le calcul des déterminants peut se faire dans n'importe quelle base, nous travaillerons dans la base (a_0, b_0). Dans cette base, on a

$$\frac{\det(a, c)}{\det(a, d)} \Big/ \frac{\det(b, c)}{\det(b, d)} = \frac{\begin{vmatrix} t & v \\ 0 & v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & w\rho \\ u & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & w\rho \\ 0 & w \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & v \\ u & v \end{vmatrix}} = \frac{(tv)(-uw\rho)}{(tw)(-uv)} = \rho$$ □

4.6.3 Expression du birapport avec les mesures algébriques

Théorème 4.12 *Soit $\widetilde{\Delta} = \mathrm{P}(V)$ une droite projective, et soient $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}$ quatre points distincts de $\widetilde{\Delta}$. Soit Δ une carte affine de $\widetilde{\Delta}$. Alors le birapport $\rho = [\widetilde{A}, \widetilde{B}; \widetilde{C}, \widetilde{D}]$*

peut se calculer ainsi dans la carte affine Δ, (selon la présence ou non de points à l'infini) :
(i) *si aucun des quatre représentants A, B, C, D n'est à l'infini,*

$$\rho = [\widetilde{A}, \widetilde{B}; \widetilde{C}, \widetilde{D}] = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \Big/ \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} ;$$

(ii) *si A est à l'infini, alors* $\rho = [\widetilde{A}, \widetilde{B}; \widetilde{C}, \widetilde{D}] = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$;
(iii) *si B est à l'infini, alors* $\rho = [\widetilde{A}, \widetilde{B}; \widetilde{C}, \widetilde{D}] = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$;
(iv) *si C est à l'infini, alors* $\rho = [\widetilde{A}, \widetilde{B}; \widetilde{C}, \widetilde{D}] = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$;
(v) *si D est à l'infini, alors* $\rho = [\widetilde{A}, \widetilde{B}; \widetilde{C}, \widetilde{D}] = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

Preuve
(i) On peut considérer que V est l'espace universel de l'espace affine $(\Delta, \overrightarrow{\Delta})$, et, lorsque A, B, C, D ne sont pas à l'infini, que les quatre points A, B, C, D sont des vecteurs de V, (et d'ailleurs $C - A$, $D - A$, $C - B$, $D - B$ également, étant d'ailleurs aussi dans $\overrightarrow{\Delta}$, et donc tous colinéaires). D'après la propriété précédente, on a (en utilisant aussi une propriété classique des déterminants : $\det(x, y) = \det(x, y + \alpha x)$)
$$\rho = \frac{\det(A, C)}{\det(A, D)} \Big/ \frac{\det(B, C)}{\det(B, D)} = \frac{\det(A, C - A)\det(B, D - B)}{\det(A, D - A)\det(B, C - B)}.$$
Or, une des propriétés élémentaires des mesures algébriques est que le quotient $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$ est le scalaire λ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AD}$ (voir proposition 1.30 p. 20). De même, on a $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \mu$ avec $\overrightarrow{BC} = \mu\overrightarrow{BD}$.
Donc
$$\rho = \frac{\det(A, \lambda(D - A))\det(B, D - B)}{\det(A, D - A)\det(B, \mu(D - B))} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \Big/ \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}.$$
(ii) à (v) La démonstration des quatre cas où l'un des points est à l'infini fait l'objet de l'exercice 4.8.

□

4.6.4 Propriétés du birapport

Proposition 4.13 Lorsque A, B, C, D sont quatre points distincts, si on permute l'ordre de ces quatre points dans un calcul de birapport, le birapport obtenu ne prend que six valeurs maximum. Plus précisément, si $\rho = [A, B; C, D]$, alors on a :
(i) $[A, B; C, D] = [D, C; B, A] = [B, A; D, C] = [C, D; A, B] = \rho$;
(ii) $[B, A; C, D] = [A, B; D, C] = [D, C; A, B] = [C, D; B, A] = \dfrac{1}{\rho}$;

(iii) $[A,C;B,D]=[D,B;C,A]=[C,A;D,B]=[B,D;A,C]=1-\rho\,;$
(iv) $[C,A;B,D]=[D,B;A,C]=[A,C;D,B]=[B,D;C,A]=\dfrac{1}{1-\rho}\,;$
(v) $[C,B;A,D]=[D,A;B,C]=[B,C;D,A]=[A,D;C,B]=\dfrac{\rho}{\rho-1}\,;$
(vi) $[B,C;A,D]=[D,A;C,B]=[C,B;D,A]=[A,D;B,C]=\dfrac{\rho-1}{\rho}.$

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 4.9.
Lorsque seulement trois des quatre points sont distincts, le quatrième étant confondu avec un des trois autres, on a vu qu'on peut prolonger la définition du birapport ainsi : $[A,B;C,A]=\infty\,;\ [A,B;C,B]=0\,;\ [A,B;C,C]=1.$
Ensuite on applique une des permutations vues plus haut pour déterminer le birapport dans les autres cas où les quatre points ne sont en fait que trois.
Remarquons que ces valeurs sont compatibles avec n'importe laquelle des trois règles de calcul de birapport, à condition d'utiliser les conventions usuelles $\dfrac{1}{0}=\infty$ et $\dfrac{1}{\infty}=0.$
Une propriété remarquable du birapport est la suivante :

Proposition 4.14 Soit $\widetilde{\Delta}=\mathbb{P}(\overrightarrow{P})$ une droite projective. Soit (A,B,C) un repère projectif de $\widetilde{\Delta}$ et $(\Delta,\overrightarrow{\Delta})$ une carte affine de $\widetilde{\Delta}$ dans laquelle A est à l'infini ($\overrightarrow{\Delta}=A$) (B,C) est un repère affine de la droite affine Δ et $(B,\overrightarrow{BC})$ est un repère cartésien de cette même droite.
Si M est un point quelconque de Δ, alors son abscisse dans le repère $(B,\overrightarrow{BC})$ vaut ρ si et seulement si ses coordonnées barycentriques dans le repère affine (B,C) sont $(1-\rho,\rho)$ et si et seulement si ρ est aussi la valeur du birapport $[A,B;C,M]=\rho$, et on a dans ce cas $\rho=\dfrac{\overline{BM}}{\overline{BC}}$.
En conséquence, on conviendra que l'abscisse dans le repère $(B,\overrightarrow{BC})$ du point A, qui est le point à l'infini de la droite affine (BC), est ∞.

Preuve $\overrightarrow{P}$ peut être considéré comme l'espace universel $\widehat{\Delta}$ de la droite affine Δ, et A,B,C ont comme coordonnées augmentées, dans la base (A,B), respectivement $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.
Un point M de Δ a pour abscisse ρ dans le repère cartésien $(B,\overrightarrow{BC})$ signifie que $\overrightarrow{BM}=\rho\overrightarrow{BC}$ (c'est-à-dire $\rho=\dfrac{\overline{BM}}{\overline{BC}}$) ce qui équivaut successivement à $\overrightarrow{BM}=\rho\overrightarrow{BC}$ ou $M-B=\rho(C-B)$, puis $M=(1-\rho)B+\rho C$:les coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (B,C) sont $(1-\rho,\rho)$, et enfin $M=(1-\rho)B+\rho(A+B)=B+\rho A$.
Or, $M=B+\rho A$ signifie exactement que M admet $(1,\rho)$ comme coordonnées homogènes dans le repère projectif (A,B,C), c'est-à-dire que le birapport $[A,B;C,M]$ vaut ρ. □

4.7 Homographies

4.7.1 Présentation

Les homographies sont les morphismes de la structure d'espace projectif. Comme les espaces projectifs sont issus des espaces vectoriels, il est logique que les morphismes des espaces projectifs soient liés aux morphismes des espaces vectoriels, qui sont les applications linéaires. Les éléments des espaces projectifs sont des droites vectorielles, et les applications linéaires transforment des sous-espaces vectoriels en sous-espaces vectoriels. Cependant, la dimension d'un sous-espace vectoriel n'est conservée à coup sûr que par les *isomorphismes.* C'est pourquoi seules les applications linéaires bijectives nous intéresseront pour donner naissance à des homographies, et nous ne considérerons que des homographies entre espaces projectifs de même dimension, (et en particulier des « endomorphismes projectifs », homographies d'un espace projectif dans lui-même).

Théorème 4.15 (et Définition) *Soient V et W deux espaces vectoriels de même dimension $n+1$. Soient $E = \mathbb{P}(V)$ et $F = \mathbb{P}(W)$ les espaces projectifs qui en sont issus.*
*Alors toute application linéaire f bijective de V sur W envoie les droites vectorielles de V sur les droites vectorielles de W, et définit une bijection $\varphi = p(f)$ entre $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(W)$. φ est l'*homographie *entre E et F issue de l'isomorphisme f.*

Preuve
Le fait que l'image d'une droite vectorielle par une application linéaire bijective soit une droite vectorielle est un résultat bien connu. Il reste à vérifier que φ est bijective ; son caractère surjectif est une conséquence immédiate du fait que f est surjective. Montrons que φ est injective. Soit A et B deux points projectifs de $E = \mathbb{P}(V)$. On suppose qu'on a $\varphi(A) = \varphi(B)$. Cela signifie que la droite vectorielle $A =< a >$ et la droite vectorielle $B =< b >$ (ce sont des droites vectorielles de V) sont envoyées par f sur la même droite vectorielle $C =< c >$ de W. En particulier, la restriction de f à $< a >$ étant bijective, il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(ka) = c$, et de même, il existe $k' \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(k'b) = c$. Mais f est injective donc $ka = k'b$, et a et b sont colinéaires, donc $A =< a >=< b >= B$. □

4.7.2 Propriétés des homographies

Proposition 4.16 Toute application composée d'homographies est une homographie, l'inverse d'une homographie est une homographie. L'ensemble des homographies d'un espace projectif $E = \mathbb{P}(V)$ dans lui-même est un groupe noté $GP(E)$ (groupe projectif de E). L'application p de $GL(V)$ dans $GP(E)$ est un morphisme de groupes surjectif dont le noyau est l'ensemble des homothéties vectorielles.
D'une façon générale, si f et g sont deux isomorphismes de V sur W, alors
$p(f) = p(g) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad f = \lambda g.$

Preuve Le début de la proposition est assez évident. En fait, le seul point un peu délicat est la détermination du noyau du morphisme p, et il suffit d'établir le dernier point qui en est une généralisation.

Si f et g sont deux applications linéaires bijectives de V sur W telles que les homographies associées $\varphi = p(f)$ et $\psi = p(g)$ coïncident, on peut considérer l'application linéaire de V dans lui-même $h = g^{-1} \circ f$. L'action de h sur les éléments de E (qui sont les droites vectorielles de V) est l'identité puisque $\psi = \varphi$, ce qui se traduit par le fait que pour tout vecteur non nul a de V, on a $h(a) \in < a >$ puisque $h(a)$ dirige la même droite vectorielle que a, puisque $p(h)(< a >) =< a >$. Tous les vecteurs de V sont donc des vecteurs propres pour l'endomorphisme h, et on a vu (voir exercice 2.4 p. 56) que ceci n'est possible que si h est une homothétie vectorielle, c'est-à-dire si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h = \lambda \mathrm{id}_V$. On a donc $g^{-1} \circ f = \lambda \mathrm{id}_V$, donc $f = \lambda g$. □

4.7.3 Lien avec les repères projectifs

Un résultat fondamental sur les homographies est celui qui les lie aux repères projectifs.

Proposition 4.17 Soient $E = \mathbb{P}(V)$ et $F = \mathbb{P}(W)$ deux espaces projectifs de même dimension n. Soient $(A_0, A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ et $(B_0, B_1, \dots, B_n, B_{n+1})$ des repères projectifs respectivement de E et de F. Alors il existe une unique homographie φ de E sur F telle que $\varphi(A_i) = B_i$ pour tout $i \in [0, n+1]$.

Preuve On sait qu'il existe une base $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ de V et une base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ de W telles que $\forall i \in [0, n]$ on ait $A_i =< e_i >$ et $B_i =< f_i >$ et de plus en posant $e_{n+1} = e_0 + e_1 + \cdots + e_n$ et $f_{n+1} = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$ on ait $A_{i+1} =< e_{n+1} >$ et $B_{i+1} =< f_{n+1} >$.
Considérons l'application linéaire u de E vers F définie par $u(e_i) = f_i$. Il est clair que $\varphi = p(u)$ est une homographie telle que $\varphi(A_i) = B_i$ pour tout i, y compris pour $i = n + 1$, grâce à la linéarité de u.
Soit maintenant $\psi = p(v)$ une autre homographie vérifiant $\psi(A_i) = B_i$ pour tout i. Alors $\psi^{-1} \circ \varphi$ est une homographie θ de E dans lui-même, qui vérifie $\theta(A_i) = A_i$ pour tout $i \in [0, n+1]$.
Si $w = v^{-1} \circ u$, il est clair que $\theta = p(w)$. D'autre part, tous les vecteurs e_i sont des vecteurs propres pour w puisque $e_i \in A_i$ et $w(e_i) \in A_i$. Soit λ_i la valeur propre de w associée à e_i.
On a d'une par $w(e_{n+1}) = \lambda_{n+1} e_{n+1} = \lambda_{n+1} e_0 + \lambda_{n+1} e_1 + \cdots + \lambda_{n+1} e_n$, et d'autre part

$$\begin{aligned} w(e_{n+1}) &= w(e_0 + e_1 + \cdots + e_n) = w(e_0) + w(e_1) + \cdots + w(e_n) \\ &= \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n. \end{aligned}$$

En comparant ces deux décompositions du vecteur $w(e_{n+1})$ sur la base $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ de V, on en déduit que $\lambda_0 = \lambda_{n+1}$, $\lambda_1 = \lambda_{n+1}$,...,$\lambda_n = \lambda_{n+1}$, et donc en posant

$\lambda = \lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \lambda_{n+1}$, il est clair que $w(e_i) = \lambda e_i$, ceci pour tous les vecteurs d'une base de V, donc $w = \lambda \mathrm{id}_V$. Il en résulte que $\theta = p(w) = \mathrm{id}_E$, et donc $\varphi = \psi$. □

4.7.4 Lien avec les applications affines

Nous pouvons maintenant étudier quelques homographies, et repérer une propriété caractéristique.

Proposition 4.18 Soit $\widetilde{E} = \mathbb{P}(V)$ un espace projectif, et soit $(E, \overrightarrow{E})$ une carte affine de $\widetilde{E}$ ($\overrightarrow{E}$ est un hyperplan vectoriel de V, E est un hyperplan affine de V ne contenant pas 0_V). Alors les isomorphismes affines de E peuvent être prolongés en des homographies de $\widetilde{E}$. Plus précisément, si f une application affine bijective de E dans lui-même, alors il existe une unique homographie $\widetilde{f}$ de $\widetilde{E}$ dans lui-même, vérifiant $\widetilde{f}_{|E} = f$.

Preuve Ce résultat est évident en considérant un repère projectif de $\widetilde{E}$, formé de $n+2$ droites vectorielles dont les points les représentant dans la carte affine ne sont pas à l'infini. Toute partie formée de $n+1$ points forme alors un repère affine de E, et ces points sont envoyés en $n+1$ points affinement libres par l'isomorphisme affine f (puisqu'un isomorphisme affine conserve la dimension, $n+1$ points images quelconques ne peuvent pas être cohyperplanaires). Remarquons que ces points images ne sont évidemment pas à l'infini puisqu'ils sont images de points par une application affine. Donc les $n+2$ points du repère projectif sont envoyés en $n+2$ points (non à l'infini) qui forment aussi un repère projectif, et il existe donc une unique homographie $\widetilde{f}$ de $\widetilde{E}$ qui envoie le repère projectif antécédent sur le repère projectif image, et qui prolonge donc f. □

4.7.5 Homographies d'une droite projective

Parmi les homographies, les homographies d'une droite projective sont très intéressantes, entre autres parce qu'elles permettent de comprendre le lien entre ces homographies et les applications homographiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4.19 Soit $\widetilde{\Delta} = \mathbb{P}(\overrightarrow{P})$ une droite projective. Soit (A, B, C) un repère projectif de $\widetilde{\Delta}$ et $(\Delta, \overrightarrow{\Delta})$ une carte affine de $\widetilde{\Delta}$ dans laquelle A est à l'infini ($\overrightarrow{\Delta} = A$) (B, C) est un repère affine de la droite affine Δ et $(B, \overrightarrow{BC})$ est un repère cartésien de cette même droite.
Soit φ une homographie de $\widetilde{\Delta}$ dans elle-même, issue d'une application linéaire bijective f de $\overrightarrow{P}$ dans lui-même.

On suppose que la matrice de f dans une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ associée au repère projectif (A, B, C) (on rappelle qu'on a $A = < \overrightarrow{e_1} >$, $B = < \overrightarrow{e_2} >$ et $C = < \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} >$) est $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes réelles telles que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$)

Soit M un point quelconque de $\widetilde{\Delta}$, dont l'abscisse dans le repère $(B, \overrightarrow{BC})$ vaut ρ (avec éventuellement $\rho = \infty$ si $M = A$) (on a donc aussi $\rho = [A, B; C, M]$ et les coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (B, C) sont donc $(1 - \rho, \rho)$ si $M \neq A$).

Alors son image par f est le point M' dont l'abscisse dans le repère $(B, \overrightarrow{BC})$ vaut $\rho' = [A, B; C, M']$, avec ρ' qui se déduit de ρ par la formule $\rho' = \dfrac{\alpha\rho + \beta}{\gamma\rho + \delta}$ et ses prolongements : pour $\gamma \neq 0$, l'image du point d'abscisse $-\frac{\delta}{\gamma}$ est le point A (d'abscisse infinie) et l'image du point A est le point d'abscisse $\frac{\alpha}{\gamma}$; pour $\gamma = 0$, l'image de A est A. Les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont définies à un facteur multiplicatif près, tout comme les vecteurs de la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et l'application linéaire f.

Rappel : Les applications homographiques, ou homographies, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) sont les applications du type $x \longmapsto \dfrac{ax + b}{cx + d}$ avec $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$. Ce ne sont pas des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais le point de vue projectif permet de prolonger une telle application en une bijection de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dans lui-même. Remarquons que dans ce point de vue projectif, il n'est pas nécessaire de supposer $c \neq 0$, de sorte qu'une application affine de $\mathbb{R}$ dans lui-même est une homographie comme les autres.

Preuve Il suffit de chercher l'image par f d'un vecteur directeur de la droite vectorielle M. Si $M \neq A$ cette droite vectorielle est engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(\rho, 1)$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. L'image $\overrightarrow{u'}$ de $\overrightarrow{u}$ par f a pour coordonnées (x', y') vérifiant $\begin{cases} x' = \alpha\rho + \beta \\ y' = \gamma\rho + \delta \end{cases}$ (on utilise la matrice de f). La droite vectorielle A étant engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_1}$ de coordonnées $(1, 0)$, son image par f est le vecteur $f(\overrightarrow{e_1})$ de coordonnées (α, γ) donc $\varphi(A)$ est la droite vectorielle $< f(\overrightarrow{e_1}) >$.

On étudie à présent les deux cas possibles :

Si $\gamma \neq 0$, le représentant dans la carte affine Δ de l'image $< f(\overrightarrow{e_1}) >$ de A par φ est le point d'abscisse $\frac{\alpha}{\gamma}$ (puisque le vecteur de coordonnées $(\frac{\alpha}{\gamma}, 1)$ engendre aussi $\varphi(A)$) ; pour le point particulier M_0 d'abscisse $\rho_0 = -\frac{\delta}{\gamma}$, de coordonnées homogènes $(\delta, -\gamma)$, son image est le point de coordonnées homogènes $(\alpha\delta - \beta\gamma, 0)$, c'est le point à l'infini A ; pour tout autre point M, les coordonnées homogènes de son image sont $(\alpha\rho + \beta, \gamma\rho + \delta)$, ou encore $\left(\dfrac{\alpha\rho + \beta}{\gamma\rho + \delta}, 1\right)$, ce qui fait que c'est bien le point d'abscisse $\dfrac{\alpha\rho + \beta}{\gamma\rho + \delta}$

Si $\gamma = 0$, il est nécessaire que $\alpha\delta \neq 0$ puisque $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$; $f(\overrightarrow{e_1})$ a pour coordonnées $(\alpha, 0)$, et engendre encore A, ce qui fait que $\varphi(A) = A$, et comme $\delta \neq 0$, l'image de tout point M non à l'infini est le point de coordonnées homogènes $(\alpha\rho+\beta,\delta)$, qui n'est pas à l'infini, et qui admet $\dfrac{\alpha\rho+\beta}{\delta}$ comme abscisse dans le repère $(b,\overrightarrow{BC})$.

□

4.8 Exercices

Exercice 4.1.
Soit V un espace vectoriel et $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif qui en est issu.

1° Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux sous-espaces vectoriels de V. Justifier rigoureusement l'égalité utilisée dans la démonstration de la proposition 4.2 p. 87 : $\mathbb{P}(\overrightarrow{F})\cap\mathbb{P}(\overrightarrow{G})=\mathbb{P}(\overrightarrow{F}\cap\overrightarrow{G})$.

2° Démontrer qu'une intersection quelconque de sous-espaces projectifs est vide ou est un sous-espace projectif.

3° Soit X une partie non vide de l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$. Quelle signification donner à la notion de sous-espace projectif engendré par X (notée $\operatorname{proj}(X)$).

4° Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux sous-espaces vectoriels de V.
Démontrer que $\mathbb{P}(\overrightarrow{F}+\overrightarrow{G})=\operatorname{proj}(\mathbb{P}(\overrightarrow{F})\cup\mathbb{P}(\overrightarrow{G}))$.

Exercice 4.2.
Soit $\overrightarrow{V}$ un espace vectoriel de dimension 4, et $\mathcal{E}=\mathbb{P}(\overrightarrow{V})$ l'espace projectif qui en est issu.

1° Démontrer que l'intersection de deux plans projectifs distincts de $\mathcal{E}$ est toujours une droite projective.

2° Soit Π un plan projectif de $\mathcal{E}$ et Δ une droite projective de $\mathcal{E}$ non incluse dans Π. Étudier l'intersection $\Pi\cap\Delta$.

3° Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites projectives distinctes de $\mathcal{E}$. Que peut-on dire de $\Delta_1\cap\Delta_2$?

4° Soit $(E,\overrightarrow{E})$ une carte affine de $\mathcal{E}$. Comment interpréter les résultats de 1°, 2°et 3° dans cette carte affine ?

Exercice 4.3.
Une droite d coupe les côtés (AB), (BC) et (AC) d'un triangle en A', B', C' respectivement. Les droites (AB') et (BC') sont sécantes en L, les droites (BC') et (CA') sont sécantes en M, les droites (CA') et (AB') sont sécantes en N. On veut montrer que les droites (AM), (BN) et (CL) sont concourantes ou parallèles.

1° Faire la figure en choisissant la droite d comme droite à l'infini.

2° Démontrer le résultat.

Exercice 4.4.
Dans un plan affine $(P, \overrightarrow{P})$ muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(0,3)$, $B(0,-1)$, $C(-1,0)$ et $D(-3,0)$.

1° Faire une figure soignée. $ABCD$ est-il un parallélogramme ?

2° On veut transformer cette figure pour que $ABCD$ devienne un parallélogramme. Pour cela, on considère que $(P, \overrightarrow{P})$ est plongé dans un espace universel $\overrightarrow{E} = \widehat{P}$, et que P est une carte affine du plan projectif $\mathcal{P} = \mathbb{P}(\widehat{P}) = \mathbb{P}(\overrightarrow{E})$.

2° a) De quelle base de $\overrightarrow{E}$ dispose-t-on déjà, sans introduire de nouveaux éléments ?

2° b) Soient $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}$ les éléments de $\mathcal{P}$ représentés dans la carte affine P par les points A, B, C, D. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune de ces quatre droites vectorielles. Que représentent les droites $(AB), (BC), (CD), (DA)$ de la carte affine par rapport à l'espace projectif $\mathcal{P}$?

2° c) Quels sont les points de la figure qu'on doit envoyer à l'infini pour que $ABCD$ devienne un parallélogramme ?

2° d) Déterminer un plan affine $(P', \overrightarrow{P'})$ de $\overrightarrow{E}$ qui puisse servir de nouvelle carte affine dans lequel les points projectifs $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}$ seront représentés respectivement par des points A', B', C', D' sommets d'un parallélogramme. On précisera une équation cartésienne dans la base choisie en a) de P' et on donnera les coordonnées des quatre points A', B', C', D', puis on vérifiera que ce sont bien les sommets d'un parallélogramme.

3° Est-il possible de trouver une carte affine $(E'', \overrightarrow{E''})$ dans laquelle $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}$ seraient représentés par des points A'', B'', C'', D'' tels que $A''B''D''C''$ soit un parallélogramme ?

Exercice 4.5.
Soit ABC un vrai triangle d'un plan affine considéré comme carte affine d'un plan projectif. Soit D un point n'appartenant à aucun des côtés de ce triangle.
Soit C' le point d'intersection de la droite (CD) avec la droite (AB). Soit B' le point d'intersection de la droite (BD) avec la droite (AC).
Soit T un point de la droite (AD), distinct de A et distinct de B. La droite (TC') coupe (AC) en C'', et la droite (TB') coupe (AB) en B''.
Les droites $(B'C')$ et $(B''C'')$ se coupent en E. Montrer que B, C et E sont alignés.
(*On pourra introduire une carte affine dans laquelle la droite* (BC) *est à l'infini*).

Exercice 4.6.
1° Traduire l'énoncé du théorème de Desargues (théorème 2.26 p. 55) dans le cadre projectif.

2° Énoncer une réciproque de cet énoncé dans le cadre projectif.

3° Démontrer ce théorème de Desargues ainsi que sa réciproque, dans le cadre projectif.

4° Retraduire l'énoncé du théorème de Desargues dans le cadre affine avec toutes ses variantes, puis faire de même avec sa réciproque.

Exercice 4.7.
$\overrightarrow{E}$ est un espace vectoriel de dimension 2. Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base fixée de $\overrightarrow{E}$. Soit D la droite affine d'équation $y = 1$. On choisit $(D, \overrightarrow{D})$ comme carte affine de $\mathbb{P}(\overrightarrow{E})$, On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}(5,3)$, $\overrightarrow{v}(2,4)$, $\overrightarrow{w}(1,-5)$ et $\overrightarrow{t}(4,7)$ (coordonnées dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$). On considère les points de l'espace projectif : $A = p(\overrightarrow{u})$, $B = p(\overrightarrow{v})$, $C = p(\overrightarrow{w})$ et $G = p(\overrightarrow{t})$. (Notations du cours)

1°Représenter les points A, B, C et G dans la carte affine D.

2° Montrer que (A, B, C) constitue un repère projectif de $\mathbb{P}(\overrightarrow{E})$ et déterminer un triplet $(\overrightarrow{e_0}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ correspondant associé à ce repère projectif.

3°Déterminer de deux manières différentes au moins $[A, B; C, G]$.

Exercice 4.8. Terminer la démonstration de la propriété 4.12 (p. 94).
Il faut donc démontrer que si A, B, C, D sont quatre points distincts d'une droite Δ carte affine d'une droite projective $\widetilde{\Delta} = \mathrm{P}(V)$, si ces quatre points sont les représentants de quatre points projectifs $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}$ de $\widetilde{\Delta}$, si $\rho = [\widetilde{A}, \widetilde{B}; \widetilde{C}, \widetilde{D}]$, alors

(ii) si A est à l'infini, alors $\rho = [\widetilde{A}, \widetilde{B}; \widetilde{C}, \widetilde{D}] = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$;

(iii) si B est à l'infini, alors $\rho = [\widetilde{A}, \widetilde{B}; \widetilde{C}, \widetilde{D}] = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$;

(iv) si C est à l'infini, alors $\rho = [\widetilde{A}, \widetilde{B}; \widetilde{C}, \widetilde{D}] = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$;

(v) si D est à l'infini, alors $\rho = [\widetilde{A}, \widetilde{B}; \widetilde{C}, \widetilde{D}] = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

Exercice 4.9. Démontrer la proposition 4.13 (p. 95), qui affirme que :
si A, B, C, D sont quatre points distincts d'une droite projective Δ, si $\rho = [A, B; C, D]$, alors on a :

(i) $[A, B; C, D] = [D, C; B, A] = [B, A; D, C] = [C, D; A, B] = \rho$;

(ii) $[B, A; C, D] = [A, B; D, C] = [D, C; A, B] = [C, D; B, A] = \dfrac{1}{\rho}$;

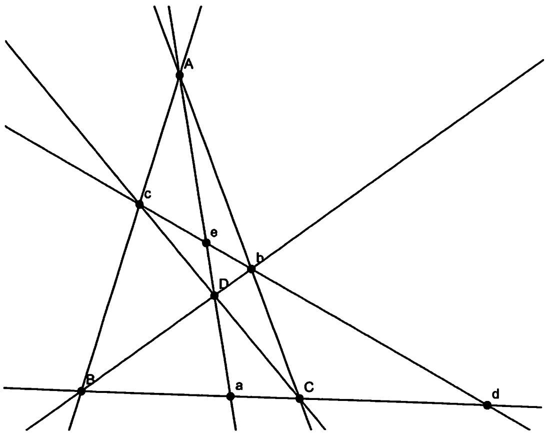
(iii) $[A, C; B, D] = [D, B; C, A] = [C, A; D, B] = [B, D; A, C] = 1 - \rho$

(iv) $[C, A; B, D] = [D, B; A, C] = [A, C; D, B] = [B, D; C, A] = \dfrac{1}{1-\rho}$

(v) $[C, B; A, D] = [D, A; B, C] = [B, C; D, A] = [A, D; C, B] = \dfrac{\rho}{\rho - 1}$

(vi) $[B, C; A, D] = [D, A; C, B] = [C, B; D, A] = [A, D; B, C] = \dfrac{\rho - 1}{\rho}$

Exercice 4.10.



La représentation ci-dessus a lieu dans un plan projectif et définit les points a, b, c, d, e à partir des points A, B, C, D.

1° Énoncer clairement toutes les hypothèses implicites contenues dans cette figure. Justifier que (A, B, C, D) est un repère projectif.

2° Déterminer les coordonnées homogènes des points de la figure dans le repère projectif (A, B, C, D).

3° Montrer que $[B, C, a, d] = -1$. Former sept autres birapports de ces quatre mêmes points pris dans des ordres différents dont la valeur est encore -1. (On dit que $\{B, C\}$ et $\{a, d\}$ sont en division harmonique.)

4° Trouver dans la figure deux autres sous-ensembles de quatre points qu'on peut ranger dans un ordre tel que leur birapport a aussi -1 comme valeur. (On peut traduire cette question en disant qu'on doit trouver dans la figure d'autres paires de points en division harmonique).

Exercice 4.11.
1° Montrer qu'une homographie d'un plan projectif transforme des points alignés distincts en des points alignés distincts.

2° Montrer qu'une homographie conserve le birapport.

Exercice 4.12.
1° **Préliminaire**
Montrer qu'une application f bijective d'une droite projective d vers une droite projective d' est une homographie si et seulement si elle conserve le birapport de quatre points.

2° Soient d et d' deux droites projectives distinctes d'un plan projectif Π et soit S un point n'appartenant ni à d, ni à d'. On considère l'application π de d sur d' qui au point M associe le point M' intersection entre d et (SM) (cette application est appelée *la projection de sommet* S de d sur d'). Montrer que π est une homographie.

3° Soient d et d' deux droites projectives distinctes d'un plan projectif Π. Montrer qu'une homographie de d sur d' une projection si et seulement si elle admet un point invariant.

CHAPITRE 5

Géométrie euclidienne

5.1 Introduction

La géométrie euclidienne se pratique dans un espace affine euclidien qui n'est autre qu'un espace affine dont l'espace vectoriel associé est euclidien.
Cette notion d'espace vectoriel euclidien a normalement déjà été étudiée lors des deux premières années de licence, on se contentera de rappeler les résultats les plus importants et d'essayer quand c'est possible de les interpréter en termes de géométrie affine.

5.1.1 « Rappels » sur les espaces vectoriels euclidiens

Dans tout le chapitre, $(E, \overrightarrow{E})$ est un espace affine euclidien.
E est donc un espace vectoriel euclidien, c'est-à-dire un espace vectoriel de dimension finie n, qui est muni d'un produit scalaire.
Rappelons qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire définie positive.

Remarque : En pratique, pour démontrer que quelque chose est un produit scalaire, il est en général assez trivial de montrer que c'est une forme bilinéaire symétrique, que sa forme quadratique est positive pose également rarement de problème, le plus difficile étant la plupart du temps de montrer que cette forme quadratique est *définie*, c'est-à-dire que si le « carré » d'un vecteur est nul, alors ce vecteur est nul.

Notations : Nous noterons le plus souvent le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ ainsi : $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$.

Le carré scalaire d'un vecteur est $\overrightarrow{x}^2 = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}$.

La norme (*euclidienne*) d'un vecteur est $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\overrightarrow{x}^2}$.

L'application $x \longmapsto \|\overrightarrow{x}\|$ est une norme : elle vérifie entre autres les *inégalités triangulaires.*
Lorsqu'on veut montrer la première inégalité triangulaire ($\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leqslant \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$), on a besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \leqslant \|\overrightarrow{x}\| \, \|\overrightarrow{y}\|$; la démonstration de ces résultats fait l'objet de l'exercice 5.1 (p. 132).

5.1.2 Interprétation de ces notions en affine

Le produit scalaire de deux vecteurs construits à partir de points de E est noté : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Le carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note : $\overrightarrow{AB}^2$ ou tout simplement AB^2.

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'appelle aussi la longueur du segment $[AB]$ ou distance de A à B. Elle se note $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \mathrm{d}(A, B)$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz peut se traduire par $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}| \leqslant AB \times AC$.

Les inégalités triangulaires peuvent s'écrire : $|AB - BC| \leqslant AC \leqslant AB + BC$. Classiquement, ces inégalités peuvent s'interpréter ainsi : dans un triangle, la longueur d'un côté est comprise entre la somme et la différence des longueurs des deux autres côtés.

5.1.3 Quelques autres formules classiques et leurs interprétations en affine

Le développement du carré scalaire d'une différence de deux vecteurs : $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ s'interprète avec la formule de « Pythagore généralisée » : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

L'identité de polarisation $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2}{2}$ peut se traduire par $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$.

5.1.4 Orthogonalité

L'orthogonalité de deux vecteurs se caractérise par le fait que leur produit scalaire est nul, d'où par exemple le théorème de Pythagore (et sa réciproque) :

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \iff AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

On utilisera la notion d'orthogonal d'un sous-ensemble X de $\vec{E}$: c'est le sous-espace vectoriel

$$X^\perp = \{\vec{y} \in \vec{E} \mid \forall \vec{x} \in X, \vec{x} \cdot \vec{y} = 0\}.$$

On a les résultats classiques, dus au fait qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et qu'on est en dimension finie :

$$\vec{F}^\perp \oplus \vec{F} = \vec{E}\ ;\ \vec{F}^{\perp\perp} = \vec{F}\ ;\ (\vec{F} + \vec{G})^\perp = \vec{F}^\perp \cap \vec{G}^\perp\ ;\ (\vec{F} \cap \vec{G})^\perp = \vec{F}^\perp + \vec{G}^\perp.$$

La première des relations ci-dessus ($\vec{F}$ et $\vec{F}^\perp$ sont supplémentaires) permet de définir les projections et les symétries orthogonales (vectorielles et affines).

5.1.5 Projections et symétries orthogonales

La projection orthogonale sur $\overrightarrow{F}$ (notée $\pi_{\overrightarrow{F}}$) est la projection sur $\overrightarrow{F}$ dans la direction de $\overrightarrow{F}^{\perp}$: on a $\pi_{\overrightarrow{F}} = \pi_{\overrightarrow{F},\overrightarrow{F}^{\perp}}$.

De même, la symétrie orthogonale par rapport à $\overrightarrow{F}$ (notée $\sigma_{\overrightarrow{F}}$) est la symétrie par rapport à $\overrightarrow{F}$ dans la direction de $\overrightarrow{F}^{\perp}$: on a $\sigma_{\overrightarrow{F}} = \sigma_{\overrightarrow{F},\overrightarrow{F}^{\perp}}$.

On définit les projections et symétries affines orthogonales de la même façon. Dans l'espace affine euclidien E, si $(F, \overrightarrow{F})$ est un sous-espace affine de E, la projection p_F est la projection orthogonale sur F, c'est-à-dire la projection sur F dans la direction de $\overrightarrow{F}^{\perp}$: on a donc $p_F = p_{F,\overrightarrow{F}^{\perp}}$.

La symétrie s_F est la symétrie orthogonale par rapport à F, c'est-à-dire la symétrie par rapport à F dans la direction de $\overrightarrow{F}^{\perp}$: on a donc $s_F = s_{F,\overrightarrow{F}^{\perp}}$.

5.1.6 Familles orthogonales, bases orthonormées

Une famille finie de vecteurs $(\overrightarrow{a_i})_{1\leqslant i\leqslant k}$ est orthogonale lorsque pour $i \neq j$ on a $\overrightarrow{a_i} \cdot \overrightarrow{a_j} = 0$. Une famille orthogonale de vecteurs *non nuls* est libre. Si on impose de plus que $\|\overrightarrow{a_i}\| = 1$, la famille est alors orthonormale, et une famille orthonormale de n vecteurs est une base orthonormée.

Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt permet de construire des familles orthogonales et des bases orthonormées.

Si $\mathbf{a} = (\overrightarrow{a_i})_{1\leqslant i\leqslant k}$ est une famille libre, alors on considère la famille $\mathbf{b} = (\overrightarrow{b_i})_{1\leqslant i\leqslant k}$ construite à partir de $\mathbf{a}$ par le procédé suivant :

- $\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{a_1}$;
- pour $2 \leqslant i \leqslant k$, on définit $\overrightarrow{b_i}$ par récurrence : $\overrightarrow{b_i} = \overrightarrow{a_i} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\overrightarrow{a_i} \cdot \overrightarrow{b_j}}{\overrightarrow{b_j}^2}\, \overrightarrow{b_j}$.

Alors la famille $\mathbf{b}$ est orthogonale, de plus on a pour tout j tel que $1 \leqslant j \leqslant i$,

$$< \overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_j} > = < \overrightarrow{b_1}, \dots, \overrightarrow{b_j} > \text{ et } \overrightarrow{a_i} \cdot \overrightarrow{b_i} = \overrightarrow{b_i}^2 > 0.$$

En particulier, si on part d'une base $\mathbf{a} = (\overrightarrow{a_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\overrightarrow{E}$, on obtient par ce procédé une base orthogonale $\mathbf{b} = (\overrightarrow{b_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\overrightarrow{E}$. Pour obtenir une base orthonormée, il suffit de diviser chaque vecteur $\overrightarrow{b_i}$ par sa norme : en posant $\overrightarrow{c_i} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{b_i}\|}\overrightarrow{b_i}$ pour tout i, on obtient une base orthonormée $\mathbf{c} = (\overrightarrow{c_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\overrightarrow{E}$.

La démonstration de ces résultats est l'objet de l' exercice 5.3 p. 133.

Un des intérêts des bases orthonormées est que l'expression du produit scalaire dans une telle base $\mathbf{b} = (\overrightarrow{b_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est particulièrement simple :
si X est la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathbf{b}$,
si Y est la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{y}$ dans la base $\mathbf{b}$,

alors on a $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = {}^tX\, Y = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$

En particulier, dans cette base $\mathbf{b}$, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{x}$ sont faciles à exprimer : on a $x = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b_i})\overrightarrow{b_i}$, et la matrice colonne X des coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans cette base est donc $X = \begin{pmatrix} \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b_n} \end{pmatrix}$.

En généralisant, si $(\overrightarrow{b_i})_{1 \leqslant i \leqslant k}$ (pour $1 \leqslant k < n$) est une famille orthonormale de k vecteurs de $\overrightarrow{E}$, c'est donc la base orthonormée du *sous-espace vectoriel* $\overrightarrow{F} =< \overrightarrow{b_1}, \dots, \overrightarrow{b_k} >$ de $\overrightarrow{E}$ et on peut compléter cette famille orthonormale en une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$ qui pourra s'écrire $\mathbf{b} = (\overrightarrow{b_i})_{1 \leqslant i \leqslant n} = (\overrightarrow{b_1}, \dots, \overrightarrow{b_k}, \overrightarrow{b_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{b_n})$ (il existe un « théorème de la base orthonormée incomplète » qu'on déduit facilement d'une combinaison du théorème de la base incomplète avec le procédé de Schmidt).

Alors, si $\pi_{\overrightarrow{F}}$ est la projection orthogonale (vectorielle) sur $\overrightarrow{F}$, il est aisé de voir que pour tout $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$, on a

$$\pi_{\overrightarrow{F}}(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{k} (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b_i})\overrightarrow{b_i}. \tag{5.1}$$

On vérifie aisément qu'on a aussi $\pi_{\overrightarrow{F}^\perp}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - \sum_{i=1}^{k} (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b_i})\overrightarrow{b_i} = \sum_{i=k+1}^{n} (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b_i})\overrightarrow{b_i}.$

Ces formules sont particulièrement simples si $\overrightarrow{F} =< \overrightarrow{u} >$: si $\overrightarrow{H}$ est l'hyperplan orthogonal à $\overrightarrow{u}$ (qu'on note, par abus de langage toléré $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{u}^\perp$) et si $\pi_{\overrightarrow{u}}$ désigne la projection orthogonale sur $< \overrightarrow{u} >$, on a, pour tout $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$,

$$\pi_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{x}) = \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{u} \qquad \text{et} \quad \pi_{\overrightarrow{H}}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{u}.$$

(On n'a pas supposé que $\overrightarrow{u}$ était normé, mais lorsque c'est le cas, la formule est encore plus simple, il n'y a plus de dénominateur.)

En utilisant que $\sigma_{\overrightarrow{F}} = \pi_{\overrightarrow{F}} - \pi_{\overrightarrow{F}^\perp}$, il est facile d'écrire une formule analogue pour les symétries orthogonales (vectorielles).

5.1.7 Applications orthogonales

Une application orthogonale est une application qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire une application u entre deux espaces vectoriels euclidiens $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{E'}$ (le plus souvent confondus, en pratique : on parle alors de *transformation orthogonale*) telle que $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \overrightarrow{E}$, on a

$$u(\overrightarrow{x}) \cdot u(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}.$$

Une application orthogonale est *linéaire* : on le démontre aisément en développant (dans l'espace euclidien $\overrightarrow{E'}$, bien sûr), par exemple $\left(u(\lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) - \lambda u(\overrightarrow{x}) - u(\overrightarrow{y})\right)^2$.

Une application orthogonale est forcément injective : il suffit d'étudier son noyau. (Voir l'exercice 5.5 p. 134 pour une démonstration de tous ces résultats).
Une transformation orthogonale est donc bijective et l'ensemble de toutes les transformations orthogonales d'un espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{E}$ est un sous-groupe du groupe linéaire de $\overrightarrow{E}$ appelé **groupe orthogonal** de $\overrightarrow{E}$ et noté $\mathcal{O}(\overrightarrow{E})$.
On a la caractérisation suivante :

Théorème 5.1 *Un endomorphisme u de $\overrightarrow{E}$ est une transformation orthogonale si et seulement si une des assertions suivantes est vérifiée :*
(i) $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \overrightarrow{E}$, *on a* $u(\overrightarrow{x}) \cdot u(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$ (u conserve le produit scalaire).
(ii) $\forall \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$, *on a* $\|u(\overrightarrow{x})\| = \|\overrightarrow{x}\|$ (u conserve la norme : on dit que u est une isométrie vectorielle)
(iii) *Il existe une base orthonormée* $\mathbf{e} = (\overrightarrow{e_i})$ *de* $\overrightarrow{E}$ *telle que la famille* $\mathbf{e}' = (\overrightarrow{e_i'}) = (u(\overrightarrow{e_i}))$ *soit une base orthonormée.*
(iv) *Pour toute base orthonormée* $\mathbf{e} = (\overrightarrow{e_i})$ *de* $\overrightarrow{E}$*, la famille* $\mathbf{e}' = (\overrightarrow{e_i'}) = (u(\overrightarrow{e_i}))$ *est une base orthonormée.*
(v) *La matrice* M *de* u *dans une base orthonormée* $\mathbf{e}$ *vérifie* ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$ *(On dit que* M *est une matrice orthogonale.)*
(vi) *La matrice* M *de* u *dans toute base orthonormée* $\mathbf{e}$ *vérifie* ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$.

Preuve
(i) : c'est la définition.
Pour (ii), il suffit d'utiliser une identité de polarisation.
Pour (iii) et (iv) il suffit d'utiliser la décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée.
Pour (v) et (vi), il suffit de se rappeler que les colonnes C_j de la matrice M sont les coordonnées dans la base $\mathbf{e}$ des $\overrightarrow{e_j'}$, et que le fait que $\mathbf{e}'$ soit orthonormé se traduit

par [1]

$$\forall i,j, \qquad \overrightarrow{e_i}\cdot\overrightarrow{e_j} = \delta_i^j \quad \text{ou encore } {}^tC_i\, C_j = \delta_i^j \iff {}^t\mathrm{M}\,\mathrm{M} = \mathrm{I}_n.$$

□

Les *matrices orthogonales* sont les matrices qui sont telles que leur inverse est aussi leur transposée. Pour une matrice orthogonale M, de la relation ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$, on tire $\det(\mathrm{M})^2 = 1$, donc le déterminant de tout endomorphisme orthogonal est soit 1, soit -1.
On note $\mathcal{O}^+(\overrightarrow{E})$ l'ensemble des transformations orthogonales dont le déterminant vaut 1 (qu'on appelle *isométries vectorielles positives*) et $\mathcal{O}^-(\overrightarrow{E})$ l'ensemble des transformations orthogonales dont le déterminant vaut -1 (les *isométries vectorielles négatives*). Il est clair que ces deux ensembles forment une partition de $\mathcal{O}(\overrightarrow{E})$ et que $\mathcal{O}^+(\overrightarrow{E})$ est un sous-groupe d'indice 2 de $\mathcal{O}(\overrightarrow{E})$. Pour le vérifier il suffit de prouver qu'il existe des isométries vectorielles négatives : or, toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan $\overrightarrow{H}$ est une transformation orthogonale de déterminant -1, puisque la matrice de $\sigma_{\overrightarrow{H}}$ dans une base orthonormée adaptée à la décomposition en somme directe $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{H} \oplus \overrightarrow{H}^\perp$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'interprétation affine des transformations orthogonales amène l'étude des isométries affines. On fera cette étude au § suivant et très naturellement cela nous donnera l'occasion de réviser et de préciser certaines propriétés des isométries vectorielles.

Remarque : De façon un peu surprenante, s'il est clair que les symétries orthogonales sont des transformations orthogonales, en revanche les projections orthogonales, comme leur nom ne l'indique pas, ne sont pas des transformations orthogonales : en effet, elles ne sont (en général) pas bijectives puisque le noyau de $\pi_{\overrightarrow{F}}$ est $\overrightarrow{F}^\perp$.

Il reste une notion d'intérêt pratique important à rappeler.

[1] δ_i^j est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$.
La matrice identité I_n a pour terme général δ_i^j (pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$).

5.1.8 Endomorphismes symétriques

Un endomorphisme symétrique (pour le produit scalaire) d'un espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{E}$ est un endomorphisme u tel que pour tout couple $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ d'éléments de $\overrightarrow{E}$, on ait :

$$u(\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} \cdot u(\overrightarrow{y})$$

En traduisant matriciellement dans une base orthonormée cette relation (M étant la matrice de u dans une base orthonormée)
$u(\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{y} = {}^t(\mathrm{M}X)Y = {}^tX\,{}^tMY$ et $\overrightarrow{x} \cdot u(\overrightarrow{y}) = {}^tX\,\mathrm{M}Y$ donc ${}^tX\,\mathrm{M}Y = {}^tX\,{}^t\mathrm{M}Y$ pour tous X, Y, on peut affirmer qu'un endomorphisme u est symétrique si et seulement si sa matrice M dans une base orthonormée quelconque est égale à sa transposée, ce qui signifie que c'est une matrice symétrique (c'est dû à la définition et à la propriété caractéristique de la matrice d'une forme bilinéaire, appliquées à la forme bilinéaire $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \longmapsto u(\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{y})$.

Exemple : La matrice d'une projection orthogonale $\pi_{\overrightarrow{F}}$ dans une base orthonormée adaptée à la décomposition en somme directe $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{F}^{\perp}$ est (par blocs) $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & 0_{n-k,n-k} \end{pmatrix}$ donc est symétrique et une projection orthogonale est donc une transformation symétrique. Sa matrice dans toute base orthonormée est donc également symétrique.
Il en est de même pour une symétrie orthogonale : en effet, la matrice de la symétrie orthogonale $\sigma_{\overrightarrow{F}}$ dans une base orthonormée adaptée à la décomposition en somme directe $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{F}^{\perp}$ est (par blocs) $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & -\mathrm{I}_{n-k} \end{pmatrix}$.

5.2 Isométries d'un espace affine euclidien

5.2.1 Définition

Définition 5.2 On appelle **isométrie** une application f entre deux espaces E et E' munis de distances (notées respectivement d et d'), qui conserve les distances, c'est-à-dire telle que $\forall A, B \in E$, on ait $\mathrm{d}'(f(A)f(B)) = \mathrm{d}(A, B)$

Proposition 5.3 Soient $(E, \overrightarrow{E})$ et $(E', \overrightarrow{E'})$ deux espaces affines euclidiens et soit $f : E \longrightarrow E'$ une application. Alors f est une isométrie si et seulement si f est affine et sa partie linéaire $\varphi = L_f$ est une application orthogonale de $\overrightarrow{E}$ vers $\overrightarrow{E'}$.

Preuve Notons pour tout point $X \in E$, $X' = f(X)$. Soit A un point fixé quelconque de E. On doit montrer que l'application vectorielle φ associée par A à f est linéaire et que φ est orthogonale.
Or, φ est déterminée par $\varphi(\overrightarrow{u}) = f(A + \overrightarrow{u}) - f(A)$.

Montrons que φ conserve le produit scalaire : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques de $\vec{E}$. On pose $B = A + \vec{u}$ et $C = A + \vec{v}$. On a

$$\|\varphi(\vec{u})\| = \|f(A+\vec{u}) - f(A)\| = \|f(B) - f(A)\| = \|B' - A'\| = A'B' = AB = \|\vec{u}\|$$

De même, $\|\varphi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$.
Donc φ conserve la norme, mais ceci ne suffit pas encore à prouver que φ est linéaire.
Mais on a aussi

$$\begin{aligned}\|\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})\| &= \|f(A+\vec{u}) - f(A) - f(A+\vec{v}) + f(A)\| = \|B' - C'\| \\ &= C'B' = CB = \|\vec{u} - \vec{v}\|.\end{aligned}$$

Donc on peut utiliser l'identité de polarisation :

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{u}) \cdot \varphi(\vec{v}) &= \frac{1}{2}(\|\varphi(\vec{u})\|^2 + \|\varphi(\vec{v})\|^2 - \|\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) = \vec{u} \cdot \vec{v}.\end{aligned}$$

φ conserve donc le produit scalaire : c'est donc une application linéaire, et une application orthogonale.
La réciproque est « presque » évidente. □

Voici une proposition-définition importante, de démonstration évidente.

Proposition 5.4 (et définition)
L'ensemble des isométries de l'espace affine $(E, \vec{E})$ est un sous-groupe du groupe affine $GA(E)$, noté $\mathcal{I}(E)$.
Un *déplacement* (ou isométrie affine positive) est une isométrie dont la partie linéaire est une isométrie vectorielle positive.
L'ensemble des déplacements de E est un sous-groupe d'indice 2 (donc distingué) de $\mathcal{I}(E)$ noté $\mathcal{I}^+(E)$.
Les éléments de $\mathcal{I}^-(E) = \mathcal{I}(E) \setminus \mathcal{I}^+(E)$ sont appelés *anti-déplacements* (ou isométries affines négatives) de E.

Exemples : Les translations sont des déplacements.
Une symétrie affine $s_{F,\vec{G}}$ est une isométrie si et seulement si sa partie linéaire est une symétrie vectorielle orthogonale, c'est à dire si et seulement si elle est une symétrie affine orthogonale ($\vec{F} \perp \vec{G}$). Il s'agit donc d'un déplacement si et seulement si la codimension[2] de l'ensemble des points invariants est paire (le déterminant de la

[2] La **codimension** d'un sous-espace vectoriel est la dimension d'un quelconque de ses sous-espaces vectoriels supplémentaires. En dimension finie n, pour tout sous-espace vectoriel $\vec{F}$, on a $\dim \vec{F} + \operatorname{codim} \vec{F} = n$.

matrice de sa partie linéaire dans une base adaptée à la somme directe $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$ est : $\begin{vmatrix} \mathrm{I}_k & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & -\mathrm{I}_{n-k} \end{vmatrix} = (-1)^{n-k}$).

Définition 5.5 Une symétrie orthogonale par rapport à une variété affine de codimension 1 est appelée *réflexion* (affine) ou *symétrie hyperplane*; c'est un antidéplacement. Une symétrie orthogonale par rapport à une variété affine de codimension 2 est appelée *retournement*; c'est un déplacement.

Voyons maintenant une caractérisation importante des isométries :

Proposition 5.6 Soit $\mathcal{R} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ un repère affine de l'espace euclidien E. Soit f une application affine de E vers un autre espace affine euclidien E'.
Soit $A'_i = f(A_i)$ pour $i = 0, \ldots, n$.
Alors f est une isométrie si et seulement si $\forall (i,j) \in \{0, \ldots, n\}^2$ on a

$$\mathrm{d}'(A'_i, A'_j) = \mathrm{d}(A_i, A_j).$$

Dans ce cas, $(A'_0, \ldots, A'_n)$ est un repère affine de l'espace affine $f(E)$ qui est de dimension n.

En d'autres termes, pour qu'une application affine soit une isométrie, il suffit qu'elle conserve les distances entre les points d'un *repère affine.*

Preuve Il est évident qu'un seul sens est à démontrer : on suppose que l'image du repère $\mathcal{R}$ par f est un « simplexe isométrique » (ensemble de $n+1$ points ayant des côtés de même longuer que $\mathcal{R}$). (Remarquons que f est entièrement définie en tant qu'application affine connaissant les images des points d'un repère affine.)
On doit démontrer que la partie linéaire φ de f est une application orthogonale. On sait que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}) = (\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$ est une base de $\overrightarrow{E}$. Il est assez évident que si on arrive à montrer que φ conserve les produits scalaires des éléments de $\mathcal{B}$, φ conservera tous les produits scalaires (il suffit de développer les vecteurs selon les vecteurs de base).
Or, on a pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\overrightarrow{u}_i) \cdot \varphi(\overrightarrow{u}_j) &= \frac{1}{2}(\|\varphi(\overrightarrow{u}_i)\|^2 + \|\varphi(\overrightarrow{u}_j)\|^2 - \|\varphi(\overrightarrow{u}_i) - \varphi(\overrightarrow{u}_j)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(A'_0A'^2_i + A'_0A'^2_j - A'_iA'^2_j) = \frac{1}{2}(A_0A_i^2 + A_0A_j^2 - A_iA_j^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}_i\|^2 + \|\overrightarrow{u}_j\|^2 - \|\overrightarrow{u}_i - \overrightarrow{u}_j\|^2) = \overrightarrow{u}_i \cdot \overrightarrow{u}_j.\end{aligned}$$

φ est donc une application orthogonale et f est une isométrie affine, donc une bijection affine entre E et $f(E)$, qui sont donc de même dimension, et $(A'_0, \ldots, A'_n)$ est bien un repère de $f(E)$. □

Un corollaire non trivial de ce résultat est le suivant.

Proposition 5.7
Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système de n points affinement libres d'un espace euclidien E. Soient $(A'_1, \dots, A'_n)$ n points de E tels que $A'_iA'_j = A_iA_j$ pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$.
Alors il existe exactement deux isométries de E, l'une positive, l'autre négative qui transforment chaque A_i en A'_i.

Preuve Remarquons tout d'abord que le système $(A_1, \dots, A_n)$ n'est pas un repère affine de E (il manque un point). En revanche, il engendre un hyperplan affine H. D'après la propriété précédente, il existe une unique isométrie affine g entre H et un hyperplan $H' = g(H)$ qui est telle que pour tout i, on a $g(A_i) = A'_i$ et $H' = g(H) = \text{aff}\,(A'_1, \dots, A'_n)$.
Soit $\overrightarrow{H}$ la direction de H et $\overrightarrow{H'}$ la direction de H'. La partie linéaire $\overrightarrow{g}$ de g est une application linéaire orthogonale de $\overrightarrow{H}$ sur $\overrightarrow{H'}$.
$\overrightarrow{H}^\perp$ et $\overrightarrow{H'}^\perp$ sont des droites vectorielles. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ des vecteurs normés dirigeant respectivement $\overrightarrow{H}^\perp$ et $\overrightarrow{H'}^\perp$.
On peut définir une application linéaire φ de $\overrightarrow{E}$ dans lui-même par :
si $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} + \lambda\overrightarrow{u}$ est la décomposition de $\overrightarrow{x}$ selon la somme directe orthogonale $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{H} \overset{\perp}{\oplus} < \overrightarrow{u} >$ $(\overrightarrow{y} \in \overrightarrow{H})$, on pose $\varphi(\overrightarrow{x}) = g(\overrightarrow{y}) + \lambda\overrightarrow{u'}$.
Il est assez clair qu'en procédant ainsi on construit une application linéaire de $\overrightarrow{E}$ dans $\overrightarrow{E'}$.
D'autre part, φ conserve la norme : en effet, on a

$$\begin{aligned}\|\varphi(\overrightarrow{x})\|^2 &= \|g(\overrightarrow{y})\|^2 + \lambda^2\|\overrightarrow{u'}\|^2 = \|\overrightarrow{y}\|^2 + \lambda^2\\ &= \|\overrightarrow{y}\|^2 + \|\lambda\overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{x}\|^2.\end{aligned}$$

(On a utilisé deux fois le théorème de Pythagore puisque $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{u'} \perp g(\overrightarrow{H}) = \overrightarrow{H'}$.)
Donc φ est une application orthogonale, et l'application affine f qui transforme A_1 en A'_1 et qui admet φ comme partie linéaire est une isométrie, dont la restriction à H est g $(f(A_i) = f(A_1) + \varphi(\overrightarrow{A_1A_i}) = A'_1 + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{A_1A_i}) = g(A_i) = A'_i)$.
D'autre part l'application $f' = s_H \circ f$ est une autre isométrie affine, distincte de f, de signe opposé, qui transforme aussi les A_i en les A'_i. On a trouvé deux isométries distinctes ayant cette propriété.

Soit maintenant h une isométrie affine telle que $h(A_i) = A'_i$ pour tout i. Nécessairement, on a $h_{|H} = g$ et donc $\overrightarrow{h}_{|\overrightarrow{H}} = \overrightarrow{g}$. Alors nécessairement, on a $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{u}) \in \overrightarrow{H'}^\perp$ et donc $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{u}) = \pm\overrightarrow{u'}$.
Il est clair que si $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u'}$, c'est que $\overrightarrow{h} = \varphi$ et donc $h = f$, tandis que si $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u'}$, alors $\sigma_{\overrightarrow{H'}} \circ \overrightarrow{h}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u'}$ et $\sigma_{\overrightarrow{H'}} \circ \overrightarrow{h}_{|\overrightarrow{H}} = \overrightarrow{h}_{|\overrightarrow{H}} = \overrightarrow{g}$ donc $\sigma_{\overrightarrow{H'}} \circ \overrightarrow{h} = \varphi$ et

$s_H \circ h = f$ de sorte que $h = s_H \circ f$. Il n'y a donc que deux isométries transformant les A_i en les A'_i. $\square$

5.2.2 Réflexions

Proposition 5.8 (et définition)
Soient A et B deux points distincts de l'espace affine euclidien E. Alors l'ensemble des points M de E qui sont à égale distance de A et de B est un hyperplan appelé *hyperplan médiateur* de $\{A, B\}$ (ou de $[AB]$) (ou de (A, B)). C'est l'hyperplan passant par le milieu I de $\{A, B\}$ et dont la direction est $< \overrightarrow{AB} >^{\perp}$.
De plus, il existe une unique réflexion s_H qui échange A et B : c'est la réflexion par rapport à l'hyperplan médiateur.

Preuve On doit montrer que l'ensemble des points à égale distance de A et de B est $I+ < \overrightarrow{AB} >^{\perp}$. Or, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(M, A) = \mathrm{d}(M, B) &\iff MA^2 = MB^2 \iff (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0 \\ &\iff 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \iff \overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{MI} \in < \overrightarrow{AB} >^{\perp} \\ &\iff M \in I+ < \overrightarrow{AB} >^{\perp} \end{aligned}$$

Si l'hyperplan H est tel que $s_H(A) = B$, alors $\sigma_{\overrightarrow{H}}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ donc on a $\overrightarrow{0} = \sigma_{\overrightarrow{H}}(\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} = (\sigma_{\overrightarrow{H}} + \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})(\overrightarrow{AB})$, donc $\overrightarrow{AB} \in \ker(\sigma_{\overrightarrow{H}} + \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$ et $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{H}^{\perp}$ par définition de l'orthogonalité d'une symétrie, et on a donc $\overrightarrow{H} =< \overrightarrow{AB} >^{\perp}$. De plus le milieu I de $[AB]$ est clairement un point de H donc $H = I+ < \overrightarrow{AB} >^{\perp}$. Pour finir, il est clair que la réflexion par rapport au plan médiateur de $[AB]$ échange A et B. $\square$

Une application importante de la notion d'hyperplan médiateur est le théorème suivant :

Théorème 5.9
Toute isométrie f de E peut s'écrire comme composée de m réflexions avec $m \leqslant n+1$.

Preuve Soit $\mathcal{R} = (A_0, \ldots, A_n)$ un repère affine de E et $A'_i = f(A_i)$.
Posons $f = f_0$. On considère l'ensemble $\mathcal{E}_0 = \left\{ i \in \{0, \ldots, n\} \mid A'_i \neq A_i \right\}$ et le nombre $N_0 = \operatorname{card} \mathcal{E}_0$.
Si $N_0 = 0$, c'est que $f = \mathrm{id}_E$, donc f est la composée de 0 réflexions et c'est terminé.
Si $N_0 > 0$, c'est que $\mathcal{E}_0 \neq \varnothing$; on choisit $k \in \mathcal{E}_0$. On a donc $A'_k \neq A_k$. Soit H_1 l'hyperplan médiateur de $[A_k A'_k]$. On pose $f_1 = s_{H_1} \circ f_0$ et on considère maintenant l'ensemble $\mathcal{E}_1 = \left\{ i \in \{0, \ldots, n\} \mid f_1(A_i) \neq A_i \right\}$ et le nombre $N_1 = \operatorname{card} \mathcal{E}_1$. Montrons que $N_1 < N_0$. Soit j un indice tel qu'on avait $A'_j = A_j$. Puisque f est une isométrie,

on a $A'_jA'_k = A_jA_k$ donc $A_jA'_k = A_jA_k$, de sorte que A_j appartient au plan médiateur H_1 de $[A_kA'_k]$. On a donc $f_1(A_j) = s_{H_1}(f(A_j)) = s_{H_1}(A_j) = A_j$, de sorte que parmi les points A_i, il y a au moins autant de points invariants par f_1 qu'il n'y en avait par $f_0 = f$.
Mais le point A_k est par construction de f_1 un nouveau point invariant par f_1 : $f_1(A_k) = s_{H_1}(f(A_k)) = s_{H_1}(A'_k) = A_k$. Donc $k \notin \mathcal{E}_1$ et $N_1 < N_0$.
Si on a $N_1 = 0$, c'est que $f_1 = \mathrm{id}_E$ donc $f = s_{H_1}$: f est la composée d'une réflexion.
Sinon, on itère le procédé, en considérant $k_2 \in \mathcal{E}_1 (\neq \varnothing)$ et pour H_2 plan médiateur de $[A_{k_2}f_1(A_{k_2})]$, on prend $f_2 = s_{H_2} \circ f_1$, qui par le même raisonnement laisse strictement plus de points A_i invariants que f_1.
On construit ainsi une suite d'isométries $f_p = s_{H_p} \circ f_{p-1}$ et une suite correspondante d'entiers N_p, nombre de points A_i qui ne sont pas invariants par f_p. La suite (N_p) d'entiers naturels est strictement décroissante, ce qui fait qu'on obtient forcément au bout de m itérations du procédé, avec $m \leqslant n+1$ (nombre de points A_i) $N_m = 0$ et $f_m = \mathrm{id}_E$.
Comme par construction, on a $f_m = s_{H_m} \circ \cdots \circ s_{H_2} \circ s_{H_1} \circ f = \mathrm{id}_E$, c'est que $f = s_{H_1} \circ s_{H_2} \circ \cdots \circ s_{H_m}$. □

Remarque : Une démonstration basée sur le même principe permet de montrer que toute isométrie vectorielle peut se décomposer comme produit de m réflexions vectorielles avec $m \leqslant n$.

5.2.3 Isométries avec point fixe

Les isométries étant des applications affines, on démontre sans difficulté, et comme pour les applications affines, les résultats suivants :

Proposition 5.10 L'ensemble des isométries de E admettant le point Ω comme point invariant est un sous-groupe de $\mathcal{I}(E)$ (noté $\mathcal{I}_\Omega(E)$), isomorphe à $\mathcal{O}(\overrightarrow{E})$.
$\mathcal{I}(E)$ est le produit semi-direct de $\mathcal{T}(E)$ par $\mathcal{I}_\Omega(E)$.

Les isométries avec au moins un point fixe sont donc simples à connaître : il suffit de connaître les isométries vectorielles correspondantes.

Comme les autres applications, affines, une isométrie admet à coup sûr un point fixe unique si et seulement si sa partie linéaire n'admet pas 1 comme valeur propre.
Mais cette situation (1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$) qui est assez banale pour les applications affines générales est beaucoup plus rare parmi les isométries. En effet, la partie linéaire d'une isométrie affine est une transformation orthogonale, dont on démontre aisément qu'elle n'admet que des valeurs propres de module 1. Donc il est très fréquent qu'une isométrie admette 1 comme valeur propre, et dans ce cas, l'ensemble des points fixes est très souvent vide. Le théorème qui suit permet de donner une description précise de ce qui se passe dans ce cas.

Théorème 5.11 (Factorisation d'une isométrie) *Soit f une isométrie de l'espace affine euclidien E. Alors il existe un unique couple $(\widetilde{f}, t)$ où $\widetilde{f}$ est une isométrie admettant au moins un point fixe et t une translation qui vérifie $f = \widetilde{f} \circ t = t \circ \widetilde{f}$.*
L'ensemble V des points fixes de $\widetilde{f}$ est dirigé par le sous-espace propre $\overrightarrow{E_1}$ associé à la valeur propre 1 de $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\widetilde{f}}$ $(\overrightarrow{E_1} = \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$
Le vecteur $\overrightarrow{u}$ de la translation $t = t_{\overrightarrow{u}}$ est un élément de $\overrightarrow{E}_1$.

Pour démontrer ce théorème, on établit d'abord un lemme :

Lemme 5.12 Si $\overrightarrow{f}$ est une transformation orthogonale de $\overrightarrow{E}$, alors

$$\overrightarrow{E} = \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}).$$

Preuve du lemme Pour alléger les notations, soit $\varphi = \overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$. Considérons l'adjoint de φ, qui est l'application φ^* telle que pour tout $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \overrightarrow{E}^2$, on a $\overrightarrow{x} \cdot \varphi(\overrightarrow{y}) = \varphi^*(\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{y}$. Grâce au fait que $\overrightarrow{f}$ est une transformation orthogonale[3], on a $\varphi^* = \overrightarrow{f}^* - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{f}^{-1} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$ et donc $\ker \varphi = \ker \varphi^*$, puisque $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} \iff \overrightarrow{x} = \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{x})$.
Or, il est classique que $\ker \varphi^* \subset (\mathrm{Im}\, \varphi)^{\perp}$, puisque si $\overrightarrow{x} \in \ker \varphi^*$, $\forall \overrightarrow{y} = \varphi(\overrightarrow{z}) \in \mathrm{Im}\, \varphi$, on a $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} \cdot \varphi(\overrightarrow{z}) = \varphi^*(\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{z} = \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{z} = 0$.
Donc $\ker \varphi \subset (\mathrm{Im}\, \varphi)^{\perp}$. Mais $\dim(\ker \varphi) = n - \mathrm{rg}(\varphi) = \dim\left((\mathrm{Im}\, \varphi)^{\perp}\right)$, de sorte que $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\, \varphi)^{\perp}$ et on a bien $\overrightarrow{E} = \ker \varphi \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\, \varphi = \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$. □

Preuve du théorème Établissons tout d'abord des conditions nécessaires déduites de l'existence éventuelle d'une décomposition $f = t \circ \widetilde{f} = \widetilde{f} \circ t$. Nous verrons qu'ainsi nous établirons l'*unicité* d'une telle décomposition.
Soit Ω un point fixe de $\widetilde{f}$. Montrons que l'ensemble des points fixes de $\widetilde{f}$ est alors $V = \Omega + \overrightarrow{E_1} = \Omega + \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$.
Soit $A \in \Omega + \overrightarrow{E_1}$. On a $A = \Omega + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{E_1}$ donc $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}$, et on peut écrire $\widetilde{f}(A) = \widetilde{f}(\Omega) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{w}) = \Omega + \overrightarrow{w} = A$ (n'oublions pas que $\widetilde{f}$ a la même partie linéaire que f). A est bien un point fixe de $\widetilde{f}$, donc $A \in V$; on a prouvé pour l'instant que $\Omega + \overrightarrow{E}_1 \subset V$.
Soit maintenant $A \in V$ un point fixe de $\widetilde{f}$. Posons $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{\Omega A} = A - \Omega$, de sorte que $A = \Omega + \overrightarrow{w}$. On a $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{w}) = \widetilde{f}(A) - \widetilde{f}(\Omega) = A - \Omega = \overrightarrow{w}$ (puisque A et Ω sont des points fixes de $\widetilde{f}$). On a ainsi prouvé que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}$, donc $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{E}_1$ et $A = \Omega + \overrightarrow{w} \in \Omega + \overrightarrow{E}_1$: on a prouvé l'inclusion inverse $V \subset \Omega + \overrightarrow{E}_1$.

[3] On le démontre ainsi : $\overrightarrow{f}^{-1}(x) \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{x})) \cdot \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{f}^*(\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{y}$

Soit $\vec{u}$ le vecteur de la translation $t = t_{\vec{u}}$. Si $\Omega' = f(\Omega)$, on a, puisque $\widetilde{f}(\Omega) = \Omega$:
$\Omega' = f(\Omega) = t \circ \widetilde{f}(\Omega) = t(\Omega) = \Omega + \vec{u}$; mais on a aussi :
$\Omega' = f(\Omega) = \widetilde{f} \circ t(\Omega) = \widetilde{f}\big(t(\Omega)\big) = \widetilde{f}(\Omega')$ de sorte que $\Omega' = \Omega + \vec{u}$ est aussi un point fixe de $\widetilde{f}$. On a vu qu'alors, nécessairement $\vec{u} \in \vec{E}_1$.
On a aussi $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega\Omega'} = f(\Omega) - \Omega$.
Soit maintenant A un point quelconque de E, et $A' = f(A)$. Calculons, en utilisant le point Ω une expression de $\overrightarrow{AA'}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} &= A' - A = f(A) - A = f(\Omega) + \vec{f}(\overrightarrow{\Omega A}) - \Omega - \overrightarrow{\Omega A}\\ &= f(\Omega) - \Omega + (\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})(\overrightarrow{\Omega A}) = \vec{u} + (\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})(\overrightarrow{\Omega A}).\end{aligned}$$

Puisque $\vec{u} \in \vec{E}_1 = \ker(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})$ et $(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})(\overrightarrow{\Omega A}) \in \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})$, on a obtenu que le vecteur $\vec{u}$ d'une translation t qui serait telle que $f = \widetilde{f} \circ t = t \circ \widetilde{f}$, avec $\widetilde{f}$ admettant un point fixe, est, quel que soit le point A, la première composante de l'unique décomposition selon la somme directe $\vec{E} = \ker(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})$ du vecteur $\overrightarrow{AA'}$. On a ainsi démontré l'unicité d'une translation t qui serait telle qu'on peut écrire $f = \widetilde{f} \circ t = t \circ \widetilde{f}$, avec $\widetilde{f}$ admettant un point fixe. Mais l'unicité de la translation t implique évidemment l'unicité de l'isométrie avec point fixe $\widetilde{f} = f \circ t^{-1}$.
Montrons maintenant l'*existence.*
Soit A un point de E et $A' = f(A)$. D'après le lemme, le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ peut se décomposer de façon unique selon la somme directe $\vec{E} = \ker\varphi \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,\varphi = \ker(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})$.
Il existe donc deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ uniques tels que
$\overrightarrow{AA'} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in \ker(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})$ et $\vec{v} = \vec{f}(\vec{w}) - \vec{w} \in \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})$.
On peut donc écrire $A' = A + \vec{u} + \vec{f}(\vec{w}) - \vec{w}$.
Posons alors $t = t_{\vec{u}}$ et $\widetilde{f} = t_{-\vec{u}} \circ f$ (pour que $f = t_{\vec{u}} \circ \widetilde{f}$).
Montrons que $\widetilde{f}$ admet un point fixe et qu'elle commute avec t (par construction, on a déjà $f = t \circ \widetilde{f}$).
Notons d'abord que $\widetilde{f}$ a la même partie linéaire $\vec{f}$ que f. Ensuite, on a
$\widetilde{f}(A) = f(A) - \vec{u} = A' - \vec{u} = (A + \vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} = A + \vec{f}(\vec{w}) - \vec{w}$ d'où
$\widetilde{f}(A - \vec{w}) = \widetilde{f}(A) - \vec{f}(\vec{w}) = A - \vec{w}$. On a trouvé un point fixe de $\widetilde{f}$: c'est le point $\Omega = A - \vec{w}$.
Pour montrer maintenant que $\widetilde{f}$ et t commutent, en utilisant3 que $\widetilde{f} \circ t$ et $t \circ \widetilde{f}$ ont même partie linéaire, il suffit de vérifier pour un point l'égalité des images par ces deux applications.
Nous utiliserons $\Omega = A - \vec{w}$, point fixe de $\widetilde{f}$; on a, en utilisant aussi que $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$ puisque $\vec{u} \in \ker(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})$:

$t \circ \widetilde{f}(\Omega) = \widetilde{f}(\Omega) + \overrightarrow{u} = \Omega + \overrightarrow{u} = \widetilde{f}(\Omega) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \widetilde{f}(\Omega + \overrightarrow{u}) = \widetilde{f}(t(\Omega)) = \widetilde{f} \circ t(\Omega)$, ce qui achève la démonstration. □

5.3 Étude des isométries en dimension 2

5.3.1 En dimension 1

Si $\dim(E) = 1$, il est très simple de se rendre compte que les seules isométries positives sont les translations (sans point fixe, à part l'identité) et que les isométries négatives sont les symétries centrales dont la partie linéaire est $-\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$. En effet, $\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$ et $-\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$ sont les deux seules isométries vectorielles en dimension 1.

5.3.2 Isométries d'un plan vectoriel

Soit $\overrightarrow{E}$ un plan vectoriel euclidien. Si $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormée directe, une transformation orthogonale de $\overrightarrow{E}$ admet dans cette base une matrice du type $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$ et $ab + cd = 0$ d'où (calculs classiques), les isométries vectorielles positives qui sont les rotations d'angle θ, de matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et les isométries vectorielles négatives qui sont des symétries orthogonales $s_{\overrightarrow{D}}$ d'axe $\overrightarrow{D} = <\overrightarrow{u}>$ avec $\overrightarrow{u} = \cos\frac{\theta}{2}\,\vec{\imath} + \sin\frac{\theta}{2}\,\vec{\jmath}$ lorsque la matrice est $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Pour s'en persuader, on applique les formules (voir l'exercice 5.4) donnant l'image d'un vecteur par la symétrie orthogonale σ par rapport à $<\overrightarrow{u}>$:

$$\sigma(\vec{\imath}) = 2(\vec{\imath} \cdot \overrightarrow{u})\,\overrightarrow{u} - \vec{\imath} = \begin{pmatrix} 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \\ 2\cos\frac{\theta}{2}\,\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\vec{\jmath}) = 2(\vec{\jmath} \cdot \overrightarrow{u})\,\overrightarrow{u} - \vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 2\sin\frac{\theta}{2}\,\cos\frac{\theta}{2} \\ 2\sin^2\frac{\theta}{2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

on a ainsi calculé les deux colonnes de la matrice de σ dans la base $\mathcal{B}$.)

(Remarquons que la matrice (orthogonale) d'une réflexion vectorielle est *symétrique*, ce qui est normal, puisque c'est une symétrie orthogonale.)

On montre très facilement, par exemple par un calcul matriciel que $\mathcal{O}^+(\overrightarrow{E})$ est ici commutatif (c'est vrai uniquement en dimension 2).

De plus, un calcul matriciel élémentaire montre que

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \sin 0 & -\cos 0 \end{pmatrix}$$

ce qui permet de retrouver que toute rotation vectorielle est produit de deux réflexions vectorielles.

Orientation du plan vectoriel

Deux bases orthonormées de $\overrightarrow{E}$ ont même orientation lorsque l'unique isométrie vectorielle qui transforme l'une en l'autre est une rotation. Cette relation est évidemment une relation d'équivalence entre bases orthonormées, qui a deux classes. Orienter le plan vectoriel consiste à choisir (arbitrairement) une de ces deux classes (par un de ses représentants) comme étant l'ensemble des bases orthonormées directes (b.o.n.d.) ; les autres b.o.n. sont indirectes.

Le fait que $\mathcal{O}^+(\overrightarrow{E})$ soit commutatif a pour conséquence que la matrice d'une rotation vectorielle est indépendante de la base orthonormée directe dans laquelle on la calcule. En effet, soit $\mathrm{R} = \mathrm{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ la matrice d'une rotation vectorielle ρ dans une certaine base orthonormée directe $\mathcal{B}$ et soit R' sa matrice dans une autre base orthonormée directe $\mathcal{B}'$. On sait que si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a $\mathrm{R}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{R}\,\mathrm{P}$. Mais P est une matrice de rotation, puisque c'est la matrice de l'unique isométrie vectorielle qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ et que ces deux bases ont même orientation par hypothèse. Comme $\mathcal{O}^+(\overrightarrow{E})$ est commutatif, on a $\mathrm{RP} = \mathrm{PR}$, donc $\mathrm{R}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{R}\,\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}\,\mathrm{R} = \mathrm{I}_2\mathrm{R} = \mathrm{R}$.

Mais si on considère une nouvelle base orthonormée indirecte $\mathcal{B}''$, la matrice R'' de ρ dans $\mathcal{B}''$ est la transposée de R. En effet, on a $\mathrm{R}'' = \mathrm{P}'^{-1}\mathrm{R}\,\mathrm{P}'$, avec P' matrice de passage entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}''$, et comme ces deux bases n'ont pas la même orientation, on est sûr que P' est la matrice d'une réflexion vectorielle, involutive. Donc $\mathrm{R}'' = \mathrm{P}\,\mathrm{R}\,\mathrm{P}$. Mais il est clair que $\S = \mathrm{R}\,\mathrm{P}$ est une la matrice d'une isométrie vectorielle négative, donc $\S$ est aussi la matrice d'une réflexion vectorielle, involutive. Donc $\S^2 = \mathrm{I}_2$, c'est-à-dire $\mathrm{R}\,\mathrm{P}\,\mathrm{R}\,\mathrm{P} = \mathrm{I}_2$, et par conséquent $\mathrm{P}\,\mathrm{R}\,\mathrm{P} = \mathrm{R}^{-1} = {}^t\mathrm{R}$: on a $\mathrm{R}'' = {}^t\mathrm{R}$. On aurait pu obtenir ce résultat par un calcul matriciel compliqué, mais c'est plus court avec ce raisonnement.
Donc si $\mathrm{R} = \mathrm{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{R}'' = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \mathrm{R}_{-\theta}$.
On a montré que changer l'orientation de la base change en son opposé l'angle d'une rotation. (Un autre argument était qu'il fallait conserver la trace qui vaut $2\cos\theta$, donc on n'avait pas d'autre choix que de changer θ en $-\theta$).

Notons qu'en revanche, la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle (toujours de trace nulle) dépend de la base orthonormée plus que de l'orientation de cette base.

5.3.3 Angles

Angle d'une rotation

Le plan $\overrightarrow{E}$ étant orienté, une mesure de l'angle d'une rotation ρ est le nombre θ (défini modulo 2π) de la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ de ρ dans une b.o.n.d.. $\mathcal{O}^+(\overrightarrow{E})$

étant commutatif, ce nombre ne dépend pas de la b.o.n.d. choisie, mais il dépend de l'orientation : si on change l'orientation (il n'y a qu'une façon de le faire), l'angle de ρ devient $-\theta$ (comme on vient de le vérifier).
Une orientation étant fixée, une rotation vectorielle ne dépend plus que de la valeur de son angle, ce qui fait que l'on notera ρ_θ la rotation (vectorielle) d'angle θ.

Angle d'un couple de vecteurs

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs *non nuls* de $\overrightarrow{E}$. De façon unique, on peut construire les deux vecteurs *unitaires* $\overrightarrow{u'} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$ et $\overrightarrow{v'} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$. La mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ du couple de vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est la mesure de l'angle de l'unique rotation ρ telle que $\rho(\overrightarrow{u'}) = \overrightarrow{v'}$.
L'angle $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ d'un couple de vecteurs *unitaire* est la classe d'équivalence de ce couple pour une certaine relation d'équivalence entre couples de vecteurs unitaires : deux couples $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ sont relation, c'est-à-dire ont le même angle lorsqu'il existe une rotation vectorielle qui transforme l'un en l'autre. Pour des couples de vecteurs non nuls, on commence par les normer. C'est assez compliqué, et nous n'insisterons sur cette notion. En pratique, comme on le fait maintenant dans les classes de lycée, nous confondrons un angle et sa mesure en radian (modulo 2π ou modulo π selon le cas, comme nous le verrons plus loin).

Angle d'un couple de droites vectorielles

Pour toute droite vectorielle, il existe exactement deux vecteurs directeurs qui soient unitaires. Par conséquent, en définissant l'angle d'un couple de droites comme étant l'angle d'un couple de leurs vecteurs unitaires, un angle de droites n'est défini que modulo π. (En effet, on a $(\widehat{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u}}) = \pi[2\pi]$ puisque la rotation d'angle π est en fait $-\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$).

On a le résultat intéressant suivant :

Proposition 5.13 Soient deux droites $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D'}$ telles que $(\widehat{\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D'}}) = \alpha[\pi]$. Alors $s_{\overrightarrow{D'}} \circ s_{\overrightarrow{D}} = \rho_{2\alpha}$

Démonstration :
Plaçons nous dans une base orthonormée directe dont le premier vecteur de base est un vecteur $\overrightarrow{u}$ (unitaire) directeur de $\overrightarrow{D}$. Soit $\overrightarrow{u'}$ un vecteur directeur unitaire de $\overrightarrow{D'}$. Par définition de l'angle des deux droites $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D'}$, qui est aussi $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}})$, si on a $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}})[\pi]$ (on pourrait avoir $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}}) + \pi$), on peut supposer que $\overrightarrow{u'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ (ce pourrait être aussi $\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\pi)\\ \sin(\alpha+\pi)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$).

D'après ce qu'on a vu de la matrice des symétries orthogonales, la matrice de $s_{\overrightarrow{D}}$ dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et celle de $s_{\overrightarrow{D'}}$ est* $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$ *(remarquons que si on était dans l'autre cas, on aurait des* $\cos(2(\alpha+\pi))$ *et des* $\sin(2(\alpha+\pi))$*, ce qui ne changerait rien). Donc on peut affirmer que la matrice de $s_{\overrightarrow{D'}} \circ s_{\overrightarrow{D}}$ est*

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

On reconnaît la matrice de $\rho_{2\alpha}$ dans toute base orthonormée directe.

Propriétés des angles

Quels que soient les objets avec lesquels on calcule des angles (vecteurs, demi-droites ou droites), les calculs avec les angles obéissent toujours à la *relation de Chasles* et à ses conséquences : par exemple, on a $\widehat{(D, D')} = -\widehat{(D', D)}[\pi]$; $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} - \widehat{(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v})} = \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})}$ si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont deux vecteurs unitaires, et si $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} = \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})}[2\pi]$, alors $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$...
De plus, les rotations conservent les angles alors qu'une réflexion vectorielle change un angle en son opposé.

Angles droits

L'angle de deux vecteurs est droit lorsqu'ils sont orthogonaux. La mesure d'un angle droit vaut $\pm\frac{\pi}{2}$ (modulo 2π) (ou modulo π si on parle d'angle de droites).
En effet, la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ a pour matrice $\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que l'image du premier vecteur de la base orthonormée dans laquelle on travaille est le deuxième vecteur de cette base. Comme ces deux vecteurs sont orthogonaux, leur angle est bien $\frac{\pi}{2}$.

5.3.4 Déplacements d'un plan affine euclidien orienté

Un plan affine euclidien $(P, \overrightarrow{P})$ est orienté lorsque sa direction $\overrightarrow{P}$ est orientée.

Il est facile de voir que les matrices des rotations n'ont en général pas de valeurs propres réelles (le polynôme caractéristique d'une rotation ρ_θ est :
$\chi_{\rho_\theta}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \lambda - \cos\theta \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\cos\theta\,\lambda + 1$
Ce trinôme a un discriminant qui vaut $\cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta < 0$ sauf si $\theta = 0[\pi]$, ce qui correspond à l'identité ou la symétrie centrale.
En particulier, 1 n'est pas valeur propre d'une rotation vectorielle d'angle non nul. Donc à part l'identité pour qui tous les points sont fixes, les translations qui n'ont pas de point fixe, tous les autres déplacements ont un point fixe unique. Si Ω est l'unique

point fixe d'un déplacement dont la partie linéaire est ρ_θ, on dit que ce déplacement est la rotation (affine) de centre Ω, d'angle θ et on la note $r_{\Omega,\theta}$.

La théorie générale des isométries affines nous a permis d'affirmer qu'un déplacement peut se décomposer en produit de m réflexions avec $m \leqslant 2+1$. Mais le produit de 3 réflexions est un antidéplacement, donc tout déplacement distinct de l'identité est forcément le produit de deux réflexions. On verra dans l'exercice 5.8 (p. 135) comment réaliser cette décomposition dans le cas des translations. Pour une rotation, on a le résultat suivant :

Proposition 5.14 Soit $r = r_{\Omega,\theta}$. Alors pour toute droite D passant par Ω, il existe une unique droite D' et une unique droite D'' telles que $r = s_D \circ s_{D'} = s_{D''} \circ s_D$. D' est la droite passant par Ω telle que $(\widehat{D, D'}) = -\frac{\theta}{2}[\pi]$ et D'' est la droite passant par Ω telle que $(\widehat{D, D''}) = \frac{\theta}{2}[\pi]$.

Réciproquement, la composée $s_{D'} \circ s_D$ de deux réflexions s_D et $s_{D'}$ est une translation si $D /\!/ D'$ et la rotation d'angle $2(\widehat{D, D'})$ et de centre $D \cap D'$ si ces droites sont sécantes.

La démonstration de ce résultat est l'objet de l'exercice 5.12 (p. 135).

5.3.5 Antidéplacements d'un plan affine euclidien

Un antidéplacement f du plan affine euclidien E admet comme partie linéaire une réflexion vectorielle $s_{\overrightarrow{D}}$. S'il admet un point fixe Ω, c'est une réflexion s_D avec $D = \Omega + \overrightarrow{D}$.

Mais toutes les réflexions vectorielles admettent 1 comme valeur propre, de sorte qu'un antidéplacement peut être (et est souvent) sans point fixe. Le théorème de factorisation nous dit que pour un tel antidéplacement f, dont la partie linéaire est $s_{\overrightarrow{D}}$, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$ et une unique réflexion (affine) s_D telle que $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D = s_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$

On dit que f est une *réflexion glissée*. D est son axe et $\overrightarrow{u}$ est son vecteur de glissement.

Une réflexion glissée ne peut se décomposer en un produit de moins de trois réflexions, et sa factorisation $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D = s_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$ (ainsi que la décomposition d'une translation) permet de trouver des solutions.

Une manière efficace (pour toutes les symétries glissées, d'ailleurs) pour trouver le vecteur de glissement $\overrightarrow{u}$ de $t_{\overrightarrow{u}}$ dans la décomposition $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D = s_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$ d'un antidéplacement d'un plan affine euclidien consiste à étudier $f^2 = f \circ f$. En effet, on a $f^2 = f \circ f = (t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D) \circ (s_D \circ t_{\overrightarrow{u}}) = t_{\overrightarrow{u}} \circ (s_D \circ s_D) \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{2\overrightarrow{u}}$.

Une fois qu'on a déterminé ainsi $\overrightarrow{u}$, il suffit de déterminer $t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$ pour obtenir s_D.

On appliquera cette technique dans l'exercice 5.13 (p. 136).

5.4 Isométries dans l'espace affine de dimension 3

5.4.1 Point de vue vectoriel

$\overrightarrow{E}$ est ici un espace vectoriel euclidien de dimension 3.

Il ressort de l'étude des transformations orthogonales générales (vue en deuxième année) qu'en dimension n, il existe toujours une base orthonormée dans laquelle la matrice d'une transformation orthogonale est de la forme diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & R_{\theta_1} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix}$$

Les R_{θ_j} étant des blocs carrés 2×2 égaux à la matrice de la rotation ρ_{θ_j} :
on a $R_{\theta_j} = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$, et les angles θ_j ne sont ni nuls ni plats ($\neq 0[\pi]$).

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension n de $\overrightarrow{E}$, après avoir établi deux lemmes :

- *tout endomorphisme d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ admet des sous-espaces de dimension 1 ou 2 qui sont stables.*
- *l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme orthogonal est stable.*

Transcrivant ce résultat en dimension 3, on découvre exactement 6 sortes de transformations orthogonales dans $\overrightarrow{E}$, dont la matrice dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ particulière est de la forme

$$\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \mathrm{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \mathrm{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ;$$

$$\mathrm{M}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \mathrm{M}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ; \mathrm{M}_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathrm{M}_1 = \mathrm{I}_3$ est la matrice de l'identité dans n'importe quelle base.
La matrice $\mathrm{M}_4 = -\mathrm{I}_3$ est la matrice de $-\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$ dans n'importe quelle base.
La matrice M_2 est la matrice de la réflexion par rapport à $\overrightarrow{P} = < \vec{u}, \vec{v} >$.

La matrice M_3 est la matrice du retournement (ou demi-tour) d'axe $< \vec{u} >$.
La matrice M_5 est la matrice de la rotation d'angle θ et d'axe dirigé et orienté par $\vec{u}$.
La matrice M_6 est la matrice de l'antirotation (on dit aussi « symétrie tournée ») d'angle θ et d'axe dirigé et orienté par $\vec{u}$.

Remarque : Pour justifier la terminologie d'*antirotation* et de *symétrie tournée* on vérifie que $M_6 = M_5(-M_3) = (-M_3)M_5$: une antirotation est la composée commutative d'une rotation et d'une réflexion ($(-M_3)$ est la matrice de la réflexion par rapport à $< \vec{v}, \vec{w} >$.

Partant d'une transformation orthogonale f quelconque, dont on connaît en général la matrice M (qui vérifie ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{M} = \mathrm{I}_3$) dans une base orthonormée fixe, il est intéressant de savoir à quel type on a affaire, et quels sont ses éléments.
On ne peut pas hésiter si on rencontre les matrices M_1 ou M_4, car ces matrices sont invariantes par changement de base.
On voit assez facilement quand on a affaire à une symétrie puisque dans ce cas la matrice M est symétrique. On a alors, soit une réflexion, soit un demi-tour, selon la valeur de $\det \mathrm{M}$. L'élément de la symétrie est dans les deux cas le sous-espace propre associé à la valeur propre 1. Le déterminant, mais surtout *la trace*, bien plus facile à calculer de M permettent l'un ou l'autre de savoir si on a affaire à une réflexion (négative, et de trace $+1$) ou à un demi-tour (positif, de trace -1).
Les deux derniers types sont les cas généraux. On saura qu'on a affaire à l'un des deux types selon le signe de l'isométrie f : si $\det \mathrm{M} = 1$, c'est qu'on a une rotation, alors qu'une antirotation a -1 comme déterminant. Mais comme un déterminant est compliqué à calculer on verra plus loin, juste aprés la proposition 5.17, p. 128, une méthode plus efficace pour déterminer le signe d'une transformation orthogonale en dimension 3.
Pour pouvoir déterminer précisément l'angle et l'axe d'une rotation ou d'une antirotation, on dispose de deux méthodes. L'une « naïve » consiste à déterminer l'axe comme sous-espace propre, le cosinus de l'angle grâce à la trace et le signe de l'angle grâce au signe d'un déterminant. Nous présentons ci-après une méthode beaucoup plus efficace, mais qui nécessite quelques résultats concernant le produit vectoriel et les endomorphismes antisymétriques de $\overrightarrow{E}$.

Produit vectoriel

Nous « rappelons » ici une définition algébrique du produit vectoriel, à partir du produit mixte, qui est très efficace.

Proposition 5.15 Si $\overrightarrow{E}$ est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, alors la valeur du déterminant de trois vecteurs ne dépend pas de la base *orthonormée directe* dans laquelle on calcule ce déterminant. On note $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ et on appelle *produit mixte* des trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ le déterminant de ces trois vecteurs calculé dans n'importe quelle base orthonormée directe.

Preuve En effet, le déterminant, quand on change de base est multiplié par le déterminant de la matrice de changement de base. Mais une matrice de changement de base entre deux bases orthonormée directe est une matrice orthogonale positive, de déterminant $+1$. □

Le produit mixte de trois vecteurs est une forme trilinéaire alternée. Grâce à l'identification canonique d'un espace vectoriel euclidien avec son dual, on en déduit :

Définition 5.16 Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'unique vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ qui représente la forme linéaire $\vec{x} \longmapsto [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}]$ au sens que pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$, on a $\vec{w} \cdot \vec{x} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{x} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}]$.

À partir de cette définition, on retrouve facilement toutes les propriétés du produit vectoriel, bien sûr la bilinéarité et l'antisymétrie, mais aussi :

Proposition 5.17
- $\vec{w} \in <\vec{u}, \vec{v}>^\perp$;
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff (\vec{u}, \vec{v})$ est liée ;
- l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée directe : si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement comme coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$;
- si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$, $\vec{u} \wedge \vec{w} = -\vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u}$;
- en revanche, si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée indirecte, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{w}$.

Les deux derniers points de cette proposition fournissent une méthode efficace pour déterminer si une matrice orthogonale est « positive » (de déterminant $+1$) ou « négative » (de déterminant -1).
En effet, on sait que si une matrice $\mathrm{M} = [C_1, C_2, C_3]$ est orthogonale, les vecteurs-colonnes C_1, C_2, C_3 de la matrice M sont les coordonnées dans la base canonique de vecteurs formant une base orthonormale. Il suffit donc de commencer à calculer le produit vectoriel $C_1 \wedge C_2$ pour pouvoir conclure. Si le terme que l'on calcule est du même signe que le terme correspondant de C_3, la matrice est positive, sinon elle est négative.

Précisons les choses. Supposons qu'on a montré que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est orthogonale. Pour déterminer son « signe », si $g \neq 0$, on calcule simplement $\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$ (première composante de $C_1 \wedge C_2$). Le résultat est forcément $\pm c$; si c'est $+c$, la matrice est positive, si c'est $-c$, elle est négative. Si $g = 0$, il suffit de calculer une autre composante de $C_1 \wedge C_2$.

Endomorphismes antisymétriques

Un endomorphisme u de l'espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{E}$ est *antisymétrique* (pour le produit scalaire de $\overrightarrow{E}$) lorsqu'on a :

$$\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \overrightarrow{E}, \quad u(\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{y} = -\overrightarrow{x} \cdot u(\overrightarrow{y}).$$

La matrice d'un endomorphisme antisymétrique d'un espace vectoriel euclidien est antisymétrique dans toute base orthonormée. On établit alors facilement en dimension 3, par identification le résultat suivant :

Proposition 5.18 Les seuls endomorphismes antisymétriques de $\overrightarrow{E}$ sont ceux de la forme $a_{\overrightarrow{\omega}} : \overrightarrow{x} \longmapsto \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x}$.

Si $\overrightarrow{\omega}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ dans une certaine base orthonormée, alors $a_{\overrightarrow{\omega}}$ a pour matrice dans cette même base $\begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Expression d'une rotation et d'une antirotation

Proposition 5.19 Si ρ est une rotation d'axe dirigé et orienté par le vecteur *normé* $\overrightarrow{\omega}$ et d'angle θ (ni nul ni plat), (ce qui signifie que la matrice de ρ dans toute base orthonormée directe dont le premier vecteur est $\overrightarrow{\omega}$ est la matrice M_5 définie plus haut), alors pour tout vecteur $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$, on a

$$\rho(\overrightarrow{x}) = \cos\theta\, \overrightarrow{x} + (1 - \cos\theta)(\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{x})\, \overrightarrow{\omega} + \sin\theta\, \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x}.$$

De la même façon, on a :

Si α est une antirotation d'axe dirigé et orienté par $\overrightarrow{\omega}$ et d'angle θ (ni nul ni plat), (ce qui signifie que la matrice de α dans toute base orthonormée directe dont le premier vecteur est ω est la matrice M_6 définie plus haut), alors pour tout vecteur $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$, on a

$$\alpha(\overrightarrow{x}) = \cos\theta\, \overrightarrow{x} - (1 + \cos\theta)(\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{x})\, \overrightarrow{\omega} + \sin\theta\, \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x}.$$

Preuve On se place dans une base « bien choisie », c'est-à-dire, ici, orthonormée directe admettant $\overrightarrow{\omega}$ comme premier vecteur de base. Il suffit alors de vérifier les formules ci-dessus pour les trois vecteurs de base, ce qui est immédiat. $\square$

Pour retrouver ces formules, on peut faire un petit dessin, en introduisant les vecteurs $q(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{x})\overrightarrow{\omega}$ et $p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - q(\overrightarrow{x})$ projetés orthogonaux de $\overrightarrow{x}$ respectivement sur $< \overrightarrow{\omega} >$ et sur $< \overrightarrow{\omega} >^{\perp}$.

Éléments d'une rotation et d'une antirotation

Un grand intérêt des formules précédentes est de permettre de déterminer avec très peu de calcul l'axe et le sinus de l'angle d'une rotation ou d'une antirotation. En effet, dans les formules précédentes, on constate facilement que les deux premiers éléments de la formule correspondent à des endomorphismes symétriques, comme combinaisons linéaires de l'identité et de la projection orthogonale sur $< \overrightarrow{\omega} >$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} &\longmapsto \cos\theta\,\overrightarrow{x} + (1-\cos\theta)(\overrightarrow{\omega}\cdot\overrightarrow{x})\,\overrightarrow{\omega} \\ \overrightarrow{x} &\longmapsto \cos\theta\,\overrightarrow{x} - (1+\cos\theta)(\overrightarrow{\omega}\cdot\overrightarrow{x})\,\overrightarrow{\omega}, \end{aligned}$$

alors que le dernier élément

$$\overrightarrow{x} \longmapsto \sin\theta\,\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x}$$

est clairement antisymétrique. Or l'espace vectoriel des endomorphismes de $\overrightarrow{E}$ est la somme directe du sous-espace vectoriel des endomorphismes symétriques et du sous-espace vectoriel des endomorphismes antisymétriques. Donc la partie antisymétrique de ρ [respectivement de α] est ce dernier élément. Mais si M est la matrice d'un endomorphisme orthogonal f, la partie antisymétrique de f a pour matrice la partie antisymétrique de la matrice M, qui est $A = \dfrac{1}{2}(\mathrm{M} - {}^t\mathrm{M})$. Or, A est la matrice d'une application $a_{\overrightarrow{u}}$, et le vecteur $\overrightarrow{u}$ peut s'écrire de deux façons sous la forme $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{\omega}$ avec $\overrightarrow{\omega}$ vecteur normé. Ayant choisi un des deux sens, on obtient nécessairement que $\lambda = \sin\theta$ (au passage, on a nécessairement $\|\overrightarrow{u}\| \leqslant 1$). Pour connaître complètement θ, il suffit de déterminer son cosinus grâce à la trace de la matrice M (qui est la trace de l'endomorphisme f, indépendante de la base dans laquelle on se place) et donc égale à $1 + 2\cos\theta$ si on est en présence d'une rotation (matrice M_5), et à $-1 + 2\cos\theta$ si on est en présence d'une antirotation (matrice M_6).

Remarque : Ce raisonnement prouve qu'on peut en fait toujours choisir l'angle θ « positif » (admettant une mesure entre 0 et π) : il suffit de diriger l'axe par le vecteur $\overrightarrow{u}$ que l'on a trouvé. Dans ce cas, on ne s'intéresse pas à $\sin\theta$, seulement à $\cos\theta$ obtenu grâce à la trace.

Remarque : Notant $\rho_{\overrightarrow{\omega},\theta}$ la rotation d'axe dirigé et orienté par ω, d'angle θ, on a clairement $\rho_{\overrightarrow{\omega},\theta} = \rho_{-\overrightarrow{\omega},-\theta}$ (changer l'orientation de l'axe change le signe de l'angle). De même, en notant $\alpha_{\overrightarrow{\omega},\theta}$ l'antirotation d'axe dirigé et orienté par ω, d'angle θ, on a clairement $\alpha_{\overrightarrow{\omega},\theta} = \alpha_{-\overrightarrow{\omega},-\theta}$.

5.4.2 Classification des isométries affines en dimension 3

En récapitulant et en faisant la synthèse des propriétés vues plus haut, on peut classer les isométries affines d'après leur partie linéaire. Reprenant la classification M_i vue plus haut, on peut lister toutes les formes d'isométries affines. Soit f une isométrie affine de forme linéaire $\overrightarrow{f}$ qui admet une matrice du type M_i dans une certaine base.

- Si $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$, ($M_1$), alors f est l'identité (tous les points sont fixes) ou une translation sans point fixe.
- Si $\overrightarrow{f}$ est une réflexion vectorielle (M_2), alors f est soit une réflexion affine (si elle admet au moins un point fixe, elle admet alors un plan de points fixes), soit une réflexion glissée si elle n'admet pas de point fixe. Il existe alors un unique plan affine P de direction $\overrightarrow{P}$ et un unique vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$ tel que $f = s_P \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_P$.
- Si $\overrightarrow{f}$ est un demi-tour vectoriel (M_3), alors f est soit un demi-tour affine (si elle admet au moins un point fixe, elle admet alors une droite de points fixes), soit un demi-tour glissé si elle n'admet pas de point fixe. Il existe alors une unique droite affine D de direction $\overrightarrow{D}$ et un unique vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$ tel que $f = s_D \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D$.
- Si $\overrightarrow{f} = -\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$ (M_4), alors f est forcément une symétrie centrale par rapport au point fixe qui est forcément unique (-1 est l'unique valeur propre, donc 1 n'est pas valeur propre).
- Si $\overrightarrow{f} = \rho_{\overrightarrow{\omega},\theta}$ (M_5) est une rotation d'axe dirigé et orienté par ω, d'angle θ alors f sera une rotation affine si elle admet au moins un point fixe ; elle admet alors une droite D de points fixes qui est son axe tel que $\overrightarrow{D} =< \overrightarrow{\omega} >$, et $\overrightarrow{\omega}$ orientant D, son angle est θ ; si Ω est un point fixe de f, on pourra noter $f = r_{\Omega,\overrightarrow{\omega},\theta}$; l'axe est alors $\Omega + < \overrightarrow{\omega} >$.

  Si f n'admet pas de point fixe, alors f est une rotation glissée (on dit plutôt un *vissage*). Il existe une unique droite affine D (dirigée par $\overrightarrow{\omega}$, qu'on décrétera orientée par ce vecteur) et un unique vecteur $\overrightarrow{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{\omega}$ puisqu'il appartient à $\overrightarrow{D}$, tel que $f = r_{\Omega,\overrightarrow{\omega},\theta} \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ r_{\Omega,\overrightarrow{\omega},\theta}$.
- Si $\overrightarrow{f} = \alpha_{\overrightarrow{\omega},\theta}$, alors il est facile de voir que M_6 n'admet que -1 comme valeur propre réelle (les valeurs propres complexes d'un bloc R_θ sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$), donc f admet forcément un point fixe unique, et on dit que f est une antirotation affine (notée, par exemple $a_{\Omega,\overrightarrow{\omega},\theta}$) si Ω est le point fixe.

Il est classique de considérer les demi-tours comme des rotations d'angle π, ça n'a pas d'inconvénient ; remarquons simplement que changer l'orientation de l'axe d'un demi-tour ne change rien à sa nature : c'est normal puisque $-\pi = \pi[2\pi]$. De même, une rotation d'angle nul est l'identité, elle admet toute droite (et toute orientation) comme axe.

Dans le même ordre d'idée, une antirotation de centre Ω, d'angle π est la symétrie centrale de centre Ω, ceci quel que soit l'axe, tandis qu'une antirotation d'angle nul, d'axe D est (quelle que soit l'orientation de cette droite) la réflexion par rapport à $\Omega + \overrightarrow{D}^\perp$.

5.4.3 Détermination des éléments d'une isométrie affine en dimension 3

D'une façon générale, on a vu qu'on devait déjà déterminer la nature (et si possible les éléments) de la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de l'isométrie affine f qu'on étudie. Ensuite,

- si on est dans une catégorie où le point fixe est unique, pas de problème : on a soit une symétrie centrale (par rapport au centre qui est l'unique point fixe), soit une antirotation affine, dont les éléments sont le point fixe et les éléments de la partie linéaire) ;
- si la partie linéaire est une symétrie (forcément orthogonale), le plus simple est de déterminer $f \circ f$ qui donnera l'identité si f est une symétrie (orthogonale) affine par rapport à l'ensemble des points fixes qu'on détermine à ce moment, ou $t_{2\overrightarrow{u}}$ si f est une symétrie glissée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ (voir le raisonnement fait en dimension 2, au § **5.3.5** p. 125) ; ensuite $s = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$ donne la symétrie orthogonale telle que $f = s \circ t = t \circ s$, avec $t = t_{\overrightarrow{u}}$; on détermine les éléments de s : il faut chercher l'ensemble de ses points fixes ;
- si la partie linéaire est une rotation, la détermination de $f \circ f$ n'a pas d'intérêt ; on a déterminé l'axe $\overrightarrow{E_1}$ de la rotation vectorielle $\overrightarrow{f}$; on détermine alors l'image A' par f d'un point quelconque A ; en général, le plus simple est de déterminer $O' = f(O)$, pour O qui est l'origine du repère dans lequel on travaille ; on cherche alors le projeté orthogonal $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{AA'}$ (ou le plus souvent de $\overrightarrow{OO'}$) : en application du théorème 5.11 (p. 119) et surtout de sa démonstration, c'est ce vecteur $\overrightarrow{u} = p_{\overrightarrow{E_1}}(\overrightarrow{AA'})$ qui est le vecteur de glissement ; ensuite, il n'y a plus qu'à déterminer un point fixe Ω de la rotation $r = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$ qui est telle que $f = t \circ r = r \circ t$: l'axe de r est $\Omega + \overrightarrow{E_1}$.

5.5 Exercices

Exercice 5.1.

1° Démontrer que la norme euclidienne $\|.\|$ associée à un produit scalaire est une norme. On établira l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer l'inégalité triangulaire.

2° Démontrer la « 2ème inégalité triangulaire » dans un espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{E}$, à savoir, pour tous $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \overrightarrow{E}$, on a $\left| \|\overrightarrow{x}\| - \|\overrightarrow{y}\| \right| \leqslant \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|$.

Exercice 5.2.

Soit $\mathbf{x} = (\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_k})$ une famille de vecteurs *non nuls* d'un espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{E}$. On suppose que les vecteurs $\overrightarrow{x_i}$ sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire que si $i \neq j$, avec $1 \leqslant i \leqslant k$ et $1 \leqslant j \leqslant k$, alors $\overrightarrow{x_i} \cdot \overrightarrow{x_j} = 0$ (on dit que la famille $\mathbf{x}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls). Montrer que la famille $\mathbf{x}$ est libre.

Exercice 5.3.

Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel euclidien, et soit $(\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k})$ une famille libre de k vecteurs de $\overrightarrow{E}$.

On pose $\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{a_1}$ et pour $2 \leqslant i \leqslant k$, on pose $\overrightarrow{b_i} = \overrightarrow{a_i} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\overrightarrow{a_i} \cdot \overrightarrow{b_j}}{\|\overrightarrow{b_j}\|^2} \overrightarrow{b_j}$.

1° Montrer par récurrence sur k
- que la famille $\mathbf{b} = (\overrightarrow{b_i})_{1 \leqslant i \leqslant k}$ est orthogonale,
- que $< \overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k} >=< \overrightarrow{b_1}, \dots, \overrightarrow{b_k} >$
- et que $\overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_k} = \overrightarrow{b_k}^2 > 0$.

2° Soit $\mathbf{c} = (\overrightarrow{c_i})_{1 \leqslant i \leqslant k}$ la famille de vecteurs construite à partir de $\mathbf{b}$ ainsi : $\overrightarrow{c_i} = \frac{1}{\|\overrightarrow{b_i}\|} \overrightarrow{b_i}$.

Montrer que $\mathbf{c}$ est une famille orthonormale.

3° Soit $\mathbf{d} = (\overrightarrow{d_i})_{1 \leqslant i \leqslant k}$ une famille de k vecteurs qui vérifie :
- $\mathbf{d}$ est une famille orthonormale ;
- $\forall j$ tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, on a $< \overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_j} >=< \overrightarrow{d_1}, \dots, \overrightarrow{d_j} >$;
- $\forall j$ tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, on a $\overrightarrow{a_j} \cdot \overrightarrow{d_j} > 0$.

Montrer que $\mathbf{d} = \mathbf{c}$.

Exercice 5.4.

1° Démontrer la formule 5.1 p. 110, qui donne l'expression de l'image d'un vecteur par une projection orthogonale : $\pi_{\overrightarrow{F}}(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{k} (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b_i}) \overrightarrow{b_i}$ où $(\overrightarrow{b_1}, \dots, \overrightarrow{b_k})$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{F}$.

2° Justifier les formules qui suivent, dans le cours :

$$\pi_{\overrightarrow{F}^{\perp}}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - \sum_{i=1}^{k} (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b_i}) \overrightarrow{b_i} = \sum_{i=k+1}^{n} (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b_i}) \overrightarrow{b_i}.$$

3° Démontrer le résultat qui suit (application de ces formules à une droite vectorielle) :

$$\pi_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{x}) = \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u}^2} \overrightarrow{u} \qquad \text{et} \qquad \pi_{\overrightarrow{H}}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u}^2} \overrightarrow{u}$$

(avec $\pi_{\overrightarrow{u}} = \pi_{<\overrightarrow{u}>}$ et $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{u}^{\perp}$).

4° Reprendre les trois premières questions en remplaçant les projections orthogonales par des symétries orthogonales ? Que deviennent les formules ?

Exercice 5.5.
Démontrer qu'une application orthogonale est linéaire et injective (voir cours p. 111).

Exercice 5.6.

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{E}$. On suppose que deux des trois affirmations suivantes sont vraies :

- u est involutive ($u \circ u = \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$) ;
- u est orthogonale ;
- u est symétrique.

Montrer que la troisième affirmation est également vraie et que u est une symétrie orthogonale.

(On pourra utiliser la matrice A de u dans une base orthogonale $\mathcal{B}$ fixée de $\overrightarrow{E}$).

Exercice 5.7.
Le but de cet exercice est de montrer que toute isométrie vectorielle d'un espace vectoriel euclidien de dimension n se décompose en un produit de m réflexions vectorielles avec $m \leqslant n$ (résultat annoncé dans la remarque qui suit le théorème 5.9 p. 117).

1° Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs normés (unitaires) de l'espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{E}$ de dimension n. On suppose que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{v}$. Montrer qu'il existe une unique réflexion vectorielle σ (une réflexion vectorielle est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan) telle que $\sigma(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$.

2° Soit φ une transformation orthogonale d'un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$. Pour tout $i \in [1, n]$, on pose $\overrightarrow{e'_i} = \varphi(\overrightarrow{e_i})$.
Que peut-on dire de la famille $(\overrightarrow{e'_1}, \dots, \overrightarrow{e'_n})$?

3° Soit $\mathcal{E}_0 = \left\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \overrightarrow{e'_i} \neq \overrightarrow{e_i}\right\}$ et soit $N_0 = \operatorname{card} \mathcal{E}_0$.

3° a) Que peut-on dire de φ si $N_0 = 0$?

3° b) On suppose $N_0 \neq 0$; que peut-on dire de $\mathcal{E}_0$? Soit $k \in \mathcal{E}_0$. Déterminer une transformation orthogonale φ_1 et une réflexion vectorielle σ_1 telle que $\varphi_1 = \sigma_1 \circ \varphi$ et telle que φ_1 laisse invariant strictement plus de vecteurs de la base $\mathcal{B}$ que φ. (En suivant le plan de la démonstration du théorème 5.9 p. 117, on posera $\mathcal{E}_1 = \left\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \varphi_1(\overrightarrow{e_i}) \neq \overrightarrow{e_i}\right\}$, $N_1 = \operatorname{card} \mathcal{E}_1$, et si $N_1 \neq 0$, on prendra $k_1 \in \mathcal{E}_1$; on montrera que $k \notin \mathcal{E}_1$, que $\mathcal{E}_1 \subsetneq \mathcal{E}_0$, que $N_1 < N_0$ et que lorsque k_1 est défini, que $k_1 \neq k_0$. Que se passe-t-il si $N_1 = 0$?)

4° Terminer la démonstration du résultat demandé.

Exercice 5.8.

Soit $t = t_{\overrightarrow{u}}$ (avec $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$) une translation d'un espace affine euclidien $(E, \overrightarrow{E})$ de dimension n. Démontrer qu'on peut trouver deux hyperplans affines H_1 et H_2 tels que $t = s_{H_1} \circ s_{H_2}$. Quelles conditions vérifient les hyperplans H_1 et H_2 ? Y a-t-il unicité ?

Exercice 5.9.

Le but de cet exercice est de démontrer la proposition 5.10 p. 118 :

1° L'ensemble $\mathcal{I}_\Omega(E)$ des isométries de E admettant le point Ω comme point invariant est un sous-groupe de $\mathcal{I}(E)$.

2° $\mathcal{I}_\Omega(E)$ est un groupe isomorphe à $\mathcal{O}(\overrightarrow{E})$.

3° $\mathcal{I}(E)$ est le produit semi-direct de $\mathcal{T}(E)$ par $\mathcal{I}_\Omega(E)$.

Exercice 5.10.

Soit φ une transformation orthogonale d'un espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{E}$ et soit λ une valeur propre de φ. Montrer que $|\lambda| = 1$.

Exercice 5.11.

On se place dans un plan vectoriel euclidien orienté $\overrightarrow{E}$.

1° Démontrer l'affirmation banale suivante, concernant les angles droits p. 124 :
Si deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont orthogonaux, alors leur angle est $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2° Démontrer la réciproque : si deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont tels que $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 5.12.

Démonstration de la proposition 5.14 p. 125 ; dans tout cet exercice, on se place dans un plan affine euclidien orienté $(E, \overrightarrow{E})$.

1° Soit $r = r_{\Omega,\theta}$. Soit D une droite passant par Ω.

1° a) Soit D' la droite passant par Ω telle que $(\widehat{D, D'}) = -\frac{\theta}{2}[\pi]$. Montrer que $r = s_D \circ s_{D'}$.

1° b) Soit Δ une droite telle que $r = s_D \circ s_\Delta$. Montrer que $\Delta = D'$.

1° c) Montrer qu'il existe une unique droite D'' telle que $r = s_{D''} \circ s_D$. Quelle est cette droite D'' ?

2° Soient D et D' deux droites sécantes de E. Montrer que $s_{D'} \circ s_D$ est une rotation r. On précisera le centre et l'angle de r.

Exercice 5.13.

1° Dans le plan affine euclidien orienté $(P, \overrightarrow{P})$, muni du repère cartésien orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'application f de E dans lui-même, définie par ses formules analytiques : $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1 \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y. \end{cases}$
Déterminer la nature et les éléments de f.

2° Même question avec g définie par $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,y + x + 1). \end{cases}$

Exercice 5.14.

Soit $s = s_\Delta$ une réflexion et $t = t_{\vec{u}}$ une translation du plan affine euclidien orienté $(E, \overrightarrow{E})$.

1° On suppose dans cette question que $\vec{u} \perp \overrightarrow{\Delta}$. Montrer que $f = s \circ t$ et $g = t \circ s$ sont des réflexions. (On utilisera le résultat de l'exercice 5.8).

2° Lorsque $\vec{u}$ est quelconque, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f = s \circ t$ soit une réflexion. (On utilisera la décomposition de $\vec{u}$ selon la somme directe $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\Delta} \oplus \overrightarrow{\Delta}^\perp$).

3° Même question avec $g = t \circ s$.

Exercice 5.15.

Dans le plan affine euclidien orienté $(E, \overrightarrow{E})$ muni du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les trois droites $D_1 : x + 2y - 1 = 0$, $D_2 : x + y - 2 = 0$ et $D_3 : 3x - y = 0$.

1° Déterminer les formules analytiques des trois réflexions $s_{D_1}, s_{D_2}, s_{D_3}$.

2° Déterminer la nature et les éléments de $f = s_{D_1} \circ s_{D_2} \circ s_{D_3}$.

3° Généralisation : soient trois droites D_1, D_2, D_3 deux à deux sécantes et non concourantes.

3° a) Quelle est la nature de $s_{D_2} \circ s_{D_3}$.

3° b) Soit D_1' la droite parallèle à D_1 passant par le point Ω d'intersection de $D_2 \cap D_3$. Montrer que $f' = s_{D_1'} \circ s_{D_2} \circ s_{D_3}$ est une réflexion s_Δ ; on précisera quelle est la droite Δ en donnant $(\widehat{D_1', \Delta})$.

3° c) En déduire la nature de $f = s_{D_1} \circ s_{D_2} \circ s_{D_3}$. En particulier on montrera que f ne peut pas être une réflexion mais est forcément une réflexion glissée, avec un vecteur de glissement non nul (on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent 5.14).

4° On propose maintenant une autre méthode, plus élégante pour démontrer le même résultat : la composée de trois réflexions par rapport à des droites formant les côtés d'un vrai triangle est toujours une réflexion glissée.

4° a) Soit $r = r_{\Omega,\theta}$ une rotation d'angle $\theta \neq 0[2\pi]$. Soit f une isométrie quelconque. Montrer que $g = f \circ r \circ f^{-1}$ est une rotation de centre $\Omega' = f(\Omega)$.

4° b) D_1, D_2, D_3 étant trois droites deux à deux sécantes, soit $r = s_{D_2} \circ s_{D_3}$. Soit Ω le point d'intersection de D_2 et D_3. Montrer que $s_{D_1} \circ r \circ s_{D_1}$ est une rotation de centre $s_{D_1}(\Omega)$.

4° c) En déduire que $s_{D_1} \circ s_{D_2} \circ s_{D_3}$ est une réflexion si et seulement si les trois droites sont concourantes.

Exercice 5.16.

1° Soit φ l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{E}$, de dimension 3, dont la matrice, dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

Montrer que φ est un endomorphisme orthogonal, et déterminer sa nature et ses éléments.

2° Même question avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$

3° Même question avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$

4° Même question avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5.17.

1° Dans l'espace affine euclidien orienté $(E, \overrightarrow{E})$, muni du repère cartésien orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère l'application f de E dans lui-même, définie par ses formules analytiques :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 1 \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ z' = \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z + 1. \end{cases}$$

Déterminer la nature et les éléments de f.

2° Même question avec f définie par $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 \\ y' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 1 \\ z' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}. \end{cases}$

3° Même question avec f définie par $\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + 4 \\ y' = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 2 \\ z' = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 2. \end{cases}$

4° Même question avec f définie par $\begin{cases} x' = \frac{1}{9}x + \frac{8}{9}y - \frac{4}{9}z - 1 \\ y' = \frac{8}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{4}{9}z - 2 \\ z' = \frac{4}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{7}{9}z + 3. \end{cases}$

Exercice 5.18.

Soit $\Gamma = ABCDA'B'C'D'$ un cube de l'espace affine euclidien $(E, \vec{E})$. On choisira un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ dans lequel les coordonnées des huit sommets sont $A(1,-1,-1)$, $B(1,1,-1)$, $C(-1,1,-1)$, $D(-1,-1,-1)$, $A'(1,-1,1)$, $B'(1,1,1)$, $C'(-1,1,1)$, $D'(-1,-1,1)$. Il est conseillé de faire une figure.

1° Justifier qu'il existe une unique application affine f qui est telle que $f(O) = O$, $f(A) = B$, $f(B) = B'$ et $f(B') = C'$.

2° Montrer que f est une isométrie.

3° Déterminer la matrice de la partie linéaire φ de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ (on cherchera d'abord $f(C')$). En déduire l'image par f de tous les sommets du cube Γ.

4° Déterminer la nature et les éléments de f.

5° Soient I, J, K, L, M, N les milieux respectifs de $[AB]$, $[BB']$, $[B'C']$, $[C'D']$, $[D'D]$, $[DA]$. Montrer, en utilisant f, que ces six points sont les sommets d'un hexagone régulier.

6° Soit s_O la symétrie centrale par rapport à O, l'origine du repère. Que peut-on dire de $s_O \circ f$ et $f \circ s_O$?

CHAPITRE 6

Coniques

6.1 Introduction

En deuxième année de licence, suite à l'étude des formes quadratiques, on étudie en général la réduction *affine*, puis la réduction *euclidienne* des coniques. Rappelons qu'une conique est en général définie comme l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan dont les coordonnées (x, y) dans un certain repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ vérifient une équation polynômiale du second degré, du type

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad \text{avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Nous allons réviser rapidement cette réduction *affine*, puis nous essaierons de comprendre en quoi l'espace universel et la géométrie projective peuvent nous aider à réduire plus efficacement les coniques. Enfin nous reverrons et nous approfondirons l'étude des coniques dans un plan euclidien, qui est le cadre dans lequel on obtient le plus de propriétés remarquables.

6.2 Coniques dans un plan affine

6.2.1 Réduction affine d'une conique

L'idée est, en identifiant un point M avec ses coordonnées dans un repère, d'écrire l'expression $\varphi(M) = \varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$ sous la forme

$$\varphi(x, y) = q(x, y) + \ell(x, y) + C.$$

avec q qui est une forme quadratique sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$: $q(x, y) = ax^2+2bxy+cy^2$, ℓ qui est une forme linéaire : $\ell(x, y) = 2dx + 2ey$, et C une constante (ici $C = f$). Ensuite on réduit la forme quadratique, en déterminant en particulier sa *signature*. Rappelons que la signature d'une forme quadratique est un couple (s, t) attaché à q tel que $s + t = r$, r étant le rang de la forme quadratique q (qui est aussi le rang de sa matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. En dimension quelconque, lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$, une forme quadratique quelconque peut toujours se décomposer sous la forme

$$q(u) = \ell_1(u)^2 + \cdots + \ell_s(u)^2 - \ell_{s+1}(u)^2 - \cdots - \ell_{s+t}(u)^2,$$

les ℓ_k étant des formes linéaires. Le choix des ℓ_k n'est pas unique, mais en revanche, on a toujours le même nombre s de carrés de formes linéaires précédés du signe $+$ et toujours le même nombre t de carrés de formes linéaires précédés du signe $-$. s est aussi la dimension maximale d'un sous espace vectoriel tel que la restriction de q à cet espace soit définie positive, alors que t est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel tel que la restriction de q à cet espace soit définie négative.
Revenons à notre contexte, q est une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension 2. Nécessairement $s + t \leqslant 2$, et en remarquant que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, si $\widetilde{\varphi} = \lambda\varphi$, $\widetilde{\varphi}(x, y) = 0$ est aussi une équation qui caractérise la conique $\mathcal{C}$, comme $-q$ est une forme quadratique de signature (t, s) si q est de signature (s, t), on peut, sans nuire à la généralité supposer que $s \geqslant t$ (si ce n'est pas le cas, on change φ en $-\varphi$).
Les valeurs de signatures possibles sont donc : $(2, 0)$; $(1, 1)$; $(1, 0)$ et c'est tout. En effet, la signature $(0, 0)$ signifierait que $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, ce qui est exclu (φ serait de degré 1).

6.2.2 Si la signature de q est $(2, 0)$ ou $(1, 1)$

Il existe deux formes linéaires indépendantes ℓ_1 et ℓ_2 telles que $q = \ell_1^2 \pm \ell_2^2$. On détermine ℓ_1 et ℓ_2 par la méthode de Gauss par exemple, et on peut poser $X = \ell_1(x, y)$ et $Y = \ell_2(x, y)$. On obtient en fait des formules de changement de *base* du type $\begin{cases} X = \alpha x + \beta y \\ Y = \gamma x + \delta y. \end{cases}$ Il faudra éventuellement savoir inverser ce système pour exprimer x et y en fonction de X et Y.
On écrit alors l'équation de la conique $\mathcal{C}$ dans la nouvelle base (en conservant provisoirement la même origine du repère), donc dans un repère $\mathcal{R}_1 = (O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$, on obtiendra toujours quelque chose sous la forme :

$$X^2 \pm Y^2 + 2d'X + 2e'Y + f = 0.$$

A priori, la constante n'a pas été modifiée par ces changements.

6.2.3 Détermination du centre

On a obtenu une équation de la conique sous une forme $\widehat{q}(X, Y) + \widehat{\ell}(X, Y) + f = 0$; l'étape suivante consiste à déterminer le centre et éliminer ainsi la partie linéaire.
En posant $X' = X + d'$ et $Y' = Y \pm e'$, c'est-à-dire en se plaçant dans le repère $\mathcal{R}_2 = (\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ (avec Ω de coordonnées $(-d', \mp e')$ dans le repère $\mathcal{R}_1$), on obtient une équation de $\mathcal{C}$ sous la forme $X'^2 \pm Y'^2 = f'$. Ω est le centre de la conique ; c'est de

façon évidente un centre de symétrie). Si on veut les coordonnées de Ω dans le repère initial $\mathcal{R}$, on peut utiliser les formules de changement de bases « inversées » vues plus haut.

Une autre méthode pour déterminer le centre d'une conique consiste à résoudre dès le départ le système (6.1) $\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = 0. \end{cases}$

On vérifie aisément que la matrice principale du système linéaire qu'on vient d'écrire est $2\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, donc dans le cas qu'on est en train d'étudier (q non dégénérée, $ac-b^2 \neq 0$ pour que la signature soit $(2,0)$ ou $(1,1)$), ce système possède un unique couple de solution, qui est exactement (x_Ω, y_Ω), coordonnées dans le repère initial $\mathcal{R}$ du centre Ω de la conique. Pour s'en convaincre, il suffit d'utiliser la parité en h et en k de la fonction $(h,k) \longmapsto \varphi(x_\Omega + h, y_\Omega + k)$ dans le calcul des dérivées partielles.

6.2.4 Réduction finale pour q de rang 2

Si la signature de q est $(2,0)$ et $f' > 0$

On est donc dans le cas où on a obtenu une équation de $\mathcal{C}$ sous la forme $X'^2 + Y'^2 = f'$. On divise cette équation par $f' > 0$, et on obtient une équation du type $X''^2 + Y''^2 = 1$: $\mathcal{C}$ est une *ellipse*.

Si la signature de q est $(2,0)$ et $f' < 0$

La conique est vide, puisqu'une somme de deux carrés ne peut pas être strictement négative.

Si la signature de q est $(2,0)$ et $f' = 0$

Ω est le seul point du plan qui vérifie l'équation de $\mathcal{C}$: on est en présence d'une conique dégénérée, dans le cas d'une *conique-point*.

Si la signature de q est $(1,1)$ et $f' \neq 0$

On a obtenu une équation du type $X'^2 - Y'^2 = f'$; il suffit de diviser par f', et en posant $X'' = \frac{X'}{\sqrt{f'}}$ et $Y'' = \frac{Y'}{\sqrt{f'}}$ si $f' > 0$, $X'' = \frac{Y'}{\sqrt{-f'}}$ et $Y'' = \frac{X'}{\sqrt{-f'}}$ si $f' < 0$, on obtient une équation du type $X''^2 - Y''^2 = 1$: $\mathcal{C}$ est une *hyperbole*.

Si la signature de q est $(1,1)$ et $f' = 0$

L'équation qu'on a obtenue pour $\mathcal{C}$ est $X'^2 - Y'^2 = 0$; elle équivaut à $X' = Y'$ ou $X' = -Y'$: on est aussi en présence d'une conique dégénérée, dans le cas de la *réunion de deux droites sécantes*.

6.2.5 Si la signature de q est $(1,0)$

C'est que $ac - b^2 = 0$, et donc $q(x,y)$ est le carré d'une forme linéaire $\ell_1(x,y)$, donc on peut écrire $\varphi(x,y) = \big(\ell_1(x,y)\big)^2 + \ell(x,y) + C$.
Il y a maintenant deux possibilités.

Si ℓ et ℓ_1 sont proportionnelles

Dans ce cas, on pose $\ell_1(x,y) = X$, on prend une autre forme linéaire pour définir Y et avoir un changement de variable tel que (X,Y) sont les coordonnées de M dans un repère $\mathcal{R}_1 = (O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$. Dans ce nouveau repère, l'équation de $\mathcal{C}$ s'écrit $X^2 + \lambda X + f = 0$. Dans tous les cas la conique est dégénérée. Si cette équation du second degré en X, admet deux racines distinctes, alors $\mathcal{C}$ est la réunion de deux droites parallèles. Si cette équation admet une racine double, $\mathcal{C}$ est une conique formée d'une seule droite (« double »). Si cette équation n'a pas de racine, $\mathcal{C}$ est vide.

Si ℓ et ℓ_1 sont des formes linéaires indépendantes

On pose $X = \ell_1(x,y)$ et $Y = -\ell(x,y) - C$, on définit ainsi un changement de coordonnées correspondant à un nouveau repère $\mathcal{R}_1 = (\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$; dans ce repère, l'équation de $\mathcal{C}$ est $X^2 = Y$, $\mathcal{C}$ est une parabole, qui n'est pas une conique dégénérée.

6.2.6 Récapitulation

Cette méthode d'étude d'une conique affine est assez chaotique : pour savoir si la conique est ou non dégénérée, on doit aller très loin dans l'étude. La signature de la forme quadratique q ne suffit pas du tout à caractériser la conique. En particulier, il est difficile, en restant dans ce cadre, de répondre aux questions suivantes :

Quelle que soit la signature de q, on peut avoir une conique dégénérée ou pas, et parfois même une conique vide : pourquoi ? D'autre part, qu'est-ce qu'une conique dégénérée ? Y en a-t-il de plusieurs sortes ? Pourquoi est-ce qu'une parabole n'est pas considérée comme une conique dégénérée, alors que q est dégénérée ? Pourquoi est-ce que la réunion de deux droites sécantes doit être considérée comme une conique dégénérée ? Et il y a trois sortes de coniques vides, sont-elles de même nature ? Difficile de répondre en restant au niveau d'une étude dans le plan affine. Il faudrait « prendre de la hauteur », c'est-à-dire, peut-être, se placer dans l'espace universel.

Bref, ce n'est pas dans le cadre affine qu'on comprend le mieux l'étude des coniques. Nous allons voir que l'utilisation de l'espace universel et un point de vue projectif permettent de beaucoup mieux comprendre les coniques et de déterminer très efficacement la nature de chaque conique sans faire tous ces calculs.

6.3 Étude des coniques dans l'espace universel et en projective

6.3.1 Homogénéisation de l'équation

L'apport fondamental de l'espace universel est la possibilité d'homogénéiser l'équation d'une conique.
On considère une conique $\mathcal{C}$, du plan affine $(E, \overrightarrow{E})$ muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, plongé dans son espace universel $\widehat{E}$, dont $\mathcal{R}$ est une base. On notera (t, x, y) les coordonnées dans $\mathcal{R}$ d'un élément de $\widehat{E}$.
L'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}$ est de la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad \text{avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Mais le plan affine E est caractérisé, dans l'espace universel $\widehat{E}$, par l'équation $t = 1$. Donc un point M appartient à la conique $\mathcal{C}$ si et seulement si ses coordonnées *augmentées* (t, x, y) vérifient les deux équations :

$$\begin{cases} ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxt + 2eyt + ft^2 = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

Sous cette forme, on voit que l'équation principale qui caractérise $\mathcal{C}$ est sous la forme $Q(x, y, t) = 0$, Q étant une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$, de matrice $\widetilde{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$.
La forme quadratique q, étudiée dans le cadre affine, est la restriction à $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ de Q ; la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ de q est la sous-matrice de $\widetilde{\mathrm{M}}$ formé du bloc 2×2 en haut à gauche.

Remarque : Il y a donc deux formes quadratiques Q et q associées à une même conique $\mathcal{C}$:

- q définie sur $\mathbb{R}^2$ par $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$; q est la forme quadratique *secondaire* attachée à $\mathcal{C}$;
- Q définie sur $\mathbb{R}^3$ par $Q(x, y, t) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxt + 2eyt + ft^2$; Q est la forme quadratique *principale* attachée à $\mathcal{C}$.

6.3.2 Le cône isotrope de Q

Dans ce cadre aussi, nous commencerons par étudier la forme quadratique Q. L'ensemble des triplets (x, y, t) de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient $Q(x, y, t) = 0$ caractérise le *cône isotrope* de Q. Rappelons qu'un vecteur u est isotrope pour une forme quadratique Q lorsque $Q(u) = 0$. L'ensemble des vecteurs isotropes pour une forme quadratique est un cône $\widetilde{\mathcal{C}}$, en ce sens que si $u \in \widetilde{\mathcal{C}}$, alors, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a aussi $\lambda u \in \widetilde{\mathcal{C}}$. Il est clair que le cône isotrope de Q est aussi le cône isotrope de μQ, quel que soit $\mu \in \mathbb{R}$.

6.3.3 La signature de Q

Puisque Q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$, la signature de Q est un couple (s,t) avec $s+t \leqslant 3$. D'après la remarque faite au § précédent, on peut toujours supposer que $s \geqslant t$, quitte, si ce n'est pas le cas, à remplacer Q par $-Q$, ce qui ne change pas le cône isotrope.
Donc les valeurs possibles pour Q sont : $(3,0)$; $(2,1)$ (qui correspondent à Q de rang 3, donc non dégénérée) ; $(2,0)$, $(1,1)$; $(1,0)$ (lorsque Q est dégénérée).

Lorsque la signature de Q est $(3,0)$, c'est que Q est *définie positive*, et dans ce cas, son cône isotrope est réduit à $\{(0,0,0)\}$, et ce cône isotrope n'a pas d'intersection avec E (aucun point $M(1,x,y)$ ne vérifie $Q(x,y,1)=0$), $\mathcal{C}$ est alors une conique vide (mais non dégénérée, c'est un peu paradoxal), donc l'étude de ce cas est sans grand intérêt.

Lorsque la signature de Q est $(2,1)$, c'est qu'on peut écrire

$$Q(x,y,t) = \ell_1(x,y,t)^2 + \ell_2(x,y,t)^2 - \ell_3(x,y,t)^2,$$

(ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3) étant un triplet de formes linéaires *indépendantes.*
On pose alors $X=\ell_1(x,y,t)$, $Y=\ell_2(x,y,t)$ et $Z=\ell_3(x,y,t)$, et on définit ainsi de nouvelles coordonnées dans $\widehat{E}$, correspondant à un nouvelle base $\mathcal{R}_1$. Dans cette base, le cône isotrope $\widetilde{\mathcal{C}}$ de Q est caractérisé par l'équation $X^2+Y^2-Z^2=0$, (on retrouve l'équation réduite classique d'un cône). C'est le cas intéressant, des coniques non dégénérées. La conique $\mathcal{C}$ est l'intersection de ce cône $\widetilde{\mathcal{C}}$ avec le plan affine E. Nous étudierons les différents cas possibles un peu plus loin.

Lorsque Q est dégénérée (lorsque la signature de Q vaut $(2,0)$ ou $(1,1)$ ou $(1,0)$), la conique $\mathcal{C}$ est dégénérée dans tous les cas, et parfois vide et dégénérée.

En résumé : Les coniques intéressantes sont celles qui correspondent à une forme quadratique Q de signature $(2,1)$.
Les autres coniques sont soit vides, soit représentables avec des droites, ce qui n'est pas très nouveau. L'outil « espace universel » permet aussi d'interpréter et d'étudier les coniques vides ou dégénérées, mais nous ne développerons pas cet aspect.

6.3.4 Coniques non dégénérées

Lorsque Q est de signature $(2,1)$, la restriction q de Q à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{0\}$ (identifié à $\mathbb{R}^2$) peut avoir trois signatures :
q peut être non dégénérée, et donc de signature $(2,0)$ ou $(1,1)$, cas qui correspondent, comme on l'a vu plus haut respectivement aux ellipses et aux hyperboles, ou q peut (paradoxalement) être dégénérée, et dans ce cas forcément de signature $(1,0)$, et $\mathcal{C}$ est dans ce cas une parabole.

6.3.5 Coniques en projective

En projective, il n'y a en fait qu'une sorte de conique non dégénérée. Soit $P=\mathbb{P}(V)$ un plan projectif. En considérant que l'espace vectoriel V de dimension 3 dont est issu P est l'espace universel $\widehat{E}$ ci-dessus, une conique projective est formée des droites vectorielles (en projective, les points sont des droites vectorielles) incluses dans le cône isotrope d'une forme quadratique Q de signature $(2,1)$. Dans toute carte affine de P, la conique projective est évidemment représentée par une conique affine, qui sera selon les cas une ellipse, une hyperbole ou une parabole, mais dans un point de vue projectif, il n'y a pas de différence entre ces trois sortes de coniques. Plus précisément, on peut toujours trouver des changements de carte affine qui transforment une conique d'un de ces trois types en une conique d'un autre type.

En revanche, de même qu'un bipoint n'a pas de milieu en géométrie projective, une conique en projective n'a ni centre ni foyer : c'est uniquement dans une carte affine qu'on lui trouvera (éventuellement) un centre, mais qui ne restera pas le même en cas de changement de carte.

Complément : polarité par rapport à une conique

La forme quadratique Q étant non dégénérée, on peut définir une notion d'orthogonalité liée à Q. Plus précisément, si $A = p(u)$ et $B = p(v)$ sont deux points projectifs (rappelons les notations que nous avons utilisées au chapitre 4 : $A = p(u)$ signifie que A est la droite vectorielle engendrée par le vecteur u de V), A et B sont Q-orthogonaux lorsque $\phi(u,v) = 0$, ϕ étant la forme bilinéaire symétrique dont est issue Q, c'est-à-dire la forme polaire de Q.

On définit alors la droite polaire d'un point $A = p(u)$ (par rapport à une conique) comme étant la droite projective $\Delta = \mathbb{P}(F)$, telle que F est le plan vectoriel orthogonal (au sens de Q) de u, c'est-à-dire que $F = \{v \in V \mid \phi(u,v) = 0\}$. De même, si $\Delta = \mathbb{P}(F)$ est une droite projective, son point polaire est la droite vectorielle $A = \{u \in V \mid \forall v \in F, \phi(u,v) = 0\}$.

Bien sûr, en géométrie affine (dans un plan affine $(E, \overrightarrow{E})$), on peut définir également la polarité, en passant par l'espace projectif $\mathbb{P}(\widehat{E})$ dont le plan affine est la carte.

Cette notion de polarité permet de nombreux prolongements. Par exemple, la tangente à une conique en un point M appartenant à cette conique n'est rien d'autre que la polaire de ce point M par rapport à cette conique. En effet, si $M = p(u)$, il est clair que le fait d'appartenir à la conique $\mathcal{C}$ signifie exactement que $Q(u) = 0$, donc que $\phi(u,u) = 0$, donc que u est polaire à lui-même.

La polaire d'un point $M = p(u)$ qui appartient à $\mathcal{C}$ ne contient pas d'autre point de $\mathcal{C}$. En effet, si un point $N = p(v)$ était un point de $\mathcal{C}$ qui appartenait à la polaire de M, on aurait : $Q(u) = Q(v) = \phi(u,v) = 0$, donc la droite projective (MN) serait incluse dans $\mathcal{C}$. C'est impossible, cela signifierait que la restriction de Q au plan vectoriel $< u,v >$ serait nulle, et la matrice de Q dans une base complétée (u,v,w) aurait un bloc 2×2 de zéros en haut à gauche, son déterminant serait nul, ce qui est impossible puisque Q n'est pas dégénérée.

On sait qu'il existe des bases orthogonales pour une forme quadratique non dégénérée. Si (u,v,w) est une telle base, alors les trois points $A = p(u)$, $B = p(v)$ et $C = p(w)$

forment ce qu'on appelle un *triangle autopolaire*, en ce sens que chaque côté de ce triangle est la droite polaire du troisième sommet.

6.4 Coniques dans un plan euclidien

Lorsqu'on réduit une conique dans un plan euclidien, tout ce qu'on a fait auparavant reste valable, en particulier quant à la nature des coniques rencontrées (dégénérées ou non, ellipse, hyperbole ou parabole). Mais ce qui change, c'est qu'on ne s'autorise plus que des changements de repères *orthonormés*. Voyons la démarche usuelle.

6.4.1 Conique propre dans le cadre euclidien

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal et $\mathcal{C}$ la conique d'équation cartésienne

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

Nous supposons que la conique définie par cette équation est une *conique propre* (ou non dégénérée), c'est à dire une ellipse, une hyperbole ou une parabole (nous écartons les cas particuliers où la courbe est réduite à une droite, un point, deux droites ...). En d'autres termes, nous avons pu vérifier que la signature de la forme quadratique Q de matrice $\widetilde{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$ était $(2,1)$ (ou $(1,2)$, d'ailleurs, ce n'est pas gênant). Une façon de faire cette vérification tout à fait dans l'esprit d'un espace euclidien, est de vérifier que cette matrice *symétrique* réelle, qui a donc toujours trois valeurs propres réelles, $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_3$ n'a aucune valeur propre nulle, et n'a pas des valeurs propres toutes du même signe : il est nécessaire qu'on ait deux valeurs propres négatives et une positive : $\mu_1 \leqslant \mu_2 < 0 < \mu_3$ (signature $(1,2)$) ou deux valeurs propres positives et une négative : $\mu_1 < 0 < \mu_2 \leqslant \mu_3$ (signature $(2,1)$)

Nous ne pourrons pas réduire autant l'équation que dans le cas affine.

6.4.2 Réduction de l'équation cartésienne dans un repère orthonormal

Voici la démarche utilisée pour cette réduction euclidienne.

Soit q la forme quadratique associée à la conique qui a pour matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$: $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Cette matrice est symétrique, et admet deux valeurs propres réelles $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, les sous-espaces propres associés sont orthogonaux, et il existe donc une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, dans laquelle la matrice de q est $\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ puisque par hypothèse $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, donc q est non nulle.

La matrice de passage P de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à la base de vecteurs propres est orthogonale (matrice de passage entre deux bases orthonormales). Elle vérifie donc ${}^t\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}$.

On en déduit que $\mathrm{M}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}\,\mathrm{P} = {}^t\mathrm{P}\mathrm{M}\,\mathrm{P}$. L'équation de la conique dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est donc de la forme

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f = 0 \quad (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$$

L'expression de la forme quadratique associée à l'équation de la conique est, dans la base de vecteurs propres $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$.

- Si $\lambda_1\lambda_2 > 0$ (valeurs propres de même signe) (pour la matrice M, c'est facile à vérifier : il faut et il suffit que son déterminant soit strictement positif, puisque $\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{M}') = \lambda_1\lambda_2 = ac - b^2$), alors $\mathcal{C}$ est une ellipse ;
- si $\lambda_1\lambda_2 < 0$ (valeurs propres de signes opposés) ($\lambda_1\lambda_2 = ac - b^2 < 0$), alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole ;
- si $\lambda_1\lambda_2 = 0$ (l'une des valeurs propres est nulle) ($\lambda_1\lambda_2 = ac - b^2 = 0$), alors $\mathcal{C}$ est une parabole.

On effectue un dernier changement d'origine (comme c'était le cas en géométrie affine) pour éliminer les termes $2d'x$ et $2e'y$ (on n'obtient pas une conique vide ni dégénérée, puisqu'on a supposé qu'on avait une conique propre).

Remarque : Il était possible de déterminer le centre et de faire un changement de repère par translation dès le début, à condition qu'on soit en présence d'une conique à centre (ellipse ou hyperbole) ($ac - b^2 \neq 0$), en résolvant le système (6.1), qu'on a vu au § **6.2.3**, (p. 141).

On divise à présent par le terme constant *non nul*, pour une conique à centre, on fait un dernier changement de variable par translation pour éliminer le terme constant si on a une parabole, et on obtient l'équation réduite (en géométrie euclidienne) donnée par la proposition suivante :

Proposition 6.1 Soit $\mathcal{C}$ une conique propre.
- Si $\mathcal{C}$ est une ellipse, il existe un repère orthonormal dans lequel $\mathcal{C}$ a une équation réduite de la forme $\dfrac{X^2}{A^2} + \dfrac{Y^2}{B^2} = 1 \quad (A > 0, B > 0)$. Si $A = B$, $\mathcal{C}$ est un cercle.
- Si $\mathcal{C}$ est une hyperbole, il existe un repère orthonormal dans lequel $\mathcal{C}$ a une équation réduite de la forme $\dfrac{X^2}{A^2} - \dfrac{Y^2}{B^2} = 1$ $(A > 0, B > 0)$.
- Si $\mathcal{C}$ est une parabole, il existe un repère orthonormal dans lequel $\mathcal{C}$ a une équation réduite de la forme $Y^2 = 2pX \quad p \neq 0$.

La seule différence avec le cas affine est qu'on pouvait ramener les coefficients de x et y à 1 par un dernier changement de repère qui changeait l'unité. Cette transformation n'est plus possible puisqu'on cherche à rester dans un repère orthonormal.

Notons aussi que lorsque les valeurs propres sont égales, l'équation de la courbe peut se mettre dans n'importe quel repère sous la forme $x^2 + y^2 + 2\delta x + 2\varepsilon y + \kappa = 0$, la courbe rentre dans la catégorie des ellipses, mais c'est plus précisément un cercle.

On remarque que l'origine du repère est unique, en revanche, le repère ne l'est pas. On peut échanger les vecteurs de base par l'homothétie de rapport -1 ou par symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$.

Détaillons les calculs sur un exemple.

Exemple : $\mathcal{C}$ est la conique d'équation $\frac{5}{2}x^2 + \sqrt{3}xy + \frac{3}{2}y^2 + 2x - 2\sqrt{3}y - 1 = 0$ dans le repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Un calcul élémentaire montre que la forme quadratique principale Q de cette conique a une matrice $\widetilde{\mathrm{M}}$ de déterminant -15 et de trace 3. $\widetilde{\mathrm{M}}$ a donc deux valeurs propres positives et une négative et $\mathcal{C}$ n'est pas dégénérée.

Considérons la forme quadratique secondaire q de matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Les valeurs propres de M sont 1 et 3, une base orthonormale de vecteurs propres associés respectivement à ces valeurs est $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, la matrice de passage étant $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = {}^t\mathrm{P}\,\mathrm{M}\,\mathrm{P}$ est la matrice de q dans la nouvelle base.
Notons (x', y') les nouvelles coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Les relations entre nouvelles et anciennes coordonnées s'écrivent $\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \end{cases}$
L'expression de la forme quadratique associée à la conique est directement dans la nouvelle base $x'^2 + 3y'^2$ (cela évite de retravailler sur les carrés), l'équation de la conique dans le nouveau repère est alors :

$$x'^2 + 3y'^2 + 2(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y') - 2\sqrt{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y') - 1 = 0$$

soit en réduisant $x'^2 + 3y'^2 + 4x' - 1 = 0$.
Nous allons maintenant procéder à un changement d'origine pour éliminer les termes du premier degré en écrivant l'équation : $(x' + 2)^2 + 3y'^2 - 5 = 0$.

Posons $\begin{cases} X = x' + 2 \\ Y = y'. \end{cases}$
Le nouveau repère est alors $(A, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, A étant le point de coordonnées $x' = -2$, $y' = 0$ dans le repère précédent.
L'équation de la conique dans ce repère est réduite :

$$\frac{1}{5}X^2 + \frac{3}{5}Y^2 = 1 \iff \frac{X^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1.$$

Cette réduction est « efficace » mais un peu artificielle, nous allons donc aborder à présent le problème sous forme géométrique.

6.5 Définition des coniques par foyer et directrice

Nous sommes toujours dans le cadre d'un plan affine euclidien $(E, \vec{E})$.
Dans tout ce paragraphe, D est une droite du plan et F est un point n'appartenant pas à D. e est un nombre réel strictement positif. Nous allons étudier l'ensemble Γ des points M vérifiant $\dfrac{MF}{\mathrm{d}(M,D)} = e$, où $\mathrm{d}(M,D)$ représente la distance du point M à la droite D.

La droite D s'appelle *directrice* de Γ et e est l'*excentricité* de Γ.

On appelle *intérieur* (resp. *extérieur*) de Γ l'ensemble des points M vérifiant

$$MF - e\,\mathrm{d}(M,D) < 0 \text{ (resp. } MF - e\,\mathrm{d}(M,D) > 0).$$

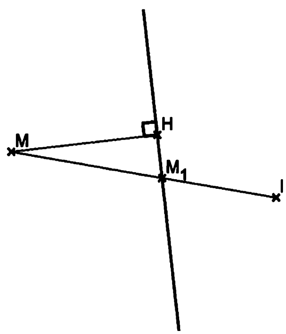
6.5.1 Propriétés générales

Proposition 6.2 La perpendiculaire à D passant par F (appelée *axe focal*) est un axe de symétrie de Γ.
Si $e \leqslant 1$, Γ et son intérieur sont contenus dans le demi-plan de frontière D contenant F.

Preuve Soit M un point du plan, H son projeté orthogonal sur D. Soit Δ la droite orthogonale à D passant par F et s la symétrie orthogonale par rapport à Δ. Soit M' l'image de M par s et soit H' le projeté orthogonal de M sur D.
H' est l'image de H par s (propriétés élémentaires du rectangle et théorème des milieux), la symétrie conserve les distances donc $MH = M'H'$ et $MF = M'F$.

On en déduit que $\dfrac{MF}{\mathrm{d}(M,D)} = \dfrac{M'F}{\mathrm{d}(M',D)}$ d'où $M \in \Gamma \iff M' \in \Gamma$.
Γ est donc invariante par la symétrie orthogonale d'axe Δ.

Soit M un point du demi-plan limité par D ne contenant pas F. Notons H le projeté orthogonal de M sur D et M_1 l'intersection du segment $[MF]$ avec D (M et F sont de part et d'autre de D).



$MH \leqslant MM_1$ (propriété du projeté orthogonal) et $MM_1 < MF$, dont $\dfrac{MF}{MH} > 1$. La courbe Γ obtenue pour $e < 1$ ne contient donc aucun point du demi-plan délimité par D et ne contenant pas le point F. Elle est donc située dans le demi-plan délimité par D et contenant le point F. □

Dans la suite du paragraphe, nous appellerons Δ l'axe focal et K le point d'intersection de l'axe focal et de D.

Proposition 6.3 (Sommets) Si $e = 1$, Γ rencontre l'axe focal en un unique point qui est le milieu de $[KF]$.
Si $e \neq 1$, l'axe focal rencontre Γ en deux points.

Preuve Un point d'intersection de Γ et de l'axe focal Δ est un point de Δ qui vérifie $MF = e\,MK$ (en effet, K est alors le projeté orthogonal de M sur D et $MK = \mathrm{d}(M, D)$.)

$$MF = eMK \iff MF^2 - e^2MK^2 = 0 \iff (\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MK}) \cdot (\overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MK}) = 0.$$

Si $e \neq 1$, nous pouvons introduire le barycentre A de $(F, 1), (K, e)$ ainsi que le point A', barycentre de $(F, 1), (K, -e)$.
L'égalité précédente équivaut à $(1 - e^2)\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = 0 \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = 0$.
Les points MAA' sont alignés, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = 0$ si et seulement si $M = A$ ou $M = A'$. Lorsque $e \neq 1$, il existe donc exactement deux points d'intersection entre Γ et Δ, définis de façon barycentriques.
Si $e = 1$, le point A' n'existe pas et $\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{KF}$, le point A est le milieu de $[FK]$
$M \in \Gamma \iff 2\overrightarrow{KF} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$. Les points étant alignés, c'est équivalent à $M = A$.
Lorsque $e = 1$, l'unique point d'intersection entre Γ et Δ est donc le milieu de $[KF]$.□

Les points d'intersection de Γ et de l'axe focal sont appelés *sommets* de Γ. Remarquons qu'il existe toujours un sommet de Γ dans le segment $[KF]$.

6.5.2 Étude du cas $e \neq 1$

Il y a donc deux sommets, A et A'.
Le cercle de diamètre $[AA']$ avec les notations précédentes est appelé *cercle principal* de Γ.

Proposition 6.4 Dans le cas où $e \neq 1$, soit A le sommet de Γ appartenant au segment $[KF]$ ($\overrightarrow{AF} = -e\overrightarrow{AK}$). Soit O le milieu des deux sommets de Γ :

$$\overrightarrow{OF} = e^2\overrightarrow{OK}; \quad \overrightarrow{OF} = \frac{e^2}{e^2 - 1}\overrightarrow{KF}; \quad \overrightarrow{OA} = \frac{1}{e}\overrightarrow{OF}$$

Preuve Ces relations s'obtiennent de façon très simple en exploitant les définitions barycentriques des sommets de Γ vues lors de la proposition précédente.
Transcrivons les relations barycentriques en écriture dans l'espace universel.

$$A = \frac{1}{1+e}F + \frac{e}{1+e}K,$$

$$A' = \frac{1}{1-e}F - \frac{e}{1-e}K$$

et

$$O = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A'.$$

On en déduit que $O = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+e}F + \frac{e}{1+e}K\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e}F - \frac{e}{1-e}K\right)$.
Soit $O = \frac{1}{1-e^2}F - \frac{e^2}{1-e^2}K$. O est donc le barycentre de $(F, 1), (K, -e^2)$.
Cela justifie la première égalité, et aussi la deuxième en écrivant la propriété universelle des barycentres à partir de F.
Pour retrouver la troisième égalité, on peut faire le calcul suivant, dans l'espace universel, qui permet d'éliminer K dans les expressions liant A et A' à F et K :

$$\begin{cases} A = \frac{F+e\,K}{1+e} \\ A' = \frac{F-e\,K}{1-e} \end{cases} \iff \begin{cases} (1+e)A = F + e\,K \\ (1-e)A' = F - e\,K \end{cases}$$

$$\implies (1+e)A + (1-e)A' = 2F \iff 2O + e(A - A') = 2F$$

$$\implies e\,\overrightarrow{A'A} = 2\overrightarrow{OF} \iff \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{e}\overrightarrow{OF},$$

ce qui est le résultat souhaité puisque, O étant le milieu de $[AA']$, on a $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$.□

On pose traditionnellement $OA = a$, $OF = c$ et $b = \sqrt{|c^2 - a^2|}$.

Proposition 6.5

Avec ces notations, $e = \dfrac{c}{a}$, $\quad OK = \dfrac{c}{e^2} = \dfrac{a^2}{c}$, $\quad KF = \dfrac{|c^2 - a^2|}{c} = \dfrac{b^2}{c}$.

Preuve Il suffit de traduire en termes de longueurs les relations vectorielles obtenues à la proposition précédente :

- la troisième donne $a = \dfrac{c}{e}$ donc $e = \dfrac{c}{a}$;
- la première donne $c = e^2 OK$ donc $OK = \dfrac{c}{e^2} = c\left(\dfrac{a}{c}\right)^2 = \dfrac{a^2}{c}$;
- la deuxième donne $c = \dfrac{e^2}{e^2-1}KF$ donc $KF = \dfrac{c\left(\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \dfrac{c^2 - a^2}{c} = \dfrac{b^2}{c}$.

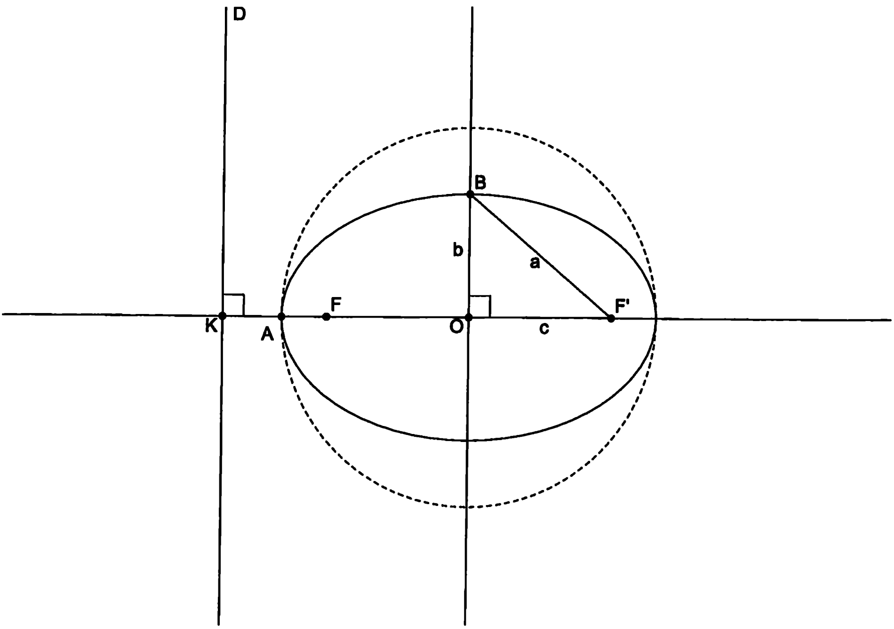
□

Avec les notations précédentes, O est toujours le milieu des sommets de Γ, et soit $\vec{\imath} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}$ un vecteur unitaire dirigeant l'axe focal, considérons un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Dans ce repère, F a pour coordonnées $(c, 0)$, K a pour coordonnées $(\frac{a^2}{c}, 0)$.
Un point $M(x, y)$ appartient à Γ si et seulement si $MF^2 - e^2MH^2 = 0$.
H étant le projeté orthogonal de M sur D, H a donc pour coordonnées $\left(\frac{a^2}{c}, y\right)$.
La condition $MF^2 - e^2MH^2 = 0$ se traduit par $(x-c)^2 + y^2 - e^2\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2 = 0$.

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma &\iff x^2 - 2cx + c^2 - \frac{c^2}{a^2}\left(x^2 - 2\frac{a^2}{c}x + \frac{a^4}{c^2}\right) \\
&\iff \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 + c^2 - a^2 \iff (a^2 - c^2)\frac{x^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2 \\
M \in \Gamma &\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.
\end{aligned}$$

Cas où $e < 1$

Proposition 6.6 Si $e < 1$, Γ est une ellipse et Γ n'est pas un cercle.



Preuve $e < 1$, donc $c < a$, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ et $b < a$.

$$M(x,y) \in \Gamma \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

C'est l'équation d'une conique. La forme quadratique est réduite et elle est somme de deux carrés, la conique est donc une ellipse.
Comme $c \neq 0 \iff a \neq b$, ce n'est pas l'équation d'un cercle. □

Remarque : Attention, sur la figure, pour respecter le texte ci-dessus, le repère doit être tourné « à l'envers » par rapport à ce qu'on fait d'habitude : le vecteur $\vec{\imath}$ (non représenté) est tourné *vers la gauche.*

On peut prouver une réciproque :

Proposition 6.7 Soit $\mathcal{E}$ une ellipse qui n'est pas un cercle. Alors il existe un réel e, $0 < e < 1$, un point F et une droite D ne passant pas par F tel que $\mathcal{E}$ soit l'ensemble des points M vérifiant $\dfrac{MF}{\mathrm{d}(M,D)} = e$.

Preuve On se place dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où $\mathcal{E}$ a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$). $\mathcal{E}$ n'est pas un cercle, donc $a \neq b$ et, quitte à changer de repère, on peut supposer $b < a$.
On pose alors $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, on introduit le point $F(c,0)$ et la droite D d'équation $x = \frac{a^2}{c}$. On pose également $e = \frac{c}{a}$.
Soit K le point d'intersection de D et de l'axe des abscisses. K a pour coordonnées $\left(\frac{a^2}{c}, 0\right)$. Le barycentre de $(F,1)$ et de (K,e) est le point $A = \frac{1}{1+e}F + \frac{e}{1+e}K$; son ordonnée est nulle, car F et K sont sur l'axe des abscisses. Son abscisse vaut :

$$x_A = \frac{ac}{c+a} + \frac{a}{c+a} = \frac{a(a+c)}{a+c} = a.$$

De même, si A' est le barycentre de $(F,1)$ et de $(K,-e)$, un calcul en tout point analogue montre que $A'(-a,0)$, donc le milieu de $[AA']$ est le point O, origine du repère. Comme $a > 0$, il est clair que $\dfrac{\overrightarrow{OA}}{OA} = \vec{\imath}$, le premier vecteur du repère.
On reprend alors les calculs et les raisonnements faits dans le sens direct :
L'ensemble des points vérifiant $\dfrac{MF}{\mathrm{d}(M,D)} = e$ admet, dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donc cet ensemble coïncide avec $\mathcal{E}$. □

Remarque : Pour identifier l'axe focal, il est primordial que $a > b$. Sinon il faut inverser les abscisses et les ordonnées dans les conclusions.
L'axe $(O, \vec{\jmath})$ est l'axe non focal de l'ellipse, c'est aussi un axe de symétrie. Le centre du repère (milieux des sommets) est centre de symétrie de l'ellipse.
Le réel a détermine le *grand axe* $2a$ de l'ellipse (le plus grand des « diamètre »), le réel b déterminer le *petit axe* $2b$ de l'ellipse (le plus petit des « diamètres »). Le « grand axe » n'est pas un axe mais un réel, dans l'équation réduite, il indique la variable (ici x) qui varie sur l'axe focal de l'ellipse.
(Dans certains ouvrages, le grand axe est le réel a, le petit axe est le réel b ; pour nous, a et b sont respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe.)

Exemple : Ainsi, l'ellipse qui admet comme équation réduite $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ admet comme demi-grand axe $a = 3$ et comme demi-petit axe $b = 2$. L'axe focal est donc l'axe des y et pour mettre l'équation sous la forme réduite présentée plus haut, il faut encore faire une symétrie pour échanger les coordonnées $(X = y, Y = x)$, l'équation devient $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$.

On remarque donc que toute courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une ellipse.
Si $a = b$, l'ellipse est un cercle.
Si $a \neq b$, l'ellipse possède une excentricité e, un foyer F, un axe focal, une directrice, un grand axe et un petit axe et peut être considérée comme l'ensemble des points M vérifiant $\frac{MF}{\mathrm{d}(M, D)} = e$.

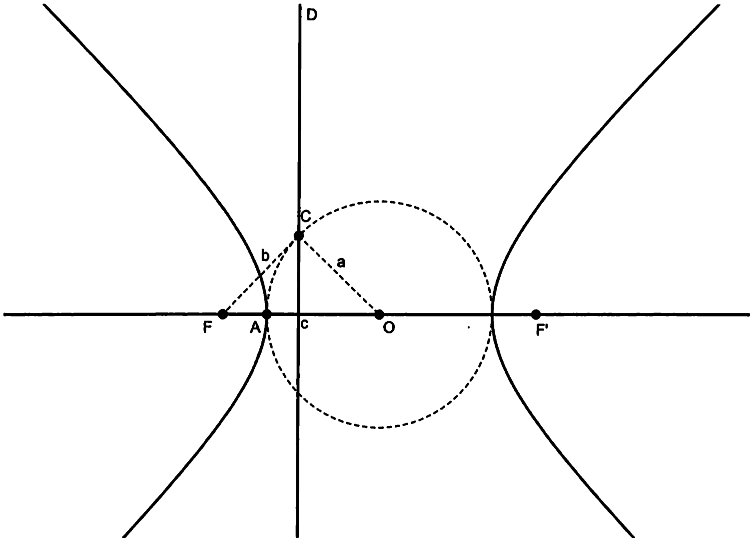
Cas où $e > 1$

On énonce en une seule fois la propriété et sa réciproque :

Proposition 6.8 Si $e > 1$, Γ est une hyperbole.
Réciproquement, pour toute hyperbole il existe un réel $e > 1$, une droite D et un point F n'appartenant pas à D telle que l'hyperbole soit l'ensemble des points M vérifiant $\frac{MF}{\mathrm{d}(M, D)} = e$.

Preuve $M \in \Gamma \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

Comme $e > 1$, $c > a$, on a donc $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ et l'équation de Γ s'écrit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
C'est l'équation d'une conique, la forme quadratique est réduite dans le repère, elle est différence de deux carrés. L'équation est donc celle d'une hyperbole.



Réciproquement, soit $\mathcal{H}$ une hyperbole, il existe un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dans lequel $\mathcal{H}$ est caractérisé par l'équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
On pose alors $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $e = \frac{c}{a}$.
D'après l'étude précédente, si F est le point de coordonnées $(c, 0)$, D la droite d'équation $x = \dfrac{a^2}{c}$, l'étude précédente montre que l'ensemble des points tels que $\dfrac{MF}{\mathrm{d}(M, D)} = e$ est l'hyperbole $\mathcal{H}$ (on doit vérifier que les points $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$ sont bien les barycentres de $(F, 1)$ et respectivement de (K, e) ou de $(K, -e)$). □

Le réel $2a$ est appelé *axe transverse* de l'hyperbole. Le cercle de centre O et de rayon a est le cercle principal de la conique à centre ; on l'appelle aussi *cercle transverse de l'hyperbole.*

Remarque : Dans le cas $e \neq 1$, on remarque qu'on restreint le choix des repères avec la nouvelle forme réduite des équations des ellipses qui ne sont pas des cercles et des hyperboles. Les axes des x et des y sont déterminés de façon unique. On peut simplement remplacer les vecteurs de base par leurs opposés.

Asymptotes d'une hyperbole

À partir de l'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ d'une hyperbole, on peut exprimer y en fonction de x : $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Une hyperbole est donc la réunion de deux courbes de fonctions, admettant (étude élémentaire) des asymptotes lorsque $x \to \pm\infty$. Les asymptotes sont les droites d'équation $y = \pm\frac{b}{a}x$. On peut retenir que pour trouver les équations des deux asymptotes, il suffit de remplacer le 1 par 0 dans l'équation réduite : la réunion des deux asymptotes est caractérisée par $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

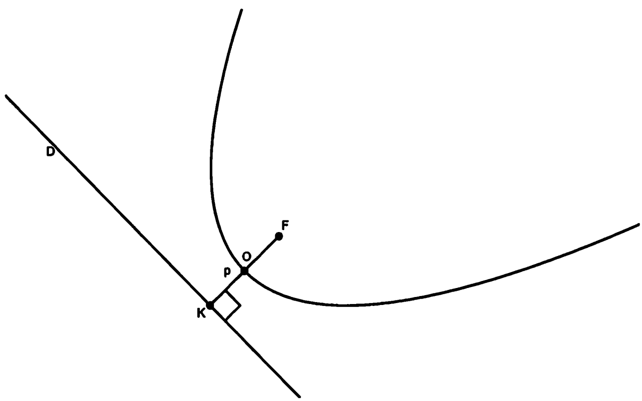
6.5.3 Cas où $e = 1$

Proposition 6.9 Si $e = 1$, la courbe Γ est une parabole. Réciproquement, si $\mathcal{P}$ est une parabole, il existe un point F et une droite D tel que $\mathcal{P}$ soit l'ensemble des points équidistants de F et de D.

Preuve Considérons le point O milieu de $[KF]$ et posons $\vec{\imath} = \dfrac{\overrightarrow{OF}}{\|\overrightarrow{OF}\|}$. Soit alors $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal.
Posons $p = \dfrac{OF}{2}$, de sorte que dans ce repère $F(\frac{p}{2}, 0)$, et que la droite D a pour équation $x = -\frac{p}{2}$.
Un point M est sur Γ si et seulement si $(x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2 \iff y^2 = 2px$.
On a obtenu une équation réduite de conique, dont la forme quadratique est dégénérée, Γ est bien une parabole.

Réciproquement, soit $\mathcal{P}$ une parabole. Il existe un repère orthonormal où son équation est réduite, et on peut ramener cette équation à la forme $y^2 = kx$.
On peut supposer $k > 0$, et poser $k = 2p$; d'après l'étude précédente, en choisissant le point $F(\frac{p}{2}, 0)$ et D la droite d'équation $x = -\frac{p}{2}$, l'ensemble des points équidistants de F et D est bien la parabole $\mathcal{P}$. □

Le réel p s'appelle le *paramètre* de la parabole. Il représente la distance KF, mais aussi la distance entre F et les points de la parabole qui ont la même abscisse que F.



6.6 Définition bifocale des ellipses et des hyperboles

Nous sommes toujours dans un cadre euclidien.
Nous avons montré pour chaque conique propre l'existence d'un couple (F, D) de foyer et directrice. Nous allons réfléchir maintenant à l'unicité éventuelle d'un tel couple.

Le couple (F, D) est unique pour une parabole. En effet il existe un unique repère orthonormal où une parabole donnée admet une équation cartésienne de la forme $y^2 = 2px$. L'axe focal est l'axe des abscisses. Sur cet axe, le foyer et le pied de la directrice sont symétriques par rapport au sommet à une distance $FK = p$. F et K sont donc parfaitement déterminés.

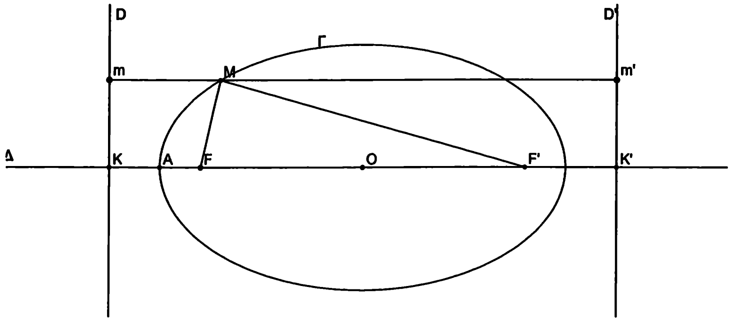
Si la conique est une ellipse ou une hyperbole, il existe un unique couple (Δ, Δ') de droites orthogonales tel que dans un repère lié à ces droites ($\Delta=$ axe des x, $\Delta'=$ axe des y) l'équation cartésienne soit de la forme $\dfrac{x^2}{a^2} + \varepsilon\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0,\ \varepsilon = \pm 1,$ $a > b$ dans le cas d'une ellipse). Le repère n'est pas unique : si $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère conduisant à cette équation, les autres repères possibles sont $(O, \vec{\imath}, -\vec{\jmath})$, $(O, -\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $(O, -\vec{\imath}, -\vec{\jmath})$. En revanche, le couple (a, b) donc c est indépendant du choix du repère. Les différents choix de repère conduisent à deux couples (F, D) et (F', D') seulement (symétriques par rapport à l'origine du repère).
Il existe donc deux déterminations possibles seulement pour une ellipse ou une hyperbole du couple foyer–directrice.

Proposition 6.10 Soient F et F' deux points distincts tels que $FF' = 2c$.
(1) Soit a un réel vérifiant $a > c > 0$. L'ellipse de foyer F et F' et de grand axe $2a$ est l'ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$.
(2) Soit a un réel vérifiant $c > a > 0$, l'hyperbole de foyer F et F' et d'axe transverse $2a$ est l'ensemble des points M du plan vérifiant $|MF - MF'| = 2a$.

Preuve (1) Soit a un réel tel que $a > c > 0$. Soit O le milieu de (F, F'), $\vec{\imath} = \dfrac{\overrightarrow{OF}}{\|\overrightarrow{OF}\|}$ et $\vec{\jmath}$ un vecteur unitaire tel que $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ soit un repère orthonormal. Dans ce repère, $F(c, 0)$ et $F'(-c, O)$.
Considérons le point $K(\frac{a^2}{c}, 0)$ et posons $e = \frac{c}{a}$.
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points vérifiant $MF + MF' = 2a$. Montrons que $\mathcal{E}$ est une ellipse d'excentricité e déterminée par le couple (F, D), D étant la droite orthogonale à (FF') passant par K. Notons Γ cette ellipse et montrons donc que $\mathcal{E} = \Gamma$.

Soit M un point de Γ, m son projeté orthogonal sur D et m' son projeté orthogonal sur D' (on considère les symétriques K' et D' de K et D par rapport à O).
On a par définition de Γ, $MF = e\,Mm$ et $MF' = e\,Mm'$.
On sait que l'ellipse est à la fois dans le demi-plan délimité par D contenant F et dans le demi-plan délimité par D' et contenant F' (Γ peut être associée au couple (F, D)

ou au couple (F', D'). Γ est donc à l'intérieur de la bande parallèle délimitée par D et D'.



On a donc $MF + MF' = e(Mm + Mm')$.
Comme $M \in [mm']$, $Mm + Mm' = KK' = 2\frac{a^2}{c}$, donc

$$MF + MF' = 2e\frac{a^2}{c} = 2\frac{c}{a}\frac{a^2}{c} = 2a,$$

et

$$M \in \mathcal{E}.$$

Si M est un point intérieur à Γ, on a de même $MF < e\,Mm$ et $MF' < e\,Mm'$, donc $MF + MF' < e\,KK'$, soit $MF + MF' < 2a$.
Si M est extérieur à Γ : $MF > e\,Mm$ et $MF' > e\,Mm'$, on a donc toujours

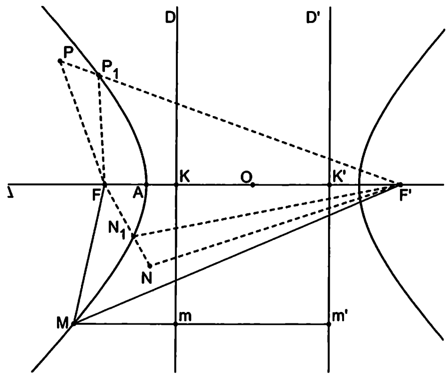
$$MF + MF' > e\,KK'.$$

Deux situations sont possibles.
- Si M est dans la bande parallèle limitée par D et D', alors on a, par le même raisonnement que précédemment, $MF + MF' > 2a$.
- Si M est extérieur à la bande, alors $Mm + Mm' > mm' = KK'$, on retrouve à nouveau $MF + MF' > 2a$.

On a raisonné par disjonction de cas, on a donc bien établi l'égalité souhaitée. (En effet, on a montré, en travaillant sur ces inégalités strictes, que si $M \notin \Gamma$, alors $M \notin \mathcal{E}$, ce qui est la forme contraposée de l'implication à montrer pour établir la seconde inclusion $\mathcal{E} \subset \Gamma$.)

(2) Soit a un réel tel que $c > a > 0$. Soit O le milieu de (F, F'), $\vec{\imath} = \dfrac{\overrightarrow{OF}}{\|\overrightarrow{OF}\|}$ et $\vec{\jmath}$ un vecteur unitaire tel que $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ soit un repère orthonormal. Dans ce repère, $F(c, 0)$ et $F'(-c, O)$. Considérons le point $K(\frac{a^2}{c}, 0)$ et posons $e = \frac{c}{a}$.
Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des points vérifiant $|MF - MF'| = 2a$. Montrons que $\mathcal{H}$ est une hyperbole d'excentricité e déterminée par le couple (F, D), D étant la droite orthogonale à (FF') passant par K. Notons Γ cette hyperbole et montrons donc que $\mathcal{H} = \Gamma$.

Soit M un point de Γ, m son projeté orthogonal sur D et m' son projeté orthogonal sur D' (on considère les symétriques K' et D' de K et D par rapport à O).



On a, par définition de Γ, $MF = e\,Mm$ et par symétrie $MF' = e\,Mm'$.
L'axe des ordonnées (Oy) est la médiatrice de $[FF']$, donc (Oy) délimite deux demi-plans, chacun étant l'ensemble des points du plan plus près de F ou plus près de F'.
Si M est un point de Γ du demi-plan délimité par (Oy) contenant F, alors $MF < MF'$ et $|MF - MF'| = MF' - MF = e(Mm' - Mm) = e\,mm' = e\,KK'$ car $m \in [Mm']$.
De même, si M est un point de Γ du demi-plan délimité par (Oy) et contenant F', alors $MF' < MF$.
et $|MF - MF'| = MF - MF' = e(Mm - Mm') = e\,mm' = e\,KK'$ car $m' \in [Mm]$.
Or, le même calcul que dans le cas de l'ellipse montre que $e\,KK' = 2a$.
On a donc prouvé que $M \in \Gamma \Longrightarrow |MF - MF'| = 2a$.

Si P est un point de l'intérieur de Γ (par exemple à l'intérieur de la branche du côté de F), on considère le point P_1 intersection du segment $[PF']$ et de la branche située autour de P : $PF' = PP_1 + P_1F'$. Par inégalité triangulaire, on a $PF < PP_1 + P_1F$ et $-PF > -PP_1 - P_1F$. On a donc
$|PF - PF'| = PF' - PF > (PP_1 + P_1F') - (PP_1 + P_1F) = P_1F' - P_1F$; or, $P_1F' - P_1F = 2a$ d'après ce qui précède, puisque $P_1 \in \Gamma$, d'où $|PF - PF'| > 2a$
Si P était à l'intérieur de l'autre branche, le raisonnement serait identique en échangeant F et F', donc $|PF' - PF| > 2a$, lorsque P est à l'intérieur de Γ.

Si N est un point de l'extérieur de Γ, on suppose sans nuire à la généralité que N est dans le demi-plan limité par (Oy) qui contient F : $NF' \geqslant NF$.
Soit N_1 le point d'intersection entre Γ et le segment $[NF]$: $NF = NN_1 + N_1F$ donc et par inégalité triangulaire $NF' < NN_1 + N_1F'$.

$$|NF - NF'| = NF' - NF < (NN_1 + N_1F') - (NN_1 + N_1F) = N_1F' - N_1F = 2a$$

car $N \in \Gamma$, et donc $|NF - NF'| < 2a$ lorsque N est à l'extérieur de Γ.

On a donc vérifié par disjonction de cas que $\mathcal{H}$ est exactement l'ensemble des points N vérifiant $|NF - NF'| = 2a$. □

6.7 Exercices

Exercice 6.1.
1° Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation $x^2 + y^2 - 2xy - 6x - 10y + 9 = 0$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Déterminer son équation réduite dans un repère orthonormal. En déduire la nature de la conique, son excentricité. Préciser un foyer et une directrice.

2° Même question dans les cas suivants :
a) $x^2 - 2xy + y^2 + x + y + \frac{1}{2} = 0$; b) $x^2 + 2xy + y^2 + x + y + 1 = 0$;
c) $x^2 + xy + y^2 + x + y + 1 = 0$

Exercice 6.2.
1° Montrer qu'une ellipse est parfaitement déterminée par la donnée de ses deux foyers F et F' et d'un de ses sommets A. On note $\mathcal{E}$ cette ellipse.

2° Soit C un point du cercle principal de l'ellipse $\mathcal{E}$ qui se projette orthogonalement en F sur (FF'). Montrer que le pied K de la directrice associée à F est le point d'intersection entre la tangente au cercle principal en C et la droite (FF').

3° Montrer qu'une ellipse est l'image de son cercle principal par une application affine simple que l'on précisera.

4° En déduire une construction point par point de l'ellipse à la règle et au compas, ainsi que la tangente en chacun de ces points.

Exercice 6.3.
1° Montrer qu'une hyperbole est complètement déterminée par la donnée de ses deux foyers F et F' et d'un de ses sommets A.

2° Soit C le point d'intersection entre le cercle transversal de l'hyperbole (de diamètre $[AA']$, A' étant l'autre sommet) et l'une des tangentes à ce cercle issue de F. Montrer que la directrice D associée à F est la perpendiculaire à (FF') passant par C.

3° Montrer que les asymptotes à une hyperbole passent par les points de contact des tangentes au cercle transversal issues des foyers et par l'origine.

Exercice 6.4.
1° Montrer qu'une parabole est entièrement déterminée par la donnée de son foyer F et de son sommet A.

2° En déduire une construction point par point de la parabole connaissant A et F (à la règle et au compas).

Exercice 6.5.
1° Montrer qu'une droite rencontre une conique en au plus deux points.

2° Soit $\mathcal{C}$ une conique à centre d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2}+\varepsilon\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($\varepsilon=\pm 1$) dans un repère orthonormal.

Montrer que l'équation de la tangente au point $M_0(x_0,y_0)$ est $\dfrac{xx_0}{a^2}+\varepsilon\dfrac{yy_0}{b^2}=1$, (on dit que cette équation s'obtient par dédoublement des termes).

3° Soit $\mathcal{P}$ une parabole d'équation réduite $y^2=2px$ dans un repère orthonormal. Montrer que la tangente à $\mathcal{P}$ au point $M_0(x_0,y_0)$ a pour équation $yy_0=p(x+x_0)$.

Exercice 6.6. Soit M un point d'une conique propre. La tangente en M coupe la directrice en T. On veut montrer que l'angle $\widehat{MFT}$ est droit.
On considère un autre point M' de la conique (de la même branche que M si c'est une hyperbole). La droite (MM') coupe la directrice en Q. La droite (QF) coupe le cercle $\mathcal{C}$ de centre M passant par F en un deuxième point appelé R. On considère l'homothétie h de centre M et de rapport $\dfrac{QM'}{QM}$. K et K' sont les projetés orthogonaux sur la directrice de M et M'.

1° Montrer que $h(M)=M'$, $h(K)=K'$.

2° Montrer que l'image de $\mathcal{C}$ par h est le cercle de centre M' qui passe par F puis que $h(R)=F$.

3° Conclure en envisageant la situation limite où le point M' devient le point M.

Exercice 6.7. Soit $\mathcal{C}$ une conique à centre (une ellipse ou une hyperbole). (F,Δ) et (F',Δ') sont les deux couples foyers–directrices associés à la conique $\mathcal{C}$. Soit M un point de $\mathcal{C}$, la tangente à $\mathcal{C}$ au point M coupe Δ en un point T et Δ' en un point T'. h est l'homothétie de centre T qui transforme M en Q (milieu de $[TT']$). Γ est le cercle de centre M et de rayon MF. Les droites (FT) et $(F'T')$ se coupent en un point R.

1° Montrer que l'image de Γ par h est un cercle Γ' de centre Q et de rayon $e\cdot \mathrm{d}(Q,\Delta)$. En déduire que ce cercle est tangent aux droites (FT) et $(F'T')$.

2° Montrer que le triangle RTT' est isocèle en R.

3° En déduire que la droite (MT) est bissectrice du triangle MFF'.

Exercice 6.8. Montrer que la tangente en un point M d'une parabole de foyer F et de directrice D est la bissectrice intérieure issue de M du triangle MFm, m étant le projeté orthogonal de M sur D.

Solutions des exercices

Chapitre 1

1. Solutions des exercices sur les espaces affines

Exercice 1.1.

1° a) On doit vérifier que la définition de $A \hat{+} \vec{u}$ a un sens quels que soient $A \in E$ et $\vec{u} \in \vec{E}$. Or l'hypothèse (ii') précise que l'application θ_A est bijective quel que soit A, donc θ_A^{-1} est bien définie comme application de $\vec{E}$ vers E (puisque θ va de E vers $\vec{E}$). $\theta_A^{-1}(\vec{u})$ est donc bien un élément de E parfaitement défini quels que soient A et $\vec{u}$. On peut donc affirmer que la définition proposée a bien un sens.

Montrons maintenant que $\hat{+}$ est une loi de composition externe. En fait, on l'a déjà vérifié, puisqu'on a prouvé que pour tous $A \in E$ et $\vec{u} \in \vec{E}$, $A \hat{+} \vec{u}$ était un élément bien précis de E, $\hat{+}$ est bien une loi de composition externe qui associe à un couple $(A, \vec{u})$ de $E \times \vec{E}$ un élément de E.

1° b) On doit montrer que $\hat{+}$ vérifie les trois propriétés (i), (ii) et (iii) de la définition 1.1 p. 1.

— Pour (i), on doit montrer que $A \hat{+} \vec{0} = A$ pour tout $A \in E$. Or, $A \hat{+} \vec{0} = \theta_A^{-1}(\vec{0})$ est, par définition d'une application réciproque, et d'après l'hypothèse (ii'), un élément B de E tel que $\vec{0} = \theta_A(B) = \theta(A, B)$. Or, on a aussi $\theta(A, A) + \theta(A, A) = \theta(A, A)$ (en appliquant (i') avec $A = B = C$), donc $\theta(A, A) = \vec{0}$. Mais $\theta(A, A) = \theta_A(A)$. On a donc trouvé deux points, A et B, tels que $\vec{0} = \theta_A(A) = \theta_A(B)$. Comme θ_A est bijective d'après (ii'), on peut conclure que $A = B$ et $A \hat{+} \vec{0} = A$.

— Pour (ii) : Soient $A \in E$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{E}$. Posons $B = A \hat{+} \vec{u}$, $C = B \hat{+} \vec{v}$ et $D = A \hat{+} (\vec{u} + \vec{v})$. Nous devons montrer que $(A \hat{+} \vec{u}) \hat{+} \vec{v} = A \hat{+} (\vec{u} + \vec{v})$, soit, en d'autres termes, que $C = D$.
Or, $D = \theta_A^{-1}(\vec{u} + \vec{v})$, donc $\theta_A(D) = \theta(A, D) = \vec{u} + \vec{v}$.

D'autre part $B = \theta_A^{-1}(\vec{u})$, donc $\vec{u} = \theta_A(B) = \theta(A,B)$ et $C = \theta_B^{-1}(\vec{v})$ donc $\vec{v} = \theta_B(C) = \theta(B,C)$, donc $\vec{u} + \vec{v} = \theta(A,B) + \theta(B,C) = \theta(A,C)$ (en appliquant l'hypothèse (i')).
On a donc $\vec{u} + \vec{v} = \theta(A,C) = \theta(A,D)$, et donc $\theta_A(C) = \theta_A(D)$, et puisque θ_A est bijective d'après (ii'), $C = D$.

— Pour (iii), il n'y a presque rien à faire, puisque, pour tout $A \in E$, on a, quel que soit $\vec{u} \in \vec{E}$, $A \widehat{+} \vec{u} = \theta_A^{-1}(\vec{u})$, donc l'application $\vec{u} \longmapsto A \widehat{+} \vec{u}$ n'est rien d'autre que l'application θ_A^{-1}, qui est bien sûr bijective, comme réciproque d'une bijection.

En conclusion, $\widehat{+}$ est une loi de composition externe sur E qui vérifie les axiomes (i), (ii) et (iii) de la définition d'un espace affine, donc $(E, \vec{E}, \widehat{+})$ est un espace affine sur $\vec{E}$.

2° Soit $(E, \vec{E}, +)$ un espace affine sur $\vec{E}$. On pose pour tout couple (A,B) d'éléments de E, $\theta(A,B) = \overrightarrow{AB}$.
θ est bien une application de $E \times E$ vers $\vec{E}$, et elle vérifie l'axiome (i') grâce à la relation de Chasles, puisque $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ s'écrit aussi $\theta(A,B) + \theta(B,C) = \theta(A,C)$.

Pour (ii'), soit A un point de E, alors l'application θ_A définie par $\theta_A(B) = \theta(A,B) = \overrightarrow{AB}$ va de E vers $\vec{E}$, et elle est surjective, puisque pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\vec{E}$, il existe $B = A + \vec{u}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \theta(A,B) = \theta_A(B)$.
θ_A est injective, car $\theta_A(B) = \theta_A(C) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Longrightarrow A + \overrightarrow{AB} = A + \overrightarrow{AC} \Longrightarrow B = C$.

Exercice 1.2. 1° Soit E un ensemble muni d'une loi de composition externe $+$, à opérateurs dans $\vec{E}$ qui vérifie les axiomes (i), (ii) et (iii''), c'est-à-dire tel que

(i) $\forall A \in E,\ A + \vec{0} = A$;

(ii) $\forall A \in E,\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$, on a $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$;

(iii'') $\exists A \in E$, l'application $\varphi_A : \vec{u} \longmapsto A + \vec{u}$ est une bijection de $\vec{E}$ sur E.
On doit montrer qu'on a aussi (iii), c'est-à-dire que pour tout $B \in E$, l'application $\varphi_B : \vec{u} \longmapsto B + \vec{u}$ est bijective.
Soit $B \in E$ et soit φ_B l'application de $\vec{E}$ vers E définie par $\varphi_B(\vec{u}) = B + \vec{u}$. Montrons que φ_B est bijective.
Soit $C \in E$. On doit trouver dans $\vec{E}$ un antécédent par φ_B de C. Or, on sait, d'après (iii''), qu'il existe un antécédent $\vec{v}$ de C par φ_A, c'est-à-dire un vecteur $\vec{v}$ de $\vec{E}$ tel que $\varphi_A(\vec{v}) = C$, ou encore $C = A + \vec{v}$. D'autre part, toujours d'après (iii''), B possède aussi un antécédent par φ_A, qui est un vecteur $\vec{w}$ tel que $B = A + \vec{w}$. Or, on peut affirmer que $B + (-\vec{w}) = A$: en effet, on a $A = A + \vec{0} = A + (\vec{w} + (-\vec{w})) = (A + \vec{w}) + (-\vec{w}) = B + (-\vec{w})$ (on a utilisé (i) puis (ii)).
On peut conclure que $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w} = -\vec{w} + \vec{v}$ est tel que $\varphi_B(\vec{u}) = C$,
puisque $B + \vec{u} = B + (-\vec{w} + \vec{v}) = \big(B + (-\vec{w})\big) + \vec{v} = A + \vec{v} = C$ (on a encore utilisé (ii)).

On a prouvé que φ_B est *surjective.*

Soient maintenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{E}$ tels que $\varphi_B(\overrightarrow{u}) = \varphi_B(\overrightarrow{v})$. On a donc $B+\overrightarrow{u} = B+\overrightarrow{v}$. Or, on a vu qu'on peut écrire $B = A+\overrightarrow{w}$, donc on a $(A+\overrightarrow{w})+\overrightarrow{u} = (A+\overrightarrow{w})+\overrightarrow{v}$ et toujours en utilisant (ii), on a donc $A+(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}) = A+(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v})$ ou encore $\varphi_A(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}) = \varphi_A(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v})$ et puisque d'après l'hypothèse (iii''), φ_A est injective, on en déduit $\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}$ puis $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$. On a ainsi prouvé que φ_B est *injective.*

En conclusion, φ_B est *bijective*, ceci pour tout B, donc la propriété (iii) est établie.

2° Soit E un ensemble. On suppose qu'il existe une application $\theta : \begin{cases} E \times E \longrightarrow \overrightarrow{E} \\ (A,B) \longmapsto \theta(A,B) \end{cases}$ telle que

(i') $\forall A,B,C \in E$, on a $\theta(A,B)+\theta(B,C) = \theta(A,C)$.

(ii'') $\exists A \in E$ tel que l'application $\theta_A : M \longmapsto \theta_A(M) = \theta(A,M)$ est une bijection de E sur $\overrightarrow{E}$.

Il faut montrer que E est un espace affine, et tenant compte du résultat de l'exercice 1.1, il suffit de vérifier (ii').

Soit donc un point B quelconque de E. Montrons que l'application $\theta_B : M \longmapsto \theta(B,M)$ est bijective de E vers $\overrightarrow{E}$.

Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. Posons $\overrightarrow{w} = \theta(A,B)+\overrightarrow{u}$. Puisque θ_A est surjective, il existe $M \in E$ tel que $\theta_A(M) = \overrightarrow{w}$, donc on a $\theta(A,M) = \theta(A,B)+\overrightarrow{u}$. Ajoutant le vecteur $\theta(B,A)$ aux deux membres de cette égalité, on trouve, en utilisant (i'), $\theta(B,M) = \theta(B,B)+\overrightarrow{u}$. Or, l'axiome (i') appliqué à $A = B = C$ implique que $\theta(B,B)+\theta(B,B) = \theta(B,B)$, donc $\theta(B,B) = \overrightarrow{0}$, et on a trouvé un point M tel que $\theta_B(M) = \theta(B,M) = \overrightarrow{0}+\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$. On a prouvé que θ_B est *surjective.*

Soient C et D deux points de E tels que $\theta_B(C) = \theta_B(D)$. On a donc $\theta(B,C) = \theta(B,D)$ et en ajoutant $\theta(A,B)$ aux deux membres, et en appliquant (i'), on obtient $\theta(A,C) = \theta(A,D)$, soit encore $\theta_A(C) = \theta_A(D)$ et puisque θ_A est injective d'après (ii''), on peut en déduire $C = D$. On a prouvé que θ_B est *injective.*

θ_B est donc *bijective* quel que soit le point B, et E est donc un espace affine.

Exercice 1.3.
Soient quatre points A,B,C,D quelconques de l'espace affine E. La relation de Chasles permet d'écrire d'une part $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ et d'autre part $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$. On a donc : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$, et donc si on a des points qui sont tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et réciproquement.

Exercice 1.4. Précisons quelles sont les lois $+_a$ et $\cdot_a$ dans le vectorialisé V_a (c'est le vectorialisé de l'espace V considéré comme espace affine sur lui-même).
Pour tous $x,y \in V$, on a $x +_a y = a+(x-a)+(y-a) = x+y-a$.

De même, pour tous $x \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda \cdot_a x = a + \lambda(x-a) = (1-\lambda)a + \lambda x$.
Les lois de V_a ne sont donc pas les mêmes que celles de V, sauf si $a = 0_V$: $V_{0_V} = V$.
Remarquons que si $a \neq b$, on a aussi $V_a \neq V_b$ (car $x +_a y \neq x +_b y$).

Exercice 1.5.
Supposons que $(O, \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est un repère cartésien de E. Cela signifie que $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de $\overrightarrow{E}$ et donc d'une part que $\overrightarrow{E}$ et donc E sont de dimension n. Un argument décisif permettant de conclure est que $(X_1, \dots, X_n)$ est l'image réciproque de la base $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ par l'application $\varphi_O : M \longmapsto M - O$ qui sert à transférer la structure vectorielle de $\overrightarrow{E}$ sur E, et par ce transfert de structure, une base est forcément transformée en une base.

Nous donnons ci-après un autre argument plus élémentaire que nous espérons plus facile à comprendre.
Montrons que $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille libre de E_O, qui est aussi de dimension n (on a vu que φ_O est un isomorphisme).
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\lambda_1 \cdot_O X_1 +_O \cdots +_O \lambda_n \cdot_O X_n = O$ (il est évident que O est le vecteur nul de E_O).
On a $\lambda_i \cdot_O X_i = O + \lambda_i(X_i - O) = O + \lambda_i \overrightarrow{e_i}$.
D'où $\lambda_1 \cdot_O X_1 +_O \lambda_2 \cdot_O X_2 = O + (\lambda_1 \cdot_O X_1 - O) + (\lambda_2 \cdot_O X_2 - O) = O + ((O + \lambda_1 \overrightarrow{e_1}) - O) + ((O + \lambda_2 \overrightarrow{e_2}) - O) = O + \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2}$.
Par une récurrence facile (mais qui serait lourde à écrire), on en déduit que
$\lambda_1 \cdot_O X_1 +_O \cdots +_O \lambda_n \cdot_O X_n = O + \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}$ (cette égalité est indépendante du fait que les $\overrightarrow{e_i}$ forment une base). Le fait que $\lambda_1 \cdot_O X_1 +_O \cdots +_O \lambda_n \cdot_O X_n = O$ se traduit donc par $O + \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{e_n} = O$, d'où $\lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0}$, et tous les λ_i sont nuls puisque $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de $\overrightarrow{E}$, donc les X_i forment une famille libre de E_O.

Réciproquement, supposons que $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de E_O. Cela signifie déjà que E_O, donc $\overrightarrow{E}$, donc E sont de dimensions n. Il suffit alors de montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une famille libre de $\overrightarrow{E}$.
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0}$.
On en déduit que $O + \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{e_n} = O$, et en utilisant l'égalité
$\lambda_1 \cdot_O X_1 +_O \cdots +_O \lambda_n \cdot_O X_n = O + \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}$ vue plus haut, on a donc
$\lambda_1 \cdot_O X_1 +_O \cdots +_O \lambda_n \cdot_O X_n = O$ et tous les λ_i sont nuls puisqu'on a supposé que $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de E_O, et ainsi on a prouvé que $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une famille libre de $\overrightarrow{E}$.

Exercice 1.6. La direction $\overrightarrow{F}$ d'une variété affine $F = A + \overrightarrow{F}$ d'un espace affine E de dimension 3 est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ et a donc comme dimension $0, 1, 2$ ou 3.

- Si $\dim \overrightarrow{F} = \dim F = 0$, c'est que $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{0}\}$, donc $F = A + \{\overrightarrow{0}\} = \{A\}$. F est alors un *singleton*.

- Si $\dim \overrightarrow{F} = \dim F = 1$, $\overrightarrow{F}$ est une droite vectorielle, engendrée par un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$, et donc $F = A+ < \overrightarrow{u} >$ est la droite affine passant par A, dirigée par $\overrightarrow{u}$. Les sous-espaces affines de dimension 1 sont des *droites*.
- Si $\dim \overrightarrow{F} = \dim F = 2$, $\overrightarrow{F}$ est un plan vectoriel engendré par deux vecteurs indépendants (et donc non nuls) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, donc $F = A+ < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$. F est un *plan* affine. F passe par A, et aussi par $B = A + \overrightarrow{u}$ et par $C = A + \overrightarrow{v}$. Ce sont trois points non alignés de E.
- Si $\dim \overrightarrow{F} = 3$, c'est que $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{E}$, donc $F = A + \overrightarrow{E} = E$. Le seul sous-espace affine de dimension 3 d'un espace affine E de dimension 3 est *l'espace E tout entier.*

Exercice 1.7. 1° Soient A, B deux points distincts d'un espace affine. $A \neq B$ implique que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$, donc le sous-espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ est une droite vectorielle $\overrightarrow{D} =< \overrightarrow{u} >$. Donc $D = A + \overrightarrow{D}$ est une droite affine. Elle passe par A (proposition 1.9 p. 5) et aussi par B puisque $B = A + \overrightarrow{AB} = A + \overrightarrow{u} \in A+ < \overrightarrow{u} >= D$. On a ainsi trouvé une droite D qui passe par les deux points distincts A et B. Reste à prouver que c'est la seule.
Soit $\Delta = C + \overrightarrow{\Delta}$ une droite affine passant par A et par B ; $\overrightarrow{\Delta}$ est donc une droite vectorielle engendrée par n'importe lequel de ses vecteurs non nuls. Toujours d'après la proposition 1.9 p. 5, on peut affirmer que $A \in \Delta \Longrightarrow \Delta = A + \overrightarrow{\Delta}$. Mais $B \in \Delta$ donc $B \in A + \overrightarrow{\Delta}$ et par conséquent $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\Delta}$. $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non nul de la droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta}$, donc $\overrightarrow{\Delta} =< \overrightarrow{u} >= \overrightarrow{D}$ et $\Delta = A + \overrightarrow{\Delta} = A + \overrightarrow{D} = D$. On a montré que D est la seule droite affine qui passe par A et B.

2° On raisonne de la même façon : les points A, B, C ne sont pas alignés, donc ils sont tous distincts, et C n'appartient pas à la droite $D = A+ < \overrightarrow{AB} >$ passant par A et B, donc $\overrightarrow{AC} \notin < \overrightarrow{AB} >$ et par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont indépendants. Ils engendrent donc un plan vectoriel $\overrightarrow{P} =< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} >$. Il est clair que $P = A + \overrightarrow{P}$ passe par A, B et C.
Soit maintenant un plan $\Pi = M + \overrightarrow{\Pi}$ un autre plan qui passerait par A, B, C ; $\overrightarrow{\Pi}$ est un plan vectoriel dont une base est formée par deux quelconques de ses vecteurs pour peu que ceux-ci sont indépendants. Toujours d'après la propriété 1.9 p. 5, on peut affirmer, puisque $A \in \Pi$, que $\Pi = A + \overrightarrow{\Pi}$. Mais $B \in \Pi$ donc $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{\Pi}$ et de même $C \in \Pi$ donc $\overrightarrow{AC} \in \overrightarrow{\Pi}$. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un couple de vecteurs indépendants de $\overrightarrow{\Pi}$, donc c'en est une base et $\overrightarrow{\Pi} =< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} >= \overrightarrow{P}$, donc $\Pi = A + \overrightarrow{\Pi} = A + \overrightarrow{P} = P$, il n'y a donc qu'un seul plan qui passe par A, B, C.

Exercice 1.8.

Une forme linéaire f est une application linéaire de V vers le corps $\mathbb{K}$ des scalaires. Puisque $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$, sa dimension ne peut être que 0 ou 1 : c'est 0 si f est l'application nulle et $\operatorname{Im} f = \{0\}$, et c'est 1 dans tous les autres cas, f est alors surjective.

Si f est l'application nulle, et si $a \neq 0$, alors $f^{-1}(a) = \varnothing$ n'est pas un hyperplan affine de V. Et toujours si f est l'application nulle, si $a = 0$, alors $f^{-1}(a) = f^{-1}(0) = \ker f = V$, qui n'est pas non plus un hyperplan affine de V. Nous venons de traiter les deux exceptions.

Si f n'est pas l'application nulle, alors f est surjective et $f^{-1}(a)$ n'est jamais vide. Soit $u \in f^{-1}(a)$. Nous allons montrer que $f^{-1}(a) = u + \ker f$ et cela suffira pour achever la démonstration : en effet, d'après le théorème du rang, comme $\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f) = 1$, on est sûr que $\dim(\ker f) = n - 1$, si n est la dimension de V. On aura alors prouvé que $f^{-1}(a)$ est un hyperplan affine de V.
Soit $v \in f^{-1}(a)$, on a $f(v) = a = f(u)$, donc grâce à la linéarité de f, $f(v-u) = f(v) - f(u) = a - a = 0$ et $v - u \in \ker f$. Puisque $v = u + (v-u)$, on a donc $v \in u + \ker f$. On a établi l'inclusion $f^{-1}(a) \subset u + \ker f$.
Soit $w \in u + \ker f$. On a $w = u + x$ avec $x \in \ker f$, donc $f(w) = f(u) + f(x) = a + 0 = a$, donc $w \in f^{-1}(a)$ et on a établi la deuxième inclusion $u + \ker f \subset f^{-1}(a)$.

Exercice 1.9.

Supposons que $S_b \neq \varnothing$. Alors il existe $a \in E$ tel que $f(a) = b$. Pour tout $x \in S_b$, on a aussi $f(x) = b$, donc par linéarité de f, on peut écrire $f(x-a) = f(x) - f(a) = b - b = 0_F$, donc $x - a \in \ker f$. Or, $x = a + (x-a)$, donc $x \in a + \ker f$. On a montré que $S_b \subset a + \ker f$. Or, $a + \ker f$ est un sous-espace affine de E, de direction $\ker f$, donc si on arrive à montrer l'inclusion inverse, on aura terminé. Soit $y \in a + \ker f$. On a $y - a \in \ker f$, donc $f(y) = f\big(a + (y-a)\big) = f(a) + f(y-a) = b + 0_F = b$, donc $y \in S_b$ et on a montré $a + \ker f \subset S_b$.

Exercice 1.10.

Soit V un espace vectoriel, qui est aussi un espace affine. Soit $G = a + W$ une variété affine de l'espace affine V. W est donc un sous-espace vectoriel de V. Si $0_V \in G$, alors d'après la proposition 1.9 p. 5, on peut dire que $G = 0_V + W = W$ donc G est un sous-espace vectoriel de V. Réciproquement, si G est un sous-espace vectoriel, comme tous les sous-espaces vectoriels, il contient 0_V. □

Exercice 1.11.

1° Par hypothèse $\overrightarrow{F} \neq \overrightarrow{G}$; comme ces sous-espaces vectoriels sont des droites vectorielles, on a $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G} = \{\overrightarrow{0}\}$ donc $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ sont en somme directe, et par conséquent $\dim(\overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}) = 1 + 1 = 2 = \dim \overrightarrow{E}$, de sorte que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$. On peut appliquer la deuxième partie de la proposition 1.22 p. 17, et conclure que $F \cap G$ est réduite à un point.

2° Par hypothèse $\overrightarrow{F} \neq \overrightarrow{G}$; comme ces sous-espaces vectoriels sont des plans vectoriels, et qu'ils ne sont pas confondus, leur intersection $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$ est de dimension strictement inférieure à 2. Mais d'autre part, on a

$$\dim(\overrightarrow{F}+\overrightarrow{G})=\dim\overrightarrow{F}+\dim\overrightarrow{G}-\dim(\overrightarrow{F}\cap\overrightarrow{G})=4-\dim(\overrightarrow{F}\cap\overrightarrow{G}).$$

Comme $\overrightarrow{F}+\overrightarrow{G}\subset\overrightarrow{E}$, on a $\dim(\overrightarrow{F}+\overrightarrow{G})\leqslant 3$ et donc $4-\dim(\overrightarrow{F}\cap\overrightarrow{G})\leqslant 3$, d'où $\dim(\overrightarrow{F}\cap\overrightarrow{G})\geqslant 1$. Comme on a aussi $\dim(\overrightarrow{F}\cap\overrightarrow{G})\leqslant 1$, on est sûr que $\overrightarrow{F}\cap\overrightarrow{G}$ est une droite vectorielle $\overrightarrow{D}$, et donc $\dim(\overrightarrow{F}+\overrightarrow{G})=4-1=3$, donc $\overrightarrow{F}+\overrightarrow{G}=\overrightarrow{E}$, et on peut appliquer la première partie de la proposition 1.22 p. 17, qui permet d'affirmer que $F\cap G\neq\varnothing$. En appliquant alors la proposition 1.13 p. 7, on peut affirmer que $F\cap G$ est une variété affine dirigée par $\overrightarrow{F}\cap\overrightarrow{G}=\overrightarrow{D}$, qui est, on l'a vu, une droite vectorielle, donc $F\cap G$ est une droite affine.

3° Puisque la droite $(G,\overrightarrow{G})$ n'est pas faiblement parallèle au plan $(F,\overrightarrow{F})$, c'est que $\overrightarrow{G}\not\subset\overrightarrow{F}$, et par conséquent $\overrightarrow{F}+\overrightarrow{G}$ est un sous-espace vectoriel qui est strictement plus grand que $\overrightarrow{F}$, sa dimension est donc au moins 3, et ne peut être que exactement 3, et donc $\overrightarrow{F}+\overrightarrow{G}=\overrightarrow{E}$. Par l'équation aux dimensions, on est sûr que $\overrightarrow{F}\cap\overrightarrow{G}=\{\overrightarrow{0}\}$ (cet espace vectoriel est strictement inclus dans la droite vectorielle $\overrightarrow{G}$), donc la somme de $\overrightarrow{F}$ et de $\overrightarrow{G}$ est directe et $\overrightarrow{E}=\overrightarrow{F}\oplus\overrightarrow{G}$, donc $F\cap G$ est un singleton, toujours grâce à la proposition 1.22 p. 17.

Exercice 1.12.

1° a) On applique la proposition 1.19 p. 11 ; ici on cherche une représentation paramétrique de $D=A+\overrightarrow{D}$ avec $\overrightarrow{D}=<\overrightarrow{u}>$ de dimension 1. $\overrightarrow{u}$ est une base de $\overrightarrow{D}$, on a $p=1$, et la dimension de l'espace est 2, donc il y a deux équations avec un seul paramètre. On obtient bien, en application de cette proposition, la représentation paramétrique $\begin{cases}x=x_A+\lambda\alpha\\ y=y_A+\lambda\beta\end{cases}$

1° b) Si b et d ne sont pas tous les deux nuls, il existe un point $B(a,c)$ et un vecteur non nul $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ tels que si $D=B+<\overrightarrow{v}>$, la représentation paramétrique de la droite D est exactement le système $\begin{cases}x=a+bt\\ y=c+dt\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ qui caractérise l'ensemble Δ, donc $D=\Delta$ et Δ est bien une droite.

Si $b=d=0$, le système qui caractérise Δ s'écrit, $\begin{cases}x=a\\ y=c\end{cases}$ quel que soit $t\in\mathbb{R}$, donc Δ est réduit au singleton formé du seul point $B(a,c)$.

Nous avons prouvé que Δ est une droite si et seulement si $(b,d)\neq(0,0)$. Dans ce cas, Δ passe par $B(a,c)$ et est dirigée par $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$.

Lorsque c'est une droite, Δ passe par l'origine du repère si et seulement si il existe une valeur t_0 du paramètre t telle que $\begin{cases} 0 = a + bt_0 \\ 0 = c + dt_0. \end{cases}$

On peut interpréter cette condition par le fait qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(1, t_0)$ est solution du système homogène $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0. \end{cases}$

Ce système qui admet aussi la solution triviale $(0,0)$ n'est donc pas un système de Kramer, donc son déterminant est nul : on a $ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.

Réciproquement, supposons que l'on a $ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$. Cherchons s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} 0 = a + bt_0 \\ 0 = c + dt_0. \end{cases}$

Considérons encore le système homogène de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0. \end{cases}$ Comme $(b, d) \neq (0, 0)$ et comme le déterminant de ce système est nul, c'est un système homogène de rang 1, et l'ensemble S des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient ce système est une droite vectorielle. Soit (u, v) une des solutions non nulles. On a donc $S =< (u, v) >$. Il est impossible qu'on ait $u = 0$ sinon on aurait $v \neq 0$ et $bv = dv = 0$, ce qui impliquerait $(b, d) = (0, 0)$. Donc $\frac{1}{u}(u, v) = (1, t_0)$ (en posant $t_0 = \frac{v}{u}$) appartient aussi à S, et on a $a + bt_0 = 0 = c + dt_0$, ce qui prouve bien que Δ passe par O.

Nous avons montré que Δ est une droite qui passe par O si et seulement si $(b, d) \neq 0$ et $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$. Remarquons que dans ce cas, puisque Δ passe par O et admet le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur, une autre représentation paramétrique de Δ est

$$\begin{cases} x = bt' \\ y = dt' \end{cases} \qquad t' \in \mathbb{R}.$$

1° c) La droite (AB) passe par $A(x_A, y_A)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur, donc une représentation paramétrique de (AB) est

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)\lambda \\ y = y_A + (y_B - y_A)\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On peut aussi écrire ce système sous la forme

$$\begin{cases} x = (1 - \lambda)x_A + \lambda x_B \\ y = (1 - \lambda)y_A + \lambda y_B \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(Vous savez peut-être et nous verrons au chapitre 3 qu'on peut interpréter ce dernier système comme l'affirmation que M est barycentre de $(A, 1-\lambda)$ et (B, λ)).
(La réponse ci-dessus n'est pas la seule possible : voir la question suivante !)

1° d) La droite D et la droite Δ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires, ce qui se traduit par le fait que $\begin{vmatrix} b & \beta \\ d & \delta \end{vmatrix} = 0$ (avec bien sûr $(b,d) \neq (0,0)$ et $(\beta,\delta) \neq (0,0)$ pour que ce soient bien des droites).
Ces droites sont confondues lorsqu'elles sont parallèles, et qu'en plus on peut trouver un point de l'une qui appartient à l'autre. Puisque $A(a,c) \in D$, on peut donc affirmer que D et Δ sont confondues si et seulement si $\begin{vmatrix} b & \beta \\ d & \delta \end{vmatrix} = 0$ et il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} a = \alpha + \beta\lambda_0 \\ c = \gamma + \delta\lambda_0. \end{cases}$$

Cette dernière condition est équivalente à l'existence de λ_0 tel que $\begin{cases} 0 = \alpha - a + \beta\lambda_0 \\ 0 = \gamma - c + \delta\lambda_0, \end{cases}$
donc en reprenant le raisonnement que nous avons fait pour caractériser qu'une droite passe par l'origine, elle équivaut au fait que $\begin{vmatrix} \alpha - a & \beta \\ \gamma - c & \delta \end{vmatrix} = 0$.
En conclusion, D et Δ sont des droites confondues si et seulement si $(b,d) \neq (0,0)$ et $(\beta,\delta) \neq (0,0)$ et $\begin{vmatrix} b & \beta \\ d & \delta \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} \alpha - a & \beta \\ \gamma - c & \delta \end{vmatrix} = 0$.
Remarquons que dans ce cas D passe par $B(\alpha,\gamma)$, donc en reprenant le même raisonnement à l'envers, on peut établir facilement qu'on a aussi $\begin{vmatrix} a - \alpha & b \\ c - \gamma & d \end{vmatrix} = 0$. Donc on peut caractériser le fait que les droites sont confondues par la nullité des trois déterminants, ce qui se traduit par le fait que la matrice $\begin{pmatrix} a - \alpha & b & \beta \\ c - \gamma & d & \delta \end{pmatrix}$ est de rang 1 (toujours avec la condition $(b,d) \neq (0,0)$ et $(\beta,\delta) \neq (0,0)$).
Les deux droites sont sécantes lorsqu'elles ne sont pas parallèles, c'est-à-dire lorsque leurs vecteurs directeurs sont indépendants, donc lorsque $\begin{vmatrix} b & \beta \\ d & \delta \end{vmatrix} \neq 0$.

1° e) Tout d'abord il serait suicidaire d'utiliser la même lettre (même si c'est une « variable muette ») comme paramètre dans les deux représentations paramétriques. Il faut considérer que les deux droites sont caractérisées ainsi : $D : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
et $D' : \begin{cases} x = -2 - t' \\ y = -3 - t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$. En application de ce qui précède, le déterminant $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$ est non nul, donc ces deux droites sont sécantes. Les coordonnées du point d'intersection peuvent se déterminer en résolvant le système de 4 équations à 4

inconnues obtenu en réunissant les deux représentations paramétrique ; bien sûr, les valeurs de x et y permettent à elles seules de répondre au problème. Comme on est sûr de l'existence et de l'unicité du point d'intersection, il n'est pas obligatoire de raisonner par équivalences, un raisonnement déductif permettant de trouver les seules valeurs x et y possibles serait aussi valable.

$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -3+t \\ x = -2-t' \\ y = -3-t' \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -3+t \\ 1+3t = -2-t' \\ -3+t = -3-t' \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -3-t \\ t = -t' = -\frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ y = -\frac{9}{2} \\ t = t' = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Le point d'intersection de D et D' a donc pour coordonnées $(x, y) = (-\frac{7}{2}, -\frac{9}{2})$.

1° f) Même démarche : les droites sont caractérisées par $D : \begin{cases} x = 1+(1-\sqrt{2})t \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

et $\Delta : \begin{cases} x = \sqrt{2} - t' \\ y = -1 + (\sqrt{2}+1)t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

En référence à d), on a ici $a = 1$, $b = 1-\sqrt{2}$, $c = 0$, $d = 1$, $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = -1$, $\gamma = -1$, $\delta = \sqrt{2}+1$.

Le premier déterminant à calculer est :

$$\begin{vmatrix} b & \beta \\ d & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix} = (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) + 1 = 0$$

donc les deux droites sont parallèles.

Ensuite on a $\begin{vmatrix} \alpha - a & \beta \\ \gamma - c & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 \\ -1-0 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix} = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) - 1 = 0$, donc les deux droites sont confondues. $D = \Delta = D \cap \Delta = (AB)$ avec $A(1,0)$ et $B(\sqrt{2}, -1)$.

2° a) On applique la proposition 1.21 p. 14. Ici la dimension de l'espace est $n = 2$, celle de la variété affine dont on cherche une équation cartésienne est $p = 1$, la droite D est caractérisée par $n - p = 1$ équation cartésienne, de la forme $u_{11}x + u_{12}y = b_1$. Pour que le système formé de cette seule équation soit de rang $n - p = 1$, il est nécessaire et suffisant que $(u_{11}, u_{12}) \neq (0, 0)$. En posant $u_{11} = u$, $u_{12} = v$ et $b_1 = -w$, cette équation est bien équivalente à $ux + vy + w = 0$ (avec $(u, v) \neq (0, 0)$).

On va utiliser la partie « réciproque » de cette même proposition 1.21 p. 14 : si $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, le système (formé d'une seule équation) $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est de rang 1, et il admet clairement toujours des solutions (il est toujours possible d'exprimer y en fonction de x si $\beta \neq 0$ ou x en fonction de y si $\alpha \neq 0$ et on a toujours α ou β non nul). Cette proposition nous permet alors d'affirmer que l'ensemble des points $M(x, y)$ qui vérifient ce système (d'une seule équation) est une variété affine de P, de dimension

$2-1=1$, donc c'est bien une droite. $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ est donc bien la seule condition à imposer pour que $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ soit l'équation cartésienne d'une droite Δ.

2° b) C'est encore une autre partie de la proposition 1.21 p. 14 que nous allons utiliser. Cette proposition nous permet d'affirmer que la droite Δ : $ax + by + c = 0$ admet comme direction le sous-espace vectoriel $\overrightarrow{\Delta}$ de $\overrightarrow{E}$, caractérisé par l'équation « sans second membre » $ax + by = 0$. Et le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ a des coordonnées qui vérifient cette équation donc $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\Delta}$, et comme Δ est une droite, $\overrightarrow{\Delta}$ est une droite vectorielle et $\overrightarrow{\Delta} =< \overrightarrow{u} >$, $\overrightarrow{u}$ est bien un vecteur directeur de Δ.

La droite Δ passe par l'origine O du repère lorsque les coordonnées $(x_O, y_O) = (0,0)$ de ce point vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ de Δ, c'est-à-dire lorsque $c = 0$.

2° c) Par hypothèse, on a donc $a \neq 0$ et $b \neq 0$. L'équation cartésienne $\dfrac{x - x_A}{a} = \dfrac{y - y_A}{b}$ a donc un sens, et elle est équivalente à $bx - ay + (ay_A - bx_A) = 0$. C'est l'équation cartésienne d'une droite qui passe par A (ses coordonnées vérifient cette équation) et dont un vecteur directeur est (en appliquant la question précédente) $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -(-a) \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}$ et cette équation caractérise la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$, c'est bien une équation de D.

2° d) Les deux droites D et D' sont parallèles si le système formé de leurs deux vecteurs directeurs est lié. D est dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et D' est dirigée par $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$.

Donc $D /\!/ D' \iff \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$.

Comme (a,b) et (a',b') sont tous deux non nuls, et comme ces deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont liés, on peut affirmer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $a' = ka$ et $b' = kb$.

Les deux droites sont confondues si et seulement si leurs équations sont équivalentes, donc s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$ et $c' = \lambda c$. En utilisant encore la proposition 1.21 p. 14, on peut exprimer cette condition en disant que le système $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c = 0 \end{cases}$ est de rang 1 et possède des solutions, ce qui se traduit par le fait que la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ est de rang 1.

Deux droites sont sécantes lorsqu'elles ne sont pas parallèles, donc lorsque $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

2° e) La droite D admettant une équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$. Comme elle n'est pas parallèle à un des axes, on a nécessairement $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Et d'après la fin de la question 2°b), puisqu'elle ne passe pas par l'origine O du repère, c'est que $c \neq 0$. On obtiendra donc une autre équation de D en multipliant celle-ci par $\frac{1}{c} \neq 0$, et on obtient $\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}y+1=0$ ou encore $-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}y=1$. En posant $-\frac{c}{a}=\alpha$ et $-\frac{c}{b}=\beta$ (c'est possible car $a\neq 0$ et $b\neq 0$), on obtient une équation sous la forme $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$. Le point $A(\alpha,0)$ et le point $B(0,\beta)$ ont des coordonnées qui vérifient cette équation, donc ce sont les points d'intersection de la droite D avec respectivement l'axe des abscisses ($y=0$) et l'axe des ordonnées ($x=0$). β est donc l'ordonnée du point d'intersection de D avec l'axe des ordonnées (on dit que β est l'ordonnée à l'origine de D) et α est l'abscisse du point d'intersection de D avec l'axe des abscisses (on devrait pouvoir appeler α l'« abscisse à l'origine », mais cette terminologie est très peu utilisée).

2° f) Il suffit de traduire le fait que $M\in D$:

$$M\in A+<\vec{u}>\iff M-A\in<\vec{u}>\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}\mid \overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$$
$$\iff (\overrightarrow{AM},\vec{u})\text{ est lié}\iff \begin{vmatrix} x-x_A & \alpha\\ y-y_A & \beta\end{vmatrix}=0.$$

2° g) Il suffit de calculer ce déterminant 3×3 en soustrayant la première colonne aux deux autres, puis en le développant par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{vmatrix} x_A & x_B & x\\ y_A & y_B & y\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\iff \begin{vmatrix} x_A & x_B-x_A & x-x_A\\ y_A & y_B-y_A & y-y_A\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$
$$\iff \begin{vmatrix} x_B-x_A & x-x_A\\ y_B-y_A & y-y_A\end{vmatrix}=0$$
$$\iff \overrightarrow{AB}\text{ et }\overrightarrow{AM}\text{ sont colinéaires}\iff M\in(AB).$$

Le même calcul montre que trois points A,B,C sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C\\ y_A & y_B & y_C\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$. (Nous retrouverons un autre argument que le calcul pour justifier cette condition d'alignement après l'étude du chapitre 3).

2° h) Si on connaît une équation cartésienne $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ d'une droite D, on en connaît un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$. Il suffit de trouver un point de la droite. Par exemple, si $\alpha\neq 0$, on peut exprimer x en fonction de y, et pour $y=0$, on trouve le point $A(-\frac{\gamma}{\alpha},0)$ (si $\alpha=0$, on est sûr que $\beta\neq 0$ et la droite passe par le point $B(0,-\frac{\gamma}{\beta})$). Une fois qu'on dispose d'un point et d'un vecteur directeur, écrire une représentation paramétrique devient très simple : si $\alpha\neq 0$, on a par exemple la représentation paramétrique $\begin{cases} x=-\frac{\gamma}{\alpha}-\beta t\\ y=\alpha t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$. Pour $\beta\neq 0$, on a la représentation paramétrique $\begin{cases} x=-\beta\lambda\\ y=-\frac{\gamma}{\beta}+\alpha\lambda\end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$.

Si on connaît une représentation paramétrique de D : $\begin{cases} x = a + bt \\ y = c + dt \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, on pourra trouver une équation cartésienne de plusieurs manières : puisqu'on connaît un point et un vecteur directeur, on peut utiliser c) ou f) ; mais le plus élégant consiste à éliminer t entre les deux équations, en multipliant la première par d, la deuxième par b puis en les soustrayant : on trouve alors très facilement l'équation cartésienne $dx - by = ad - bc$ qui caractérise bien D.

3° a) Commençons par interpréter l'hypothèse que D_1 et D_2 sont parallèles. Cela se traduit par $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0$, donc il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $u_2 = ku_1$ et $v_2 = kv_1$.
D'autre part, ces deux droites ne sont pas confondues, donc on est sûr que $w_2 \neq kw_1$.
On doit montrer une égalité entre deux ensembles, donc le raisonnement qu'on fera consistera à démontrer deux inclusions : toute droite du faisceau est une droite parallèle à D_1, puis toute droite parallèle à D_1 est dans le faisceau.

Soit D une droite du faisceau $\mathcal{F}(D_1, D_2)$ d'équation cartésienne $\phi(M) = 0$. Il existe λ_1, λ_2 non tous deux nuls tels que $\phi = \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2$. Une équation cartésienne de D est donc $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)x + (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)y + (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = 0$. Notons que l'affirmation que D est une droite sous-entend que les coefficients de x et de y ne sont pas simultanément nuls.
Utilisons maintenant la relation entre les u_i et les v_i rappelée en préliminaire : on peut écrire l'équation de D sous la forme $(\lambda_1 + k\lambda_2)u_1 x + (\lambda_1 + k\lambda_2)v_1 y + (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = 0$.
Il suffit maintenant de calculer le déterminant $\begin{vmatrix} (\lambda_1 + k\lambda_2)u_1 & (\lambda_1 + k\lambda_2)v_1 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} = 0$ pour constater que la droite D est parallèle à D_1.

Si maintenant D est une droite parallèle à D_1, si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de D, on est sûr qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}^*$ telle que $a = \lambda u_1$ et $b = \lambda v_1$.
L'équation de D peut donc s'écrire $\lambda u_1 x + \lambda v_1 y + \lambda w_1 + (c - \lambda w_1) = 0$ soit $\phi(M) = 0$ avec $\phi(M) = \lambda\phi_1(M) + (c - \lambda w_1)$.
D'autre part, de la même façon, on a $\phi_2(M) = k\phi_1(M) + (w_2 - kw_1)$. Il suffit d'éliminer les constantes entre ces deux équations pour obtenir une relation entre ϕ, ϕ_1 et ϕ_2. Pour cela, on multiplie la première par $(w_2 - kw_1)$ et la deuxième par $(c - \lambda w_1)$ puis on les soustrait, et on obtient :
$(w_2 - kw_1)\phi(M) - (c - \lambda w_1)\phi_2(M) = \Big(\lambda(w_2 - kw_1) - k(c - \lambda w_1)\Big)\phi_1(M)$. On peut tout diviser par $w_2 - kw_1$ qui est non nul puisque $D_1 \neq D_2$. On obtient
$\phi(M) = \dfrac{\lambda w_2 - kc}{w_2 - kw_1}\phi_1(M) + \dfrac{c - \lambda w_1}{w_2 - kw_1}\phi_2(M)$, donc $D \in \mathcal{F}(D_1, D_2)$.

3° b) Ici aussi on utilisera un raisonnement par double inclusion.
Tout d'abord, dire que D_1 et D_2 sont sécantes en Ω peut se traduire par le fait que $\phi_1(\Omega) = \phi_2(\Omega) = 0$ (Ω appartient aux deux droites) et $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$ (les deux droites sont sécantes).

Soit $D \in \mathcal{F}(D_1, D_2)$. Alors D admet $\phi(M) = 0$ comme équation cartésienne, avec $\phi(M) = \lambda_1\phi_1(M) + \lambda_2\phi_2(M)$. en particulier, $\phi(\Omega) = \lambda_1\phi_1(\Omega) + \lambda_2\phi_2(\Omega) = 0$, donc D passe par Ω.

Réciproquement, si D d'équation $ax + by + c = \phi(M) = 0$ est une droite qui passe par Ω, on a $\phi(\Omega) = 0$. On peut donc écrire $\phi(M) = \phi(M) - \phi(\Omega) = a(x - x_\Omega) + b(y - y_\Omega)$. De la même façon, pour $i = 1, 2$, on peut écrire
$\phi_i(M) = \phi_i(M) - \phi_i(\Omega) = u_i(x - x_\Omega) + v_i(y - y_\Omega)$.
Or, l'hypothèse que D_1 et D_2 sont sécantes se traduit par le fait que (u_1, v_1) et (u_2, v_2) forme une base de $\mathbb{R}^2$; donc le couple (a, b) peut s'exprimer comme combinaison linéaire de ces deux couples : il existe λ_1 et λ_2 tels que $(a, b) = \lambda_1(u_1, v_1) + \lambda_2(u_2, v_2)$ et donc $a = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ et $b = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.
On a donc $\phi(M) = (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)(x - x_\Omega) + (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)(y - y_\Omega) = \lambda_1\phi_1(M) - \lambda_2\phi_2(M)$, donc $D \in \mathcal{F}(D_1, D_2)$.

3° c) Cette question n'est pas aussi triviale qu'il y paraît, à cause de l'existence de plusieurs équations cartésiennes pour la droite D.
Si $D \in \mathcal{F}(D_1, D_2)$, une des équations cartésiennes de D s'écrit sous la forme
$\lambda_1'\phi_1(M) + \lambda_2'\phi_2(M) = 0$, soit $(\lambda_1' u_1 + \lambda_2' u_2)x + (\lambda_1' v_1 + \lambda_2' v_2)y + (\lambda_1' w_1 + \lambda_2' w_2) = 0$.
Puisque $ux + vy + w = 0$ est une autre équation cartésienne de D, il existe une constante k telle que $u = k(\lambda_1' u_1 + \lambda_2' u_2)$, $v = k(\lambda_1' v_1 + \lambda_2' v_2)$ et $w = k(\lambda_1' w_1 + \lambda_2' w_2)$, d'où le résultat souhaité avec $\lambda_1 = k\lambda_1'$ et $\lambda_2 = k\lambda_2'$.
Réciproquement, c'est évident.

3° d) Si deux de ces trois droites sont confondues, le résultat est évident, car à la fois les trois droites sont forcément parallèles ou concourantes (il n'y en a plus que deux ou même une) et le déterminant possède deux colonnes proportionnelles, donc est nul.

Nous supposerons donc dans la suite que les trois droites sont distinctes. Dire que les trois droites sont concourantes ou parallèles signifie alors que $D_3 \in \mathcal{F}(D_1, D_2)$ (d'après 3°a) et b)) et il ne reste plus qu'à montrer que cette dernière affirmation est équivalente à la nullité du déterminant.

D'après 3°c), si $D_3 \in \mathcal{F}(D_1, D_2)$, cela implique que $\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ donc le déterminant de ces trois vecteurs colonnes est nul, c'est-à-dire $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

Réciproquement, si $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$, cela signifie que le système formé par les trois vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}$ est lié, et comme les deux premiers ne sont pas colinéaires (sinon $D_1 = D_2$), c'est que le troisième est dans le plan vectoriel engendré par les deux premiers, donc il existe λ_1, λ_2 tels que $\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ et $D_3 \in \mathcal{F}(D_1, D_2)$, d'après c). $\square$

3° e) Il n'est pas besoin de déterminer les coordonnées de A : il suffit de chercher la droite D dans le faisceau $\mathcal{F}(D_1, D_2)$. L'équation de D est donc de la forme
$\lambda(x+y-4) + \mu(x-2y+5) = 0 \iff (\lambda+\mu)x + (\lambda-2\mu)y - 4\lambda + 5\mu = 0.$

Cette droite est parallèle à la droite d'équation $3x + y = 0$ si et seulement si
$\begin{vmatrix} \lambda+\mu & \lambda-2\mu \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda+\mu-3(\lambda-2\mu) = 0 \iff 7\mu = 2\lambda$. Il n'y a évidemment pas unicité de la solution, car si on est sûr qu'il existe une seule droite passant par A parallèle à une droite donnée, en revanche cette droite possède une infinité d'équations, toutes proportionnelles. On peut prendre, pour éviter d'avoir à manipuler des fractions, $\lambda = 7$ et $\mu = 2$, et on trouve l'équation $(7+2)x + (7-4)y - 28 + 10 = 0 \iff 3x + y - 6 = 0$.

Exercice 1.13.

1° a) C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.19 p. 11 : on est en dimension 3, il y a donc trois équations, et P est de dimension 2, donc il y a deux paramètres. Les vecteurs de base de $\overrightarrow{P}$ sont $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, leurs coordonnées sont $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ d'où la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = y_A + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = z_A + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

1° b) Soit A le point de coordonnées (a, d, g), et soient $\overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$. Si ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, $P = A+ < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} >$ est un plan dont une représentation paramétrique est exactement la même que celle de Π, donc $\Pi = P$ est bien un plan.
Si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, il est clair que $\Pi = \{A\}$ et n'est donc pas un plan.
Si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires et non tous deux nuls, par exemple si $\overrightarrow{v}$ est non nul, alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{w} = k\overrightarrow{v}$, donc $c = kb$, $f = ke$ et $i = kh$, et le système qui caractérise Π peut s'écrire $\begin{cases} x = a + b(t+ku) \\ y = d + e(t+ku) \\ z = g + h(t+ku) \end{cases}$, $(\lambda = t + ku \in \mathbb{R})$ et caractérise la droite $A+ < \overrightarrow{v} >$, donc Π n'est pas un plan.

En résumé, Π est un plan si et seulement si les triplets (b, e, h) et (c, f, i) ne sont pas colinéaires. Dans ce cas, Π passe par le point $A(a, d, g)$ et sa direction est $\overrightarrow{\Pi} =< \vec{v}, \vec{w} >$ avec $\vec{v}\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$.

· Ce plan passe par $O(0, 0, 0)$ si et seulement si il existe deux scalaires t, u tels que $\begin{cases} 0=a+bt+cu \\ 0=d+et+fu \\ 0=g+ht+iu \end{cases}$. On peut interpréter ce système en disant que si $\vec{x}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}$, on a $\vec{x} = -t\vec{v} - u\vec{w}$, donc on peut en déduire que le système $(\vec{x}, \vec{v}, \vec{w})$ est lié, donc le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$. Réciproquement, si ce déterminant est nul, les trois vecteurs $\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}$ forment un système lié, et comme $\vec{v}, \vec{w}$ sont indépendants, nécessairement $\vec{x}$ est combinaison linéaire de ces deux vecteurs, ce qui permet d'affirmer qu'il existe t', u' tels que $\vec{x} = t'\vec{v} + u'\vec{w}$ et donc, en posant $t = -t'$ et $u = -u'$, on a $\begin{cases} 0 = a + bt + cu \\ 0 = d + et + fu \\ 0 = g + ht + iu \end{cases}$, donc Π passe par O.

Finalement, on a $O \in \Pi \iff \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$.

1° c) La méthode la plus simple consiste à se ramener à la question 1°a) en écrivant $(ABC) = A+ < \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} >$, donc une représentation paramétrique du plan (ABC) est $\begin{cases} x = x_A + \lambda(x_B - x_A) + \mu(x_C - x_A) \\ y = y_A + \lambda(y_B - y_A) + \mu(y_C - y_A) \\ z = z_A + \lambda(z_B - z_A) + \mu(z_C - z_A) \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1° d) Les plans P et Π sont parallèles si et seulement si $\vec{P} = \overrightarrow{\Pi}$, ce qui peut se traduire en utilisant les vecteurs directeurs de chacun de ces plans : soit $\vec{v}\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$, $\vec{X}\begin{pmatrix} \beta \\ \beta' \\ \beta'' \end{pmatrix}$ et $\vec{Y}\begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \\ \gamma'' \end{pmatrix}$; P et $\overrightarrow{\Pi}$ sont parallèles si et seulement si $\text{rg}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{X}, \vec{Y}) = 2$.

Pour vérifier cette condition facilement, sachant que par exemple $\vec{v}, \vec{w}$ sont indépendants (puisqu'on suppose que P est un plan), il faut et il suffit que les deux déterminants $\begin{vmatrix} b & c & \beta \\ e & f & \beta' \\ h & i & \beta'' \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} b & c & \gamma \\ e & f & \gamma' \\ h & i & \gamma'' \end{vmatrix}$ soient nuls. Une autre façon de voir les chose : il suffit que la matrice $\begin{pmatrix} b & c & \beta & \gamma \\ e & f & \beta' & \gamma' \\ h & i & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$ soit de rang 2.

Les plans P et Π sont confondus lorsqu'ils sont parallèles et qu'en plus, ils ont un point commun, donc si $A(a, d, g)$ et $B(\alpha, \alpha', \alpha'')$, les plans étant parallèles, ils sont confondus si et seulement si $B \in P \iff (\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AB})$ est lié $\iff \begin{vmatrix} b & c & \alpha - a \\ e & f & \alpha' - d \\ h & i & \alpha'' - g \end{vmatrix} = 0.$

En termes de rang de matrice, $P = \Pi \iff \operatorname{rg} \begin{pmatrix} b & c & \beta & \gamma & \alpha - a \\ e & f & \beta' & \gamma' & \alpha' - d \\ h & i & \beta'' & \gamma'' & \alpha'' - g \end{pmatrix} = 2.$

En résumé :

$$P /\!/ \Pi \iff \begin{vmatrix} b & c & \beta \\ e & f & \beta' \\ h & i & \beta'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & \gamma \\ e & f & \gamma' \\ h & i & \gamma'' \end{vmatrix} = 0 \iff \operatorname{rg} \begin{pmatrix} b & c & \beta & \gamma \\ e & f & \beta' & \gamma' \\ h & i & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} = 2,$$

$$P = \Pi \iff \begin{vmatrix} b & c & \beta \\ e & f & \beta' \\ h & i & \beta'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & \gamma \\ e & f & \gamma' \\ h & i & \gamma'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha - a & b & c \\ \alpha' - d & e & f \\ \alpha'' - g & h & i \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \operatorname{rg} \begin{pmatrix} b & c & \beta & \gamma & \alpha - a \\ e & f & \beta' & \gamma' & \alpha' - d \\ h & i & \beta'' & \gamma'' & \alpha'' - g \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{et bien sûr } (P \text{ et } \Pi \text{ sont sécants}) \iff \begin{vmatrix} b & c & \beta \\ e & f & \beta' \\ h & i & \beta'' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou} \begin{vmatrix} b & c & \gamma \\ e & f & \gamma' \\ h & i & \gamma'' \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\iff \operatorname{rg} \begin{pmatrix} b & c & \beta & \gamma \\ e & f & \beta' & \gamma' \\ h & i & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} = 3.$$

1° e) Il y a un petit piège dans cette question, c'est que les paramètres utilisés pour les deux plans sont les mêmes. Il serait catastrophique d'essayer de résoudre tel quel le système de six équations qu'on obtient en juxtaposant les deux représentations paramétriques. Ce n'est possible qu'en changeant les noms des paramètres d'une des deux représentations, par exemple en écrivant que P' est caractérisé par

$$\begin{cases} x = -2 - t' \\ y = -3 - t' - 2u' \qquad t', u' \in \mathbb{R}. \\ z = t' + u' \end{cases}$$

On peut alors résoudre le système de 6 équations à 7 inconnues x, y, z, t, u, t', u' :

$$(S)\begin{cases} x = 1 + 3t - u \\ y = -3 - t \\ z = u \\ x = -2 - t' \\ y = -3 - t' - 2u' \\ z = t' + u' \end{cases}$$

mais cette méthode est « lourde ». Voyons quand même ce que cela donne.

$$(S) \iff \begin{cases} x = 1 + 3t - u \\ y = -3 - t \\ z = u \\ 1 + 3t - u = -2 - t' \\ -3 - t = -3 - t' - 2u' \\ u = t' + u' \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3t - u + 1 \\ y = -t - 3 \\ z = u \\ 3t - u + t' = -3 \\ -t + t' + 2u' = 0 \\ u - t' - u' = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3t - u + 1 \\ y = -t - 3 \\ z = u \\ t - t' - 2u' = 0 & (L_4 \leftarrow -L_5) \\ -u + 4t' + 6u' = -3 & (L_5 \leftarrow L_4 + 3L_5) \\ u - t' - u' = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3t - u + 1 \\ y = -t - 3 \\ z = u \\ t - t' - 2u' = 0 \\ -u + 4t' + 6u' = -3 \\ 3t' + 5u' = -3 & (L_6 \leftarrow L_6 + L_5) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t' = -\frac{5}{3}u' - 1 \\ u = 4(-\frac{5}{3}u' - 1) + 6u' + 3 = -\frac{2}{3}u' - 1 \\ t = (-\frac{5}{3}u' - 1) + 2u' = \frac{1}{3}u' - 1 \\ x = 3(\frac{1}{3}u' - 1) - (-\frac{2}{3}u' - 1) + 1 = -1 + \frac{5}{3}u' \\ y = -(\frac{1}{3}u' - 1)) - 3 = -2 - \frac{1}{3}u' \\ z = -1 - \frac{2}{3}u' \end{cases} \qquad (u' \in \mathbb{R})$$

Les valeurs de t, u, t' n'ont pas d'importance, et on considère u' comme un paramètre, on a donc obtenu, avec les trois dernières équations, une représentation paramétrique de l'intersection de P et P', qui est $\begin{cases} x = -1 + \frac{5}{3}u' \\ y = -2 - \frac{1}{3}u' \\ z = -1 - \frac{2}{3}u' \end{cases}$; en posant $\lambda = \frac{1}{3}u'$, pour simplifier,

on obtient $\begin{cases} x = -1 + 5\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$ et on a montré que $P \cap P'$ est la droite $\Delta = A + < \overrightarrow{U} >$

avec $A(-1, -2, -1)$ et $\overrightarrow{U} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

D'autres méthodes sont plus efficaces, en particulier, déterminer une équation cartésienne de chaque plan, ou d'un des deux, comme nous le verrons en 2°.
Le résultat ne devrait pas dépendre de la méthode, mais on ne tombera pas toujours ni sur le même point A, ni sur le même vecteur $\overrightarrow{U}$: tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{U}$ est valable, et tout point A' tel que $\overrightarrow{AA'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{U}$ convient aussi ; par exemple on pourrait tomber sur $A - \overrightarrow{U} = B(-6, -1, 1)$ et $A + \overrightarrow{U} = C(4, -3, -3)$ qui sont les points de coordonnées entières les plus proches de A.

2° a) On applique la proposition 1.21 p. 14, et donc ici un plan de dimension $p = 2$ dans un espace affine de dimension $n = 3$ est caractérisé par un « système » d'une $(3-2)$ seule équation linéaire, à trois (dimension de E) inconnues, de la forme $ux + vy + wz = h$. D'après la réciproque de cette même proposition, pour qu'une équation de ce type caractérise un plan il suffit que le système qu'elle forme à elle seule soit de rang $n - p = 1$, donc que les trois coefficients u, v, w ne soient pas simultanément nuls.

2° b) La direction $\overrightarrow{\Pi}$ du plan Π : $ax + by + cz = d$ est caractérisée par $ax + by + cz = 0$ (toujours d'après la proposition 1.21 p. 14) et les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vérifient visiblement cette équation, donc ce sont des vecteurs de ce plan. En revanche, il n'est pas certain que $\overrightarrow{\Pi} =< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$ car il n'est pas certain que les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ soient indépendants ni même non nuls. Étudions le caractère libre ou non du système $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. λ et μ sont deux scalaires tels que $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si
$$\begin{cases} -\lambda b - \mu c = 0 \\ \lambda a = 0 \\ \mu a = 0. \end{cases}$$
Si $a \neq 0$, alors on est sûr que le système est libre. En revanche, si $a = 0$, le système $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est clairement lié. Donc les deux vecteurs proposés engendrent $\overrightarrow{P}$ si et seulement si $a \neq 0$.

Il est facile de fabriquer d'autres vecteurs de $\overrightarrow{\Pi}$: par exemple le vecteur $\overrightarrow{w} \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix}$ est clairement un vecteur de ce plan vectoriel, et si $b \neq 0$, alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ est libre, et si $c \neq 0$, alors c'est le système $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ qui est libre. Comme au moins un des trois nombres a, b, c est non nul, on dispose ainsi d'une base de $\overrightarrow{\Pi}$ qui est selon les cas $(\vec{u}, \vec{v})$, $(\vec{u}, \vec{w})$ ou $(\vec{v}, \vec{w})$. D'ailleurs, on peut affirmer que dans tous les cas, on a $\Pi = < \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} >$.

L'énoncé demandait de trouver encore un autre vecteur dans Π non colinéaires aux précédents. On peut choisir le vecteur $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} -b-c \\ a-c \\ a+b \end{pmatrix}$, par exemple est un vecteur qui convient, ainsi d'ailleurs que tout vecteur s'écrivant comme combinaison linéaire de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

2° c) Les plans $P\ :\ ax + by + cz = d$ et $P'\ :\ a'x + b'y + c'z = d'$ sont parallèles si et seulement si leurs directions respectives $\overrightarrow{P}\ :\ ax + by + cz = 0$ et $\overrightarrow{P'}\ :\ a'x + b'y + c'z = 0$ sont des plans vectoriels confondus, ce qui nécessite que le système $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$ ou, ce qui revient au même, sa matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ soit de rang 1, donc qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ (k est forcément non nul pour que P et P' soient bien des plans) tel que $a' = ka$, $b' = kb$ et $c' = kc$. En terme de déterminants, on peut caractériser cette condition par $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0$.

Les plans P et P' sont confondus si étant parallèles, ils ont, en plus, un point commun. Mais s'ils sont parallèles, l'équation de P' s'écrit $k(ax + by + cz) = d'$, et puisque $A(x_A, y_A, z_A) \in P$, on a $P = P' \iff A \in P' \iff k(ax_A + by_A + cz_A) = d' \iff kd = d'$ puisque $ax_A + by_A + cy_A = d$ ($A \in P$).
Finalement, on peut donc conclure que $P = P' \iff \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$ et $d' = kd$.

Les plans P et P' sont sécants si et seulement si ils ne sont pas parallèles, donc si et seulement si un au moins des trois déterminants $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$ est non nul.

2° d) Puisque le plan $P\ :\ ax + by + cz = d$ ne passe pas par l'origine, alors $d \neq 0$; d'autre part le vecteur $\vec{\imath}$ n'appartient pas $\overrightarrow{P}$ (pour que l'axe Ox ne soit pas faiblement parallèle à P), donc $a \neq 0$ (les coordonnées $(1, 0, 0)$ de $\vec{\imath}$ ne doivent pas vérifier l'équation homogène $ax + by + cz = 0$ de $\overrightarrow{P}$) ; de même $b \neq 0$ et $c \neq 0$. On a donc : $ax + by + cz = d \iff a'x + b'y + c'z = 1$ avec $a' = \frac{a}{d}$, $b' = \frac{b}{d}$, $c' = \frac{c}{d}$. Comme a, b, c soient tous trois non nuls, en posant $\frac{1}{a'} = \alpha = \frac{d}{a}$, $\frac{1}{b'} = \beta = \frac{d}{b}$ et $\frac{1}{c'} = \gamma = \frac{d}{c}$, on trouve bien qu'une équation cartésienne de P est $\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} + \dfrac{z}{\gamma} = 1$.

Si le plan P admet une équation cartésienne du type $\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} + \dfrac{z}{\gamma} = 1$, alors α peut s'interpréter comme l'abscisse du point d'intersection A de P avec l'axe Ox (caractérisé par $x = y = 0$), puisque $A(\alpha, 0, 0) \in P$, de même, β est l'ordonnée du point

B d'intersection de P avec l'axe Oy (caractérisé par $x = z = 0$) puisque $B(0, \beta, 0) \in P$ et γ est la cote (la troisième coordonnée) du point C d'intersection de P avec l'axe Oz (caractérisé par $x = y = 0$) puisque $C(0, 0, \gamma) \in P$.

2° e) L'hypothèse sous-entend que $< \vec{u}, \vec{v} >$ est un plan vectoriel, donc que $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre. Un point $M(x, y, z)$ appartient à $P = A + < \vec{u}, \vec{v} >$ si et seulement si il existe des scalaires λ, μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ ce qui est équivalent (c'est là qu'on utilise le fait que $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre) au fait que le système de trois vecteurs $(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})$ est lié, ce qu'on peut caractériser par la nullité du déterminant de leurs coordonnées, c'est-à-dire par $\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha & \alpha' \\ y - y_A & \beta & \beta' \\ z - z_A & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0$. En développant ce déterminant par rapport à la première colonne, on trouve l'équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}(x - x_A) - \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}(y - y_A) + \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}(z - z_A) = 0.$$

2° f) On peut calculer le déterminant 4×4 de cette question en soustrayant la première colonne de chacune des trois autres, puis en le développant par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C & x \\ y_A & y_B & y_C & y \\ z_A & z_B & z_C & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x_A & x_B - x_A & x_C - x_A & x - x_A \\ y_A & y_B - y_A & y_C - y_A & y - y_A \\ z_A & z_B - z_A & z_C - z_A & z - z_A \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -\begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A & x - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A & y - y_A \\ z_B - z_A & z_C - z_A & z - z_A \end{vmatrix} = 0.$$

Or, la question précédente a montré que cette dernière équation caractérise le plan passant par A et dirigé par le plan $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} >$, qui n'est autre que le plan passant par A, B, C. (L'hypothèse supposait implicitement que ces points A, B, C ne sont pas alignés, donc que les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sont indépendants).

Si les trois points A, B, C ne sont pas alignés, les quatre points A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si D appartient au plan défini par les trois points A, B, C, donc d'après ce qu'on vient de voir, si et seulement si $\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \\ z_A & z_B & z_C & z_D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Si les trois points A, B, C sont alignés alors les quatre points A, B, C, D sont forcément coplanaires, et il reste à prouver que le déterminant $\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \\ z_A & z_B & z_C & z_D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ est forcément

nul dans ce cas. Or, on peut encore calculer ce déterminant en soustrayant la première colonne à la deuxième et à la troisième, et on trouve
$\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \\ z_A & z_B & z_C & z_D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_A & x_B - x_A & x_C - x_A & x_D \\ y_A & y_B - y_A & y_C - y_A & y_D \\ z_A & z_B - z_A & z_C - z_A & z_D \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Mais $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs colinéaires (puisque A, B, C sont supposés alignés), et les coordonnées de ces deux vecteurs (qu'on retrouve dans les colonnes 2 et 3 de ce déterminant) sont proportionnelles. Donc ce déterminant a deux colonnes proportionnelles et il est donc nul.

En résumé, on a bien prouvé que

$$A, B, C, D \text{ sont coplanaires} \iff \begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \\ z_A & z_B & z_C & z_D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2° g) Si on connaît l'équation cartésienne d'un plan, on a vu comment trouver deux vecteurs formant une base de sa direction en b), et on peut facilement trouver un point en fixant des valeurs arbitraires pour deux des coordonnées et en calculant la troisième.

Par exemple, si $a \neq 0$, une représentation paramétrique du plan $P : ax + by + cz = d$ est $\begin{cases} x = -\frac{d}{a} - b\lambda - c\mu \\ y = \quad a\lambda \\ z = \quad a\mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

On a vu, réciproquement, en e), comment écrire une équation cartésienne d'un plan dont on connaît un point et une base de la direction, ce qu'on lit directement dans une représentation paramétrique : une équation cartésienne du plan $\Pi : \begin{cases} x = a + bt + cu \\ y = d + et + fu \\ z = g + ht + iu \end{cases} \quad (t, u \in \mathbb{R})$ est

$$\begin{vmatrix} x-a & b & c \\ y-d & e & f \\ z-g & h & i \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}(x-a) - \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}(y-d) + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}(z-g) = 0.$$

3° a) Si P_1 et P_2 sont deux plans parallèles, d'après 2° c), il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $u_2 = ku_1$, $v_2 = kv_1$ et $w_2 = kw_1$, mais $h_2 \neq kh_1$ puisque ces deux plans sont supposés distincts. Un plan P du faisceau $\mathcal{F}(P_1, P_2)$ possède une équation cartésienne du type $\lambda_1\phi_1(M) + \lambda_2\phi_2(M) = 0$, qui s'écrit

$$\lambda_1(u_1x + v_1y + w_1z + h_1) + \lambda_2(u_2x + v_2y + w_2z + h_2) = 0 \iff$$
$$(\lambda_1 + k\lambda_2)u_1x + (\lambda_1 + k\lambda_2)v_1y + (\lambda_1 + k\lambda_2)w_1z + \lambda_1h_1 + \lambda_2h_2 = 0.$$

Cette équation est celle d'un plan parallèle à P_1 d'après 2°c).

Réciproquement, si Π est un plan parallèle à P_1, il possède une équation du type $\phi(M) = ux + vy + wz + h = 0$ avec $u = \alpha u_1$, $v = \alpha v_1$ et $w = \alpha w_1$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). Montrons qu'on peut trouver $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ et $h = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$, ce qui prouvera que $\Pi \in \mathcal{F}(P_1, P_2)$.

En utilisant toutes les hypothèses, ces quatre équations peuvent s'écrire

$$\begin{cases} \alpha u_1 = (\lambda_1 + k\lambda_2)u_1 \\ \alpha v_1 = (\lambda_1 + k\lambda_2)v_1 \\ \alpha w_1 = (\lambda_1 + k\lambda_2)w_1 \\ h = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + k\ \lambda_2 = \alpha \\ h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2 = h \end{cases}$$

(au moins un des trois nombres u_1, v_1, w_1 est non nul pour que P_1 soit un plan). Ce système de deux équations à deux inconnues (λ_1, λ_2) possède une unique solution car son déterminant est $\begin{vmatrix} 1 & k \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} = h_2 - kh_1 \neq 0$ comme on l'a vu plus haut. L'unique couple solution (λ_1, λ_2) de ce système (qu'il est inutile de déterminer) [1] est tel que $\phi = \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2$, donc $\Pi \in \mathcal{F}(P_1, P_2)$.

3° b) Si P_1 et P_2 sont sécants, au moins un des trois déterminants $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$ est non nul. Soit $\Delta = A+ < \overrightarrow{V} >$ la droite d'intersection de P_1 et P_2. Soient $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\overrightarrow{V}$, et (x_A, y_A, z_A) celles de A. Par définition, les points M de Δ sont dans P_1 et dans P_2 donc sont tels que $\phi_1(M) = \phi_2(M) = 0$. Donc quels que soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ on a $(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2)(M) = 0$, ce qui prouve que Δ est incluse dans tous les plans du faisceau $\mathcal{F}(P_1, P_2)$.

Réciproquement, soit $\Pi\ :\ \phi(M) = ux + vy + wz + h = 0$ un plan contenant la droite Δ. Le vecteur directeur $\overrightarrow{V}$ de Δ est donc dans $\overrightarrow{\Pi}$, donc on a $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$. Comme ce vecteur appartient aussi par définition à P_1 et à P_2, ses coordonnées sont un triplet non nul solution du système $\begin{cases} u\alpha + v\beta + w\gamma = 0 \\ u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma = 0 \\ u_2\alpha + v_2\beta + w_2\gamma = 0. \end{cases}$

Ce système est donc de rang strictement inférieur à 3, et comme (u_1, v_1, w_1) et (u_2, v_2, w_2) sont des triplets indépendants (puisque les plans sont sécants), on est sûr que (u, v, w) est combinaison linéaire de ces deux triplets, donc il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels

[1] Avec la méthode de Kramer, on trouve quand même aisément ces valeurs : $\lambda_1 = \frac{\alpha h_2 - kh}{h_2 - kh_1}$ et $\lambda_2 = \frac{k - \alpha h_1}{h_2 - kh_1}$.

que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ et $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$. L'équation cartésienne de Π dont on est parti peut donc s'écrire $\lambda_1(u_1 x + v_1 y + w_1 z) + \lambda_2(u_2 x + v_2 y + w_2 z) + h = 0$.

Or, on a aussi $A \in \Pi$, donc on a $\lambda_1(u_1 x_A + v_1 y_A + w_1 z_A) + \lambda_2(u_2 x_A + v_2 y_A + w_2 z_A) + h = 0$.
Mais $A \in P_1$ et $A \in P_2$, donc pour $i = 1, 2$ on a $u_i x_A + v_i y_A + w_i z_A = -h_i$ et on a donc $-\lambda_1 h_1 - \lambda_2 h_2 + h = 0$, ce qui prouve que $\phi = \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2$ et donc $\Pi \in \mathcal{F}(P_1, P_2)$.

On a prouvé que $\mathcal{F}(P_1, P_2)$ est l'ensemble des plans contenant la droite Δ.

3° c) Il ne faut pas croire qu'il n'y a rien à démontrer dans cette question. En effet, la définition du faisceau de plan donne qu'un plan est dans ce faisceau lorsqu'une de ses équations est de la forme $\phi(M) = (\lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2)(M) = 0$. Ici, on part d'une équation quelconque $\phi(M) = ux + vy + wz + h = 0$ du plan P, ce n'est pas forcément, a priori, celle qui convient.

Il est clair que s'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ non nuls tels que $\begin{cases} u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \\ v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \\ w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \\ h = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2, \end{cases}$

alors $P \in \mathcal{F}(P_1, P_2)$.

Réciproquement, si $P \in \mathcal{F}(P_1, P_2)$, soit $\phi'(M) = u'x + v'y + w'z + h' = 0$ une équation cartésienne de P pour laquelle il existe $(\lambda'_1, \lambda'_2) \neq (0, 0)$ tel que $\begin{cases} u' = \lambda'_1 u_1 + \lambda'_2 u_2 \\ v' = \lambda'_1 v_1 + \lambda'_2 v_2 \\ w' = \lambda'_1 w_1 + \lambda'_2 w_2 \\ h' = \lambda'_1 h_1 + \lambda'_2 h_2. \end{cases}$
Puisque $\phi(M) = 0$ et $\phi'(M) = 0$ sont deux équations cartésiennes du même plan, il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\phi = k\phi'$, c'est-à-dire $u = ku'$, $v = kv'$, $w = kw'$ et $h = kh'$. On en déduit que $\begin{cases} u = k\lambda'_1 u_1 + k\lambda'_2 u_2 \\ v = k\lambda'_1 v_1 + k\lambda'_2 v_2 \\ w = k\lambda'_1 w_1 + k\lambda'_2 w_2 \\ h = k\lambda'_1 h_1 + k\lambda'_2 h_2 \end{cases}$ donc il existe bien $(\lambda_1, \lambda_2) = (k\lambda'_1, k\lambda'_2) \neq (0, 0)$ tel que $\begin{cases} u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \\ v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \\ w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \\ h = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2. \end{cases}$

3° d) Pour déterminer l'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$, il suffit de résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = -d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = -d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = -d_3 \end{cases}$ car chaque solution de ce système est le triplet des coordonnées d'un point qui appartient aux trois plans. Donc l'intersection de ces trois plans est réduite à un point si et seulement si ce système possède une solution unique et un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues possède une solution unique si et seulement il est de rang 3 donc si et seulement si son déterminant est non nul, ce qui s'écrit ici : $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$

3° e) Supposons que l'intersection des quatre plans est non vide.
Soit $A(x_A, y_A, z_A) \in P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4$, alors on est sûr que (x_A, y_A, z_A) est une solution du système de quatre équations à trois inconnues $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0, \end{cases}$
donc $(x_A, y_A, z_A, 1)$ est un quadruplet non nul solution du système homogène de quatre équations à quatre inconnues x, y, z, t : $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3t = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4t = 0. \end{cases}$

Ce système est donc de rang strictement inférieur à 4, et on a $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$
(Si son déterminant était non nul, ce système admettrait une solution unique, or, il en admet au moins deux : le quadruplet $(x_A, y_A, z_A, 1)$ et la solution triviale $(0, 0, 0, 0)$).

Supposons maintenant qu'il existe une droite Δ, dirigée par un vecteur non nul $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ qui est faiblement parallèle aux quatre plans. Alors ce vecteur $\vec{u}$ appartient à chaque direction $\vec{\Pi}_i$, qui admet comme équation $a_ix + b_iy + c_iz = 0$.

Le triplet (α, β, γ) est donc solution non triviale du système de quatre équations à trois inconnues $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z = 0 \end{cases}$, donc $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$ est un quadruplet non nul solution du système homogène de quatre équations à quatre inconnues x, y, z, t :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3t = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4t = 0. \end{cases}$$

Pour la même raison que dans le cas de plans sécants, ce système a donc son déterminant qui est nul et on a bien, dans ce cas aussi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$

Réciproquement, supposons que le déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$ est nul. Alors le système de quatre équations à quatre inconnues $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3t = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4t = 0 \end{cases}$ admet une solution non triviale $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ [2]. Tout quadruplet du type $(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma, \lambda\delta)$ est aussi une solution de ce système.

Si $\delta \neq 0$, alors, en choisissant $\lambda = \frac{1}{\delta}$, on trouve une solution de la forme $(\alpha', \beta', \gamma', 1)$, donc le point $A(\alpha', \beta', \gamma')$ a des coordonnées solution du système de quatre équations à trois inconnues $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases}$ c'est donc un point appartenant aux quatre plans Π_i, et l'intersection de ces quatre plans est non vide.

Si $\delta = 0$, alors le triplet (α, β, γ) (qui est forcément non nul) est solution du système homogène de quatre équations à trois inconnues $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z = 0 \end{cases}$ donc le

[2] L'ensemble solution de ce système est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, noyau de l'endomorphisme dont la matrice pour la base canonique est $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$; cet endomorphisme n'est pas bijectif, puisque son déterminant est nul, il n'est donc pas injectif, et son noyau n'est pas réduit à $(0, 0, 0, 0)$.

vecteur non nul $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ appartient aux quatre directions de plans $\overrightarrow{\Pi}_i$, et toute droite Δ dirigée par $\overrightarrow{u}$ est faiblement parallèle aux quatre plans Π_i. □

(La technique utilisée dans cet exercice, consistant à utiliser des quadruplets au lieu des triplets de coordonnées, est à rapprocher de ce qu'on fait au chapitre 3, dans l'espace universel, avec des coordonnées augmentées.
Avec un point de vue de géométrie projective (dont nous étudierons quelques rudiments au chapitre 4.1), lorsqu'une droite est faiblement parallèle aux quatre plans, on peut aussi considérer que le point à l'infini de la droite projective qu'elle représente (dans la carte affine qu'est l'espace E) est à l'intersection des quatre plans projectifs représentés par les plans affines. De ce point de vue, le déterminant 4×4 qu'on a étudié dans cette question est nul si et seulement si les quatre plans ont un point commun, qui est éventuellement un point à l'infini.)

Exercice 1.14.

1° a) On applique la proposition 1.19 p. 11 ; ici on cherche une représentation paramétrique de $D = A + \overrightarrow{D}$ avec $\overrightarrow{D} =< \overrightarrow{u} >$ de dimension 1. $\overrightarrow{u}$ est une base de $\overrightarrow{D}$, on a $p = 1$, et la dimension de l'espace est 3, donc il y a trois équations avec un seul paramètre. On obtient bien, en application de cette proposition, la représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha \\ y = y_A + \lambda\beta \\ z = z_A + \lambda\gamma \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

1° b) Si b, d, f ne sont pas tous les trois nuls, on considère le vecteur non nul $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}b\\ d\\ f\end{pmatrix}$ et le point $A(a, c, e)$. La représentation paramétrique de la droite $D = A+ < \overrightarrow{u} >$ est exactement le système $\begin{cases} x = a + bt \\ y = c + dt \\ z = e + ft \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ qui caractérise l'ensemble Δ, donc $\Delta = D$ est bien une droite. Si $b = d = f = 0$, il est clair que $\Delta = \{A\}$ est un singleton. Donc Δ est une droite si et seulement si $(b, d, f) \neq (0, 0, 0)$. Dans ce cas, un point de Δ est $A(a, c, e)$ et un vecteur directeur de Δ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}b\\ d\\ f\end{pmatrix}$, comme on vient de le voir. Cette droite passe par O lorsqu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $O = A + t\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, ce qui équivaut au fait que les triplets (a, c, e) et (b, d, f) sont proportionnels, ou encore au fait que les trois déterminants $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & e \\ d & f \end{vmatrix}$ sont nuls.

1° c) Il suffit d'écrire qu'un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}$ et qu'elle passe par A, on obtient la représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_A + \lambda(x_B - x_A) \\ y = y_A + \lambda(y_B - y_A) \\ z = z_A + \lambda(z_B - z_A) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

1° d) Les droites D et Δ sont parallèles lorsque leurs vecteurs directeurs (respectivement $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{X}\begin{pmatrix} \beta \\ \beta' \\ \beta'' \end{pmatrix}$) sont colinéaires, ce qui se traduit par le fait que les trois déterminants
$\begin{vmatrix} b & d \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & f \\ \beta & \beta'' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} d & f \\ \beta' & \beta'' \end{vmatrix}$ sont nuls.
Les droites D est Δ sont confondues lorsqu'elles sont parallèles et ont un point commun. Soit $A(a, c, e)$ et soit $B(\alpha, \alpha', \alpha'')$. Les droites D et Δ sont confondues si et seulement si elles sont parallèles et qu'on a $B \in D$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}$ colinéaire à $\overrightarrow{u}$ (et donc aussi à $\overrightarrow{X}$).
Finalement, on peut conclure que D et Δ sont confondues si et seulement si les trois triplets $(\alpha - a, \alpha' - c, \alpha'' - e)$, (b, d, f) et (β, β', β'') sont proportionnels ce qui peut aussi se traduire par le fait que la matrice $\begin{pmatrix} \alpha - a & b & \beta \\ \alpha' - c & d & \beta' \\ \alpha'' - e & f & \beta'' \end{pmatrix}$ est de rang 1.

Ces deux droites sont sécantes lorsqu'elles ne sont pas parallèles et qu'elles ont au moins un point commun, ce qui peut se traduire par le fait que le système suivant, de six équations à cinq inconnues (x, y, z, t, λ), possède une solution unique.

$$\begin{cases} x = a + bt \\ y = c + dt \\ z = e + ft \\ x = \alpha + \beta\lambda \\ y = \alpha' + \beta'\lambda \\ z = \alpha'' + \beta''\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x = a + bt \\ y = c + dt \\ z = e + ft \\ a + bt = \alpha + \beta\lambda \\ c + dt = \alpha' + \beta'\lambda \\ e + ft = \alpha'' + \beta''\lambda. \end{cases}$$

Il est clair que si on trouve une solution unique pour le « sous-système » formé par les trois dernières équations, alors le système complet admettra lui aussi une solution unique. Étudions ce sous-système :

$$\begin{cases} a + bt = \alpha + \beta\lambda \\ c + dt = \alpha' + \beta'\lambda \\ e + ft = \alpha'' + \beta''\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} bt - \beta\ \lambda = \alpha\ \ - a \\ dt - \beta'\ \lambda = \alpha'\ \ - c \\ ft - \beta''\lambda = \alpha'' - e. \end{cases}$$

Si ce système (de trois équations à deux inconnues) admet une solution (t_0, λ_0), c'est que le triplet $(t_0, \lambda_0, 1)$ est une solution non nulle du système de trois équations à trois inconnues (t,λ,u) : $(\Sigma)\begin{cases} bt-\beta\ \lambda-(\alpha\ \ -a)u=0\\ dt-\beta'\ \lambda-(\alpha'\ \ -c)u=0\\ ft-\beta''\lambda-(\alpha''-e)u=0.\end{cases}$ donc que le rang de ce système (qui est le rang de la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} b & \beta & \alpha-a\\ d & \beta' & \alpha'-c\\ f & \beta'' & \alpha''-f\end{pmatrix}$) est strictement inférieur à 3.

Or, le fait que les droites ne sont pas parallèles implique que les deux premières colonnes de cette matrice sont indépendantes, donc que le rang de cette matrice est 2.

Réciproquement, si le rang de la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} b & \beta & \alpha-a\\ d & \beta' & \alpha'-c\\ f & \beta'' & \alpha''-f\end{pmatrix}$ est 2, les deux premières colonnes de A étant indépendantes, alors la troisième colonne est combinaison linéaire (de façon unique, d'ailleurs !) des deux premières, donc il existe $\mu,\nu\in\mathbb{R}$ tels que $\begin{cases}\alpha-a=\mu b+\nu\beta\\ \alpha'-c=\mu d+\nu\beta'\\ \alpha''-e=\mu f+\nu\beta''\end{cases}$ ce qui montre que le système (Σ) possède une unique solution qui est $(t,\lambda)=(\mu,-\nu)$.

Finalement, on a montré que les deux droites D et Δ sont sécantes si et seulement si $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} b & \beta & \alpha-a\\ d & \beta' & \alpha'-c\\ f & \beta'' & \alpha''-f\end{pmatrix}=2$, les deux premières colonnes de cette matrice étant indépendantes.

1° e) Le plus simple est de former la matrice A de la question précédente et d'étudier son rang ; ici, on a $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} b & \beta & \alpha-a\\ d & \beta' & \alpha'-c\\ f & \beta'' & \alpha''-f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Les deux premières colonnes de cette matrice sont clairement indépendantes, donc on peut déjà affirmer que les droites ne sont pas parallèles (ni a fortiori confondues) et comme le déterminant de cette matrice est $\det \mathrm{A}=9\neq 0$, on est sûr que ces droites ne sont pas sécantes (ce sont deux droites de l'espace non parallèles qui ne se rencontrent pas : c'est la situation la plus banale).

On aurait aussi pu essayer de résoudre le système de six équations à cinq inconnues qu'on obtiendrait en réunissant les deux représentations paramétriques, à condition de penser à changer le nom d'un des deux paramètres (il ne doit pas n'y avoir que quatre inconnues x,y,z,t, mais bien cinq, par exemple x,y,z,t,t'). On aurait obtenu un système incompatible, donc sans solution, ce qui aurait aussi prouvé (de façon un peu plus fastidieuse) que les droites D et D' ne sont pas sécantes.

2° a) On applique la proposition 1.21 p. 14. Ici la dimension de l'espace est $n=3$, celle de la variété affine dont on cherche une équation cartésienne est $p=1$, la droite D est caractérisée par $n-p=2$ équations cartésiennes indépendantes qui sont bien sous la forme recherchée $\begin{cases} ux + vy + wz = h \\ u'x + v'y + w'z = h'. \end{cases}$

Réciproquement, toujours grâce à la proposition 1.21 p. 14, s'il n'est pas incompatible, le système (Σ) $\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta' \end{cases}$ caractérise une variété affine de E, de dimension $p = n - \mathrm{rg}(\Sigma) = 3 - \mathrm{rg}(\Sigma)$.

Remarquons que $\mathrm{rg}(\Sigma) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix}$. Il est nécessaire que cette matrice soit de rang 2 pour que ce système caractérise une droite (pour que $p = 1$). Si le rang de cette matrice est 2, alors les triplets $(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha', \beta', \gamma')$ sont indépendants, et les plans $P \ : \ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ et $P' \ : \ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta'$ ne sont pas parallèles, donc d'après une des conséquences visibles de la proposition 1.22 p. 17, ces deux plans ne peuvent pas être d'intersection vide, et le système (Σ) caractérise bien une droite.

Donc finalement, on a montré que le système (Σ) caractérise une droite de E si et seulement si $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = 2$ ou encore si et seulement si les triplets $(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha', \beta', \gamma')$ ne sont pas proportionnels.

2° b) La proposition 1.21 p. 14 nous permet d'affirmer que la droite caractérisée par $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ est dirigée par la droite vectorielle $\vec{D}$ $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0. \end{cases}$
Il suffit donc de montrer que les coordonnées du vecteur proposé (qui ne sont pas toutes trois nulles puisque le rang du système est 2) vérifient bien les deux équations du système caractérisant $\vec{D}$. Or, on a

$$a\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$
$$= a\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

et

$$a'\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} + b'\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} + c'\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$
$$= a'\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} - b'\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} + c'\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0.$$

(On a simplement reconnu le développement par rapport à la première ligne des deux déterminants 3×3, qui ont des lignes identiques, donc sont nuls.)

2° c) Les deux droites D et Δ sont parallèles lorsque leurs directions sont confondues, ou ce qui revient au même, lorsque leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. D'après la question précédente, on peut donc dire que ces droites sont parallèles si et seulement si les deux triplets de déterminants suivants sont proportionnels : $\left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right)$ et $\left(\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma' & \alpha' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}\right)$.

Pour étudier si ces droites sont confondues, on peut prolonger ce qu'on vient de faire en ajoutant à la condition de parallélisme le fait d'avoir un point commun, mais c'est assez difficile et peu « visible ». La notion de faisceau de plan nous apporte un angle d'attaque beaucoup plus pratique.

La droite Δ est l'intersection des deux plans (non parallèles) $\Pi \ : \ \alpha x+\beta y+\gamma z-\delta=0$ et $\Pi' \ : \ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z-\delta'=0$. La droite D est l'intersection des deux plans $P \ : \ ax+by+cz-d=0$ et $P' \ : \ a'x+b'y+c'z-d'=0$. D est la droite commune de tous les plans du faisceau $\mathcal{F}(P,P')$ de plans engendré par P et P'. Donc $D=\Delta$ si et seulement si Π et Π' sont deux plans du faisceau $\mathcal{F}(P,P')$. Ce qui se traduit par l'existence de quatre constantes $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ telles que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ -\delta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ -d \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ -d' \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \\ -\delta' \end{pmatrix} = \lambda' \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ -d \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ -d' \end{pmatrix}$.

On peut caractériser brièvement cette condition grâce à la notion de rang :

$$D \text{ et } \Delta \text{ sont confondues} \iff \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & a' & \alpha & \alpha' \\ b & b' & \beta & \beta' \\ c & c' & \gamma & \gamma' \\ d & d' & \delta & \delta' \end{pmatrix} = 2.$$

(Remarquons que le fait de changer le signe de la dernière ligne n'a aucune incidence sur le rang de la matrice.)

Lorsque les deux droites D et Δ sont sécantes, le système (Σ) obtenu en réunissant les deux systèmes caractérisant chaque droite possède une solution unique (x_0, y_0, z_0) :

$$(\Sigma)\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z=\delta'. \end{cases}$$

Le système $(\Sigma')\begin{cases} ax+by+cz-dt=0 \\ a'x+b'y+c'z-d't=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma z-\delta t=0 \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z-\delta' t=0 \end{cases}$ possède donc un quadruplet solution non nul qui est $(x_0, y_0, z_0, 1)$ et le rang de ce système n'est donc pas 4.

Or, le rang de ce système est le même que le rang de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & a' & \alpha & \alpha' \\ b & b' & \beta & \beta' \\ c & c' & \gamma & \gamma' \\ d & d' & \delta & \delta' \end{pmatrix}$.

Comme D et Δ sont des droites, on est sûr que le rang de A est au moins 2 (les équations caractérisant D ne sont pas proportionnelles, donc c'est aussi le cas pour les deux premières colonnes de A). Si le rang de A était 2, les deux droites seraient confondues, donc on peut conclure que :

$$D \text{ et } \Delta \text{ sont sécantes} \Longrightarrow \mathrm{rg} \begin{pmatrix} a & a' & \alpha & \alpha' \\ b & b' & \beta & \beta' \\ c & c' & \gamma & \gamma' \\ d & d' & \delta & \delta' \end{pmatrix} = 3.$$

Réciproquement :

Si le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & a' & \alpha & \alpha' \\ b & b' & \beta & \beta' \\ c & c' & \gamma & \gamma' \\ d & d' & \delta & \delta' \end{pmatrix}$ vaut 3, c'est que le système

$(\Sigma') \begin{cases} ax + by + cz - dt = 0 \\ a'x + b'y + c'z - d't = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta t = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z - \delta' t = 0 \end{cases}$ possède un quadruplet solution (x_0, y_0, z_0, t_0) non nul $((x_0, y_0, z_0, t_0) \neq (0, 0, 0, 0))$.

D'après la définition du rang, et le théorème du rang, on est même sûr que l'ensemble solution du système est une droite vectorielle, donc c'est l'ensemble des $\lambda(x_0, y_0, z_0, t_0) = (\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0, \lambda t_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Deux cas sont possibles :

<u>Si $t_0 \neq 0$,</u>

alors il existe un unique $\lambda = \dfrac{1}{t_0}$ tel que $\lambda t_0 = 1$, et le système admet une solution particulière unique (x_1, y_1, z_1, t_1) admettant une quatrième composante égale à $t_1 = 1$.

Le système $(\Sigma) \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta' \end{cases}$ admet donc une unique solution (x_1, y_1, t_1),

ce qui signifie exactement que les deux droites D et Δ sont sécantes.

Si $t_0 = 0$,
alors toutes les solutions (x, y, z, t) du système (Σ') sont telles que $t = 0$, puisque il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $t = \lambda t_0 = \lambda \times 0 = 0$. Le système (Σ) $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta' \end{cases}$ n'admet donc pas de solution, puisqu'une solution (x_1, y_1, z_1) de (Σ) correspondrait à une solution $(x_1, y_1, z_1, 1)$ de (Σ'). Dans ce cas les droites D et Δ' ne sont pas sécantes. Cependant on peut affirmer néanmoins quelque chose d'intéressant : les droites D et Δ admettent toutes deux comme vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont (x_0, y_0, z_0) (avec $(x_0, y_0, z_0, 0)$ solution non nulle de (Σ')) : D et Δ sont donc parallèles dans ce cas. Vérifions cette affirmation : comme $(x_0, y_0, z_0, 0)$ est solution de (Σ') $\begin{cases} ax + by + cz - dt = 0 \\ a'x + b'y + c'z - d't = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta t = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z - \delta' t = 0 \end{cases}$ on a en particulier $\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 = 0 \\ a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = 0 \\ \alpha' x_0 + \beta' y_0 + \gamma' z_0 = 0. \end{cases}$
Le premier de ces deux systèmes signifie que $\overrightarrow{u}$ appartient à la direction de D, et le deuxième signifie que $\overrightarrow{u}$ appartient à la direction de Δ (rappelons-nous que la direction d'un sous-espace affine est caractérisé par un système analogue à celui qui caractérise ce sous-espace affine, mais dans lequel toutes les constantes ont été remplacées par 0).

Pour compléter notre raisonnement, il reste à vérifier que lorsque les droites D et Δ sont strictement parallèles, la matrice $\begin{pmatrix} a & a' & \alpha & \alpha' \\ b & b' & \beta & \beta' \\ c & c' & \gamma & \gamma' \\ d & d' & \delta & \delta' \end{pmatrix}$ est de rang 3. Or, si les droites sont strictement parallèles, c'est qu'elles admettent un vecteur directeur commun, un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul, dont les coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans la base $\mathcal{B}$ sont solutions des deux systèmes $\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 = 0 \\ a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = 0 \\ \alpha' x_0 + \beta' y_0 + \gamma' z_0 = 0. \end{cases}$

Le système (Σ') $\begin{cases} ax + by + cz - dt = 0 \\ a'x + b'y + c'z - d't = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta t = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z - \delta' t = 0 \end{cases}$ admet donc $(x_0, y_0, z_0, 0)$ comme quadruplet solution, et ce quadruplet est non nul. Le rang du système n'est donc pas 4. D'autre part il est supérieur ou égal à 2, puisque Δ et D sont des droites, et il n'est pas égal à 2, sinon on a vu que ces droites seraient confondues et on a supposé qu'elles étaient strictement parallèles. Il ne reste donc plus qu'une possibilité, c'est que le rang du système soit exactement égal à 3, et le rang du système est égal au rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & a' & \alpha & \alpha' \\ b & b' & \beta & \beta' \\ c & c' & \gamma & \gamma' \\ d & d' & \delta & \delta' \end{pmatrix}$.

En conclusion : D et Δ sont sécantes ou strictement parallèles si et seulement si $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & a' & \alpha & \alpha' \\ b & b' & \beta & \beta' \\ c & c' & \gamma & \gamma' \\ d & d' & \delta & \delta' \end{pmatrix} = 3.$

2° d) Tout d'abord, il faut bien comprendre que le système proposé, malgré sa forme « originale », est bien un système linéaire de deux équations. Il peut s'écrire :

$$\frac{x-x_A}{\alpha} = \frac{y-y_A}{\beta} = \frac{z-z_A}{\gamma} \iff \begin{cases} \beta x - \alpha y \phantom{{}-\beta z} = \beta x_A - \alpha y_A \\ \phantom{\beta x - {}} \gamma y - \beta z = \gamma y_A - \beta z_A \end{cases}$$

Sous cette forme, il est évident (puisqu'on a supposé que $\alpha\beta\gamma \neq 0$) que ces deux équations ne sont pas proportionnelles et caractérisent bien une droite. Il reste à vérifier que c'est la bonne !

Il est tout à fait clair que cette droite passe par A, et sa direction est caractérisée par $\begin{cases} \beta x - \alpha y = 0 \\ \gamma y - \beta z = 0 \end{cases}$ donc il est non moins clair que les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ vérifient ces deux équations, donc $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de cette droite. On a bien établi que D est caractérisée par $\dfrac{x-x_A}{\alpha} = \dfrac{y-y_A}{\beta} = \dfrac{z-z_A}{\gamma}$.

2° e) Si D est une droite caractérisée par un système de deux équations cartésiennes, pour pouvoir en écrire une représentation paramétrique, il suffit de déterminer un point A de D et un vecteur directeur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$. On a vu, en 2°b) comment trouver les coordonnées d'un vecteur directeur. Il est moins évident de trouver un point. Une méthode qui marche toujours est de fixer une des coordonnées (nulle par exemple) et de résoudre le système de deux équations en les deux autres coordonnées inconnues. Il vaut mieux choisir la coordonnée qu'on fixe correspondant à une coordonnée non nulle de $\overrightarrow{u}$ pour être sûr que le système qu'on veut résoudre est de Kramer.

Un exemple :

La droite D $\begin{cases} x - 2y - 3z = 2 \\ 2x - 4y - 3z = 1 \end{cases}$ admet le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} \\[2ex] \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\[2ex] \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

comme vecteur directeur, donc un vecteur directeur de D est aussi $\overrightarrow{v} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. Pour trouver un point, il ne faudrait pas fixer une valeur de z, car le déterminant du système qu'on obtiendrait (qui est aussi la troisième coordonnée de $\overrightarrow{u}$) est nul. En revanche, on peut par exemple fixer $x = 0$, on obtient le système $\begin{cases}-2y - 3z = 2\\-4y - 3z = 1\end{cases}$, dont le déterminant est la première coordonnée de $\overrightarrow{u}$, et dont on peut trouver les solutions par exemple avec les formules de Kramer, $y = \dfrac{\begin{vmatrix}2 & -3\\1 & -3\end{vmatrix}}{-6} = \dfrac{1}{2}$ et $z = \dfrac{\begin{vmatrix}-2 & 2\\-4 & 1\end{vmatrix}}{-6} = -1$. Donc D passe par $A(0, \frac{1}{2}, -1)$.

Une représentation paramétrique de A est donc $\begin{cases}x = 2t\\y = \frac{1}{2} + t\\z = -1\end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer un système d'équations cartésiennes d'une droite Δ caractérisée par une représentation paramétrique, puisqu'on connaît un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de Δ, on peut se contenter d'écrire les équations cartésiennes de deux plans contenant Δ, par exemple $A+ < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$ et $A+ < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} >$ en choisissant les vecteurs (si possibles simples) $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de façon que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ soit libre.
On peut aussi se contenter d'éliminer le paramètre entre les deux premières équations de la représentation paramétrique, puis entre les deux dernières (ou entre la première et la dernière)
On peut enfin (et c'est peut-être le plus rapide), utiliser le résultat de la question 2°d).

Étudions encore un exemple : soit Δ : $\begin{cases}x = 1 - \lambda\\y = -2\lambda\\z = 3 + \lambda\end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Première méthode : Δ passe par $A(1, 0, 3)$ et est dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$; on cherche une équation cartésienne de $P_1 = A+ < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{i} >$ et de $P_2 = A+ < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{j} >$.
$(\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est le repère de E dans lequel on travaille).

P_1 admet comme équation cartésienne $\begin{vmatrix}x-1 & -1 & 1\\y & -2 & 0\\z-3 & 1 & 0\end{vmatrix} = 0 \iff y + 2z = 6.$

P_2 admet comme équation cartésienne $\begin{vmatrix}x-1 & -1 & 0\\y & -2 & 1\\z-3 & 1 & 0\end{vmatrix} = 0 \iff x + z = 4.$

Donc un système d'équations cartésiennes caractérisant Δ est $\begin{cases} y+2z=6 \\ x+z=4. \end{cases}$

Deuxième méthode : Pour éliminer λ entre les deux premières équations de la représentation paramétrique de Δ, on multiplie la première par 2 et la deuxième par -1 avant de les additionner, on obtient $2x-y=2$.
Pour éliminer λ entre les deux dernières équations, on multiplie la troisième par 2, avant d'additionner ces deux lignes, on obtient $y+2z=6$.

Donc un système d'équations cartésiennes caractérisant Δ est $\begin{cases} 2x-y=2 \\ y+2z=6. \end{cases}$

Troisième méthode : Puisque Δ passe par $A(1,0,3)$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$, d'après la question 2°d), un système d'équations cartésiennes de Δ est $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-3}{1} \iff \begin{cases} 2x-y=2 \\ y+2z=6. \end{cases}$
Notons qu'on retrouve avec ces trois méthodes pourtant issues de démarches radicalement différentes, à peu près toujours les mêmes équations.

3° La théorie des faisceaux de plans donne un outil performant pour traiter ce genre de problèmes.
Un plan Π contient la droite D si et seulement si il est dans le faisceau $\mathcal{F}(P_1,P_2)$ avec $P_1 : x-1=0$ et $P_2 : y+z-2=0$. Le plan cherché a donc une équation du type $\lambda_1(x-1)+\lambda_2(y+z-2)=0$. On veut qu'il passe par $A(3,-1,1)$, donc λ_1,λ_2 sont tels que $\lambda_1(3-1)+\lambda_2(-1+1-2)=0 \iff \lambda_1=\lambda_2$. On peut choisir par exemple $\lambda_1=\lambda_2=1$, et le plan Π contenant la droite D et passant par A est donc le plan d'équation : $(x-1)+(y+z-2)=0$ qui s'écrit plus simplement : $x+y+z=3$.

Exercice 1.15.
On applique le théorème des milieux dans le sens direct (théorème 1.25 p. 18) : soit $F''=I+\vec{F}$; on sait que F'' coupe la droite (CD) en un point J' qui est le milieu de $[CD]$. Mais le milieu de $[CD]$ est par hypothèse le point J. donc F'' coupe (CD) en J. Deux cas se présentent : soit $I\neq J$ et dans ce cas la droite (IJ) existe, c'est une droite de l'hyperplan F'' (puisque I et J sont deux points de F'') qui est parallèle à F et F', donc la droite (IJ) est bien faiblement parallèle à F et à F'. L'autre cas possible est que $I=J$. Dans ce cas, la droite (IJ) n'existe pas. Ce cas est possible; il survient lorsque $[AB]$ et $[CD]$ ont même milieu, c'est-à dire lorsque $ACBD$ est un parallélogramme.

Exercice 1.16.
On applique le théorème de Thalès dans le sens direct. On considère l'hyperplan $H_1=A_1+\vec{H}$, $\vec{H}$ étant la direction commune des hyperplans H_2, H_3, H_4. Cet

hyperplan coupe la droite Δ (puisque $\overrightarrow{\Delta} \oplus \overrightarrow{H} = \overrightarrow{E}$ par hypothèse : la droite Δ coupe H_2) en un point B_1', qui est tel que $\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_3A_4}} = \dfrac{\overline{B_1'B_2}}{\overline{B_3B_4}}$.

En appliquant l'hypothèse $\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_3A_4}} = \dfrac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_3B_4}}$, on a donc $\dfrac{\overline{B_1'B_2}}{\overline{B_3B_4}} = \dfrac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_3B_4}}$; soit λ la valeur commune de ces deux quotients de mesure algébriques.

En application du dernier point de la propriété 1.30 (p. 20), on a donc :

$\overrightarrow{B_1'B_2} = \lambda\overrightarrow{B_3B_4} = \overrightarrow{B_1B_2}$, donc $\overrightarrow{B_2B_1} = \overrightarrow{B_2B_1'}$ et par conséquent $B_1' = B_1$.

On a prouvé que $B_1 \in H_1$.

Ici encore deux cas sont possibles : si $B_1 \neq A_1$, la droite (A_1B_1) existe, c'est un sous-espace affine de l'hyperplan H_1 qui est parallèle aux hyperplans H_2, H_3, H_4, donc (A_1B_1) est bien faiblement parallèle aux hyperplans H_2, H_3, H_4.

Si $B_1 = A_1$, ce cas est tout à fait possible, alors la droite (A_1B_1) n'existe pas. Ce cas survient lorsque les droites D et Δ sont sécantes, et qu'en plus leur point d'intersection est justement le point A_1.

CHAPITRE 2

2. Solutions des exercices sur les applications affines

Exercice 2.1.

Supposons que f est une application affine entre $(E, \overrightarrow{E})$ et $(E', \overrightarrow{E'})$. Soit $A \in E$ et soit $A' = f(A)$. L'application vectorielle associée à f par A est linéaire. C'est l'application $\varphi = L(f) = \overrightarrow{f}$, qui associe à tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$ le vecteur $\overrightarrow{u'}$ de $\overrightarrow{E'}$ tel que $\overrightarrow{u'} = f(A + \overrightarrow{u}) - A'$. Soient $+_A$ et $\cdot_A$ les lois du vectorialisé E_A, $+_{A'}$ et $\cdot_{A'}$ les lois du vectorialisé $E'_{A'}$. Montrons la linéarité de f entre les vectorialisés :

Soient B, C deux points de E.

$$\begin{aligned} f(B +_A C) &= f(A + (B - A) + (C - A)) = A' + \varphi\big((B - A) + (C - A)\big) \\ &= A' + \varphi(B - A) + \varphi(C - A). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} f(B) +_{A'} f(C) &= A' + \big(f(B) - A'\big) + \big(f(C) - A'\big) \\ &= A' + \Big(\big(A' + \varphi(B - A)\big) - A'\Big) + \Big(\big(A' + \varphi(C - A)\big) - A'\Big) \\ &= A' + \varphi(B - A) + \varphi(C - A). \end{aligned}$$

On a donc bien $f(B +_A C) = f(B) +_{A'} f(C)$.

Soit maintenant $B \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda \cdot_A B) = f(A + \lambda(B - A)) = A' + \varphi(\lambda(B - A)) = A' + \lambda\varphi(B - A),$$

D'autre part,

$$\lambda \cdot_{A'} f(B) = A' + \lambda(f(B) - A') = A' + \lambda((A' + \varphi(B - A)) - A') = A' + \lambda\varphi(B - A).$$

On a donc bien $f(\lambda \cdot_A B) = \lambda \cdot_{A'} f(B)$ et f est bien une application linéaire entre les deux espaces vectoriels E_A et $E_{A'}$.

Supposons maintenant que f est une application linéaire entre les deux espaces vectoriels E_A et $E_{A'}$.
Considérons l'application vectorielle φ_A associée à f par le point A. Elle associe à tout vecteur $\vec{u}$ de $\vec{E}$, le vecteur $\vec{u'}$ de $\vec{E'}$, défini par $\vec{u'} = \varphi_A(\vec{u}) = f(A + \vec{u}) - A'$.
Montrons que φ_A est linéaire. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{E}$. Nous poserons $B = A + \vec{u}$, $C = A + \vec{v}$ et $D = A + \vec{u} + \vec{v}$. Remarquons tout d'abord que par définition de $+_A$, on a $D = B +_A C$. D'où :

$$\begin{aligned}\varphi_A(\vec{u} + \vec{v}) &= f(A + \vec{u} + \vec{v}) - A' = f(D) - A' = f(B +_A C) - A' \\ &= (f(B) +_{A'} f(C)) - A' = (A' + (f(B) - A') + (f(C) - A')) - A' \\ &= (f(B) - A') + (f(C) - A').\end{aligned}$$

Or, justement, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_A(\vec{u}) + \varphi_A(\vec{v}) &= (f(A + \vec{u}) - A') + (f(A + \vec{v}) - A') \\ &= (f(B) - A') + (f(C) - A').\end{aligned}$$

Donc on a bien $\varphi_A(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi_A(\vec{u}) + \varphi_A(\vec{v})$.
Soit maintenant $\vec{u} \in \vec{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous posons maintenant $B = A + \vec{u}$ et $C = A + \lambda\vec{u}$, de sorte qu'on peut remarquer que $C = \lambda \cdot_A B$. D'où :

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda\vec{u}) &= f(A + \lambda\vec{u}) - A' = f(C) - A' = f(\lambda \cdot_A B) - A' = (\lambda \cdot_{A'} f(B)) - A' \\ &= (A' + \lambda(f(B) - A')) - A' = \lambda(f(B) - A').\end{aligned}$$

Or, justement on a :

$$\lambda\varphi_A(\vec{u}) = \lambda(f(A + \vec{u}) - A') = \lambda(f(B) - A').$$

On a bien $\varphi_A(\lambda\vec{u}) = \lambda\varphi_A(\vec{u})$ et φ_A est linéaire, donc f est une application affine.

Exercice 2.2. Soit f une application affine de $(E, \overrightarrow{E})$ vers $(E', \overrightarrow{E'})$ dont la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ est la fonction nulle. On a donc, pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}_{\overrightarrow{E'}}$.
Soit $A \in E$ et soit $A' = f(A)$. Pour tout point $B \in E$, on a :
$f(B) = f(A + \overrightarrow{AB}) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = A' + \overrightarrow{0}_{\overrightarrow{E'}} = A'$, donc f est bien l'application constante, qui associe à tout point de E le point A' de E'.

Exercice 2.3. Soit $G = \mathcal{H}_A(E) \cup \{\mathrm{id}_E\}$. Pour $k \neq 1$, appelons h_k l'homothétie de centre A et de rapport k, et posons pour simplifier $h_1 = \mathrm{id}_E$.
Il y a une bijection naturelle φ entre $\mathbb{R}^*$ et G, qui associe à tout scalaire k l'élément $h_k = \varphi(k)$ de G.
Montrons la relation (1) : $h_k \circ h_{k'} = h_{kk'}$.
Soit $M \in E$. On a :

$$\begin{aligned} h_k \circ h_{k'}(M) &= h_k(A + k'(M - A)) = A + k((A + k'(M - A)) - A) \\ &= A + kk'(M - A) = h_{kk'}(M). \end{aligned}$$

La loi $\circ$ est donc interne dans G.
Par construction, $\mathrm{id}_E = h_1$ appartient à G.
Pour tout $h_k \in G$, la relation (1) implique que $h_{1/k} \circ h_k = h_1 = \mathrm{id}_E$, donc $(h_k)^{-1} = h_{1/k} \in G$.
G est bien un sous-groupe du groupe des bijections de E muni de la composition des applications. De plus, la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$, combinée avec la relation (1) permet de montrer que $\circ$ est commutative dans G ($\circ$ n'est en général pas une loi commutative, ici, c'est exceptionnel) : $h_k \circ h_{k'} = h_{kk'} = h_{k'k} = h_{k'} \circ h_k$.
L'application φ définie plus haut est, toujours grâce à la relation (1), un morphisme de groupe entre $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ et $(G, \circ)$, et elle est bijective, donc G est bien isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$.

Exercice 2.4.

1° Soient $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{E}$. D'après l'hypothèse, ce sont des vecteurs propres pour φ, donc il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\overrightarrow{x}) = \lambda_x \overrightarrow{x}$ et il existe $\lambda_y \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\overrightarrow{y}) = \lambda_y \overrightarrow{y}$.

Si $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ est un système lié, alors $\overrightarrow{y}$ est colinéaire à $\overrightarrow{x}$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{y} = \alpha \overrightarrow{x}$.
On a donc $\lambda_y \overrightarrow{y} = \varphi(\overrightarrow{y}) = \varphi(\alpha \overrightarrow{x}) = \alpha \varphi(\overrightarrow{x}) = \alpha(\lambda_x \overrightarrow{x}) = \lambda_x(\alpha \overrightarrow{x}) = \lambda_x \overrightarrow{y}$. Par hypothèse, $\overrightarrow{y}$ est non nul, donc $\lambda_x = \lambda_y$ dans ce cas.

Si $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ est un système libre, soit $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$; $\overrightarrow{z}$ est aussi un vecteur propre de φ, donc il existe $\lambda_z \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\overrightarrow{z}) = \lambda_z \overrightarrow{z}$. Mais on a aussi :
$\lambda_z \overrightarrow{x} + \lambda_z \overrightarrow{y} = \lambda_z \overrightarrow{z} = \varphi(\overrightarrow{z}) = \varphi(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \varphi(\overrightarrow{x}) + \varphi(\overrightarrow{y}) = \lambda_x \overrightarrow{x} + \lambda_y \overrightarrow{y}$, d'où $(\lambda_z - \lambda_x)\overrightarrow{x} + (\lambda_z - \lambda_x)\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$, et grâce au fait que $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ est un système libre, on peut affirmer que $\lambda_z - \lambda_x = \lambda_z - \lambda_y = 0$ donc $\lambda_z = \lambda_x = \lambda_y$.

Tous les vecteurs de $\vec{E}$ sont donc propres pour une seule et même valeur propre λ, et donc $\forall \vec{u} \in \vec{E}$, on a $\varphi(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$, c'est-à-dire que $\varphi = \lambda \mathrm{id}_{\vec{E}}$.

2° a) Soit $\vec{x}$ un vecteur non nul de $\vec{E}$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe une base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ de $\vec{E}$ telle que $\vec{e_1} = \vec{x}$. Soit ψ l'endomorphisme de $\vec{E}$ dont la matrice est diagonale et dont les termes de la diagonale sont $(1, 2, 2, \dots, 2)$. Il est clair[3] que ψ est un automorphisme de $\vec{E}$. Le sous-espace propre attaché à la valeur propre 1 de ψ est de dimension 1, et c'est $< \vec{e_1} > = < \vec{x} >$.

2° b) φ commute avec tous les automorphismes, donc en particulier avec ψ. On a donc entre autres $\varphi \circ \psi(\vec{x}) = \psi \circ \varphi(\vec{x})$.
Or, $\varphi \circ \psi(\vec{x}) = \varphi(\psi(\vec{x})) = \varphi(1.\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$. On a donc $\psi(\varphi(\vec{x})) = \varphi(\vec{x})$. On peut donc affirmer que $\varphi(\vec{x})$ est un vecteur propre pour ψ attaché à la valeur propre 1, donc $\varphi(\vec{x}) \in < \vec{x} >$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\vec{x}) = \lambda_x \vec{x}$. On a ainsi montré que $\vec{x}$ est un vecteur propre de φ.

3° On a ainsi prouvé que tout vecteur $\vec{x}$ non nul de $\vec{E}$ est un vecteur propre de φ, donc en utilisant le résultat de 1°, on peut en déduire que $\varphi = \lambda \mathrm{id}_{\vec{E}}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous avons ainsi prouvé que tous les éléments du centre Z de $GL(\vec{E})$ sont des *homothéties vectorielles*. Réciproquement, il est assez évident que toutes les homothéties vectorielles (de la forme $k\mathrm{id}_{\vec{E}}$ commutent avec tout endomorphisme, donc a fortiori avec tous les automorphismes de $\vec{E}$, on peut donc conclure que $Z = \{\lambda \mathrm{id}_{\vec{E}} \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

Exercice 2.5.

1° a) Soient $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ deux vecteurs de $\vec{E}$ et λ_1, λ_2 deux scalaires de $\mathbb{K}$.
Dans la somme directe $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$, $\vec{x_1}$ et $\vec{x_2}$ se décomposent ainsi : $\vec{x_i} = \vec{y_i} + \vec{z_i}$, $\vec{y_i} \in \vec{F}$ et $\vec{z_i} \in \vec{G}$ $(i = 1, 2)$. On peut donc écrire
$\lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} = \lambda_1(\vec{y_1} + \vec{z_1}) + \lambda_2(\vec{y_2} + \vec{z_2}) = (\lambda_1 \vec{y_1} + \lambda_2 \vec{y_2}) + (\lambda_1 \vec{z_1} + \lambda_2 \vec{z_2})$.
Or, $\vec{F}$ et $\vec{G}$ étant des sous-espaces vectoriels, on est sûr que $\vec{Y} = \lambda_1 \vec{y_1} + \lambda_2 \vec{y_2} \in \vec{F}$ et $\vec{Z} = \lambda_1 \vec{z_1} + \lambda_2 \vec{z_2} \in \vec{G}$, de sorte que $\vec{Y} + \vec{Z}$ est la décomposition de $\lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2}$ dans la somme directe $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$, et finalement
$\pi(\lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2}) = \vec{Y} = \lambda_1 \vec{y_1} + \lambda_2 \vec{y_2} = \lambda_1 \pi(\vec{x_1}) + \lambda_2 \pi(\vec{x_2})$, donc π est bien linéaire.

[3] Ce raisonnement, valable dans $\mathbb{R}$, ne serait pas valable si on travaillait dans un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 2. Si on était dans le cadre d'un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 2, on pourrait remplacer 2 par tout élément non nul et distinct de 1 sauf si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$; dans ce cas, on pourrait s'en sortir en utilisant la matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, des 1 juste au-dessus de la diagonale et des 0 partout ailleurs. Cet exemple marche d'ailleurs dans tous les cas.

1° b) Soit $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \in \vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$ ($\vec{y} \in \vec{F}$, $\vec{z} \in \vec{G}$). On a les équivalences suivantes :

$$\vec{x} \in \ker \pi \iff \pi(\vec{x}) = \vec{0} \iff \vec{y} = \vec{0} \iff \vec{x} = \vec{z} \iff \vec{x} \in \vec{G}.$$

Donc $\ker \pi = \vec{G}$.

1° c) Avec les mêmes notations qu'en b) concernant $\vec{x}$, supposons que $\vec{x} \in \vec{F}$. Alors $\vec{x} = \vec{y} = \pi(\vec{x})$, donc $\exists \vec{x} \in \vec{F}$ tel que $\vec{x} = \pi(\vec{x})$: on a donc $\vec{x} \in \operatorname{Im} \pi$, et on a ainsi montré une première inclusion, $\vec{F} \subset \operatorname{Im} \pi$.
Soit maintenant un vecteur $\vec{u} \in \operatorname{Im} \pi$. $\exists \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \in \vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$ tel que $\pi(\vec{x}) = \vec{u}$. Mais $\pi(\vec{x}) = \vec{y} \in \vec{F}$. Donc $\vec{u} = \vec{y} \in \vec{F}$ et on a établi la seconde inclusion, $\operatorname{Im} \pi \subset \vec{F}$.

1° d) On a établi au début du c) que si $\vec{x} \in \vec{F}$, alors $\vec{x} = \pi(\vec{x})$. Établissons la réciproque.
Soit $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \in \vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$ tel que $\vec{x} = \pi(\vec{x})$. Puisque de toutes façons, on a $\pi(\vec{x}) = \vec{y} \in \vec{F}$, on peut affirmer que $\vec{x} = \vec{y} \in \vec{F}$.

1° e) Soit $\vec{x} \in \vec{E}$. On vient de voir (en c)) que $\vec{u} = \pi(\vec{x}) \in \vec{F}$, donc en utilisant le résultat du d), $\pi \circ \pi(\vec{x}) = \pi(\vec{u}) = \vec{u} = \pi(\vec{x})$. Comme ceci est valable pour $\vec{x}$ quelconque, on peut conclure que $\pi \circ \pi = \pi$.

2° Soit g un endomorphisme de $\vec{E}$ tel que $g \circ g = g$. Soit $\vec{F} = \operatorname{Im} g$ et $\vec{G} = \ker g$. Pour pouvoir parler de projection sur $\vec{F}$ dans la direction de $\vec{G}$, la première chose à faire est de montrer que $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont supplémentaires.
Le théorème du rang affirme que

$$n = \dim \vec{E} = \dim(\ker g) + \dim(\operatorname{Im} g) = \dim \vec{F} + \dim \vec{G}.$$

Il suffit donc de démontrer que $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont en somme directe pour pouvoir conclure qu'ils sont supplémentaires, et pour cela, on va étudier leur intersection et montrer qu'elle est réduite à $\{\vec{0}\}$.
Soit $\vec{x} \in \vec{F} \cap \vec{G} = \operatorname{Im} g \cap \ker g$.
Puisque $\vec{x} \in \operatorname{Im} g$, $\exists \vec{v} \in \vec{E}$ tel que $\vec{x} = g(\vec{v})$. Mais d'autre part, $\vec{x} \in \ker g$, donc $g(\vec{x}) = \vec{0}$, donc on a

$$\vec{0} = g(\vec{x}) = g(g(\vec{v})) = g \circ g(\vec{v}) = g(\vec{v}) = \vec{x}.$$

On a prouvé que $\vec{F} \cap \vec{G} = \{\vec{0}\}$.
On est maintenant sûr qu'il existe une projection $\pi = \pi_{\vec{F},\vec{G}}$. Il reste à montrer que $g = \pi$. Mais pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$, on a $\vec{x} = g(\vec{x}) + (\vec{x} - g(\vec{x}))$ avec $g(\vec{x}) \in \operatorname{Im} g = \vec{F}$ et $g(\vec{x} - g(\vec{x})) = g(\vec{x}) - g(g(\vec{x})) = g(\vec{x}) - g(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{x} - g(\vec{x}) \in \ker g = \vec{G}$.
L'unique décomposition selon la somme directe $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$ de $\vec{x}$ est donc :
$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} = g(\vec{x})$ et $\vec{z} = \vec{x} - g(\vec{x})$. Donc $\pi(\vec{x}) = \vec{y} = g(\vec{x})$, et comme ceci est vrai pour tout $\vec{x}$, on a $g = \pi$.

Exercice 2.6.

1° Pour préciser les choses, nous supposerons que p est la projection vectorielle sur $\overrightarrow{F} = \operatorname{Im} p$ dans la direction de $\overrightarrow{G} = \ker p$. Calculons, en utilisant les propriétés d'algèbre de $\mathcal{L}(\overrightarrow{E})$:
$q \circ q = (\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}} - p) \circ (\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}} - p) = \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}} - p - p + p \circ p = \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}} - p = q$ puisque $p \circ p = p$; donc q est bien un projecteur, donc une projection vectorielle sur $\operatorname{Im} q$ dans la direction de $\ker q$. Or, il est clair que $\ker q = \{\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E} \mid \overrightarrow{x} = p(\overrightarrow{x})\} = \operatorname{Im} p = \overrightarrow{F}$ d'après les rappels sur les projections vectorielles p. 38.
D'autre part,

$$\overrightarrow{x} \in \operatorname{Im} q \iff \overrightarrow{x} = q(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x}) \iff p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{x} \in \ker p = \overrightarrow{G},$$

donc q est la projection sur $\overrightarrow{G}$ dans la direction de $\overrightarrow{F}$.

Toujours en utilisant les propriétés d'algèbre de $\mathcal{L}(\overrightarrow{E})$ et le fait que $p \circ p = p$, on vérifie que

$$p \circ q = p \circ (\mathrm{id}_E - p) = p - p \circ p = p - p = 0_{\overrightarrow{E}}$$
$$\text{et } q \circ p = p \circ p - p = p - p = 0_{\overrightarrow{E}}$$

($0_{\overrightarrow{E}}$ désigne l'endomorphisme nul de $\overrightarrow{E}$).

2° Soient p et p' deux projections vectorielles dans $\overrightarrow{E}$.
Supposons que $p \circ p' = p' \circ p = 0_{\overrightarrow{E}}$. Alors on a :

$$(p + p') \circ (p + p') = p \circ p + p \circ p' + p' \circ p + p' \circ p' = p + p',$$

et donc $p + p'$ est un projecteur.

Réciproquement, si on suppose que $p + p'$ est un projecteur, on obtient en développant $p + p' = (p + p') \circ (p + p') = p \circ p + p \circ p' + p' \circ p + p' \circ p' = p + p' + p \circ p' + p' \circ p$, donc $p \circ p' + p' \circ p = 0_{\overrightarrow{E}}$. On a donc $p' \circ p = -p \circ p'$. Mais alors, si on calcule $p' \circ p = p' \circ p' \circ p = p' \circ (-p \circ p') = -(p' \circ p) \circ p' = (p \circ p') \circ p' = p \circ p' \circ p' = p \circ p'$. On a à la fois $p' \circ p = p \circ p' = -p \circ p'$ donc toutes ces applications sont nulles.

Dans le cas où $p + p'$ est une projection (donc lorsque $p \circ p' = p' \circ p = 0_{\overrightarrow{E}}$), montrons que $\operatorname{Im}(p + p') = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} p'$ et $\ker(p + p') = \ker p \cap \ker p'$. Pour cela, il faut établir quatre inclusions, dont deux sont assez évidentes : $\operatorname{Im}(p + p') \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} p'$ (puisque $(p + p')(x) = p(x) + p'(x)$) et $\ker p \cap \ker p' \subset \ker(p + p')$ ($p(x) = p'(x) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow (p + p')(x) = \overrightarrow{0}$.)
Montrons les inclusions inverses.
Soit $x \in \ker(p + p')$. On a $(p + p')(x) = \overrightarrow{0}$, donc $p(x) = -p'(x)$.
En composant par p, on obtient $p(x) = p \circ p(x) = -p \circ p'(x) = \overrightarrow{0}$ donc $x \in \ker p$ et $p'(x) = p' \circ p'(x) = -p' \circ p(x) = \overrightarrow{0}$ donc $x \in \ker p'$ et $x \in \ker p \cap \ker p'$: on a montré $\ker(p + p') \subset \ker p \cap \ker p'$.

Soit $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} p'$. On peut écrire $x = p(y) + p'(z)$. Calculons :
$(p+p')(x) = (p+p') \circ p(y) + (p+p') \circ p'(z) = p \circ p(y) + p' \circ p(y) + p \circ p'(z) + p' \circ p'(z) = p(y) + p'(z) = x$ donc $x \in \operatorname{Im}(p+p')$: on a montré $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} p' \subset \operatorname{Im}(p+p')$.

Finalement, on a montré que si $p + p'$ est une projection, c'est la projection sur $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} p'$ dans la direction de $\ker p \cap \ker p'$.

3° Si p est une projection vectorielle sur $\overrightarrow{F}$ dans la direction de $\overrightarrow{G}$, alors la matrice de p dans une base adaptée à la décomposition $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$ est une matrice diagonale, de la forme $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, le nombre de 1 correspond à la dimension de $\overrightarrow{F}$ et le nombre de 0 sur la diagonale est $\dim \overrightarrow{G} = n - \dim \overrightarrow{F}$, donc p est diagonalisable et les valeurs propres de p sont 1 et 0 (sauf si $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ sont des sous-espaces triviaux, auquel cas une seule des deux valeurs 1 et 0 est une valeur propre).
Réciproquement, si p est diagonalisable, avec un spectre[4] inclus dans $\{0, 1\}$, soient $\overrightarrow{F} = \ker(\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}} - p)$ et $\overrightarrow{G} = \ker p$ les sous-espaces propres respectivement associés à 1 et à 0. Comme un espace vectoriel est toujours somme directe des sous-espaces propres d'un endomorphisme lorsque celui-ci est diagonalisable (et dans ce cas seulement), il est clair que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$, et dans une base adaptée à cette somme directe, la matrice de p est $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, égale à la matrice de la projection sur $\overrightarrow{F}$ dans la direction de $\overrightarrow{G}$, donc p est égale à cette projection, p est bien une projection.
La deuxième partie de l'affirmation à démontrer résulte directement de la caractérisation de la diagonalisabilité d'un endomorphisme par la possibilité de décomposer $\overrightarrow{E}$ en somme directe de ses sous-espaces propres.

Exercice 2.7.
1° On calcule
$A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = A$, donc A est la matrice d'une projection vectorielle.
L'endomorphisme p de matrice A est donc une projection vectorielle, et $\operatorname{Im} p$ est engendré par les vecteurs colonnes de A, qui sont tous proportionnels : $\operatorname{Im} p = < u >$ avec $u = p(e_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. $\ker p = \operatorname{Im}(\mathrm{id} - p)$ est engendré par les vecteurs colonnes de $\mathrm{I}_3 - \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, donc $\ker p = < v, w >$ avec $v = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -2 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$. $\ker p$ est aussi caractérisé par $p(x) = \overrightarrow{0} \iff AX = 0 \iff -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$ (les trois

[4] Rappelons que le spectre d'un endomorphisme est l'ensemble de ses valeurs propres.

lignes de la matrice A donnent la même relation, c'est normal, le rang de la matrice A vaut 1.)

2° L'image X' d'un triplet X de $\mathbb{R}^3$ par cette projection p appartient à $\overrightarrow{D} = < \overrightarrow{u} >$ et d'autre part vérifie $p(X) - X \in \ker p = \overrightarrow{P}$, donc $X' - X \in \overrightarrow{P}$. Traduisons ces deux conditions au niveau des composantes (x, y, z) et (x', y', z') respectives de X et X' : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $X' = \lambda \overrightarrow{u} \iff \begin{cases} x' = \lambda \\ y' = 0 \\ z' = -\lambda \end{cases}$ et les coordonnées de $X' - X$ vérifient l'équation de $\overrightarrow{P}$, donc $(x' - x) + (y' - y) = 0$. En combinant ces deux relations, on trouve $\lambda - x - y = 0$ donc $\lambda = x + y$ et les formules analytiques de p s'écrivent

$$\begin{cases} x' = & x + y \\ y' = & 0 \\ z' = & -x - y \end{cases}$$

La matrice de p pour la base canonique est donc $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.8.

1° Si f est une application affine admettant un point fixe A et dont la partie linéaire est une projection vectorielle π, soit $F = A + \operatorname{Im} \pi$ et $\overrightarrow{G} = \ker \pi$. Grâce aux rappels sur les projections vectorielles, π est la projection sur $\overrightarrow{F} = \operatorname{Im} \pi$ dans la direction de $\overrightarrow{G} = \ker \pi$. $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ sont supplémentaires ; montrons que $f = p_{F, \overrightarrow{G}}$.

Soit $M = A + \overrightarrow{x} \in E$, avec $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$, $(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) \in \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}$.

On a $f(M) = f(A) + \pi(M - A) = A + \pi(\overrightarrow{x}) = A + \overrightarrow{y}$.

Or, $M' = A + \overrightarrow{y} \in A + \overrightarrow{F} = F$ et $M' = A + \overrightarrow{x} - \overrightarrow{z} = M + (-\overrightarrow{z}) \in M + \overrightarrow{G}$ donc $M' \in F \cap (M + \overrightarrow{G})$ et donc $f(M) = M'$ est le projeté de M sur F, dans la direction $\overrightarrow{G}$. On a donc $f(M) = p_{F, \overrightarrow{G}}(M)$, ceci pour tout M, donc on a prouvé $f = p_{F, \overrightarrow{G}}$.

2° Si f est une application affine telle que $f \circ f = f$, pour tout point $B \in E$, on a en posant $f(B) = A$, $f(A) = f \circ f(B) = f(B) = A$ donc f admet au moins un point fixe. D'ailleurs tout point $M' = f(M)$ est par le même raisonnement aussi un point fixe de f.

Soit φ l'application linéaire associée à f.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, soit $M = A + \overrightarrow{u}$ et $M' = f(M)$; on a :

$$\begin{aligned} M' = f(M) &= f(A + \overrightarrow{u}) = A + \varphi(\overrightarrow{u}) = f \circ f(M) = f(f(M)) \\ &= f(M') = f(A + \overrightarrow{AM'}) = A + \varphi(\overrightarrow{AM'}) = A + \varphi(\varphi(\overrightarrow{u})) \end{aligned}$$

donc $\varphi = \varphi \circ \varphi$ et φ est une projection vectorielle, f est une projection d'après ce qui précède.

Exercice 2.9.

1° a) Pour tout $\vec{x} \in E$ dont la décomposition selon $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$ est $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ ($\vec{y} \in \vec{F}$, $\vec{z} \in \vec{G}$), on a $\sigma(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z}$, $\pi(\vec{x}) = \vec{y}$ et $\pi'(\vec{x}) = \vec{z}$, donc on a $\sigma(\vec{x}) = \pi(\vec{x}) - \pi'(\vec{x}) = (\pi - \pi')(\vec{x})$, et comme ceci est valable pour tout $\vec{x}$, on a établi que $\sigma = \pi - \pi'$.

Comme π et π' sont des endomorphismes de $\vec{E}$, leur différence en est aussi un, donc σ est bien linéaire.

1° b) et c) En fait, puisque $\sigma = \pi - \pi'$ et que $\mathrm{id}_{\vec{E}} = \pi + \pi'$ (vérification immédiate), on peut écrire $\pi = \frac{1}{2}(\sigma + \mathrm{id}_{\vec{E}})$ et $\pi' = -\frac{1}{2}(\sigma - \mathrm{id}_{\vec{E}})$. Or, un endomorphisme g a toujours le même noyau et la même image que λg pour tout scalaire non nul λ, donc $\vec{G} = \ker \pi = \ker(2\pi) = \ker(\sigma + \mathrm{id}_{\vec{E}}) = \mathrm{Im}\,\pi' = \mathrm{Im}(-2\pi') = \mathrm{Im}(\sigma - \mathrm{id}_{\vec{E}})$ (résultat du c)) et $\vec{F} = \mathrm{Im}\,\pi = \mathrm{Im}(2\pi) = \mathrm{Im}(\sigma + \mathrm{id}_{\vec{E}}) = \ker \pi' = \ker(-2\pi') = \ker(\sigma - \mathrm{id}_{\vec{E}})$ (résultat du b)).

(On aurait aussi pu faire une démonstration de ces égalités d'ensemble par doubles inclusions, mais cela aurait été beaucoup plus fastidieux.)

1° d) Pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$, dont la décomposition selon la somme directe $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$ est $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, on a $\sigma \circ \sigma(\vec{x}) = \sigma(\vec{y} - \vec{z}) = \vec{y} + \vec{z} = \vec{x} = \mathrm{id}_{\vec{E}}(\vec{x})$ et donc $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{\vec{E}}$.[5]

2° Soit g une involution linéaire de $\vec{E}$. C'est un endomorphisme de $\vec{E}$, ainsi que $g + \mathrm{id}_{\vec{E}}$ et $g - \mathrm{id}_{\vec{E}}$, de sorte que $\vec{F} = \ker(g - \mathrm{id}_{\vec{E}})$ et $\vec{G} = \ker(g + \mathrm{id}_{\vec{E}})$ sont deux sous-espaces vectoriels. On doit montrer de façon préliminaire, que $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont supplémentaires, c'est-à-dire que leur intersection est réduite à $\{0\}$ et que leur somme est $\vec{E}$.

Soit $\vec{x} \in \vec{F} \cap \vec{G}$. On a $(g - \mathrm{id}_{\vec{E}})(\vec{x}) = (g + \mathrm{id}_{\vec{E}})(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $g(\vec{x}) = \vec{x} = -g(\vec{x})$ et $\vec{x} = \vec{0}$. Ceci prouve que $\vec{F} \cap \vec{G} = \{0\}$.

Soit $\vec{x} \in \vec{E}$. On peut écrire $\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{x} + g(\vec{x})) + \frac{1}{2}(\vec{x} - g(\vec{x}))$.

Or, $\vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{x} + g(\vec{x})) \in \vec{F}$ puisque $g(\vec{y}) = \frac{1}{2}(g(\vec{x}) + g \circ g(\vec{x})) = \frac{1}{2}(g(\vec{x}) + \vec{x}) = \vec{y}$, donc $(g - \mathrm{id}_{\vec{E}})(\vec{y}) = \vec{0}$, et de la même façon, $\vec{z} = \frac{1}{2}(\vec{x} - g(\vec{x})) \in \vec{G}$ car $g(\vec{z}) = \frac{1}{2}(g(\vec{x}) - g \circ g(\vec{x})) = \frac{1}{2}(g(\vec{x}) - \vec{x}) = -\vec{z}$ donc $(g + \mathrm{id}_{\vec{E}})(\vec{z}) = \vec{0}$. On a donc réussi à trouver une décomposition de $\vec{x}$ sous la forme $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in \vec{F}$ et $\vec{z} \in \vec{G}$, donc $\vec{x} \in \vec{F} + \vec{G}$ et on a prouvé que $E = \vec{F} + \vec{G}$.

On a prouvé que $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont supplémentaires, et, accessoirement, on a trouvé une décomposition, pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$, selon la somme directe $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$:

[5] Une autre méthode possible consistait à utiliser le résultat de a), $\sigma = \pi - \pi'$ pour obtenir cette égalité : on a besoin du « lemme » $\pi \circ \pi' = \pi' \circ \pi = 0_{\vec{E}}$ (application nulle), qu'on a démontré dans l'exercice 2.6.

$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{x} + g(\vec{x})) \in \vec{F}$ et $\vec{z} = \frac{1}{2}(\vec{x} - g(\vec{x})) \in \vec{G}$. Comme on sait qu'une telle décomposition est unique, on « tient » *la* décomposition de tout $\vec{x}$.
On peut considérer la symétrie vectorielle σ par rapport à $\vec{F}$ dans la direction de $\vec{G}$. Il ne reste plus qu'à montrer que $g = \sigma$. Or, l'image par σ d'un vecteur $\vec{x}$ de $\vec{E}$, dont la décomposition selon la somme directe $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$ est $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, est $\sigma(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z}$.
Mais nous venons de voir que l'expression de $\vec{y}$ est $\vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{x} + g(\vec{x}))$ et celle de $\vec{z}$ est $\vec{z} = \frac{1}{2}(\vec{x} - g(\vec{x}))$. Donc $\sigma(\vec{x}) = (\frac{1}{2}(\vec{x} + g(\vec{x}))) - (\frac{1}{2}(\vec{x} - g(\vec{x}))) = g(\vec{x})$, ceci pour tout $\vec{x}$, donc $\sigma = g$.

Exercice 2.10.

1° a) Soit A un point de F, de sorte que $F = A + \vec{F}$.
Soit φ l'application vectorielle associée à s par le point A.
Montrons que $\varphi = \sigma = \sigma_{\vec{F},\vec{G}}$, ce qui prouvera que φ est linéaire et donc que s est affine.
Soit $\vec{x}$ un vecteur de $\vec{E}$, dont la décomposition selon la somme directe $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$ est $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ ($\vec{y} \in \vec{F}$ et $\vec{z} \in \vec{G}$). Déterminons $\varphi(\vec{x})$. Soit $M = A + \vec{x}$. On a $\varphi(\vec{x}) = s(A + \vec{x}) - s(A) = s(M) - s(A)$. D'après la définition d'une symétrie, (définition 2.9 p. 40, c'est le seul énoncé qu'on peut utiliser, avec les propriétés des projections), pour déterminer l'image d'un point X par une symétrie $s = s_{F,\vec{G}}$, on a besoin de connaître son projeté $p(X)$ sur F dans la direction de G.
Déterminons $s(A)$: puisque $A \in F$, on a $p(A) = A$, donc
$s(A) = A + 2(\overrightarrow{Ap(A)}) = A + 2\overrightarrow{AA} = A + \vec{0} = A$.
Déterminons $s(M)$: on peut écrire $M = A + \vec{x} = A + \vec{y} + \vec{z} = P + \vec{z}$ en posant $P = A + \vec{y} = M - \vec{z}$. Sous cette forme, il est clair que $P \in A + \vec{F} = F$ et $P \in M + \vec{G}$, donc $\{P\} = F \cap (M + \vec{G})$ et $P = p(M)$. Donc :
$s(M) = M + 2(\overrightarrow{Mp(M)}) = M + 2(P - M) = (A + \vec{y} + \vec{z}) + 2(-\vec{z}) = A + \vec{y} - \vec{z}$.
On a donc $\varphi(\vec{x}) = (A + \vec{y} - \vec{z}) - A = \vec{y} - \vec{z} = \sigma(\vec{x})$, ceci pour tout $\vec{x}$, donc $\varphi = \sigma$.

1° b) Pour démontrer cette propriété, on doit établir deux choses : d'une part que si s est la symétrie par rapport à F dans la direction $\vec{G}$, alors $p(M)$ est le milieu de $[Ms(M)]$, et d'autre part, que si on définit l'application r en disant qu'elle associe à un point M l'unique point M' tel que $I = p(M)$ est le milieu de $[MM']$, alors r est bien définie et on a $r = S$.

Soit M un point quelconque de E. Si $M' = s(M)$ et si $I = p(M)$, alors puisque $s(M) = M + 2\overrightarrow{Mp(M)}$, c'est que $M' = M + 2\overrightarrow{MI}$, donc $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$, ou encore $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MM'}$: I est bien le milieu de $[MM']$.

Réciproquement, soit M un point de E, et $I = p(M)$. Montrons qu'il existe un unique point M' tel que I soit le milieu de $[MM']$. Un tel point doit être tel que $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MM'}$, ou encore $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$. Mais cette relation équivaut à $M' = M + 2\overrightarrow{Mp(M)}$, et on sait qu'il existe un unique point M' vérifiant cette relation ; de plus, on sait aussi, par définition, que $s(M) = M + 2\overrightarrow{Mp(M)}$, donc $M' = s(M)$. On a prouvé ainsi : que l'application r est bien définie, et que $r(M) = s(M)$ pour tout M, donc $r = s$.

1° c) Soit M un point de E et P son projeté sur F dans la direction de G. Soit $M' = s(M)$. On doit montrer que $s \circ s(M) = M$, c'est-à-dire que $s(M') = M$. Pour déterminer $s(M')$, on va utiliser le résultat de la question précédente : M' étant l'unique point tel que $P = p(M)$ soit le milieu de $[MM']$, il suffit de prouver qu'on a aussi $P = p(M')$ pour pouvoir conclure. En effet, M sera alors le point tel que $P = p(M')$ soit le milieu de $[M'M]$, donc on aura bien $s(M') = M$.
Déterminons $p(M')$: c'est le point d'intersection entre F et $M' + \overrightarrow{G}$. $P = p(M)$ est le point d'intersection de F et de $M + \overrightarrow{G}$, donc $P - M \in \overrightarrow{G}$.
Or, $M' = M + 2(P - M) = M + (P - M) + (P - M) = P + (P - M)$, donc $P = M' + (M - P)$ avec $M - P \in \overrightarrow{G}$, ce qui prouve que $P \in M' + \overrightarrow{G}$; on savait déjà que $P \in F$, on peut donc conclure que $\{P\} = F \cap (M' + \overrightarrow{G})$ et que $P = p(M')$, ce qui achève la démonstration.

2° Soit $s = s_{F,\overrightarrow{G}}$ la symétrie par rapport à $F = A + \overrightarrow{F}$ dans la direction $\overrightarrow{G}$. Puisque $A \in F$, on a $s(A) = A = f(A)$, et s a la même partie linéaire que f, à savoir la symétrie vectorielle $\sigma_{\overrightarrow{F},\overrightarrow{G}}$. D'après le dernier point de la proposition 2.2 p. 34, on peut affirmer que $f = s$.

3° Soit f une involution affine de l'espace affine $(E, \overrightarrow{E})$, c'est-à-dire une application affine de E dans E vérifiant $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Soit φ la partie linéaire de f. Soit M un point quelconque de E et soit $M' = f(M)$.
Puisque f est involutive, on a $f(M') = f \circ f(M) = M$. Soit $A = M + \frac{1}{2}\overrightarrow{MM'}$. On va montrer que A est un point fixe de f. Soit $A' = f(A)$ (a priori, A' et A ne sont pas confondus, mais on va essayer de montrer qu'effectivement on a bien $A' = A$).
Remarquons tout d'abord qu'on peut écrire $A = M + \overrightarrow{MM'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MM'} = M' - \frac{1}{2}\overrightarrow{MM'}$, de sorte qu'on peut calculer de deux façons l'image de A :
D'une part, $A' = f(M) + \varphi(A - M) = M' + \varphi(\frac{1}{2}\overrightarrow{MM'}) = M' + \frac{1}{2}\varphi(\overrightarrow{MM'})$.
D'autre part, $A' = f(M') + \varphi(A - M') = M + \varphi(-\frac{1}{2}\overrightarrow{MM'}) = M - \frac{1}{2}\varphi(\overrightarrow{MM'})$.
On a donc $M' + \frac{1}{2}\varphi(\overrightarrow{MM'}) = M - \frac{1}{2}\varphi(\overrightarrow{MM'})$ et en ajoutant $\frac{1}{2}\varphi(\overrightarrow{MM'})$ à chaque membre, on obtient $M = M' + \varphi(\overrightarrow{MM'})$, puis $\varphi(\overrightarrow{MM'}) = M - M' = \overrightarrow{M'M} = -\overrightarrow{MM'}$.
Donc en reportant ce résultat dans une des deux expressions de A', par exemple la deuxième, on obtient $A' = M - \frac{1}{2}\varphi(\overrightarrow{MM'}) = M - \frac{1}{2}(-\overrightarrow{MM'}) = M + \frac{1}{2}\overrightarrow{MM'} = A$.
A est bien un point fixe de f.

Montrons que la partie linéaire de f est une involution. C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.15 p. 44, mais on peut également le redémontrer facilement si on n'en est pas encore là dans l'étude du cours :

Soit $\vec{x} \in \vec{E}$. Posons $M = A + \vec{x}$, (A est le point fixe qu'on vient de mettre en évidence) et $M' = f(M)$ (et donc $f(M') = M$). On peut à présent facilement calculer

$$\begin{aligned}\varphi \circ \varphi(\vec{x}) &= \varphi(f(M) - f(A)) = \varphi(M' - A) = f(A + \overrightarrow{AM'}) - f(A) \\ &= f(M') - A = M - A = \vec{x}.\end{aligned}$$

Comme ceci est valable pour tout $\vec{x}$, on a bien $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\vec{E}}$, de sorte que φ est une involution linéaire, donc une symétrie vectorielle et on peut conclure grâce à 2° puisque f admet un point fixe et que sa partie linéaire est une symétrie vectorielle, que f est une symétrie affine.

Exercice 2.11.

1° La partie linéaire de h' est $L(h') = L(h \circ t) = L(h) \circ L(t) = (k\mathrm{id}_{\vec{E}})(\mathrm{id}_{\vec{E}}) = k\mathrm{id}_{\vec{E}}$, donc h' est une homothétie de rapport k. Ce raisonnement montre presque sans changement que h'' est aussi une homothétie de rapport k. Soient I' et I'' leurs centres respectifs. On a
$I' = h'(I') = h \circ t(I') = h(I' + \vec{u}) = h(I') + k\mathrm{id}_{\vec{E}}(\vec{u}) = I + k(I' - I) + k\vec{u}$, donc
$I' - I = k(I' - I) + k\vec{u}$ et $(1-k)(I' - I) = k\vec{u}$ d'où $I' - I = \frac{k}{1-k}\vec{u}$ et $I' = I + \frac{k}{1-k}\vec{u}$:
$I' \in I + < \vec{u} >$.

De même,
$I'' = h''(I'') = t \circ h(I'') = t(I + k(I'' - I)) = (I + k(I'' - I)) + \vec{u}$ donc
$I'' - I = k(I'' - I) + \vec{u}$ et $(1 - k)(I'' - I) = \vec{u}$ de sorte que $I'' = I + \frac{1}{1-k}\vec{u}$ et
$I'' \in I + < \vec{u} >$.

Les homothéties h' et h'' ne peuvent être égales que si elles ont même centre et même rapport. Elles ont bien le même rapport, mais il est impossible que $I' = I''$, car cela signifierait que $I + \frac{k}{1-k}\vec{u} = I + \frac{1}{1-k}\vec{u}$, donc $\vec{u} = \vec{0}$ (puisque $k \neq 1$), ce qui est exclu par hypothèse [6].

2° Dans tous les cas, la partie linéaire de $f = h' \circ h$ est $kk'\mathrm{id}_{\vec{E}}$. Si $kk' \neq 1$, alors f est une homothétie et si $kk' = 1$, f est une translation.

- Si $I = I'$, quels que soient k et k', I est un point fixe de f puisque $f(I) = h' \circ h(I) = h'(I) = h'(I') = I' = I$.
  - Si $kk' = 1$, f est une translation qui admet un point fixe, c'est donc l'identité (le vecteur de translation est $\overrightarrow{If(I)} = \vec{0}$) [7].

[6] Remarquons tout de même que si on n'avait pas exclu la possibilité $\vec{u} = \vec{0}$, dans ce cas, on aurait trivialement $h = h' = h''$ et $I = I' = I''$.

[7] Un autre argument pourrait être d'utiliser la propriété 2.14 p. 43 qui permet d'affirmer que l'ensemble des points fixes de f est dans ce cas le sous-espace affine de E qui passe par I et qui est dirigé par $\ker(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}}) = \ker 0_{\vec{E}} = \vec{E}$, c'est-à-dire l'ensemble E tout entier et f fixe tous les points et est donc l'identité de E.

- Si $kk' \neq 1$, f est l'homothétie de centre $I = I'$, de rapport kk'.

- Si $I \neq I'$,
  - Si $kk' = 1$, f est une translation de vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Mf(M)}$ quel que soit le point M. En particulier, si on utilise le point I, si $I'' = f(I) = h' \circ h(I)$, on a $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{II''}$. Mais $I'' = h' \circ h(I) = h'(I) = I' + k'(I - I')$, donc $\overrightarrow{u} = I'' - I = I' - I + k'(I - I') = (1 - k')\overrightarrow{II'} \in < \overrightarrow{II'} >$ et $\overrightarrow{u}$ est bien un vecteur directeur de la droite (II').
  - Si $kk' \neq 1$, f est une homothétie de rapport kk'. Soit J le centre de l'homothétie f. Déterminons ce centre. On a

$$(2) \qquad J = f(J) = h' \circ h(J) = h'(I + k(J - I)) = I' + k'(I + k(J - I) - I')$$

Comment résoudre cette équation d'inconnue le point J ? Une méthode naïve consisterait à « oublier » qu'il s'agit de points, et à résoudre algébriquement cette équation comme si on avait affaire à des nombres ou des vecteurs :

$$\begin{aligned} J - kk'J = I' + k'I - kk'I - k'I &\iff (1 - kk')J = (1 - k')I' + k(1 - k')I \\ &\iff J = \frac{1 - k'}{1 - kk'}I' + \frac{k(1 - k')}{1 - kk'}I. \end{aligned}$$

Mais pour l'instant ce type de calcul n'a aucune légitimité. Nous verrons après l'étude du chapitre 3 que ce calcul a un sens et permet de trouver précisément le point J. Comme on ne peut pas anticiper ainsi, nous reprendrons le calcul à partir de (2) en essayant d'obtenir une égalité entre vecteurs. Nous allons essayer d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ} = J - I$ en fonction de $\overrightarrow{II'} = I' - I$.

$$\begin{aligned} (2) &\iff J - I = I' - I + k'(I - I') + kk'(J - I) \\ &\iff (1 - kk')(J - I) = (1 - k')(I' - I) \\ &\iff J - I = \frac{1 - k'}{1 - kk'}(I' - I) \iff J = I + \frac{1 - k'}{1 - kk'}\overrightarrow{II'}. \end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que $J \in (II')$.

On a obtenu, dans les quatre cas possibles, les quatre type d'applications affines prévus par l'énoncé. Il ne reste plus qu'à étudier s'il est possible que $h \circ h' = h' \circ h$. Remarquons tout d'abord qu'il n'est pas utile de recommencer à raisonner pour déterminer $f' = h \circ h'$. En effet, tout ce qu'on a obtenu concernant $f = h' \circ h$ est utilisable sans changement pour déterminer f', il suffit d'échanger les rôles de h et h', donc aussi les rôles de I et I' et ceux de k et k'.

Donc, si $I = I'$, on voit que pour $kk' = 1$, on a aussi $f' = \mathrm{id}_E = f$, et pour $kk' \neq 1$, f' est aussi l'homothétie de centre $I = I'$ et de rapport kk', donc on a aussi $f' = f$.

En revanche, si $I \neq I'$ et $kk' = 1$, f' est la translation de vecteur $\overrightarrow{u'} = (1-k)\overrightarrow{I'I}$. Est-il possible que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u'}$? On aurait $(1-k')\overrightarrow{II'} = (1-k)\overrightarrow{I'I}$, donc $((1-k')+(1-k))\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{0}$

et $k = 2-k'$. Mais on sait que $k' = \frac{1}{k}$, donc $k^2 = 2k-1$ et $(k-1)^2 = 0$, c'est impossible puis qu'on a supposé $k \neq 1$. donc on a toujours $f' \neq f$ dans ce cas.

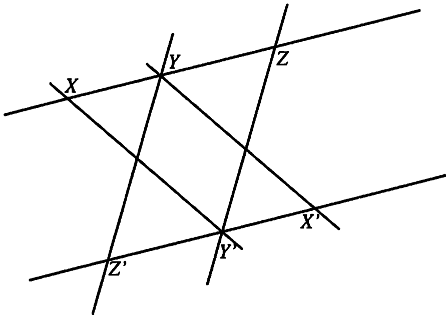
De même, si $I \neq I'$ et $kk' \neq 1$, f' est l'homothétie de rapport kk', de centre $J' = I' + \dfrac{1-k}{1-kk'}\overrightarrow{I'I}$. Est-il possible que $J = J'$? On aurait $J' - J = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $(I' - I) - \dfrac{1-k}{1-kk'}\overrightarrow{II'} - \dfrac{1-k'}{1-kk'}\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{0}$ et comme $I \neq I'$ donc $\overrightarrow{II'} \neq \overrightarrow{0}$,
$0 = 1 - \dfrac{1-k}{1-kk'} - \dfrac{1-k'}{1-kk'} = \dfrac{1-kk'-1+k-1+k'}{1-kk'} = -\dfrac{(k-1)(k'-1)}{1-kk'}$.
C'est impossible puisque k et k' sont différents de 1 et on a donc toujours $f' \neq f$ dans ce cas aussi.
En résumé, $h \circ h' = h' \circ h \iff I = I'$. Deux homothéties de même centre commutent, deux homothéties de centres différents ne commutent jamais, et une homothétie ne commute jamais avec une translation de vecteur non nul (distincte de l'identité) [8].

Exercice 2.12.

On a vu (à la proposition 2.17 p. 45) que $H = \mathcal{T}(E)$ est un sous-groupe distingué du groupe $G = \mathcal{D}(E)$ des dilatations. D'autre part, on a étudié la composée de deux homothéties de même centre lors de l'exercice précédent 2.11 et les résultats qu'on a obtenu prouvent clairement que $K = \mathcal{H}_A(E) \cup \{\mathrm{id}_E\}$ est un sous-groupe de $GA(E)$ mais aussi de $G = \mathcal{D}(E)$. Il reste à montrer que $HK = G$ et que $H \cap K = \mathrm{id}_E$. Ce dernier point est une évidence, car la seule translation qui soit aussi dans $K = \mathcal{H}_A(E) \cup \{\mathrm{id}_E\}$ est l'identité. Soit maintenant f un élément quelconque de G. Si c'est une translation $f = t$, elle s'écrit $t = t \circ \mathrm{id}_E$, avec $t \in H$ et $\mathrm{id}_E \in K$. Si c'est une homothétie $f = h = h_{I,k}$ (avec k non nul, et différent de 1), alors on sait que si $h' = h_{A,\frac{1}{k}}$, on a vu à l'exercice précédent que $h \circ h'$ est une translation t, donc on a $h \circ h' = t$. En composant cette égalité à droite par $h'^{-1} = h_{A,k} = h''$, on obtient $f = h = t \circ h''$, $t \in H$, $h'' \in K$, donc on a bien $G = HK$, ce qui achève la démonstration.

[8] Dans cet énoncé final, on parle bien sûr de « vraies » homothéties, distinctes de l'identité, avec un seul point fixe.

Exercice 2.13.



Nous supposons que nous sommes dans la situation de la figure, c'est-à-dire $D /\!\!/ D'$. Nous avons l'hypothèse $(XY') /\!\!/ (X'Y)$ et $(YZ') /\!\!/ (Y'Z)$, et on doit montrer la conclusion $(XZ') /\!\!/ (X'Z)$.

Soit t_1 la translation de vecteur $\vec{u}_1 = \overrightarrow{XY}$ et t_2 la translation de vecteur $\vec{u}_2 = \overrightarrow{YZ}$. Il est clair que $t_2 \circ t_1(X) = Z$. Étudions l'effet de ces translations sur les points de la droite D'.

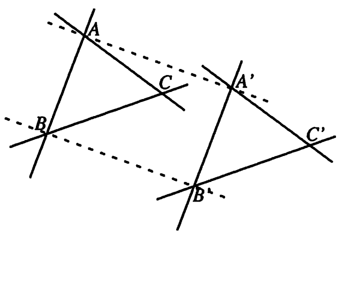
La translation t_2 transforme la droite (YZ') en la droite qui lui est parallèle et qui passe par Z (puisque $t_2(Y) = Z$), donc $t_2\big((YZ')\big) = (ZY')$.

Mais $\overrightarrow{YZ}$ est un vecteur directeur de la droite D, donc aussi de la droite D' et par conséquent $t_2(Z') = Z' + \vec{u}_2 \in Z' + < \vec{u}_2 >= D'$. Or, $t_2(D')$ est une droite parallèle à D' et qui passe par $t_2(Z')$, mais c'est justement D' qui est cette droite parallèle à elle-même passant par $t_2(Z')$, donc $t_2(D') = D'$. Puisque $Z' \in (YZ') \cap D'$, on a $t_2(Z') \in t_2\big((YZ') \cap D'\big) = t_2\big((YZ')\big) \cap t_2(D') = (ZY') \cap D'$. Donc $t_2(Z') = Y'$.

De façon tout à fait analogue, l'image de la droite D' par t_1 est aussi la droite D' car $\vec{u}_1 = \overrightarrow{XY}$ dirige D', et l'image de la droite (XY') par t_1 est la droite $(X'Y)$ puisqu'elle est parallèle et qu'elle passe par Y, de sorte que l'image de l'intersection Y' de D' avec (XY') par t_1 est l'intersection de D' avec $(X'Y)$, c'est-à-dire le point X'.

On a donc $t_2 \circ t_1(X) = Z$ et $t_1 \circ t_2(Z') = X'$. Mais $t = t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1$ est la translation de vecteur $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \overrightarrow{XZ}$, donc on a $t(X) = Z$ et $t(Z') = X'$, de sorte que l'image par la translation t de la droite (XZ') est la droite $(X'Z)$ qui lui est parallèle. On a prouvé que $(XZ') /\!\!/ (X'Z)$.

Exercice 2.14.



ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles à côtés respectifs parallèles, c'est-à-dire tels que $(AB)/\!\!/(A'B')$, $(AC)/\!\!/(A'C')$ et $(BC)/\!\!/(B'C')$.

On doit montrer que si on est dans la situation de la figure, c'est-à-dire lorsque $(AA')/\!\!/(BB')$, alors on a aussi $(CC')/\!\!/(AA')/\!\!/(BB')$.

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$ et soit $t = t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. Par construction, il est clair que $t(A) = A'$, et cette translation envoie la droite (AB) sur une droite qui lui est parallèle et qui passe par $t(A) = A'$, donc $t\big((AB)\big) = (A'B')$.

Mais puisque $(BB')/\!\!/(AA')$, on est sûr que $(BB') = B+ < \vec{u} >$ ($\vec{u}$, qui dirige (AA') dirige aussi (BB')), de sorte que l'image de la droite (BB') par t est elle-même. Donc $t\big((BB')\big) = (BB')$. Le point B, à l'intersection de (AB) et de (BB') est donc transformé, par t, en le point d'intersection de $t\big((AB)\big) = (A'B')$ avec $t\big((BB')\big) = (BB')$, c'est-à-dire en B'. On a $t(B) = B'$.

Déterminons maintenant l'image de C par t : la droite (AC) est transformée en une droite qui lui est parallèle et qui passe par $t(A) = A'$, donc en la droite $(A'C')$.

De même, la droite (BC) est transformée en une droite qui lui est parallèle et qui passe par $t(B) = B'$, donc en la droite $(B'C')$.

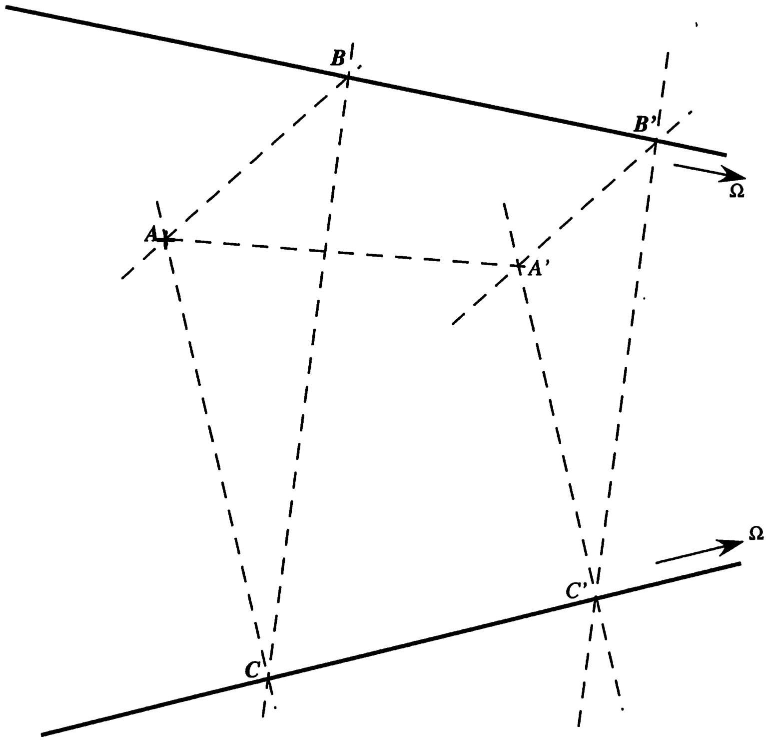
On a donc $\begin{cases} t\big((AB)\big) = (A'B') \\ t\big((BC)\big) = (B'C') \end{cases} \Longrightarrow t(C) = C'$ et donc $C' = C + \vec{u}$, ou encore $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ et on a bien le parallélisme annoncé, et le fait que le triangle $A'B'C'$ est le translaté par t du triangle ABC.

Exercice 2.15.

Il suffit de se ramener à la situation du théorème de Desargues, en traçant un premier triangle ABC dont A est un sommet et $B \in D$, $C \in D'$ (on a le choix pour les points B et C. On construit ensuite un triangle $A'B'C'$ aux côtés respectifs parallèles, avec toujours $B' \in D$ et $C' \in D'$. D'après le théorème de Desargues, les droites (BB') et (CC') étant sécantes (en Ω), la droite (AA') passe aussi par Ω.

En pratique, on peut choisir le point B' où l'on veut, mais ensuite, on trace la parallèle à (BC) qui passe par B', elle coupe D' en C', puis on trace la droite Δ_1 parallèle à (AB) qui passe par B' et la droite Δ_2 parallèle à (AC) qui passe par C'. $\Delta_1 \cap \Delta_2$

donne le point A' et la droite (AA') est la droite cherchée.



Exercice 2.16.

1° Soit $p = p_{P,\overrightarrow{D}}$ cette projection. On veut déterminer les coordonnées (x', y', z') du point $M' = p(M)$ lorsque M a pour coordonnées (x, y, z). Le plan P est caractérisé par l'équation cartésienne $z = 0$. La droite D admet pour vecteur directeur (voir exercice 1.14, question 2°b) le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le point M' est tel que $z' = 0$ puisqu'il appartient à P et d'autre part il est tel que $M' = M + \lambda\overrightarrow{u}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ puisque $\overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{D}$. On a donc le système $\begin{cases} x' = x - 5\lambda \\ y' = y + 7\lambda \\ z' = z + \lambda \\ z' = 0 \end{cases}$

On trouve la valeur de λ en combinant les deux dernières équations : $\lambda = -z$ donc les formules analytiques de p sont $\begin{cases} x' = x & +5z \\ y' = & y - 7z \\ z' = & 0 \end{cases}$

2° On raisonne de la même façon. Soit $s = s_{D,\overrightarrow{F}}$. On cherche les coordonnées (x', y', z') du point $M' = s(M)$ lorsque M a pour coordonnées (x, y, z). Soit $I(x_I, y_I, z_I)$ le milieu de $[MM']$. I est aussi le projeté de M sur D dans la direction $\overrightarrow{F}$, et on a :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI} \iff M' = 2I - M \iff \begin{cases} x' = 2x_I - x \\ y' = 2y_I - y \\ z' = 2z_I - z. \end{cases}$$

Il n'y a plus qu'à déterminer les coordonnées de I. Pour cela on dispose des deux conditions caractéristiques : $I \in D$ et $\overrightarrow{MI} \in \overrightarrow{F}$.
On pourrait travailler avec le système d'équations cartésiennes dont on dispose pour D, et la caractérisation paramétrique évidente de $\overrightarrow{F}$ qui peut s'écrire $I = M + \alpha\overrightarrow{\jmath} + \beta\overrightarrow{k}$ et qu'il faudrait traduire en termes de coordonnées, ce qui nous amènerait à écrire un système de 5 équations lourd à manier.
Il est beaucoup plus simple de raisonner avec une représentation paramétrique de D et une équation cartésienne de $\overrightarrow{F}$. En posant $z = 0$ et en résolvant le système $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + y = 2, \end{cases}$ on trouve le point $A(-3, 5, 0)$ de la droite D (c'est le point d'intersection de D avec le plan P de la première question ; on pourrait naturellement utiliser n'importe quel autre point de la droite D). Une représentation paramétrique de la droite D est donc (appliquée au point I qui appartient à D) : $\begin{cases} x_I = -3 - 5\lambda \\ y_I = 5 + 7\lambda \\ z_I = \qquad\lambda. \end{cases}$

D'autre part un vecteur appartient à $\overrightarrow{F}$ lorsque sa première coordonnée est nulle, ce qui s'écrit ici, pour le vecteur $\overrightarrow{MI}$, par $x_I = x$, donc on tire la valeur de λ de cette condition et de la première des équations de la représentation paramétrique de D : $\lambda = \dfrac{-x-3}{5}$. En reportant dans les deux autres équations, on en tire
$\begin{cases} y_I = 5 - \frac{7}{5}(x+3) = -\frac{7}{5}x + \frac{4}{5} \\ z_I = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5} \end{cases}$
Finalement, on obtient les coordonnées de M', et donc en même temps les formules analytiques de s :

$$\begin{cases} x' = 2x - x = x \\ y' = -\frac{14}{5}x + \frac{8}{5} - y \\ z' = -\frac{2}{5}x - \frac{6}{5} - z \end{cases} \iff \begin{cases} x' = & x & & \\ y' = -\frac{14}{5}x - y & & + \frac{8}{5} \\ z' = -\ \frac{2}{5}x & - z & - \frac{6}{5} \end{cases}$$

3° On peut écrire $D = A + < \overrightarrow{u} >$, avec $A(-3,5,0)$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-5\\7\\1\end{pmatrix}$.

Si $q = p_{P,<\overrightarrow{k}>}$ est la projection sur P dans la direction de $\overrightarrow{k}$, ce qu'on cherche est une caractérisation de la droite $q(D) = q\big(A + < \overrightarrow{u} >\big) = q(A) + < \overrightarrow{q}(\overrightarrow{u}) >$.

Or, q et $\overrightarrow{q}$ sont caractérisées par les mêmes formules analytiques $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = 0, \end{cases}$

de sorte que $q(A) = A(-3,5,0)$ et $\overrightarrow{q}(\overrightarrow{u})\begin{pmatrix}-5\\7\\0\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de $q(D)$ est donc $\begin{cases} x = -3 - 5t \\ y = 5 + 7t \\ z = 0 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et un système d'équations cartésiennes est $\begin{cases} 7x + 5y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ (on a éliminé t entre les deux premières équations, en multipliant la première par 7 et la deuxième par 5 avant de les additionner).

CHAPITRE 3

3. Solutions des exercices sur l'espace universel

Exercice 3.1.

1° $g_{A,2}$ est l'application de E dans $\overrightarrow{E}$ définie par $g_{A,2}(M) = 2\overrightarrow{MA}$. De même, $g_{B,\frac{1}{2}}$ est l'application entre les mêmes ensembles définie par $g_{B,\frac{1}{2}}(M) = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$. On a donc, pour tout $M \in E$, $(g_{A,2} + 3g_{B,\frac{1}{2}})(M) = 2\overrightarrow{MA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$. On cherche donc un point C et un scalaire λ tels que pour tout M, on a

$$2\overrightarrow{MA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MB} = \lambda\overrightarrow{MC} \tag{3}$$

Si cette relation (3) est vraie pour tout M, elle doit entre autres être vraie pour le point A, et pour le point B, c'est-à-dire qu'on doit avoir $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$, ainsi que $2\overrightarrow{BA} = \lambda\overrightarrow{BC}$.

Pour pouvoir déterminer λ en combinant ces deux relations, introduisons, par relation de Chasles, le point A dans la deuxième relation. On doit donc avoir $2\overrightarrow{BA} = \lambda\overrightarrow{BA} + \lambda\overrightarrow{AC}$

et en reportant la valeur de $\lambda\overrightarrow{AC}$ qu'on a obtenue pour le point A, on trouve la relation : $2\overrightarrow{BA} = \lambda\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $(2 + \frac{3}{2} - \lambda)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.

Si $A \neq B$, cela implique $\lambda = \frac{7}{2}$, et donc $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$.

Si $A = B$, alors (3) s'écrit $\lambda\overrightarrow{MC} = \frac{7}{2}\overrightarrow{MA}$ pour tout M, et donc pour $M = A$, on doit avoir $\lambda AC = \overrightarrow{0}$; $\lambda = 0$ est impossible car il y a des points M non confondus avec A, donc $C = A$, et on doit avoir $\lambda = \frac{7}{2}$.

Finalement, dans tous les cas, nous avons montré que le point $C = A + \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$ et le scalaire $\lambda = \frac{7}{2}$ sont les seuls possibles, et nous devons maintenant vérifier qu'ils conviennent.

Pour tout point M, on a, pour ce $\lambda = \frac{7}{2}$ et ce point $C = A + \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$,

$$\begin{aligned}\lambda\overrightarrow{MC} &= \frac{7}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{7}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{7}{2}\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}\\ &= (2 + \frac{3}{2})\overrightarrow{MA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MA} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})\\ &= 2\overrightarrow{MA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}\end{aligned}$$

On a montré que $g_{A,2} + 3g_{B,\frac{1}{2}} = g_{C,\frac{7}{2}}$ pour $C = A + \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$.

Notons qu'on aurait pu appliquer la formule de la démonstration de la proposition 3.1 p. 61 qui correspond à ce cas : $C = A + \dfrac{\frac{3}{2}}{2 + \frac{3}{2}}\overrightarrow{AC}$ et $\lambda = 2 + \frac{3}{2}$: on obtient bien sûr le même résultat, mais ici, nous avons montré en plus que ce point C et ce scalaire λ sont les seuls qui conviennent.

2° Raisonnons de la même façon : $h = g_{A,3} + 3g_{B,-1}$ est l'application de E vers $\overrightarrow{E}$ qui associe à un point M le vecteur

$$h(M) = (g_{A,3} + 3g_{B,-1})(M) = 3\overrightarrow{MA} + 3(-1)\overrightarrow{MB} = 3(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}) = 3\overrightarrow{BA},$$

donc h est l'application constante $g_{A,3} + 3g_{B,-1} = f_{3\overrightarrow{BA}}$.

3° Pour tout point M, $(g_{B,2} - 3f_{\overrightarrow{u}})(M) = 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{u}$. On cherche s'il existe λ et C tels que $2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{MC}$ pour tout M. En particulier pour $M = B$, on doit avoir $-3\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{BC}$ et pour $M = C$, on doit avoir $2\overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Donc nécessairement $\overrightarrow{BC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{u}$ et $-3\overrightarrow{u} = \lambda(-\frac{3}{2}\overrightarrow{u})$, d'où $\lambda = 2$ (si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, nécessairement et clairement, $g_{B,2} - 3f_{\overrightarrow{u}} = g_{B,2}$).

Reste à vérifier qu'on a bien, dans tous les cas, $g_{B,2} - 3f_{\overrightarrow{u}} = g_{C,2}$ pour $C = B - \frac{3}{2}\overrightarrow{u}$.

Or, pour tout $M \in E$, on a

$$\begin{aligned}g_{C,2}(M) &= 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BC} = g_{B,2}(M) + 2(-\tfrac{3}{2})\overrightarrow{u} = g_{B,2}(M) - 3\overrightarrow{u}\\ &= (g_{B,2} - 3f_{\overrightarrow{u}})(M).\end{aligned}$$

4° En ayant admis les inclusions $E \subset \widehat{E}$ et $\overrightarrow{E} \subset \widehat{E}$, on peut écrire $g_{A,2} = 2A$, $g_{B,\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}B$ de sorte que $g_{A,2} + 3g_{B,\frac{1}{2}} = 2A + \frac{3}{2}B = \frac{7}{2}\left(\frac{2A+\frac{3}{2}B}{\frac{7}{2}}\right) = \frac{7}{2}C$ avec C qui est le point $C = \frac{4}{7}A + \frac{3}{7}B$.

De même, $g_{A,3} + 3g_{B,-1} = 3A - 3B = 3(A-B) = 3\overrightarrow{BA}$.

Et on a $g_{B,2} - 3f_{\overrightarrow{u}} = 2B - 3\overrightarrow{u} = 2(B - \frac{3}{2}\overrightarrow{u}) = 2C$ avec $C = B - \frac{3}{2}\overrightarrow{u}$.

Ces résultats sont bien sûr exactement les mêmes que ceux qu'on a obtenus plus laborieusement aux questions 1°, 2° et 3°. C'était la dernière fois, dans cet ouvrage, qu'on utilisera la « définition » des éléments de $\widehat{E}$.

Exercice 3.2.

Soit φ la forme linéaire associée à l'espace universel $\widehat{E}$.

On a $\varphi(a) = \varphi(A) + \varphi(B) + \varphi(C) = 1 + 1 + 1 = 3$, donc a n'est ni un point, ni un vecteur. On peut écrire $a = \varphi(a)\left(\frac{1}{\varphi(a)}(A+B+C)\right) = 3\,\frac{A+B+C}{3} = 3G$ avec

$$G = \frac{A+B+C}{3} = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

(G est un point, c'est le centre de gravité du triangle ABC).

De la même façon, $\varphi(b) = \varphi(A) + \varphi(B) - 2\varphi(C) + \varphi(\overrightarrow{w}) = 1 + 1 - 2 + 0 = 0$ donc b est un vecteur : $b \in \overrightarrow{E}$. On peut écrire $b = (A-C) + (B-C) + \overrightarrow{w}$, donc sans abus de langage, $b = \overrightarrow{w} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.

On a $\varphi(c) = \varphi(A) + 2\varphi(\overrightarrow{u}) - 2\varphi(B) + 2\varphi(\overrightarrow{v}) = 1 - 0 - 2 + 0 = -1$ donc c n'est ni un point ni un vecteur.

En revanche $M = -c$ est un point : $M = 2B - A - 2\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} = B + (B-A) + 2(-\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$, donc $c = -M$ avec M est le point tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 2(-\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$ (on peut aussi écrire $M = B + \overrightarrow{AB} + 2(-\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$).

d est un point (on vérifie facilement que $\varphi(d) = 1$), et on peut l'écrire $d = A + 3(A-B) + (A-C) + 3\overrightarrow{u}$, donc d est le point tel que $\overrightarrow{Ad} = 3\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ (ou $d = A + 3\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$).

En fait on peut aussi « rattacher » d à n'importe quel point, par exemple à B en écrivant $d = B + 4(A-B) + (A-C) + 3\overrightarrow{u} = B + 4\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{u}$, ou même à un point O quelconque, en écrivant

$$d = O + 5(A-O) - 3(B-O) - (C-O) + 3\overrightarrow{u} = O + 5\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{u}.$$

Exercice 3.3.

1° La droite $D = (AB)$ admet comme équation cartésienne $\begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0$ donc ici $\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y-2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \iff -3(x-1) - 2(y-2) = 0 \iff 3x + 2y = 7.$

La droite D' parallèle à D admet une équation du type $3x + 2y = h$ et comme elle passe par $C(-1, -1)$, on a $h = 3(-1) + 2(-1) = -5$, donc $D' \ : \ 3x + 2y + 5 = 0$.

2° Une équation cartésienne de $\overrightarrow{D}$ s'obtient en supprimant la constante dans l'équation de D, donc $\overrightarrow{D} \ : \ 3x + 2y = 0$. Un vecteur directeur de $\overrightarrow{D}$ est $\vec{u} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. La direction de D' est la même que celle de D puisque ces deux droites sont parallèles : $\overrightarrow{D'} = \overrightarrow{D}$.

3° a) Les coordonnées de A considéré comme élément de $\overrightarrow{E}$ sont, dans la base $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$: $A(1, 1, 2)$. De même, B a pour coordonnées, dans $\overrightarrow{E}$, $B(1, 3, -1)$. Un élément $X(t, x, y)$ de $\overrightarrow{E}$ appartient au plan $\widetilde{D} =< A, B >$ si et seulement si le déterminant des coordonnées de A, B, X est nul, donc une équation cartésienne de $\widetilde{D}$ est[9] :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & 3 & x \\ 2 & -1 & y \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} t - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} y = 0$$

$$\iff 3x + 2y - 7t = 0.$$

3°) Le cours nous précise que D est l'intersection de $\widetilde{D}$ avec P. Or, P est caractérisé, dans $\overrightarrow{E}$ par $t = 1$. Un système d'équation cartésienne qui caractérise D est donc $\begin{cases} 3x + 2y - 7t = 0 \\ t = 1. \end{cases}$

En reportant la valeur $t = 1$ de la deuxième à la première équation, on trouve que ce système est équivalent à $\begin{cases} 3x + 2y - 7 = 0 \\ t = 1. \end{cases}$

On retrouve bien, ainsi, l'équation de D dans P. L'équation de $\widetilde{D}$: $3x + 2y - 7t = 0$ est l'homogénéisée de l'équation $3x + 2y - 7 = 0$ de D, en ce sens qu'on a multiplié la constante -7 de cette équation par la nouvelle troisième variable t, ce qui a rendu cette équation homogène de degré 1.

3° c) La droite $\overrightarrow{D}$ est engendrée par le vecteur $\vec{u}$, dont les coordonnées dans $\overrightarrow{E}$ sont $(0, -2, 3)$. On peut donc donner une représentation paramétrique de $\overrightarrow{D}$: $\begin{cases} t = 0 \\ x = -2\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ et en éliminant λ entre les deux dernières équations, on obtient le système d'équations cartésiennes $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$; on retrouve bien l'équation de $\overrightarrow{D}$ dans $\overrightarrow{P}$.

[9] On calcule le déterminant d'ordre 3 en le développant par rapport à sa troisième colonne.

3° d) et e) Puisqu'une équation de D' dans P est $3x+2y+5=0$, un système d'équation cartésienne caractérisant D' dans $\overrightarrow{E}$ est $\begin{cases} 3x+2y+5t=0 \\ t=1 \end{cases}$; D' est l'intersection du plan vectoriel $\widetilde{D'}$: $3x+2y+5t=0$ avec le plan affine $t=1$.

Exercice 3.4.

1° Les équations cartésiennes des sous-espaces $\widetilde{D}$ et $\widetilde{D'}$ associés à D et D' dans l'espace $\widehat{P}$ dans la base $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\widehat{P}$ s'obtiennent tout simplement en homogénéisant les équations cartésiennes de D et D'. Il suffit de multiplier les constantes des équations cartésiennes des droites affines par t, puisque l'équation du plan affine P dans l'espace vectoriel universel $\widehat{P}$ est justement $t=1$. Une équation cartésienne dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de D étant $x+y-2=0$, on trouve une équation cartésienne de $\widetilde{D}$ est donc tout simplement $x+y-2t=0$ (en notant (t,x,y) les coordonnées d'un élément de l'espace universel $\widehat{P}$ dans la base $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$).
De même, une équation de D' étant $3x-y-3=0$, une équation de $\widetilde{D'}$ est donc $3x-y-3t=0$.
Remarquons que pour trouver l'équation des directions $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D'}$, il suffit de faire $t=0$ (équation de $\overrightarrow{P}$) dans les équations obtenues.

2° Déterminons les formules analytiques de la symétrie s.
On sait que D' est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u'}(1,3)$.
Soit $M(x,y)$ (toutes les coordonnées considérées sont rapportées au repère cartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ou à la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$).
Son image par s est le point $M'(x',y')$ qui vérifie $I=\frac{1}{2}(M+M')\in D$ et $\overrightarrow{MM'}=\lambda\overrightarrow{u'}$, c'est-à-dire $M'=M+\lambda\overrightarrow{u'}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$
Traduisant ces conditions en termes de coordonnées, on a d'une part $x_I+y_I=2$ et $\overrightarrow{MM'}=\lambda\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ c'est-à-dire

$$\frac{x+x'}{2}+\frac{y+y'}{2}=2 \text{ et } \begin{cases} x'=x+\lambda \\ y'=y+3\lambda. \end{cases} \tag{4}$$

On détermine λ en reportant ces valeurs de x' et y' dans la première équation : $(x+(x+\lambda))+(y+(y+3\lambda))=4$ donc $4\lambda=4-2x-2y$ et $\lambda=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y$.
En reportant cette dernière valeur dans le système (4), on trouve directement les formules cherchées :

$$\begin{cases} x'=x+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y \\ y'=y+3(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y) \end{cases} \quad \text{donc}$$

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+1 \\ y'=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y+3 \end{cases} \tag{5}$$

Ces formules montrent que la matrice de la partie linéaire $\overrightarrow{s}$ de s est $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On peut maintenant facilement déterminer la matrice du prolongement $\widetilde{s}$ de s et de $\overrightarrow{s}$ à $\widehat{P}$: on sait grâce à ce qui précède que l'image de O est le point de coordonnées cartésiennes $(1,3)$ dans le repère cartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, donc l'image de O a pour coordonnées augmentées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la *base* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

De même l'image par $\overrightarrow{s}$ du vecteur $\vec{\imath}$ est le vecteur de coordonnées $(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$ (première colonne de M), donc les coordonnées augmentées de l'image par $\widetilde{s}$ de $\vec{\imath}$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Le même raisonnement pour l'image du troisième vecteur de la *base* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ montre que la troisième colonne de la matrice $\widetilde{M}$ de $\widetilde{s}$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Finalement, la matrice de $\widetilde{s}$ est $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Du coup les formules analytiques de $\widetilde{s}$ sont $\begin{cases} t' = t \\ x' = t + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ y' = 3t - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ ce qu'on pouvait prévoir directement en homogénéisant les formules analytiques de s (5).

3° L'endomorphisme $\widetilde{f}$ de matrice $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ dans la base $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ admet comme formules analytiques $\begin{cases} t' = t \\ x' = 2t - 3x \\ y' = 4t - 3y \end{cases}$

Lorsqu'on considère l'image d'un point, la première coordonnée est $t = 1$, donc son image a aussi comme première coordonnée $t' = 1$, c'est bien un point, tandis que pour une raison analogue, l'image d'un vecteur est aussi un vecteur. Cela prouve que $\widetilde{f}$ est le prolongement d'une application affine f et de sa partie linéaire $\overrightarrow{f}$. On détermine les formules analytiques de ces deux restrictions en fixant $t = 1$ (pour f) et $t = 0$ (pour $\overrightarrow{f}$).

On voit ainsi que la matrice de $\overrightarrow{f}$ est $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, donc f est une homothétie de rapport -3, et le centre de f est son point fixe, dont les coordonnées sont solutions de

$\begin{cases} x = 2 - 3x \\ y = 4 - 3y \end{cases}$: f est l'homothétie de centre $\Omega(\frac{1}{2}, 1)$, de rapport -3.

La réponse précise à la question posée est la suivante : l'endomorphisme $\widetilde{f}$ de $\widehat{E}$ qui admet $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ pour matrice dans la base $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est le prolongement à $\widehat{P}$ de l'homothétie f de P et de sa partie linéaire, f ayant -3 comme rapport et $\Omega(\frac{1}{2}, 1)$ comme centre.

Exercice 3.5.

Soient $(\alpha', \beta', \gamma')$ les coordonnées barycentriques de N dans (A, B, C) que l'on cherche. On sait que A_1 est le milieu de $[MN]$, donc on a $A_1 = \frac{1}{2}(M + N)$ et $N = 2A_1 - M$. Comme on a $A_1 = \frac{1}{2}(B + C)$, et que $M = \alpha A + \beta B + \gamma C$, on obtient en reportant : $N = (B + C) - (\alpha A + \beta B + \gamma C) = -\alpha A + (1 - \beta)B + (1 - \gamma)C$, donc les coordonnées barycentriques de N sont $(\alpha', \beta', \gamma') = (-\alpha, 1 - \beta, 1 - \gamma)$
Vérification conseillée : on a bien $\alpha' + \beta' + \gamma' = 2 - \alpha - \beta - \gamma = 1$ puisque (α, β, γ) sont des coordonnées barycentriques.

Exercice 3.6.

1° a) La partie linéaire de f est caractérisée par les mêmes formules analytiques que f, sans les termes constants, c'est-à-dire $\begin{cases} x'_1 = 2x - 3y \\ x'_2 = -x - 2y \\ x'_3 = 2y. \end{cases}$

Ces formules correspondent à des coordonnées exprimées respectivement dans les bases $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\overrightarrow{E}$ et $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\overrightarrow{F}$, de sorte que la matrice de $\overrightarrow{f}$ pour ce choix de bases est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Le rang de cette matrice est clairement 2, puisque les deux premières lignes ne sont pas proportionnelles, donc $\mathrm{rg}(\overrightarrow{f}) = 2$, et donc $\dim(\mathrm{Im}\,\overrightarrow{f}) = 2$ de sorte que $\overrightarrow{f}$ n'est pas surjective (c'était évident, puisque $\dim \overrightarrow{E} < \dim \overrightarrow{F}$), mais d'après le théorème du rang, $\dim\ker \overrightarrow{f} + \mathrm{rg}(\overrightarrow{f}) = \dim \overrightarrow{E} = 2$, donc $\ker \overrightarrow{f} = \{\overrightarrow{0}\}$ et $\overrightarrow{f}$ est injective. f est donc, comme $\overrightarrow{f}$, injective et non surjective.

1° b) L'application linéaire $\widetilde{f}$ qui prolonge f et $\overrightarrow{f}$ à $\widehat{E}$ est caractérisée par les coordonnées des images des trois vecteurs de la base $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:
Le *point* $\widetilde{f}(O) = f(O)$ a pour coordonnées $(2, -1, 0)$ dans le *repère* de F qu'est $\mathcal{R}' = (\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, donc ses coordonnées dans la *base* $\mathcal{R}'$ de $\widehat{F}$ sont (notées en colonne) : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le *vecteur* $\widetilde{f}(\vec{\imath}) = \overrightarrow{f}(\vec{\imath})$ a, dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ de $\overrightarrow{F}$, pour coordonnées [10] $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc dans la base $\mathcal{R}'$ de $\widehat{F}$, ses coordonnées sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le *vecteur* $\widetilde{f}(\vec{\jmath}) = \overrightarrow{f}(\vec{\jmath})$ a, de même, pour coordonnées dans la base $\mathcal{R}'$ de $\widehat{F}$: $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Donc la matrice de $\widetilde{f}$ est, pour la base $\mathcal{R}$ de $\widehat{E}$ et pour la base $\mathcal{R}'$ de $\widehat{F}$, obtenue en juxtaposant les trois vecteurs colonnes qu'on vient d'obtenir :

$$\widetilde{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1° c) On sait que $f(D)$ est une droite affine de F (c'est un sous-espace affine et la dimension est conservée car f est injective). Elle passe par $f(A)$ et est dirigée par $\overrightarrow{f}(\vec{u})$. Les coordonnées de $f(A)$ s'obtiennent en remplaçant (x, y) par $(1, 1)$ dans les formules analytiques définissant f, donc c'est le triplet $(1, -4, 2)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{f}(\vec{u})$ pourraient s'obtenir de la même manière (en utilisant les formules analytiques de $\overrightarrow{f}$, sans termes constants), mais peuvent aussi s'obtenir par le calcul matriciel MU avec $U = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; on obtient donc

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

D'où une représentation paramétrique de $f(D)$: $\begin{cases} x_1 = 1 + 13\lambda \\ x_2 = -4 + 4\lambda \\ x_3 = 2 - 6\lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$

1° d) Les points M dont l'image $f(M) = M'$ (de coordonnées (x'_1, x'_2, x'_3)) appartient à Π sont tels que $x'_1 + x'_2 - x'_3 = 1$, donc compte tenu des formules analytiques de f, les coordonnées de M vérifient $(2 + 2x - 3y) + (-1 - x - 2y) - (2y) = 1 \iff x - 7y = 0$.

[10] Le fait que $\overrightarrow{f}(\vec{\imath})$ et $f(O)$ ont le même triplet de coordonnées n'est rien d'autre qu'une coïncidence, d'ailleurs, ce ne sont pas des triplets de coordonnées dans le même espace, ni par rapport au même repérage, puisque le point $f(O)$ a ses coordonnées calculées dans le repère cartésien $\mathcal{R}'$ de l'espace affine F, alors que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{f}(\vec{\imath})$ se calculent dans la base $\mathcal{B}'$ de l'espace vectoriel $\overrightarrow{F}$. Dans l'espace universel, et par rapport à la même base $\mathcal{R}'$, les coordonnées diffèrent (les premiers termes sont distincts, évidemment, puisque la première coordonnée d'un point est toujours 1 et la première coordonnée d'un vecteur est nulle.).

L'ensemble cherché est donc la droite Δ d'équation cartésienne $x-7y=0$. Remarquons que cette droite passe par O, ce qu'on pouvait prévoir puisque les coordonnées de $f(O)$, $(2,-1,0)$ vérifient l'équation de Π : $2+(-1)-0=1$.

2° a) La matrice du système de vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est $\mathrm{P}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible (son déterminant vaut 1), donc $\mathcal{B}_1=(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\vec{E}$ (et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$).
On en déduit que $\mathcal{R}_1=(A,\mathcal{B}_1)=(A,\vec{u},\vec{v})$ est un repère cartésien de E. Notons que c'est donc aussi une base de $\widehat{E}$, et que la matrice de passage de la base $\mathcal{R}$ à la base $\mathcal{R}_1$ est $\widetilde{\mathrm{P}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & -1\end{pmatrix}$ (dans la première colonne, on met les coordonnées augmentées de A, dans les deux autres colonnes, on met les coordonnées augmentées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, toutes ces coordonnées étant exprimées dans l'« ancienne base » $\mathcal{R}$).

2° b) Grâce à la matrice de passage « augmentée » $\widetilde{\mathrm{P}}$ entre les bases $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$, on sait que si $\widetilde{X}$ est le vecteur colonne des coordonnées dans $\mathcal{R}$ d'un élément $\widetilde{x}$ de $\widehat{E}$ et si $\widetilde{X}_1$ est le vecteur colonne des coordonnées de ce même élément dans $\mathcal{R}_1$, la formule exprimant les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles est $\widetilde{X}=\widetilde{\mathrm{P}}\widetilde{X}_1$.
En appliquant ceci à un *point* M de E, de coordonnées (augmentées) $\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$ et $\begin{pmatrix}1\\ x_1\\ y_1\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}_1$, on obtient $\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x_1\\ y_1\end{pmatrix}$, soit (en n'écrivant pas la première équation triviale $1=1$) $\begin{cases}x=1+2x_1+y_1\\ y=1-3x_1-y_1\end{cases}$ qui sont les formules analytiques de changement de repère demandées.
(On aurait pu aussi utiliser, pour le même résultat, la formule vue au § **1.3.2** p. 12).

2° c) Le fait que la matrice de $\widetilde{f}$, pour les bases $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ soit $\widetilde{\mathrm{M}}$ exprime le fait que pour tout élément $\widetilde{x}$ de $\widehat{E}$, dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont le vecteur colonne $\widetilde{X}$, l'image $\widetilde{y}=\widetilde{f}(\widetilde{x})$ a ses coordonnées $\widetilde{Y}$ dans la base $\mathcal{R}'$ de $\widehat{F}$ qui s'expriment en fonction de $\widetilde{X}$ par :

$$\widetilde{Y}=\widetilde{\mathrm{M}}\widetilde{X}. \tag{6}$$

Pour obtenir la matrice $\widetilde{\mathrm{M}}_1$ de $\widetilde{f}$ pour les bases $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}'$, il suffit d'obtenir une relation du même type entre les coordonnées $\widetilde{X}_1$ de $\widetilde{x}$ dans $\mathcal{R}_1$ et $\widetilde{Y}$. Or, on vient de voir que $\widetilde{X}=\widetilde{\mathrm{P}}\widetilde{X}_1$, donc en reportant dans (6), on obtient $\widetilde{Y}=\widetilde{\mathrm{M}}\widetilde{X}=\widetilde{\mathrm{M}}\widetilde{\mathrm{P}}\widetilde{X}_1$, donc la matrice

$\widetilde{\mathrm{M}}_1$ vaut

$$\widetilde{\mathrm{M}}_1 = \widetilde{\mathrm{M}}\widetilde{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 13 & 5 \\ -4 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la formule $\widetilde{Y} = \widetilde{\mathrm{M}}_1\widetilde{X}_1$ aux coordonnées $(1, x_1, y_1)$ d'un point M de E et aux coordonnées $(1, x'_1, x'_2, x'_3)$ de son image $M' = \widetilde{f}(M)$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 13 & 5 \\ -4 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

D'où les formules analytiques de f pour le repère $\mathcal{R}_1$ de E et le repère $\mathcal{R}'$ de F (en n'écrivant pas la première ligne triviale $1 = 1$) :

$$\begin{cases} x'_1 = 1 + 13x_1 + 5y_1 \\ x'_2 = -4 + 4x_1 + y_1 \\ x'_3 = 2 - 6x_1 - 2y_1. \end{cases}$$

3° a) La matrice du système de vecteurs $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est : $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Son déterminant est non nul (c'est $\det \mathrm{Q} = 2$), donc elle est inversible, et $\mathcal{B}'_1 = (\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ est donc une base, et Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}'_1$.
$\mathcal{R}'_1 = (\Omega, \mathcal{B}'_1) = (\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ est donc bien un repère cartésien.
La matrice de passage de $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}'_1$ (considérées comme des bases de $\widehat{F}$) est

$$\widetilde{\mathrm{Q}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3° b) Les hypothèses sur g peuvent se traduire ainsi : la matrice N_1 de l'application linéaire $\widetilde{g}$, entre $\widehat{E}$ et $\widehat{F}$, qui prolonge g, calculée dans les bases $\mathcal{R}_1 = (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $\widehat{E}$ et $\mathcal{R}'_1 = (\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ de $\widehat{F}$, a pour première colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(g(A) = \Omega + \overrightarrow{J} - 2\overrightarrow{K})$, elle a pour deuxième colonne $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ $(g(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{I} + \overrightarrow{J})$ et pour troisième colonne $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ $(g(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{J} + \overrightarrow{K})$. Donc $\mathrm{N}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Un élément $\widetilde{x}$ de $\widehat{E}$, de coordonnées X_1 dans $\mathcal{R}_1$, et de coordonnées X dans $\mathcal{R}$, ayant pour image par $\widetilde{g}$ l'élément $\widetilde{y}$ de $\widehat{F}$, de coordonnées Y_1 dans $\mathcal{R}'_1$ et Y dans $\mathcal{R}'$, on a les relations suivantes :

$Y_1 = \mathrm{N}_1 X_1$ et $Y = \mathrm{N}X$, N étant la matrice de $\widetilde{g}$ pour les bases $\mathcal{R}$ de $\widehat{E}$ et $\mathcal{R}'$ de $\widehat{F}$.

Or, le fait que $\widetilde{\mathrm{Q}}$ est la matrice de passage de $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}'_1$ implique que $Y = \widetilde{\mathrm{Q}}Y_1$ et on a vu plus haut que $X = \widetilde{\mathrm{P}}X_1$, donc on a $\widetilde{\mathrm{Q}}Y_1 = \mathrm{N}\widetilde{\mathrm{P}}X_1$.

On en déduit $Y_1 = \mathrm{N}_1X_1 = \widetilde{\mathrm{Q}}^{-1}\mathrm{N}\widetilde{\mathrm{P}}X_1$, et comme cette dernière égalité est valable pour tout vecteur colonne X_1, on est sûr que $\mathrm{N}_1 = \widetilde{\mathrm{Q}}^{-1}\mathrm{N}\widetilde{\mathrm{P}}$, ou encore $\mathrm{N} = \widetilde{\mathrm{Q}}\mathrm{N}_1\widetilde{\mathrm{P}}^{-1}$.

Un calcul pas très difficile donne $\widetilde{\mathrm{P}}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 2 & 1\\1 & -3 & -1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & -1 & -1\\-5 & 3 & 2\end{pmatrix}$,

donc $\mathrm{N} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & -1 & -1\\-5 & 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-5 & 2 & 1\\-4 & 3 & 2\\-5 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

En appliquant la formule $Y = \mathrm{N}X$ aux coordonnées $X = \begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$ d'un point M de E, ayant le point $M' = g(M)$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}$ comme image par g, on obtient les formules analytiques de g pour le repère $\mathcal{R}$ de E et le repère $\mathcal{R}'$ de F :

$$\begin{pmatrix}1\\x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-5 & 2 & 1\\-4 & 3 & 2\\-5 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x'_1 = -5 + 2x + y\\y'_1 = -4 + 3x + 2y\\z'_1 = -5 + x + y.\end{cases}$$

Exercice 3.7.

Étudions, dans l'espace universel, le rang du système de vecteurs $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$. Une propriété classique du rang est que le rang d'un système de vecteurs est inchangé si on soustrait un des vecteurs du système aux autres, donc on a

$\mathrm{rg}(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \mathrm{rg}(A_1, A_2 - A_1, \ldots, A_k - A_1)$. Or, $A_1 \notin \overrightarrow{E}$ alors que pour tout

j on a $A_j - A_1 \in \overrightarrow{E}$, donc $A_1 \notin < A_2 - A_1, \ldots, A_k - A_1 >$ et par conséquent $\mathrm{rg}(A_1, A_2 - A_1, \ldots, A_k - A_1) = \mathrm{rg}(A_2 - A_1, \ldots, A_k - A_1) + 1$.
On a donc $\mathrm{rg}(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \mathrm{rg}(A_2 - A_1, \ldots, A_k - A_1) + 1$.
Or, $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ est affinement libre $\iff$ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ est libre dans $\widehat{E}$
$\iff$ $\mathrm{rg}(A_1, A_2, \ldots, A_k) = k$ $\iff$ $\mathrm{rg}(A_2 - A_1, \ldots, A_k - A_1) = k - 1$
$\iff$ $(\overrightarrow{A_1A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_k})$ est libre.

Exercice 3.8.

1° Il suffit de montrer que (A, B, C, D) forme un système libre de l'espace universel $\widehat{E}$. Pour cela, on forme la matrice des coordonnées des vecteurs de ce système dans la base $\mathcal{R}$ de $\widehat{E}$ (ce sera la matrice de passage P sous réserve qu'on a montré que c'est bien une base), et on montre qu'elle est inversible en calculant son déterminant. Cette matrice contient dans ses 4 colonnes les coordonnées augmentées des « vecteurs » A, B, C, D de $\widehat{E}$: $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Son déterminant est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -24 \neq 0.$$

Ce calcul prouve que (A, B, C, D) est un système libre de $\widehat{E}$, donc une base de cet espace vectoriel de dimension 4, et un repère affine de E.
Le calcul de P^{-1} (comme d'ailleurs ce calcul de déterminant) est un exercice de niveau première année, que les calculatrices ou les programmes de calcul formel peuvent nous épargner. Voici néanmoins ce calcul (en petits caractères) :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 7 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{17}{24} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{24} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

Ce calcul montre que $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{17}{24} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{24} \\ -\frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

2° Puisque (A, B, C, D) est un repère affine, une application affine dont l'ensemble de départ est E est entièrement déterminée par la donnée de l'image de ces quatre points. Il existe donc bien une et une seule application affine de E dans E qui associe à A, B, C, D respectivement les points A', B', C', D', et ceci quelles que soient les coordonnées de ces derniers.

3° La matrice de passage P permet, pour un élément $\widetilde{x}$ de $\widehat{E}$, d'exprimer ses coordonnées $X = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans l'ancienne base $\mathcal{R}$ en fonction de ses coordonnées $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ dans la nouvelle base (A, B, C, D), suivant la formule $X = \mathrm{P}\mathcal{A}$. On trouvera donc les coordonnées barycentriques $\mathcal{A}$ d'un point Y de E en fonction de ses coordonnées (augmentées) X dans l'ancienne base en inversant cette formule : $\mathcal{A} = \mathrm{P}^{-1}X$.
Les coordonnées barycentriques de A' sont donc

$$\mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{24} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{24} \\ -\frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

de sorte qu'on peut écrire $A' = \frac{7}{8}A - \frac{1}{4}B - \frac{1}{8}C + \frac{1}{2}D$.

De même les coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C, D) de B' sont :

$$\mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{17}{24} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{24}\\ -\frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{12}\\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24}\\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{8}\\ \frac{5}{4}\\ \frac{1}{8}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

de sorte qu'on a $B' = \frac{1}{8}A + \frac{5}{4}B + \frac{1}{8}C - \frac{1}{2}D$.

De même les coordonnées barycentriques de C' dans ce repère sont :

$$\mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{17}{24} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{24}\\ -\frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{12}\\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24}\\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{4}\\ \frac{7}{8}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

de sorte qu'on a $C' = -\frac{1}{8}A - \frac{1}{4}B + \frac{7}{8}C + \frac{1}{2}D$.

Enfin, pour D', les coordonnées barycentriques sont :

$$\mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{17}{24} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{24}\\ -\frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{12}\\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24}\\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\\ 0\end{pmatrix},$$

de sorte qu'on a $D' = \frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}C$.

On vérifie facilement que la somme des coordonnées barycentriques de A', B', C', D' est toujours 1.

Déterminons maintenant $f(A'), f(B'), f(C'), f(D')$.

$$\begin{aligned}
f(A') &= f\left(\frac{7A-2B-C+4D}{8}\right) = \frac{7f(A)-2f(B)-f(C)+4f(D)}{8}\\
&= \frac{7A'-2B'-C'+4D'}{8}\\
&= \frac{7}{8}\frac{7A-2B-C+4D}{8} - \frac{2}{8}\frac{A+10B+C-4D}{8}\\
&\qquad\qquad - \frac{1}{8}\frac{-A-2B+7C+4D}{8} + \frac{4}{8}\frac{2A+4B+2C}{8}\\
&= \frac{49-2+1+8}{64}A + \frac{-14-20+2+16}{64}B + \frac{-7-2-7+8}{64}C + \frac{28+8-4}{64}D\\
&= \frac{56A-16B-8C+32D}{64} = \frac{7A-2B-C+4D}{8} = A'.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(B') &= f\left(\frac{A+10B+C-4D}{8}\right) = \frac{A'+10B'+C'-4D'}{8} \\
&= \frac{1}{64}(7A-2B-C+4D) + \frac{10}{64}(A+10B+C-4D) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{64}(-A-2B+7C+4D) - \frac{4}{64}(2A+4B+2C) \\
&= \frac{8A+80B+8C-32D}{64} = \frac{A+10B+C-4D}{8} = B' \\
f(C') &= f\left(\frac{-A-2B+7C+4D}{8}\right) = \frac{-A'-2B'+7C'+4D'}{8} \\
&= -\frac{1}{64}(7A-2B-C+4D) - \frac{2}{64}(A+10B+C-4D) \\
&\qquad\qquad + \frac{7}{64}(-A-2B+7C+4D) + \frac{4}{64}(2A+4B+2C) \\
&= \frac{-8A-16B+56C+32D}{64} = \frac{-A-2B+7C+4D}{8} = C' \\
f(D') &= f\left(\frac{A+2B+C}{4}\right) = \frac{A'+2B'+C'}{4} \\
&= \frac{(7A-2B-C+4D)+2(A+10B+C-4D)+(-A-2B+7C+4D)}{32} \\
&= \frac{8A+16B+8C}{32} = D'
\end{aligned}$$

On peut en déduire que $f \circ f(A) = A' = f(A)$, $f \circ f(B) = B' = f(B)$, $f \circ f(C) = C' = f(C)$, $f \circ f(D) = D' = f(D)$, donc f et $f \circ f$ sont des applications affines qui coïncident pour les quatre éléments d'un repère affine, donc ces applications affines sont égales. On a donc $f \circ f = f$ donc f est une projection affine.

4° Les colonnes de la matrice M sont formées des coordonnées dans $\mathcal{R}$ (base de l'espace vectoriel d'arrivée) des images par f des éléments A, B, C, D de la base de l'espace vectoriel de départ, donc $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5° On a déterminé en 3° les coordonnées dans la base (A, B, C, D) de A', B', C', D' donc $\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\widetilde{x}$ un élément de $\widehat{E}$, dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ et dans (A, B, C, D) sont respectivement :

$$X = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Soit $\widetilde{y} = \widetilde{f}(\widetilde{x})$, et dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ et dans (A, B, C, D) sont respectivement :

$$Y = \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \\ \delta' \end{pmatrix}.$$

Les propriétés caractéristiques des matrices d'applications linéaires et des changements de bases permettent d'affirmer qu'on a $Y = \mathrm{M}_0 X$, $\mathcal{B} = \mathrm{M}_1 \mathcal{A}$, $Y = \mathrm{M}\mathcal{A}$, et d'autre part $X = \mathrm{P}\mathcal{A}$ et $Y = \mathrm{P}\mathcal{B}$. En combinant tout ceci, on peut écrire $Y = \mathrm{M}_0\mathrm{P}\mathcal{A}$ donc $\mathrm{M} = \mathrm{M}_0\mathrm{P}$ et $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}\mathrm{P}^{-1}$. D'autre part, on a $\mathrm{P}\mathcal{B} = \mathrm{M}\mathcal{A}$, donc $\mathcal{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}\mathcal{A}$ et $\mathrm{M}_1 = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}$. Enfin, il est classique que $\mathrm{M}_1 = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}_0\mathrm{P}$.

Pour trouver facilement M_0, on calcule donc

$$\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{17}{24} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{24} \\ -\frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

6° On sait déjà que f est une projection. Sa partie linéaire $\overrightarrow{f}$ admet, dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ comme matrice $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{f}$ est une projection vectorielle dans la direction $\overrightarrow{G} = \ker \overrightarrow{f}$, caractérisé par $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$, donc dirigé par $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et sur $\overrightarrow{F} = \operatorname{Im} \overrightarrow{f} = \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$ caractérisé par $x + y + z = 0$.

Et f est la projection sur F, dans la direction $\overrightarrow{G}$, F étant une variété affine dirigée par $\overrightarrow{F}$, qui passe par un des points invariants qui sont les points images. On dispose de A', B', C', D' et aussi de $O' = f(O)$ qui a $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ comme coordonnées dans $\mathcal{R}$. F est un plan d'équation $x + y + z = k$, et comme il passe par O', son équation est $x + y + z = 1$. On peut d'ailleurs vérifier que A', B', C', D' sont des points de ce plan.

Exercice 3.9.

On peut facilement montrer cette propriété avec des propriétés du collège, mais l'espace universel donne ce résultat encore plus rapidement :
Par hypothèse, on a $I = \frac{1}{2}(A+B)$, $J = \frac{1}{2}(B+C)$, $K = \frac{1}{2}(C+D)$, $L = \frac{1}{2}(D+A)$; considérons maintenant le milieu M de $[IK]$ et le milieu N de $[JL]$.
On a

$$\begin{aligned} M\frac{1}{2}(I+K) &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2}(C+D)\Big) = \frac{1}{4}(A+B+C+D) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}(B+C) + \frac{1}{2}(D+A)\Big) = \frac{1}{2}(J+L) = N. \end{aligned}$$

Donc $[IK]$ et $[JL]$ ont le même milieu, ce qui prouve que $IJKL$ est bien un parallélogramme (voir le théorème 1.28 p. 19).

Exercice 3.10.

Une bonne façon de raisonner dans ce type d'exercice consiste à utiliser le repère affine (A, B, C) (puisque A, B, C ne sont pas alignés, ces trois points sont affinement libres) et à procéder analytiquement en utilisant les coordonnées barycentriques. On considérera que A, B, C sont trois points d'un plan affine $(E, \overrightarrow{E})$ plongé dans un espace vectoriel universel $\widehat{E}$.

1° Déterminons une équation barycentrique des droites (AB) et (CG), qui sont l'intersection des plans vectoriels $< A, B >$ et $< C, G >$ de $\widehat{E}$ avec E :
$M(x, y, z) \in < A, B > \iff z = 0$ (c'est à peu près évident, $< A, B >$ est le plan vectoriel engendré par les deux premiers vecteurs de base).
Pour déterminer l'équation de (CG), remarquons tout d'abord que les coordonnées barycentriques de G ne sont pas (α, β, γ) car on n'a pas supposé que $\alpha + \beta + \gamma = 1$; on a juste supposé de façon implicite que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ en disant que G est barycentre des points pondérés considérés. Les coordonnées barycentriques de G sont donc $(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma})$, mais l'élément $\widetilde{G}$ de $\widehat{E}$ dont les coordonnées dans la base (A, B, C) sont (α, β, γ) est colinéaire à G et donc $< C, G > = < C, \widetilde{G} >$ (cela évitera d'alourdir l'écriture avec les dénominateurs).

$$M(x,y,z) \in < C, G > \iff \det(M, C, \widetilde{G}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x & 0 & \alpha \\ y & 0 & \beta \\ z & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -\begin{vmatrix} x & \alpha \\ y & \beta \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha y - \beta x = 0$$

Les droites (AB) et (CG) sont donc caractérisées par les équations barycentriques respectives $z = 0$ et $\alpha y = \beta x$ (auxquelles, rappelons-le, il faut toujours ajouter, au moins implicitement, la condition $x + y + z = 1$).

Ces deux droites seront parallèles si et seulement si les deux plans vectoriels $< A, B >$ et $< C, G >$ ont comme intersection une droite vectorielle qui ne rencontre pas le plan E (incluse dans $\overrightarrow{E}$), ce qui se traduit par le fait que le système $\begin{cases} x+y+z=1 \\ z=0 \\ \alpha y=\beta x \end{cases}$ n'a pas de solution, ou ce qui revient au même, par le fait que le système homogène $\begin{cases} x+\ \ y+z=0 \\ \qquad\quad z=0 \\ \beta x-\alpha y \quad =0 \end{cases}$ admet des solutions non triviales. Ce fait est caractérisé par la nullité du déterminant de ce système :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta & -\alpha & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta & -\alpha \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha+\beta=0.$$

On a établi que (AB) et (CG) sont parallèles si et seulement si $\alpha+\beta=0$ donc (AB) et (CG) sont sécantes si et seulement si $\alpha+\beta\neq 0$. Remarquons que (AB) et (CG), si elles ne sont pas sécantes, sont strictement parallèles car $C \notin (AB)$.
(Il était bien sûr possible de faire des raisonnements moins calculatoires).

2° Lorsque (AB) et (CG) sont sécantes, leur point d'intersection H a ses coordonnées barycentriques solution de $\begin{cases} x+\ \ y+z=1 \\ \qquad\quad z=0 \\ \beta x-\alpha y \quad =0. \end{cases}$

On a vu que le déterminant de ce système est $\alpha+\beta$, et ses solutions sont (méthode de Kramer) :

$$x = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{vmatrix} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad y = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \text{ et}$$

$$z = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & -\alpha & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc les coordonnées barycentriques de H sont $(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}, 0)$, ce qui prouve que H est le barycentre de $((A,\alpha),(B,\beta))$.

3° a) Le point G_1 de coordonnées barycentriques $(-\alpha,\beta,\gamma)$ est distinct du point G de coordonnées barycentriques (α,β,γ), puisque $\alpha\neq 0$ (unicité des coordonnées barycentriques). De même $G_2\neq G$ puisque $\beta\neq 0$ et $G_3\neq G$ puisque $\gamma\neq 0$.

3° b) Nous présenterons trois méthodes de démonstrations, toutes aussi valables :

Première méthode, calculatoire : on utilise les coordonnées barycentriques pour montrer que A, G et G_1 sont alignés.
Les coordonnées barycentriques de ces trois points dans le repère affine (A,B,C) sont respectivement $(1,0,0)$, $(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma})$ et $(\frac{-\alpha}{-\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\beta}{-\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{-\alpha+\beta+\gamma})$.

Ces trois points sont alignés si et seulement si le déterminant de leurs coordonnées barycentriques est nul, on calcule donc

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} & \frac{-\alpha}{-\alpha+\beta+\gamma} \\ 0 & \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} & \frac{\beta}{-\alpha+\beta+\gamma} \\ 0 & \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} & \frac{\gamma}{-\alpha+\beta+\gamma} \end{vmatrix} = \frac{1}{(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)} \begin{vmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ 0 & \beta & \beta \\ 0 & \gamma & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & \beta \\ \gamma & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

et G appartient bien à la droite (AG_1). On montre de la même manière que G appartient aux deux autres droites (BG_2) et (CG_3) (permutation circulaire des sommets).

Deuxième méthode, avec l'associativité du barycentre.
Il est clair que A est le barycentre du système $\{(A, 2\alpha), (A, -\alpha)\}$. Donc le barycentre de $\{(A, 2\alpha), (A, -\alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ est aussi le barycentre de $\{(A, 2\alpha-\alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$, donc c'est le point G.
Mais puisque G_1 est le barycentre de $\{(A, -\alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$, on peut dire que G est aussi barycentre de $\{(A, 2\alpha), (G_1, -\alpha+\beta+\gamma)\}$.
On peut donc conclure, grâce à la remarque qui suit la définition du barycentre, p. 73, que A, G_1 et G sont alignés, donc que G appartient à la droite (AG_1), et on termine par permutation circulaire des sommets.

Troisième méthode : on traduit dans l'espace universel le raisonnement d'associativité qu'on vient de faire.

$$\begin{aligned}
G &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}A + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}B + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}C \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}A + \frac{-\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}A + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}B + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}C \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}A + \frac{-\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\frac{-\alpha}{-\alpha+\beta+\gamma}A + \frac{\beta}{-\alpha+\beta+\gamma}B + \frac{\gamma}{-\alpha+\beta+\gamma}C\right) \\
G &= \frac{2\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}A + \frac{-\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}G_1
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité établit clairement que $G \in (AG_1)$, et on termine encore en permutant les sommets du triangle.

3° c) Montrer que (G_2G_3), (G_3G_1) et (G_1G_2) passent respectivement par A, B et C.
Encore une fois, il suffit d'établir par exemple que $A \in (G_2G_3)$, et les autres égalités s'en déduiront facilement.

Exercice 3.11.

1° Le fait que $A' \in (BC)$ se traduit au niveau de ses coordonnées barycentriques par le fait que $\alpha_1 = 0$. Le fait que A' ne soit ni en B, ni en C se traduit par le fait que $\alpha_2 \neq 0$ et $\alpha_3 \neq 0$. Comme on a de façon implicite $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, on en déduit que les coordonnées barycentriques de A' sont de la forme $(0, t, 1-t)$ avec $t \notin \{0, 1\}$.

De la même façon, on établit facilement que les coordonnées barycentriques de B' sont de la forme $(1-u, 0, u)$, avec $u \notin \{0,1\}$ et que les coordonnées barycentriques de C' sont de la forme $(v, 1-v, 0)$ avec $v \notin \{0,1\}$.

2° A' est le barycentre de $((B,\alpha_2),(C,\alpha_3))$, donc on a $\alpha_2\overrightarrow{BA'}+\alpha_3\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{A'B}=-\dfrac{\alpha_3}{\alpha_2}\overrightarrow{A'C}$, d'où $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}=-\dfrac{\alpha_3}{\alpha_2}=\dfrac{t-1}{t}$.
Exactement de la même façon, on montre que
$\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}=-\dfrac{\beta_1}{\beta_3}=\dfrac{u-1}{u}$ et $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}=\dfrac{v-1}{v}$.
Finalement :
$$\rho=\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-\frac{\alpha_3\beta_1\gamma_2}{\alpha_2\beta_3\gamma_1}=\frac{(t-1)(u-1)(v-1)}{tuv}.$$

3° On raisonne comme dans l'exercice précédent 3.10 : Un point M dont les coordonnées barycentriques dans (A,B,C) sont (x,y,z) appartient à la droite (AA') si et seulement si, dans $\widehat{E}$, les vecteurs (M,A,A') forment un système lié, ce qui se traduit par la nullité du déterminant de leurs coordonnées barycentriques, soit
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & \alpha_2 \\ z & 0 & \alpha_3 \end{vmatrix}=0 \iff -\begin{vmatrix} y & \alpha_2 \\ z & \alpha_3 \end{vmatrix}=0 \iff \alpha_3 y-\alpha_2 z=0 \iff (1-t)y-tz=0.$$
De la même façon, une équation barycentrique de (BB') est
$$\begin{vmatrix} x & 0 & \beta_1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & \beta_3 \end{vmatrix}=0 \iff \begin{vmatrix} x & \beta_1 \\ z & \beta_3 \end{vmatrix}=0 \iff \beta_3 x-\beta_1 z=0 \iff ux-(1-u)z=0.$$
Enfin, une équation barycentrique de (CC') s'obtient ainsi
$$\begin{vmatrix} x & 0 & \gamma_1 \\ y & 0 & \gamma_2 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \iff -\begin{vmatrix} x & \gamma_1 \\ y & \gamma_2 \end{vmatrix}=0 \iff \gamma_2 x-\gamma_1 y=0 \iff (1-v)x-vy=0.$$
Si ces trois droites sont concourantes, alors les trois plans vectoriels de $\widehat{E}$ qui leur correspondent se coupent selon une droite vectorielle, ce qui se traduit par le fait que le système obtenu en réunissant les trois équations de ces droites (qui sont aussi les équations des plans vectoriels dans $\widehat{E}$) admet des solutions non triviales, ce qui est caractérisé par la nullité de son déterminant.
Réciproquement, si ce système homogène de trois équations à trois inconnues obtenu en réunissant les équations des trois plans vectoriels $< A, A' >$, $< B, B' >$ et $< C, C' >$ de $\widehat{E}$ a son déterminant qui est nul, c'est que ces plans vectoriels sont sécants selon une droite vectorielle (d'après les hypothèses, il est impossible qu'ils soient confondus, sinon A, B, C seraient alignés dans E). Mais cette droite vectorielle peut être incluse dans $\overrightarrow{E}$, et dans ce cas, ces plans n'ont aucune intersection dans E, même pris deux par deux : les droites (AA'), (BB') et (CC') sont dans ce cas parallèles.
Finalement, on a montré que $(AA'),(BB'),(CC')$ sont concourantes ou parallèles si

et seulement si le déterminant du système $\begin{cases} (1-t)y - tz = 0 \\ ux - (1-u)z = 0 \\ (1-v)x - vy = 0 \end{cases}$ est nul, c'est-à-dire pour

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-t & -t \\ u & 0 & u-1 \\ 1-v & -v & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff (t-1)(u-1)(v-1) + tuv = 0$$

$$\iff \frac{(t-1)(u-1)(v-1)}{tuv} = -1 \iff \rho = -1$$

Donc $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\rho = -1$. Remarquons que d'un point de vue projectif, cela revient au même que ces trois droites soient concourantes ou parallèles. Les droites projectives dont elles sont les représentantes dans la carte affine E sont dans les deux cas concourantes dans le plan projectif, éventuellement à l'infini dans le cas du parallélisme.

4° Les trois points A', B', C' sont alignés si et seulement si, considérés comme vecteurs de $\widehat{E}$, ils forment un système lié, ce qui se traduit par le fait que le déterminant de leurs coordonnées barycentriques est nul, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-u & v \\ t & 0 & 1-v \\ 1-t & u & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff (1-t)(1-u)(1-v) + tuv = 0 \iff \rho = 1.$$

Exercice 3.12.
Soit $C = \operatorname{conv}(\mathcal{X})$ et soit Γ l'ensemble des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ points de $\mathcal{X}$.
Il est évident que $\Gamma \subset C$, puisque C est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de points de $\mathcal{X}$.
Montrons l'inclusion inverse. Soit $M \in C$. Il existe p points $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de $\mathcal{X}$ et p scalaires *positifs ou nuls* $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ tels que $M = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i A_i$. Comme M est un point, de plus on a $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$.
Si $p \leqslant n+1$, c'est terminé. On suppose que $p > n+1$, et on va montrer que nécessairement, on peut écrire M comme combinaison convexe de $p-1$ points. Cette récurrence décroissante permet de conclure, en effet, si $p-1 \leqslant n+1$, ce sera fini, et sinon, il suffira d'itérer le raisonnement avec $p-1$, et on ne s'arrêtera que lorsqu'on aura réussi à écrire M comme combinaison convexe de $n+1$ points. Remarquons tout d'abord qu'on peut supposer que tous les α_i sont strictement positifs, sinon il suffit de « supprimer » les points affectés de coefficients nuls.

Première tentative : Puisque les points A_i sont au nombre de $p > n+1$, et comme n est la dimension de l'espace, ces p points ne peuvent pas être affinement libres, donc un de ces points est combinaison linéaire des autres. Sans nuire à la généralité, supposons que c'est A_1. On a donc : $A_1 = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i A_i$. Mais rien ne permet d'affirmer que les λ_i sont positifs. On peut alors remplacer A_1 par son expression dans la combinaison convexe qui vaut M. On obtient :

$$M = \alpha_1 A_1 + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i A_i = \alpha_1 \sum_{i=2}^{p} \lambda_i A_i + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i A_i = \sum_{i=2}^{p} (\alpha_1 \lambda_i + \alpha_i) A_i,$$

mais on ne peut pas affirmer qu'on a écrit M une combinaison convexe de $p-1$ points car rien ne prouve que les nombres $\alpha_1 \lambda_i + \alpha_i$ soient positifs.

Deuxième tentative, on utilise l'espace universel. Le fait que les p *points* A_i ne peuvent pas être affinement libres peut se traduire par le fait que les *vecteurs* A_i forment un système lié, donc qu'il existe une combinaison linéaire non triviale nulle de ces vecteurs : il existe p scalaires μ_i *non tous nuls* tels que $\sum_{i=1}^{p} \mu_i A_i = \overrightarrow{0}$.

Sous réserve que μ_k soit non nul, on peut donc exprimer n'importe quel point A_k en fonction des autres :
pour $\mu_k \neq 0$, on a $A_k = -\sum_{i \neq k} \frac{\mu_i}{\mu_k} A_i$, et en substituant cette valeur dans la combinaison convexe de M, on obtient :

$$M = \alpha_k A_k + \sum_{i \neq k} \alpha_i A_i = -\alpha_k \sum_{i \neq k} \frac{\mu_i}{\mu_k} A_i + \sum_{i \neq k} \alpha_i A_i = \sum_{i \neq k} \left(\alpha_i - \alpha_k \frac{\mu_i}{\mu_k} \right) A_i. \tag{7}$$

Posons $\lambda_i = \alpha_i - \dfrac{\alpha_k \mu_i}{\mu_k}$; on a obtenu $M = \sum_{i \neq k} \lambda_i A_i$.

Nous allons voir qu'il est possible de choisir k pour que tous les λ_i soient positifs (ou nuls), et donc que nous ayons obtenu M comme combinaison convexe de $p-1$ points de $\mathcal{X}$.

Tout d'abord, puisque $\sum_{i=1}^{p} \mu_i A_i = \overrightarrow{0}$, en utilisant la forme linéaire φ liée à l'espace universel $\widehat{E}$, on a $\varphi\left(\sum_{i=1}^{p} \mu_i A_i\right) = \varphi(\overrightarrow{0}) = 0$, donc puisque les A_i sont des points tels que $\varphi(A_i) = 1$, on a donc $\sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0$. Puisque ces nombres ne sont pas tous nuls, il y a forcément des nombres strictement positifs et des nombres strictement négatifs parmi ces p nombres.

Considérons l'ensemble I_1 des i tels que $\mu_i > 0$, et l'ensemble I_2 des i tels que $\mu_i \leqslant 0$. On a bien sûr $\{1, \ldots, p\} = I_1 \sqcup I_2$.

Soit maintenant $T = \left\{ \dfrac{\alpha_i}{\mu_i} \;\middle|\; i \in I_1 \right\}$. T est un ensemble fini de nombres strictement

positifs, qui admet un plus petit élément. Soit k un indice tel que $\dfrac{\alpha_k}{\mu_k} = \min(T)$. On a donc, pour tout $i \in I_1$, $\dfrac{\alpha_k}{\mu_k} \leqslant \dfrac{\alpha_i}{\mu_i}$.
On choisit ce k qui est bien tel que $\mu_k \neq 0$ pour faire le calcul de l'expression (7).
Montrons que pour ce choix de k, tous les $\lambda_i = \alpha_i - \dfrac{\alpha_k \mu_i}{\mu_k}$ sont positifs (ou nuls).
Soit $i \in \{1, \dots, p\}$; on a soit $i \in I_1$ et $\mu_i > 0$, soit $i \in I_2$ et $\mu_i \leqslant 0$.
Si $i \in I_2$, on a $\mu_i \leqslant 0$, donc $-\dfrac{\alpha_k \mu_i}{\mu_k} \geqslant 0$ et $\lambda_i > 0$ comme somme d'un nombre strictement positif et d'un nombre positif ou nul.
Si $i \in I_1$, on a $\dfrac{\alpha_i}{\mu_i} \in T$ donc $\dfrac{\alpha_k}{\mu_k} \leqslant \dfrac{\alpha_i}{\mu_i}$, donc $-\dfrac{\alpha_k}{\mu_k} \geqslant -\dfrac{\alpha_i}{\mu_i}$ et donc
$\lambda_i = \alpha_i - \dfrac{\alpha_k}{\mu_k}\mu_i \geqslant \alpha_i - \dfrac{\alpha_i}{\mu_i}\mu_i = 0.$
Tous les λ_i sont $\geqslant 0$ et on a $M = \sum_{i \neq k} \lambda_i A_i$, donc M est une combinaison convexe de $p-1$ points, c'est ce qu'on voulait démontrer.

CHAPITRE 4

4. Solutions des exercices sur la géométrie projective

Exercice 4.1.
1° Soit $M \in \mathbb{P}(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G})$. Par définition, M est une droite vectorielle de l'espace vectoriel $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$. Donc M est entre autres une droite vectorielle de $\overrightarrow{F}$ et $M \in \mathbb{P}(\overrightarrow{F})$. De même, M est une droite vectorielle incluse dans $\overrightarrow{G}$, donc $M \in \mathbb{P}(\overrightarrow{G})$, et on peut affirmer que $M \in \mathbb{P}(\overrightarrow{F}) \cap \mathbb{P}(\overrightarrow{G})$: on a montré la première inclusion $\mathbb{P}(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}) \subset \mathbb{P}(\overrightarrow{F}) \cap \mathbb{P}(\overrightarrow{G})$.

Réciproquement, si $M \in \mathbb{P}(\overrightarrow{F}) \cap \mathbb{P}(\overrightarrow{G})$, M est une droite vectorielle à la fois incluse dans $\overrightarrow{F}$ (car $M \in \mathbb{P}(\overrightarrow{F})$) et incluse dans $\overrightarrow{G}$ (car $M \in \mathbb{P}(\overrightarrow{G})$), donc M est une droite vectorielle incluse dans $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$, c'est-à-dire $M \in \mathbb{P}(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G})$, et on a ainsi établi la deuxième inclusion $\mathbb{P}(\overrightarrow{F}) \cap \mathbb{P}(\overrightarrow{G}) \subset \mathbb{P}(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G})$.

2° Soient $(P_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$. Pour chaque $i \in I$, il existe donc un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F_i}$ de V tel que $P_i = \mathbb{P}(\overrightarrow{F_i})$. Soit $M \in \bigcap_{i \in I} P_i$.
On suppose que cette intersection n'est pas vide. Soit M une droite vectorielle qui est incluse dans chacun des $\overrightarrow{F_i}$: M est donc incluse dans l'intersection de tous les $\overrightarrow{F_i}$, qui est un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F} = \bigcap_{i \in I} \overrightarrow{F_i}$. Donc $M \in \mathbb{P}(\overrightarrow{F})$. Réciproquement, il est clair qu'une droite vectorielle incluse dans $\overrightarrow{F}$ appartient à chacun des $\overrightarrow{F_i}$, donc en

tant qu'élément, tout $M \in \mathbb{P}(\overrightarrow{F})$ appartient à chaque $P_i = \mathbb{P}(\overrightarrow{F_i})$, donc à $\bigcap_{i\in I} P_i$. On a prouvé qu'une intersection non vide de sous-espaces projectifs $\bigcap_{i\in I} P_i$ était égale à l'espace projectif $\mathbb{P}(\overrightarrow{F})$.

Notons que la difficulté principale de ce type de raisonnement est de faire la différence entre les symboles $\in$ (« appartient à ») et $\subset$ (« est inclus dans »). Un élément M de l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$, en tant qu'élément, appartient *à* $\mathbb{P}(V)$ *:* $M \in \mathbb{P}(V)$. *Mais en tant que droite vectorielle (tous les éléments d'un espace projectif sont des droites vectorielles), c'est un sous-ensemble de V, et la droite vectorielle M est* incluse *dans V : $M \subset V$.*

D'autre part, il y a une possibilité non exclue dans ce raisonnement, c'est que $\overrightarrow{F}$ soit réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$. Dans ce cas il n'existe aucune droite vectorielle incluse dans tous les $\overrightarrow{F_i}$, et l'intersection des P_i est vide ; en fait, dans ce cas, comme $\varnothing = \mathbb{P}(\{\overrightarrow{0}\})$, le résultat de cette question reste vrai si l'intersection est vide.

3° Comme pour toute notion de sous-structure engendrée, le sous-espace projectif engendré par X est le plus petit sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$ qui contient X. C'est forcément l'intersection de tous les sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ qui contiennent X. On peut donc le définir ainsi :
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les sous-espaces projectifs de V. Alors on a $\operatorname{proj}(X) = \bigcap_{\substack{P\in\mathcal{E}\\ X\subset P}} P$.

En effet, si on pose $Q = \bigcap_{\substack{P\in\mathcal{E}\\ X\subset P}} P$, Q est un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$, comme intersection de sous-espaces projectifs (notons que cette intersection n'est pas vide, puisque $\mathbb{P}(V)$ est un sous-espace projectif de lui-même (même s'il est trivial) qui contient bien sûr X, donc $\mathbb{P}(V)$ est un des P dont on prend l'intersection pour obtenir Q). D'autre part, il contient X puisque chacun des P dont on prend l'intersection pour obtenir Q est un sous-espace projectif qui contient X. Enfin, si R est un sous-espace projectif qui contient X, alors $R \in \mathcal{E}$ et $X \subset R$, donc R est un des sous-espaces projectifs P dont on prend l'intersection pour obtenir Q, et donc $Q \subset R$. Q est donc le plus petit (au sens de l'inclusion) des sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ qui contiennent X, on a bien $Q = \operatorname{proj}(X)$.

4° On doit montrer que $\mathbb{P}(\overrightarrow{F}+\overrightarrow{G})$ est le sous-espace projectif engendré par $\mathbb{P}(\overrightarrow{F})\cup\mathbb{P}(\overrightarrow{G})$, donc que c'est un sous-espace projectif, qu'il contient $\mathbb{P}(\overrightarrow{F})\cup\mathbb{P}(\overrightarrow{G})$, et enfin que c'est le plus petit (au sens de l'inclusion), des sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ qui contiennent $\mathbb{P}(\overrightarrow{F})\cup\mathbb{P}(\overrightarrow{G})$.

Il est trivial que c'est un sous-espace projectif.

Soit $M \in \mathbb{P}(\overrightarrow{F})\cup\mathbb{P}(\overrightarrow{G})$, M est une droite vectorielle qui est incluse dans $\overrightarrow{F}$ ou dans $\overrightarrow{G}$, donc $M \subset \overrightarrow{F}\cup\overrightarrow{G} \subset \overrightarrow{F}+\overrightarrow{G}$, donc M est une droite vectorielle de $\overrightarrow{F}+\overrightarrow{G}$, on a bien $M \in \mathbb{P}(\overrightarrow{F}+\overrightarrow{G})$, et on a montré que $\mathbb{P}(\overrightarrow{F})\cup\mathbb{P}(\overrightarrow{G}) \subset \mathbb{P}(\overrightarrow{F}+\overrightarrow{G})$.

Soit maintenant Q un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$ qui contient $\mathbb{P}(\overrightarrow{F}) \cup \mathbb{P}(\overrightarrow{G})$. Pour établir que $\mathbb{P}(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G})$ est le plus petit (au sens de l'inclusion), des sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ qui contiennent $\mathbb{P}(\overrightarrow{F}) \cup \mathbb{P}(\overrightarrow{G}))$, on doit montrer $\mathbb{P}(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) \subset Q$.

Soit $M \in \mathbb{P}(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G})$.
M est une droite vectorielle $< \overrightarrow{u} >$ de $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$, donc il existe $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{y} \in \overrightarrow{G}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$.
$A =< \overrightarrow{x} >$ est une droite vectorielle de $\overrightarrow{F}$, donc $A \in \mathbb{P}(\overrightarrow{F})$.
De même $B =< \overrightarrow{y} > \in \mathbb{P}(\overrightarrow{G})$.
Q est donc un sous-espace projectif $\mathbb{P}(\overrightarrow{H})$ de $\mathbb{P}(V)$ qui contient A et B, puisque par hypothèse Q contient $\mathbb{P}(\overrightarrow{F}) \cup \mathbb{P}(\overrightarrow{G})$. Cela signifie que A et B sont des droites vectorielles incluses dans le sous-espace vectoriel $\overrightarrow{H}$ de V, donc $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{y} \in \overrightarrow{H}$, et par stabilité de l'addition dans un sous-espace vectoriel, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in \overrightarrow{H}$. $< \overrightarrow{u} >$ est donc une droite vectorielle incluse dans $\overrightarrow{H}$, donc
$M \in Q$.
On a montré $\mathbb{P}(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) \subset Q$, donc $\mathbb{P}(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G})$ est bien le plus petit sous-espace projectif qui contient $\mathbb{P}(\overrightarrow{F}) \cup \mathbb{P}(\overrightarrow{G})$, ce qui achève la démonstration.

Exercice 4.2.

1° Soient $\Pi_1 = \mathbb{P}(\overrightarrow{E}_1)$ et $\Pi_2 = \mathbb{P}(\overrightarrow{E}_2)$ deux plans projectifs distincts de $\mathcal{E}$. $\overrightarrow{E}_1$ et $\overrightarrow{E}_2$ sont deux sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $\overrightarrow{V}$, c'est-à-dire deux hyperplans de $\overrightarrow{V}$. $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \mathbb{P}(\overrightarrow{E}_1) \cap \mathbb{P}(\overrightarrow{E}_2) = \mathbb{P}(\overrightarrow{E}_1 \cap \overrightarrow{E}_2)$ d'après ce qu'on a vu dans l'exercice précédent 4.1. Or, $\dim(\overrightarrow{E}_1 \cap \overrightarrow{E}_2) = \dim \overrightarrow{E}_1 + \dim \overrightarrow{E}_2 - \dim(\overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}_2)$. Mais $\overrightarrow{E}_1 \neq \overrightarrow{E}_2$, donc il existe un élément $\overrightarrow{x}_1$ de $\overrightarrow{E}_1$ qui n'est pas dans $\overrightarrow{E}_2$ (il est impossible que $\overrightarrow{E}_1 \subset \overrightarrow{E}_2$, puisque, ces sous-espaces vectoriels ont même dimension, si l'un est inclus dans l'autre, alors ils sont égaux).
Donc $\overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}_2$ est un sous-espace vectoriel qui contient strictement $\overrightarrow{E}_2$ (puisqu'il contient $\overrightarrow{x}_1$). On a $4 = \dim \overrightarrow{V} \geqslant \dim(\overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}_2) > \dim \overrightarrow{E}_2 = 3$ et donc forcément $\dim(\overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}_2) = 4$ (et $\overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}_2 = \overrightarrow{V}$).
D'où $\dim(\overrightarrow{E}_1 \cap \overrightarrow{E}_2) = 3 + 3 - 4 = 2$, et $\dim(\mathbb{P}(\overrightarrow{E}_1 \cap \overrightarrow{E}_2)) = 1$ ce qui prouve que $\Pi_1 \cap \Pi_2$ est une droite projective de $\mathcal{E}$.
On a prouvé que dans un espace projectif de dimension 3, l'intersection de deux plans projectifs distincts est toujours une droite projective. Il n'y a donc pas, en dimension 3, de plans parallèles en géométrie projective.

2° Il existe un hyperplan vectoriel $\overrightarrow{E}$ de $\overrightarrow{V}$ et un plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ tels que $\Pi = \mathbb{P}(\overrightarrow{E})$ et $\Delta = \mathbb{P}(\overrightarrow{P})$. Comme $\Delta \not\subset \Pi$, on est sûr que $\overrightarrow{P} \not\subset \overrightarrow{E}$, donc il existe $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{P}$ qui n'appartient pas à $\overrightarrow{E}$. $\overrightarrow{E} + \overrightarrow{P}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{V}$ qui contient strictement l'hyperplan $\overrightarrow{E}$, donc c'est $\overrightarrow{V}$ et on a $\dim(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{P}) = 4$.

Or, $\Pi \cap \Delta = \mathbb{P}(\vec{E}) \cap \mathbb{P}(\vec{P}) = \mathbb{P}(\vec{E} \cap \vec{P})$ et $\dim(\vec{E} \cap \vec{P}) = \dim \vec{E} + \dim \vec{P} - \dim(\vec{E} + \vec{P}) = 3 + 2 - 4 = 1$. $\vec{E} \cap \vec{P}$ est donc une droite vectorielle, et le sous-espace projectif qui en est issu est un singleton, un sous-espace projectif de dimension 0 de $\mathcal{E}$. On a prouvé que dans un espace projectif de dimension 3, l'intersection d'un plan projectif et d'une droite projective non incluse dans ce plan est toujours réduite à un point. Il n'y a donc pas, en dimension 3, de droite projective faiblement parallèle à un plan projectif en géométrie projective.

3° On peut raisonner comme aux deux questions précédentes : il existe deux plans vectoriels $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ distincts tels que $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \mathbb{P}(\vec{P}_1 \cap \vec{P}_2)$.
Mais ici, en dimension 4, l'intersection de deux plans vectoriels de dimension 2 peut être de dimension 0 ou 1, selon que la somme $\vec{P}_1 + \vec{P}_2$ est ou n'est pas directe, ce qui correspond au fait que la dimension de $\vec{E} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ est 4 ou 3 ; dans ce dernier cas, Δ_1 et Δ_2 sont toutes les deux incluses dans le plan projectif $\mathbb{P}(\vec{E})$.
En conséquence, l'intersection des deux droites projectives Δ_1 et Δ_2 de l'espace projectif $\mathcal{E}$ de dimension 3 est soit vide, soit c'est un singleton, selon que ces deux droites ne sont pas ou sont coplanaires.

4° Si $(E, \vec{E})$ est une carte affine de $\mathcal{E}$, E est un hyperplan affine (de dimension 3) de $\vec{V}$ ne contenant pas $\vec{0}$ et $\vec{E}$ est sa direction, c'est un hyperplan vectoriel (également de dimension 3) de $\vec{V}$.
Dans l'espace affine de dimension 3 qu'est E, tout plan affine représente un plan projectif de $\mathcal{E}$. Les points (projectifs) de $\mathcal{E}$ qui ne peuvent pas être représentés dans la carte affine E sont les droites vectorielles incluses dans $\vec{E}$, leur réunion forme le plan à l'infini $\infty_E = \vec{E}$ de la carte affine E. Tout plan affine P de E représente un plan projectif $\widetilde{P}$ qui est distinct du plan projectif ∞_E, donc l'intersection de $\widetilde{P}$ avec ∞_P est une droite projective (d'après 1°), qui est la droite projective à l'infini de P ; on peut la noter ∞_P, mais c'est aussi tout simplement $\vec{P}$.

Deux plans affines distincts P_1 et P_2 de E représentent des plans projectifs distincts $\widetilde{P_1}$ et $\widetilde{P_2}$ de $\mathcal{E}$, qui se coupent selon une droite projective $\widetilde{\Delta}$.
— Si cette droite projective est à l'infini (incluse dans ∞_E), P_1 et P_2 ne se rencontrent pas dans E, (ils sont parallèles), mais on peut considérer qu'ils se coupent à l'infini (ou plus précisément que les plans projectifs qu'ils représentent se coupent à l'infini), leur intersection étant leur droite à l'infini commune, c'est-à-dire leur direction commune.
— Si $\widetilde{\Delta}$ n'est pas incluse dans le plan projectif ∞_E, elle coupe ce plan à l'infini en un unique point (d'après 2°), et à l'exception de ce point, tous les éléments de $\widetilde{P_1} \cap \widetilde{P_2}$ peuvent être représentés dans la carte affine E, par une droite Δ.
En conclusion : deux plans distincts de E sont sécants selon une droite Δ ou sont parallèles. Ce n'est pas vraiment une surprise.

Soit P un plan de E et D une droite de E non incluse dans P. P représente un plan projectif $\widetilde{P}$ de $\mathcal{E}$ et D représente une droite projective $\widetilde{D}$ de $\mathcal{E}$, non incluse dans $\widetilde{P}$. D'après 2°, $\widetilde{D}$ rencontre $\widetilde{P}$ en un unique point $\widetilde{A}$.

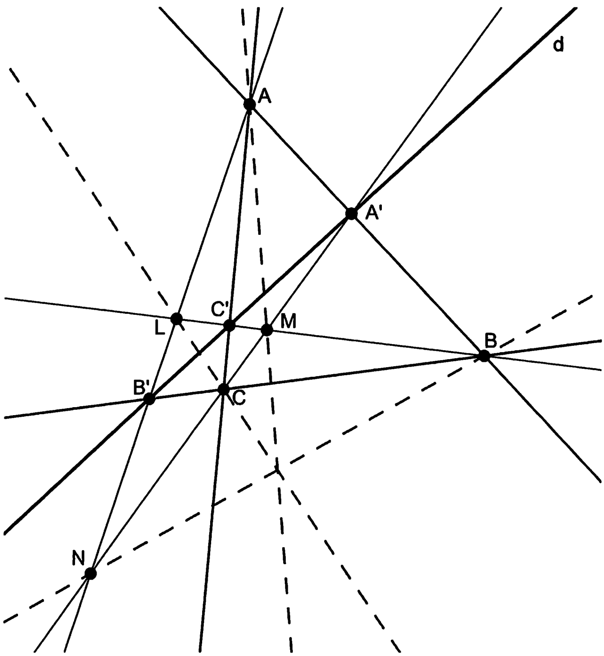
— Si ce point est à l'infini ($\widetilde{A} \in \infty_E$), il n'est pas représentable dans E, donc D ne rencontre pas P dans E ; en revanche, les sous-espaces projectifs que D et P représentent se coupent en un point à l'infini, et on dit souvent, par abus de langage que c'est D et P qui se coupent à l'infini. Dans ce cas, $\widetilde{A}$ est le point à l'infini de $\widetilde{D}$, donc c'est $\infty_D = \overrightarrow{D}$, et il appartient à la droite à l'infini de $\widetilde{P}$ qui est formé des droites vectorielles incluses dans $\overrightarrow{P}$. On peut donc dire que $\overrightarrow{D}$ est une droite vectorielle incluse dans $\overrightarrow{P}$, et cela se traduit par le fait que D est faiblement parallèle à P.

— Si $\widetilde{A}$ n'est pas à l'infini, il est représenté dans la carte E par un point A, qui est l'unique point d'intersection de D et de P.

En conclusion, dans un espace affine de dimension 3, un plan et une droite non incluse dans ce plan se coupent en un point unique ou sont parallèles (faiblement).

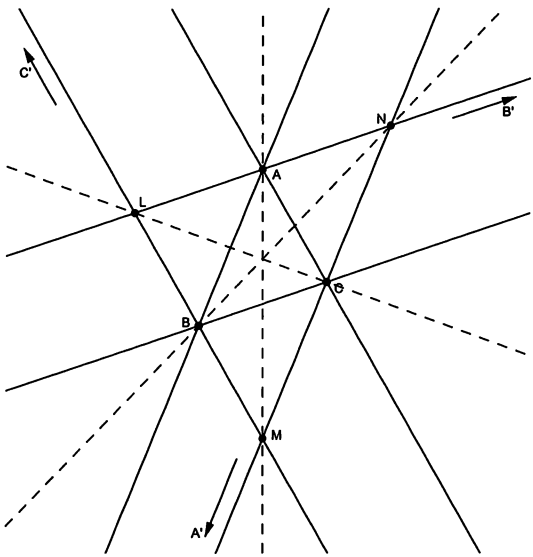
Quant à deux droites distinctes de l'espace affine E, si les droites projectives qu'elles représentent sont d'intersection vide, les droites affines ne se coupent pas, alors que si les droites projectives correspondantes se coupent, les droites affines sont sécantes sauf si le point d'intersection des droites projectives est à l'infini, ce qui signifie alors qu'elles ont même point à l'infini, c'est-à-dire même direction, elles sont donc parallèles.
Deux droites affines distinctes d'un espace affine de dimension 3 ne se coupent pas si elles ne sont pas coplanaires, et se coupent en un point unique ou sont parallèles lorsqu'elles sont coplanaires.

Exercice 4.3.



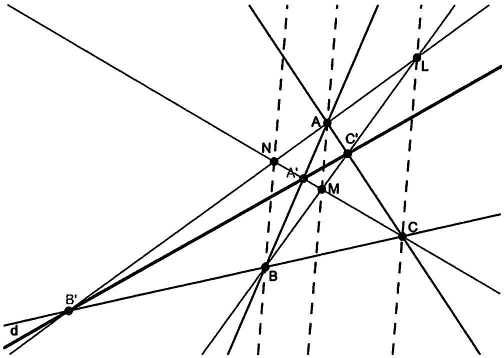
1° Lorsque la droite d est la droite à l'infini, les points A', B' et C' sont des points à l'infini. Comme A' est un point de la droite (AB), nécessairement c'est le point à l'infini de cette droite, et toute droite passant par A' est donc une droite *parallèle* à (AB). Dans une carte où la droite d est à l'infini, la droite (CA') est donc représentée par la parallèle à (AB) qui passe par C. De même, dans cette carte, la droite (AB') est la parallèle à (BC) qui passe par A et la droite (BC') est la parallèle à (CA) qui passe par B.

On a donc la figure suivante :



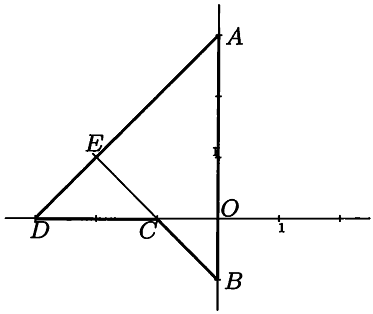
2° Il est complètement évident, en utilisant par exemple les parallélogrammes $ACBL$ et $ABCN$, que A est le milieu de $[LN]$, donc que (AM) est la médiane issue de M du triangle LMN. De même (BN) et (CL) sont aussi des médianes de ce même triangle, et on sait que les trois médianes d'un triangle sont concourantes, donc les représentantes, dans cette carte où d est à l'infini, des droites (AM), (BN) et (CL) sont concourantes, les droites projectives (AM), (BN) et (CL) sont donc bien concourantes, et dans toute carte affine, ces droites projectives sont représentées par des droites soit concourantes (si le point de concours n'est pas à l'infini) soit toutes les trois parallèles (si le point de concours est représenté par un point à l'infini).

Voici, sur la figure qui suit, une situation où l'on voit que ces trois droites (AM), (BN) et (CL) peuvent être parallèles.



Exercice 4.4.

1°



$ABCD$ n'est évidemment pas un parallélogramme puisque les côtés opposés ne sont pas parallèles ; il faudrait avoir $(AB)/\!\!/(CD)$ et $(AD)/\!\!/(BC)$, or (AB) coupe (CD) en O et (AD) rencontre (BC) en $E(-2,1)$.

2° a) Le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de P est une base de $\widehat{P} = \overrightarrow{E}$.

2° b) $\widetilde{A}$ est la droite vectorielle $< A >$ de $\overrightarrow{E}$, donc un vecteur directeur de $\widetilde{A}$ est A, dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ (considéré comme une base de $\overrightarrow{E}$) sont $(1, 0, 3)$. De même, $\widetilde{B} =< B >$ avec $B(1, 0, -1)$; $\widetilde{C} =< C >$ avec $C(1, -1, 0)$; $\widetilde{D} =< D >$ avec $D(1, -3, 0)$.
Les droites de la carte affine P représentent des droites projectives de $\mathcal{P}$, qui sont des ensembles de droites vectorielles de plans vectoriels de $\overrightarrow{E}$. (AB) représente la droite projective $(\widetilde{A}\widetilde{B})$ formée des droites vectorielles du plan vectoriel engendré par $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(< A, B >)$.

Ce plan vectoriel $< A, B >$ est caractérisé par

$$\overrightarrow{X} \in < A, B > \iff (\overrightarrow{X}, A, B) \text{ est un système lié} \iff \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ x & 0 & 0 \\ y & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff x = 0.$$

(Notons qu'on retombe sur une équation qui caractérise (AB) dans P).

De même, (BC) représente la droite projective $\mathbb{P}(< B, C >)$ et le plan vectoriel $< B, C >$ est caractérisé par l'équation $\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ x & 0 & -1 \\ y & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff x + y + t = 0.$

(Remarquons que pour $t = 1$, on retrouve l'équation de la droite (BC) dans P).

(CD) représente la droite projective $\mathbb{P}(< C, D >)$, le plan vectoriel $< C, D >$ est caractérisé par $y = 0$.

(DA) représente la droite projective $\mathbb{P}(< D, A >)$, le plan vectoriel $< D, A >$ est caractérisé par $\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ x & -3 & 0 \\ y & 0 & 3 \end{vmatrix} \iff -9t - 3x + 3y = 0 \iff x - y + 3t = 0$. (Pour $t = 1$, on retrouve l'équation $y = x + 3$ de (DA) dans P.)

2° c) Pour que la figure devienne un parallélogramme, il faudrait s'arranger pour que les côtés opposés (AB) et (CD) d'une part, (BC) et (DA) d'autre part soient parallèles, donc que leurs points d'intersection, respectivement O et $E(-2, 1)$ soient envoyés à l'infini. Il faut donc choisir une carte affine P' dans laquelle la droite projective $\widetilde{\Delta}$ représentée dans la carte P par la droite (OE) soit la droite à l'infini. Il faut donc choisir pour P' un hyperplan affine de $\overrightarrow{E}$ de direction $\overrightarrow{P'}$ telle que $\widetilde{\Delta} = \mathbb{P}(\overrightarrow{P'})$.

2° d) Avec les notations définies en c), (OE) représente $\mathbb{P}(< O, E >)$, donc on choisira $\overrightarrow{P'} =< O, E >$. Le plan vectoriel $< O, E >$ est caractérisé par $\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ x & 0 & -2 \\ y & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$ $x + 2y = 0$. On peut donc choisir comme nouvelle carte affine P' tous les plans affines dirigés par ce plan vectoriel $\overrightarrow{P'}$: $x + 2y = 0$. Ces plans affines ont tous une équation cartésienne du type $x + 2y = h$ avec $h \neq 0$. Choisissons une valeur particulière pour h, par exemple $h = 1$. Nous utiliserons comme nouvelle carte affine le plan P' : $x + 2y = 1$.

Dans cette carte affine, chaque point projectif (c'est-à-dire, rappelons-le, chaque droite vectorielle de $\overrightarrow{E}$) est représenté par son intersection avec P', si toutefois il rencontre P' ; si cette intersection est vide c'est que le point projectif est à l'infini (donc qu'il est inclus dans le plan vectoriel $\overrightarrow{P'}$: $x + 2y = 0$).

Le point projectif $\widetilde{A} =< A >= \{\lambda A \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ rencontre P' en A' dont les coordonnées (t, x, y) dans $\mathcal{R}$ sont de la forme $(\lambda, 0, 3\lambda)$ et vérifient $x + 2y = 1$, donc $6\lambda = 1$, donc A' a pour coordonnées $(\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2})$.

Le point projectif $\widetilde{B} =< B >$ est représenté par B' qui appartient à $< B >$ et à P' donc ses coordonnées sont de la forme $(t, x, y) = (\lambda, 0, -\lambda)$ et vérifient $x + 2y = 1$ donc $-2\lambda = 1$ et $B'(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.
De même, les coordonnées de C' sont de la forme $(t, x, y) = (\lambda, -\lambda, 0)$ et vérifient $x + 2y = 1$, donc $-\lambda = 1$ et $C'(-1, 1, 0)$.
Enfin, les coordonnées de D' sont de la forme $(t, x, y) = (\lambda, -3\lambda, 0)$ et vérifient $x + 2y = 1$, donc $-3\lambda = 1$ et $D'(-\frac{1}{3}, 1, 0)$.

Remarquons que si on cherchait l'intersection de $\widetilde{O} =< O >$ avec P', on ne trouverait pas de solution ($(t, x, y) = (\lambda, 0, 0)$ et $x + 2y = 1$ impliquerait $0 = 1$). De même, un éventuel point d'intersection entre $\widehat{E} =< E >$ et P' aurait des coordonnées solutions de $(t, x, y) = (\lambda, -2\lambda, \lambda)$ et $x + 2y = 1$ ce qui impliquerait aussi $1 = -2\lambda + 2\lambda = 0$.

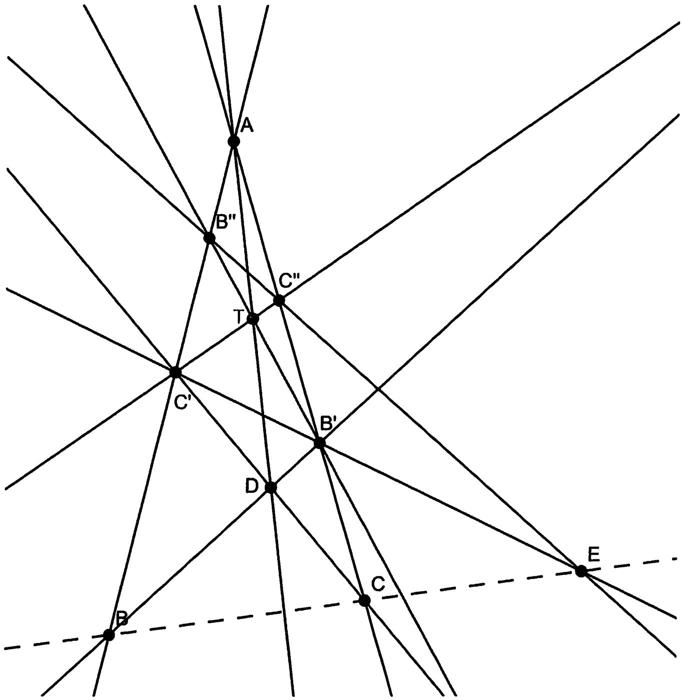
Reste à vérifier (en fait, ce n'est pas vraiment nécessaire, car nous avons fait tout ce qu'il fallait pour que ce soit bien le cas) que les quatre points (ou vecteurs, selon le point de vue) A', B', C', D' de $\overrightarrow{E}$ sont bien les sommets d'un parallélogramme $A'B'C'D'$: la caractérisation la plus simple à manipuler est de vérifier que les diagonales ont même milieu, donc de comparer les coordonnées de $(A' + C')/2$ et $(B' + D')/2$. Or, les coordonnées de $A' + C'$ sont $(\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2}) + (-1, 1, 0) = (-\frac{5}{6}, 1, \frac{1}{2})$ et les coordonnées de $B' + D'$ sont $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) + (-\frac{1}{3}, 1, 0) = (-\frac{5}{6}, 1, \frac{1}{2})$, $A'B'C'D'$ est bien un parallélogramme.

3° Oui, bien sûr ! Il suffit d'envoyer à l'infini les points d'intersection des côtés opposés du quadrilatère $ABDC$; ces paires de côtés opposés sont formées de (AB) et (DC) (qui se coupent encore et toujours en O) et de (BD) et (CA). Le point d'intersection de ces deux dernières droites est le point F dont les coordonnées (x, y) dans le repère cartésien $\mathcal{R}$ de P sont solution du système $\begin{cases} y = 3x + 3 \\ y = -\frac{1}{3}x - 1 \end{cases}$, donc les coordonnées de F dans la base $\mathcal{R}$ de $\widehat{E}$ sont $(1, -\frac{6}{5}, -\frac{3}{5})$. Le plan vectoriel $\overrightarrow{P''} =< O, F >$ qui doit diriger la nouvelle carte affine a donc comme équation $y = \frac{1}{2}x$, et on choisira comme carte affine un plan P'' dont l'équation est du type $y = \frac{1}{2}x + k$. Dans une telle carte affine, on est sûr (il n'était pas demandé de le vérifier) que $\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{D}\widetilde{C}$ est représenté par un parallélogramme $A''B''D''C''$.

Dans cet exercice, nous avons illustré que la notion de parallélogramme n'a aucun sens en géométrie projective.

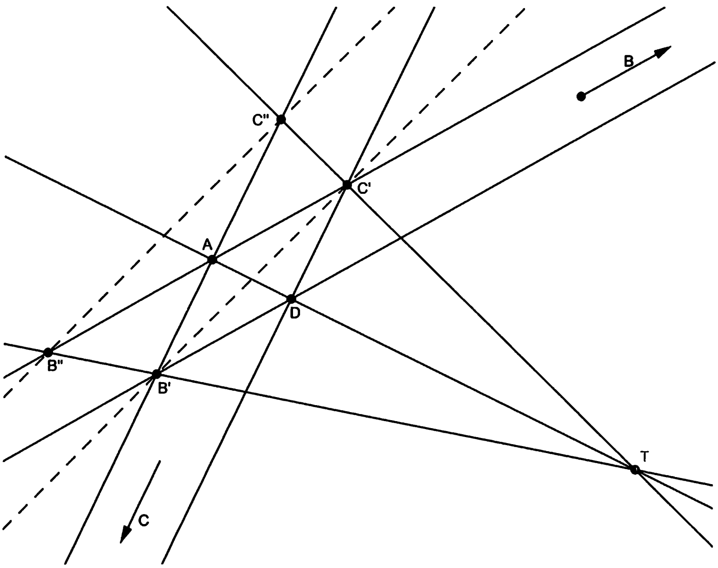
Exercice 4.5.

Voici une figure de la situation :



Si on envoie la droite (BC) à l'infini, les points B et C deviennent des points à l'infini ; les droites (AB) et (DB) doivent donc être représentées par des droites parallèles, et de même pour les droites (AC) et (DC). Le reste de la figure se fait sans changement, sauf qu'à la fin, pour démontrer que le point E appartient à la droite (BC), il faudra démontrer qu'il est à l'infini, c'est-à-dire, puisqu'il est défini comme intersection des droites $(B'C')$ et $(B''C'')$, il faudra démontrer que ces deux droites sont parallèles dans une carte affine où B et C sont à l'infini.

Voici une figure où toutes ces conditions sont réalisées.



On part d'un parallélogramme $AB'DC'$, on choisit un point T arbitraire sur la droite (AD), on trace la droite (TC'), qui coupe (AB') en C'' et la droite (TB') qui coupe (AC') en B''. On doit démontrer que $(B'C')/\!\!/(B''C'')$

On voit assez facilement qu'il suffit de considérer l'homothétie h de centre T qui transforme D en A : cette homothétie envoie la droite (DB') en une droite parallèle qui passe par $h(D) = A$, donc elle envoie (DB') en (AB''), et comme l'image de B' doit être à la fois sur la droite (TB') et sur (AB''), c'est que $h(B') = B''$. On montre de même que $h(C') = C''$, car (DC') est transformée en (AC''). L'image de la droite $(B'C')$ par l'homothétie h est donc la droite $(B''C'')$, et on a donc $(B'C')/\!\!/(B''C'')$.

Dans cette carte affine, le point E est donc bien à l'infini, c'est-à-dire qu'il appartient à la droite (BC). Donc le point projectif E appartient à la droite projective (BC), et dans toute carte affine représentant le plan projectif, on a donc bien $E \in (BC)$.

Remarque : Le point T aurait le droit d'appartenir lui aussi à la droite (BC). Dans ce cas, dans une carte affine où (BC) est la droite à l'infini, le point T serait aussi à l'infini, ce qui se traduirait par le fait que pour trouver le point C'', il faudrait non pas tracer la droite (TC'), mais tracer la droite parallèle à (AD) passant par C' et prendre son intersection avec (AB'). De même B'' se trouverait dans cette situation à l'intersection de la parallèle à (AD) passant par B' avec la droite (AC').

Dans cette situation, on pourrait raisonner presque de la même façon, en considérant non pas l'homothétie de centre T, mais la translation qui envoie D sur A, et avec les mêmes arguments de parallélisme on pourrait conclure ; on pourrait d'ailleurs raisonner encore plus simplement avec les parallélogrammes de la figure $ADB'B''$ et $ADC'C''$ qui prouvent que $\overrightarrow{B'B''} = \overrightarrow{C'C''}$, donc $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{C'C''}$

Exercice 4.6.

1° On doit partir de deux triangles ABC et $A'B'C'$ du plan affine $(E, \overrightarrow{E})$ considéré comme une carte affine de l'espace projectif $\mathcal{P} = \mathbb{P}(\widehat{E})$, avec $\widehat{E}$ espace vectoriel de dimension 3. L'hypothèse que les côtés correspondants sont parallèles dans la carte affine s'interprète en affirmant que ces côtés correspondants sont sécants sur la droite à l'infini : $(AB) \cap (A'B') = \{P\}$, $(BC) \cap (B'C') = \{Q\}$ et $(AC) \cap (A'C') = \{R\}$ avec P, Q, R alignés sur la droite à l'infini. Mais dans un plan projectif, le choix d'une carte affine (et de la droite à l'infini qui lui est associée) est arbitraire, toutes les droites ont en fait la même importance : les hypothèses du théorème de Desargues concernant les deux triangles ABC et $A'B'C'$ dans le cadre projectif peuvent donc se traduire ainsi :

Dans un plan projectif $\mathcal{P}$, on considère deux triplets de points non alignés (A, B, C) et (A', B', C'), sans points communs. Soient P, Q, R les points d'intersection respectifs des droites (AB) et $(A'B')$, de (BC) et $(B'C')$, et de (AC) et $(A'C')$ (on suppose donc que ces trois couples de droites ne sont pas formés de droites confondues).

On rajoute l'hypothèse spécifique suivante :

On suppose que P, Q, R sont alignés.

Intéressons-nous maintenant à la conclusion : dans le cadre affine, le théorème de Desargues affirme que lorsque ses hypothèses sont vérifiées, alors les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles ou concourantes. En considérant ce plan affine comme carte affine d'un plan projectif, la conclusion est plus simple, car des droites parallèles ont même direction, donc même point à l'infini, donc se coupent à l'infini. La conclusion dans le cadre projectif sera donc

Alors les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes.

2° Énoncer une réciproque du théorème de Desargues dans le cadre projectif consiste tout simplement, avec les mêmes hypothèses concernant les triangles et les points d'intersection des côtés, à prétendre pouvoir échanger l'hypothèse spécifique et la conclusion :

Dans un plan projectif $\mathcal{P}$, on considère deux vrais triangles de points non alignés (A, B, C) et (A', B', C'), sans points communs et sans côtés communs. Soient P, Q, R les points d'intersection respectifs des droites (AB) et $(A'B')$, de (BC) et $(B'C')$, et de (AC) et $(A'C')$.
Si les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes,
Alors les points P, Q, R sont alignés.

On pourrait d'ailleurs (et c'est ce qui est fait en général) énoncer en une seule fois les deux affirmations ainsi :

Dans un plan projectif $\mathcal{P}$, on considère deux triplets de points non alignés (A, B, C) et (A', B', C'), sans points communs. Soient P, Q, R les points d'intersection respectifs des droites (AB) et $(A'B')$, de (BC) et $(B'C')$, et de (AC) et $(A'C')$.
Alors les points P, Q, R sont alignés si et seulement si les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes.

3° On se place dans le cadre du théorème de Desargues en projective, qu'on a décrit plus haut. On suppose dans un premier temps que P, Q, R sont alignés sur une droite Δ. On sait qu'on peut choisir une carte affine $(E, \overrightarrow{E})$ du plan affine qui est telle que Δ est la droite à l'infini. Les représentants dans le plan affine E des points A, B, C, A', B', C' étant notés respectivement a, b, c, a', b', c', les droites projectives (AB) et $(A'B')$ sont représentées par les droites affines (ab) et $(a'b')$, et comme (AB) et $(A'B')$ se coupent en P qui est sur la droite Δ qui est la droite à l'infini, alors les droites (ab) et $(a'b')$ sont parallèles. Avec exactement les mêmes arguments, on montre que $(bc)/\!\!/(b'c')$ et $(ac)/\!\!/(a'c')$, donc on est dans les hypothèses du théorème de Desargues qu'on a démontré dans le cours (proposition II.24 p.30). On peut donc conclure, dans la carte affine E, que les droites affines $(aa'), (bb'), (cc')$ sont concourantes (en ω) ou parallèles. Mais ces droites affines représentent les droites projectives $(AA'), (BB'), (CC')$ qui sont donc dans les deux cas concourantes : elles se coupent en Ω qui est le point représenté par ω s'il existe, ou sinon Ω est sur la droite à l'infini, Ω est la direction commune aux droites $(aa'), (bb'), (cc')$ si celles-ci sont parallèles.

Réciproque :
Toujours dans le cadre du théorème de Desargues en projective, on suppose maintenant que les droites projectives $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes en un point Ω.
Considérons une carte affine $(E, \overrightarrow{E})$ qui est telle que la droite à l'infini soit la droite (PQ). Les représentants dans la carte affine E des points projectifs A, B, C, A', B', C' sont les points a, b, c, a', b', c'. Comme P et Q sont à l'infini, c'est qu'on a (dans E) $(ab)/\!\!/(a'b')$ et $(bc)/\!\!/(b'c')$. Nous devons montrer que les troisièmes côtés des deux triangles abc et $a'b'c'$ sont aussi parallèles.
Il y a deux cas à étudier selon que Ω est représenté dans la carte affine par un point ω ou que Ω est un point à l'infini.

- Si les droites $(aa'), (bb'), (cc')$ se coupent en ω, on considère l'homothétie h de centre ω qui envoie b sur b' (elle a comme rapport $k = \dfrac{\overline{\omega b'}}{\overline{\omega b}}$). L'image de a par h est un point a'' qui appartient à la droite (ωa) ; d'autre part, la droite (ab) est transformée, par h, en une droite qui lui est parallèle et qui passe par b, donc $h(ab) = (a'b')$. Donc $a'' \in (a'b')$ et $a'' \in (\omega a)$: on a donc $a'' = a'$.
  En raisonnant de la même façon, on montre que $h(c) = c'$. L'image de la droite (ac) par h est donc la droite $(a'c')$ qui lui est donc parallèle, et on peut conclure que $(ac)/\!\!/(a'c')$, donc les droites projectives qu'elles représentent, les droites (AC) et $(A'C')$ se coupent à l'infini, donc R appartient à la droite à l'infini qui contient aussi P et Q par hypothèse, donc P, Q, R sont alignés dans ce cas.
- Si les droites $(aa'), (bb'), (cc')$ sont parallèles (Ω est à l'infini), on considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{bb'}$. Comme $bb'a'a$ est un parallélogramme ($(aa')/\!\!/(bb')$ et $(ab)/\!\!/(a'b')$, on est sûr que $\overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{bb'}$, donc $t(a) = a'$.
  De la même façon, en considérant le parallélogramme $bb'c'c$, on montre que $t(c) = c'$. La droite (ac) est donc transformée par t en la droite $(a'c')$ qui lui est parallèle, donc $(ac)/\!\!/(a'c')$, et en revenant dans le plan projectif, les droites projectives qu'elles

représentent, (AC) et $(A'C')$ se coupent à l'infini, donc $R \in (PQ)$ et P, Q, R sont aussi alignés dans ce cas.

Nous avons fini la démonstration de la « réciproque de Desargues » dans le cadre projectif.

4° Le cadre du théorème de Desargues et de sa réciproque en affine et en toute généralité est le suivant :

Dans un plan affine $(E, \overrightarrow{E})$, on considère deux vrais triangles (A, B, C) et (A', B', C'), sans points communs ni côtés communs. Soient P, Q, R les points d'intersection respectifs, s'ils existent, des droites (AB) et $(A'B')$, de (BC) et $(B'C')$, et de (AC) et $(A'C')$.

Notons que même si on a supposé que les côtés des triangles sont distincts, comme on est dans un cadre affine, les points d'intersection P, Q, R n'existent pas forcément : il peut y avoir des droites parallèles.

Les hypothèses du théorème dans le sens direct sont plus compliquées, car il y a plusieurs cas à considérer, selon le nombre de points (projectifs) P, Q, R qui sont à l'infini :

(i) Si les points P, Q, R sont alignés,

(ii) ou si $\begin{cases} (AB) /\!/ (A'B') \\ (BC) /\!/ (B'C') \\ (AC) /\!/ (A'C'), \end{cases}$

(iii) ou si $(AB) /\!/ (A'B') /\!/ (QR)$,

(iv) ou si $(BC) /\!/ (B'C') /\!/ (PR)$,

(v) ou si $(AC) /\!/ (A'C') /\!/ (PQ)$;

ces cinq cas correspondent à toutes les possibilités d'être ou non à l'infini pour les points P, Q, R sachant qu'on suppose dans tous les cas qu'ils sont alignés dans le plan projectif. Dans l'ordre : (i) aucun des trois points à l'infini ; (ii) les trois points sont à l'infini ; (iii) P est à l'infini et pas Q ni R ; (iv) Q seul à l'infini ; (v) R seul à l'infini. (Remarquons que si deux des points P, Q, R sont à l'infini, puisqu'on suppose qu'ils sont alignés, le troisième est forcément aussi à l'infini).

La conclusion est plus facile à rédiger, dans le cas général, il n'y a que deux possibilités déjà envisagées dans la version de Desargues qu'on a étudiée en cours :

Alors les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes ou parallèles.

Pour énoncer un théorème de Desargues général en affine intégrant sa réciproque, on peut rédiger ainsi :

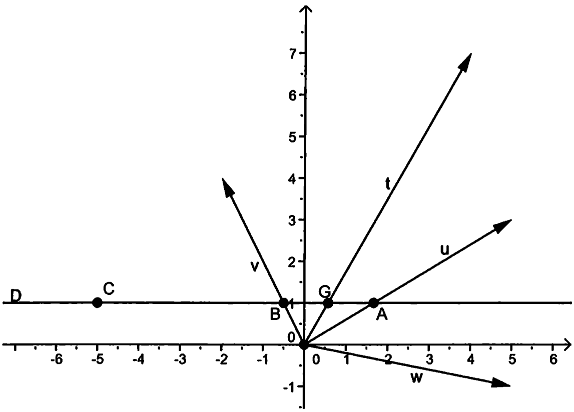
Théorème de Desargues général : *Dans un plan affine $(E, \overrightarrow{E})$, on considère deux vrais triangles (ABC) et $A'B'C'$, sans points communs ni côtés communs. Soient P, Q, R les points d'intersection respectifs, s'ils existent, des droites (AB) et $(A'B')$, de (BC) et $(B'C')$, et de (AC) et $(A'C')$.*

Alors les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si

les points P, Q, R sont alignés ou $\begin{cases}(AB)/\!\!/(A'B')\\(BC)/\!\!/(B'C')\\(AC)/\!\!/(A'C')\end{cases}$ *ou* $(AB)/\!\!/(A'B')/\!\!/(QR)$ *ou* $(BC)/\!\!/(B'C')/\!\!/(PR)$ *ou* $(AC)/\!\!/(A'C')/\!\!/(PQ)$.

Exercice 4.7.

1° Rien n'interdit de dessiner la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormée. On a donc la situation suivante :



Les points projectifs A, B, C, G sont les droites vectorielles engendrées respectivement par $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$. Leurs représentants dans la carte affine D (qu'on note aussi A, B, C, G) sont des points qui ont tous 1 comme ordonnée (puisqu'ils sont sur la droite D), et en tant que vecteurs de $\overrightarrow{E} = \widehat{D}$ considéré comme espace universel de $(D, \overrightarrow{D})$, ils sont colinéaires respectivement à $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}$. Les représentants dans la carte affine D de A, B, C, G sont donc $A(\frac{5}{3}, 1)$, $B(-\frac{1}{2}, 1)$, $C(-5, 1)$ et $G(\frac{4}{7}, 1)$.

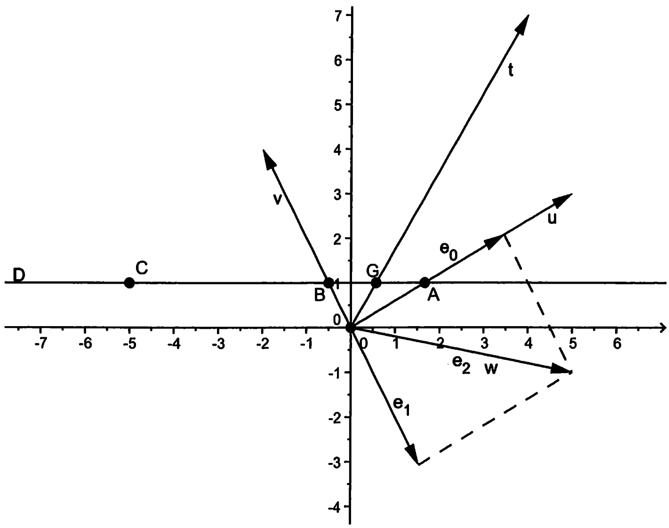
2° (A, B, C) constitue un repère projectif de $\mathbb{P}(\overrightarrow{E})$ simplement parce que deux quelconques d'entre ces trois points projectifs ne sont pas confondus, car leurs vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ ne sont pas colinéaires. En effet, ici, en dimension 1, un hyperplan est de dimension 0, donc est réduit à un point. Le fait que deux $(2 = 3 - 1)$ points parmi les trois points A, B, C ne sont pas cohyperplanaires se traduit simplement par le fait qu'ils ne sont pas confondus.

Pour trouver un triplet $(\overrightarrow{e_0}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ associé à ce repère projectif, on peut partir de n'importe quelle base de $\overrightarrow{E}$ formé d'un vecteur de A et d'un vecteur de B. On peut donc prendre par exemple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On décompose un vecteur directeur de C dans cette base : on cherchera les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on va donc trouver deux nombres (λ, μ) tels que $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$, et il suffit de prendre alors $\overrightarrow{e_0} = \lambda\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{e_1} = \mu\overrightarrow{v}$, on a alors $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{w} = \overrightarrow{e_0} + \overrightarrow{e_1}$, ce qui est exactement ce que l'on cherche.

On cherche donc (λ, μ) tels que

$$(5,-1) = \lambda(5,3)+\mu(-2,4) \iff \begin{cases} 5\lambda - 2\mu = 5 \\ 3\lambda + 4\mu = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \dfrac{18}{26} \\[2ex] \mu = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = -\dfrac{20}{26} \end{cases}$$

On obtient $\overrightarrow{w} = \frac{9}{13}\overrightarrow{u} - \frac{10}{13}\overrightarrow{v}$. Il suffit de prendre $\overrightarrow{e_0} = \frac{9}{13}\overrightarrow{u}$, donc $\overrightarrow{e_0}(\frac{45}{13}, \frac{27}{13})$, et $\overrightarrow{e_1} = -\frac{10}{13}\overrightarrow{v}$, donc $\overrightarrow{e_1}(\frac{20}{13}, -\frac{40}{13})$, et $e_2 = w = e_1 + e_2$, donc $\overrightarrow{e_2}(5, -1)$.



3° On a au moins trois façons de déterminer ce birapport.

Tout d'abord, on peut utiliser le birapport des déterminants des vecteurs (théorème 4.11 p. 94).

On a donc

$$[A,B;C,G] = \frac{\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})}{\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{t})} \Big/ \frac{\det(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}{\det(\overrightarrow{v},\overrightarrow{t})} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} \Big/ \frac{\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-20}{23}\,\frac{-30}{-18} = -\frac{100}{69}$$

On peut aussi utiliser le birapport des mesures algébriques des segments fabriqués avec les représentants des quatre points dans la carte affine (théorème 4.12 p. 94)
On a donc
$[A,B;C,G] = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AG}} \Big/ \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BG}}$
Or, il est simple de calculer ces mesures algébriques, en prenant $(O', \overrightarrow{i})$ comme repère cartésien de D, avec O' le point de coordonnées $(0,1)$. Dans ce repère cartésien de D, l'abscisse d'un point est tout simplement son abscisse dans la base $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On a donc (en utilisant les calculs faits en fin de question 1°)
$[A,B;C,G] = \dfrac{(x_C - x_A)}{(x_G - x_A)} \Big/ \dfrac{(x_C - x_B)}{(x_G - x_B)} = \dfrac{(-5-\frac{5}{3})}{(\frac{4}{7}-\frac{5}{3})}\,\dfrac{(\frac{4}{7}+\frac{1}{2})}{(-5+\frac{1}{2})} = \dfrac{\frac{-20}{3}\,\frac{15}{14}}{\frac{-23}{21}\,\frac{-9}{2}} = -\dfrac{100}{69}$
Et on a trouvé le même résultat.
La troisième méthode consiste, en utilisant la définition 4.10 p. 94, à déterminer les coordonnées homogènes de $\overrightarrow{t}$ dans le repère projectif (A,B,C) en utilisant la base associée $(\overrightarrow{e_0},\overrightarrow{e_1})$ qu'on a choisie plus haut, puis de choisir le couple de coordonnées homogènes de $\overrightarrow{t}$ dont la deuxième composante est 1.
On va donc déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{t}$ dans la base $(\overrightarrow{e_0},\overrightarrow{e_1})$, c'est-à-dire de déterminer les réels (x,y) qui vérifient $\overrightarrow{t} = x\overrightarrow{e_0} + y\overrightarrow{e_1}$
On doit donc résoudre le système $\begin{cases} \frac{90}{26}x + \frac{40}{26}y = 4 \\ \frac{54}{26}x - \frac{80}{26}y = 7. \end{cases}$
En simplifiant par 2 les fractions et en multipliant les deux équations par 13, on obtient le système
$\begin{cases} 45x + 20y = 52 \\ 27x - 40y = 91 \end{cases}$
Ce système se résout avec la méthode de Kramer et on trouve :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 52 & 20 \\ 91 & -40 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 45 & 20 \\ 27 & -40 \end{vmatrix}} = \frac{13\times 20\times\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}}{9\times 20\times\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{5}{3}$$

$$\text{et } y = \frac{\begin{vmatrix} 45 & 52 \\ 27 & 91 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 45 & 20 \\ 27 & -40 \end{vmatrix}} = \frac{9\times 13\times\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{9\times 20\times\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = -\frac{23}{20}.$$

Les coordonnées homogènes de $\overrightarrow{t}$ sont donc $(\frac{5}{3}, -\frac{23}{20})$, mais en multipliant ce couple par $-\frac{20}{23}$ pour que la deuxième composante soit 1, on obtient aussi le couple $(-\frac{100}{69}, 1)$, ce qui nous donne une nouvelle fois la valeur du birapport :

$$[A, B; C, G] = -\frac{100}{69}$$

Exercice 4.8. On raisonne avec les déterminants, comme dans le début de la preuve de la proposition 4.12 (p. 94). On peut considérer que A, B, C, D sont des vecteurs directeurs des droites vectorielles $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}$.
On utilise une base dans lequel la droite Δ a pour équation $y = 1$. Le point à l'infini (qui sera successivement un des quatre points considérés) a pour coordonnées $(1, 0)$, tandis que un point Z, situé sur la droite Δ a pour coordonnées $(x_Z, 1)$.
(i) Si c'est A qui est à l'infini, on calcule

$$\rho = \frac{\det(A,C)}{\det(A,D)} \Big/ \frac{\det(B,C)}{\det(B,D)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_C \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_D \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} \Big/ \frac{\begin{vmatrix} x_B & x_C \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_B & x_D \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{x_B - x_D}{x_B - x_C} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}.$$

(ii) Si c'est B qui est à l'infini :

$$\rho = \frac{\det(A,C)}{\det(A,D)} \Big/ \frac{\det(B,C)}{\det(B,D)} = \frac{\begin{vmatrix} x_A & x_C \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & x_D \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \Big/ \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_C \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_D \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_A - x_C}{x_A - x_D} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}.$$

(iii) Si c'est C qui est à l'infini :

$$\rho = \frac{\begin{vmatrix} x_A & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & x_D \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \Big/ \frac{\begin{vmatrix} x_B & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_B & x_D \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{x_A - x_D} \cdot \frac{x_B - x_D}{-1} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}.$$

(iv) Si c'est D qui est à l'infini :

$$\rho = \frac{\begin{vmatrix} x_A & x_C \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} \Big/ \frac{\begin{vmatrix} x_B & x_C \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_B & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{x_A - x_C}{-1} \cdot \frac{-1}{x_B - x_C} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Exercice 4.9. Remarquons tout d'abord que même s'il semble y avoir beaucoup de formules à démontrer, en s'y prenant bien, on peut nettement diminuer le nombre de calculs.

Si on réussit à démontrer les trois formules de (i) (ce qui ne sera pas très difficile), il suffira alors de démontrer une des égalités des 5 autres formules pour que les autres s'en déduisent : en effet, (i) signifie qu'on ne change pas un birapport si on échange simultanément deux paires de points. Si par exemple on arrive à montrer la première formule de (ii) : $[B, A; C, D] = \frac{1}{\rho}$, en échangeant les deux premiers points et les deux derniers simultanément, on trouvera la deuxième formule de (ii) : $[A, B; D, C] = \frac{1}{\rho}$, puis en échangeant le premier et le troisième en même temps que le deuxième et le quatrième, on tombera sur : $[D, C; A, B] = \frac{1}{\rho}$, (troisième égalité) et en faisant le dernier échange double possible (premier et dernier en même temps que deuxième et troisième) on tombe sur la dernière égalité de la ligne.

Il faut donc montrer (i) puis une égalité par ligne.

On peut utiliser n'importe quelle forme pour faire ces démonstration, mais une méthode intéressante est d'utiliser la forme avec les mesures algébriques. On suppose que les points A, B, C, D sont représentés dans une carte affine par quatre points d'une droite affine Δ qu'on nomme de la même manière, et qu'aucun de ces quatre points n'est à l'infini.

On a donc $[A, B; C, D] = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \Big/ \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ (*).

Remarquons qu'en poursuivant le calcul, on a $[A, B; C, D] = \rho. = \dfrac{\overline{AC}\,\overline{BD}}{\overline{AD}\,\overline{BC}}$

Appliquons cette formule (*) en échangeant A et B en même temps que C et D :

$[B, A; D, C] = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \Big/ \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AC}\,\overline{BD}}{\overline{AD}\,\overline{BC}} = \rho.$

Idem en échangeant dans (*) A et C en même temps que B et D :

$[C, D; A, B] = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \Big/ \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AC}\,\overline{BD}}{\overline{AD}\,\overline{BC}} = \rho.$

Maintenant on échange dans (*) A et D en même temps que B et C :

$[D, C; B, A] = \dfrac{\overline{DB}}{\overline{DA}} \Big/ \dfrac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{AC}\,\overline{BD}}{\overline{AD}\,\overline{BC}} = \rho.$

(i) est maintenant complètement établi.

Appliquons maintenant la formule (*) en échangeant juste A et B :

$[B, A; C, D] = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \Big/ \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BC}\,\overline{AD}}{\overline{BD}\,\overline{AC}} = \dfrac{1}{\rho}.$

On a établi la première égalité de (ii), donc on peut considérer que (ii) est établie.

Pour établir (iii), on va montrer un petit lemme :

$\alpha = \overline{AB}\,\overline{CD} + \overline{AD}\,\overline{BC} + \overline{AC}\,\overline{DB} = 0$ (**), pour tous points alignés A, B, C, D : en effet

$$\begin{aligned}\alpha &= \overline{AB}\,\overline{CD} + \overline{AD}\,\overline{BC} + \overline{AC}\,\overline{DB}\\ &= \overline{AB}(\overline{CA} + \overline{AD}) + \overline{AD}(\overline{BA} + \overline{AC}) + \overline{AC}(\overline{DA} + \overline{AB})\\ &= \overline{AB}\,\overline{CA} + \overline{AB}\,\overline{AD} + \overline{AD}\,\overline{BA} + \overline{AD}\,\overline{AC} + \overline{AC}\,\overline{DA} + \overline{AC}\,\overline{AB} = 0\end{aligned}$$

Appliquons maintenant la formule (*) en échangeant B et C :
$[A, C; B, D] = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Big/ \dfrac{\overline{CB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{AB}\,\overline{CD}}{\overline{AD}\,\overline{CB}}$
En appliquant le lemme (**) au numérateur de cette dernière formule, on obtient :
$[A, C; B, D] = \dfrac{-\overline{AD}\,\overline{BC} - \overline{AC}\,\overline{DB}}{\overline{AD}\,\overline{CB}} = 1 - \dfrac{\overline{AC}\,\overline{BD}}{\overline{AD}\,\overline{BC}} = 1 - \rho.$
On a établi la première formule de (iii), donc on peut considérer que (iii) est entièrement établie.
Pour établir la première égalité de (iv), on remarque que pour passer de $[A, C; B, D]$ à $[C, A; B, D]$, on a juste échangé les deux premiers points, et en (ii) on a vu que cette transformation inversait le birapport : puisque $[A, C; B, D] = 1 - \rho$, on a donc $[C, A; B, D] = \dfrac{1}{1 - \rho}$.
La première formule de (iv) est établie donc (iv) est entièrement établie.
Pour établir (v), on remarque que pour passer de $[C, A; B, D]$ à $[C, B; A, D]$, il suffit de changer le deuxième et le troisième point ; or, on a vu avec (iii) que cette transformation transformait le birapport ρ en $1 - \rho$. Puisque $\rho' = [C, A; B, D] = \dfrac{1}{1 - \rho}$, on a donc
$[C, B; A, D] = 1 - \rho' = 1 - \dfrac{1}{1 - \rho} = \dfrac{1 - \rho - 1}{1 - \rho} = \dfrac{\rho}{\rho - 1}$.
La première formule de (v) est établie donc (v) est entièrement établie.
Enfin la première formule de (vi) s'obtient à partir de (v) en échangeant les deux premiers points, transformation qui, grâce à (ii), inverse le birapport.
Puisque $[C, B; A, D] = \frac{\rho}{\rho - 1}$, on a donc $[B, C; A, D] = \dfrac{\rho - 1}{\rho}$.
On a établi la première formule de (vi), donc on a terminé !

Exercice 4.10.

1° Cette figure présente quatre points A, B, C, D tels que trois d'entre eux ne sont jamais alignés : c'est exactement la caractérisation d'un repère projectif en dimension 2, donc (A, B, C, D) est bien un repère projectif.
La suite des hypothèses implicites contenues dans cette figure est la définition des cinq points a, b, c, d, e :
a est le point d'intersection des droites distinctes (AD) et (BC) ;
b est le point d'intersection des droites distinctes (BD) et (AC) ;
c est le point d'intersection des droites distinctes (CD) et (AB) ;

d est le point d'intersection des droites distinctes (BC) et (bc) ;
e est le point d'intersection des droites distinctes (AD) et (bc).

2° Comme pour tous les repères projectifs, les coordonnées homogènes des trois premiers points sont :
pour A : $(1,0,0)$;
pour B : $(0,1,0)$;
pour C : $(0,0,1)$.
Ensuite le quatrième point du repère a pour coordonnées homogènes $(1,1,1)$.
Associons une base $(\overrightarrow{e_0}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ à ce repère projectif, de sorte que $A = p(\overrightarrow{e_0})$, $B = p(\overrightarrow{e_1})$, $C = p(\overrightarrow{e_2})$, $D = p(\overrightarrow{e_0} + \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})$.
Le point projectif a est la droite vectorielle intersection du plan vectoriel $B + C$ et du plan vectoriel $A + D$. Donc un vecteur directeur de a est d'une part combinaison linéaire d'un représentant de B et d'un représentant de C, d'autre part combinaison linéaire d'un représentant de A et d'un représentant de D. Ses coordonnées homogènes (x, y, z) vérifient donc d'une part
$(x,y,z) = \alpha(0,1,0) + \beta(0,0,1)$ et d'autre part $(x,y,z) = \lambda(1,0,0) + \mu(1,1,1)$.
On a donc $(0, \alpha, \beta) = (\lambda + \mu, \mu, \mu)$, donc $\alpha = \beta = \mu$ et $\lambda = -\mu$, donc un triplet de coordonnées homogènes de a est $(0,1,1)$.
On procède de même pour les autres points. Pour les coordonnées (x, y, z) de b, sachant que ce point est à l'intersection des droites (BD) et (AC), on doit avoir
$(x,y,z) = \alpha(0,1,0) + \beta(1,1,1)$ et $(x,y,z) = \lambda(1,0,0) + \mu(0,0,1)$,
donc $(x,y,z) = (\beta, \alpha + \beta, \beta) = (\lambda, 0, \mu)$. On a donc $\alpha = -\beta$, et $y = 0$, donc un triplet de coordonnées homogènes de b est $(1,0,1)$.
Pour les coordonnées (x, y, z) de c, sachant que ce point est à l'intersection des droites (CD) et (AB), on doit avoir $(x,y,z) = \alpha(0,0,1) + \beta(1,1,1)$ et $(x,y,z) = \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0)$, donc $(x,y,z) = (\beta, \beta, \alpha + \beta) = (\lambda, \mu, 0)$. On a donc $\alpha = -\beta$, et $z = 0$, donc un triplet de coordonnées homogènes de c est $(1,1,0)$.
Pour les coordonnées (x, y, z) de d, sachant que ce point est à l'intersection des droites (BC) et (bc), on doit avoir
$(x,y,z) = \alpha(0,1,0) + \beta(0,0,1)$ et $(x,y,z) = \lambda(1,0,1) + \mu(1,1,0)$,
donc $(x,y,z) = (0, \alpha, \beta) = (\lambda + \mu, \mu, \lambda)$. On a donc $\lambda = -\mu$, et $x = 0$, donc un triplet de coordonnées homogènes de d est $(0,1,-1)$. .
(Bien entendu, on pourrait aussi pendre $(0,-1,1)$, ou $(0,32,-32)\ldots$)
Pour les coordonnées (x, y, z) de e, sachant que ce point est à l'intersection des droites (AD) et (bc), on doit avoir
$(x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,1)$ et $(x,y,z) = \lambda(1,0,1) + \mu(1,1,0)$,
donc $(x,y,z) = (\alpha + \beta, \beta, \beta) = (\lambda + \mu, \mu, \lambda)$. On a donc $\lambda = \beta = \mu = \alpha$, et $x = 2y = 2z$, donc un triplet de coordonnées homogènes de e est $(2,1,1)$.

3° D'après la question précédente, puisque $a(0,1,1)$ et $d(0,-1,1)$, sachant que $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$, on peut affirmer qu'un vecteur directeur de a est $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, tandis qu'un vecteur directeur de d est $-\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$.

(B, C, a) est donc un repère projectif de la droite projective (BC), pour lequel $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base associée, et dans ce repère projectif, les coordonnées homogènes de d sont $(-1, 1)$. En application de la définition du birapport (4.10 p. 94), on trouve directement que le birapport $[B, C; a, d]$ vaut :
$[B, C; a, d] = -1.$

Une autre méthode aurait consisté, après avoir déterminé un vecteur directeur de chacune des droites vectorielles B, C, a, d, à exprimer ces vecteurs dans une base du plan vectoriel $B + C$ (dont est issue la droite projective (BC)), et à utiliser l'expression du birapport à l'aide des déterminants (théorème 4.11 p. 94), mais ce serait moins efficace.

Puisque $[B, C; a, d] = -1$, en application des formules (i) et (ii) de la proposition 4.13 (p. 95), on a :
$[B, C; a, d] = [C, B; d, a] = [a, d; B, C] = [d, a; C, B] = -1$ et
$[C, B; a, d] = [B, C; d, a] = [d, a; C, B] = [a, d; B, C] = \dfrac{1}{-1} = -1.$

4° Deux paires de points en division harmonique sont forcément formées de quatre points alignés.
On n'a pas beaucoup de choix pour trouver d'autres ensembles de quatre points alignés sur la figure : il n'y a guère que $\{A, e, D, a\}$ et $\{c, e, b, d\}$.

Commençons par $\{A, e, D, a\}$; les coordonnées homogènes de ces points projectifs sont :
$A(1, 0, 0)$, $e(2, 1, 1)$, $D(1, 1, 1)$ et $a(0, 1, 1)$.
Si on pose $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_0} + \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, il est clair que A est engendré par $\overrightarrow{e_0}$, D est engendré par $\overrightarrow{e_3}$, tandis que $\overrightarrow{e_0} + \overrightarrow{e_3}$ est un vecteur directeur de e.
(A, D, e) est donc un repère projectif de la droite (AD), et $(\overrightarrow{e_0}, \overrightarrow{e_3})$ est une base associée. Comme $-\overrightarrow{e_0} + \overrightarrow{e_3}$ est clairement un vecteur directeur de a, les coordonnées homogènes de e dans ce repère projectif sont $(-1, 1)$, ce qui se traduit exactement par
$[A, D; e, a] = -1$. On peut bien sûr, en raisonnant comme dans la question 3°, trouver sept autres birapports avec ces quatre points dans des ordres différents qui sont égaux à -1.

Pour $\{c, e, b, d\}$: les coordonnées homogènes de ces quatre points sont
$c(1, 1, 0)$, $e(2, 1, 1)$, $b(1, 0, 1)$ et $d(0, -1, 1)$
On peut écrire (avec un abus de langage qui consiste à identifier un point projectif qui est une droite vectorielle à un de ses vecteurs directeurs, ce qui n'est pas très gênant si on est capable de comprendre ce qu'on fait) (on pourrait aussi introduire des vecteurs directeurs $\overrightarrow{e_4}$ et $\overrightarrow{e_5}$ respectivement de c et de b)
$e = c + b$ et $d = -c + b$, ce qui fait que (c, b, e) est un repère projectif de la droite projective (bc) dans lequel d a pour coordonnées homogènes $(-1, 1)$, ce qui prouve exactement que
$[c, b; e, d] = -1$ (ainsi que sept autres birapports formés à partir de ces quatre points).

Exercice 4.11.

1° Une homographie f du plan projectif $\Pi = \mathbb{P}(\overrightarrow{E})$ est issue d'un endomorphisme bijectif φ de $\overrightarrow{E}$. Soient A, B, C trois points deux à deux distincts et alignés sur une droite Δ du plan projectif Π. A, B, et C sont trois droites vectorielles coplanaires de $\overrightarrow{E}$: il existe un plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ qui contient ces trois droites vectorielles, et d'ailleurs on a exactement $\Delta = \mathbb{P}(\overrightarrow{P})$. Soient $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ des vecteurs directeurs respectifs de A, B, C. L'image par l'endomorphisme φ du plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ est un plan vectoriel $\overrightarrow{P'}$ (puisque φ est bijectif, il y a conservation de la dimension). Donc on a $\varphi(\overrightarrow{a}) \in \overrightarrow{P'}$, $\varphi(\overrightarrow{b}) \in \overrightarrow{P'}$ et $\varphi(\overrightarrow{c}) \in \overrightarrow{P'}$. Or, les images A', B', C' par f des points projectifs A, B, C sont les droites vectorielles $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)$, respectivement dirigées par $\varphi(\overrightarrow{a}), \varphi(\overrightarrow{b}), \varphi(\overrightarrow{c})$, et ces trois droites vectorielles sont donc incluses dans le plan vectoriel $\overrightarrow{P'}$, ce qui signifie exactement que les points projectifs A', B', C' appartiennent à la droite projective $\Delta' = \mathbb{P}(\overrightarrow{E'})$.
On a bien prouvé qu'une homographie conserve l'alignement.

2° Soient A, B, C, D quatre points deux à deux distincts et alignés sur une droite $\Delta = \mathbb{P}(\overrightarrow{P})$ d'un plan projectif $\Pi = \mathbb{P}(\overrightarrow{E})$. On garde les notations de la question précédente.
(A, B, C) est un repère projectif de la droite Δ. On supposera que $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ est une base de $\overrightarrow{P}$ associée à ce choix de repère, c'est-à-dire que $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ dirige C ; Soit $\overrightarrow{d}$ un vecteur directeur de la droite vectorielle D, dont la deuxième composante dans la base $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ vaut 1. On a donc $\overrightarrow{d} = \rho\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, avec $\rho = [A, B; C, D]$.
Or, les vecteurs directeurs des droites vectorielles $A' = f(A)$, $B' = f(B$, $C' = f(C)$ et $D' = f(D)$ sont respectivement $\overrightarrow{a'} = \varphi(\overrightarrow{a})$, $\overrightarrow{b'} = \varphi(\overrightarrow{b})$, $\overrightarrow{c'} = \varphi(\overrightarrow{c})$ et $\overrightarrow{d'} = \varphi(\overrightarrow{d})$; on a, par linéarité de φ : $\overrightarrow{c'} = \overrightarrow{a'} + \overrightarrow{b'}$, donc (A', B', C') est un repère projectif de la droite projective $\Delta' = f(\Delta)$ auquel $(\overrightarrow{a'}, \overrightarrow{b'})$ est une base adaptée. Dans cette base de $\overrightarrow{P'} = \varphi(\overrightarrow{P})$, les coordonnées de $\overrightarrow{d}'$ sont $(\rho, 1)$ (puisque $\varphi(\overrightarrow{d}) = \varphi(\rho\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \rho\varphi(\overrightarrow{a}) + \varphi(\overrightarrow{b}) = \rho\overrightarrow{a'} + \overrightarrow{b'}$), ce qui signifie exactement que $[A', B'; C', D'] = \rho$: le birapport a bien été conservé par l'homographie f.

Exercice 4.12.

1° Préliminaire
Soient $d = \mathbb{P}(\overrightarrow{P})$ et $d' = \mathbb{P}(\overrightarrow{P'})$ deux droites projectives. On suppose que f est une homographie de d vers d', elle est donc issue d'un isomorphisme φ de $\overrightarrow{P}$ sur $\overrightarrow{P'}$.
Soient A, B, C, D quatre points distincts de la droite d. On suppose que $\rho = [A, B; C, D]$.
On sait qu'il existe une base $(\overrightarrow{e_0}, \overrightarrow{e_1})$ de $\overrightarrow{P}$, qui est associée au repère projectif (A, B, C) de d, et qui est telle que $A = p(\overrightarrow{e_0})$, $B = p(\overrightarrow{e_1})$, $C = p(\overrightarrow{e_0} + \overrightarrow{e_1})$ et $D = p(\rho\overrightarrow{e_0} + \overrightarrow{e_1})$.
Les images par f de ces quatre points sont les points A', B', C', D' de d', définis

par $A' = f(A) = p(\varphi(\overrightarrow{e_0})) = p(\overrightarrow{e'_0})$, $B' = f(B) = p(\varphi(\overrightarrow{e_1})) = p(\overrightarrow{e'_1})$, $C' = f(C) = p(\varphi(\overrightarrow{e_0 + e_1})) = p(\overrightarrow{e'_0} + \overrightarrow{e'_1})$ et enfin $D' = f(D) = p(\varphi(\overrightarrow{\rho e_0 + e_1})) = p(\rho\overrightarrow{e'_0} + \overrightarrow{e'_1})$.

Il est alors immédiat que (A', B', C') est un repère projectif de $\overrightarrow{P'}$, et que $(\overrightarrow{e'_0}, \overrightarrow{e'_1})$ est sa base associée, et $(\rho, 1)$ étant un couple de coordonnées homogènes de D dans ce repère projectif, on a $[A', B'; C', D'] = \rho$, ce qui prouve bien que f conserve le birapport de quatre points distincts.

Si seulement trois des points A, B, C, D sont distincts, on peut, quitte à permuter les points, s'arranger pour que A, B, C soient distincts, et dans ce cas on a soit $D = A$ $(\rho = \infty)$, soit $D = B$ $(\rho = 0)$, soit $D = C$ $(\rho = 1)$. Dans ces trois cas, il est évident, en raisonnant comme précédemment qu'on a respectivement soit soit $D' = A'$ (et donc $[A', B'; C', D'] = [A', B'; C', A'] = \infty = \rho$), soit $D' = B'$ ($[A', B'; C', D'] = [A', B'; C', B'] = 0 = \rho$), soit $D = C$ ($[A', B'; C', D'] = [A', B'; C', C'] = 1 = \rho$) et dans tous les cas on a bien conservation du birapport.

Réciproquement : soit f une bijection de d sur d' qui conserve le birapport de tout quadruplet de points dont au moins trois sont distincts.

Soit (A, B, C) un repère projectif de d, et soient $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$; comme f est bijective, (A', B', C') sont distincts donc forment un repère projectif de $\overrightarrow{P'}$. Soit g l'homographie de d sur d' qui est définie par $g(A) = A'$, $g(B) = B'$ et $g(C) = C'$ (l'existence et l'unicité de g sont assurées par la proposition 4.17 p. 98). Nous allons montrer que $f = g$, ce qui assurera bien que f est une homographie. Soit M un point quelconque de d ; soit M' son image par f et M'' son image par g. Soit $\rho = [A, B; C, M]$. Comme par hypothèse f conserve le birapport, on a $[A, B; C, M] = [A', B'; C', M'] = \rho$ et comme une homographie g conserve le birapport (d'après le sens direct de cette démonstration), on a aussi $[A, B; C, M] = [g(A), g(B); g(C), g(M)] = [A', B'; C', M''] = \rho$, de sorte que $[A', B'; C', M'] = [A', B'; C', M''] = \rho$. Mais $[A', B'; C', M'] = \rho$ signifie, par définition, que M' admet, dans le repère projectif (A', B', C') de d', le couple $(\rho, 1)$ de coordonnées homogènes, tandis que $[A', B'; C', M''] = \rho$ signifie de même que M'' admet aussi $(\rho, 1)$ comme couple de coordonnées homogènes, donc M' et M'' ont les mêmes coordonnées homogènes, et donc $M' = M''$, c'est-à-dire $f(M) = g(M)$ pour tout $M \in d$, donc $f = g$.

2° Soient A, B, C, D quatre points de d tels que A, B, C sont distincts.

Soient A', B', C', D' leurs images respectives par la projection π. Il suffit de vérifier que $[A, B; C, D] = [A', B'; C', D']$ pour pouvoir conclure en appliquant 1°.

Mais nous allons calculer ces birapports en utilisant des représentants de ces points dans une carte affine où la droite à l'infini est la droite $(S\omega)$, le point ω étant le point d'intersection des droites d et d' ; comme ω est à l'infini, on a $d /\!/ d'$, et comme S est à l'infini, on a $(AA') /\!/ (BB') /\!/ (CC') /\!/ (DD')$, de sorte que $AA'C'C$, $AA'D'D$, $BB'C'C$, $BB'D'D$ sont des parallélogrammes, donc, quelle que soit l'orientation commune choisie pour les droites d et d', on aura $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\overline{AD} = \overline{A'D'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{BD} = \overline{B'D'}$ et

$$[A,B;C,D] = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \Big/ \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'D'}} \Big/ \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'D'}} = [A',B';C',D'].$$

π conserve donc le birapport, et donc π est bien une homographie entre d et d'.

3° Soit f une homographie de la droite projective d sur la droite projective d'. Si f est une projection de sommet S, le point ω d'intersection[11] de d et d' est évidemment un point invariant par f, (puisque $(S\omega)$ coupe d' en ω, on a bien $f(\omega) = \omega$).

Réciproquement, on suppose que f admet un point invariant ω. Comme $f : d \longrightarrow d'$, ce point invariant vérifiant $f(\omega) = \omega$ appartient à d en tant qu' antécédent, et à d' en tant qu'image, donc le seul point qui peut être invariant est le point d'intersection de d et d'. Donc s'il existe un point invariant ω, c'est que ω est le point d'intersection de d et d'.
Considérons à présent deux points A et B de d, distincts, et distincts de ω. Soient $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$. Comme A et B sont distincts de ω, on a $A' \neq A$ et $B' \neq B$, de sorte qu'on peut considérer les droites (AA') et (BB'). Ces droites sont distinctes, sinon, puisque $B \neq A$, on aurait $(AB) \in (AA')$, donc $(AA') = d$ et $A' \in d$, ce qui est impossible. Donc (AA') et (BB') se coupent en un point S.
Considérons la projection π, de sommet S, de d sur d'. On va montrer que $f = \pi$, ce qui prouvera bien que f est une projection. Tout d'abord, ω est invariant par π comme on l'a vu plus haut ; (SA) rencontre d' en A', donc $\pi(A) = A'$ et de même, $\pi(B) = B'$. D'autre part, (ω, A, B) est formé de trois points distincts de d, donc c'est un repère projectif de d.
f et π sont deux homographies de d sur d', qui vérifient $f(A) = \pi(A) = A'$, $f(B) = \pi(B) = B'$ et $f(\omega) = \pi(\omega) = \omega$; d'après le théorème 4.17 98 une homographie est caractérisée par son action sur les points d'un repère projectif : comme ici f et π ont la même action sur les points ω, A, B, c'est que $f = \pi$. □

CHAPITRE 5

5. Solutions des exercices sur la géométrie euclidienne

Exercice 5.1.

1° Une norme N sur un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ est une application de $\overrightarrow{E}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les trois axiomes suivants :

(i) $N(\overrightarrow{x}) \geqslant 0$ pour tout $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$ et $N(\overrightarrow{x}) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

(ii) $N(\lambda\overrightarrow{x}) = |\lambda| N(\overrightarrow{x})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$.

[11] Rappelons qu'en géométrie projective, deux droites distinctes d'un plan sont toujours sécantes en un point unique.

(iii) $N(\vec{x}+\vec{y}) \leqslant N(\vec{x}) + N(\vec{y})$ pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$.
Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel euclidien (muni d'un produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$). Sa norme euclidienne est l'application $\|\cdot\|$ de $\vec{E}$ vers $\mathbb{R}^+$ qui associe à un vecteur $\vec{x}$ sa norme euclidienne $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \sqrt{\vec{x}^2}$. Puisque $\cdot$ est un produit scalaire, on est sûr que pour tout $\vec{x}$, on a $\vec{x}^2 \geqslant 0$ donc $\|\cdot\|$ est bien définie, et on a
$\|\vec{x}\| = 0 \Longrightarrow \vec{x}^2 = 0 \Longrightarrow \vec{x} = \vec{0}$: (i) est vérifié.

Ensuite, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$, on a $\|\lambda\vec{x}\|^2 = (\lambda\vec{x})\cdot(\lambda\vec{x}) = \lambda^2\vec{x}^2$, donc en prenant la racine carrée des deux membres de cette égalité, on obtient
$\|\lambda\vec{x}\| = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\vec{x}}^2 = |\lambda|\ \|\vec{x}\|$: (ii) est vérifié.

Enfin, pour montrer (iii) (l'inégalité triangulaire), on a besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
Pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$, on a $\quad (C.S.)\ :\ |\vec{x}\cdot\vec{y}| \leqslant \|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\|$.
Pour montrer ce résultat classique, une méthode classique (à connaître absolument) consiste à étudier la quantité $P(\lambda) = (\lambda\vec{x}+\vec{y})^2$, pour $\vec{x}$ et $\vec{y}$ fixés. Remarquons d'abord que si $\vec{x} = \vec{0}$, alors $(C.S.)$ s'écrit $0 \leqslant 0$ et est trivialement vraie : on peut donc supposer dans la suite que $\vec{x} \neq \vec{0}$.
$P(\lambda) = \lambda^2\vec{x}^2 + 2\lambda\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}^2$ est un trinôme en λ qu'on pourrait écrire
$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ avec $a = \vec{x}^2 = \|\vec{x}\|^2 \neq 0$, $b = 2\ \vec{x}\cdot\vec{y}$ et $c = \vec{y}^2 = \|\vec{y}\|^2$.
Mais d'autre part, $P(\lambda)$ est le carré scalaire du vecteur $\lambda\vec{x}+\vec{y}$ donc $P(\lambda)$ est un trinôme qui est toujours positif (ou à la rigueur nul). Un trinôme qui a un discriminant strictement positif possède deux racines, et n'a pas le même signe entre ses racines et à l'extérieur de ses racines, donc n'est pas toujours positif ou nul. Puisque $P(\lambda) \geqslant 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut donc affirmer que le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ du trinôme $P(\lambda)$ est négatif ou nul. Étudions cette affirmation :
$\Delta \leqslant 0 \iff b^2 \leqslant 4ac \iff 4(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \leqslant 4\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$ et en divisant par 4 et en prenant la racine carrée, on obtient ce qu'on voulait démontrer, l'inégalité
$(C.S.)$: $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leqslant \|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\|$.

Revenons à l'inégalité triangulaire :
Pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$, de $(C.S.)$, on déduit $\vec{x}\cdot\vec{y} \leqslant |\vec{x}\cdot\vec{y}| \leqslant \|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\|$, donc successivement :
$2\vec{x}\cdot\vec{y} \leqslant 2\|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\|$;
$\vec{x}^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}^2 \leqslant \vec{x}^2 + 2\|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\| + \vec{y}^2$;
$\vec{x}^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}^2 \leqslant \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2$;
$(\vec{x}+\vec{y})^2 \leqslant (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$; et enfin, en prenant la racine carrée des deux membres :
$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$: on a démontré que (iii) est vérifié, donc $\|\cdot\|$ est bien une norme.

2° Pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$, on a, en utilisant (iii), c'est-à-dire la « première inégalité triangulaire »,
$\|\vec{x}\| = \|(\vec{x}+\vec{y}) + (-\vec{y})\| \leqslant \|\vec{x}+\vec{y}\| + \|-\vec{y}\| = \|\vec{x}+\vec{y}\| + \|\vec{y}\|$, donc
$\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}+\vec{y}\|$ (*).

Ensuite, en échangeant les rôles de $\vec{x}$ et $\vec{y}$, on obtient de la même façon $\|\vec{y}\| - \|\vec{x}\| \leqslant \|\vec{y} + \vec{x}\|$, donc $\|\vec{y}\| - \|\vec{x}\| \leqslant \|\vec{x} + \vec{y}\|$ (**).
En combinant (*) et (**), on obtient :
$\max(\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|, \|\vec{y}\| - \|\vec{x}\|) \leqslant \|\vec{x} + \vec{y}\|$ et on peut conclure en ce rappelant que pour tout nombre réel α, on a $|\alpha| = \max(\alpha, -\alpha)$.

Exercice 5.2.
Soit $\vec{u} = \lambda_1\vec{x_1} + \cdots + \lambda_k\vec{x_k}$ une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathbf{x}$. On doit montrer que si $\vec{u} = \vec{0}$, alors tous les coefficients λ_i sont nuls.
Pour cela, on peut soit calculer $\vec{u}^2$, soit calculer, pour tout i, $\vec{u} \cdot \vec{x_i}$: les deux méthodes permettent d'obtenir le résultat.

Première méthode
On calcule, pour tout i, $\vec{u} \cdot \vec{x_i}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{x_i} = \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{x_j}\right) \cdot \vec{x_i} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{x_j} \cdot \vec{x_i}.$$

Or, par hypothèse, pour $j \neq i$, on a $\vec{x_j} \cdot \vec{x_i} = 0$, donc dans cette somme, il ne reste plus qu'un terme non nul, celui correspondant à $j = i$:

$$\vec{u} \cdot \vec{x_i} = \lambda_i \vec{x_i} \cdot \vec{x_i} = \lambda_i \vec{x_i}^2.$$

Donc si on suppose que $\vec{u} = \vec{0}$, on a, pour tout i,
$\lambda_i \vec{x_i}^2 = 0$ et donc $\lambda_i = 0$ (pour tout i) puisque tous les $\vec{x_i}$ sont supposés non nuls (et puisque le carré scalaire d'un vecteur non nul est non nul, définition d'un produit scalaire).

Deuxième méthode
On calcule $\vec{u}^2$:

$$\vec{u}^2 = \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{x_j}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{x_i}\right) = \sum_{\substack{j \in 1,k \\ i \in 1,k}} \lambda_j \vec{x_j} \cdot \lambda_i \vec{x_i}.$$

Dans cette double somme, presque tous les termes sont nuls puisque $\vec{x_j} \cdot \vec{x_i} = 0$ pour $i \neq j$, donc il ne reste plus que les k termes où $i = j$:

$$\vec{u}^2 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{x_i} \cdot \lambda_i \vec{x_i} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 \vec{x_i}^2.$$

Or, cette somme est une somme de nombres positifs ou nuls. Si $\vec{u} = \vec{0}$, on obtient une somme nulle de nombres positifs ou nuls, donc tous les termes de la somme sont nuls, et on a pour tout i, $\lambda_i^2 \vec{x_i}^2 = 0$, donc $\lambda_i^2 = 0$ (puisque les $\vec{x_i}$ son non nuls) et donc $\lambda_i = 0$.

Exercice 5.3.

1° On raisonne par récurrence.

À l'ordre $k = 1$, le résultat à démontrer est complètement trivial, puisque $\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{a_1}$.

Supposons que la propriété est vraie à l'ordre $k-1$, c'est-à-dire qu'on a :

- la famille $(\overrightarrow{b_i})_{1 \leqslant i \leqslant k-1}$ est orthogonale ;
- $< \overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{k-1}} > = < \overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_{k-1}} >$;
- $\overrightarrow{a_{k-1}} \cdot \overrightarrow{b_{k-1}} = \overrightarrow{b_{k-1}}^2 > 0$.

On doit alors montrer ces trois propriétés à l'ordre k.

D'après l'hypothèse de récurrence, la famille $(\overrightarrow{b_i})_{1 \leqslant i \leqslant k-1}$ est orthogonale, donc il suffit de montrer que $\overrightarrow{b_k}$ est orthogonal à tous les $\overrightarrow{b_i}$ pour $i < k$. Or, on a

$$\overrightarrow{b_k} \cdot \overrightarrow{b_i} = \left(\overrightarrow{a_k} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_j}}{\|\overrightarrow{b_j}\|^2} \overrightarrow{b_j} \right) \cdot \overrightarrow{b_i} = \overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_i} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_j}}{\|\overrightarrow{b_j}\|^2} \overrightarrow{b_j} \cdot \overrightarrow{b_i}.$$

Puisque la famille $(\overrightarrow{b_i})_{1 \leqslant i \leqslant k-1}$ est orthogonale, presque tous les termes de cette dernière somme sont nuls sauf celui qui correspond au terme $j = i$, et on a donc

$$\overrightarrow{b_k} \cdot \overrightarrow{b_i} = \overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_i} - \frac{\overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_i}}{\|\overrightarrow{b_i}\|^2} \overrightarrow{b_i} \cdot \overrightarrow{b_i} = \overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_i} - \frac{\overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_i}}{\|\overrightarrow{b_i}\|^2} \|\overrightarrow{b_i}\|^2 = 0.$$

Montrons maintenant que $< \overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k} > = < \overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_k} >$.

Notons au passage que ce résultat prouvera aussi que b_k ne peut pas être nul, sinon les dimensions de ces deux sous-espaces vectoriels engendrés ne coïncideraient pas : les (a_j) forment une famille libre, donc le sous-espace qu'ils engendrent est de dimension k, ce qui est impossible pour la famille engendrée par les b_j si b_k est nul.

À cause de l'hypothèse de récurrence qui affirme que cette relation est vraie à l'ordre $k-1$, il suffit de vérifier que $\overrightarrow{a_k} \in < \overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_k} >$ et que $\overrightarrow{b_k} \in < \overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k} >$.

On a $\overrightarrow{b_k} = \overrightarrow{a_k} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_j}}{\|\overrightarrow{b_j}\|^2} \overrightarrow{b_j}$ donc $\overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{b_k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_j}}{\|\overrightarrow{b_j}\|^2} \overrightarrow{b_j}$, et on a bien $\overrightarrow{a_k} \in < \overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_k} >$.

Ensuite, l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que

$$< \overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k} > = < \overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{k-1}} > + < a_k > = < \overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_{k-1}} > + < a_k >,$$

et il est clair que $\overrightarrow{b_k} \in < \overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_{k-1}} > + < \overrightarrow{a_k} >$, d'après la relation qui définit ce vecteur. D'où le résultat.

Montrons à présent que $\overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_k} = \overrightarrow{b_k}^2 > 0$. Comme on a vu que $b_k \neq 0$, seule l'égalité est à démontrer.

On vient de voir que $\overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{b_k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_j}}{\|\overrightarrow{b_j}\|^2} \overrightarrow{b_j}$, donc

$$\overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_k} = \left(\overrightarrow{b_k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_j}}{\|\overrightarrow{b_j}\|^2} \overrightarrow{b_j} \right) \cdot \overrightarrow{b_k} = \overrightarrow{b_k}^2 + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_j}}{\|\overrightarrow{b_j}\|^2} \overrightarrow{b_j} \cdot \overrightarrow{b_k} = \overrightarrow{b_k}^2,$$

puisque $\overrightarrow{b_k}$ est orthogonal aux $\overrightarrow{b_j}$.

2° **c** est évidemment orthogonale puisque chaque $\overrightarrow{c_j}$ est colinéaire à $\overrightarrow{b_j}$. Et les vecteurs $\overrightarrow{c_j}$ sont normés par construction, donc la famille **c** est orthonormale.
Remarquons qu'on a aussi, naturellement, puisque les $\overrightarrow{c_i}$ sont colinéaires aux $\overrightarrow{b_i}$, $< \overrightarrow{c_1}, \dots, \overrightarrow{c_j} > = < \overrightarrow{b_1}, \dots, \overrightarrow{b_j} > = < \overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_j} >$, et ceci pour tout j tel que $1 \leqslant j \leqslant k$.
Remarquons aussi que pour tout j tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, on a

$$\overrightarrow{a_j} \cdot \overrightarrow{c_j} = \overrightarrow{a_j} \cdot \left(\frac{1}{\|\overrightarrow{b_j}\|} \overrightarrow{b_j} \right) = \frac{1}{\|\overrightarrow{b_j}\|} \overrightarrow{a_j} \cdot \overrightarrow{b_j} = \frac{1}{\|\overrightarrow{b_j}\|} \overrightarrow{b_j}^2 = \frac{1}{\|\overrightarrow{b_j}\|} \|\overrightarrow{b_j}\|^2 = \|\overrightarrow{b_j}\|.$$

3° On doit ici encore raisonner par récurrence sur k :
à l'ordre 1 : puisque $< \overrightarrow{d_1} > = < \overrightarrow{a_1} >$, c'est que $\overrightarrow{d_1} = \lambda \overrightarrow{a_1}$; si $\overrightarrow{d_1}$ est normé, on doit avoir $|\lambda| = \frac{1}{\|\overrightarrow{a_1}\|}$, donc $\overrightarrow{d_1} = \pm \frac{1}{\|\overrightarrow{a_1}\|} \overrightarrow{a_1}$, et en supposant que $\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{a_1} > 0$, on impose que le signe soit $+$, donc on a $\overrightarrow{d_1} = + \frac{1}{\|\overrightarrow{a_1}\|} \overrightarrow{a_1} = \frac{1}{\|\overrightarrow{b_1}\|} \overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{c_1}$.
Supposons qu'on a $(\overrightarrow{d_1}, \dots, \overrightarrow{d_{k-1}}) = (\overrightarrow{c_1}, \dots, \overrightarrow{c_{k-1}})$.
Puisque $\overrightarrow{d_k}$ vérifie $< \overrightarrow{d_1}, \dots, \overrightarrow{d_k} > = < \overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k} > = < \overrightarrow{b_1}, \dots, \overrightarrow{b_k} > = < \overrightarrow{c_1}, \dots, \overrightarrow{c_k} >$ d'après l'hypothèse de récurrence, on a $< \overrightarrow{c_1}, \dots, \overrightarrow{c_{k-1}}, \overrightarrow{d_k} > = < \overrightarrow{c_1}, \dots, \overrightarrow{c_{k-1}}, \overrightarrow{c_k} >$.
Soit V_k ce sous-espace vectoriel commun, qui est de dimension k, et dont **c** est une base orthonormée. Soit $V_{k-1} = < \overrightarrow{c_1}, \dots, \overrightarrow{c_{k-1}} >$. V_{k-1} est un hyperplan de V_k, et c'est l'orthogonal, dans V_k, de c_k.
Mais $\overrightarrow{d_k}$ est par hypothèse orthogonal à tous les $\overrightarrow{d_j}$ pour $1 \leqslant j \leqslant k-1$, et par hypothèse de récurrence, ces vecteurs sont égaux aux $\overrightarrow{c_j}$ correspondants. Donc on peut dire que $\overrightarrow{d_k} \in V_{k-1}^{\perp}$. Or, $\overrightarrow{d_k} \in V_k$, et $V_{k-1}^{\perp} \cap V_k = < \overrightarrow{c_k} >$. On peut donc affirmer que $\overrightarrow{d_k} = \lambda \overrightarrow{c_k}$ pour un certain réel λ, et comme $\overrightarrow{d_k}$ et $\overrightarrow{c_k}$ sont tous deux normés, on a $\overrightarrow{d_k} = \pm \overrightarrow{c_k}$.
Puisque $\overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{d_k} > 0$ par hypothèse, on a donc $\pm \overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{c_k} > 0$ et puisque $\overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{c_k} = \|\overrightarrow{c_k}\| > 0$, c'est forcément que le signe est $+$ et non pas $-$, donc $\overrightarrow{d_k} = \overrightarrow{c_k}$.

Exercice 5.4.

1° Puisque $(\overrightarrow{b_i})_{1 \leqslant i \leqslant k}$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{F}$, on peut compléter cette base en une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$: $\mathbf{b} = (\overrightarrow{b_i})_{1 \leqslant i \leqslant n} = (\overrightarrow{b_1}, \dots, \overrightarrow{b_k}, \overrightarrow{b_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{b_n})$. Il est tout à fait clair que les vecteurs $\overrightarrow{b_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{b_n}$ sont dans $\overrightarrow{F}^\perp$, et donc forment une base de ce sous-espace vectoriel (à cause de sa dimension $n-k$). Soit $\vec{x} \in \overrightarrow{E}$, on a vu dans le cours que les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathbf{b}$ sont $X = \begin{pmatrix} \vec{x} \cdot \overrightarrow{b_1} \\ \vdots \\ \vec{x} \cdot \overrightarrow{b_n} \end{pmatrix}$, donc

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{x} \cdot \overrightarrow{b_i}) \vec{b}_i = (\vec{x} \cdot \overrightarrow{b_1}) \vec{b}_1 + \cdots + (\vec{x} \cdot \overrightarrow{b_k}) \vec{b}_k + (\vec{x} \cdot \overrightarrow{b_{k+1}}) \overrightarrow{b_{k+1}} + \cdots + (\vec{x} \cdot \overrightarrow{b_n}) \vec{b}_n.$$

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \text{ avec } \vec{y} = \sum_{i=1}^{k} (\vec{x} \cdot \overrightarrow{b_i}) \vec{b}_i \in \overrightarrow{F} \text{ et } \vec{z} = \sum_{i=k+1}^{n} (\vec{x} \cdot \overrightarrow{b_i}) \vec{b}_i \in \overrightarrow{F}^\perp.$$

On a donc $\pi_{\overrightarrow{F}}(\vec{x}) = \vec{y} = \sum_{i=1}^{k} (\vec{x} \cdot \overrightarrow{b_i}) \vec{b}_i$.

2° De la décomposition qu'on a obtenue pour $\vec{x}$, on déduit immédiatement que

$$\pi_{\overrightarrow{F}^\perp}(\vec{x}) = \vec{z} = \sum_{i=k+1}^{n} (\vec{x} \cdot \overrightarrow{b_i}) \vec{b}_i = \vec{x} - \vec{y} = \vec{x} - \sum_{i=1}^{k} (\vec{x} \cdot \overrightarrow{b_i}) \overrightarrow{b_i}.$$

3° En appliquant les résultats des questions 1° et 2° à une droite vectorielle $\overrightarrow{F} = < \vec{u} >$ dont une base orthonormée est $\overrightarrow{b_1} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$, on obtient :

$$\pi_{\vec{u}}(\vec{x}) = \pi_{\overrightarrow{F}}(\vec{x}) = (\vec{x} \cdot \overrightarrow{b_1}) \overrightarrow{b_1} = \left(\vec{x} \cdot \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} \right) \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{u}}{\vec{u}^2} \vec{u},$$

et, d'autre part

$$\pi_{\overrightarrow{H}}(\vec{x}) = \pi_{\overrightarrow{F}^\perp}(\vec{x}) = \vec{x} - \pi_{\overrightarrow{F}}(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\vec{x} \cdot \vec{u}}{\vec{u}^2} \vec{u}.$$

4° Le plus simple est de remarquer que $\sigma_{\overrightarrow{F}} = \pi_{\overrightarrow{F}} - \pi_{\overrightarrow{F}^\perp}$, d'où les formules :

$$\begin{aligned} \sigma_{\overrightarrow{F}}(\vec{x}) = \pi_{\overrightarrow{F}}(\vec{x}) - \pi_{\overrightarrow{F}^\perp}(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^{k} (\vec{x} \cdot \overrightarrow{b_i}) \vec{b}_i - \sum_{i=k+1}^{n} (\vec{x} \cdot \overrightarrow{b_i}) \vec{b}_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} (\vec{x} \cdot \overrightarrow{b_i}) \vec{b}_i - \left(\vec{x} - \sum_{i=1}^{k} (\vec{x} \cdot \overrightarrow{b_i}) \vec{b}_i \right) = 2 \sum_{i=1}^{k} (\vec{x} \cdot \overrightarrow{b_i}) \vec{b}_i - \vec{x}; \end{aligned}$$

$$\sigma_{\vec{F}^\perp}(\vec{x}) = -\sigma_{\vec{F}}(\vec{x}) = \vec{x} - 2\sum_{i=1}^{k}(\vec{x}\cdot\vec{b_i})\,\vec{b}_i;$$

$$\sigma_{<\vec{u}>}(\vec{x}) = 2\pi_{<\vec{u}>}(\vec{x}) - \vec{x} = 2\frac{\vec{x}\cdot\vec{u}}{\vec{u}^2}\vec{u} - \vec{x};$$

$$\sigma_{\vec{H}}(\vec{x}) = -\sigma_{<\vec{u}>}(\vec{x}) = -2\pi_{<\vec{u}>}(\vec{x}) + \vec{x} = \vec{x} - 2\frac{\vec{x}\cdot\vec{u}}{\vec{u}^2}\vec{u}.$$

Exercice 5.5.

Pour démontrer qu'une application orthogonale u, d'un espace vectoriel euclidien $\vec{E}$ vers un espace vectoriel euclidien $\vec{E'}$ est linéaire, nous utiliserons la suggestion du cours p. 111 : nous allons développer, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ étant des éléments quelconques de $\vec{E}$ et λ un réel quelconque, la quantité réelle $A = \Big(u(\lambda\vec{x}+\vec{y}) - \lambda u(\vec{x}) - u(\vec{y})\Big)^2$.

$$\begin{aligned}
A &= \big(u(\lambda\vec{x}+\vec{y}) - \lambda u(\vec{x}) - u(\vec{y})\big)^2\\
&= \big(u(\lambda\vec{x}+\vec{y})\big)^2 + \lambda^2\big(u(\vec{x})\big)^2 + \big(u(\vec{y})\big)^2\\
&\qquad - 2u(\lambda\vec{x}+\vec{y})\cdot\lambda u(\vec{x}) - 2u(\lambda\vec{x}+\vec{y})\cdot u(\vec{y}) + 2\lambda u(\vec{x})\cdot u(\vec{y})\\
&= \big(u(\lambda\vec{x}+\vec{y})\big)^2 + \lambda^2\big(u(\vec{x})\big)^2 + \big(u(\vec{y})\big)^2\\
&\qquad - 2\lambda u(\lambda\vec{x}+\vec{y})\cdot u(\vec{x}) - 2u(\lambda\vec{x}+\vec{y})\cdot u(\vec{y}) + 2\lambda u(\vec{x})\cdot u(\vec{y})
\end{aligned}$$

Or, u est une transformation orthogonale, donc $u(\vec{v})\cdot u(\vec{w}) = \vec{v}\cdot\vec{w}$ pour tous $\vec{v}, \vec{w}$, et en particulier si $\vec{w} = \vec{v}$, on a $\big(u(\vec{v})\big)^2 = \vec{v}^2$, donc

$$\begin{aligned}
A &= (\lambda\vec{x}+\vec{y})^2 + \lambda^2\vec{x}^2 + \vec{y}^2 - 2\lambda(\lambda\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{x} - 2(\lambda\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{y} + 2\lambda\vec{x}\cdot\vec{y}\\
&= \lambda^2\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + 2\lambda\vec{x}\cdot\vec{y} + \lambda^2\vec{x}^2 + \vec{y}^2\\
&\qquad - 2\lambda^2\vec{x}^2 - 2\lambda\vec{x}\cdot\vec{y} - 2\lambda\vec{x}\cdot\vec{y} - 2\vec{y}^2 + 2\lambda\vec{x}\cdot\vec{y}\\
&= (1+1-2)\lambda^2\vec{x}^2 + (1+1-2)\vec{y}^2 + (2-2-2+2)\vec{x}\cdot\vec{y}\\
A &= 0.
\end{aligned}$$

A est le carré scalaire du vecteur $\big(u(\lambda\vec{x}+\vec{y}) - \lambda u(\vec{x}) - u(\vec{y})\big)$, donc ce vecteur est nul et on a, pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
$u(\lambda\vec{x}+\vec{y}) = \lambda u(\vec{x}) + u(\vec{y})$, ce qui prouve que u est bien linéaire.

Pour montrer que u est injective, puisque u est linéaire, il suffit de montrer que son noyau $\ker u$ ne contient pas d'autre élément que $\vec{0}$.
Soit $\vec{x} \in \ker u$. On a $u(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\big(u(\vec{x})\big)^2 = 0$, et donc $\vec{x}^2 = 0$ (par conservation du produit scalaire par u), et donc $\vec{x} = \vec{0}$.

Exercice 5.6.

Soit A la matrice de u dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ fixée. Les trois affirmations concernant u se traduisent au niveau de A ainsi :
u est involutive $\iff \mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n \iff \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}$;
u est orthogonale $\iff {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A} = \mathrm{I}_n \iff \mathrm{A}^{-1} = {}^t\mathrm{A}$;
u est symétrique $\iff {}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}$.
Sous cette forme, il devient évident que deux de ces affirmations impliquent la troisième :

- Si $\Big[u$ est involutive et orthogonale$\Big]$, alors on a $\Big[\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{A}^{-1} = {}^t\mathrm{A}\Big]$ donc $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{A}$ et u est symétrique.
- Si $\Big[u$ est involutive et symétrique$\Big]$, alors on a $\Big[\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{A}\Big]$ donc $\mathrm{A}^{-1} = {}^t\mathrm{A}$ et u est orthogonale.
- Si $\Big[u$ est orthogonale et symétrique$\Big]$, alors $\Big[\mathrm{A}^{-1} = {}^t\mathrm{A}$ et $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{A}\Big]$ donc $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}$ et u est involutive.

Dans ce cas (u vérifie les trois affirmations, u est involutive, symétrique et orthogonale), u étant involutive, c'est une symétrie, par rapport à $\vec{F} = \vec{E}_1 = \ker(u - \mathrm{id}_{\vec{E}})$, dans la direction de $\vec{G} = \vec{E}_{-1} = \ker(u + \mathrm{id}_{\vec{E}})$. Pour établir que u est une symétrie orthogonale, il suffit de vérifier que $\vec{F} \perp \vec{G}$.
Soit $\vec{x} \in \vec{F} = \vec{E}_1$ et $\vec{y} \in \vec{G} = \vec{E}_{-1}$. On a, puisque u est orthogonale,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = u(\vec{x}) \cdot u(\vec{y}) = \vec{x} \cdot (-\vec{y}) = -\vec{x} \cdot \vec{y}.$$

Un nombre réel ne peut être égal à son opposé que s'il est nul, donc $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ et on a bien $\vec{F} \perp \vec{G}$: u est bien une symétrie orthogonale.

Exercice 5.7.

1° Soit $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u} \neq \vec{0}$. Considérons la réflexion $\sigma = \sigma_{\vec{H}} = \sigma_{<\vec{w}>^\perp}$. $\vec{H}$ est l'hyperplan orthogonal de $\vec{w}$.
Montrons que σ est une réflexion qui échange $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On peut utiliser (au moins) deux méthodes :

- la première, toute simple, consiste à écrire $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) + \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{x} + \vec{y}$ et à constater que c'est la décomposition de $\vec{u}$ dans la somme directe orthogonale $\vec{E} = \vec{H} \oplus < \vec{w} >$: en effet $\vec{y} = -\frac{1}{2}\vec{w} \in < \vec{w} >$ et $\vec{x} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{1}{2}(\vec{v}^2 - \vec{u}^2) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0$ donc $\vec{x} \in \vec{w}^\perp = \vec{H}$.
  On a donc $\sigma(\vec{u}) = \vec{x} - \vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{v}$. (Il n'est pas utile de vérifier que $\sigma(\vec{v}) = \vec{u}$ car on sait que σ est une involution.)
- la deuxième méthode, plus « savante », consiste à utiliser le résultat de l'exercice 5.4, qui donne directement l'expression de $\sigma(\vec{u}) = \sigma_{\vec{H}}(\vec{u}) = \sigma_{\vec{w}^\perp}(\vec{u})$, en utilisant ensuite que $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$ et en n'oubliant pas que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous deux normés :

$$\begin{aligned}
\sigma(\vec{u}) &= \vec{u} - 2\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{w}^2}\vec{w} = \vec{u} - 2\frac{\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{u})}{(\vec{v}-\vec{u})^2}(\vec{v}-\vec{u}) \\
&= \vec{u} - 2\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}^2}{\vec{v}^2 - 2\vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{u}^2}(\vec{v}-\vec{u}) \\
&= \vec{u} - 2\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}-1}{2-2\vec{u}\cdot\vec{v}}(\vec{v}-\vec{u}) = \vec{u} + (\vec{v}-\vec{u}) = \vec{v}.
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi prouvé l'existence d'une réflexion vectorielle σ qui échange $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Soit maintenant une autre réflexion vectorielle $\sigma' = \sigma_{\overrightarrow{H'}}$ qui échange $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Elle vérifie $\sigma'(\vec{w}) = \sigma'(\vec{v}-\vec{u}) = \sigma'(\vec{v}) - \sigma'(\vec{u}) = \vec{u} - \vec{v} = -\vec{w}$, donc $\vec{w} \in \overrightarrow{H'}^{\perp}$, et on a donc $H' = \vec{w}^{\perp} = H$ et $\sigma' = \sigma$: σ est la seule réflexion vectorielle qui échange $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2° L'image d'une base orthonormée par une transformation orthogonale est une base orthonormée, donc $(\overrightarrow{e'_1}, \dots, \overrightarrow{e'_n})$ est une base orthonormée de $\vec{E}$.

3° a) Si $N_0 = 0$, c'est que $\mathcal{E}_0$ est vide, donc pour tout $i \in [1,n]$, on a $f(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{e_i}$, donc φ est l'identité de $\vec{E}$.

3° b) Puisqu'on suppose $N_0 \neq 0$, c'est que $\mathcal{E}_0$ n'est pas vide, et il est donc légitime de prendre un élément $k \in \mathcal{E}_0$.
On considère la réflexion vectorielle σ_1 qui échange les vecteurs $\overrightarrow{e_k}$ et $\overrightarrow{e'_k}$ (ce sont des vecteurs distincts, puisque $k \in \mathcal{E}_0$). D'après 1°, σ_1 est la réflexion vectorielle $\sigma_{\vec{H}}$ avec $\vec{H} = \vec{w}^{\perp}$, en posant $\vec{w} = \overrightarrow{e'_k} - \overrightarrow{e_k}$. On pose $\varphi_1 = \sigma_1 \circ \varphi$. φ_1 est une transformation orthogonale (comme composée de deux transformations orthogonales).
Soit $\mathcal{E}_1 = \{i \in \{1,\dots,n\} \mid \varphi_1(\overrightarrow{e_i}) \neq \overrightarrow{e_i}\}$ et $N_1 = \operatorname{card}\mathcal{E}_1$,
Montrons que φ_1 laisse invariants strictement plus de vecteurs de la base $\mathcal{B}$ que φ.
Tout d'abord, il est clair que $\varphi_1(\overrightarrow{e_k}) = \sigma_1(\overrightarrow{e'_k}) = \overrightarrow{e_k}$, donc $k \notin \mathcal{E}_1$.
On va montrer que pour tous les $\overrightarrow{e_j}$ qui étaient déjà invariants par φ sont encore invariants par φ_1. Remarquons que puisque $\overrightarrow{e_k}$ n'était pas invariant par φ, on a $j \neq k$ lorsque $\overrightarrow{e_j}$ est invariant par φ.
En effet, la famille $(\overrightarrow{e'_1}, \dots, \overrightarrow{e'_n})$ et la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ étant des bases orthonormées, ce sont des familles orthogonales, donc $\overrightarrow{e_j}$ est orthogonal à la fois à $\overrightarrow{e'_k}$ et à $\overrightarrow{e_k}$, donc il est orthogonal à $\vec{w} = \overrightarrow{e'_k} - \overrightarrow{e_k}$, donc $\overrightarrow{e_j} \in \vec{w}^{\perp} = \vec{H}$, et $\sigma_1(\overrightarrow{e_j}) = \overrightarrow{e_j}$.
$\overrightarrow{e_j}$ est invariant par σ_1, et comme il l'était par φ, il le reste par $\varphi_1 = \sigma_1 \circ \varphi$.
On peut donc affirmer que $\mathcal{E}_1 \subsetneq \mathcal{E}_0$ (par contraposition), donc $N_1 < N_0$.

Si $N_1 = 0$, c'est que $\mathcal{E}_1$ est vide, donc tous les $\overrightarrow{e_i}$ sont invariants par φ_1, et $\varphi_1 = \mathrm{id}_{\vec{E}}$, donc $\sigma_1 \circ \varphi = \mathrm{id}_{\vec{E}}$ et $\varphi = \sigma_1$ (on a composé à gauche par $\sigma_1^{-1} = \sigma_1$). Dans ce cas, on a prouvé que φ est la composée d'une seule réflexion vectorielle (c'est une réflexion vectorielle).

Si $N_1 \neq 0$, c'est que $\mathcal{E}_1$ est non vide, donc on choisit un élément $k_1 = \max \mathcal{E}_1$, et comme on avait $k_0 = k =\notin \mathcal{E}_1$, on est sûr que $k_1 \neq k_0$.

4° Lorsque $N_1 \neq 0$ (avec les notations du 3°), on recommence le raisonnement en l'appliquant à φ_1, on construit $\varphi_2 = \sigma_2 \circ \varphi_1$ qui laisse invariants strictement plus de points que φ_1, on définit de façon analogue $\mathcal{E}_2$, N_2 et si $N_2 \neq 0$ on choisit k_2 dans $\mathcal{E}_2$. N_2 est tel que $N_2 < N_1$. On construit ainsi une suite strictement décroissantes d'entiers positifs donc forcément au bout de m étapes, avec $m \leqslant n$ (puisque $N_0 \leqslant n$), on obtient $N_m = 0$. Cela signifie que l'ensemble $\mathcal{E}_m$ est vide, donc que $\varphi_m = \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$ et puisque $\varphi_j = \sigma_j \circ \varphi_{j-1}$, de proche en proche on obtient $\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}} = \varphi_m = \sigma_m \circ \cdots \circ \sigma_1 \circ \varphi$, donc $\varphi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_m$.

Exercice 5.8. Une première condition nécessaire évidente pour que $t = s_{H_1} \circ s_{H_2}$ est que $H_1 /\!/ H_2$. En effet la partie linéaire de t doit vérifier

$$\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}} = L(t) = L(s_{H_1} \circ s_{H_2}) = L(s_{H_1}) \circ L(s_{H_2}) = \sigma_{\overrightarrow{H_1}} \circ \sigma_{\overrightarrow{H_2}}.$$

Puisque les réflexions sont involutives, on a donc nécessairement $\sigma_{\overrightarrow{H_1}} = \sigma_{\overrightarrow{H_2}}$, donc $\overrightarrow{H_1} = \overrightarrow{H_2}$.

Soient H_1 et H_2 deux hyperplans parallèles, de même direction $\overrightarrow{H}$. Cherchons des conditions nécessaires pour que $f = s_{H_1} \circ s_{H_2}$ soit égale à t. Tout d'abord, on est certain, en considérant sa partie linéaire, que f est une translation. Soit A un point de H_2 ; A est invariant par s_{H_2}, donc on a $f(A) = s_{H_1}(A) = A' = t_{\overrightarrow{u}}(A) = A + \overrightarrow{u}$. Mais $\overrightarrow{u} = A' - A = s_{H_1}(A) - s_{H_1}(A') = \sigma_{\overrightarrow{H}}(A - A') = -\sigma_{\overrightarrow{H}}(\overrightarrow{u})$, donc $\overrightarrow{u} = A' - A \in \overrightarrow{H}^{\perp}$ donc une condition nécessaire est que H_1 et H_2 soient orthogonaux à $\overrightarrow{u}$. Mais si H_2 passe par A, et si on a $s_{H_1}(A) = A'$, alors nécessairement, H_1 est le plan médiateur de $[AA']$, et H_1 passe par le milieu I de $[AA']$. Or $I = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$.
Finalement, on a obtenu les conditions nécessaires suivantes :
- $H_2 = A + \overrightarrow{u}^{\perp}$;
- $H_1 = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}^{\perp}$.

Sont-elles suffisantes ?
Soient H_1 et H_2 deux hyperplans parallèles, de même direction $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{u}^{\perp}$, et tels que si A est un point de H_2, alors H_1 passe par $I = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$. Montrons que $f = s_{H_1} \circ s_{H_2}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$:
f est une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$, comme on l'a vu plus haut, et l'image de A par f est $A + \overrightarrow{v} = A' = s_{H_1}(A)$ donc H_1 est le plan médiateur de $[AA']$ et H_1 passe par le milieu J de $[AA']$. Mais $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{H}^{\perp}$, donc $\overrightarrow{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$.
On a $J = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$, et I et J sont deux points de H_1, donc $J - I \in \overrightarrow{H}$. Or, $J - I = \frac{1}{2}(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) \in \overrightarrow{H}^{\perp}$, et la sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{H}^{\perp}$ sont supplémentaires, donc $J - I = \overrightarrow{0}$ et $J = I$, donc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}$, et f est bien la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Récapitulons : La translation $t = t_{\overrightarrow{u}}$ se décompose sous la forme $t = s_{H_1} \circ s_{H_2}$ où H_2 est un hyperplan de direction $\overrightarrow{u}^{\perp}$ et où H_1 est l'hyperplan parallèle à H_2 passant par le point $I = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$ où A est un point quelconque de H_2. Il n'y a donc pas unicité, puisqu'on peut prendre n'importe quel hyperplan H_2 (sous réserve qu'il soit bien orthogonal à $\overrightarrow{u}$). Mais une fois H_2 fixé, H_1 est alors complètement déterminé par le choix de H_2.

Remarquons qu'on pourrait aussi commencer par prendre n'importe quel hyperplan H_1 orthogonal à $\overrightarrow{u}$, il suffit ensuite de choisir un point B de H_1, le point $A = B - \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$, et l'hyperplan H_2 parallèle à H_1 et passant par A, car si on reprend le raisonnement précédent, le point $I = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$ n'est rien d'autre que le point B, et c'est bien H_1 qui est tel que $t = s_{H_1} \circ s_{H_2}$.

Exercice 5.9.

1° $\mathcal{I}_\Omega(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{I}(E)$:
Le produit de deux isométries laissant Ω fixe est une isométrie qui laisse Ω fixe, id_E laisse évidemment Ω fixe, et si f est une isométrie telle que $f(\Omega) = \Omega$, f^{-1} est aussi une isométrie et on a bien sûr $f^{-1}(\Omega) = \Omega$, donc $f^{-1} \in \mathcal{I}_\Omega(E)$.

2° Ce groupe est isomorphe à $\mathcal{O}(\overrightarrow{E})$:
Soit ℓ l'application qui associe à une isométrie $f \in \mathcal{I}_\Omega(E)$ sa partie linéaire $\ell(f) = \varphi$ (ℓ est la restriction à $\mathcal{I}_\Omega(E)$ de l'application $L \,:\, f \longmapsto L(f) = \overrightarrow{f}$ qui associe à une application affine sa partie linéaire).
— ℓ est un morphisme de groupe (on a vu que $L(g \circ f) = L(g) \circ L(f)$) de $\mathcal{I}_\Omega(E)$ vers $\mathcal{O}(\overrightarrow{E})$.
— ℓ est injective, car si $f \in \ker \ell$, c'est que la partie linéaire de f est $\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$, donc f est une translation, mais $f(\Omega) = \Omega$ (puisque $f \in \mathcal{I}_\Omega(E)$) et une translation qui admet un point fixe est l'identité : on a montré que le noyau de ℓ est réduit à id_E.
— ℓ est surjective, car pour toute isométrie vectorielle $\varphi \in \mathcal{O}(\overrightarrow{E})$, il existe une unique application affine f de E dans E qui admet φ comme partie linéaire, et qui est telle que $f(\Omega) = \Omega$, et f est une isométrie affine, puisque φ est une transformation orthogonale. Donc $f \in \mathcal{I}_\Omega(E)$ et $\ell(f) = \varphi$.
On a prouvé que ℓ est un isomorphisme de groupe entre $\mathcal{I}_\Omega(E)$ et $\mathcal{O}(\overrightarrow{E})$.

3° $\mathcal{I}(E)$ est le produit semi-direct de $\mathcal{I}_\Omega(E)$ par $\mathcal{T}(E)$:
On a vu que $\mathcal{T}(E)$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{I}(E)$.
Si $f \in \mathcal{T}(E) \cap \mathcal{I}_\Omega(E)$, f est une translation qui fixe un point (Ω), donc f est l'identité.
Enfin, soit f une isométrie quelconque de E. Soit $\Omega' = f(\Omega)$ et soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\Omega\Omega'}$.
On pose $g = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$, de sorte que $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$.
$t_{\overrightarrow{u}}$ est bien une translation, et g est une isométrie (composée de deux isométries) telle que $g(\Omega) = t_{-\overrightarrow{u}}(f(\Omega)) = \Omega' - \overrightarrow{u} = \Omega$, donc $\mathcal{I}(E) = \mathcal{T}(E)\mathcal{I}_\Omega(E)$.

Exercice 5.10. Si λ est une valeur propre de la transformation orthogonale φ, il existe un vecteur *non nul* $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$ tel que $\varphi(\overrightarrow{x}) = \lambda\overrightarrow{x}$. Mais φ est une isométrie vectorielle, donc $\|\varphi(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$. On a donc $\|\vec{x}\| = \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\ \|\vec{x}\|$. Comme $\vec{x}$ est non nul, on peut en déduire que $|\lambda| = 1$.

Exercice 5.11.

1° Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls orthogonaux d'un plan vectoriel euclidien orienté $\vec{E}$. Soient $\vec{u'} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\vec{v'} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. On doit trouver l'angle d'une rotation (forcément unique) qui envoie $\vec{u'}$ sur $\vec{v'}$.

Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, on peut affirmer que $(\vec{u'}, \vec{v'})$ est une base orthonormée de $\vec{E}$. Deux cas sont possibles :

- Si $(\vec{u'}, \vec{v'})$ est une base orthonormée *directe*, alors la rotation $\rho_{\frac{\pi}{2}}$, de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $\rho_{\frac{\pi}{2}}(\vec{u'}) = \vec{v'}$, donc $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- Si $(\vec{u'}, \vec{v'})$ est une base orthonormée *indirecte*, alors $(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = (\vec{u'}, -\vec{v'})$ est directe, et la rotation $\rho_{-\frac{\pi}{2}}$, de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $\rho_{-\frac{\pi}{2}}(\vec{e_1}) = -\vec{e_2}$, donc $\rho_{-\frac{\pi}{2}}(\vec{u'}) = -(-\vec{v'}) = \vec{v'}$, et donc $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2° Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan vectoriel orienté $\vec{E}$ tel que $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soient $\vec{u'} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\vec{v'} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. $\vec{u'}$ est un vecteur normé, il existe donc un vecteur $\vec{w}$ qui complète $\vec{u'}$ en une base orthonormée $(\vec{u'}, \vec{w})$, et quitte à changer $\vec{w}$ en son opposé, on peut toujours supposer que $\mathcal{B} = (\vec{u'}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe.
Supposons d'abord que $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Cela signifie que la rotation $\rho_{\frac{\pi}{2}}$ est telle que $\rho_{\frac{\pi}{2}}(\vec{u'}) = \vec{v'}$. Mais la matrice de $\rho_{\frac{\pi}{2}}$ dans la base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{u'}, \vec{w})$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui signifie (en utilisant la première colonne de cette matrice) que $\rho_{\frac{\pi}{2}}(\vec{u'}) = \vec{w}$, donc on a $\vec{v'} = \vec{w}$, et comme $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u'}$, on a $\vec{v'} \cdot \vec{u'} = 0$ et de même, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
Supposons maintenant que $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
On fait le même raisonnement, en utilisant $\rho_{-\frac{\pi}{2}}$, dont la matrice dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, donc on a $\rho_{-\frac{\pi}{2}}(\vec{u'}) = \vec{v'} = -\vec{w}$, et on peut aussi conclure de la même manière que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 5.12.

1° a) Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur unitaire de D.
On a donc $\vec{D} =< \vec{u} >$ et $D = \Omega+ < \vec{u} >$.

Soit $\overrightarrow{u'} = \rho_{-\frac{\theta}{2}}(\overrightarrow{u})$. On a donc $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})} = -\frac{\theta}{2}[2\pi]$, de sorte que $D' = \Omega + < \overrightarrow{u'} >$ est la droite passant par Ω telle que $\widehat{(D, D')} = -\frac{\theta}{2}[\pi]$.
Soient $\rho, \sigma_{\overrightarrow{D}}, \sigma_{\overrightarrow{D'}}$ les parties linéaires respectives de $r, s_D, s_{D'}$. Il est clair que Ω est un point fixe commun de $r, s_D, s_{D'}$, donc aussi de $s_D \circ s_{D'}$, donc pour établir que $r = s_D \circ s_{D'}$, il suffit de travailler sur les parties linéaires et de montrer qu'on a $\rho = \sigma_{\overrightarrow{D}} \circ \sigma_{\overrightarrow{D'}}$.
Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur unitaire qui complète $\overrightarrow{u}$ en une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $\overrightarrow{P}$. Il suffit de comparer dans cette base la matrice de ρ et celle de $\sigma_{\overrightarrow{D}} \circ \sigma_{\overrightarrow{D'}}$
Puisque r est une rotation affine d'angle θ, ρ est une rotation vectorielle d'angle θ, donc dans une base orthonormée directe, la matrice de ρ est $\mathrm{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
Puisque $\overrightarrow{u}$ dirige D, c'est un vecteur invariant par $\sigma_{\overrightarrow{D}}$, donc la matrice de cette réflexion vectorielle est $\mathrm{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (sa première colonne est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on complète en tenant compte de la forme générale des matrices des réflexions vectorielles). D'autre part, puisque le vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$ de D' fait un angle $-\frac{\theta}{2}$ avec le premier vecteur $\overrightarrow{u}$ de la base $\mathcal{B}$, la matrice de $\sigma_{\overrightarrow{D'}}$ est donc, dans cette base,

$$\mathrm{S}_2 = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & -\cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

(on utilise la description qu'on a faite p. 121).
Donc $\sigma_{\overrightarrow{D}} \circ \sigma_{\overrightarrow{D'}}$ a pour matrice

$$\mathrm{S}_1\, \mathrm{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \mathrm{R}_\theta,$$

et on a donc bien $\rho = s_{\overrightarrow{D}} \circ s_{\overrightarrow{D'}}$ et $r = s_D \circ s_{D'}$.

1° b) Si Δ est une droite telle que $r = s_D \circ s_\Delta$, on a en composant à gauche par s_D (qui est involutive comme toutes les symétries) : $s_D \circ r = s_\Delta$.
Mais on peut faire le même calcul à partir de $r = s_D \circ s_{D'}$: on a aussi $s_{D'} = s_D \circ r$.
Donc $s_\Delta = s_{D'}$, et l'ensemble des points invariants de cette symétrie est le même : $\Delta = D'$.

1° c) On peut raisonner de la même façon :

Soit $\overrightarrow{u''} = \rho_{\frac{\theta}{2}}(\overrightarrow{u})$; c'est un vecteur unitaire tel que $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u''})} = \frac{\theta}{2}[2\pi]$, et la droite $D'' = \Omega + < \overrightarrow{u''} >$ passe par Ω et est telle que $\widehat{(D, D'')} = \frac{\theta}{2}[\pi]$.
Montrons, en comparant leurs parties linéaires, qu'on a $r = s_{D''} \circ s_D$.
On utilise toujours la même base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, et il est clair que la matrice de la partie linéaire $\sigma_{\overrightarrow{D''}}$ de $s_{D''}$ est $\mathrm{S}_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. On calcule

alors $S_3S_1 = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = R_\theta$, donc on a bien $\sigma_{\overrightarrow{D''}} \circ \sigma_{\overrightarrow{D}} = \rho$ et comme Ω est point fixe de ces trois isométries, on en déduit $s_{D''} \circ s_D = r$. On a montré l'existence de D''.
Pour montrer l'unicité, on considère une droite Δ telle que $s_\Delta \circ s_D = r$. On compose à droite par s_D et on obtient $s_\Delta = r \circ s_D$, et on fait de même pour obtenir $s_{D''} = r \circ s_D$, donc $s_\Delta = s_{D''}$ et $\Delta = D''$.

2° Comme s_D et $s_{D'}$ sont deux antidéplacements, $r = s_{D'} \circ s_D$ est un déplacement qui ne peut être une translation puisque $D \not\parallel D'$, donc c'est une rotation.
Puisque D et D' sont sécantes, soit Ω leur point d'intersection. Il est clair que Ω est invariant par $r = s_{D'} \circ s_D$, on peut affirmer que Ω est le centre de la rotation r. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire directeur de D, et soit $\overrightarrow{u'}$ un vecteur unitaire directeur de D'. Soit $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}})$. Soit r' la rotation de centre Ω, d'angle $\theta = 2\alpha[2\pi]$. En utilisant 1°, pour la droite fixée D, l'unique droite D'_1 telle que $r' = s_{D'_1} \circ s_D$ passe par Ω, et est dirigée par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u'_1}$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'_1}}) = \frac{\theta}{2} = \alpha[\pi]$, donc $\overrightarrow{u'_1} = \overrightarrow{u'}$, et $D'_1 = D'$, et enfin $r = s_{D'} \circ s_D = s_{D'_1} \circ s_D = r'$, donc r est la rotation de centre Ω, d'angle $2\alpha = 2(\widehat{D, D'})[2\pi]$.

Exercice 5.13.

1° $f \ : \ \begin{cases} x' = \ \ \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1 \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y. \end{cases}$

f est une application affine, car ses formules analytiques sont de la forme $X' = AX + X_0$, avec $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ coordonnées dans $\mathcal{R}$ d'un point M, $X_0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ coordonnées dans $\mathcal{R}$ de $O' = f(O)$, $X' = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ coordonnées dans $\mathcal{R}$ de $M' = f(M)$, et $A = \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ matrice de la partie linéaire φ de f, dans la base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A est une matrice orthogonale (ses colonnes sont normées : $(\frac{4}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2 = 1$ et orthogonales) et symétrique, donc A est la matrice d'une réflexion orthogonale. f est donc soit une réflexion, soit une réflexion glissée, selon qu'elle possède ou non des points fixes.

Déterminons d'abord les éléments de φ : c'est une réflexion par rapport à $\overrightarrow{\Delta} = \overrightarrow{E}_1$, ensemble des vecteurs fixes de φ, caractérisé par $\begin{cases} \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y = x \\ -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y = y \end{cases} \iff x + 2y = 0$, donc $\overrightarrow{\Delta} = < \overrightarrow{u} >$ avec $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ (un vecteur directeur normé de Δ est $\overrightarrow{u'} = \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$, de coordonnées $\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$.

Revenons maintenant à f ; on est sûr qu'il existe une unique réflexion s_Δ (avec Δ dirigée par $\overrightarrow{\Delta}$) et une unique translation $t_{\overrightarrow{v}}$ (avec $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\Delta}$) tels que $f = s_\Delta \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ s_\Delta$. f est une réflexion lorsque $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, une réflexion glissée sinon.

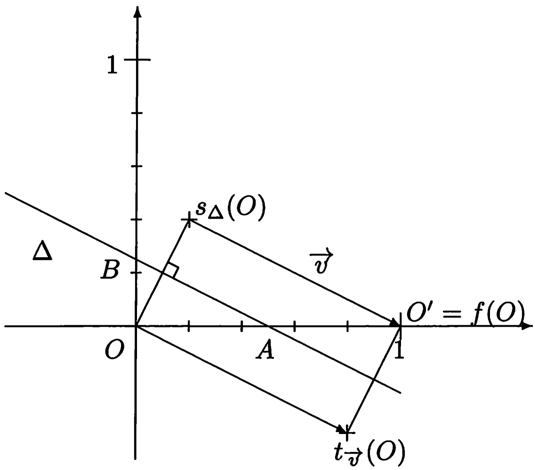
Pour déterminer rapidement la nature et les éléments de f, on étudie $f \circ f$: en effet, on a forcément $f \circ f = t_{\overrightarrow{v}} \circ s_\Delta \circ s_\Delta \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{2\overrightarrow{v}}$. Il suffit donc de déterminer l'image par $f \circ f$ d'un point pour être éclairé sur la valeur de $\overrightarrow{v}$. Le point le plus simple est ici, comme souvent, le point O. On connaît $O' = f(O)$, déterminons $O'' = f(O') = f \circ f(O) = t_{2\overrightarrow{v}}(O) = O + 2\overrightarrow{v}$: il suffit de remplacer (x, y) par $(1, 0)$ dans les formules analytiques de f, on obtient $O'' \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \neq O$ donc $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$ et f est donc une réflexion glissée. Remarquons que $\overrightarrow{v}$ est bien colinéaire à $\overrightarrow{u}$, on à $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\Delta}$.

Reste à déterminer la droite Δ ; pour cela, on sait que $s_\Delta = t_{-\overrightarrow{v}} \circ f$, donc on obtient les formules analytiques de s_Δ en ajoutant à chaque ligne les coordonnées de $-\overrightarrow{v}$; ce sont $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1 - \frac{4}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}. \end{cases} \iff \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{1}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}. \end{cases}$

Δ est l'ensemble des points fixes de s_Δ, donc est caractérisée par

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{1}{5} \\ y = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}. \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y = \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5}x + \frac{8}{5}y = \frac{2}{5} \end{cases} \iff 2x + 4y = 1.$$

Donc Δ : $2x + 4y = 1$ passe par $A(\frac{1}{2}, 0)$ et $B(0, \frac{1}{4})$ et est dirigée par $\overrightarrow{u}$.



Conclusion :

f est la réflexion glissée $s_\Delta \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ s_\Delta$ avec $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$ et

$\Delta = A + < \overrightarrow{v} > = A + < \overrightarrow{u} >$ d'équation $2x + 4y = 1$ et qui passe par $A(\frac{1}{2}, 0)$.

2° $g : \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}y + x + 1). \end{cases} \iff \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases}$

g est une application affine caractérisée par des formules du type $X' = \mathrm{A}X + X_0$ (mêmes conventions que pour f).

La matrice de la partie linéaire $\overrightarrow{g}$ de g est $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$
donc $\overrightarrow{g}$ est la rotation vectorielle $\rho_{\frac{\pi}{6}}$, et g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$. Le centre de g est son unique point fixe qu'on détermine en résolvant le système

$$X = \mathrm{A}X + X_0 \iff \begin{cases} (\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)x - \frac{1}{2}y = -2 \\ \frac{1}{2}x + (\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système, forcément non nul vaut

$$\Delta = (\cos\frac{\pi}{6} - 1)^2 + \sin^2\frac{\pi}{6} = 2 - 2\cos\frac{\pi}{6} = 2 - \sqrt{3}.$$

La solution de ce système est (méthode de Kramer) le couple $(x, y) = (\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta})$ avec
$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{vmatrix} = -\sqrt{3} + 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} - \sqrt{3}$, et
$\Delta_y = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$
Donc le centre de g est le point $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ avec
$x_\Omega = \dfrac{\frac{7}{4} - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \dfrac{(\frac{7}{4} - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ et
$y_\Omega = \dfrac{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{2 - \sqrt{3}} = \dfrac{(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4})(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = \dfrac{9}{4} + \sqrt{3}.$

Exercice 5.14.

1° Puisqu'on suppose dans cette question que $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{\Delta}$, Δ est un hyperplan orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et donc, d'après le résultat de l'exercice 5.8, il existe un hyperplan (donc, ici une droite) Δ', parallèle à Δ tel que $t = s_{\Delta'} \circ s_\Delta$, et il existe un hyperplan Δ'', parallèle à Δ tel que $t = s_\Delta \circ s_{\Delta''}$. (si $A \in \Delta$, Δ' passe par $I = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$ et Δ'' passe par $J = A - \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$).
On a donc $f = s \circ t = s_\Delta \circ (s_\Delta \circ s_{\Delta''}) = s_{\Delta''}$ et $g = t \circ s = (s_{\Delta'} \circ s_\Delta) \circ s_\Delta = s_{\Delta'}$ qui sont bien des réflexions.

2° Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ la décomposition de $\overrightarrow{u}$ selon la somme directe $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\Delta} \oplus \overrightarrow{\Delta}^\perp$: $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{\Delta}$ et $\overrightarrow{y} \in \overrightarrow{\Delta}^\perp$. Alors on a $t = t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{x}} \circ t_{\overrightarrow{y}} = t_{\overrightarrow{y}} \circ t_{\overrightarrow{x}}$.

On a donc $f = s \circ t = s_\Delta \circ t_{\vec{u}} = (s_\Delta \circ t_{\vec{y}}) \circ t_{\vec{x}}$. D'après la question précédente, puisque $\vec{y} \perp \Delta$, il existe une droite Δ_1 parallèle à Δ telle que $s_\Delta \circ t_{\vec{y}} = s_{\Delta_1}$. On a donc $f = s_{\Delta_1} \circ t_{\vec{x}}$, et comme $\vec{x} \in \vec{\Delta}$, f est une réflexion glissée d'axe Δ_1, de vecteur de glissement $\vec{x}$ (et on a $f = s_{\Delta_1} \circ t_{\vec{x}} = t_{\vec{x}} \circ s_{\Delta_1}$). Donc f ne peut être une réflexion que lorsque $\vec{x}$ est nul, c'est-à-dire lorsque $\vec{u} \in \vec{\Delta}^\perp$.

3° Avec les mêmes notations que dans la question précédente,

$$g = t \circ s = (t_{\vec{x}} \circ t_{\vec{y}}) \circ s_\Delta = t_{\vec{x}} \circ (t_{\vec{y}} \circ s_\Delta)$$

et puisque $\vec{y} \perp \Delta$, il existe une droite Δ_2 de direction $\vec{\Delta}$ telle que $t_{\vec{y}} \circ s_\Delta = s_{\Delta_2}$, donc $g = t_{\vec{x}} \circ s_{\Delta_2}$ est une symétrie glissée d'axe Δ_2, de vecteur de glissement $\vec{x} \in \vec{\Delta}$ et est telle que $g = t_{\vec{x}} \circ s_{\Delta_2} = s_{\Delta_2} \circ t_{\vec{x}}$. Donc g est une réflexion si et seulement si le vecteur de glissement $\vec{x}$ est nul, c'est-à-dire si et seulement si $\vec{u} \perp \Delta$.

Exercice 5.15.

1° **Formules analytiques de s_{D_1}** : Soit $M(x,y)$, d'image $M'(x',y')$ par s_{D_1}. Le milieu I de $[MM']$ appartient à D_1, donc on a $\dfrac{x+x'}{2} + 2\dfrac{y+y'}{2} - 1 = 0$.

D'autre par $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à D_1, donc colinéaire au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ qui est normal à D_1 : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y + 2\lambda. \end{cases}$

En combinant ces deux conditions, on obtient $(x + x + \lambda) + 2(y + y + 2\lambda) - 2 = 0$, donc $5\lambda = 2 - 2x - 4y$ et $\lambda = \dfrac{-2x - 4y + 2}{5}$. En reportant dans le système on obtient

$$\begin{cases} x' = x + \frac{-2x-4y+2}{5} \\ y' = y + 2\frac{-2x-4y+2}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{2}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{4}{5} \end{cases}$$

Vérification facultative, mais bien utile : on peut facilement sortir de ces formules la matrice de la partie linéaire de s_{D_1}, qui est $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ et il est facile de vérifier que c'est la matrice d'une réflexion vectorielle (de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$).

Formules analytiques de s_{D_2}

Même démarche et même notations, on a $\dfrac{x+x'}{2} + \dfrac{y+y'}{2} - 2 = 0$ et $\begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y + \lambda \end{cases}$

donc $2x + \lambda + 2y + \lambda = 4$ et $\lambda = 2 - x - y$, d'où $\begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = -x + 2. \end{cases}$

La matrice de la partie linéaire de s_{D_2} est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Formules analytiques de s_{D_3}

On a simultanément $3\dfrac{x+x'}{2}-\dfrac{y+y'}{2}=0$ et $\begin{cases} x'=x+3\lambda \\ y'=y-\lambda \end{cases}$, donc $6x+9\lambda-2y+\lambda=0$

et $\lambda=\dfrac{-3x+y}{5}$ donc en reportant, $\begin{cases} x'=x+3\frac{-3x+y}{5} \\ y'=y-\frac{-3x+y}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} x'=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y \\ y'=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y \end{cases}$

Matrice de la partie linéaire : $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

2° On peut déterminer les formules analytiques de f en combinant celles des s_{D_i}. Le plus sage, pour ne pas se tromper est de noter comme ceci :

$$M(x,y) \overset{s_{D_3}}{\longmapsto} M'(x',y') \overset{s_{D_2}}{\longmapsto} M''(x'',y'') \overset{s_{D_1}}{\longmapsto} M^*(x^*,y^*).$$

On a $\begin{cases} x'=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y \\ y'=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y \end{cases}$ $\begin{cases} x''=-y'+2 \\ y''=-x'+2. \end{cases}$ $\begin{cases} x^*=\frac{3}{5}x''-\frac{4}{5}y''+\frac{2}{5} \\ y^*=-\frac{4}{5}x''-\frac{3}{5}y''+\frac{4}{5} \end{cases}$

d'où, en combinant,

$\begin{cases} x''=-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2 \\ y''=\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x^*=\frac{3}{5}(-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2)-\frac{4}{5}(\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+2)+\frac{2}{5}=-x \\ y^*=-\frac{4}{5}(-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2)-\frac{3}{5}(\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+2)+\frac{4}{5}=y-2. \end{cases}$

Les formules analytiques de f sont donc $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y-2. \end{cases}$

La partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f admet comme matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est bien une réflexion vectorielle, (résultat prévisible, car f est un antidéplacement, comme composée de trois antidéplacements).

$\overrightarrow{f}$ est la réflexion vectorielle $\sigma_{\overrightarrow{\Delta}}$ avec $\overrightarrow{\Delta}=<\vec{\jmath}>$ (c'est à peu près évident car $\vec{\jmath}$ est visiblement un vecteur invariant de $\overrightarrow{f}$). Donc f est une réflexion ou une réflexion glissée, de toute façon de la forme $f=s_\Delta\circ t_{\vec{u}}=t_{\vec{u}}\circ s_\Delta$ avec s_Δ une réflexion d'axe Δ dirigé par $\overrightarrow{\Delta}$ et $\vec{u}\in\overrightarrow{\Delta}$ (f est une réflexion lorsque $\vec{u}=\vec{0}$).

On a $f\circ f=(t_{\vec{u}}\circ s_\Delta)\circ(s_\Delta\circ t_{\vec{u}})=t_{2\vec{u}}$.

Or, on a $f\circ f(O)=f(O')=O''=t_{2\vec{u}}(O)=O+2\vec{u}$ avec $O'(0,-2)$ et $O''(0,-4)$, donc $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Comme $t_{-\vec{u}}\circ f=s_\Delta$ est caractérisée par $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y, \end{cases}$

Δ est la droite $x=0$, donc c'est l'axe des ordonnées.

Finalement, f est la symétrie glissée $s_\Delta\circ t_{\vec{u}}=t_{\vec{u}}\circ s_\Delta$ avec $\Delta=O+<\vec{\jmath}>$ et $\vec{u}=-2\vec{\jmath}$.

3° a) Comme les droites D_2 et D_3 sont sécantes, $r=s_{D_2}\circ s_{D_3}$ est une rotation dont le centre est le point d'intersection Ω de D_2 et de D_3, et dont l'angle est $2(\widehat{D_3,D_2})[2\pi]$.

3° b) On a $f' = s_{D'_1} \circ s_{D_2} \circ s_{D_3} = s_{D'_1} \circ r$. Or, r est une rotation de centre Ω et D'_1 passe par Ω, donc, d'après la proposition 5.14 p. 125 (voir aussi l'exercice 5.12), il existe une unique droite Δ telle que $r = s_{D'_1} \circ s_\Delta$. C'est la droite qui est telle que $(\widehat{\Delta, D'_1}) = (\widehat{D_3, D_2})[\pi]$, donc on a $(\widehat{D'_1, \Delta}) = -(\widehat{D_3, D_2})[\pi]$.
On a donc $f' = s_{D'_1} \circ r = s_{D'_1} \circ (s_{D'_1} \circ s_\Delta) = s_\Delta$, donc f' est bien une réflexion.

3° c) On a $f = s_{D_1} \circ s_{D_2} \circ s_{D_3} = s_{D_1} \circ s_{D'_1} \circ s_{D'_1} \circ s_{D_2} \circ s_{D_3} = (s_{D_1} \circ s_{D'_1}) \circ f' = t_{\vec{v}} \circ s_\Delta$, avec $\vec{v}$ un vecteur non nul orthogonal à D_1, puisque les deux droites D_1 et D'_1 sont strictement parallèles.
f est donc la composée d'une translation $t_{\vec{v}}$ et d'une réflexion s_Δ. D'après le résultat de l'exercice 5.14, f est donc une réflexion glissée, sauf si le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal à Δ.
Mais le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal à D_1, donc s'il était aussi orthogonal à Δ, c'est qu'on aurait $D_1 /\!/ \Delta$ et $(\widehat{\Delta, D'_1}) = 0[\pi]$, mais c'est impossible puisque $(\widehat{\Delta, D'_1}) = (\widehat{D_3, D_2})[\pi]$ et parce que D_2 et D_3 sont sécantes par hypothèse.
Donc la composée de trois réflexions par rapport à des droites formant les côtés d'un vrai triangle est toujours une réflexion glissée.

4° a) La partie linéaire de g est $\vec{g} = \vec{f} \circ \vec{r} \circ \vec{f}^{\,-1}$; comme f et r sont des isométries, leurs parties linéaires sont des transformations orthogonales, donc $\vec{g}$ aussi, et g est donc une isométrie. Mais on a

$$\det(\vec{g}) = \det(\vec{f})\det(\vec{r})\det\left(\vec{f}^{\,-1}\right) = \det(\vec{f})\det(\vec{r})\left(\det \vec{f}\right)^{-1} = \det(\vec{r}) = 1,$$

donc g est un déplacement, et en dimension 2, g est une rotation. Comme $\vec{g}$ a la même trace que $\vec{r}$, g a le même angle que r, éventuellement au signe près, mais en tout cas non nul modulo 2π. g admet donc un unique point fixe.
Mais on a $g\big(f(\Omega)\big) = (f \circ r \circ f^{-1})\big(f(\Omega)\big) = f\big(r(\Omega)\big) = f(\Omega)$ puisque $r(\Omega) = \Omega$. Donc $f(\Omega)$ est l'unique point fixe de g, c'est bien son centre.

4° b) On a vu que $r = s_{D_2} \circ s_{D_3}$ est une rotation de centre Ω ; on applique le résultat de la question précédente avec $f = f^{-1} = s_{D_1}$ (une réflexion est involutive), donc $s_{D_1} \circ r \circ s_{D_1}$ est une rotation de centre $s_{D_1}(\Omega)$ (et d'angle $-2(\widehat{D_3, D_2})$, puisque f est un antidéplacement, donc inverse les angles.)

4° c) Si D_1, D_2, D_3 sont concourantes, Ω est un point de D_1, donc Ω est un point invariant par $s_{D_1} \circ s_{D_2} \circ s_{D_3}$, et cet antidéplacement qui admet au moins un point fixe est une réflexion.
Réciproquement, si $s_{D_1} \circ s_{D_2} \circ s_{D_3}$ est une réflexion s_Δ, alors on a, en composant à droite par s_{D_1}, on obtient : $s_{D_1} \circ s_{D_2} \circ s_{D_3} \circ s_{D_1} = s_\Delta \circ s_{D_1}$. D'après ce qui précède, le membre de gauche est une rotation de centre $\Omega' = s_{D_1}(\Omega)$; mais en observant le membre de droite, Ω' doit aussi être le point d'intersection de Δ et D_1. Donc on doit avoir $\Omega' \in D_1$, et donc $s_{D_1}(\Omega') = \Omega' \in D_1$. Mais $s_{D_1}(\Omega') = s_{D_1}\big(s_{D_1}(\Omega)\big) = \Omega$: on a prouvé que $\Omega \in D_1$, donc les trois droites sont concourantes.

Exercice 5.16.

1° Les colonnes de A sont normées (car $\dfrac{1^2+4^2+8^2}{9^2} = \dfrac{81}{81} = 1 = \dfrac{4^2+4^2+7^2}{81}$. Elles sont deux à deux orthogonales : $C_1C_2 = \dfrac{-8+16-8}{81} = 0$, $C_1C_3 = \dfrac{-32+28+4}{81} = 0$ et $C_2C_3 = \dfrac{4+28-32}{81} = 0$, donc la matrice A est orthogonale, et il en est de même de φ.

A n'est pas symétrique, donc ce n'est pas la matrice d'une symétrie.

On commence le calcul de $C_1 \wedge C_2$: sa première composante est $\begin{vmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \end{vmatrix}$ qui est visiblement négatif. Mais la première composante de C_3 est $-\frac{4}{9}$ qui est aussi négative, donc on aura $C_1 \wedge C_2 = +C_3$ et et A est donc la matrice d'une rotation.

Déterminons les éléments de la rotation φ. L'angle θ de φ est tel que $2\cos\theta + 1 = \mathrm{tr}\,(\mathrm{A}) = \frac{16}{9}$, donc $\theta = \pm\arccos(\frac{7}{18})$.

Pour déterminer l'axe de φ, nous utilisons la technique proposée dans le cours :

La partie antisymétrique de A est $\frac{1}{2}(\mathrm{A} - {}^t\mathrm{A}) = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 5 & 0 & 15 \\ 5 & -15 & 0 \end{pmatrix}$, elle est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$, avec $\alpha = -\frac{5}{6}$, $\beta = -\frac{5}{18}$ et $\gamma = \frac{5}{18}$, donc un vecteur directeur de l'axe $\overrightarrow{E}_1 = \overrightarrow{\Delta}$ de φ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{18} \\ \frac{5}{18} \end{pmatrix}$. En orientant $\overrightarrow{\Delta}$ avec ce vecteur, l'angle de la rotation est positif, et c'est donc $\theta = +\arccos(\frac{7}{18})$

On peut simplifier la définition de $\overrightarrow{\Delta}$ en multipliant son vecteur directeur par $\frac{18}{5} > 0$, donc $\overrightarrow{\Delta}$ est dirigé et orienté par $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si on veut un vecteur normé, on divise $\overrightarrow{v}$ par sa norme $\sqrt{11}$, et on trouve comme vecteur directeur unitaire de l'axe $\overrightarrow{\omega}\begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{11}} \\ -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$.

2° A est obtenue à partir de la matrice précédente en échangeant les deux dernières lignes et en multipliant par -1 la première ligne, et ces transformations ne changent évidemment pas le caractère orthogonal de la matrice, donc A est orthogonale.

A est symétrique, donc φ est une symétrie orthogonale ; comme $\mathrm{tr}(A) = -1$, φ est un demi-tour $\sigma_{\overrightarrow{\Delta}}$ (une symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta}$). $\overrightarrow{\Delta} = \overrightarrow{E}_1$ est l'ensemble des vecteurs invariants de φ (remarquons que la partie antisymétrique de A est nulle puisque A est symétrique, donc la méthode utilisée en 1° n'est pas applicable ici), mais il est un peu plus simple de déterminer $\overrightarrow{E}_{-1}$, le sous-espace propre associé à la valeur propre -1, car c'est un plan vectoriel, et le système $\varphi + \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}(X) = 0$ sera de rang 1 :

Le système caractérisant $\overrightarrow{E}_{-1}$ est (en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$)

$(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)X = 0 \iff \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y + 4z = 0$. C'est bien un plan vectoriel, orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ qui est donc un vecteur directeur de $\overrightarrow{\Delta}$.

Conclusion : φ est le demi-tour autour de $\overrightarrow{\Delta} = <\overrightarrow{u}>$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 4\overrightarrow{e_3}$.

3° A est aussi orthogonale comme les matrices précédentes ; A est symétrique, et sa trace vaut $+1$, donc A est la matrice d'une réflexion vectorielle, par rapport au plan vectoriel $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{E}_1$ formé des vecteurs invariants par φ, et caractérisé par

$$(\mathrm{A}-\mathrm{I}_3)X = 0 \iff \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{16}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + 4y + z = 0$$

φ est donc la réflexion vectorielle par rapport au plan $\overrightarrow{\Pi}\ :\ x + 4y + z = 0$.

4° Les colonnes de A sont clairement normées et deux à deux orthogonales. Le déterminant de A est -1 (calcul immédiat avec la règle de Sarrus). Donc A est la matrice d'une isométrie vectorielle négative. Comme A n'est pas symétrique, A est la matrice d'une antirotation α. La trace de A est nulle, donc l'angle θ de α est tel que $2\cos\theta - 1 = 0$, donc $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$. Pour déterminer l'axe de α, on peut utiliser la méthode de la partie antisymétrique :

$\frac{1}{2}(\mathrm{A} - {}^t\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. C'est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$, avec $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{2}$, donc un vecteur directeur de l'axe $\overrightarrow{E}_{-1} = \overrightarrow{\Delta}$ de φ est $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. En orientant $\overrightarrow{\Delta}$ avec ce vecteur, l'angle de la rotation est positif, et c'est donc $\theta = +\frac{\pi}{3}$

Conclusion : A est la matrice de l'antirotation α, d'axe $\overrightarrow{\Delta}$ dirigé et orienté par $2\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, d'angle $\frac{\pi}{3}$. C'est la composée $\alpha = \rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$ de la rotation ρ de même axe $\overrightarrow{\Delta}$, de même angle $\frac{\pi}{3}$ et de la réflexion σ par rapport au plan vectoriel $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{\Delta}^{\perp}$ (d'équation $x - y - z = 0$).

Exercice 5.17.

1° f est définie par $\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 1 \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ z' = \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z + 1 \end{cases}$

Ces formules sont les formules analytiques d'une application affine de E dans lui-même.

La partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f a pour matrice : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Cette matrice est-elle orthogonale ? (il vaudrait mieux, sinon, on ne saurait pas faire grand chose). Si on appelle C_1, C_2, C_3 ses colonnes, on s'aperçoit facilement que ces colonnes sont normées ($C_1^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ et $C_2^2 = C_3^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$) et deux à deux orthogonales ($C_1 \cdot C_2 = C_1 \cdot C_3 = \frac{-1+1}{2\sqrt{2}} = 0$ et $C_2 \cdot C_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$), donc A est bien une matrice orthogonale et $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle.

La première composante de $C_1 \wedge C_2$ est $\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$. Comme la première composante de C_3 est $-\frac{1}{2}$ c'est que $C_1 \wedge C_2 = -C_3$, donc A est une matrice orthogonale « négative ». Le déterminant de A vaut donc -1.

Donc $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle négative. Comme la matrice A de $\overrightarrow{f}$ n'est pas symétrique, $\overrightarrow{f}$ n'est pas une symétrie orthogonale, donc $\overrightarrow{f}$ est une antirotation.

Son angle θ est tel que $\mathrm{tr}\,(\mathrm{A}) = \frac{1}{2} = 2\cos\theta - 1$, donc $\cos\theta = \frac{3}{4}$ et $\theta = \pm \arccos\frac{3}{4}$.

L'axe de $\overrightarrow{f}$ se détermine facilement avec la technique de la partie antisymétrique :

$$\frac{1}{2}(\mathrm{A} - {}^t\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1+\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{1-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}-1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$. Un vecteur directeur de l'axe $\overrightarrow{\Delta} = < \overrightarrow{u} >$ de $\overrightarrow{f}$ est $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}+1}{4} \end{pmatrix}$, donc en orientant l'axe Δ de $\overrightarrow{f}$ avec le vecteur $\overrightarrow{u}$, l'angle est positif, et on a $\theta = + \arccos\frac{3}{4}$.

Puisque $\overrightarrow{f}$ est une antirotation, f est aussi une antirotation et admet un point fixe unique. Déterminons ce point fixe en résolvant le système $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ z = \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z + 1 \end{cases}$

En additionnant les deux premières équations, on trouve $y = (\sqrt{2}-1)x + 1$.

En additionnant la première équation multipliée par 2, et la troisième équation multipliée par $\sqrt{2}$, on trouve $2x + \sqrt{2}z = \sqrt{2}x - 2z + 2 + \sqrt{2}$, soit $(\sqrt{2}+2)z = (\sqrt{2}-2)x + (\sqrt{2}+2)$, et en divisant par $\sqrt{2}+2$, c'est-à-dire aussi en multipliant par $\frac{-\sqrt{2}+2}{2}$, on trouve $z = -\frac{1}{2}(\sqrt{2}-2)^2x + 1 = (2\sqrt{2}-3)x + 1$.

En reportant ces deux valeurs dans la première équation multipliée par 2, on obtient $2x = \sqrt{2}x - \sqrt{2}x + x - 1 - 2\sqrt{2}x + 3x - 1 + 2$, $(2\sqrt{2}-2)x = 0$ donc $x = 0$, puis $y = z = 1$.

L'unique point fixe de f est donc $\Omega(0,1,1)$, et f est l'antirotation de centre $\Omega(0,1,1)$ d'axe $\Delta = \Omega + \overrightarrow{\Delta} = \Omega + <\overrightarrow{u}>$ avec $4\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 2 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$ qui dirige et oriente Δ, d'angle $\theta = \arccos\frac{3}{4}$. Elle est formée avec la rotation r de même axe $\Delta = \Omega + \overrightarrow{\Delta}$, orienté de même par $4\overrightarrow{u}$, de même angle $\theta = \arccos\frac{3}{4}$, composée avec la réflexion s par rapport au plan $P = \Omega + \overrightarrow{\Delta}^{\perp}$ (P a pour équation $(\sqrt{2}-1)x + 2y + (\sqrt{2}+1)z = 3 + \sqrt{2}$) : $f = r \circ s = s \circ r$.

2° f est définie par $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 \\ y' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 1 \\ z' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} \end{cases}$

Ces formules sont les formules analytiques d'une application affine de E dans lui-même.

La partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f a pour matrice : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Il est aisé de vérifier que A est une matrice orthogonale (les colonnes sont normées car $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$, et visiblement deux à deux orthogonales).

A est symétrique, et sa trace vaut $+1$, donc A est donc la matrice d'une réflexion vectorielle.

$\overrightarrow{f}$ est la réflexion vectorielle par rapport à un plan vectoriel $\overrightarrow{\Pi}$ ensemble des points fixes de $\overrightarrow{f}$. On détermine une équation cartésienne de $\overrightarrow{\Pi}$ en cherchant les points fixes de $\overrightarrow{f}$, donc en résolvant le système (homogène !) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z \\ z = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \end{cases} \iff x - y - z = 0$

(les trois équations sont équivalentes, c'était prévisible !)

$\overrightarrow{\Pi}$ est le plan vectoriel orthogonal à $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

f est donc soit une réflexion, soit une réflexion glissée, selon que f admet ou n'admet pas de point fixe. Pour le savoir, on résout

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 1 \\ z = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y - 2z = -3 \\ -2x + 2y + 2z = 3 \\ -2x + 2y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Bien que les deux premières équations sont équivalentes, la troisième est incompatible, donc ce système n'a pas de solution, donc f n'est pas une réflexion, c'est une réflexion glissée.

On sait qu'il existe une unique réflexion $s = s_\Pi$ et une unique translation $t = t_{\overrightarrow{u}}$, telles que Π est dirigé par $\overrightarrow{\Pi}$, $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\Pi}$ et surtout telles que $f = s \circ t = t \circ s$. Pour déterminer t (la connaissance de t permet de déduire celle de s puisque $f = t \circ s$), on dispose de deux méthodes. La première consiste à appliquer la démarche constructive de la démonstration du théorème 5.11 p. 119 ; la deuxième méthode, plus facile à comprendre mais pas plus rapide, ne fonctionne que pour les symétries glissées, et utilise le caractère involutif d'une symétrie. Ensuite, la fin du raisonnement est la même.

Première méthode :

On a vu que si M est un point quelconque de E, avec $M' = f(M)$, $\overrightarrow{u}$ est la première composante de $\overrightarrow{MM'}$ dans la décomposition de $\overrightarrow{MM'}$ selon la somme directe $\overrightarrow{E} = \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$. Ici on sait que $\ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}) = \overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{N}^{\perp}$, et $\overrightarrow{u}$ est donc l'image par la projection orthogonale sur $\overrightarrow{\Pi}$ de $\overrightarrow{MM'}$. Au lieu de prendre n'importe quel point, on dispose toujours, dans ce genre de situation, du point O, dont l'image $O' = f(O)$ est particulièrement simple à déterminer : ses coordonnées sont les constantes des formules analytiques de f (ce que donnent ces formules quand on les applique au triplet $(0, 0, 0)$).

Donc $O' = (-1, 1, \frac{1}{3})$ et $\overrightarrow{OO'}\begin{pmatrix}-1\\1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. On calcule facilement le projeté orthogonal de ce vecteur sur $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{N}^{\perp}$ en appliquant la formule de la page p. 110 du cours (démontrée dans l'exercice 5.4) :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OO'} - \frac{\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{N}}{\overrightarrow{N}^2}\overrightarrow{N}.$$

On a $\overrightarrow{N}^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$ et $\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{N} = \begin{pmatrix}-1\\1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = -1 - 1 - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{7}{9}$

donc les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ sont

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}+\frac{7}{9}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{7}{9}\\-\frac{7}{9}\\-\frac{7}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{9}\\\frac{2}{9}\\-\frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

(*Remarquons que le projeté de* $\overrightarrow{OO'}$ *sur* $<\overrightarrow{N}>=\overrightarrow{\Pi}^{\perp}$ *est* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\frac{7}{9}\\-\frac{7}{9}\\-\frac{7}{9}\end{pmatrix}$ *et qu'il est pertinent de vérifier que* $\overrightarrow{u}^2+\overrightarrow{v}^2=\overrightarrow{OO'}^2$ *(Pythagore) : on a bien* $\frac{24}{81}+\frac{147}{81}=\frac{171}{81}=\frac{19}{9}$.
D'autre part, il est sage de vérifier que les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ *vérifient bien l'équation* $x-y-z=0$ *de* $\overrightarrow{\Pi}$ *: c'est bien le cas puisque* $-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=0$.)

Deuxième méthode :
On a $f=s\circ t=t\circ s$, donc $f\circ f=(t\circ s)\circ(s\circ t)=t\circ(s\circ s)\circ t$. Or, s est une symétrie, donc s est involutive, et on a $s\circ s=\mathrm{id}_E$, donc $f\circ f=t\circ t=t_{2\overrightarrow{u}}$.
Il suffit donc de déterminer l'image M'' par $f\circ f$ d'un point quelconque M pour trouver $2\overrightarrow{u}=\overrightarrow{MM''}$. Ici aussi, au lieu de prendre n'importe quel point, il suffit de prendre le point O. On connaît $O'=f(O)(-1,1,\frac{1}{3})$. Déterminons, à l'aide des formules analytiques de f, les coordonnées (x',y',z') de $O''=f(O')=f\circ f(O)$.

On a $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}\,(-1)+\frac{2}{3}\,1+\frac{2}{3}\,\frac{1}{3}-1\\ y'=\frac{2}{3}\,(-1)+\frac{1}{3}\,1-\frac{2}{3}\,\frac{1}{3}+1\\ z'=\frac{2}{3}\,(-1)-\frac{2}{3}\,1+\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\end{cases}$ donc $\begin{cases}x'=\frac{-3+6+2-9}{9}=-\frac{4}{9}\\ y'=\frac{-6+3-2+9}{9}=\frac{4}{9}\\ z'=\frac{-6-6+1+3}{9}=-\frac{8}{9}\end{cases}$

On en déduit que $\overrightarrow{OO''}\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\\frac{4}{9}\\-\frac{8}{9}\end{pmatrix}=2\overrightarrow{u}$ donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-\frac{2}{9}\\\frac{2}{9}\\-\frac{4}{9}\end{pmatrix}$.

On a retrouvé le même résultat.

Détermination de s :
On connaît maintenant $\overrightarrow{u}$, donc $t=t_{\overrightarrow{u}}$. Reste à déterminer Π, donc la réflexion s. Or, on sait que $f=t\circ s$, donc $s=t^{-1}\circ f=t_{-\overrightarrow{u}}\circ f$. On peut donc obtenir facilement les formules analytiques de s, en composant celles de f avec celles très simples de la translation $t_{-\overrightarrow{u}}$: $\begin{cases}x'=x+\frac{2}{9}\\ y'=y-\frac{2}{9}\\ z'=z+\frac{4}{9}\end{cases}$, et on obtient, comme formules analytiques de s :

$$\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-1+\frac{2}{9}\\ y'=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z+1-\frac{2}{9}\\ z'=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\end{cases}\iff\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-\frac{7}{9}\\ y'=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z+\frac{7}{9}\\ z'=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z+\frac{7}{9}\end{cases}$$

(*Remarquons que les constantes de cette formule sont exactement les coordonnées de* $\overrightarrow{v}$*, projeté orthogonal de* $\overrightarrow{OO'}$ *sur* $<\overrightarrow{N}>$*. C'est normal, car* $O'=s(O)+\overrightarrow{u}$*, et* *donc* $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{Os(O)} + \overrightarrow{u}$, *on retrouve la décomposition de* $\overrightarrow{OO'}$ *selon la somme directe* $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\Pi} \overset{\perp}{\oplus} < \overrightarrow{N} >$ *donc* $\overrightarrow{Os(O)} = \overrightarrow{v}$.)

Cette fois, ce sont les formules analytiques d'une réflexion, et on est sûr que s admet un ensemble de points fixes qui est le plan de la réflexion. Il suffit maintenant de déterminer cet ensemble de points fixes : on résout

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{7}{9} \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{7}{9} \\ z = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{7}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y - 2z = -\frac{7}{3} \\ -2x + 2y + 2z = \frac{7}{3} \\ -2x + 2y + 2z = \frac{7}{3} \end{cases} \iff 2x - 2y - 2z = -\frac{7}{3}$$

Cette fois les trois équations obtenues sont équivalentes ! Π est donc le plan d'équation $x - y - z = -\frac{7}{6}$, il est bien dirigé par $\overrightarrow{\Pi}$.

Conclusion : f est la réflexion glissée formé de la réflexion par rapport au plan $\Pi \ : \ x - y - z = -\frac{7}{6}$ composée (dans n'importe quel ordre) avec la translation de vecteur $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix} \in \overrightarrow{\Pi}$.

Le plan Π passe par le point $B(-\frac{7}{6}, 0, 0)$, et est orthogonal à $\overrightarrow{N} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3° f est définie par $\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + 4 \\ y' = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 2 \\ z' = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 2 \end{cases}$

Ces formules sont les formules analytiques d'une application affine de E dans lui-même. La partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f a pour matrice : $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. On remarque que $\mathrm{B} = -\mathrm{A}$, A étant la matrice de la question 2°. A est une matrice orthogonale, donc $\mathrm{B} = -\mathrm{A}$ aussi. B est symétrique, $\mathrm{tr}(B) = -1$, donc $\overrightarrow{f}$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle, un « demi-tour ». L'axe de $\overrightarrow{f}$ est l'ensemble $\overrightarrow{E}_1$ des vecteurs fixes de $\overrightarrow{f}$, mais il est sans doute plus simple de déterminer son orthogonal, qui est l'ensemble $\overrightarrow{E}_{-1}$ des vecteurs transformés en leur opposé (c'est un plan vectoriel). Pour déterminer cet ensemble, on résout

$$\begin{cases} -x = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \\ -y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ -z = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \end{cases} \iff -2x + 2y + 2z = 0 \iff x - y - z = 0$$

On retrouve l'équation du même plan vectoriel $\overrightarrow{\Pi}$ de la question précédente, et $\overrightarrow{f}$ est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta} = < \overrightarrow{N} > = \overrightarrow{\Pi}^{\perp}$, dirigée par $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

f est donc soit un demi-tour, soit un demi-tour glissé. Pour déterminer si on est dans un cas ou dans l'autre, on peut chercher l'ensemble des points fixes de f, mais ce n'est pas vraiment la peine : en s'inspirant de la deuxième méthode de la question précédente, on va simplement déterminer $O'' = f \circ f(O)$: si on trouve $O'' = O$, c'est que f est involutive (car alors, quel que soit M, $f \circ f(M) = O + \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = O + \overrightarrow{OM} = M$, puisque $\overrightarrow{f}$ est involutive) et donc f est une symétrie. Si on trouve $O'' \neq O$, on connaîtra par la même occasion le vecteur $\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OO''}$ de la translation t de « glissement » (telle que $f = s \circ t = t \circ s$, s étant une symétrie axiale, avec comme axe une droite Δ dirigée par $\overrightarrow{\Delta}$).

Ici, on a $f(O) = O'(4, 2, 2)$, donc les coordonnées (x', y', z') de $O'' = f(O')$ se trouvent grâce aux formules analytiques de f ; elles valent :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}\,4 - \frac{2}{3}\,2 - \frac{2}{3}\,2 + 4 = \frac{-4-4-4+12}{3} = 0 \\ y' = -\frac{2}{3}\,4 - \frac{1}{3}\,2 + \frac{2}{3}\,2 + 2 = \frac{-8-2+4+6}{3} = 0 \\ z' = -\frac{2}{3}\,4 + \frac{2}{3}\,2 - \frac{1}{3}\,2 + 2 = \frac{-8+4-2+6}{3} = 0 \end{cases}$$

Donc $O'' = O$ et f est une symétrie axiale, d'axe Δ, de direction $\overrightarrow{\Delta} =< \overrightarrow{N} >$, avec $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Pour déterminer complètement cet axe, il suffit de trouver un point invariant (c'est plus simple que de chercher analytiquement l'ensemble des points invariants). Or, on est sûr que le milieu I de (O, O') est transformé par f en le milieu de (O', O''), donc en lui-même, puisque $O'' = O$. Les coordonnées de I sont $(2, 1, 1)$, donc $\Delta = I + \overrightarrow{\Delta} = I + < \overrightarrow{N} >$. Une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

(On pourrait bien sûr appuyer Δ sur tout autre point invariant par f, par exemple $I' = I + \overrightarrow{u}$ de coordonnées $(3, 0, 0)$...)

4° f est définie par $\begin{cases} x' = \frac{1}{9}x + \frac{8}{9}y - \frac{4}{9}z - 1 \\ y' = \frac{8}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{4}{9}z - 2 \\ z' = \frac{4}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{7}{9}z + 3 \end{cases}$

Ces formules sont les formules analytiques d'une application affine de E dans lui-même.

La partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f a pour matrice : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix}$.

Cette matrice est orthogonale, car les colonnes sont normées $(1^2+8^2+4^2 = 1+64+16 =$

$81 = 9^2$ et $4^2+4^2+7^2 = 16+16+49 = 81 = 9^2$) et deux à deux orthogonales : $C_1C_2 = \frac{1}{81}(8+8-16) = 0$, $C_1C_3 = \frac{1}{81}(-4+32-28) = 0$, $C_2C_3 = \frac{1}{81}(-32+4+28) = 0$.

La première composante de $C_1 \wedge C_2$ est $\begin{vmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \end{vmatrix} < 0$, et la première composante de C_3 vaut $-\frac{4}{9}$ et est aussi négative : c'est que $C_1 \wedge C_2 = C_3$, donc que A est une matrice orthogonale « positive ». $\overrightarrow{f}$ est donc une isométrie vectorielle positive, et comme A n'est pas symétrique, $\overrightarrow{f}$ est une rotation vectorielle.

Déterminons les éléments de $\overrightarrow{f}$.

Soit θ l'angle de la rotation vectorielle $\overrightarrow{f}$. Comme $\operatorname{tr}(\mathrm{A}) = \frac{1+1-7}{9} = -\frac{5}{9} = 2\cos\theta + 1$, on a $\cos\theta = -\frac{7}{9}$, donc $\theta = \pm\arccos(-\frac{7}{9})$.

Déterminons la partie antisymétrique de A pour trouver l'axe de $\overrightarrow{f}$:

$\frac{1}{2}(\mathrm{A} - {}^t\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{9} \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & 0 \end{pmatrix}$. C'est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha = \beta = -\frac{4}{9}$ et $\gamma = 0$. L'axe $\overrightarrow{\Delta}$ de la rotation vectorielle $\overrightarrow{f}$ est donc dirigé par $\overrightarrow{u}' \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ 0 \end{pmatrix}$. En choisissant pour simplifier le vecteur $\overrightarrow{u} = -\frac{9}{4}\overrightarrow{u}'$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on change l'orientation de $\overrightarrow{\Delta}$, donc l'angle est alors négatif :

En résumé, $\overrightarrow{f}$ est la rotation d'axe $\overrightarrow{\Delta}$ dirigé et orienté par $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$, d'angle $\theta = -\arccos(-\frac{7}{9})$.

f est donc soit une rotation, soit un vissage, sous la forme $f = t \circ r = r \circ t$, avec r rotation de même partie linéaire $\overrightarrow{f}$ que f, et $t = t_{\overrightarrow{v}}$ translation de vecteur $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\Delta}$. La décomposition $f = t \circ r = r \circ t$ est valable dans les deux cas, (avec $t = \mathrm{id}_E$ dans le cas d'une rotation), donc on cherche $\overrightarrow{v}$. On applique la démarche constructive de la démonstration du théorème 5.11 p. 119 (c'est seule méthode possible lorsque $\overrightarrow{f}$ n'est pas involutive), $\overrightarrow{v}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{OO'}$ (avec $O' = f(O)$, de coordonnées $(-1,-2,3)$) par la projection orthogonale sur $\overrightarrow{\Delta} =< \overrightarrow{u} >$. On a donc, en appliquant la formule de la page p. 110 du cours (démontrée dans l'exercice 5.4) : $\overrightarrow{v} = \dfrac{\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{u}$.

Or, $\overrightarrow{u}^2 = 2$ et $\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{u} = -1-2$, donc $\overrightarrow{v} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, f n'est pas une rotation mais un vissage. Déterminons maintenant l'axe de la rotation r telle que $f = t \circ r = r \circ t$ (on sait que cet axe est dirigé et orienté par $\overrightarrow{u}$ et on connaît son angle $\theta = -\arccos(-\frac{7}{9})$).

On a donc $r = t^{-1} \circ f$, donc on peut, en utilisant les formules analytiques très simples de $t^{-1} = t_{-\overrightarrow{v}}$ et en les composant avec celles de f, connaître les formules analytiques de r.

Les formules analytiques de t^{-1} sont $\begin{cases} x' = x + \frac{3}{2} \\ y' = y + \frac{3}{2} \\ z' = z \end{cases}$, donc celles de r sont

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{9}x + \frac{8}{9}y - \frac{4}{9}z - 1 + \frac{3}{2} \\ y' = \frac{8}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{4}{9}z - 2 + \frac{3}{2} \\ z' = \frac{4}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{7}{9}z + 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = \frac{1}{9}x + \frac{8}{9}y - \frac{4}{9}z + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{8}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{4}{9}z - \frac{1}{2} \\ z' = \frac{4}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{7}{9}z + 3 \end{cases}$$

Il suffit maintenant de trouver un point I invariant par r pour déterminer son axe $\Delta = I + \overrightarrow{\Delta} = I + < \overrightarrow{u} >$. Pour cela on cherche un triplet (x, y, z) solution de

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9}x + \frac{8}{9}y - \frac{4}{9}z + \frac{1}{2} \\ y = \frac{8}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{4}{9}z - \frac{1}{2} \\ z = \frac{4}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{7}{9}z + 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 16x - 16y + 8z = 9 \\ -16x + 16y - 8z = -9 \\ 4x - 4y - 16z = -27 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + \frac{1}{2}z = \frac{9}{16} \\ x - y - 4z = -\frac{27}{4} \end{cases}$$

En soustrayant ces deux équations, on trouve $\frac{9}{2}z = \frac{117}{16}$, donc $z = \frac{13}{8}$ et en reportant dans la première équation, on trouve $x - y = \frac{9}{16} - \frac{13}{16} = -\frac{1}{4}$. Un point invariant est donc par exemple le point $I(0, \frac{1}{4}, \frac{13}{8})$. Il est sage de le vérifier, en calculant les coordonnées (x', y', z') de $f(I)$: on a

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{9}\,0 + \frac{8}{9}\,\frac{1}{4} - \frac{4}{9}\,\frac{13}{8} + \frac{1}{2} = \frac{4-13+9}{18} = 0 \\ y' = \frac{8}{9}\,0 + \frac{1}{9}\,\frac{1}{4} + \frac{4}{9}\,\frac{13}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1+26-18}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \\ z' = \frac{4}{9}\,0 - \frac{4}{9}\,\frac{1}{4} - \frac{7}{9}\,\frac{13}{8} + 3 = \frac{-8-91+216}{72} = \frac{117}{72} = \frac{13}{8} \end{cases}$$

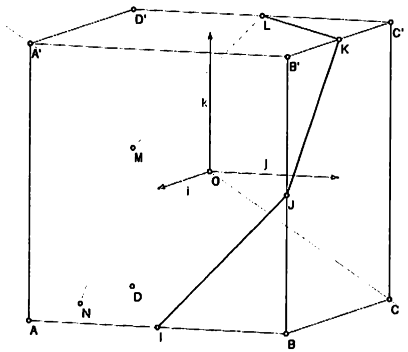
Conclusion : f est donc le vissage formé par la rotation r d'axe Δ passant par $I(0, \frac{1}{4}, \frac{13}{8})$, dirigé et orienté par $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, d'angle $-\arccos(-\frac{7}{9})$ composée dans n'importe quel ordre avec la translation $t = t_{\overrightarrow{v}}$ avec $\overrightarrow{v} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{u}$.

Exercice 5.18.

1° Puisqu'une application affine est entièrement déterminée par la donnée des images des points d'un repère affine, il suffit de vérifier que (O, A, B, B') est un repère affine, ce qui est équivalent au fait que $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'})$ est un repère cartésien ; or, les vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'})$ forment une base car le déterminant de leurs coordonnées est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Donc (O, A, B, B') est bien un repère affine.



2° Il suffit de vérifier que f conserve les distances entre les points du repère affine.

On vérifie aisément que :
$f(O)f(A) = OB = \sqrt{3} = OA$; $f(O)f(B) = OB' = \sqrt{3} = OB$;
$f(O)f(B') = OC' = \sqrt{3} = OB'$; $f(A)f(B) = BB' = 2 = AB$;
$f(B)f(B') = B'C' = 2 = BB'$ et $f(A)f(B') = BC' = 2\sqrt{2} = AB'$.
f est bien une isométrie.

3° Grâce au fait que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{j}$, $\overrightarrow{BB'} = 2\vec{k}$ et $\overrightarrow{B'C'} = -2\vec{i}$, on a déjà pas mal de renseignement sur les images par φ des vecteurs de la base.
Puisque $\varphi(\overrightarrow{AB}) = f(B) - f(A) = \overrightarrow{BB'}$, on a $\varphi(2\vec{j}) = 2\vec{k}$, donc $\varphi(\vec{j}) = \vec{k}$.
De même, comme $\varphi(\overrightarrow{BB'}) = f(B') - f(B) = \overrightarrow{B'C'}$, on a $\varphi(2\vec{k}) = -2\vec{i}$, donc $\varphi(\vec{k}) = -\vec{i}$.
On peut facilement déterminer l'image de C' par f, en remarquant que $\overrightarrow{OC'} = -\overrightarrow{OA}$, donc $\varphi(\overrightarrow{OC'}) = -\varphi(\overrightarrow{OA}) = -\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD'}$; on a donc $f(C') = D'$ et $\varphi(\overrightarrow{B'C'}) = \overrightarrow{C'D'}$, $\varphi(-2\vec{i}) = -2\vec{j}$ donc $\varphi(\vec{i}) = \vec{j}$, et on connaît maintenant complètement la matrice M de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule maintenant facilement les images des points de Γ, soit avec M, soit à l'aide de considérations géométriques. On trouve $f(D') = D$; $f(D) = A$; $f(A') = C$; $f(C) = A'$.
Un exemple de méthode de calcul :
$\overrightarrow{OD'} = -\overrightarrow{OB}$, donc $\varphi(\overrightarrow{OD'}) = -\varphi(\overrightarrow{OB}) = -\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OD}$, donc $f(D') = D$;

$\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB'}$, donc $\varphi(\overrightarrow{OD}) = -\varphi(\overrightarrow{OB'}) = -\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA}$, donc $f(D) = A$.

Les coordonnées de A' sont $(1, -1, 1)$, donc $\varphi(\overrightarrow{OA'})$ a pour coordonnées :

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\varphi(\overrightarrow{OA'}) = \overrightarrow{OC}$ et $f(A') = C$.

$\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA'}$, donc $\varphi(\overrightarrow{OC}) = -\varphi(\overrightarrow{OA'}) = -\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'}$, donc $f(C) = A'$.

Finalement, on a montré que f est une isométrie qui conserve globalement le cube Γ.

4° Déterminer la nature et les éléments de f.

On sait que f est une isométrie qui admet le point fixe O. Il suffit d'étudier sa partie linéaire φ, dont on connaît la matrice M. Comme M n'est pas symétrique, et comme clairement $\det(\mathrm{M}) = -1$, φ est une antirotation. La trace de M est nulle, donc son angle θ est tel que $2\cos\theta - 1 = 0$, donc $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et donc $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$; on a vu que $\varphi(\overrightarrow{OA'}) = -\overrightarrow{OA'}$, donc l'axe de φ est dirigé par $\overrightarrow{OA'}$. Il reste à orienter cet axe. La méthode de la partie antisymétrique permet d'éviter les calculs, et de choisir toujours un angle positif. Comme $\frac{1}{2}(\mathrm{M} - {}^t\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, on peut diriger et orienter l'axe de φ par $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On voit que $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA'}$ (c'est normal) et dans le même sens. On peut conclure que f est l'antirotation de centre O, d'axe $\Delta = (OA')$ orienté par $\overrightarrow{OA'}$, et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$. C'est la composée commutative de la rotation r de même angle et de même axe (avec la même orientation) avec la réflexion s_Π, le plan Π étant le plan orthogonal à $\overrightarrow{OA'}$ passant par O.

5° Tout d'abord, on peut déterminer l'image par f de ces six points. Il est tout à fait clair, grâce à la conservation des milieux par une application affine, que $f(I) = J$, $f(J) = K$, $f(K) = L$, $f(L) = M$, $f(M) = N$ et $f(N) = I$. (Par exemple, I est le milieu de $[AB]$, donc $f(I)$ est le milieu de $[f(A)f(B)] = [BB']$, donc $f(I) = J\ldots$)

Mais ces six points appartiennent au plan Π de la réflexion s_Π intervenant dans la décomposition $f = s_\Pi \circ r = r \circ s_\Pi$. Il y a deux façons de s'en convaincre : la première, c'est de faire le calcul de l'équation cartésienne de Π ; comme ce plan est perpendiculaire à $\overrightarrow{OA'}$, les composantes de ce vecteur donnent les coefficients de son équation cartésienne : une équation cartésienne de Π est donc $x - y + z = 0$ (puisque Π passe par O). Ensuite, on peut déterminer les coordonnées des six points et constater que ces coordonnées vérifient l'équation de Π.

L'autre méthode plus générale est d'utiliser la propriété suivante : si $f = s_\Pi \circ r = r \circ s_\Pi$ est la décomposition d'une antirotation, alors, pour tout point M, si $f(M) = M'$, alors le milieu I de $[MM']$ appartient à Π. Démontrons cette propriété.

On se place dans un repère dont l'origine est le centre de l'antirotation f, et le troisième vecteur dirige et oriente l'axe de l'antirotation. Le plan Π a pour équation $Z = 0$ dans un tel repère. Or la matrice de f dans ce repère est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ainsi, si $M(X, Y, Z)$, alors $M'(X', Y', Z')$ avec $X' = \cos\theta\, X - \sin\theta\, Y$, $Y' = \sin\theta\, X + \cos\theta\, Y$ et surtout $Z' = -Z$. Le milieu I de $[MM']$ a pour troisième coordonnée $Z_I = \frac{1}{2}(Z + Z') = \frac{1}{2}(Z - Z) = 0$, donc on a bien $I \in \Pi$.
Comme les points I, J, K, L, M, N sont chacun d'entre eux le le milieu d'un segment joignant un point et son image par f (par exemple, I est le milieu de $[Af(A)]\ldots$), ces six points sont bien des points de Π.
Comme $f = r \circ s_\Pi$, la restriction de f à Π coïncide avec la restriction de r à Π et comme Π est orthogonal à l'axe de la rotation r, $r_{|\Pi}$ est une rotation plane, de centre O ($O \in \Pi$, donc O est invariant par f, par r et par $r_{|\Pi}$), et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.
Les points I, J, K, L, M, N, coplanaires et images les uns des autres par une rotation plane d'angle $\frac{\pi}{3}$ sont donc bien les sommets d'un hexagone régulier.

6° s_O est une isométrie qui conserve globalement les sommets du cube, donc $f_1 = s_O \circ f$ et $f_2 = f \circ s_O$ sont aussi des isométries qui conservent globalement les sommets du cube. La partie linéaire de s_O est $-\mathrm{id}_{\vec{E}}$, qui commute avec toute application linéaire, donc les parties linéaires de ces deux isométries sont égales ; comme O est clairement un point invariant pour f_1 et pour f_2, ces deux applications affines ont même partie linéaire, et même image pour un point, elles sont donc égales. Nous n'étudierons donc que f_1.
Comme f et s_O sont deux isométries négatives, f_1 est une isométrie positive, et elle admet un point fixe O, donc c'est une rotation (ce ne peut pas être l'identité, sinon $f = s_O$, ce qui n'est pas le cas).
A' est aussi un point invariant de f_1 puisque $f_1(A') = s_O\big(f(A')\big) = s_O(C) = A'$, donc la droite (OA') est une droite invariante, c'est l'axe de la rotation f_1.
Pour finir de déterminer f_1, il suffit de voir l'aspect de f_1 pour un point. Nous choisirons un point du plan Π qui est orthogonal à l'axe, car la restriction de f_1 à Π est une rotation plane de même angle que f_1.
$f_1(I) = s_O \circ f(I) = s_O(J) = M$.
Comme $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \frac{4\pi}{3}$ (pour l'orientation qui faisait que $r_{|\Pi}$ avait un angle de $\frac{\pi}{3}$, donc pour (OA') orientée de O vers A'), donc f_1 est la rotation d'axe la droite (OA'), orientée par $\overrightarrow{OA'}$, d'angle $\frac{4\pi}{3}$ (ou $-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$).

CHAPITRE 6

6. Solutions des exercices sur les coniques

Exercice 6.1.

1° Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation $x^2 + y^2 - 2xy - 6x - 10y + 9 = 0$.
Déterminons un repère orthonormal dans lequel l'équation est réduite.
La matrice de la forme quadratique principale Q associée à $\mathcal{C}$ est dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, O)$ de $\widehat{e}$ est : $\widetilde{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -5 \\ -3 & -5 & 9 \end{pmatrix}$. On ne va pas essayer de diagonaliser cette matrice, ni chercher ses valeurs propres $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_3$; mais on peut repérer que son déterminant vaut $-16 = \mu_1\mu_2\mu_3$, donc ses trois valeurs propres réelles sont soit toutes trois négatives, soit il y en a une négative et deux positives ; mais comme sa trace est $11 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 > 0$, donc les trois valeurs propres ne peuvent être toutes négatives, et donc la signature de Q est $(2, 1)$: on est sûr que la conique $\mathcal{C}$ est non dégénérée.
La matrice de la forme quadratique secondaire q associée à $\mathcal{C}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\overrightarrow{E}$ est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Les valeurs propres de cette matrice sont 0 et -2 et on peut affirmer que $\mathcal{C}$ est une parabole.

Un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre 0 est $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre 2 est $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

La matrice de passage de la base initiale à la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et la matrice de la forme quadratique dans la nouvelle base est $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Notons (x', y') les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Les formules de changement de repère (de $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ vers $(O, \vec{u}, \vec{v})$) sont :

$$(8)\ \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{cases}$$

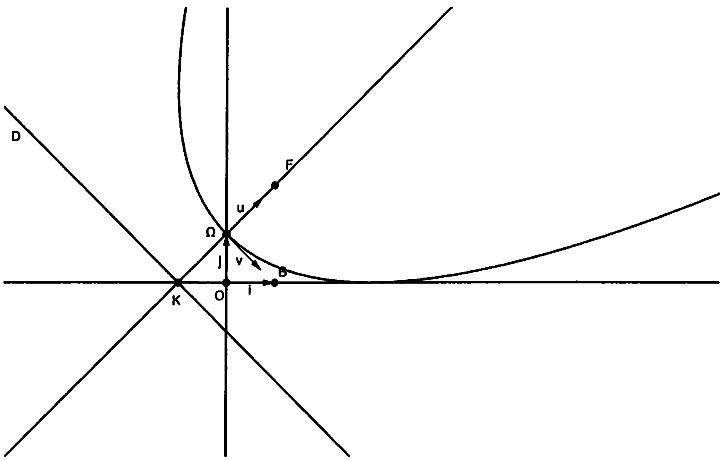
Si on avait besoin de les inverser, ce serait particulièrement facile dans la mesure où l'inverse d'une matrice orthogonale est sa transposée (et ici, en plus la matrice de passage est symétrique).
L'équation de la conique s'écrit dans ce nouveau repère est :
$2y'^2 - 6(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y') - 10(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y') + 9 = 0$.
Cette équation se réduit à $y'^2 - 4\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' + \frac{9}{2} = 0$; pour finir de simplifier, on compacte le terme $\sqrt{2}y'$ avec le y'^2 en posant $Y = y' + \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc $Y^2 = y'^2 + \sqrt{2}\,y' + \frac{1}{2}$,

puis on fait rentrer ce qui reste de constante ($\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$) dans la variable X en posant en posant $X = x' - \frac{4}{4\sqrt{2}} = x' - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Nous utilisons donc en fait les formules

$$(9)\ \begin{cases} x' = X + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y' = Y - \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Ce sont des formules de changement de repère par *translation*, de $(O,\vec{u},\vec{v})$ vers $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$, avec Ω qui a pour coordonnées (dans $(O,\vec{u},\vec{v})$) : $x'_\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y'_\Omega = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Ω est le sommet de la parabole ; il est intéressant de connaître ses coordonnées dans le repère initial $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$: il suffit d'appliquer les formules de changement de repère (8) vues plus haut qu'on n'a toujours pas besoin d'inverser ; elles nous donnent : $x_\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$ et $y_\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$.
Finalement l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ est : $Y^2 = 4\sqrt{2}X$
C'est l'équation réduite dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ d'une parabole de paramètre $p = 2\sqrt{2}$.
En combinant les deux formules de changement de repère (8) et (8), on obtient les formules de changement de variable du repère initial $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ vers le repère dans lequel l'équation de la conique est réduite $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + \frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(Y - \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + \frac{1}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{\sqrt{2}}(Y - \frac{1}{\sqrt{2}}), \end{cases} \quad \text{soit } (10) \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y + 1 \end{cases}$$



Le foyer F de la parabole est le point de coordonnée $(\frac{p}{2},0) = (\sqrt{2},0)$ dans le nouveau repère et la droite D a pour équation $X = -\frac{p}{2}$ soit $X = -\sqrt{2}$ dans le nouveau repère.
Dans le repère initial, F a pour coordonnées $(x_F, y_F) = (1,2)$ (on applique (10)) ; pour trouver l'équation de D dans le repère initial, on pourrait inverser (10), mais ici, ce n'est pas nécessaire : comme X est fixe et que Y décrit $\mathbb{R}$, les formules (10)

nous donnent une représentation paramétrique de D : $\begin{cases} x = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}Y + 1, \end{cases}$, et on trouve une équation cartésienne en additionnant. $D : x + y = -1$.

2° a) $\mathcal{C} : x^2 - 2xy + y^2 + x + y + 1 = 0$ La matrice de la forme quadratique principale Q associée à cette équation est $\widetilde{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Ici aussi, le calcul du déterminant ($\det(\widetilde{\mathrm{M}}) = -1$) et de la trace ($\operatorname{tr}\left(\widetilde{\mathrm{M}}\right) = 3$) suffisent pour conclure que la conique est non dégénérée.

La matrice de la forme quadratique secondaire q de cette conique est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Cette matrice est de rang 1. Les valeurs propres associées sont 0 et 2, donc $\mathcal{C}$ est encore une parabole. Deux vecteurs propres unitaires sont respectivement $\vec{u}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $v(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

On raisonne comme précédemment (c'est le même premier changement de variable (8)). Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation devient $2y'^2 + \sqrt{2}x' + 1 = 0$, ce qui peut s'écrire $y'^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' - \frac{1}{\sqrt{2}})$.

On posera donc $Y = y'$ et $X = -x' - \frac{1}{\sqrt{2}}$, ou encore (11) $\begin{cases} x' = -X - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y' = Y. \end{cases}$

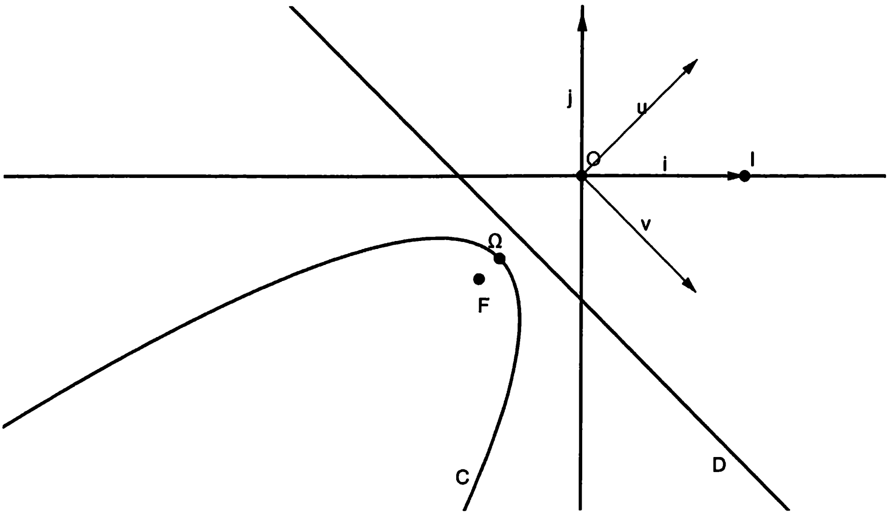
Cela revient à faire le changement de repère de $(O, \vec{u}, \vec{v})$ vers $(\Omega, -\vec{u}, \vec{v})$, avec $\Omega(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ (coordonnées dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$). Toujours grâce à (8), Ω a pour coordonnées $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ dans le repère initial.
L'équation de la courbe dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est $Y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}X$. La courbe est donc une parabole de paramètre $p = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Ceci détermine le foyer $F : (X_F, Y_F) = (\frac{1}{4\sqrt{2}}, 0)$ et la droite D d'équation $X = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$.
En combinant (8) et (11), on obtient les formules de changement de repère du repère initial vers le repère $(\Omega, -\vec{u}, \vec{v})$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X - \frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X - \frac{1}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{\sqrt{2}}Y, \end{cases} \quad \text{soit (12)} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Grâce à ces formules, on peut écrire dans le repère initial les éléments de $\mathcal{C}$:
$x_F = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2}$; $y_F = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2}$, donc $F(-\frac{5}{8}, -\frac{5}{8})$,

et la droite D a comme représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{1}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}Y - \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}Y - \frac{1}{2}, \end{cases}$

d'où, en additionnant ces deux équations pour éliminer Y, on trouve l'équation cartésienne $X + Y = -\frac{3}{4}$.



2° b) $\mathcal{C} : x^2 + 2xy + y^2 + x + y + 1 = 0$. La matrice de la forme quadratique principale Q associée à cette équation est $\widetilde{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Ses deux premières lignes sont confondues, donc son rang est 2. Cette conique est donc dégénérée.
Nous allons le vérifier en étudiant classiquement cette conique :
La matrice de la forme quadratique secondaire q de cette conique est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Cette matrice est de rang 1. Les valeurs propres associées sont 2 et 0. Deux vecteurs propres unitaires sont respectivement $\vec{u}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $v(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. On écrit facilement les formules de changement de repère $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{cases}$

L'équation devient dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$: $2x'^2 + \sqrt{2}x' + 1 = 0$
Le discriminant du trinôme est négatif, la conique est non seulement dégénérée, mais en plus elle est vide.
En fait, avec un tout petit peu de sens de l'observation, on pouvait s'en apercevoir dès le début, en écrivant l'équation initiale ainsi : $(x + y)^2 + (x + y) + 1 = 0$. En posant $Z = x + y$, il est clair qu'il n'y a pas de réel Z tel que $Z^2 + Z + 1 = 0$, c'était de loin la méthode la plus efficace.

2° c) $\mathcal{C} : x^2 + xy + y^2 + x + y = 0$. La matrice de la forme quadratique principale Q associée à cette équation est $\widetilde{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Ici aussi, le calcul du déterminant

($\det(M) = -\frac{1}{4}$) et de la trace ($\mathrm{tr}(M) = 2$) suffisent pour conclure que la conique est non dégénérée.

La matrice de la forme quadratique secondaire q de cette conique est $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres associées sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$: elles sont toutes deux positives, donc on sait déjà que $\mathcal{C}$ est une ellipse. Les vecteurs propres unitaires correspondants sont respectivement $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. (Ce n'est pas un hasard si on prend toujours à peu près les mêmes vecteurs : c'est parce que les formes quadratiques secondaires q associées aux coniques de cet exercice sont symétriques en x et y).

Les formules de changement de repère sont : (13) $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{cases}$

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation devient $\frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 + \sqrt{2}\,y' = 0$. On réduit cette équation :

$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}(y'^2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}\,y') = 0 \iff \frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}(y' + \frac{\sqrt{2}}{3})^2 = \frac{3}{2}\,\frac{2}{9} = \frac{1}{3}$.

On fait un dernier changement de variable par translation : (14) $\begin{cases} x' = X \\ y' = Y - \frac{\sqrt{2}}{3}. \end{cases}$

On se place donc dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ avec Ω qui a pour coordonnées dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$: $x'_\Omega = 0$, $y'_\Omega = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Nous déterminerons les coordonnées de Ω dans le repère initial à l'aide d'une autre méthode.

L'équation de $\mathcal{C}$ s'écrit donc : $\frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}Y^2 = \frac{1}{3}$; il ne reste plus qu'à diviser par $\frac{1}{3}$ pour obtenir la forme réduite :

$\frac{3}{2}X^2 + \frac{9}{2}Y^2 = 1 \iff \dfrac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} + \dfrac{Y^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = 1.$

Cette équation est bien réduite sous la forme $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, avec $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ et $b = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Notons qu'on a bien $a > b$ et que l'axe focal est bien l'axe des X. Remarquons au passage l'intérêt de prendre comme premier vecteur de la nouvelle base le vecteur propre de la plus petite des deux valeurs propres lorsque les deux valeurs propres sont positives. Cela évite d'avoir à faire un dernier changement de repère pour échanger les deux vecteurs de base.

Ici, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{2}{3}$. L'excentricité de l'ellipse est $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, un foyer est le point $F(X_F, Y_F) = (c, 0) = (\frac{2}{3}, 0)$ et la directrice associée est la droite D d'équation $X = \frac{a^2}{c} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 1$.

Combinons (13) et (14) pour avoir les coordonnées de F et l'équation de D dans le repère initial. Cela donne $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}(Y - \frac{\sqrt{2}}{3}) \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}(Y - \frac{\sqrt{2}}{3}), \end{cases}$ soit (15) $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y - \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y - \frac{1}{3}. \end{cases}$

Ces formules nous donnent déjà les coordonnées de Ω dans le repère initial : c'est

$(x_\Omega, y_\Omega) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, à cause de la forme générale de formules de changement de repère.

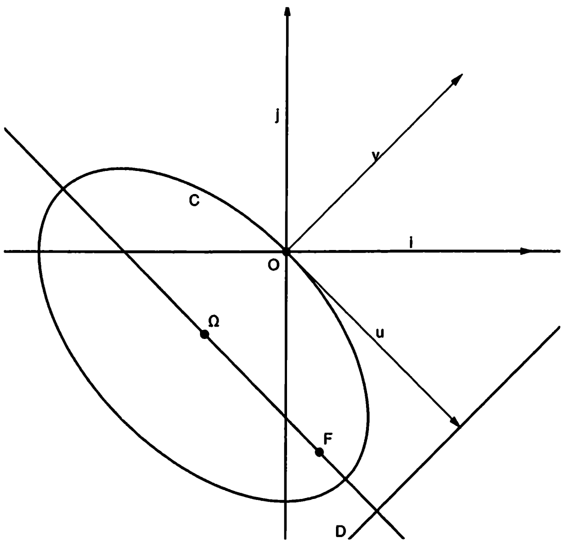
En les appliquant à F, on trouve ses coordonnées dans le repère initial :

$(x_F, y_F) = (\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}) \simeq (0{,}138, -0{,}805)$.

Une représentation paramétrique de la droite D est, dans le repère initial :

$$\begin{cases} x = [\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}Y. \end{cases}$$

On en obtient une équation cartésienne en éliminant Y, en soustrayant ces deux équations : $x - y = -\sqrt{2}$.



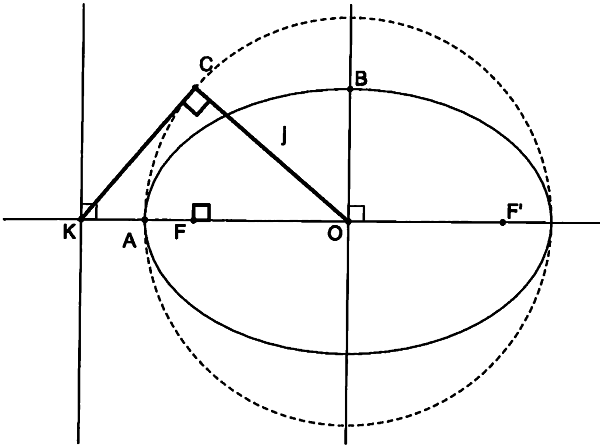
Exercice 6.2.

1° Le centre O de l'ellipse est le milieu de $[FF']$.

On peut toujours supposer que A et F sont du même côté de O sur la droite (FF') (sinon, on remplace F par F' dans le raisonnement qui suit).

On note $c = OF$ et $a = OA$. L'excentricité de l'ellipse est nécessairement $e = \dfrac{c}{a}$. La directrice associée au foyer F est la droite perpendiculaire à la droite (FF') passant par le point K vérifiant $OK = \dfrac{a^2}{c}$ et K est situé du même côté de O que F et A. L'ellipse est donc entièrement déterminée.

2°



Traçons une tangente au cercle principal de l'ellipse issue de K et appelons C le point de contact. Montrons que le projeté orthogonal H de C sur la droite (FF') est le point F.
Le triangle KCO est rectangle en C. D'après les relations dans le triangle rectangle : $OC^2 = OH \cdot OK$. Or $OC = a$, $OK = \dfrac{a^2}{c}$. On en déduit que $OH = c$, les points H et F sont donc confondus.

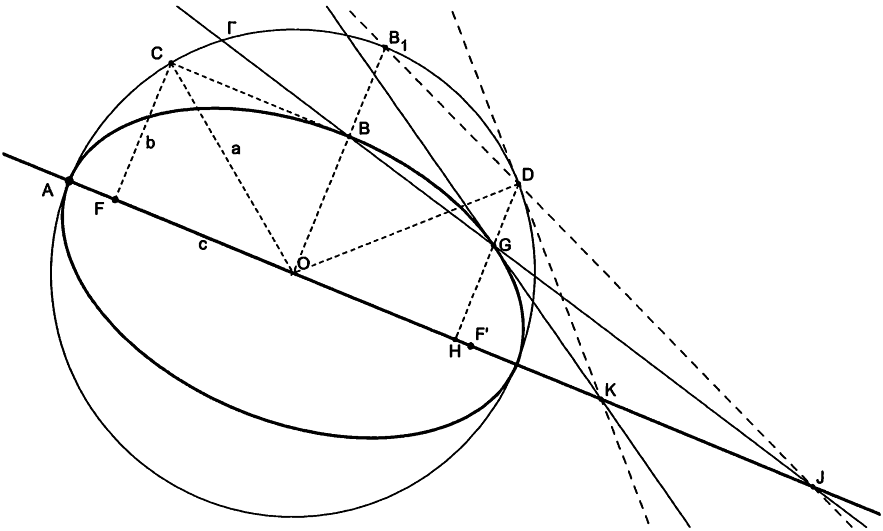
3° Montrons que l'ellipse est l'image du cercle principal par l'affinité orthogonale de base (FF') et de rapport $\frac{b}{a}$, c'est-à-dire l'application affine f dont les formules analytiques sont, (dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $\vec{\imath} = \dfrac{\overrightarrow{OF}}{\|\overrightarrow{OF}\|}$) : $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{b}{a}\, y. \end{cases}$
En effet, tout point $M(x, y)$ du cercle principal vérifie $x^2 + y^2 = a^2$, cette relation caractérise le cercle principal $\mathcal{C}$.
Si $M'(x', y')$ est l'image de M par f, on a

$$\begin{aligned} M' \in \mathcal{E} &\iff \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{b}{a}\, y\right)^2}{b^2} = 1 \\ &\iff x^2 + y^2 = a^2 \iff M \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

Donc on a bien $f(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$.

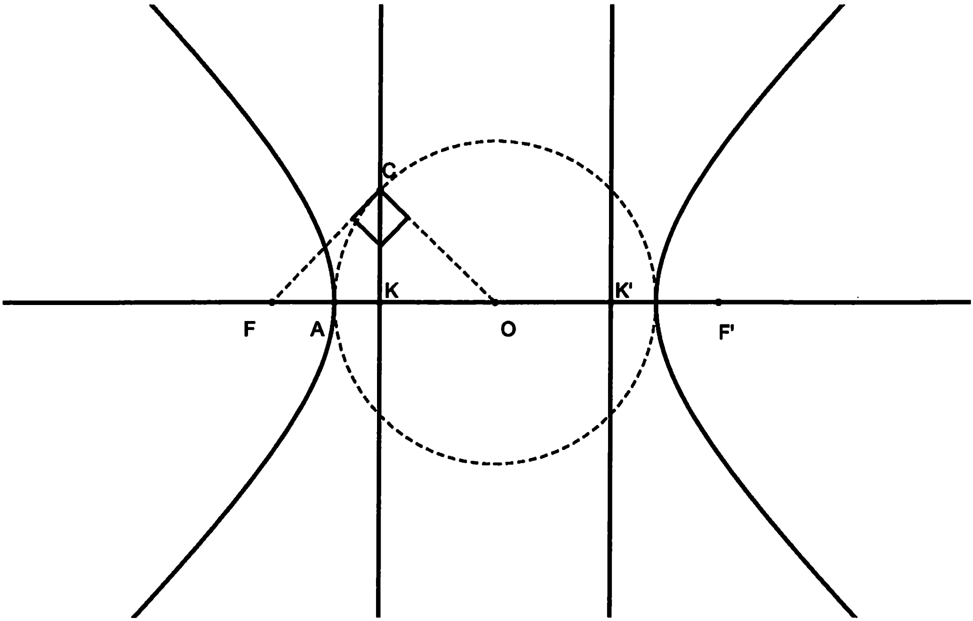
4° Connaissant les deux foyers F et F', nous pouvons placer le milieu O de $[FF']$, puis connaissant un des sommets A de l'ellipse, nous pouvons tracer le cercle principal Γ de l'ellipse (de centre O et de rayon OA). Soit B_1 un des deux points du cercle Γ situé sur l'axe non principal de l'ellipse, c'est-à-dire la perpendiculaire à l'axe focal passant par le centre O.
Soit C l'un des deux points du cercle principal (on prendra celui sur le même demi-cercle que B) qui se projette orthogonalement en F sur la droite (FF'). La distance

CF vérifie d'après le théorème de Pythagore : $CF^2 = OA^2 - OH^2 = a^2 - c^2 = b^2$. Nous pouvons donc placer (en construisant un rectangle $OFCB$) le point B, un des points d'intersection de l'ellipse avec l'axe non principal.
$\frac{\overline{OB}}{\overline{OB_1}} = \frac{b}{a}$. Ces points sont donc placés dans le rapport de l'affinité qui transforme le cercle en l'ellipse.
Soit D un point quelconque du cercle principal, on trace la droite $(B_1D) = \Delta$, qui coupe l'axe focal en J. L'image de cette droite Δ par l'application affine f est une droite Δ', qui passe par B. Le point J, étant élément de l'axe focal, est invariant par f. Donc $\Delta' = (BJ)$. On trouve donc l'image G de D à l'intersection de (BJ) avec la perpendiculaire à l'axe focal qui passe par D. G est un point de l'ellipse $\mathcal{E}$.



On peut construire ainsi autant de points de $\mathcal{E}$ que l'on veut.
Si on veut la tangente au point G par exemple, on construit la tangente T au point D, qui est la perpendiculaire à (OD) passant par D ; soit K le point d'intersection de cette tangente avec l'axe focal. L'image de (KD) par f sera la tangente à l'ellipse en $f(D)$, c'est-à-dire en G (par conservation du contact).

Exercice 6.3.
1° Comme dans l'exercice précédent, on peut déterminer le centre O de l'hyperbole qui est le milieu de $[FF']$. Nous supposerons que A est le sommet de l'hyperbole qui est plus près de F que de F'.
Avec les notations du cours, la forme réduite de l'équation de l'hyperbole dans un repère orthonormal est unique et s'écrit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, où $a = OA$, $c = OF$ et $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Tous les termes de l'équation sont déterminés, l'hyperbole est donc entièrement déterminée.



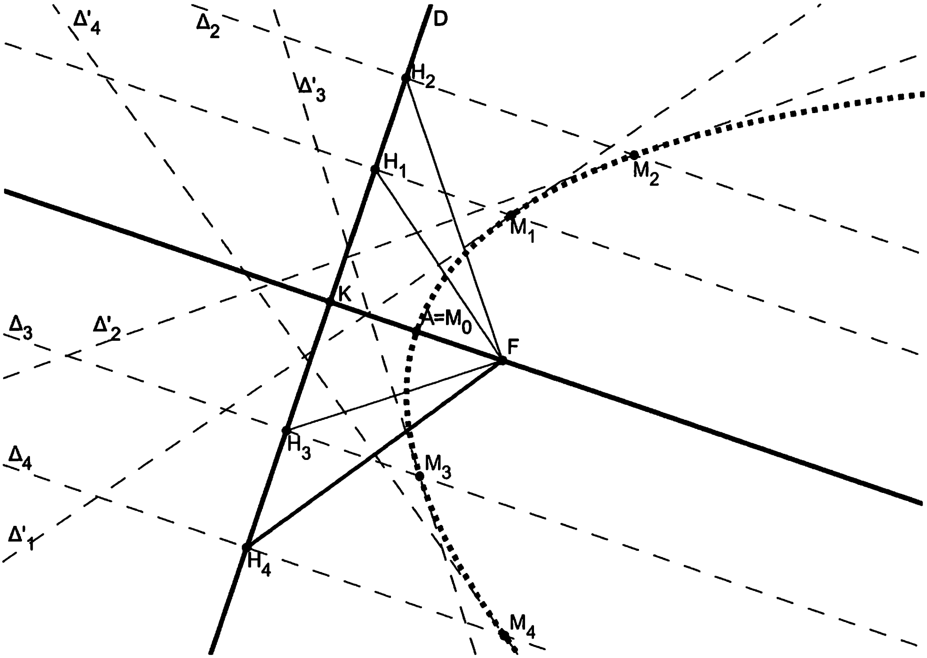
2° Comme précédemment, nous allons considérer pour une hyperbole $\mathcal{H}$ donnée, définie par son excentricité, et un couple (F, D), un point C de contact d'une tangente au cercle transverse issue de F. Appelons H le projeté orthogonal de C sur la droite (FF').
Le triangle OCF est rectangle, on en déduit comme dans l'exercice précédent (relation dans un triangle rectangle) que $OC^2 = OH.OF$ donc $OH = \frac{a^2}{c}$. H est donc confondu avec K, le point H est le « pied » de la directrice D.

3° Les asymptotes à l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sont les droites d'équation $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.
Le point C déterminé à la question précédente a pour abscisse $x = \frac{a^2}{c}$; comme il est sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$, son ordonnée est $y = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{c^2}} = \frac{ab}{c}$. Ses coordonnées vérifient donc l'équation $y = \frac{b}{a}x$.

Exercice 6.4.
1° L'axe focal de la parabole est la droite (AF). Le pied de la directrice est le symétrique K de F par rapport à A. La directrice est alors la droite D orthogonale à la droite (AF) en K. L'excentricité est 1 puisque c'est une parabole. La parabole qui est l'ensemble des points équidistants de F et de D est donc entièrement déterminée.

2° On commence par construire K et la directrice D comme décrit ci-dessus. On fait varier un point H sur la droite D. Le point de la parabole dont il est le projeté est un

point de la perpendiculaire Δ en H à D. De plus, comme ce point est équidistant de H et de F, il est sur la médiatrice Δ' de $[HF]$.
Lorsque H parcourt D, la parabole est le lieu décrit par le point d'intersection des droites Δ et Δ'.



Exercice 6.5.
1° Nous avons vu une solution géométrique, dans l'espace projectif, à ce problème, au § **6.3.5**, (p. 145). Mais voici une solution algébrique très convaincante elle aussi.

Lorsqu'on cherche analytiquement l'intersection entre une droite et une conique, on écrit le système formé par l'équation cartésienne de la conique et une équation cartésienne de la droite. On peut toujours exprimer une des variables en fonction de l'autre dans l'équation linéaire caractérisant la droite. En reportant cette valeur dans l'équation de la conique, on est amené à résoudre une équation du second degré en x ou en y.
Cette équation à zéro, une ou deux solutions. L'intersection peut donc être vide, réduite à un point ou être un ensemble de deux points distincts.

2° Soit $\mathcal{C}$ une conique d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2}+\varepsilon\dfrac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormal.
Il est classique, en calcul différentiel, que la tangente en un point $M_0(x_0, y_0)$ à une

courbe d'équation $\varphi(x,y)=0$ admet pour équation cartésienne

$$(x-x_0)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$$

On applique cette règle avec $\varphi(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\varepsilon\dfrac{y^2}{b^2}-1$.
On a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2x}{a^2}$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=\varepsilon\dfrac{2y}{b^2}$; la tangente en (x_0,y_0) admet donc comme équation :

$$(x-x_0)\frac{2x_0}{a^2}+(y-y_0)\varepsilon\frac{2y_0}{b^2}=0 \iff \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\varepsilon\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

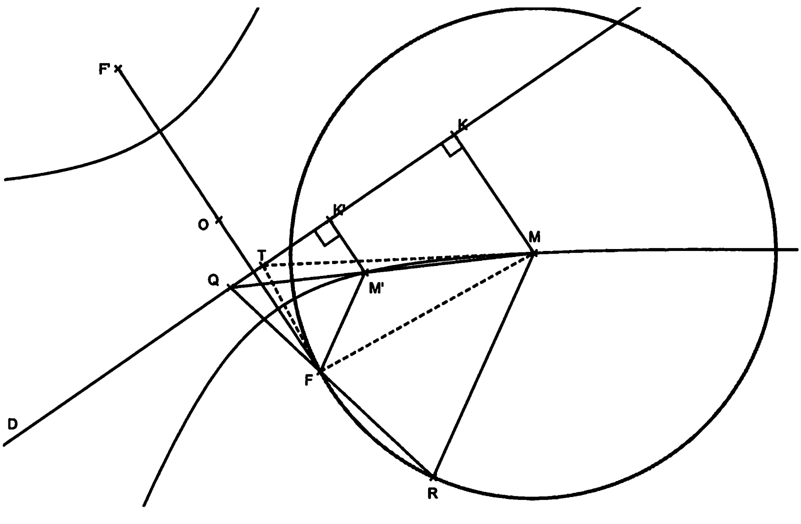
car $M_0\in\mathcal{C}$.

3° Soit $\mathcal{P}$ une parabole d'équation réduite $y^2=2px$ dans un repère orthonormal. Montrer que la tangente à $\mathcal{P}$ au point M_0 a pour équation $yy_0=p(x+x_0)$.

Appliquons la même méthode avec $\varphi(x,y)=y^2-2px$. On a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=-2p$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=2y$. La tangente en un point $M_0(x_0,y_0)$ de $\mathcal{P}$ admet donc comme équation :

$$\begin{aligned}(x-x_0)(-2p)+(y-y_0)(2y_0)=0 &\iff -2px+2px_0+2yy_0-2y_0^2=0\\ &\iff -2px+2px_0+2yy_0=2y_0^2=4px_0 \iff yy_0=p(x+x_0).\end{aligned}$$

Exercice 6.6.



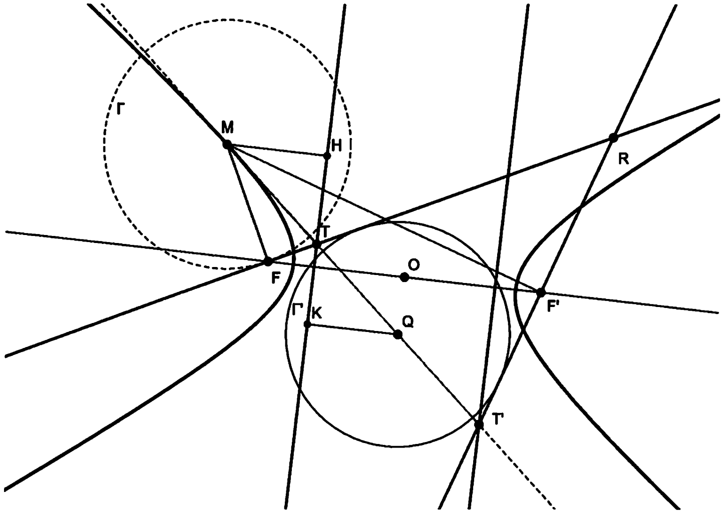
1° Le point Q étant extérieur à la conique, le rapport $\dfrac{\overline{QM'}}{\overline{QM}}$ est positif et donc $k = \dfrac{QM'}{QM} = \dfrac{\overline{QM'}}{\overline{QM}}$, donc $\overrightarrow{QM'} = k\overrightarrow{QM}$, ce qui signifie exactement que $h(M) = M'$.
L'image de K par l'homothétie est un point de la droite (QK). Cette image appartient à la parallèle à (MK) passant par M'. L'homothétie h transforme donc K en K'. On en déduit donc $\dfrac{M'Q}{MQ} = \dfrac{M'K'}{MK} = k$ (on pouvait aussi tout simplement utiliser le théorème de Thalès).

2° Les points M et M' sont sur la conique, donc $e = \dfrac{MF}{MK} = \dfrac{M'F}{M'K'}$, on en déduit que $\dfrac{M'F}{MF} = \dfrac{M'K'}{MK} = \dfrac{M'Q}{MQ}$.

L'image par h du cercle $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $h(M) = M'$ et de rayon $\dfrac{QM'}{QM} \cdot MF = \dfrac{M'F}{MF} \cdot MF = M'F$.
L'image de $\mathcal{C}$ est donc le cercle $\mathcal{C}'$ de centre M' qui passe par F.
Comme $\mathcal{C}$ passe par R et F, l'image des points R et F par h est donc des points du cercle $\mathcal{C}'$. Mais ce sont aussi des points de la droite (QF), qui est globalement invariante par h, puisqu'elle passe par le centre Q de l'homothétie h. Donc $h(R)$ et $h(F)$ sont les deux points d'intersection du cercle $\mathcal{C}'$ avec (QF) ; or un de ces points d'intersection est F, et il est impossible que $h(F)$ soit égal à F, car $k \neq 1$ (on a supposé $M \neq M'$. Donc c'est qu'on a $h(R) = F$ (et $h(F)$ est l'autre point d'intersection).
3° Lorsqu'on fait tendre le point M' vers le point M, la droite (QM) rencontre la conique en un point double, donc c'est la tangente en M. Le point Q tend donc vers le point T. Le rapport de l'homothétie devient 1 et le point R tend vers le point F. La droite (TF) rencontre alors le cercle $\mathcal{C}$ en un point double, elle est tangente au cercle en F. On en déduit que l'angle $\widehat{MTF}$ est droit.

Exercice 6.7.

1° Commençons par une figure.



Le cercle Γ de centre M et passant par F est transformé par h en un cercle Γ' de centre Q et de rayon $MF \cdot \dfrac{TQ}{TM}$.

Soit $k = \dfrac{TQ}{TM}$ le rapport de l'homothétie. On a $k = \dfrac{TQ}{TM} = \dfrac{QK}{MH}$ en notant K et H les projetés orthogonaux respectifs de Q et M sur Δ. On en déduit que le rayon du cercle image est $\dfrac{MF}{MH} \cdot KQ' = e.\mathrm{d}(Q, \Delta)$.

Comme (voir l'exercice précédent), le cercle Γ est tangent à la droite (FT) en F, le cercle image Γ' est tangent à la droite image de (FT). Comme (FT) est invariante par l'homothétie, le cercle Γ' est tangent à la droite (FT).

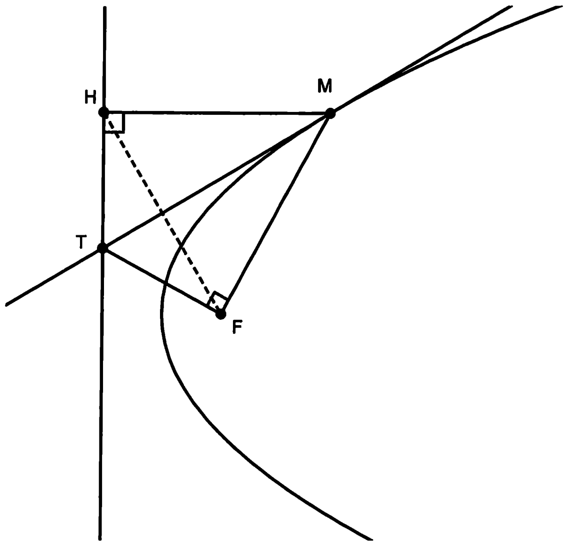
On peut reprendre le même raisonnement avec F' et Δ' pour montrer que le cercle précédent est aussi tangent à $(F'T')$. (on considère l'image du cercle de centre M et de rayon MF' par l'homothétie de centre T' qui envoie M en Q. Son image sera bien le cercle Γ' puisque il aura même centre et même rayon, le point Q étant équidistant des droites Δ et Δ').

2° Le cercle Γ' est tangent aux droites (RT) et (RT'), donc le point Q est équidistant des droites (RT) et (RT'). Ainsi, la droite (RQ) est bissectrice du triangle RTT'. De plus Q est le milieu de $[TT']$ par construction, donc la droite (RQ) est aussi médiane. La médiane et la bissectrice issues de R étant confondues, le triangle RTT' est isocèle en R.

3° Comparons les deux triangles rectangles MFT et $MF'T'$. Le triangle RTT' est isocèle, ses angles de base en T et T' sont égaux. On en déduit que les angles $\widehat{MTF}$

et $\widehat{MT'F'}$ sont égaux. On en déduit que, comme complémentaires d'angles égaux, les angles $\widehat{FMT}$ et $\widehat{TMF'}$ sont égaux. La droite (MT) est donc bissectrice des droites (MF) et (MF').

Exercice 6.8. $\mathcal{C}$ est une parabole de foyer F et de directrice D. Considérons un point M de $\mathcal{C}$ et son projeté orthogonal H sur D. La tangente en M rencontre la directrice en un point T.
Les triangles KMT et MFT sont rectangles, l'un en M et l'autre en T, d'après l'exercice 1.6.
De plus, la conique est une parabole, donc $MH = MF$. Ces deux triangles rectangles ont l'hypoténuse en commun, et deux côtés de même longueur, tous leurs côtés sont donc égaux. Ces triangles sont symétriques par rapport à la droite (MT) qui est donc la bissectrice en M du triangle KMF.



Certifié PEFC
Ce produit est issu de forêt gérées durablement et de sources contrôlées
www.pefc-france.org
PEFC/10-31-2007
BV/CdC/1702681

Achevé d'imprimer en août 2011 par EMD S.A.S. (France)
N° éditeur : 2011/681 - Dépôt légal : août 2011
N° d'imprimeur : 25277

Bruno Aebischer

Géométrie

Géométrie affine, géométrie euclidienne & introduction à la géométrie projective

Rédigé à l'attention des étudiants en troisième année de Licence, l'ouvrage présente l'ensemble du programme de géométrie avec un cours complet et 92 exercices d'application tous corrigés de manière très détaillée. Il traite des notions de géométrie affine et de géométrie euclidienne qui doivent être maîtrisées à ce niveau et propose une introduction à la géométrie projective. D'une lecture très accessible, ce manuel sera également utile aux candidats au CAPES et à l'Agrégation de mathématiques, pour qui la géométrie est indispensable.

Sommaire

Agrégé de mathématiques, **Bruno Aebischer** enseigne à l'UFR sciences et techniques de l'université de Franche-Comté. Il a été professeur en classes préparatoires puis a rejoint l'université en qualité de professeur agrégé de l'enseignement du second degré (PRAG). Il a participé durant plusieurs années au jury du CAPES de mathématiques.

ISBN 978-2-311-00276-8

9 782311 002768