Cours Probabilités élémentaires

Clément Rau
Laboratoire de Mathématiques de Toulouse
Université Paul Sabatier-IUT GEA Ponsan

Module: Proba 1er année

Introduction

Motivations :

- Modéliser des phénoménes aléatoires

Introduction

Motivations :

- Modéliser des phénoménes aléatoires
- Dire des choses en temps long sur des quantités moyennées.

Introduction

Motivations :

- Modéliser des phénoménes aléatoires
- Dire des choses en temps long sur des quantités moyennées. Objectifs à long terme :

Introduction

Motivations :

- Modéliser des phénoménes aléatoires
- Dire des choses en temps long sur des quantités moyennées. Objectifs à long terme :
  - Intervalles de confiance.

Introduction

Motivations :

- Modéliser des phénoménes aléatoires
- Dire des choses en temps long sur des quantités moyennées. Objectifs à long terme :
  - Intervalles de confiance.
  - Tests statistiques.

Définition :

C'est l'espace de toutes les issues possibles dans une experience aléatoire.

Définition :

C'est l'espace de toutes les issues possibles dans une experience aléatoire.

- L'espace des issues sera notée Ω.

Définition :

C’est l’espace de toutes les issues possibles dans une experience aléatoire.

- L’espace des issues sera notée Ω.
- Une issue dans Ω sera notée ω.

Définition :

C'est l'espace de toutes les issues possibles dans une experience aléatoire.

- L'espace des issues sera notée Ω.
- Une issue dans Ω sera notée ω.

Remarque : Il n' y a pas un seul ensemble Ω qui convient dans une expérience aléatoire. (cf ex)

Exemples :

- On lance un dè une fois et on note le numéro.

Exemples :

- On lance un dè une fois et on note le numéro.

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Exemples :

- On lance un dè une fois et on note le numéro.

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

- On lance un dè à 6 faces où la face 6 est remplacée par un deuxième 5.

Exemples :

- On lance un dè une fois et on note le numéro.

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

- On lance un dè à 6 faces où la face 6 est remplacée par un deuxième 5.

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Exemples :

- On lance un dè une fois et on note le numéro.
$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$
- On lance un dè à 6 faces où la face 6 est remplacée par un deuxième 5.
$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$
- On tire une boule dans une urne qui contient 1 blanche et 5 noires et on note la couleur.

Exemples :

- On lance un dè une fois et on note le numéro.

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

- On lance un dè à 6 faces où la face 6 est remplacée par un deuxième 5.

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

- On tire une boule dans une urne qui contient 1 blanche et 5 noires et on note la couleur.

$$\Omega = \{B; N\}.$$

Exemples :

- On lance un dè deux fois et on note les deux numéros obtenus.

Exemples :

- On lance un dè deux fois et on note les deux numéros obtenus. On peut prendre :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{llll} (1;1); & (1;2); & \ldots & (1;6) \\ (2;1); & (2;2); & \ldots & (2;6) \\ (6;1); & (6;2); & \ldots & (6;6) \end{array} \right\}$$

Exemples :

- On lance un dè deux fois et on note les deux numéros obtenus. On peut prendre :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} (1;1); & (1;2); & \dots & (1;6) \\ (2;1); & (2;2); & \dots & (2;6) \\ (6;1); & (6;2); & \dots & (6;6) \end{array} \right\}$$

ou bien

$$\Omega' = \left\{ \begin{array}{cccc} \{1;1\}; & \{1;2\}; & \dots & \{1;6\} \\ & \{2;2\}; & \dots & \{2;6\} \\ & & & \{6;6\} \end{array} \right\}$$

Exemples :

- On lance un dè deux fois et on note les deux numéros obtenus. On peut prendre :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} (1;1); & (1;2); & \dots & (1;6) \\ (2;1); & (2;2); & \dots & (2;6) \\ (6;1); & (6;2); & \dots & (6;6) \end{array} \right\}$$

ou bien

$$\Omega' = \left\{ \begin{array}{cccc} \{1;1\}; & \{1;2\}; & \dots & \{1;6\} \\ & \{2;2\}; & \dots & \{2;6\} \\ & & & \{6;6\} \end{array} \right\}$$

  - Dans Ω l'ordre compte, $Card(\Omega) = 36$.

Exemples :

- On lance un dè deux fois et on note les deux numéros obtenus. On peut prendre :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} (1;1); & (1;2); & \dots & (1;6) \\ (2;1); & (2;2); & \dots & (2;6) \\ (6;1); & (6;2); & \dots & (6;6) \end{array} \right\}$$

ou bien

$$\Omega' = \left\{ \begin{array}{cccc} \{1;1\}; & \{1;2\}; & \dots & \{1;6\} \\ & \{2;2\}; & \dots & \{2;6\} \\ & & & \{6;6\} \end{array} \right\}$$

  - Dans Ω l'ordre compte, $Card(\Omega) = 36$.
  - Dans Ω' l'ordre ne compte pas. $Card(\Omega) = 21$

Exemples :

- On dispose de deux urnes :
  - Urne $\mathcal{A}$ contient 1 blanche et 5 noires.

Exemples :

- On dispose de deux urnes :
  - Urne $\mathcal{A}$ contient 1 blanche et 5 noires.
  - Urne $\mathcal{B}$ contient 5 blanches et 1 noire.

Exemples :

- On dispose de deux urnes :
  - Urne $\mathcal{A}$ contient 1 blanche et 5 noires.
  - Urne $\mathcal{B}$ contient 5 blanches et 1 noire.

Exemples :

- On dispose de deux urnes :
  - Urne $\mathcal{A}$ contient 1 blanche et 5 noires.
  - Urne $\mathcal{B}$ contient 5 blanches et 1 noire.
- Jeu : on jette une pièce de monnaie,

Exemples :

- On dispose de deux urnes :
  - Urne $\mathcal{A}$ contient 1 blanche et 5 noires.
  - Urne $\mathcal{B}$ contient 5 blanches et 1 noire.
- Jeu : on jette une pièce de monnaie, puis

Exemples :

- On dispose de deux urnes :
  - Urne $\mathcal{A}$ contient 1 blanche et 5 noires.
  - Urne $\mathcal{B}$ contient 5 blanches et 1 noire.
- Jeu : on jette une pièce de monnaie, puis
  - si on tombe sur "pile", on pioche une boule dans l'urne $\mathcal{A}$.

Exemples :

- On dispose de deux urnes :
  - Urne $\mathcal{A}$ contient 1 blanche et 5 noires.
  - Urne $\mathcal{B}$ contient 5 blanches et 1 noire.
- Jeu : on jette une pièce de monnaie, puis
  - si on tombe sur "pile", on pioche une boule dans l'urne $\mathcal{A}$.
  - sinon on pioche dans l'urne $\mathcal{B}$.

Exemples :

- On dispose de deux urnes :
  - Urne $\mathcal{A}$ contient 1 blanche et 5 noires.
  - Urne $\mathcal{B}$ contient 5 blanches et 1 noire.
- Jeu : on jette une pièce de monnaie, puis
  - si on tombe sur "pile", on pioche une boule dans l'urne $\mathcal{A}$.
  - sinon on pioche dans l'urne $\mathcal{B}$.

$$\Omega = \{(pile; blanche), (pile; noire); (face; blanche); (face; noire)\}.$$

Exemples :

- On dispose de deux urnes :
  - Urne $\mathcal{A}$ contient 1 blanche et 5 noires.
  - Urne $\mathcal{B}$ contient 5 blanches et 1 noire.
- Jeu : on jette une pièce de monnaie, puis
  - si on tombe sur "pile", on pioche une boule dans l'urne $\mathcal{A}$.
  - sinon on pioche dans l'urne $\mathcal{B}$.

$$\Omega = \{(pile; blanche), (pile; noire); (face; blanche); (face; noire)\}.$$

Mesures

Définition :

On appelle loi de probabilités sur Ω, un vecteur $p = (p_\omega, \ \omega \in \Omega)$ tel que :

Mesures

Définition :

On appelle loi de probabilités sur Ω, un vecteur $p = (p_\omega, \ \omega \in \Omega)$ tel que :

- pour tout $\omega \in \Omega, \quad p_\omega \geq 0,$

Mesures

Définition :

On appelle loi de probabilités sur Ω, un vecteur $p = (p_\omega,\ \omega \in \Omega)$ tel que :

- pour tout $\omega \in \Omega, \quad p_\omega \geq 0$,
- $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.

Mesures, exemple

On reprend le 1 er exemple.

Mesures, exemple

On reprend le 1 er exemple.On lance un dè équilibré une fois et on note le numéro.

Mesures, exemple

On reprend le 1 er exemple.On lance un dè équilibré une fois et on note le numéro.

$$\Omega = \{\underset{\substack{\uparrow \\ \omega_1}}{1}\,;\quad \underset{\substack{\uparrow \\ \omega_2}}{2}\,;\quad \underset{\substack{\\ \dots}}{3}\,;\quad 4\,;\quad 5\,;\quad 6\}$$

Mesures, exemple

On reprend le 1 er exemple.On lance un dè équilibré une fois et on note le numéro.

$$\Omega = \{\underset{\substack{\uparrow \\ \omega_1}}{1}\,; \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \omega_2}}{2}\,; \quad \underset{\ldots}{3}\,; \quad 4\,; \quad 5\,; \quad 6\}$$

La loi de probabilité sur Ω qui correspond au numéro apparu, est le vecteur :

$$p = (\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \ldots; \frac{1}{6}),$$

$p_{\omega_1} = \frac{1}{6},\ p_{\omega_2} = \frac{1}{6}, \ldots, p_{\omega_6} = \frac{1}{6}.$

Mesures $\mathbb{P}$

Problématique :

Mesures $\mathbb{P}$

Problématique :
on connait la proba de chaque ω, mais on ne connait pas la proba d'un événement formé de "divers ω".

Mesures $\mathbb{P}$

Problématique :
on connait la proba de chaque ω, mais on ne connait pas la proba d'un événement formé de "divers ω".
Par exemple, étant donné la loi précédente, quelle est la proba d'obtenir la face 1 ou 2 dans le jeu précédent ?

Mesures $\mathbb{P}$

Définition :

Mesures $\mathbb{P}$

Définition :

- Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des événements possibles.

Mesures $\mathbb{P}$

Définition :

- Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des événements possibles.
- Etant donné une loi de proba p sur Ω, on définit la proba $\mathbb{P}$ comme une application de l'ensemble des événements $\mathcal{F}$ dans $[0;1]$ par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P} : \mathcal{F} & \to & [0;1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega . \end{array}$$

Mesures $\mathbb{P}$

Définition :

- Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des événements possibles.
- Etant donné une loi de proba p sur Ω, on définit la proba $\mathbb{P}$ comme une application de l'ensemble des événements $\mathcal{F}$ dans $[0;1]$ par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P} : \mathcal{F} & \to & [0;1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega . \end{array}$$

$\mathbb{P}$ est une mesure.

Mesures $\mathbb{P}$, exemple

Si l'on prend

$$A = \{\omega_1 ; \omega_2\},$$

Mesures $\mathbb{P}$, exemple

Si l'on prend

$$A = \{\omega_1 ; \omega_2\},$$

on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{\omega \in A} p_\omega \\ &= p_{\omega_1} + p_{\omega_2}. \end{aligned}$$

Importance du choix de Ω et de la mesure $\mathbb{P}$: Paradoxe de Bertrand

Importance du choix de Ω et de la mesure $\mathbb{P}$: Paradoxe de Bertrand

- Le paradoxe de Bertrand est un problème en théorie des probabilités qui met en évidence les limites du recours à l’intuition dans cette discipline.

Importance du choix de Ω et de la mesure $\mathbb{P}$: Paradoxe de Bertrand

- Le paradoxe de Bertrand est un problème en théorie des probabilités qui met en évidence les limites du recours à l'intuition dans cette discipline.
- Il consiste à choisir au hasard une corde d'un cercle donné et d'estimer la probabilité que celle-ci soit de longueur supérieure au côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle.

Importance du choix de Ω et de la mesure $\mathbb{P}$: Paradoxe de Bertrand

- Le paradoxe de Bertrand est un problème en théorie des probabilités qui met en évidence les limites du recours à l'intuition dans cette discipline.
- Il consiste à choisir au hasard une corde d'un cercle donné et d'estimer la probabilité que celle-ci soit de longueur supérieure au côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle.
- Le paradoxe est que cette probabilité dépend du protocole de choix de la corde.

Importance du choix de Ω et de la mesure $\mathbb{P}$: Paradoxe de Bertrand

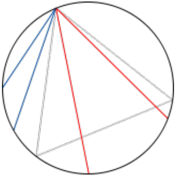
Soit un cercle de rayon 1.

Importance du choix de Ω et de la mesure $\mathbb{P}$: Paradoxe de Bertrand

Soit un cercle de rayon 1. Le côté d'un triangle équilatéral inscrit dans ce cercle a pour longueur $\sqrt{3}$.

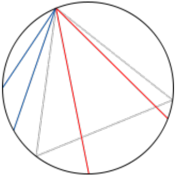
1er protocole : *Extrémités aléatoires :*

-



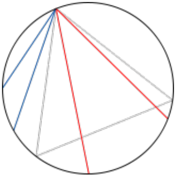
1er protocole : *Extrémités aléatoires :*

- Soit un point de la circonférence du cercle et le triangle équilatéral inscrit dont l'un des sommets est ce point.



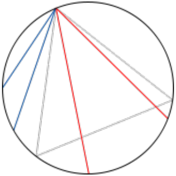
1er protocole : *Extrémités aléatoires :*

- Soit un point de la circonférence du cercle et le triangle équilatéral inscrit dont l'un des sommets est ce point.
- On choisit aléatoirement un autre point sur le cercle et on considère la corde reliant les deux points.



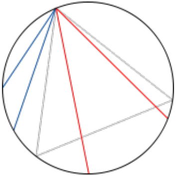
1er protocole : *Extrémités aléatoires :*

- Soit un point de la circonférence du cercle et le triangle équilatéral inscrit dont l'un des sommets est ce point.
- On choisit aléatoirement un autre point sur le cercle et on considère la corde reliant les deux points.
  → Elle est plus longue que le côté du triangle si le deuxième point est situé sur l'arc reliant les deux sommets du triangle opposé au premier point.



1er protocole : *Extrémités aléatoires :*

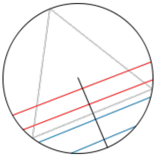
- Soit un point de la circonférence du cercle et le triangle équilatéral inscrit dont l'un des sommets est ce point.
- On choisit aléatoirement un autre point sur le cercle et on considère la corde reliant les deux points.
  $\rightarrow$ Elle est plus longue que le côté du triangle si le deuxième point est situé sur l'arc reliant les deux sommets du triangle opposé au premier point.



La probabilité est donc alors $\frac{1}{3}$.

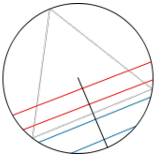
2éme protocole : *Rayon aléatoire :*

-



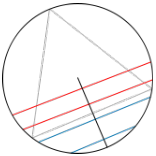
2éme protocole : *Rayon aléatoire :*

- On choisit un rayon du cercle et on considère le triangle équilatéral inscrit dont un côté est perpendiculaire au rayon.



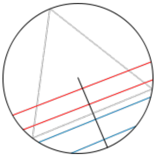
2éme protocole : *Rayon aléatoire :*

- On choisit un rayon du cercle et on considère le triangle équilatéral inscrit dont un côté est perpendiculaire au rayon.
- On choisit aléatoirement un point sur le rayon et on trace la corde dont il est le milieu.



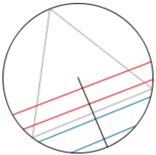
2éme protocole : *Rayon aléatoire :*

- On choisit un rayon du cercle et on considère le triangle équilatéral inscrit dont un côté est perpendiculaire au rayon.
- On choisit aléatoirement un point sur le rayon et on trace la corde dont il est le milieu.



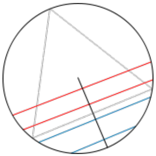
2éme protocole : *Rayon aléatoire :*

- On choisit un rayon du cercle et on considère le triangle équilatéral inscrit dont un côté est perpendiculaire au rayon.
- On choisit aléatoirement un point sur le rayon et on trace la corde dont il est le milieu.
  → Cette corde est plus longue que le côté du triangle si le point est situé entre le centre du cercle et l'intersection du côté avec le rayon.



2éme protocole : *Rayon aléatoire :*

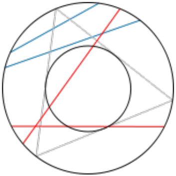
- On choisit un rayon du cercle et on considère le triangle équilatéral inscrit dont un côté est perpendiculaire au rayon.
- On choisit aléatoirement un point sur le rayon et on trace la corde dont il est le milieu.
  → Cette corde est plus longue que le côté du triangle si le point est situé entre le centre du cercle et l'intersection du côté avec le rayon.



La probabilité est donc alors $\frac{1}{2}$.

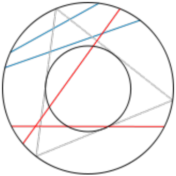
3éme protocole : *Milieu aléatoire :*

-



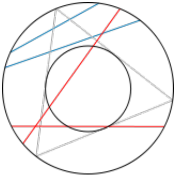
3éme protocole : *Milieu aléatoire :*

- Soit un point choisi aléatoirement à l'intérieur du cercle et une corde dont il est le milieu.



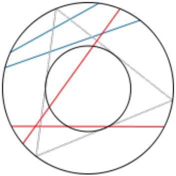
3éme protocole : *Milieu aléatoire :*

- Soit un point choisi aléatoirement à l'intérieur du cercle et une corde dont il est le milieu.
  $\rightarrow$ La corde est plus longue qu'un côté du triangle équilatéral inscrit si le point est situé à l'intérieur d'un cercle concentrique de rayon $\frac{1}{2}$.



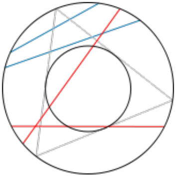
3éme protocole : *Milieu aléatoire :*

- Soit un point choisi aléatoirement à l'intérieur du cercle et une corde dont il est le milieu.
  $\rightarrow$ La corde est plus longue qu'un côté du triangle équilatéral inscrit si le point est situé à l'intérieur d'un cercle concentrique de rayon $\frac{1}{2}$. L'aire de ce cercle est un quart de celle du grand cercle.



3éme protocole : *Milieu aléatoire :*

- Soit un point choisi aléatoirement à l'intérieur du cercle et une corde dont il est le milieu.
  → La corde est plus longue qu'un côté du triangle équilatéral inscrit si le point est situé à l'intérieur d'un cercle concentrique de rayon $\frac{1}{2}$. L'aire de ce cercle est un quart de celle du grand cercle.



La probabilité est donc alors $\frac{1}{4}$.

Conclusion et explication...

- Le paradoxe de Bertrand met en évidence la dépendance à la méthode de sélection d'une corde « au hasard ».

Conclusion et explication...

- Le paradoxe de Bertrand met en évidence la dépendance à la méthode de sélection d'une corde « au hasard ».Dès que cette méthode est spécifiée, le problème possède une solution bien définie.

Conclusion et explication...

- Le paradoxe de Bertrand met en évidence la dépendance à la méthode de sélection d'une corde « au hasard ».Dès que cette méthode est spécifiée, le problème possède une solution bien définie.
- En l'absence d'une telle méthode, le terme « au hasard », dans « choisir une corde du cercle au hasard », est ambigu.

Conclusion et explication...

- Le paradoxe de Bertrand met en évidence la dépendance à la méthode de sélection d'une corde « au hasard ».Dès que cette méthode est spécifiée, le problème possède une solution bien définie.
- En l'absence d'une telle méthode, le terme « au hasard », dans « choisir une corde du cercle au hasard », est ambigu.
- Les trois solutions présentées par Bertrand correspondent à des méthodes de sélection distinctes et valables.

Conclusion et explication...

- Le paradoxe de Bertrand met en évidence la dépendance à la méthode de sélection d'une corde « au hasard ».Dès que cette méthode est spécifiée, le problème possède une solution bien définie.
- En l'absence d'une telle méthode, le terme « au hasard », dans « choisir une corde du cercle au hasard », est ambigu.
- Les trois solutions présentées par Bertrand correspondent à des méthodes de sélection distinctes et valables. Et en l'absence d'autre information, il n'y a aucune raison d'en privilégier une par rapport aux autres.

Conclusion et explication...

- Le paradoxe de Bertrand met en évidence la dépendance à la méthode de sélection d'une corde « au hasard ».Dès que cette méthode est spécifiée, le problème possède une solution bien définie.
- En l'absence d'une telle méthode, le terme « au hasard », dans « choisir une corde du cercle au hasard », est ambigu.
- Les trois solutions présentées par Bertrand correspondent à des méthodes de sélection distinctes et valables. Et en l'absence d'autre information, il n'y a aucune raison d'en privilégier une par rapport aux autres.
  $\rightarrow$ Choix crucial de la mesure (de la distribution) des milieux des cordes...

Mesures $\mathbb{P}$, propriétés

Propriété

Mesures $\mathbb{P}$, propriétés

Propriété

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

Mesures $\mathbb{P}$, propriétés

Propriété

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- Pour tout $A, B \in \mathcal{F}$, on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

Mesures $\mathbb{P}$, propriétés

Propriété

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- Pour tout $A, B \in \mathcal{F}$, on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

- en particulier, si A et B sont *disjoints*, on a : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- Si $A \subset B$, on a : $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Mesures $\mathbb{P}$, propriétés

Propriété

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- Pour tout $A, B \in \mathcal{F}$, on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

- en particulier, si A et B sont *disjoints*, on a : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- Si $A \subset B$, on a : $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Démontrer ces propriétés.

Mesures $\mathbb{P}$, propriétés

Rappel

Mesures $\mathbb{P}$, propriétés

Rappel

- A et B sont disjoints si

Mesures $\mathbb{P}$, propriétés

Rappel

- A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$.

Mesures $\mathbb{P}$, propriétés

Rappel

- A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$.

Indépendance

Définition : Indépendance

On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque :

Indépendance

Définition : Indépendance

On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Indépendance

Définition : Indépendance

On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Notation "standard" : $A \perp\!\!\!\perp B$.

Indépendance

Définition : Indépendance

On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Notation "standard" : $A \perp\!\!\!\perp B$.

Pour savoir si 2 événements sont indépendants, calculer séparemment $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Indépendance, exemple

On lance 2 pièces équilibrées. Alors on a :

Indépendance, exemple

On lance 2 pièces équilibrées. Alors on a :

$$\mathbb{P}(\text{ P à la 1er pièce ET P à la 2 éme pièce }) = 1/4.$$

(Faire un arbre ou énumérer les divers cas).

Indépendance, exemple

On lance 2 pièces équilibrées. Alors on a :

$$\mathbb{P}(\text{ P à la 1er pièce ET P à la 2 éme pièce }) = 1/4.$$

(Faire un arbre ou énumérer les divers cas).
et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{ P à la 1 er pièce }) \times \mathbb{P}(\text{ P à la 2 éme pièce }) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Indépendance, exemple

On lance 2 pièces équilibrées. Alors on a :

$$\mathbb{P}(\text{ P à la 1er pièce ET P à la 2 éme pièce }) = 1/4.$$

(Faire un arbre ou énumérer les divers cas).
et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{ P à la 1 er pièce }) \times \mathbb{P}(\text{ P à la 2 éme pièce }) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Donc les résultats sont égaux, et on a bien indépendance.

Non indépendance, exemple

- On lance un dè équilibré une fois et on note le chiffre de la face obtenue.

Non indépendance, exemple

- On lance un dè équilibré une fois et on note le chiffre de la face obtenue.
- Soient
  $A = \{$ le chiffre de la face obtenue est un multiple de 6$\}$ et
  $B = \{$ le chiffre de la face obtenue est un pair $\}$.
- A et B sont ils indépendants ?

Non indépendance, exemple

- On lance un dè équilibré une fois et on note le chiffre de la face obtenue.
- Soient
  $A = \{$ le chiffre de la face obtenue est un multiple de 6$\}$ et
  $B = \{$ le chiffre de la face obtenue est un pair $\}$.
- A et B sont ils indépendants ? On calcule séparemment $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Non indépendance, exemple

- On lance un dè équilibré une fois et on note le chiffre de la face obtenue.
- Soient
  $A = \{$ le chiffre de la face obtenue est un multiple de 6$\}$ et
  $B = \{$ le chiffre de la face obtenue est un pair $\}$.
- A et B sont ils indépendants ? On calcule séparemment $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. On obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(\text{obtenir un multiple 6} \\ &\qquad \textit{ET} \text{ un nombre pair }) \\ &= \mathbb{P}(\text{obtenir 6 }) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &\mathbb{P}(\text{obtenir un multiple de 6}) \\ &\qquad \times \mathbb{P}(\text{ obtenir un nombre pair}) \\ &= \mathbb{P}(\text{obtenir 6 }) \times \mathbb{P}(\text{obtenir 2, 4 ou 6 }) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Non indépendance, exemple

- On lance un dè équilibré une fois et on note le chiffre de la face obtenue.
- Soient
  $A = \{$ le chiffre de la face obtenue est un multiple de 6$\}$ et
  $B = \{$ le chiffre de la face obtenue est un pair $\}$.
- A et B sont ils indépendants ? On calcule séparemment $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. On obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(\text{obtenir un multiple 6} \\ &\qquad\qquad \textit{ET} \text{ un nombre pair }) \\ &= \mathbb{P}(\text{obtenir 6 }) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &\mathbb{P}(\text{obtenir un multiple de 6}) \\ &\qquad\qquad \times \mathbb{P}(\text{ obtenir un nombre pair}) \\ &= \mathbb{P}(\text{obtenir 6 }) \times \mathbb{P}(\text{obtenir 2, 4 ou 6 }) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Non indépendance, exemple

- On lance un dè équilibré une fois et on note le chiffre de la face obtenue.
- Soient
  $A = \{$ le chiffre de la face obtenue est un multiple de 6$\}$ et
  $B = \{$ le chiffre de la face obtenue est un pair $\}$.
- A et B sont ils indépendants ? On calcule séparemment $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. On obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(\text{obtenir un multiple 6} \\ &\qquad\qquad \textit{ET} \text{ un nombre pair }) \\ &= \mathbb{P}(\text{obtenir 6 }) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &\mathbb{P}(\text{obtenir un multiple de 6}) \\ &\qquad\qquad \times\mathbb{P}(\text{ obtenir un nombre pair}) \\ &= \mathbb{P}(\text{obtenir 6 }) \times \mathbb{P}(\text{obtenir 2, 4 ou 6 }) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Probas conditionnelles

- Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Probas conditionnelles

- Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
- On définit la proba conditionnelle de A sachant B par :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Probas conditionnelles

- Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
- On définit la proba conditionnelle de A sachant B par :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Autre notation utilisée dans certains ouvrages : $P_B(A)$

Probas conditionnelles

- Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
- On définit la proba conditionnelle de A sachant B par :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Autre notation utilisée dans certains ouvrages : $P_B(A)$

$\mathbb{P}(.|B)$ est une nouvelle probabilité, qui ne "charge" que les issues où B est réalisé. C'est un nombre entre 0 et 1.

Probas conditionnelles, remarques

- En général, $\mathbb{P}(A|B) \neq \mathbb{P}(B|A)$.

Probas conditionnelles, remarques

- En général, $\mathbb{P}(A|B) \neq \mathbb{P}(B|A)$. En fait on a :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \times \mathbb{P}(B|A).$$

Probas conditionnelles, remarques

- En général, $\mathbb{P}(A|B) \neq \mathbb{P}(B|A)$. En fait on a :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \times \mathbb{P}(B|A).$$

- Si $A \perp\!\!\!\perp B$, on a :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Partition

Définition d'une partition / systéme d'événements complets

Partition

Définition d'une partition / systéme d'événements complets

Soit $(A_i)_{i \in I}$ des sous ensembles de Ω. On dit que cette famille forme une partition de Ω si :

Partition

Définition d'une partition / systéme d'événements complets

Soit $(A_i)_{i \in I}$ des sous ensembles de Ω. On dit que cette famille forme une partition de Ω si :

- pour tout $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Partition

Définition d'une partition / systéme d'événements complets

Soit $(A_i)_{i\in I}$ des sous ensembles de Ω. On dit que cette famille forme une partition de Ω si :

- pour tout $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- et $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$

Partition

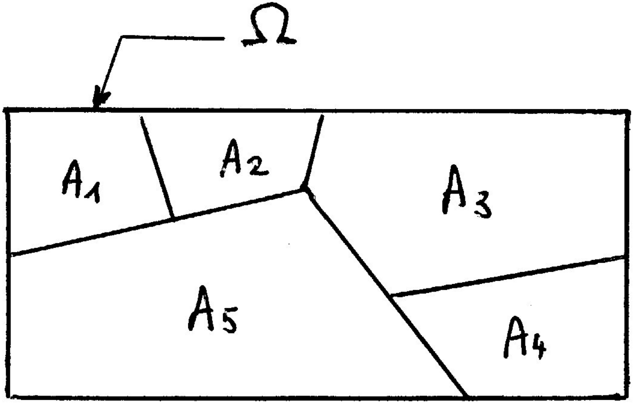
Définition d'une partition / systéme d'événements complets

Soit $(A_i)_{i \in I}$ des sous ensembles de Ω. On dit que cette famille forme une partition de Ω si :

- pour tout $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- et $\Omega = \underset{i \in I}{\cup} A_i$

Penser "carrelage" ...

Partition



Probas conditionnelles, propriété

Formule des "probas totales"

Probas conditionnelles, propriété

Formule des "probas totales"

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de Ω.

Probas conditionnelles, propriété

Formule des "probas totales"

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition de Ω. Pour tout événement B, on a :

- $$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i),$$

Probas conditionnelles, propriété

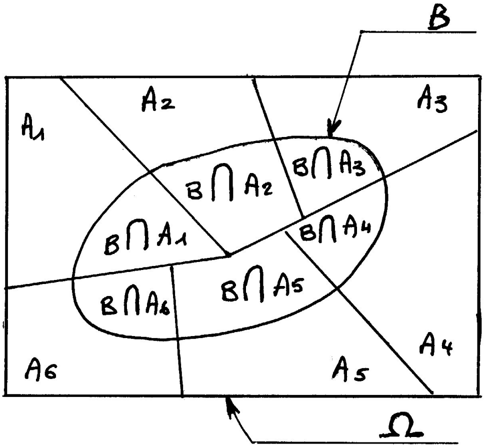
Formule des "probas totales"

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de Ω. Pour tout événement B, on a :

- $$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i),$$
- que l'on peut re écrire ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B|A_i) \times \mathbb{P}(A_i).$$

Partition



Probas conditionnelles, propriété

Cas particulier évident :
on prend la partition $\{ A, \bar{A} \}$. On a ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A}) \times \mathbb{P}(\bar{A}).$$

(c'est une "fonction des observations/du hasard)

Définition

On appelle variable aléatoire (v.a en abrégé), une application

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

qui à chaque $\omega \in \Omega$ associe un réel $X(\omega)$.

Définition

On appelle variable aléatoire (v.a en abrégé), une application

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

qui à chaque $\omega \in \Omega$ associe un réel $X(\omega)$.
(c'est une "fonction des observations/du hasard)

Définition

On appelle variable aléatoire (v.a en abrégé), une application

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

qui à chaque $\omega \in \Omega$ associe un réel $X(\omega)$.
(c'est une "fonction des observations/du hasard)

Remarques :

Définition

On appelle variable aléatoire (v.a en abrégé), une application

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

qui à chaque $\omega \in \Omega$ associe un réel $X(\omega)$.
(c'est une "fonction des observations/du hasard)

Remarques :

- Lorsque l'ensemble d'arrivé de X est un ensemble discret (ie : fini ou dénombrable), on dit que la v.a est discréte.

Définition

On appelle variable aléatoire (v.a en abrégé), une application

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

qui à chaque $\omega \in \Omega$ associe un réel $X(\omega)$.
(c'est une "fonction des observations/du hasard)

Remarques :

- Lorsque l'ensemble d'arrivé de X est un ensemble discret (ie : fini ou dénombrable), on dit que la v.a est discréte. Exemples : $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ ou bien $X : \Omega \to \mathbb{N}$.

Définition

On appelle variable aléatoire (v.a en abrégé), une application

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

qui à chaque $\omega \in \Omega$ associe un réel $X(\omega)$.
(c'est une "fonction des observations/du hasard)

Remarques :

- Lorsque l'ensemble d'arrivé de X est un ensemble discret (ie : fini ou dénombrable), on dit que la v.a est discréte. Exemples : $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ ou bien $X : \Omega \to \mathbb{N}$.
- Si la v.a X peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle, on dit que la v.a est continue.

- On joue au loto, et on note X le gain obtenu.

- On joue au loto, et on note X le gain obtenu.
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a.

- On joue au loto, et on note X le gain obtenu.
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a.
- On lance un dé et on note X la face obtenue

- On joue au loto, et on note X le gain obtenu.
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a.
- On lance un dé et on note X la face obtenue

- On joue au loto, et on note X le gain obtenu.
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a.
- On lance un dé et on note X la face obtenue
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a.

- On joue au loto, et on note X le gain obtenu.
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a.
- On lance un dé et on note X la face obtenue
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a.
- On lance un piéce et on gagne 1 euro si on obtient "Pile" et 0 euro sinon. Soit S le gain sur 10 lancés.

- On joue au loto, et on note X le gain obtenu.
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a.
- On lance un dé et on note X la face obtenue
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a.
- On lance un piéce et on gagne 1 euro si on obtient "Pile" et 0 euro sinon. Soit S le gain sur 10 lancés.
  $\Rightarrow \quad S$ est une v.a.

- On joue au loto, et on note X le gain obtenu.
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a.
- On lance un dé et on note X la face obtenue
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a.
- On lance un piéce et on gagne 1 euro si on obtient "Pile" et 0 euro sinon. Soit S le gain sur 10 lancés.
  $\Rightarrow \quad S$ est une v.a.
- On lance un dé deux fois, et on note Z le max des 2 faces obtenues.

- On joue au loto, et on note X le gain obtenu.
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a.
- On lance un dé et on note X la face obtenue
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a.
- On lance un piéce et on gagne 1 euro si on obtient "Pile" et 0 euro sinon. Soit S le gain sur 10 lancés.
  $\Rightarrow \quad S$ est une v.a.
- On lance un dé deux fois, et on note Z le max des 2 faces obtenues.
  $\Rightarrow \quad Z$ est une v.a.

- On joue au loto, et on note X le gain obtenu.
  $\Rightarrow$ X est une v.a.
- On lance un dé et on note X la face obtenue
  $\Rightarrow$ X est une v.a.
- On lance un piéce et on gagne 1 euro si on obtient "Pile" et 0 euro sinon. Soit S le gain sur 10 lancés.
  $\Rightarrow$ S est une v.a.
- On lance un dé deux fois, et on note Z le max des 2 faces obtenues.
  $\Rightarrow$ Z est une v.a.
- Soit $X = 5$, quelque soit l'issue.

- On joue au loto, et on note X le gain obtenu.
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a.
- On lance un dé et on note X la face obtenue
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a.
- On lance un piéce et on gagne 1 euro si on obtient "Pile" et 0 euro sinon. Soit S le gain sur 10 lancés.
  $\Rightarrow \quad S$ est une v.a.
- On lance un dé deux fois, et on note Z le max des 2 faces obtenues.
  $\Rightarrow \quad Z$ est une v.a.
- Soit $X = 5$, quelque soit l'issue.
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a,

- On joue au loto, et on note X le gain obtenu.
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a.
- On lance un dé et on note X la face obtenue
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a.
- On lance un piéce et on gagne 1 euro si on obtient "Pile" et 0 euro sinon. Soit S le gain sur 10 lancés.
  $\Rightarrow \quad S$ est une v.a.
- On lance un dé deux fois, et on note Z le max des 2 faces obtenues.
  $\Rightarrow \quad Z$ est une v.a.
- Soit $X = 5$, quelque soit l'issue.
  $\Rightarrow \quad X$ est une v.a, dite déterministe (v.a constante)

Loi d'une v.a

Remarque : Ce qui est important (en général), c'est la loi de la v.a et non pas ses valeurs ponctuelles !

Loi d'une v.a

Remarque : Ce qui est important (en général), c'est la loi de la v.a et non pas ses valeurs ponctuelles !

Définition

La loi d'une variable aléatoire X, est la donnée de toutes les probabilités $\mathbb{P}\Big(\{\omega;\ X(\omega) = x\}\Big)$ pour tous les x possibles.

Notations : On écrira $\mathbb{P}\Big(\{\omega;\ X(\omega) = x\}\Big) = \mathbb{P}(X = x)$.

Loi d'une v.a

Remarque : Ce qui est important (en général), c'est la loi de la v.a et non pas ses valeurs ponctuelles !

Définition

La loi d'une variable aléatoire X, est la donnée de toutes les probabilités $\mathbb{P}\Big(\{\omega;\ X(\omega) = x\}\Big)$ pour tous les x possibles.

Notations : On écrira $\mathbb{P}\Big(\{\omega;\ X(\omega) = x\}\Big) = \mathbb{P}(X = x)$.

Loi d'une v.a

Remarque : Ce qui est important (en général), c'est la loi de la v.a et non pas ses valeurs ponctuelles !

Définition

La loi d'une variable aléatoire X, est la donnée de toutes les probabilités $\mathbb{P}\Big(\{\omega;\ X(\omega) = x\}\Big)$ pour tous les x possibles.

Notations : On écrira $\mathbb{P}\Big(\{\omega;\ X(\omega) = x\}\Big) = \mathbb{P}(X = x)$.

Connaître la loi d'une v.a X, c'est donc être capable de donner la proba que X prenne n'importe quelle valeur !

Loi d'une v.a

Connaître la loi d'une v.a X, c'est donc être capable de donner la proba que X prenne n'importe quelle valeur !

Loi d'une v.a

Connaître la loi d'une v.a X, c'est donc être capable de donner la proba que X prenne n'importe quelle valeur !

Remarques :

- Si X ne prend pas trop de valeurs, on peut présenter les résultats sous la forme d'un tableau (cf ex).

Loi d'une v.a

Connaître la loi d'une v.a X, c'est donc être capable de donner la proba que X prenne n'importe quelle valeur !

Remarques :

- Si X ne prend pas trop de valeurs, on peut présenter les résultats sous la forme d'un tableau (cf ex).
- On a $\sum_i \mathbb{P}(X = x_i) = 1$. Les x_i parcourant toutes les valeurs possibles que peut prendre X lorsque i varie.

Exemple 1

Exemple 1

On lance un dè équilibré et on note X le nombre obtenu.
Précisez Ω et $X(\Omega)$, puis donnez la loi de X.

Exemple 1

Exemple 1

$$X : \Omega \to \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

Exemple 1

$$X : \Omega \to \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

On peut présenter la loi de X sous la forme d'un tableau

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exemple 2

Exemple 2

On lance deux fois un dè équilibré. Les deux lancés sont indépendants. Soit X_1 le nombre obtenu au premier lancé et X_2 le nombre obtenu au deuxième lancé. Soit enfin $Z = X_1 - X_2$

Exemple 2

Exemple 2

On lance deux fois un dè équilibré. Les deux lancés sont indépendants. Soit X_1 le nombre obtenu au premier lancé et X_2 le nombre obtenu au deuxième lancé. Soit enfin $Z = X_1 - X_2$

1. Précisez Ω et $Z(\Omega)$.
2. Donnez la loi de Z.
3. Soit $Z' = X_2 - X_1$. Donnez la loi de Z'.
4. Comparez les lois de Z et Z'. A t'on $Z = Z'$?

Exemple 2, Question 1

On a "naivement" deux choix possibles "naturels "pour l'espace des issues :

Exemple 2, Question 1

On a "naivement" deux choix possibles "naturels "pour l'espace des issues :

- On peut prendre :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} (1;1); & (1;2); & \dots & (1;6) \\ (2;1); & (2;2); & \dots & (2;6) \\ (6;1); & (6;2); & \dots & (6;6) \end{array} \right\}$$

Exemple 2, Question 1

On a "naivement" deux choix possibles "naturels "pour l'espace des issues :

- On peut prendre :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{llll} (1;1); & (1;2); & \dots & (1;6) \\ (2;1); & (2;2); & \dots & (2;6) \\ (6;1); & (6;2); & \dots & (6;6) \end{array} \right\}$$

- ou bien

$$\Omega' = \left\{ \begin{array}{llll} \{1;1\}; & \{1;2\}; & \dots & \{1;6\} \\ & \{2;2\}; & \dots & \{2;6\} \\ & & & \{6;6\} \end{array} \right\}$$

Exemple 2, Question 1

On a "naivement" deux choix possibles "naturels "pour l'espace des issues :

- On peut prendre :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{llll} (1;1); & (1;2); & \dots & (1;6) \\ (2;1); & (2;2); & \dots & (2;6) \\ (6;1); & (6;2); & \dots & (6;6) \end{array} \right\}$$

- ou bien

$$\Omega' = \left\{ \begin{array}{llll} \{1;1\}; & \{1;2\}; & \dots & \{1;6\} \\ & \{2;2\}; & \dots & \{2;6\} \\ & & & \{6;6\} \end{array} \right\}$$

Attention : Vu que l'ordre compte dans l'expérience aléatoire, on choisira Ω.

Exemple 2, Question 1

On a donc :

$$Z : \Omega \to \{-5; -4; \dots; -1; 0; 1; \dots; 5\}.$$

Exemple 2, Question 1

On a donc :

$$Z : \Omega \to \{-5; -4; ...; -1; 0; 1; ...; 5\}.$$

$$ie : \quad Z(\Omega) = \{-5; -4; ...; -1; 0; 1; ...; 5\} = [| - 5; 5|].$$

Exemple 2, Question 2

Loi de Z

- $\mathbb{P}(Z = -5)$ $= \mathbb{P}(X_1 = 1 \textit{ et } X_2 = 6),$
  $= \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 6)$, par indépendance,
  $= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$

Exemple 2, Question 2

Loi de Z

- $\mathbb{P}(Z=-5)$ $= \mathbb{P}(X_1 = 1 \textit{ et } X_2 = 6)$,
  $= \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 6)$, par indépendance,
  $= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

- $\mathbb{P}(Z=-4)$ $= \mathbb{P}\Big((X_1 = 2 \textit{ et } X_2 = 6) \textit{ ou } (X_1 = 1 \textit{ et } X_2 = 5) \Big)$,
  $= \mathbb{P}(X_1 = 2 \textit{ et } X_2 = 6) + \mathbb{P}(X_1 = 1 \textit{ et } X_2 = 5)$,
  car événements disjoints,
  $= \mathbb{P}(X_1 = 2) \times \mathbb{P}(X_2 = 6) + \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 5)$,
  par indépendance,
  $= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Exemple 2, Question 2

On fait de même pour les autres cas,

Exemple 2, Question 2

On fait de même pour les autres cas, puis on utilise la symétrie pour les valeurs positives.

Exemple 2, Question 2

On fait de même pour les autres cas, puis on utilise la symétrie pour les valeurs positives. On obtient alors :

Loi de Z

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(Z = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Forme frationnaire non simplifiée pour aider à la compréhension...

Exemple 2, Question 3 et 4

Pour la loi de Z', on ne refait surtout pas les calculs.

Exemple 2, Question 3 et 4

Pour la loi de Z', on ne refait surtout pas les calculs. Pour tout a, b, on remarque :

$$\mathbb{P}(X_1 = a \text{ et } X_2 = b) = \mathbb{P}(X_1 = b \text{ et } X_2 = a)$$

Exemple 2, Question 3 et 4

Pour la loi de Z', on ne refait surtout pas les calculs. Pour tout a, b, on remarque :

$$\mathbb{P}(X_1 = a \text{ et } X_2 = b) = \mathbb{P}(X_1 = b \text{ et } X_2 = a)$$

Ainsi par sommation, on a pour tout k :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z = -k) = \mathbb{P}(Z' = k)$$

Exemple 2, Question 3 et 4

Pour la loi de Z', on ne refait surtout pas les calculs. Pour tout a, b, on remarque :

$$\mathbb{P}(X_1 = a \text{ et } X_2 = b) = \mathbb{P}(X_1 = b \text{ et } X_2 = a)$$

Ainsi par sommation, on a pour tout k :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z = -k) = \mathbb{P}(Z' = k)$$

Loi de Z'

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(Z' = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Exemple 2, Question 3 et 4

Pour la loi de Z', on ne refait surtout pas les calculs. Pour tout a, b, on remarque :

$$\mathbb{P}(X_1 = a \text{ et } X_2 = b) = \mathbb{P}(X_1 = b \text{ et } X_2 = a)$$

Ainsi par sommation, on a pour tout k :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z = -k) = \mathbb{P}(Z' = k)$$

Loi de Z'

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(Z' = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Exemple 2, Question 3 et 4

Pour la loi de Z', on ne refait surtout pas les calculs. Pour tout a, b, on remarque :

$$\mathbb{P}(X_1 = a \text{ et } X_2 = b) = \mathbb{P}(X_1 = b \text{ et } X_2 = a)$$

Ainsi par sommation, on a pour tout k :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z = -k) = \mathbb{P}(Z' = k)$$

Loi de Z'

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(Z' = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Donc Z et Z' ont la même loi alors que $Z \neq Z'$

Exemple 3

Exemple 3

On lance un pièce biaisée. On suppose que la proba d'obtenir "pile" est un nombre $p \in [0; 1]$ fixé.

Exemple 3

Exemple 3

On lance un pièce biaisée. On suppose que la proba d'obtenir "pile" est un nombre $p \in [0;1]$ fixé. Soit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 3

Exemple 3

On lance un pièce biaisée. On suppose que la proba d'obtenir "pile" est un nombre $p \in [0;1]$ fixé. Soit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donnez la loi X.

Exemple 3

Exemple 3

$$X : \Omega \to \{0; 1\}$$

Exemple 3

$$X : \Omega \to \{0; 1\}$$

On peut présenter la loi de X sous la forme d'un tableau

k	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$1 - p$	p

Exemple 3

$$X : \Omega \to \{0; 1\}$$

On peut présenter la loi de X sous la forme d'un tableau

k	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$1 - p$	p

On appellera cette loi, une loi de Bernoulli de paramétre p.

Exemple 3

$$X : \Omega \to \{0; 1\}$$

On peut présenter la loi de X sous la forme d'un tableau

k	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$1 - p$	p

On appellera cette loi, une loi de Bernoulli de paramétre p. On notera :

$$X \sim Bernoulli(p).$$

Exemple 4

Exemple 4

On lance deux fois un dè équilibré. Les deux lancés sont indépendants. Soit X_1 le nombre obtenu au premier lancé et X_2 le nombre obtenu au deuxième lancé. Soit enfin

$$U = \max(X_1 ; X_2).$$

Exemple 4

Exemple 4

On lance deux fois un dè équilibré. Les deux lancés sont indépendants. Soit X_1 le nombre obtenu au premier lancé et X_2 le nombre obtenu au deuxième lancé. Soit enfin

$$U = \max(X_1 ; X_2).$$

1. Précisez Ω et $U(\Omega)$.
2. Donnez la loi de U.

Exemple 4

On a,

$$U : \Omega \to \{1; 2; ...; 6\}.$$

Exemple 4

On a,

$$U : \Omega \to \{1; 2; ...; 6\}.$$

Loi de U

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(U = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Exemple 4

On a,

$$U : \Omega \to \{1; 2; ...; 6\}.$$

Loi de U

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(U = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Par exemple, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U = 4) \quad &= \mathbb{P}\Big((X_1; X_2) = (1; 4) \text{ } ou \text{ } (X_1; X_2) = (2; 4) \text{ } ou \text{ } (X_1; X_2) = (3; 4) \\ &\quad ou \text{ } (X_1; X_2) = (4; 4) \text{ } ou \text{ } (X_1; X_2) = (4; 3) \text{ } ou \text{ } (X_1; X_2) = (4; 2) \\ &\quad ou (X_1; X_2) = (4; 1) \Big), \\ &= 7/36.\end{aligned}$$

Paramétres d'une v.a discréte

- **Interprétation :**
  - Moyenne de X pondérée par les coefficients $\mathbb{P}(X = x_i)$.
  - Valeur vers laquelle tend la moyenne d'un grand nombre de réalisations de la variable X répétées de manière indépendante. (cf cours Théorèmes limite en proba)

Paramétres d'une v.a discréte

Définition : Espérance

Soit X une v.a discréte.

- On appelle espérance de X et on note $\mathbb{E}(X)$ la quantité suivante :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \times \mathbb{P}(X = x_i).$$

Paramétres d'une v.a discréte

Définition : Espérance

Soit X une v.a discréte.

- On appelle espérance de X et on note $\mathbb{E}(X)$ la quantité suivante :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \times \mathbb{P}(X = x_i).$$

- **Interprétation :**
  - Moyenne de X pondérée par les coefficients $\mathbb{P}(X = x_i)$.

Paramétres d'une v.a discréte

Définition : Espérance

Soit X une v.a discréte.

- On appelle espérance de X et on note $\mathbb{E}(X)$ la quantité suivante :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \times \mathbb{P}(X = x_i).$$

- **Interprétation :**
  - Moyenne de X pondérée par les coefficients $\mathbb{P}(X = x_i)$.
  - Valeur vers laquelle tend la moyenne d'un grand nombre de réalisations de la variable X répétées de manière indépendante. (cf cours Théorèmes limite en proba)

Paramétres d'une v.a discréte

Autre expression de $Var(X)$:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2, \\ &= \Big(\sum_i x_i^2 \times \mathbb{P}(X = x_i) \Big) - \mathbb{E}(X)^2. \end{aligned}$$

- On appelle écart type de X et on note $\sigma(X)$ le nombre :

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Paramétres d'une v.a discréte

Définition : Variance

Soit X une v.a discréte.

- On appelle variance de X et on note $Var(X)$ la quantité :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}(X))^2\Big], \\ &= \sum_i (x_i-\mathbb{E}(X))^2 \times \mathbb{P}(X=x_i). \end{aligned}$$

Paramétres d'une v.a discréte

Définition : Variance

Soit X une v.a discréte.

- On appelle variance de X et on note $Var(X)$ la quantité :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}(X))^2\Big], \\ &= \sum_i (x_i-\mathbb{E}(X))^2 \times \mathbb{P}(X=x_i). \end{aligned}$$

Autre expression de $Var(X)$ **:**

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2, \\ &= \Big(\sum_i x_i^2 \times \mathbb{P}(X=x_i)\Big) - \mathbb{E}(X)^2. \end{aligned}$$

Paramétres d'une v.a discréte

Définition : Variance

Soit X une v.a discréte.

- On appelle variance de X et on note $Var(X)$ la quantité :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}(X))^2\Big], \\ &= \sum_i (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \times \mathbb{P}(X = x_i). \end{aligned}$$

Autre expression de $Var(X)$ **:**

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2, \\ &= \Big(\sum_i x_i^2 \times \mathbb{P}(X = x_i) \Big) - \mathbb{E}(X)^2. \end{aligned}$$

- On appelle écart type de X et on note $\sigma(X)$ le nombre :

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Paramétres d'une v.a discréte

- Par la première formule de la variance :
$$Var(X) = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}(X))^2\Big],$$
on constate que la variance représente la moyenne des écarts entre X et $\mathbb{E}(X)$ au carré.
- La variance mesure donc la dispersion de la v.a.

Paramétres d'une v.a discréte

Interprétation de la Variance

Paramétres d'une v.a discréte

Interprétation de la Variance

- Par la première formule de la variance :

$$Var(X) = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}(X))^2\Big],$$

on constate que la variance représente la moyenne des écarts entre X et $\mathbb{E}(X)$ au carré.

Paramétres d'une v.a discréte

Interprétation de la Variance

- Par la première formule de la variance :
$$Var(X) = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}(X))^2\Big],$$
on constate que la variance représente la moyenne des écarts entre X et $\mathbb{E}(X)$ au carré.
- La variance mesure donc la dispersion de la v.a.

Paramétres d'une v.a discréte

Soit X une v.a, on appelle fonction de répartion de X, la fonction F suivante :

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

- F est une fonction croissante et positive.
- On a : $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$ et $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$.
- C'est l'équivalent "probabiliste" de la fréquence cumulée croissante.

Paramétres d'une v.a discréte

Fonction de répartition

Paramétres d'une v.a discréte

Fonction de répartition

Soit X une v.a, on appelle fonction de répartion de X, la fonction F suivante :

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

Paramétres d'une v.a discréte

Fonction de répartition

Soit X une v.a, on appelle fonction de répartion de X, la fonction F suivante :

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

- F est une fonction croissante et positive.

Paramétres d'une v.a discréte

Fonction de répartition

Soit X une v.a, on appelle fonction de répartion de X, la fonction F suivante :

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

- F est une fonction croissante et positive.
- On a : $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$ et $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$.

Paramétres d'une v.a discréte

Fonction de répartition

Soit X une v.a, on appelle fonction de répartion de X, la fonction F suivante :

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

- F est une fonction croissante et positive.
- On a : $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$ et $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$.
- C'est l'équivalent "probabiliste" de la fréquence cumulée croissante.

Paramétres d'une v.a discréte

Utilité de la fonction de répartition F **:** Un des intérets de la fonction de répartition réside dans la remarque suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a < X \leq b) &= \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a), \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Paramétres d'une v.a discréte

Utilité de la fonction de répartition F **:** Un des intérets de la fonction de répartition réside dans la remarque suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a < X \leq b) &= \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a), \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

La donnée de la fonction de répartition permet donc de calculer la proba de n'importe quel événement...

Propriétés

Soit X une v.a et a, b deux réels. On a :

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b,$
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X).$ et donc $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

Propriétés

Linéarité et pseudo linéarité

Propriétés

Linéarité et pseudo linéarité

Soit X une v.a et a, b deux réels. On a :

Propriétés

Linéarité et pseudo linéarité

Soit X une v.a et a, b deux réels. On a :

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b$,

Propriétés

Linéarité et pseudo linéarité

Soit X une v.a et a, b deux réels. On a :

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b$,
- $Var(aX + b) = a^2\, Var(X)$. et donc $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

Propriétés

Linéarité et pseudo linéarité

Soit X une v.a et a, b deux réels. On a :

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b$,
- $Var(aX + b) = a^2\,Var(X)$. et donc $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

Remarques :

- Ceux sont les mêmes propriétés vues pour les séries statistiques.

Propriétés

Linéarité et pseudo linéarité

Soit X une v.a et a, b deux réels. On a :

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b,$
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X).$ et donc $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

Remarques :

- Ceux sont les mêmes propriétés vues pour les séries statistiques.
- Si $a \in \mathbb{R}$, on a évidemment $\mathbb{E}(a) = a$. (v.a constante, déterministe)

Propriétés

Linéarité et pseudo linéarité

Soit X une v.a et a, b deux réels. On a :

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b$,
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$. et donc $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

Remarques :

- Ceux sont les mêmes propriétés vues pour les séries statistiques.
- Si $a \in \mathbb{R}$, on a évidemment $\mathbb{E}(a) = a$. (v.a constante, déterministe)
- Si X et Y sont deux v.a, on a : $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ mais $Var(X + Y) \neq Var(X) + Var(Y)$ (on a égalité si X et Y sont indépendantes).

Exemple de calcul des paramétres d'une v.a discréte

Exemple de calcul des paramétres d'une v.a discréte

Calculons l'espérance et la variance des v.a introduites dans les 4 exemples précédents.

Exemple 1, paramétres

Exemple 1

On lance un dè équilibré et on note X le nombre obtenu.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.

Exemple 1, paramétres

Exemple 1

On lance un dè équilibré et on note X le nombre obtenu.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.
2. Donnez la fonction de répartition de X
3. On suppose que l'on gagne $3a + 5$ euros lorsqu'on tombe sur la face numéro a. Soit G le gain obtenu sur un lancé. Calculer $\mathbb{E}(G)$.

Exemple 1, Question 1

On a déjà vu que : $X : \Omega \to \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Exemple 1, Question 1

On a déjà vu que : $X : \Omega \to \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et

Loi de X

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exemple 1, Question 1

On a déjà vu que : $X : \Omega \to \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et

Loi de X

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_k k \times \mathbb{P}(X = k) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \ldots + 6 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

Exemple 1, Question 1

On a déjà vu que : $X : \Omega \to \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et

Loi de X

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_k k \times \mathbb{P}(X = k) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \ldots + 6 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Ce que l'on aurait pu "deviner" sans calculs.

Exemple 1, Question 1

Pour la variance, on écrit :

Exemple 1, Question 1

Pour la variance, on écrit :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_k [k - \mathbb{E}(X)]^2 \times \mathbb{P}(X = k) \\ &= (1 - \frac{7}{2})^2 \times \frac{1}{6} + (2 - \frac{7}{2})^2 \times \frac{1}{6} + \ldots + (6 - \frac{7}{2})^2 \times \frac{1}{6} \\ &\approx 2,92 \end{aligned}$$

Exemple 1, Question 1

Pour la variance, on écrit :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_k [k - \mathbb{E}(X)]^2 \times \mathbb{P}(X = k) \\ &= (1 - \frac{7}{2})^2 \times \frac{1}{6} + (2 - \frac{7}{2})^2 \times \frac{1}{6} + \ldots + (6 - \frac{7}{2})^2 \times \frac{1}{6} \\ &\approx 2,92 \end{aligned}$$

On aurait aussi pu écrire :

Exemple 1, Question 1

Pour la variance, on écrit :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_k [k - \mathbb{E}(X)]^2 \times \mathbb{P}(X = k) \\ &= (1 - \frac{7}{2})^2 \times \frac{1}{6} + (2 - \frac{7}{2})^2 \times \frac{1}{6} + \ldots + (6 - \frac{7}{2})^2 \times \frac{1}{6} \\ &\approx 2,92 \end{aligned}$$

On aurait aussi pu écrire :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \left[\sum_k k^2 \times \mathbb{P}(X = k)\right] - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + \ldots + 6^2 \times \frac{1}{6} - (\frac{7}{2})^2 \end{aligned}$$

Exemple 1, Question 2

Fonction de répartition de X : $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$

Exemple 1, Question 2

Fonction de répartition de X : $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$

On a :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ & \\ & \\ & \end{cases}$$

Exemple 1, Question 2

Fonction de répartition de X : $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$

On a :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1/6 & \text{si } t < 2 \\ & \\ & \\ & \end{cases}$$

Exemple 1, Question 2

Fonction de répartition de X : $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$

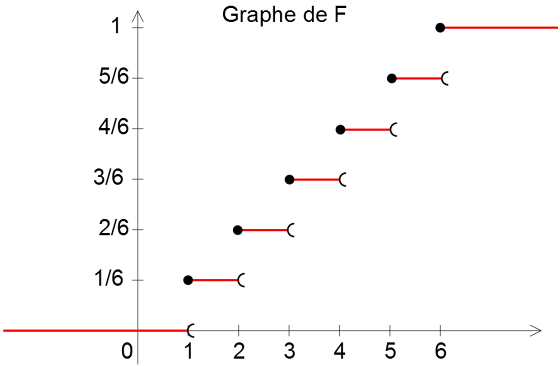
On a :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1/6 & \text{si } t < 2 \\ 2/6 & \text{si } t < 3 \\ 3/6 & \text{si } t < 4 \\ 4/6 & \text{si } t < 5 \\ 5/6 & \text{si } t < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \leq t \end{cases}$$

Exemple 1, Question 2

Graphe de la fonction de répartition de X :

$t \mapsto F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$



Exemple 1, Question 3

On a :

$$G = 3X + 5$$

Exemple 1, Question 3

On a :

$$G = 3X + 5$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G) &= 3 \times \mathbb{E}(X) + 5 \\ &= 3 \times \frac{7}{2} + 5 \\ &= \frac{31}{2} = 15,5 \end{aligned}$$

Exemple 1, Question 3

On a :

$$G = 3X + 5$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G) &= 3 \times \mathbb{E}(X) + 5 \\ &= 3 \times \frac{7}{2} + 5 \\ &= \frac{31}{2} = 15,5 \end{aligned}$$

Ainsi, on gagne en moyenne 15,5 euros à ce jeu.

Exemple 2, paramétres

Exemple 2

On lance deux fois un dè équilibré. Les deux lancés sont indépendants. Soit X_1 le nombre obtenu au premier lancé et X_2 le nombre obtenu au deuxième lancé. Soit enfin $Z = X_1 - X_2$ et $Z' = X_2 - X_1$.

Exemple 2, paramétres

Exemple 2

On lance deux fois un dè équilibré. Les deux lancés sont indépendants. Soit X_1 le nombre obtenu au premier lancé et X_2 le nombre obtenu au deuxième lancé. Soit enfin $Z = X_1 - X_2$ et $Z' = X_2 - X_1$.

1. Donnez les paramétres de Z et Z'.

Exemple 2, paramétres

Loi de Z

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(Z = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Exemple 2, paramétres

Loi de Z

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(Z=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Sans calcul, le bon sens doit vous indiquer que :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Z') = 0.$$

Exemple 2, paramétres

Loi de Z

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(Z = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Sans calcul, le bon sens doit vous indiquer que :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Z') = 0.$$

Pour la variance, on doit faire le calcul :
$Var(Z) = \mathbb{E}(Z^2) = (-5)^2 \times \frac{1}{36} + (-4)^2 \times \frac{2}{36} + \ldots + (5)^2 \times \frac{1}{36} \approx 5,83$

Exemple 2, paramétres

Loi de Z

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(Z=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Sans calcul, le bon sens doit vous indiquer que :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Z') = 0.$$

Pour la variance, on doit faire le calcul :
$Var(Z) = \mathbb{E}(Z^2) = (-5)^2 \times \frac{1}{36} + (-4)^2 \times \frac{2}{36} + \ldots + (5)^2 \times \frac{1}{36} \approx 5,83$
Puis $Var(Z) = Var(Z')$.

Exemple 3, paramétres

Exemple 3

On lance un pièce biaisée. On suppose que la proba d'obtenir "pile" est un nombre $p \in [0; 1]$ fixé.

Exemple 3, paramétres

Exemple 3

On lance un pièce biaisée. On suppose que la proba d'obtenir "pile" est un nombre $p \in [0;1]$ fixé. Soit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 3, paramétres

Exemple 3

On lance un pièce biaisée. On suppose que la proba d'obtenir "pile" est un nombre $p \in [0; 1]$ fixé. Soit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Paramétres de X ?

Exemple 3, paramétres

Exemple 3, paramétres

$$X : \Omega \to \{0; 1\}$$

Exemple 3, paramétres

$$X : \Omega \to \{0; 1\}$$

Loi de X

k	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$1 - p$	p

Exemple 3, paramétres

$$X : \Omega \to \{0; 1\}$$

Loi de X

k	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$1 - p$	p

Donc,

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Exemple 3, paramétres

$$X : \Omega \to \{0; 1\}$$

Loi de X

k	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$1 - p$	p

Donc,

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Puis,

$$\begin{aligned} Var(X) &= (0-p)^2 \times \mathbb{P}(X = 0) + (1-p)^2 \times \mathbb{P}(X = 1), \\ &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p, \\ &= p(1-p). \end{aligned}$$