MÉTHODES MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR **10**

Aide-mémoire d'analyse

HEINRICH MATZINGER

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

MÉTHODES MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR **10**

Aide-mémoire d'analyse

HEINRICH MATZINGER

Publié sous la direction d'Alfred Wohlhauser

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

La collection ***Méthodes mathématiques pour l'ingénieur***, dirigée par Alan Ruegg, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, a pour but de mettre à disposition des étudiants ingénieurs et des ingénieurs praticiens des ouvrages rédigés dans un langage aussi élémentaire que possible sans pour autant abandonner un niveau de rigueur indispensable en mathématiques. C'est ainsi que les auteurs de cette collection ont parfois sacrifié des démonstrations formelles et des développements théoriques au profit d'une présentation plus intuitive et plus motivante des concepts et idées essentielles. Chaque volume comprend un certain nombre d'exemples résolus qui mettent en évidence l'utilisation des résultats présentés. Ces volumes peuvent donc servir comme support à des cours d'introduction, mais ils s'adressent également à toutes les personnes désirant s'initier aux différentes branches des mathématiques appliquées.

1 *Analyse numérique*, Kurt Arbenz et Alfred Wohlhauser
2 *Compléments d'analyse*, Kurt Arbenz et Alfred Wohlhauser
3 *Variables complexes*, Kurt Arbenz et Alfred Wohlhauser
4 *Probabilités et statistique*, Alan Ruegg
5 *Exercices avec solutions* (Compl. aux volumes 1, 2 et 3), Otto Bachmann
6 *Processus stochastiques*, Alan Ruegg
7 *Eléments d'analyse numérique et appliquée*, Kurt Arbenz et Otto Bachmann
8 *Méthodes constructives de la géométrie axiale*, Alan Ruegg et Guido Burmeister
9 *Introduction à la statistique*, Stephan Morgenthaler

Les Presses polytechniques et universitaires romandes sont une fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, d'autres universités francophones ainsi que des écoles techniques supérieures. Le catalogue de leurs publications peut être obtenu par courrier aux Presses polytechniques et universitaires romandes, EPFL – Centre Midi, CH-1015 Lausanne, par E-Mail à ppur@epfl.ch, par téléphone au (0)21 693 41 40, ou par fax au (0)21 693 40 27.

Vous pouvez consulter notre catalogue général sur notre site web http://www.ppur.org

Composition et mise en page: Marie-Hélène Gellis

Première édition
ISBN 2-88074-444-X

Imprimé en Italie

Le présent aide-mémoire d'analyse du Professeur Heinrich Matzinger (1931-1997) résume le cours d'Analyse de base pour ingénieurs tel qu'il fut enseigné par celui-ci pendant de nombreuses années à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.

Grâce à l'initiative des Presses polytechniques et universitaires romandes, ce résumé est à nouveau à disposition des étudiants et ceci sous une forme entièrement recomposée.

Je les remercie de m'avoir confié la tâche de revoir le texte; je l'ai laissé le plus proche possible de la version prévue par son auteur.

Alfred Wohlhauser

Table des matières

Chapitre 1 LIMITES ET CONTINUITÉ

1.1 Remarques à propos des nombres réels ... 1

1.1.1 Sous-ensembles de nombres réels ... 1

1.1.2 Distance, voisinage ... 2

1.1.3 Nombres rationnels et nombres réels ... 3

1.2 Limite d'une suite numérique ... 5

1.2.1 Notion de limite ... 5

1.2.2 Critère de Cauchy ... 5

1.2.3 Généralisation : lim sup, lim inf ... 6

1.3 Limite d'une fonction ... 6

1.3.1 Limite quand x tend vers l'infini ... 6

1.3.2 Limite quand x tend vers x_0 ... 7

1.4 Fonctions continues ... 7

1.4.1 Fonctions continues dans un ensemble fermé ... 8

1.5 Calcul de limites ; séries ... 8

1.5.1 Limites de suites numériques ... 8

1.5.2 Limite d'une fonction ... 9

1.5.3 Notion de série numérique ... 10

Chapitre 2 NOMBRES COMPLEXES

2.1 Opérations élémentaires sur les nombres complexes ... 11

2.1.1 Représentation graphique ... 11

2.1.2 Forme trigonométrique des nombres complexes (forme polaire) ... 12

2.1.3 Comment calculer avec les nombres complexes ? ... 12

2.1.4 Addition et soustraction des nombres complexes ... 12

2.1.5 Multiplication des nombres complexes 12

2.1.6 Division des nombres complexes 13

2.1.7 Nombres complexes conjugués 14

2.1.8 Règles de calcul pour les nombres conjugués 14

2.1.9 Puissances $n^{\text{ièmes}}$ des nombres complexes 15

2.1.10 Racines $n^{\text{ièmes}}$ des nombres complexes 15

2.2 Formules d'Euler et de de Moivre, fonctions exponentielle et logarithme 16

2.2.1 Formules d'Euler 16

2.2.2 Les trois représentations des nombres complexes .. 17

2.2.3 Formule de de Moivre 17

2.2.4 Fonction exponentielle 17

2.2.5 Logarithme 17

2.3 Fonctions hyperboliques 18

2.3.1 Graphes des fonctions hyperboliques 18

2.3.2 Quelques identités 19

2.3.3 Relations entre fonctions hyperboliques et trigonométriques 19

2.4 Fonctions rationnelles 19

2.4.1 Décomposition de polynôme en facteurs irréductibles 19

2.4.2 Partie entière d'une fonction rationnelle 20

2.4.3 Décomposition d'une fraction proprement dite 20

2.5 Oscillations harmoniques 24

2.5.1 Méthode complexe (idée générale) 24

2.5.2 Représentation complexe des oscillations harmoniques 24

2.5.3 Addition (superposition) d'oscillations harmoniques de même fréquence 25

CHAPITRE 3 CALCUL DIFFÉRENTIEL DE FONCTIONS D'UNE VARIABLE

3.1 Dérivées 29
3.1.1 Fonctions dérivables et fonctions continues 30
3.1.2 Généralisations : dérivée à gauche, dérivée à droite 30
3.1.3 Théorème des accroissements finis (théorème de la moyenne) 30
3.1.4 Théorème de Rolle (cas particulier du théorème des accroissements finis) 31
3.1.5 Généralisation du théorème des accroissements finis 32
3.1.6 Fonctions dont la dérivée s'annule 32
3.1.7 Dérivées de quelques fonctions élémentaires 33
3.2 Méthodes de calcul de dérivées, dérivées d'ordre supérieur 33
3.2.1 Règles de dérivation 33
3.2.2 Liste de dérivées 34
3.2.3 Dérivées d'ordre supérieur 34
3.2.4 Dérivées de «fonctions vectorielles» 35
3.2.5 Fonctions complexes d'une variable réelle 35
3.3 Fonctions trigonométriques inverses et fonctions hyperboliques inverses 36
3.3.1 Fonctions trigonométriques inverses 36
3.3.2 Fonctions hyperboliques inverses 39
3.4 Etude de fonctions 40
3.5 Courbes paramétrées 44
3.5.1 Courbes paramétrées, vecteur tangent, vecteur normal 44

3.6 Maxima et minima ... 48
3.6.1 Valeurs stationnaires ... 49
3.6.2 Extrema locaux (ou extrema relatifs) ... 49
3.6.3 Extrema absolus ... 50
3.7 Approximation linéaire; différentielles ... 51
3.7.1 Approximation (locale) linéaire d'une fonction ... 51
3.7.2 Différentielles ... 53
3.8 Précision de l'approximation linéaire ... 55
3.8.1 Que vaut l'approximation linéaire ? ... 55
3.8.2 Précision en un point ... 55
3.8.3 Précision dans un intervalle ... 56

CHAPITRE 4 INTÉGRALES DE FONCTIONS D'UNE VARIABLE
4.1 Intégrale définie ... 57
4.1.1 Calcul approché de certaines aires ... 57
4.1.2 Intégrale de Riemann ... 60
4.1.3 Intégrales et aires ... 62
3.4.4 Intégrale et travail ... 63
4.2 Propriétés de l'intégrale définie ... 63
4.2.1 Quelques propriétés élémentaires ... 63
4.2.2 Théorème de la moyenne ... 65
4.2.3 Changement du symbole de la variable d'intégration ... 66
4.3 Intégrale indéfinie (primitive) ... 66
4.3.1 Primitive ... 66
4.3.2 Recherche de primitives ... 67
4.4 Intégration de fonctions rationnelles ... 69
4.4.1 Fonctions rationnelles ... 69
4.4.2 Fonctions rationnelles de fonctions trigonométriques ... 72

4.5 Théorème fondamental du calcul infinitésimal 72
4.5.2 Méthode d'intégration 74
4.5.3 Dérivées d'intégrales dépendant de leurs limites .. 75
4.6 Intégrales généralisées (appelées aussi intégrales impropres) 75
4.6.1 Intégrales avec des bornes infinies (intégrales impropres de seconde espèce) 75
4.6.2 Intégrales de certaines fonctions discontinues (intégrales impropres de première espèce) 78
4.7 Applications des intégrales 80
4.7.1 Aire sous une courbe paramétrée 80
4.7.2 Aire délimitée par une courbe fermée 81
4.7.3 Aire en coordonnées polaires 81
4.7.4 Longueur d'un arc de courbe (plane) 82
4.7.5 Longueur d'un arc paramétré 82
4.7.6 Abscisse curviligne comme paramètre 83
4.7.7 Abscisse curviligne et vecteur tangent 83
4.7.8 Volume 84
4.7.9 Volume d'un corps de révolution 84
4.7.10 Aire d'une surface de révolution 84
4.8 Courbure, cercle osculateur 85
4.8.1 Calcul de la courbure 85
4.8.2 Rayon de courbure, cercle osculateur et centre de courbure 86
CHAPITRE 5 SÉRIES
5.1 Séries numériques, séries alternées 87
5.1.1 Séries numériques 87
5.1.2 Séries alternées 88

5.1.3 Convergence absolue ... 89
5.1.4 Séries complexes ... 90
5.2 Séries à termes positifs, critères de convergence ... 90
5.2.1 Tests de d'Alembert et de Cauchy (test du quotient et test de la racine $n^{\text{ième}}$) ... 91
5.2.2 Cas particulier des tests de d'Alembert et de Cauchy ... 92
5.2.3 Comparaison avec une intégrale ... 92
5.3 Suite de fonctions, séries de fonctions, convergences simple et uniforme ... 93
5.3.1 Suites de fonctions réelles ... 93
5.3.2 Séries de fonctions réelles ... 95

CHAPITRE 6 SÉRIES DE TAYLOR

6.1 Approximations locales par des polynômes ... 97
6.2 Formule de Taylor ... 99
6.2.1 Précision de l'approximation linéaire ... 99
6.2.2 Une autre définition de la dérivée ... 100
6.2.3 Précision de l'approximation d'ordre n ... 101
6.3 Séries de Taylor ... 102
6.3.1 La notion de série de Taylor ... 102
6.3.2 Exemples de fonctions entières ... 103
6.4 Domaine de convergence ... 104
6.4.1 Convergence des séries entières ... 104
6.4.2 Calcul du rayon de convergence ... 106
6.4.3 Convergence et singularités ... 106
6.5 Opérations élémentaires sur les séries entières ... 107
6.6 Intégration et dérivation des séries entières ... 110

Chapitre 7 CALCUL DIFFÉRENTIEL DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

7.1 Fonctions différentiables, dérivées partielles 111

7.1.1 Fonctions différentiables 111

7.1.2 Dérivées partielles 112

7.1.3 Fonctions différentiables et dérivées partielles ... 114

7.1.4 Différentielles totales 115

7.1.5 Application : propagation d'erreurs de mesure ... 115

7.1.6 Commutativité des dérivées partielles 116

7.2 Dérivées de fonctions composées 116

7.2.1 Dérivée totale (ou dérivée le long d'une courbe) . 116

7.2.2 Dérivées partielles de fonctions composées 117

7.2.3 Dérivées de fonctions implicites 118

7.3 Dérivée directionnelle, gradient 119

7.3.1 Dérivée suivant une direction donnée (dérivée directionnelle) 119

7.3.2 Notion de «champ» 120

7.3.3 Gradient 120

7.4 Développement de Taylor 121

7.5 Maxima et minima 122

7.5.1 Trois problèmes à distinguer 122

7.5.2 Résolution des trois problèmes 124

7.6 Extrema liés (multiplicateurs de Lagrange) 125

7.6.1 Valeurs stationnaires avec contraintes 125

7.6.2 Généralisations 126

Chapitre 8 INTÉGRALES DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

8.1 Intégrales doubles 127
8.1.1 Calcul de certains volumes 127
8.1.2 Intégrales doubles en général 131
8.2 Changement de variables dans une intégrale double 132
8.2.1 Jacobien 132
8.2.2 Intégrales doubles en coordonnées curvilignes 133
8.3 Intégrales triples 133
8.3.1 Coordonnées cartésiennes 133
8.3.2 Coordonnées curvilignes 134
8.3.3 Applications 135
8.3.4 Formule de Steiner-Huygens 136
8.4 Intégrales dépendant d'un paramètre 137
8.4.1 Limites d'intégration constantes 137
8.4.2 Limites d'intégration variables 137

Chapitre 9 CHAMPS VECTORIELS PLANS ET POTENTIELS

9.1 Intégrales curvilignes planes 139
9.1.1 Définition des intégrales curvilignes 139
9.1.2 Calcul des intégrales curvilignes en coordonnées cartésiennes 140
9.1.3 Existence de l'intégrale curviligne 141
9.1.4 Exemples d'intégrales curvilignes 141
9.1.5 Indépendance de la paramétrisation 142
9.1.6 Règles de calcul 142
9.1.7 Formule de Riemann-Green 143
9.2 Gradient et potentiel 144
9.2.2 Recherche du potentiel 145

9.3 Différentielles totales 146
9.3.1 Formes différentielles 146
9.3.2 Intégration des formes différentielles 146
9.3.3 Analogies entre champs vectoriels et formes différentielles 147

CHAPITRE 10 EXEMPLES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE 1

10.1 Croissance exponentielle 149
10.2 Equations à variables séparées, changement de variables, équations homogènes 150
10.2.1 Equations à variables séparées 150
10.2.2 Changement de variables 151
10.2.3 Equations homogènes 152
10.3 Equation aux différentielles totales, facteur intégrant ... 153
10.3.1 Equation différentielle des lignes de niveau 153
10.3.2 Intégration des équations aux différentielles totales 153
10.3.3 Facteur intégrant 154
10.4 Familles de courbes, enveloppes, équation de Clairaut .. 154
10.4.1 Famille de courbes 154
10.4.2 Enveloppes d'une famille de courbes 155
10.4.3 Equation de Clairaut 155
10.5 Existence et unicité 156
10.5.1 Théorème d'existence et d'unicité 156
10.5.2 Approximation successive 157

CHAPITRE 11 EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

11.1 L'équation $y' + ay = f(x)$ 159
11.1.1 L'équation homogène $y' + ay = 0$ 159

11.1.2 L'équation non homogène $y' + ay = f(x)$ 160

11.1.3 Recherche d'une solution particulière 160

11.2 L'équation $y'' + ay' + by = 0$ 161

11.2.1 Structure de l'ensemble des solutions 161

11.2.2 Recherche de deux solutions linéairement indépendantes 161

11.3 L'équation $y'' + ay' + by = f(x)$ 162

11.3.1 La solution générale 162

11.3.2 Recherche d'une solution particulière 163

11.4 Seconds membres particuliers 164

11.4.1 Oscillations forcées 164

11.5 L'équation $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$ 166

11.5.1 Recherche de n solutions linéairement indépendantes 166

11.5.2 Problème aux valeurs initiales 167

11.5.3 Wronskien 168

11.6 L'équation $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$ 169

11.6.1 Solution générale 169

11.6.2 Recherche d'une solution particulière 169

CHAPITRE 12 EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS VARIABLES

12.1 Ensemble des solutions d'une équation linéaire 173

12.1.1 Equation homogène 173

12.1.2 Equation non homogène 174

12.2 Equation d'Euler 175

12.3 L'équation $y' + a(x)y = f(x)$ 176

12.3.1 L'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ 176

12.3.2 L'équation non homogène $y' + a(x)y = f(x)$ 176

12.4 Equations à coefficients analytiques 176

CHAPITRE 13 MÉTHODES PARTICULIÈRES, EXEMPLES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES

13.1 Abaissement de l'ordre ... 179

13.2 Exemples d'équations non linéaires ... 180

13.2.1 Equation de Bernoulli ... 180

13.2.2 Equation de Riccati ... 180

Chapitre 1

Limites et continuité

1.1 Remarques à propos des nombres réels

1.1.1 Sous-ensembles de nombres réels

Intervalles

Intervalle fermé

$$[\,a\,,\,b\,] = \big\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\big\}$$

Intervalle ouvert

$$]\,a\,,\,b\,[\, = \big\{x \mid a < x < b\big\}$$

Intervalle semi-ouvert à droite

$$[\,a\,,\,b\,[\, = \big\{x \mid a \leqslant x < b\big\}$$

Intervalle semi-ouvert à gauche

$$]\,a\,,\,b\,] = \big\{x \mid a < x \leqslant b\big\}$$

Intervalles illimités fermés :

$$[\,a\,,\,\infty\,[\, = \big\{x \mid a \leqslant x\big\}$$

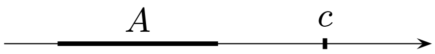
$$]\,-\infty\,,\,b\,] = \big\{x \mid x \leqslant b\big\}$$

Intervalles illimités ouverts :

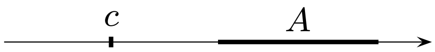
$$]\, a\,,\, \infty\,[\; = \{x \mid a < x\}$$

$$]\, -\infty\,,\, b\,[\; = \{x \mid x < b\}$$

Ensembles majorés et minorés
c est appelé *majorant* de $A \subset \mathbb{R}$ si $A \leqslant c$.



c est appelé *minorant* de $A \subset \mathbb{R}$ si $c \leqslant A$.



A est dit *majoré* s'il existe (au moins) un majorant.
A est dit *minoré* s'il existe (au moins) un minorant.
A est dit *borné* s'il est majoré et minoré.

Plus grand et plus petit éléments
c est appelé le *plus grand élément* de $A \subset \mathbb{R}$ si $c \in A$, $A \leqslant c$.
c est appelé le *plus petit élément* de $A \subset \mathbb{R}$ si $c \in A$, $c \leqslant A$.

Exemple. L'intervalle $]\, a\,,\, b\,]$ n'a pas de plus petit élément, mais il en a un plus grand.

1.1.2 Distance, voisinage

«Distance» de deux nombres réels

Définition. $d(x, y) = |x - y|$.

Inégalité du triangle : $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (pour tous x, y, z réels).

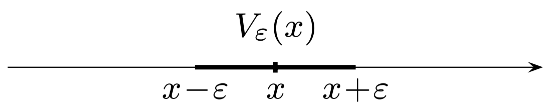
Invariance de la distance par translation : $d(x, y) = d(x + c, y + c)$ (quels que soient x, y, c réels).

Sous-additivité des valeurs absolues : $|x+y| \leqslant |x|+|y|$. Quelquefois cette inégalité est aussi appelée «inégalité du triangle».

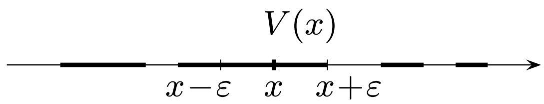
Voisinage d'un nombre réel

On appelle *ε-voisinage (ouvert)* de x.

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(x) &= \big\{ y \mid d(x,y) < \varepsilon \big\} \\ &= \,]\, x-\varepsilon\,,\, x+\varepsilon\,[\quad (\varepsilon > 0) \end{aligned}$$



On appelle *voisinage* de x tout ensemble contenant (au moins) un ε-voisinage de x. On écrit souvent $V(x)$.



Ensembles ouverts, ensembles fermés

On appelle *ensemble ouvert* une partie de $\mathbb{R}$ qui est voisinage de tous ses points.

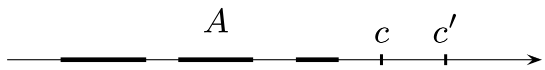
On appelle *ensemble fermé* une partie de $\mathbb{R}$ dont le complément est ouvert.

1.1.3 Nombres rationnels et nombres réels

Les nombres réels se distinguent des nombres rationnels essentiellement par *une* propriété. Cette propriété peut être exprimée de différentes manières. L'une d'elles est donnée ci-dessous (existence du sup), une autre (critère de Cauchy) se trouve dans le paragraphe ayant trait à la convergence des suites (§ 1.2.2). On dit que la droite réelle est *complète*. Cette propriété d'être complète est parfois formulée intuitivement, en disant : «il n'y a pas de trou dans la droite numérique».

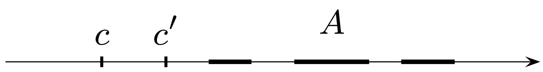
Ensemble des majorants

L'*ensemble des majorants* d'une partie (majorée) de $\mathbb{R}$ est un *intervalle illimité* : si c majore A, alors tout c' tel que $c < c'$ majore aussi A.



Question. L'ensemble des majorants a-t-il un plus petit élément ?

L'*ensemble des minorants* d'une partie (minorée) de $\mathbb{R}$ est un *invervalle illimité* : si c minore A, alors $c' < c$ minore aussi A.



Question. L'ensemble des minorants a-t-il un plus grand élément ?

Supremum, infimum

Si l'ensemble des majorants de A possède un plus petit élément, on l'appelle *supremum* de A ou *borne supérieure* de A (la borne supérieure est notée $\sup A$).

Si l'ensemble des minorants de A possède un plus grand élément, on l'appelle *infimum* de A ou *borne inférieure* de A (la borne inférieure est notée $\inf A$).

La droite réelle est «complète»

Axiome. Pour toute partie bornée A de la droite réelle, la *borne supérieure* ($\sup A$) et la *borne inférieure* ($\inf A$) existent. (On dit que la droite réelle est complète.)

1.2 Limite d'une suite numérique

1.2.1 Notion de limite

Soit a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n, $\ldots$ une *suite numérique*. Intuitivement parlant, un nombre a s'appelle alors la limite de la suite a_n, si *pour des indices n croissants, les nombres a_n s'approchent de a autant que l'on veut*. De façon précise :

> Définition. On dit que la suite numérique a_n *tend vers* a (ou *converge vers* a) si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$ (aussi petit soit-il), il existe un indice N tel que $n > N$ entraîne $|a_n - a| < \varepsilon$.

On peut donner beaucoup de définitions équivalentes de la notion de limite d'une suite numérique. Nous en citerons une deuxième.

> Définition (équivalente). On dit que la suite a_n *converge vers* a si, pour tout voisinage $V(a)$ du nombre a, il existe un indice N à partir duquel[1] tous les a_n se trouvent dans ce voisinage $V(a)$.

Si la suite a_n tend vers a, on dit qu'elle est *convergente* et que *sa limite est a*.

Si la suite ne tend vers aucune limite, elle est dite *divergente*.

1.2.2 Critère de Cauchy

Si l'on veut démontrer la convergence d'une suite a_n en appliquant la définition de limite, il faut d'abord connaître (ou deviner) cette limite présumée a. Le critère de Cauchy permet de démontrer la convergence d'une suite, sans savoir quelle en est la limite. *Intuitivement* parlant, le critère de Cauchy dit qu'une suite a_n converge si *pour des indices n et m suffisamment grands, les deux termes a_n et a_m sont aussi proches que l'on veut.* De façon précise :

[1] C'est-à-dire pour des indices $n > N$.

Proposition. La suite a_n converge si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit soit-il), il existe un indice N tel que n, $m > N$ entraîne $|a_n - a_m| < \varepsilon$ (critère de Cauchy).

1.2.3 Généralisation : $\limsup$, $\liminf$

Définition. On appelle le point a un *point d'accumulation* de la suite a_n, s'il existe une sous-suite qui converge vers a.

Définition

(1) Si la *suite* a_n est *bornée*, nous appelons :
limite supérieure de a_n le plus grand des points d'accumulation (notation $\limsup a_n$) ;
limite inférieure de a_n le plus petit des points d'accumulation (notation $\liminf a_n$).

(2) Si a_n n'est *pas majorée*, on dit que $\limsup a_n = \infty$.
Si a_n n'est *pas minorée*, on dit que $\liminf a_n = -\infty$.

1.3 Limite d'une fonction

1.3.1 Limite quand x tend vers l'infini

Définition. On dit que $f(x)$ *tend vers* a (*quand* x *tend vers* $+\infty$) si, pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit soit-il), il existe un nombre réel N (suffisamment grand) tel que $x > N$ entraîne $\bigl|f(x) - a\bigr| < \varepsilon$.

Notation. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$.

Définition analogue pour $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

En utilisant la notion de voisinage, on obtient la définition équivalente :

Définition. On dit que $f(x)$ *tend vers* a (quand x tend vers $+\infty$) si, pour tout voisinage $V(a)$ du point a, il existe une valeur N à partir de laquelle[(2)] $f(x)$ se trouve dans $V(a)$.

1.3.2 Limite quand x tend vers x_0

Définition. On dit que $f(x)$ *tend vers* a (quand x tend vers x_0) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que (pour $x \neq x_0$) $|x - x_0| < \delta$ entraîne $\big|f(x) - a\big| < \varepsilon$.

On peut ramener la convergence d'une fonction à la convergence de suites :

Définition (équivalente). On dit que $f(x)$ tend vers a (quand x tend vers x_0) si, pour toute suite x_n ($x_n \neq x_0$) qui converge vers x, la suite $f(x_n)$ converge vers a.

1.4 Fonctions continues

Définition. $f(x)$ est dite *continue au point* x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Définition (équivalente). $f(x)$ est dite *continue au point* x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ entraîne $\big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon$.

Définition (équivalente). $f(x)$ est dite *continue au point* x_0 si l'image réciproque $f^{-1}(V)$ de tout voisinage V de $f(x_0)$ est un voisinage de x_0.

(2) C'est-à-dire pour $x > N$.

Proposition

• Si $f(x)$, $g(x)$ sont continues en x_0, alors

(1) $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ sont continues en x_0;

(2) $f(x)/g(x)$ est continue en x_0 (si $g(x_0)\neq 0$).

• Si $f(x)$ est continue en x_0 et si $g(x)$ est continue en $f(x_0)$, alors

(3) $g\bigl(f(x)\bigr)$ est continue en x_0.

1.4.1 Fonctions continues dans un ensemble fermé

Soit $f(x)$ continue sur $[\,a\,,\,b\,]$. Sur cet intervalle la fonction

- est bornée,
- possède un maximum et un minimum,
- prend (une fois au moins) toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$ (théorème de la valeur intermédiaire),
- est *uniformément continue*. (Uniformément continue signifie : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ (qui ne dépend pas de $x \in [\,a\,,\,b\,]$ mais seulement de ε!) tel que $|x'-x''| < \delta$, x', $x'' \in [\,a\,,\,b\,]$, entraîne $\bigl|f(x')-f(x'')\bigr| < \varepsilon$.)

1.5 Calcul de limites ; séries

1.5.1 Limites de suites numériques

Règles de calcul

Proposition. Soient $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Alors

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ (si $b\neq 0$, $b_n \neq 0$).

Liste de quelques limites

a_n	$\lim a_n$	a_n	$\lim a_n$
$\dfrac{1}{n}$	0	$\dfrac{x^n}{n!}$ (x réel)	0
$\dfrac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$	0	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$	$\mathrm{e} = 2,718281\ldots$
$\sqrt[n]{a}$	1	$\sqrt[n]{n!}$	n'existe pas $(= \infty)$
$\sqrt[n]{n}$	1		

1.5.2 Limite d'une fonction

Règles de calcul

Proposition. Si pour $\lim\limits_{x\to+\infty}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$, $\lim\limits_{x\to x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0+}$, $\lim\limits_{x\to x_0-}$, on a $\lim f(x) = a$, $\lim g(x) = b$, alors

$$\lim\bigl(f(x) \pm g(x)\bigr) = a \pm b \qquad \lim\bigl(f(x)\cdot g(x)\bigr) = a\cdot b$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$$

si $b \neq 0$ et $g(x) \neq 0$.

Liste de quelques limites

Proposition

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

1.5.3 Notion de série numérique

Sommes partielles

Etant donnée la série $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$, on appelle

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

la *n-ième somme partielle* de la série.

Convergence d'une série numérique

Définition. La série $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ est dite *convergente*, si la suite des sommes partielles converge :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S \quad (s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\,.$$

S est alors appelée la *somme de la série*.

Notation. Si $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ converge vers S, on écrit $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S$.

Série géométrique $a + ap + ap^2 + ap^3 + \cdots$

La somme des n premiers termes est

$$a + ap + ap^2 + \cdots + ap^{n-1} = a\frac{1-p^n}{1-p}\,.$$

Proposition. La série géométrique $a + ap + ap^2 + \cdots$ $(a \neq 0)$ converge pour $|p| < 1$:

$$a + ap + ap^2 + \cdots = \frac{a}{1-p} \quad (|p| < 1)$$

(pour $|p| \geqslant 1$ elle diverge).

Chapitre 2

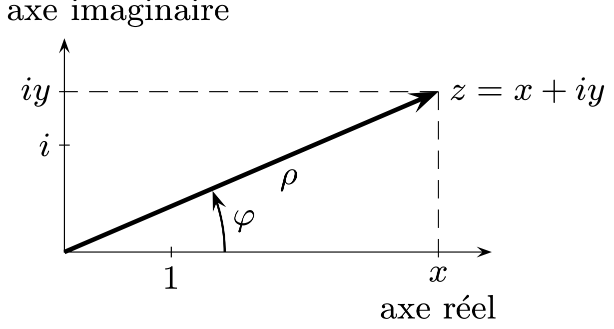
Nombres complexes

2.1 Opérations élémentaires sur les nombres complexes

Unité imaginaire i : $i^2 = -1$.
Nombres complexes z : $z = \underbrace{x}_{\substack{\text{partie}\\ \text{réelle}}} + \underbrace{iy}_{\substack{\text{partie}\\ \text{imaginaire}}}$.

2.1.1 Représentation graphique

Partie réelle de $z = x = \mathrm{Re}(z)$.
Partie imaginaire de $z = y = \mathrm{Im}(z)$.
Argument de $z = \varphi = \arg(z)$.
Module ou *valeur absolue de* $z = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Remarque. $\arg(z)$ n'est défini qu'à $2k\pi$ près (k entier).

2.1.2 Forme trigonométrique des nombres complexes (forme polaire)

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

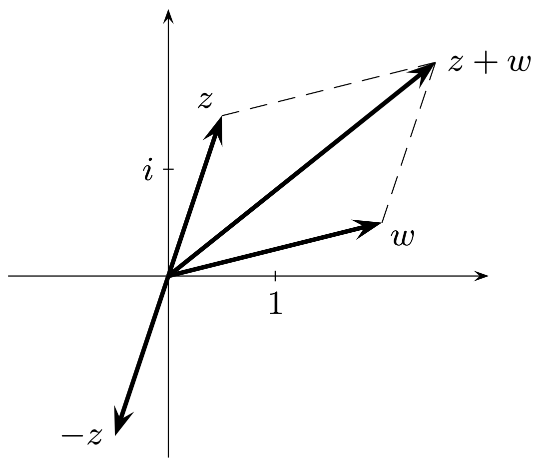
2.1.3 Comment calculer avec les nombres complexes ?

Comme avec des polynômes dont l'indéterminée est appelée i, mais en posant $i^2 = -1$.

2.1.4 Addition et soustraction des nombres complexes

Si $z = x + iy$ et $w = u + iv$, alors

$$\begin{aligned} z \pm w &= (x \pm u) + i(y \pm v) \\ -z &= -x - iy \end{aligned}$$



2.1.5 Multiplication des nombres complexes

Si $z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ et $w = u + iv = \sigma(\cos\psi + i\sin\psi)$, alors

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (x + iy) \cdot (u + iv) = xu + ixv + iyu + \underbrace{i^2}_{-1} yv \\ &= xu - yv + i(xv + yu) \end{aligned}$$

Forme trigonométrique

$$\begin{aligned} z \cdot w &= \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot\sigma(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= \rho\sigma\big(\cos\varphi\cdot\cos\psi - \sin\varphi\cdot\sin\psi + i(\cos\varphi\cdot\sin\psi + \sin\varphi\cdot\cos\psi)\big) \\ &= \rho\sigma\big(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\big) \end{aligned}$$

Multiplier deux nombres complexes revient donc à *multiplier leurs modules* et *additionner leurs arguments.*

2.1.6 Division des nombres complexes

Si $z = a + ib = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ et $w = c + id = \sigma(\cos\psi + i\sin\psi)$, alors

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id} &= \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} \\ &= \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \end{aligned}$$

Forme trigonométrique

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\sigma(\cos\psi + i\sin\psi)} = \frac{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi - i\sin\psi)}{\sigma\,\underbrace{(\cos\psi + i\sin\psi)(\cos\psi - i\sin\psi)}_{=\cos^2\psi+\sin^2\psi=1}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\rho}{\sigma}\big(\cos\varphi\cdot\cos\psi + \sin\varphi\cdot\sin\psi + i(\sin\varphi\cdot\cos\psi - \cos\varphi\cdot\sin\psi)\big) \\ &= \frac{\rho}{\sigma}\big(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)\big) \end{aligned}$$

Diviser deux nombres complexes revient donc à *diviser leurs modules* et *soustraire leurs arguments.*

Cas particulier

Inverse d'un nombre complexe :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

Forme trigonométrique

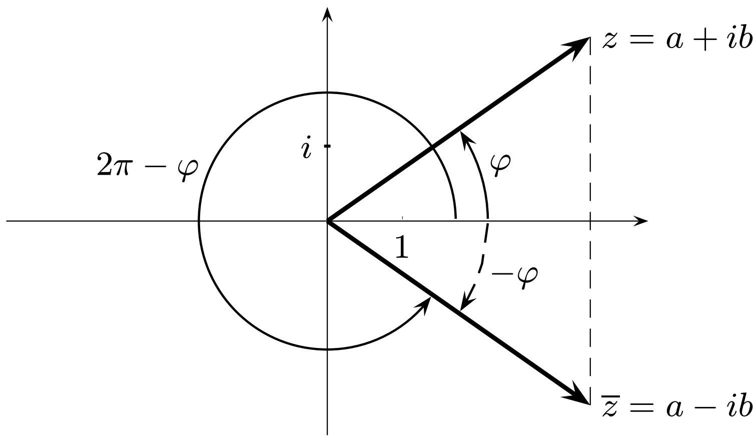
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{\rho\underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}_{=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1}}$$

$$= \frac{1}{\rho}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

2.1.7 Nombres complexes conjugués

Nombres conjugués : $z = a + ib$, $\overline{z} = a - ib$.

Forme trigonométrique. $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\overline{z} = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)$.



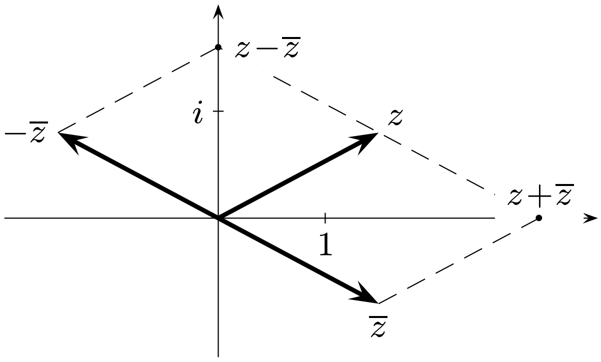
Remarque. $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ d'où $\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$.

2.1.8 Règles de calcul pour les nombres conjugués

$$z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = \rho^2 = |z|^2$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \qquad \overline{(z^n)} = (\overline{z})^n \qquad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$



2.1.9 Puissances $n^{\text{ièmes}}$ des nombres complexes

Si $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, alors

$$z^2 = z \cdot z = \rho^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

Calculer le carré d'un nombre complexe revient à trouver le *carré du module* et le *double de l'argument.*

$$z^n = z \cdot z \cdots z = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Calculer la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe revient à trouver la *puissance* $n^{\text{ième}}$ *du module* et n fois l'argument.

Nombres de module 1, formule de de Moivre

Si $|z| = \rho = 1$, alors

$$\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \qquad \text{(formule de de Moivre)}$$

2.1.10 Racines $n^{\text{ièmes}}$ des nombres complexes

Définition. w est appelé racine $n^{\text{ième}}$ de z si $z = w^n$.

Calcul des racines $n^{\text{ièmes}}$

Soit $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; on cherche : $w = \sigma(\cos\psi + i\sin\psi)$ tel que $z = w^n$.

On a $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sigma^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$ d'où

$$\rho = \sigma^n \quad \text{et} \quad \varphi \equiv n\psi (\operatorname{mod} 2\pi)$$

où $\varphi + 2k\pi = \psi$, donc

$$\sigma = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (k \text{ entier})$$

Pour $z \neq 0$, il y a n *racines* $n^{\text{ièmes}}$ *différentes* situées sur un cercle de rayon $\sqrt[n]{|z|}$ et formant un polygone régulier.

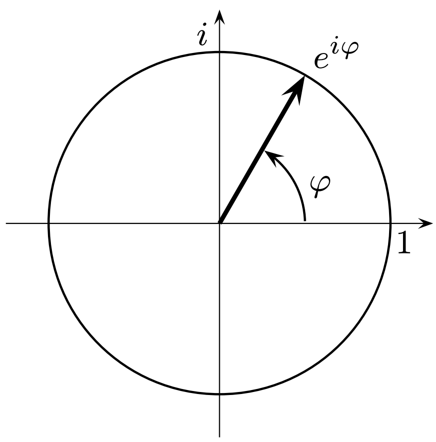
2.2 Formules d'Euler et de de Moivre, fonctions exponentielle et logarithme

2.2.1 Formules d'Euler

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi \\ \mathrm{e}^{-i\varphi} &= \cos\varphi - i\sin\varphi \end{aligned}$$

Interprétation géométrique des formules d'Euler

$e^{i\varphi}$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument φ.



Expression de $\cos\varphi$ et de $\sin\varphi$ par la fonction exponentielle

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{i\varphi} - \mathrm{e}^{-i\varphi}}{2i}$$

2.2.2 Les trois représentations des nombres complexes

(1) $z = x + iy$, surtout utile pour l'addition et la soustraction ;

(2) $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, pour passer de la représentation (3) à la représentation (1) ;

(3) $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ simplifie souvent les multiplications, divisions, puissances et racines.

2.2.3 Formule de de Moivre

$$\left(\mathrm{e}^{i\varphi}\right)^n = \mathrm{e}^{in\varphi}$$

2.2.4 Fonction exponentielle

Soit $z = x + iy$; alors $w = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x \cos y + i\,\mathrm{e}^x \sin y$.

On a donc

$$|w| = \mathrm{e}^x \qquad \arg w \equiv y \pmod{2\pi}$$
$$\operatorname{Re} w = \mathrm{e}^x \cos y \qquad \operatorname{Im} w = \mathrm{e}^x \sin y$$

2.2.5 Logarithme

DÉFINITION. $\log w = z$ équivaut à $w = \mathrm{e}^z$.

Posons $z = x + iy$: $\log w = x + iy$ équivaut à $w = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{iy}$, avec $\mathrm{e}^x = |w|$ et $y = \arg w$, d'où

$$\log w = \ln|w| + i(\psi + 2k\pi) \qquad \text{où } \psi = \arg w$$

Pour retrouver rapidement cette formule :

$$\log w = \log\sigma\,\mathrm{e}^{i\psi} = \log\sigma + \log\mathrm{e}^{i(\psi+2k\pi)} = \log\sigma + i(\psi + 2k\pi)$$

2.3 Fonctions hyperboliques

Définitions

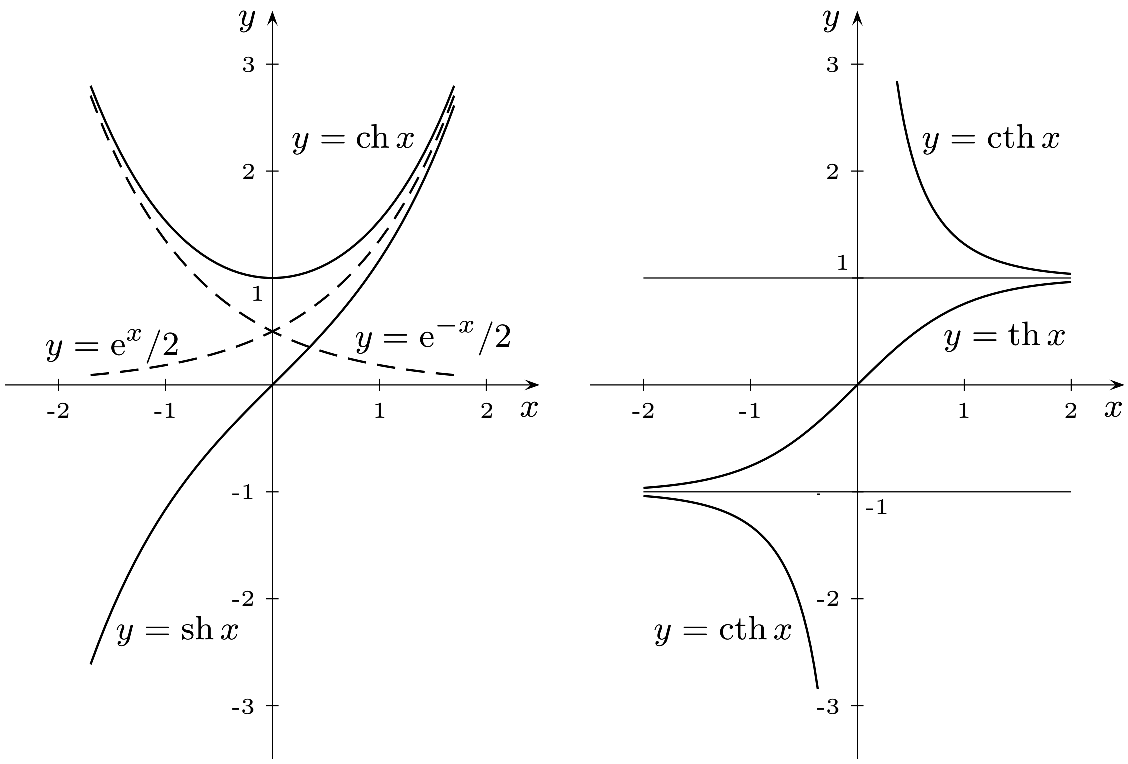
$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$: sinus hyperbolique ;

$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$: cosinus hyperbolique ;

$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: tangente hyperbolique ;

$\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$: cotangente hyperbolique.

2.3.1 Graphes des fonctions hyperboliques



2.3.2 Quelques identités

Les fonctions hyperboliques satisfont à des identités analogues à celles des fonctions trigonométriques.

Les cinq formules les plus usuelles dans la suite sont précédées par un point gras.

• $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$	
• $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$ • $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$ $\operatorname{th}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$	$\operatorname{sh} \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}$ $\operatorname{ch} \dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}$
• $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$ • $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$ $\operatorname{th} 2x = \dfrac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$	$\operatorname{th} \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}} = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1} = \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x}$ (+ pour $x > 0$; − pour $x < 0$)

2.3.3 Relations entre fonctions hyperboliques et trigonométriques

$$\begin{cases} \cos z = \operatorname{ch} iz \\ \sin z = -i \operatorname{sh} iz \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{ch} z = \cos iz \\ \operatorname{sh} z = -i \sin iz \end{cases}$$

2.4 Fonctions rationnelles

2.4.1 Décomposition de polynôme en facteurs irréductibles

(1) *Polynômes à coefficients complexes ; facteurs complexes*

«Théorème fondamental de l'algèbre». Tout polynôme du type $P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n$ peut être décomposé en facteurs linéaires :

$$P(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_n) \qquad \text{où } z_k = \alpha_k + i\beta_k$$

(2) *Polynômes à coefficients réels ; facteurs complexes admis*
Tout polynôme du type $P(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n$ peut être décomposé en n facteurs linéaires. On trouve deux types de facteurs :
les facteurs réels : $(x - a)$, a réel ;
les facteurs complexes : si $\big(x-(\alpha+i\beta)\big)$ est un facteur de $P(x)$, alors $\big(x - (\alpha - i\beta)\big)$ est aussi un facteur de $P(x)$.

(3) *Polynômes réels ; facteurs réels*
La décomposition en r *facteurs linéaires* et s *facteurs de degré* 2 est possible.
Les facteurs de degré 2 sont du type $\big(x-(\alpha+i\beta)\big)\cdot\big(x-(\alpha-i\beta)\big) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$ ($r + 2s = n$; voir ci-dessus).

2.4.2 Partie entière d'une fonction rationnelle

Soit $R(x) = P(x)/Q(x)$ avec : degré $P \geqslant$ degré Q.

Par une « division avec reste », on peut décomposer la fonction rationnelle en une somme d'un polynôme (partie entière) et d'une fraction proprement dite (partie fractionnaire) :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{\widetilde{P}(x)}{Q(x)} \qquad (\text{degré } \widetilde{P} < \text{ degré } Q)$$

$S(x)$ est la partie entière (polynôme), $\widetilde{P}(x)/Q(x)$ la partie fractionnaire.

2.4.3 Décomposition d'une fraction proprement dite

Toute fraction proprement dite peut être décomposée en une somme de certaines fractions standardisées (éléments simples) qui sont,

soit du type $\dfrac{\alpha}{(x-a)^k}$,

soit du type $\dfrac{\beta x + \gamma}{\left(x^2 + bx + c\right)^k}$.

Comment décomposer ?

Soit $\widetilde{P}(x)/Q(x)$ une fraction proprement dite. $Q(x) = x^n + \dots$

Premier pas

Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles :

$$\frac{\widetilde{P}(x)}{Q(x)}$$
$$= \frac{\widetilde{P}(x)}{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x^2+b_1x+c_1)^{\ell_1}(x^2+b_2x+c_2)^{\ell_2}\cdots}$$

Exemple. $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{(x+1)(x-1)}$.

Deuxième pas

Décomposition en éléments simples à coefficients indéterminés.

On peut décomposer la fraction en une somme d'éléments simples. Le nombre et le type d'éléments simples dépendent des facteurs du dénominateur. Ils sont à choisir selon les listes suivantes :

Facteurs de $Q(x)$	Eléments simples correspondants
$(x-a)$	$\dfrac{\alpha}{x-a}$ (α à déterminer)
$(x-a)^2$	$\dfrac{\alpha_1}{(x-a)^2} + \dfrac{\alpha_2}{(x-a)}$ (α_1, α_2 à déterminer)
$\vdots$	
$(x-a)^k$	$\dfrac{\alpha_1}{(x-a)^k} + \dfrac{\alpha_2}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \dfrac{\alpha_k}{x-a}$ (α_i à déterminer)

Facteurs de $Q(x)$	Eléments simples correspondants
(x^2+bx+c)	$\dfrac{\beta x+\gamma}{x^2+bx+c}$ (β, γ à déterminer)
$(x^2+bx+c)^2$	$\dfrac{\beta_1 x+\gamma_1}{(x^2+bx+c)^2}+\dfrac{\beta_2 x+\gamma_2}{x^2+bx+c}$ (β_1, β_2, γ_1, γ_2 à déterminer)
$\vdots$	
$(x^2+bx+c)^\ell$	$\dfrac{\beta_1 x+\gamma_1}{(x^2+bx+c)^\ell}+\dfrac{\beta_2 x+\gamma_2}{(x^2+bx+c)^{\ell-1}}+\cdots+\dfrac{\beta_\ell x+\gamma_\ell}{(x^2+bx+c)}$ (β_i, γ_i à déterminer)

Exemple. $\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-1}\,.$

Troisième pas

Déterminer les coefficients des éléments simples.

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer les coefficients des éléments simples. Elles consistent essentiellement à poser sur un dénominateur commun les éléments simples. Le dénominateur commun est bien sûr encore $Q(x)$. Nous avons donc :

$$\frac{\widetilde{P}(x)}{Q(x)}=\frac{\dots}{Q(x)}$$

Puisque les deux fonctions sont identiques, les deux numérateurs doivent être identiques.

Méthode des coefficients indéterminés (exemple)

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)+b(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$= \frac{(a+b)x+b-a}{(x+1)(x-1)}$$

Le numérateur de gauche est identique à celui de droite :

$$1 \equiv (a+b)x + b - a$$

Deux polynômes sont identiques si leurs coefficients respectifs sont les mêmes :

degré 1 : $a + b = 0$ degré 0 : $-a + b = 1$

d'où $a = -1/2$, $b = 1/2$. Nous trouvons donc

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{-1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x-1}$$

Autre méthode : choix approprié des valeurs de x (exemple)

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)+b(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

Le numérateur de gauche est identique à celui de droite :

$$1 \equiv a(x-1) + b(x+1)$$

Les deux fonctions prennent la même valeur pour chaque x ; on peut en particulier choisir pour x les racines du dénominateur :

$x = -1$, d'où $1 = -2a$ $x = 1$, d'où $1 = 2b$

ainsi (comme ci-dessus) :

$$a = -\frac{1}{2} \qquad b = \frac{1}{2}$$

2.5 Oscillations harmoniques

2.5.1 Méthode complexe (idée générale)

Certains problèmes impliquant des fonctions périodiques peuvent être résolus selon la méthode suivante :

- *Remplacement* des fonctions données $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... par des fonctions (auxiliaires) complexes $z_1(t)$, $z_2(t)$, ... dont les parties réelles respectivement sont égales aux fonctions données : $\mathrm{Re}\, z_i = x_i$.

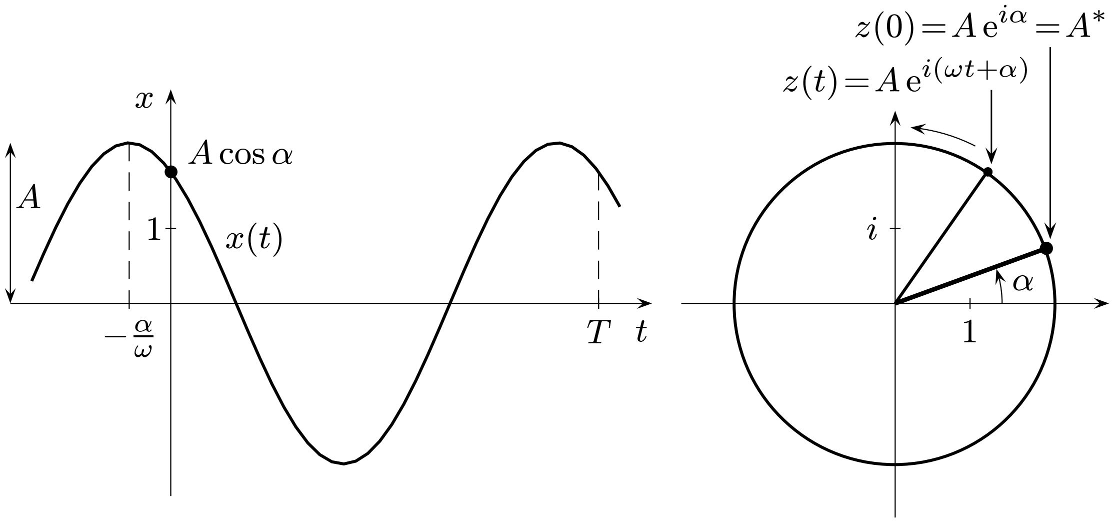
- *Résolution* du problème posé pour les fonctions (auxiliaires) complexes.

- La *partie réelle* de la solution (du problème « auxiliaire » complexe) est la solution du problème original.

Cette méthode sera appliquée ci-dessous (§ 2.5.3) à l'addition (superposition) d'oscillations harmoniques. Elle repose essentiellement sur l'équation $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, z_2$. (Elle est aussi utilisée pour la résolution de certaines équations différentielles ayant des solutions périodiques.)

2.5.2 Représentation complexe des oscillations harmoniques

Pour une oscillation harmonique (vibration sinusoïdale) donnée $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \alpha)$, on cherche une fonction complexe $z(t)$ dont la partie réelle est $x(t)$:



T est la période, $1/T$ la fréquence $(= \omega/2\pi)$, A l'amplitude, α la phase et ω la pulsation $(= 2\pi/T)$; $A^* = A \cdot \mathrm{e}^{i\alpha} = z(0)$ est l'*amplitude complexe* ou *phaseur*. On a

$$z(t) = A \cdot \mathrm{e}^{i\omega t} \cdot \mathrm{e}^{i\alpha} = A^* \cdot \mathrm{e}^{i\omega t}$$

L'*amplitude complexe* rassemble l'information sur l'amplitude et sur la phase initiale de $x(t)$. Le module de l'amplitude complexe est l'amplitude de la fonction (réelle) originale. L'argument de l'amplitude complexe est la phase initiale de la fonction primitivement donnée.

2.5.3 Addition (superposition) d'oscillations harmoniques de même fréquence

Problème

Etant donné :

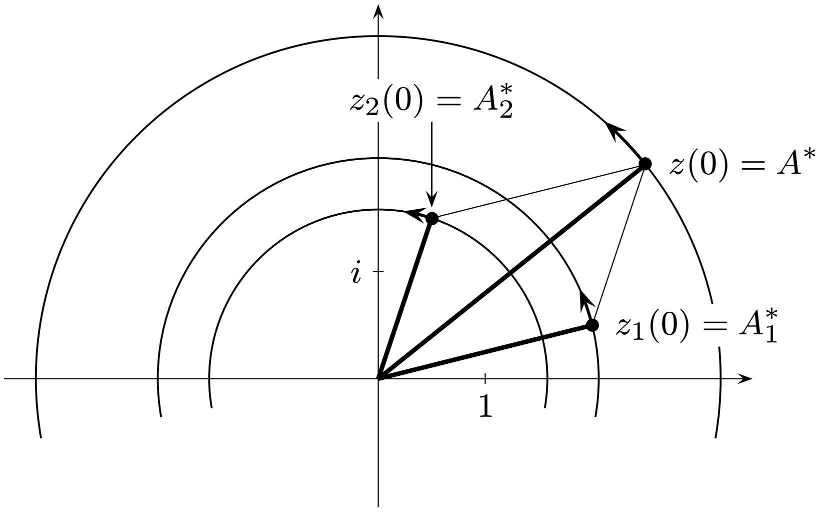
$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \\ x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \end{cases}$$

trouver $x = x_1 + x_2$.

Solution

(1) *Introduire* : $\begin{cases} z_1(t) = A_1\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\alpha_1)} \\ z_2(t) = A_2\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\alpha_2)} \end{cases}.$

(2) *Recherche de* $z_1 + z_2$.



z_1 et z_2 effectuent un mouvement circulaire avec la même « vitesse angulaire ».

$z = z_1 + z_2$ représente donc aussi un mouvement circulaire avec cette même vitesse angulaire.

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t) = (\underbrace{A_1\,\mathrm{e}^{i\alpha_1}}_{A_1^*} + \underbrace{A_2\,\mathrm{e}^{i\alpha_2}}_{A_2^*})\,\mathrm{e}^{i\omega t} = A^*\,\mathrm{e}^{i\omega t}$$

où l'amplitude complexe $A^* = A_1^* + A_2^*$.

(3) *Revenir à la partie réelle*. Le *module* A et l'*argument* α de l'amplitude complexe A^* sont respectivement l'*amplitude* et la *phase* de la

solution cherchée $x(t)$. A et α peuvent être trouvés *graphiquement* (voir esquisse ci-dessus) ou *algébriquement* :

$$\begin{aligned}
A &= |A^\star| = |A_1^\star + A_2^\star| \\
&= \big|A_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) + A_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)\big| \\
&= \big|(A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2) + i(A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2)\big| \\
&= \Big((A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2)^2 + (A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2)^2\Big)^{1/2} \\
&= \Big(A_1^2(\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1) + A_2^2(\cos^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_2) \\
&\qquad + 2A_1A_2(\underbrace{\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2}_{\cos(\alpha_1-\alpha_2)})\Big)^{1/2} \\
&= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}
\end{aligned}$$

Comme

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{Re}\,A^\star}{|A^\star|} = \frac{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}{A}$$

on a

$$x_1(t) + x_2(t) = A\cdot\cos(\omega t + \alpha)$$

avec

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$\cos\alpha = \frac{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}{A}$$

Chapitre 3

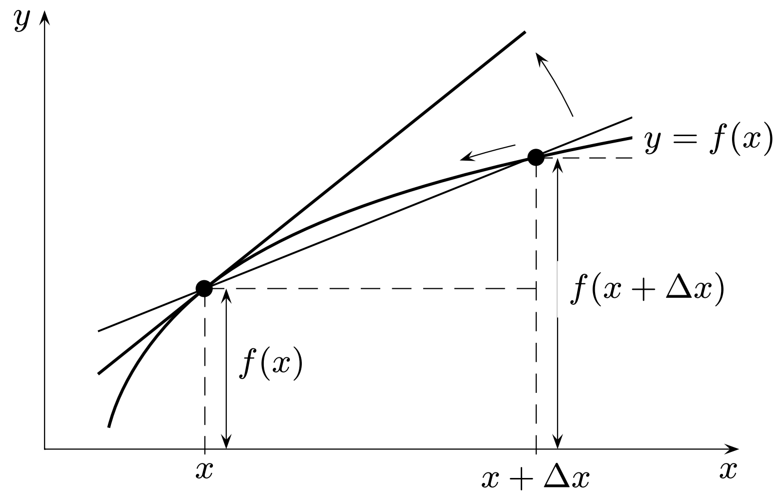
Calcul différentiel de fonctions d'une variable

3.1 Dérivées

Définition. Si la limite suivante existe,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

elle est appellée *dérivée de f au point x*. f est alors dite *dérivable au point x*.



Notation. $f'(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\mathrm{D}f$, $\dot{f}$, etc.

3.1.1 Fonctions dérivables et fonctions continues

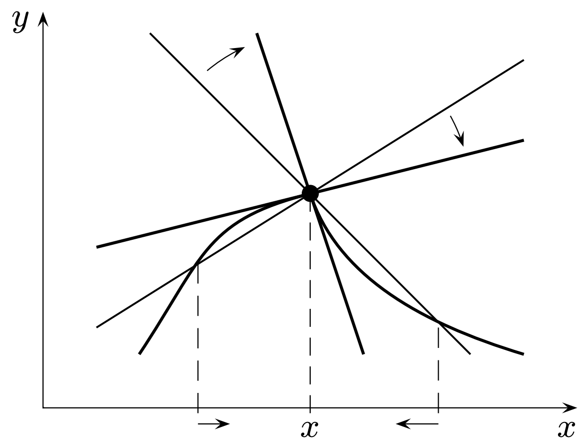
PROPOSITION. Une fonction dérivable au point x est continue en ce point.

Remarque. Il existe des fonctions continues qui ne sont dérivables nulle part.

3.1.2 Généralisations : dérivée à gauche, dérivée à droite

Dérivée à gauche en x : $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

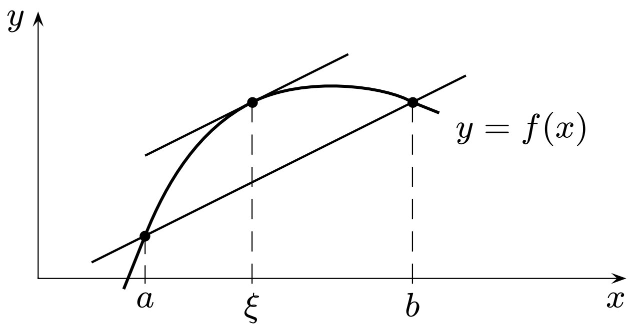
Dérivée à droite en x : $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.



3.1.3 Théorème des accroissements finis (théorème de la moyenne)

Formulation intuitive

Il y a un point ξ entre a et b où la tangente est parallèle à la sécante.



Proposition. Soit f continue sur $[\,a\,,\,b\,]$ et différentiable sur $]\,a\,,\,b\,[$, alors il existe ξ $(a < \xi < b)$ tel que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Le théorème des accroissements finis sert souvent à estimer l'accroissement d'une fonction dans un intervalle. A cette fin, on peut le formuler de la manière suivante :

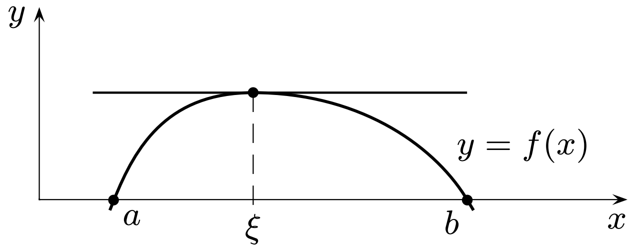
Proposition (variante). Soit f une fonction continue sur $[\,a\,,\,b\,]$ et différentiable sur $]\,a\,,\,b\,[$. Il existe alors une valeur ξ $(a < \xi < b)$ telle que l'accroissement $\Delta f = f(b) - f(a)$ peut être exprimé comme suit

$$\Delta f = f'(\xi) \cdot (b - a)$$

3.1.4 Théorème de Rolle
(cas particulier du théorème des accroissements finis)

Formulation intuitive

Entre deux zéros d'une fonction dérivable, il y a (au moins) un zéro de la dérivée (donc un point où la tangente est horizontale).



Proposition. Soit :

$$f \text{ continue sur } [\,a\,,\,b\,]$$
$$f' \text{ existe sur }]\,a\,,\,b\,[$$
$$f(a) = f(b) = 0,$$

alors il existe ξ $(a < \xi < b)$ tel que $f'(\xi) = 0$.

3.1.5 Généralisation du théorème des accroissements finis

Proposition. Soit : $f(x)$, $g(x)$ continues sur $[\,a\,,\,b\,]$, dérivables sur (a, b), $g'(x) \neq 0$ dans (a, b), alors il existe ξ $(a < \xi < b)$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

3.1.6 Fonctions dont la dérivée s'annule

Proposition. Soit $f'(x) \equiv 0$ sur l'intervalle $I = (a, b)$; alors

$$f(x) \equiv \text{cste} \qquad (\text{sur } I)$$

3.1.7 Dérivées de quelques fonctions élémentaires

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n (n réel)	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$

3.2 Méthodes de calcul de dérivées, dérivées d'ordre supérieur

3.2.1 Règles de dérivation

(1) $(cf)' = c \cdot f'$.

(2) $(f \pm g)' = f' \pm g'$.

(3) $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{gf' - g'f}{g^2}$.

(5) Fonction composée : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$.

Autre notation : $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$.

(6) Fonction inverse : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f^{-1}(x)\big) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$, si f^{-1} existe !

Autre notation : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$.

3.2.2 Liste de dérivées

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n (n réel)	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x}$
$\ln f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$\dfrac{-1}{\sin^2 x}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\operatorname{cth} x$	$\dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$

$f'(x)/f(x)$ est appelée *dérivée logarithmique*.

3.2.3 Dérivées d'ordre supérieur

DÉFINITIONS

Dérivées seconde: $f'' = (f')'$

Dérivées troisième: $f''' = (f'')'$

$\vdots$

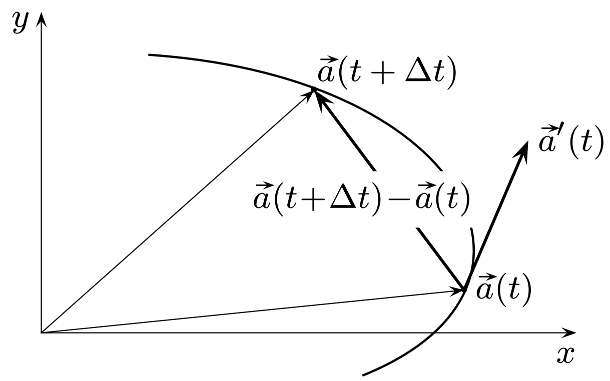
Dérivée d'odre n: $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$, etc.

3.2.4 Dérivées de « fonctions vectorielles »

DÉFINITION. Soit $\vec{a}(t)$ une fonction vectorielle; alors :

$$\vec{a}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}$$

$\vec{a}\,'(t)$ est un vecteur tangent à la courbe définie par $\vec{a}(t)$.



Règles de calcul

$$\begin{aligned}
\big(\lambda \cdot \vec{a}\big)' &= \lambda'\vec{a} + \lambda\vec{a}\,' \\
\big(\vec{a} \cdot \vec{b}\big)' &= \vec{a}\,'\vec{b} + \vec{a}\vec{b}\,' \\
\big(\vec{a} \times \vec{b}\big)' &= \vec{a}\,' \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}\,'
\end{aligned}$$

3.2.5 Fonctions complexes d'une variable réelle

Fonction complexe d'une variable réelle : $z(t) = x(t) + iy(t)$.

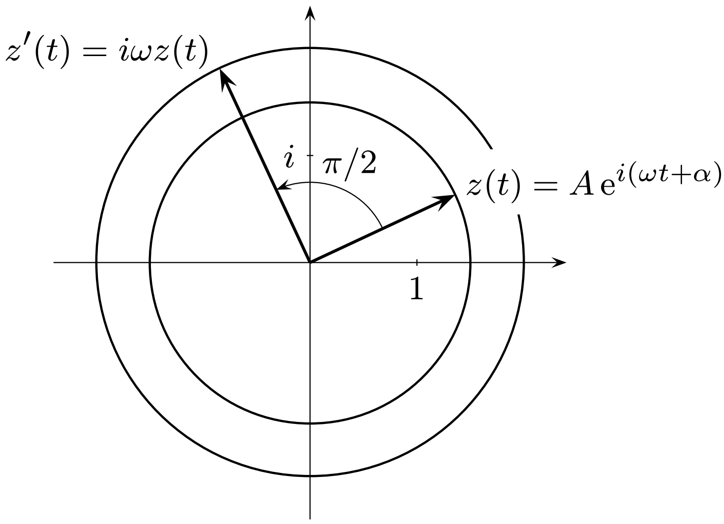
Dérivée de $z(t)$: $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Dérivée et partie réelle : $\operatorname{Re} z' = (\operatorname{Re} z)'$.

Mouvement circulaire (exemple)

Si $z(t) = A\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\alpha)}$, alors

$$z'(t) = i\omega A\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\alpha)} = i\omega z(t)$$



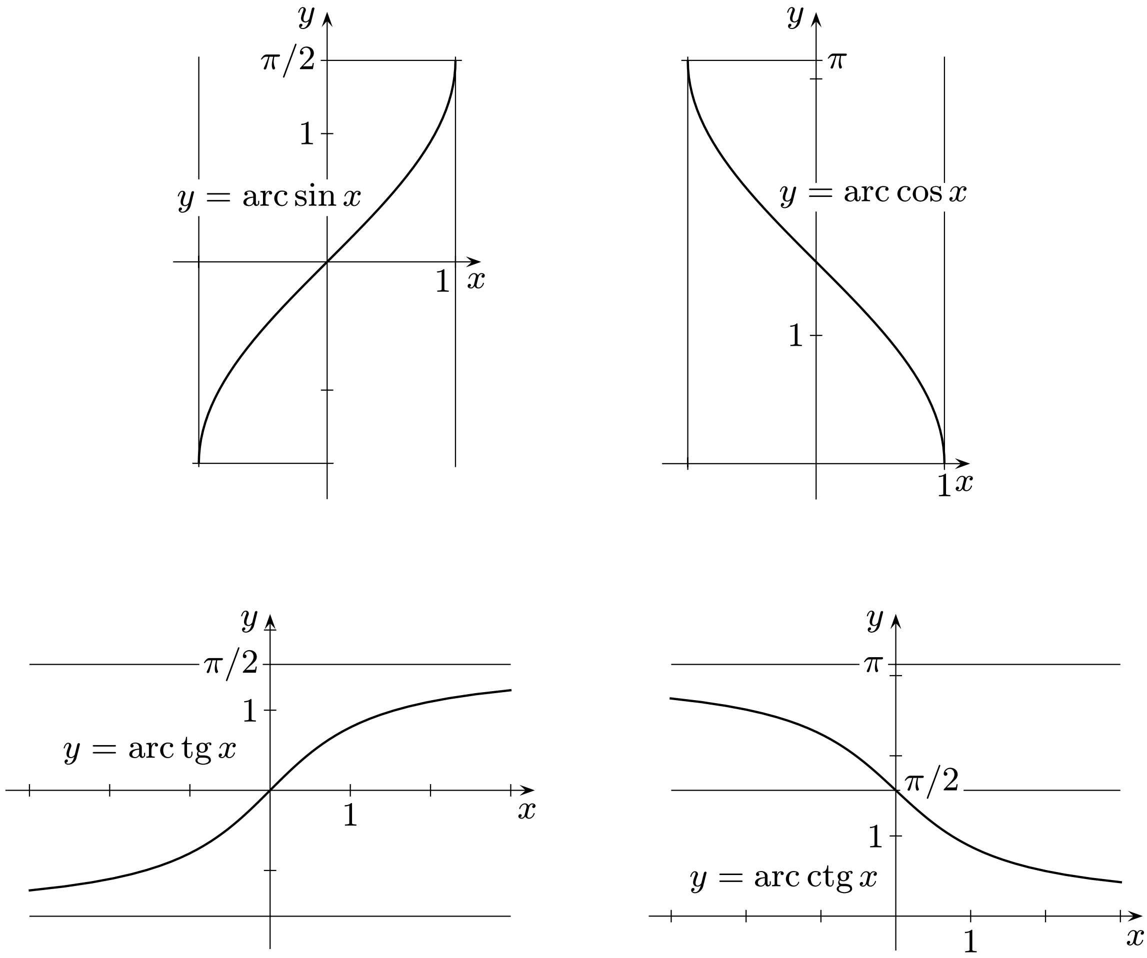
Dans le cas d'un «mouvement circulaire uniforme», dériver «revient à multiplier avec $i\omega$».

3.3 Fonctions trigonométriques inverses et fonctions hyperboliques inverses

3.3.1 Fonctions trigonométriques inverses

La périodicité des fonctions trigonométriques ne permet pas de définir leurs fonctions inverses sans restriction. En général, on choisit pour l'inverse de $\sin x$ ($\arcsin x$) et de $\operatorname{tg} x$ ($\operatorname{arc\,tg} x$) la branche qui s'annule pour $x = 0$. Pour l'inverse de $\cos x$ ($\arccos x$) et $\operatorname{ctg} x$ ($\operatorname{arc\,ctg} x$), on prend les branches positives ayant les plus petites valeurs positives.

Graphes des fonctions trigonométriques inverses



Simplification d'expression du type $\sin(\operatorname{arc}\cos x)$

Méthode algébrique (exemple)

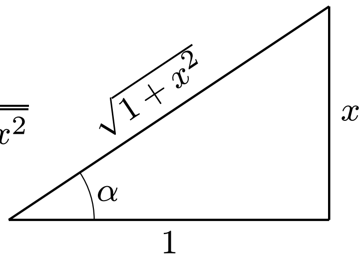
Avec $\sin c = \sqrt{1-\cos^2 c}$, on a

$$\sin(\operatorname{arc}\cos x) = \sqrt{1-\cos^2(\operatorname{arc}\cos x)} = \sqrt{1-x^2}$$
$$= \sqrt{1-\cos^2(\operatorname{arc}\cos x)}$$

Méthode géométrique (exemple)

Soit à simplifier $\cos(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)$. Introduire les cathètes de longueurs x et 1 pour que $\operatorname{tg}\alpha = x$, ce qui équivaut à $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \alpha$. Calculer l'hypoténuse.

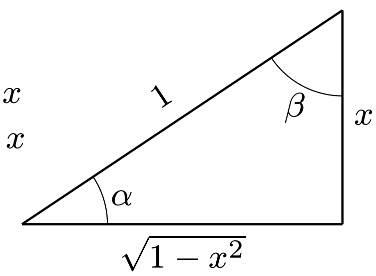
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$



Rapport entre $\arcsin x$ et $\arccos x$

PROPOSITION. $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}\,.$

$$\begin{cases} \alpha = \arcsin x \\ \beta = \arccos x \end{cases}$$



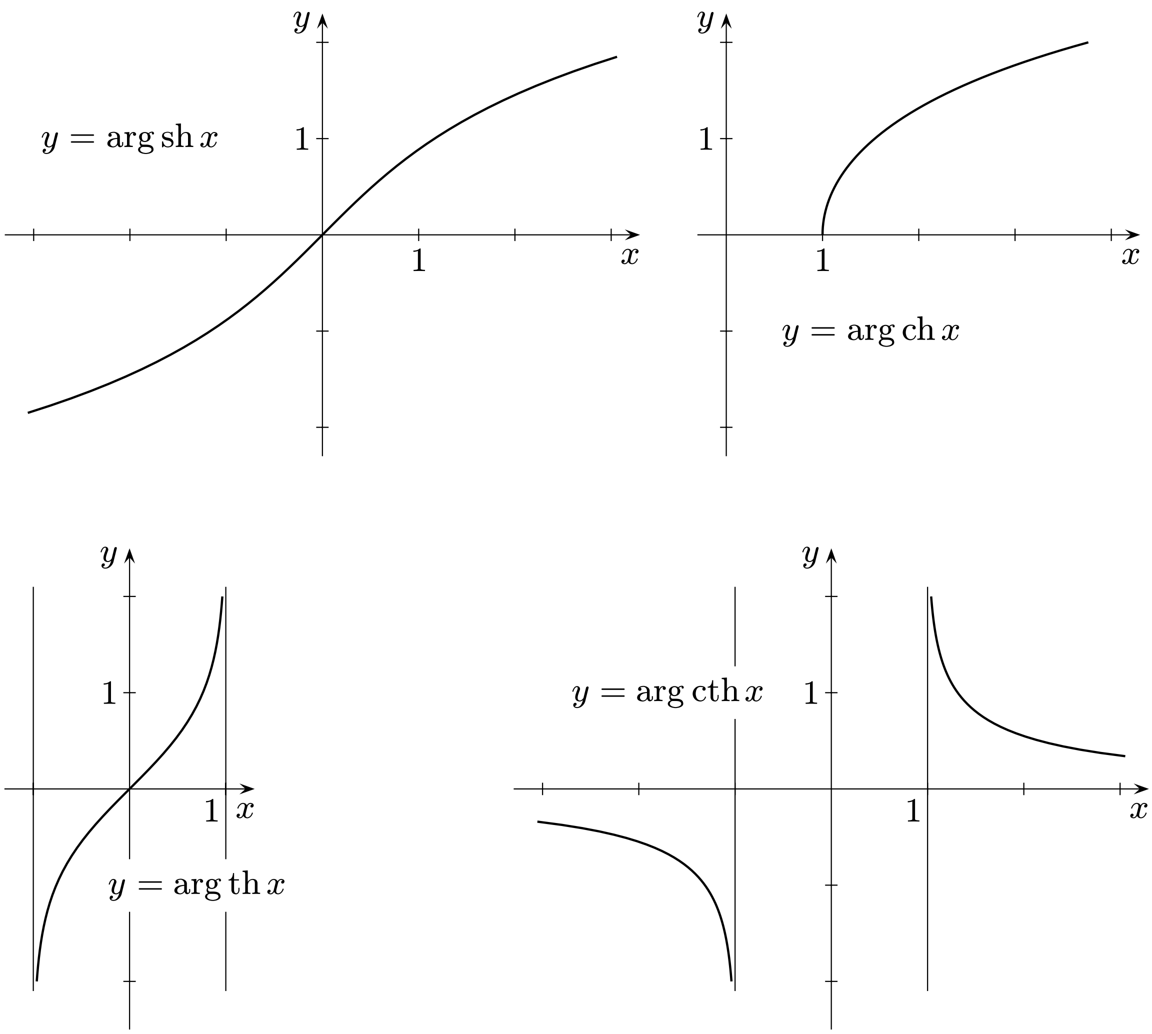
Dérivées des fonctions trigonométriques inverses

f	f'
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arc\,tg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arc\,ctg} x$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$

3.3.2 Fonctions hyperboliques inverses

La fonction $\operatorname{ch} x$ étant une fonction paire, son inverse ($\arg \operatorname{ch} x$) n'est pas, a priori, définie d'une manière univoque. Nous choisissons la branche positive.

Graphes des fonctions hyperboliques inverses



Expression logarithmique des fonctions hyperboliques inverses

PROPOSITION

$$\begin{aligned}
\operatorname{arg\,sh} x &= \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr) \\
\operatorname{arg\,ch} x &= \ln\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\bigr) \qquad (x \geqslant 1) \\
\operatorname{arg\,th} x &= \frac{1}{2}\,\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad (|x| < 1) \\
\operatorname{arg\,cth} x &= \frac{1}{2}\,\ln\frac{x+1}{x-1} \qquad (|x| > 1)
\end{aligned}$$

Dérivées des fonctions hyperboliques inverses

f	f'
$\operatorname{arg\,sh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{arg\,ch} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $(x \geqslant 1)$
$\operatorname{arg\,th} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert < 1)$
$\operatorname{arg\,cth} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert > 1)$

3.4 Etude de fonctions

Les deux problèmes suivants sont très semblables.

- Esquisser une courbe donnée sous forme explicite $y = f(x)$.
- Etudier les propriétés essentielles d'une fonction $f(x)$, en esquissant son graphe $y = f(x)$.

Ci-après, les deux problèmes seront souvent confondus. Aussi n'hésiterons-nous pas à mélanger le vocabulaire algébrique et le vocabulaire géométrique, en parlant tantôt d'une «fonction f», tantôt de la «courbe $y = f(x)$» etc.

Dans beaucoup de cas d'études d'une fonction, les quelques points suivants suffisent pour obtenir une esquisse du graphe de la fonction. Il est vivement recommandé d'accompagner l'étude de la fonction d'un dessin sur lequel on indiquera les résultats au fur et à mesure qu'on les trouve.

(1) *Ensemble de définition.* Pour quelles valeurs de x la fonction est-elle définie ? (seules les valeurs réelles de f sont admises).

(1′) *Continuité.* Pour quelles valeurs de x la fonction n'est-elle pas continue ?

(2) f *paire ?* Si $f(-x) = f(x)$, *symétrie par rapport à l'axe* y.
f *impaire ?* Si $f(-x) = -f(x)$, *symétrie par rapport à l'origine.*
f *périodique ?* Il existe T tel que $f(x + T) = f(x)$.

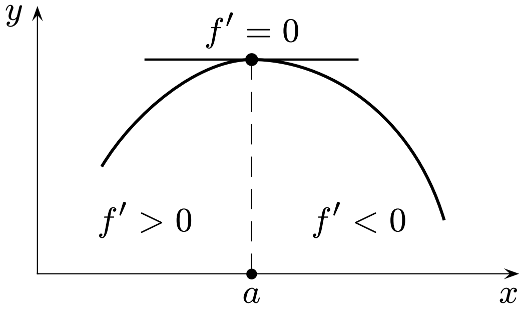
(3) *Zéros.*
$f = 0$ pour quelles valeurs de x ?
$f > 0$ pour quelles valeurs de x ?
$f < 0$ pour quelles valeurs de x ?

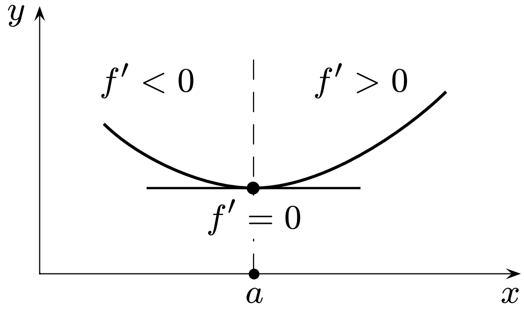
(4) *Asymptotes verticales.* $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \pm\infty$.
Asymptotes horizontales. $f(x) \underset{x \to +\infty(-\infty)}{\longrightarrow} a$.
Asymptotes obliques. $\lim\limits_{x \to +\infty(-\infty)} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0$ implique :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty(-\infty)} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \lim\limits_{x \to +\infty(-\infty)} \big(f(x) - ax\big) = b\,. \end{cases}$$

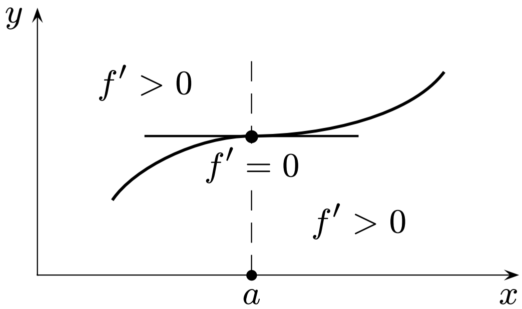
(5) *Dérivée première.* Existe-t-elle dans tout le domaine de définition ?
Si $f'(a) = 0$, la tangente est horizontale en a.
Si $f' > 0$ dans un intervalle, alors f est croissante sur cet intervalle.
Si $f' < 0$ dans un intervalle, alors f est décroissante sur cet intervalle.

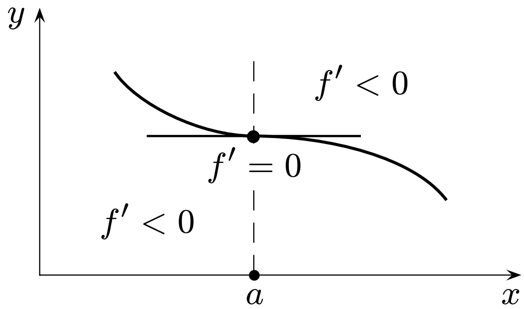
Maximun et minimum locaux (relatifs) ; f' change de signe en a :





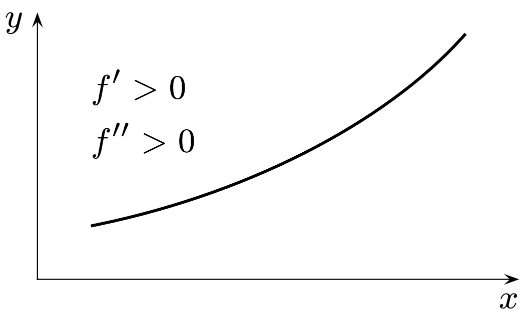
Point d'inflexion ; f' ne change pas de signe en a :

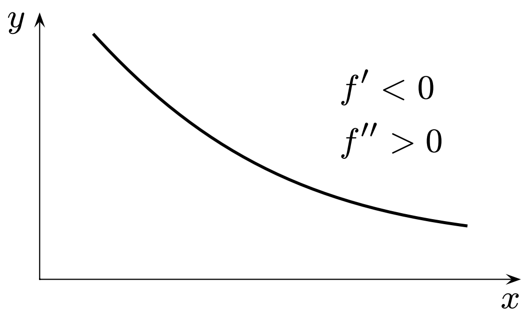




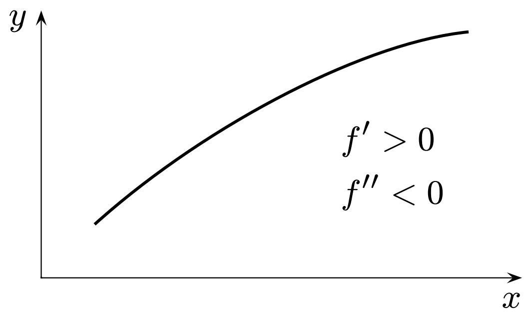
(6) *Dérivée seconde*

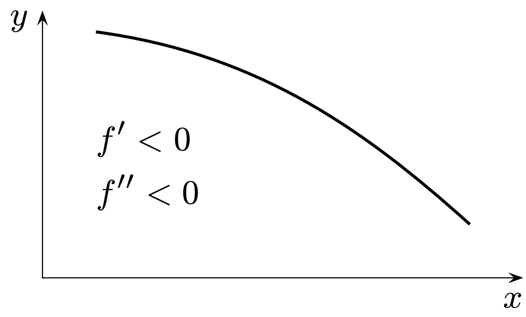
Si $f'' > 0$ dans un intervalle, alors f *est convexe* (sous-linéaire) :



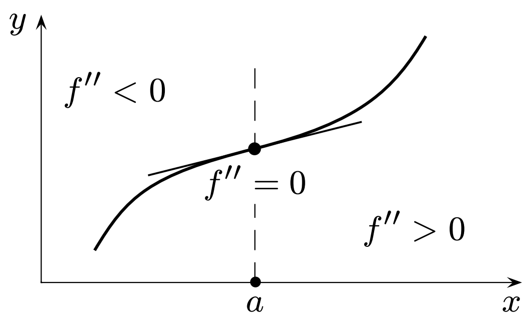


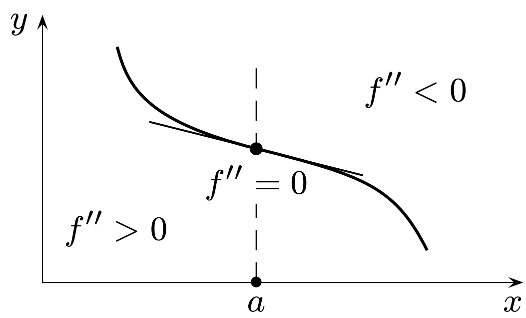
Si $f'' < 0$ dans un intervalle, alors f *est concave* :





Si $f'' = 0$ en $x = a$, on a :

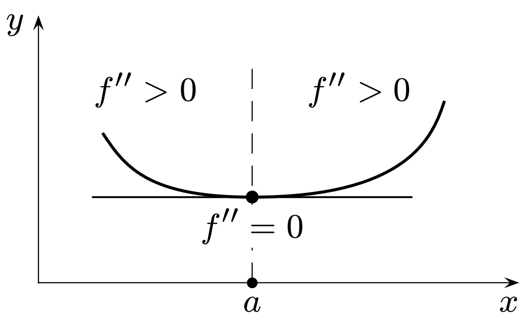




Si $f''(a) = 0$ *et* si f'' change de signe en a, alors il y a un *point d'inflexion*.

Attention !

$f''(a) = 0$ n'implique pas toujours un point d'inflexion :



Si f'' ne change pas de signe, comme dans l'exemple ci-dessus, il peut s'agir d'un minimum (ou d'un maximum).

3.5 Courbes paramétrées

3.5.1 Courbes paramétrées, vecteur tangent, vecteur normal

Deux représentations d'une courbe paramétrée (plane)

Les courbes paramétrées étudiées seront représentées soit sous la forme :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

soit (en rassemblant les deux coordonnées en un vecteur) sous la forme :

$$\vec{x}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

Courbes paramétrées régulières

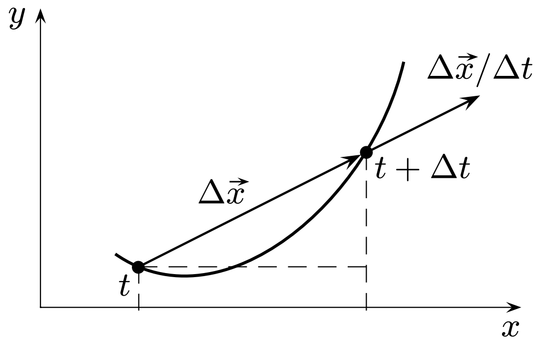
Sans mention explicite du contraire, le terme *courbes paramétrées* signifiera, dans la suite, des courbes qui sont (sauf éventuellement dans un nombre fini de points appelés «singularités») des *courbes paramétrées régulières de classe* C^2.

DÉFINITION. Une courbe paramétrée $\big(x(t), y(t)\big)$ est appelée *régulière de classe* C^2 si :
(1) $x(t)$, $y(t)$ sont *continûment dérivables* 2 *fois* (de classe C^2),
(2) $\vec{x}\,'(t) \neq \vec{0}$ pour tout t, c'est-à-dire les fonctions $x'(t)$ *et* $y'(t)$ *ne s'annulent pas simultanément.*

Vecteur tangent d'une courbe paramétrée

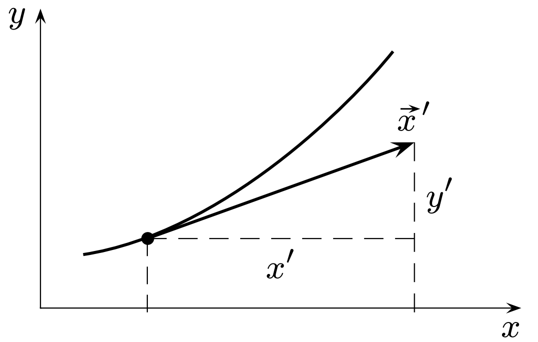
$\vec{x}\,' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = (x', y')$ est appelé *vecteur tangent.*

$\vec{x}\,' \neq 0$ pour les *courbes régulières.*



Le vecteur tangent $\vec{x}\,'$ n'est, en général, pas normé.

Vecteur tangent normé : $\dfrac{\vec{x}\,'}{|\vec{x}\,'|} = \dfrac{\vec{x}\,'}{\sqrt{x'^{\,2} + y'^{\,2}}}$



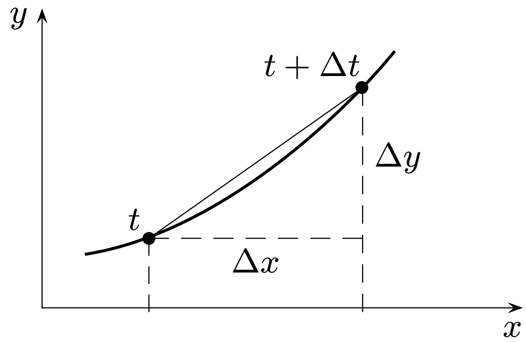
Pente d'une courbe paramétrée

$$\text{Pente de courbe} = \text{pente du vecteur tangent} = \frac{y'}{x'}$$

On peut aussi trouver cette formule directement :

pente de la sécante : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \dfrac{\Delta t}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \dfrac{1}{\Delta x/\Delta t}$;

pente de la tangente : $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \dfrac{1}{\Delta x/\Delta t} = \dfrac{y'}{x'}$.



Si $x(t)$ est bijective, la fonction inverse : $t = t(x)$ existe. Dans ce cas, y peut être considérée comme fonction de x :

$$y(x) = y\big(t(x)\big) .$$

On dit alors parfois que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ définissent une fonction $y(x)$ ou que les équations $x = x(t)$, $y = y(t)$ sont une définition paramétrique de la fonction $y(x)$.

Dérivée $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ *d'une fonction « définie sous forme paramétrique »*

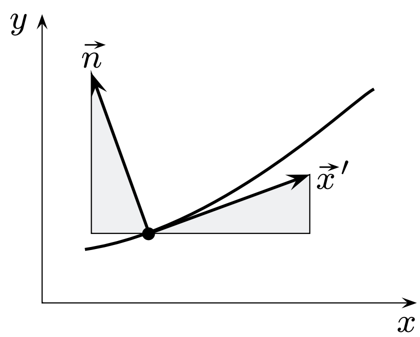
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{y'}{x'}$$

dérivation de fonctions composées — dérivation de fonctions inverses

Vecteur normal d'une courbe paramétrée

Vecteur tangent : $\vec{x}\,' = (x', y')$.

Vecteur normal : $\vec{n} = (-y', x')$; $\vec{n}$ n'est, en général, pas normé.



Vitesse et accélération

En *cinématique*, on étudie des *trajectoires* :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

où t désigne le temps.

$\vec{v} = \vec{x}\,' = (x', y')$ est le vecteur *vitesse*.

$\vec{a} = \vec{x}\,'' = (x'', y'')$ est le vecteur *accélération*.

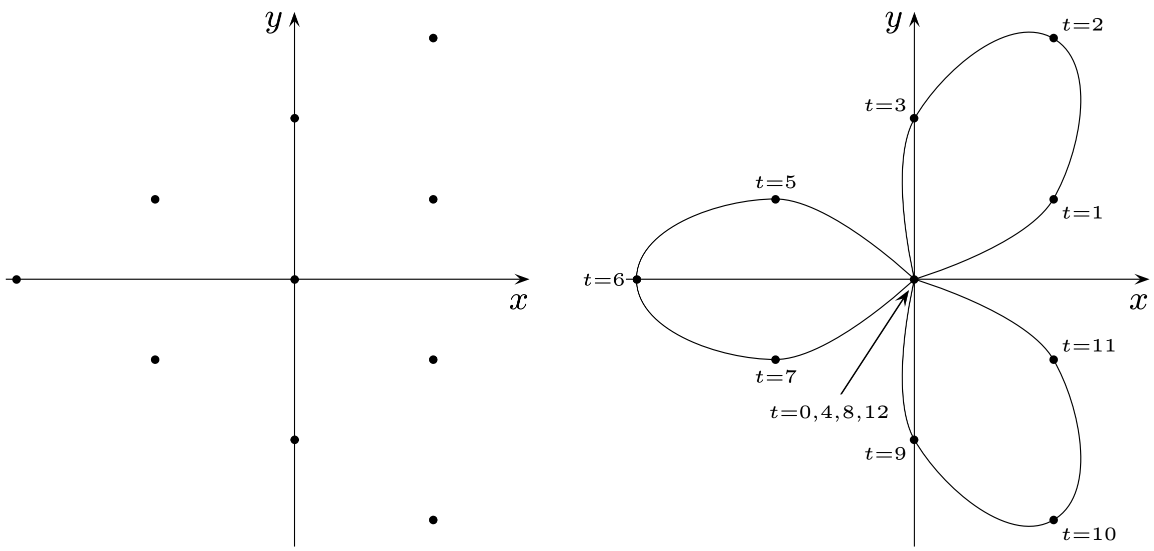
Etude de courbes paramétrées

L'étude des deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ permet en général d'esquisser la courbe. Voici quelques recommandations et remarques supplémentaires.

(1) *Noter la valeur de t de chaque point étudié*. Il peut arriver que même un nombre relativement élevé de points ne permette pas d'esquisser la courbe, si l'on ne sait pas dans quel ordre il faut lier ces points.

Exemple. Comment lier ces points ?

En suivant l'ordre indiqué par les valeurs du paramètre, on obtient une esquisse utilisable.



(2) *Etablir un tableau des points remarquables*

t	x	y	x'	y'
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(3) *Tangentes horizontales*: $y' = 0$ (si $x' \neq 0$).
Tangentes verticales: $x' = 0$ (si $y' \neq 0$).
Points singuliers: $x' = y' = 0$; une discussion particulière est nécessaire.

(4) *Elimination du paramètre*. Quelquefois il est possible d'éliminer t des équations $x = x(t)$, $y = y(t)$ et ainsi d'obtenir l'*équation implicite* de la courbe :

$$F(x, y) = 0 .$$

Si en plus on peut encore résoudre cette dernière équation par rapport à y, on obtient l'*équation explicite* de la courbe :

$$y = f(x) .$$

Pour la discussion de la courbe on utilisera la (les) représentation(s) la (les) plus appropriée(s).

3.6 Maxima et minima

Valeurs particulières d'une fonction

Dans la suite, on distinguera les trois problèmes suivants :

(1) Recherche des *valeurs stationnaires* d'une fonction f.

(2) Recherche des *extrema locaux* (extrema relatifs) de f.

(3) Recherche des *extrema absolus* de f.

3.6.1 Valeurs stationnaires

DÉFINITION. Si $f'(a) = 0$, on dira que f possède une *valeur stationnaire au point* a.

3.6.2 Extrema locaux (ou extrema relatifs)

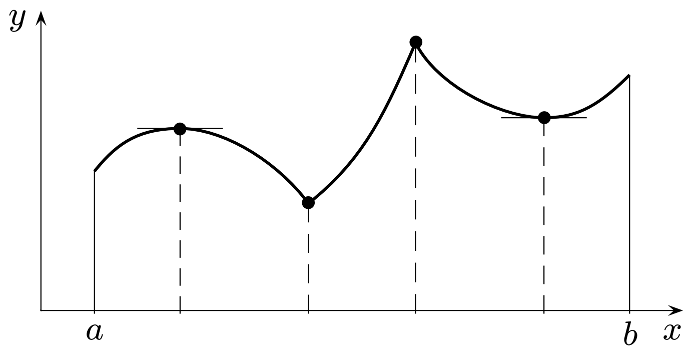
DÉFINITION. On dit que f possède un *maximum* (*minimum*) local en a, si, dans un voisinage suffisamment petit de a, on a

$$f(a) > f(x) \qquad (< f(x))$$

Remarque. Si $f(a) \geqslant f(x)$ ($\leqslant f(x)$), on parle parfois d'un maximum local au sens large (minimum local au sens large).

Comment trouver les extrema locaux ?

PROPOSITION. Soit f continue sur $[\,a\,,\,b\,]$. f *peut* alors avoir un maximum (resp. un minimum) local en ξ si $f'(\xi) = 0$ *ou* si f' n'existe pas en ξ.

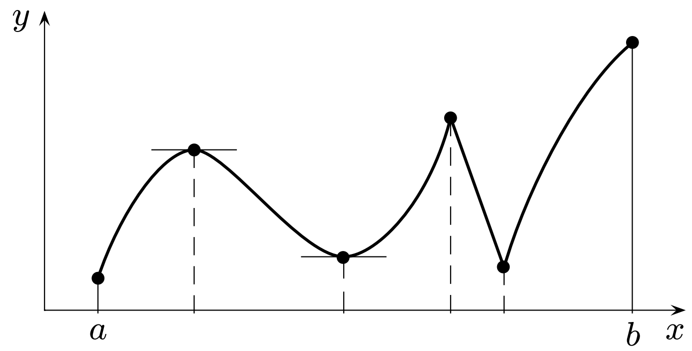


Dans un problème de ce type, on établira d'abord une liste des «points» (valeurs de x) pour lesquels une des deux conditions est satisfaite. Ensuite, on déterminera, pour chaque point ainsi trouvé, s'il s'agit d'un extremum local.

3.6.3 Extrema absolus

PROPOSITION. Soit f continue sur $[\,a\,,\,b\,]$. Le maximum (resp. minimum) absolu est atteint :

- soit à l'une des extrémités de $[\,a\,,\,b\,]$,
- soit en un point où $f' = 0$,
- soit en un point où f' n'existe pas.



Pour trouver le maximum absolu (resp. le minimum absolu), on peut procéder de la manière suivante :

- établir une liste des « candidats », c'est-à-dire des valeurs de x pour lesquelles une des trois conditions est satisfaite ;
- calculer les valeurs de f en ces points ;
- comparer ces valeurs de f pour déterminer la plus grande (resp. la plus petite).

Un vocabulaire peu standardisé

Dans la littérature traitant des problèmes de cette section, on rencontre différentes définitions des notions introduites ; en voici quelques exemples.

- Certains auteurs appellent simplement « extremum » ce que nous avons appelé « extremum relatif » ou « extremum local ».
- Dans les applications, on parle souvent de la recherche d'un minimum (ou maximum), quand en réalité on cherche les valeurs stationnaires.

- La notion de « valeur stationnaire » est moins utilisée par les mathématiciens, mais davantage par les physiciens et ingénieurs. Souvent le contexte implique alors que la fonction f est dérivable.

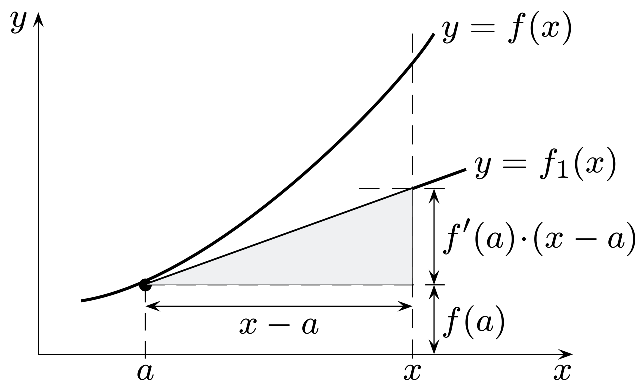
3.7 Approximation linéaire ; différentielles

3.7.1 Approximation (locale) linéaire d'une fonction

Définition. Soit donnée une fonction f dérivable dans un voisinage de $x = a$. La fonction

$$f_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

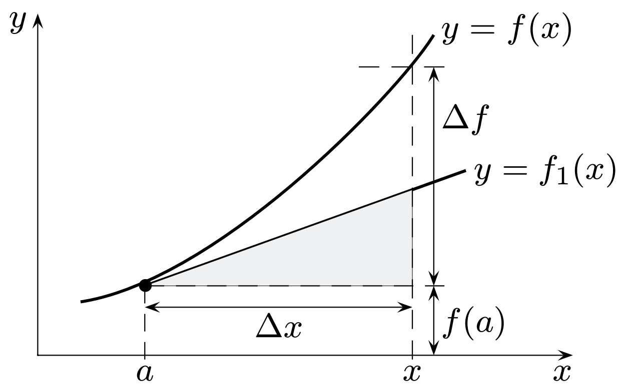
est alors appelée *approximation* (locale) *linéaire de f au voisinage de a.*



Accroissement approximatif d'une fonction

Dans un certain voisinage de a, l'accroissement Δf de la fonction f peut souvent être approché par l'accroissement de (l'approximation linéaire) f_1.

Accroissement approximatif de f : $\Delta f \approx f'(a) \cdot \Delta x$.



Application : valeurs approchées d'une fonction

Supposons $f(a)$ et $f'(a)$ connues. On cherche une valeur approchée de $f(a + \Delta x)$.

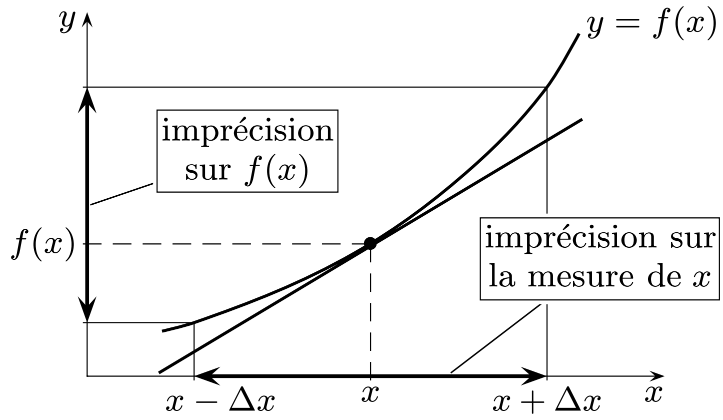
$$f(a + \Delta x) \approx f_1(a + \Delta x) = f(a) + f'(a) \cdot \Delta x$$

Cette égalité approximative peut être utile s'il s'agit de *trouver des valeurs numériques* approchées d'une fonction dont on peut facilement trouver $f(a)$ et $f'(a)$.

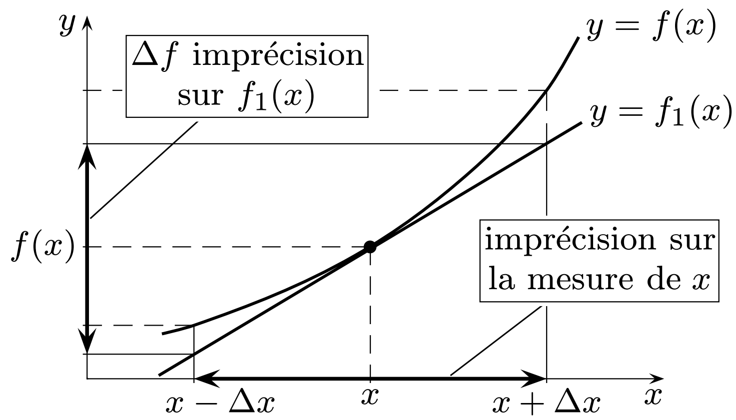
Application : propagation d'erreurs de mesures

Dans les applications, on rencontre souvent la situation suivante : une grandeur x *est mesurée*. Cette valeur de x sert à *calculer une valeur* $y = f(x)$ qui en dépend. Comment d'éventuelles imprécisions dans la mesure de x se répercutent-elles sur y ?

Soit $f(x)$ une fonction donnée. On mesure x (erreur maximale $\pm\Delta x$) puis on calcule $f(x)$. L'erreur maximale de $f(x)$ risque d'être difficile à calculer.



En général, on remplace f par son approximation f_1 pour trouver l'erreur de f.



On appelle alors :

Erreur absolue maximale : $\Delta f \approx |f'| \cdot |\Delta x|$.

Erreur relative maximale : $(\delta f) \approx \left|\dfrac{\Delta f}{f}\right| = \left|\dfrac{f'}{f}\right| \cdot |\Delta x| = \left|(\ln f)'\right| \cdot |\Delta x|$.

3.7.2 Différentielles

Dans l'histoire du calcul différentiel et intégral, les différentielles ont été utilisées longtemps sans avoir été définies d'une manière précise. Même aujourd'hui, les «non-mathématiciens» préfèrent souvent une vision plus intuitive que rigoureuse de la notion de différentielles.

Toutefois, tous ont toujours admis la formule :

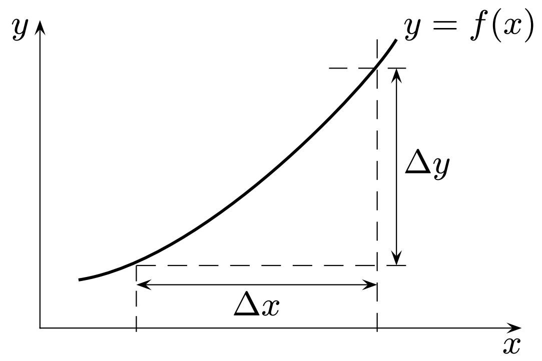
$$\mathrm{d}f = f' \cdot \mathrm{d}x$$

Interprétation intuitive

$\mathrm{d}f$ est l'accroissement approximatif de f lors d'un accroissement $\mathrm{d}x$ de la variable. (L'égalité approchée $\Delta f \approx f' \cdot \Delta x$ serait alors plus correcte.)

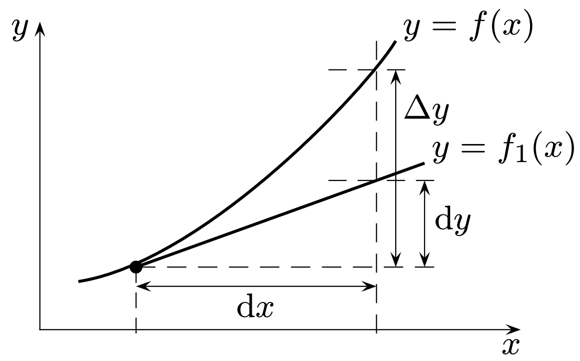
Interprétation historique

Δx, Δy sont «petits»; $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ sont «infiniment petits»; d'où la notation $f' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.



Une des interprétations correctes possibles

$\mathrm{d}y$ est l'accroissement de l'approximation linéaire f_1, lors d'un accroissement $\mathrm{d}x$ de la variable ($\mathrm{d}y$ dépend alors de x *et* de $\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}y$ est linéaire en $\mathrm{d}x$).



3.8 Précision de l'approximation linéaire

3.8.1 Que vaut l'approximation linéaire ?

THÉORÈME. Si f'' existe dans un intervalle comprenant a et x, alors il existe ξ entre a et x tel que :

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a) \cdot (x-a)}_{f_1(x)} + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2}\,(x-a)^2}_{R}$$

Le terme $R = \dfrac{f''(\xi)}{2}\,(x-a)^2$ sera appelé le *reste*.

Majorer le reste

Si l'on veut estimer la précision de l'approximation linéaire f_1 d'une fonction f, on essayera de majorer le reste R. La difficulté principale dans l'application de la formule ci-dessus réside dans le fait qu'elle postule l'existence d'une valeur ξ sans donner de méthode pour trouver cette valeur.

En général, il suffit de remplacer ξ par une valeur (entre a et x) pour laquelle $|f''|$ est maximale.

3.8.2 Précision en un point

Problème. Estimer la précision de l'accroissement linéaire f pour une valeur x donnée.

Méthode de calcul. Remplacer dans la formule du reste R la valeur ξ par celle parmi les valeurs $*$ (entre a et x) pour laquelle $\left|f''(*)\right|$ est maximale. On a alors

$$|R| \leqslant \frac{\left|f''(*)\right|}{2}\,|x-a|^2$$

3.8.3 Précision dans un intervalle

Problème. Estimer la précision de l'approximation linéaire dans un intervalle (symétrique) autour de a : $[\,a-\rho\,,\,a+\rho\,]$.

Marche à suivre

(1) Remplacer dans la formule du reste R la valeur ξ par celle des valeurs $*$ entre $a-\rho$ et $a+\rho$ pour laquelle $\left|f''(*)\right|$ est maximale.

(2) Remplacer dans la formule du reste R la valeur $|x-a|$ par ρ.

Chapitre 4

Intégrales de fonctions d'une variable

4.1 Intégrale définie

4.1.1 Calcul approché de certaines aires

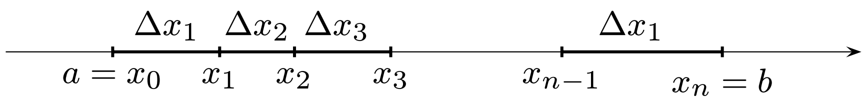
Dans ce chapitre, toutes les fonctions $f(x)$ seront continues et positives.

Sommes de Riemann

Subdivision d'un intervalle $[\, a\, ,\, b\,]$

On utilise par la suite la subdivision en n sous-intervalles suivante :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$



Les longueurs des sous-intervalles sont

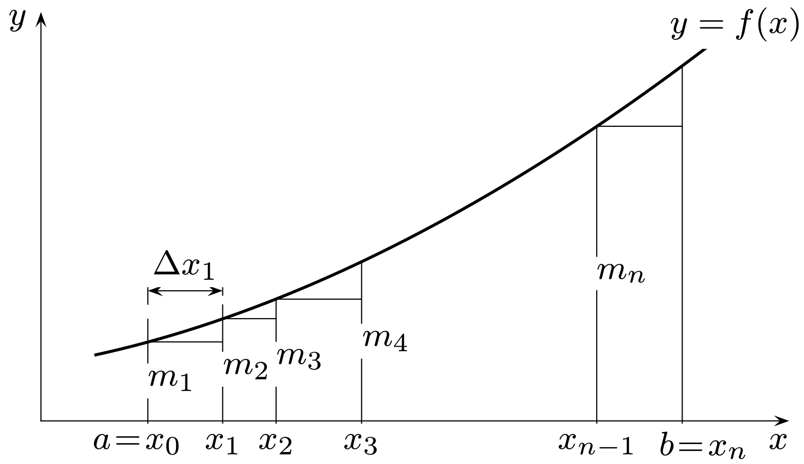
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

$\delta_n = \max \Delta x_k$ est appelé le *pas* de la subdivision.

Somme intégrale inférieure s_n

Pour une subdivision donnée en n sous-intervalles, m_k est le minimum de $f(x)$ sur le sous-intervalle numéro k :

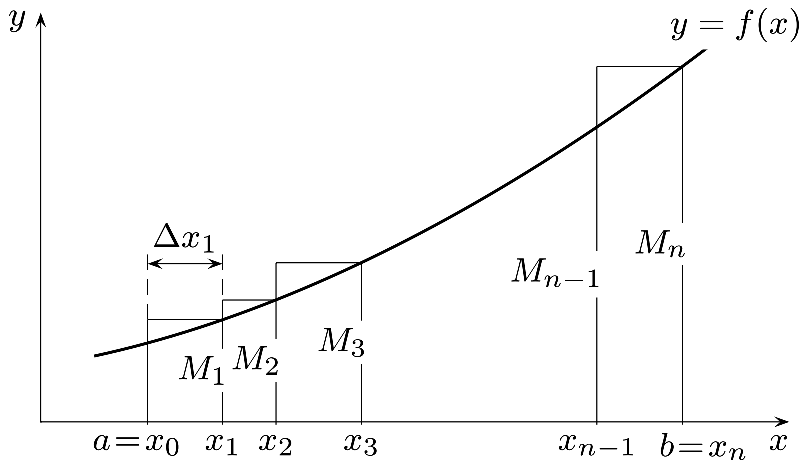
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$$



Somme intégrale supérieure S_n

Pour une subdivision en n sous-intervalles, M_k est le maximum de $f(x)$ sur l'intervalle numéro k :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$$



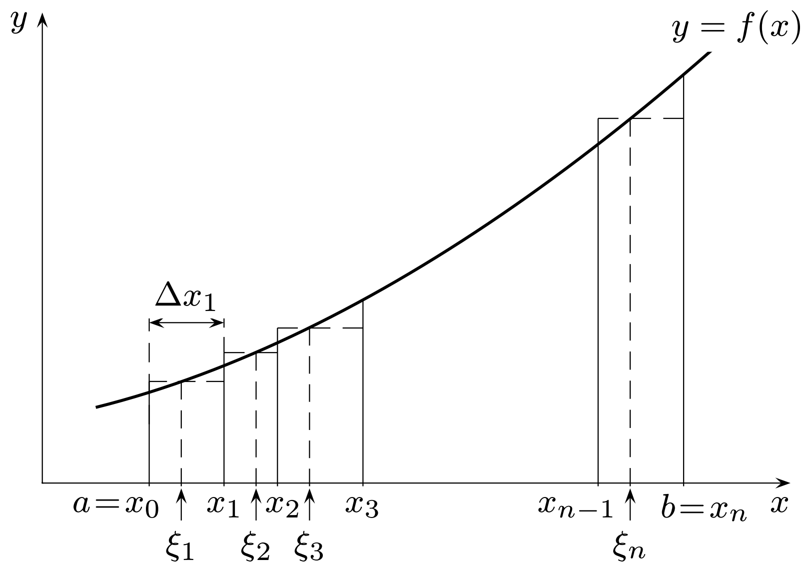
Majoration et minoration de l'aire sous la courbe $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$,

$$s_n \leqslant \text{Aire} \leqslant S_n$$

Sommes de Riemann σ_n ***en général***

Pour une subdivision en n sous-intervalles, ξ_k est un point quelconque du $k^{\text{ième}}$ sous-intervalle :

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$



Proposition. La somme de Riemann est minorée et majorée respectivement par s_n et S_n :

$$s_n \leqslant \sigma_n \leqslant S_n$$

Précision des valeurs approchées S_n **et** s_n (fonctions croissantes)

Pour une subdivision donnée en n sous-intervalles, soit :

$$\delta_n = \max \Delta x_k \qquad \text{(le pas)}$$

Proposition

$$\begin{aligned} S_n - s_n &= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot \Delta x_k \\ &\leqslant \delta_n \cdot \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \\ &= \delta_n \big(f(b) - f(a) \big) \qquad \text{(pour } f \text{ croissante)} \end{aligned}$$

Remarques

Si la fonction f est décroissante, la proposition est analogue.

Si la fonction f n'est ni croissante ni décroissante, on subdivise l'intervalle en sous-intervalles sur lesquels f est monotone.

4.1.2 Intégrale de Riemann

Notation

Nous considérons une fonction f, définie sur $[\,a\,,\,b\,]$ et une *suite de subdivisions* de $[\,a\,,\,b\,]$ en $n = 1, 2, 3, \ldots$ sous-intervalles.

Nous appelons *pas* δ_n *de la subdivision numéro* n la longueur maximale des sous-intervalles de la $n^{\text{ième}}$ subdivision.

Pour une subdivision donnée, nous appelons :

- m_k le *minimum* de f *sur le* $k^{\text{ième}}$ *sous-intervalle*,
- M_k le *maximum* de f *sur le* $k^{\text{ième}}$ *sous-intervalle*,
- Δx_k la longueur du $k^{\text{ième}}$ *sous-intervalle*, plus précisément : $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Définition. Si pour toute suite de subdivisions, dont le pas δ_n tend vers 0 (pour $n \to \infty$), les deux limites ci-dessous existent et tendent vers une même valeur S, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \quad (= S)$$

est appelée l'*intégrale définie* de f sur $[a\,,\,b]$.
f est alors dite intégrable (au sens de Riemann) sur $[a\,,\,b]$.

Définition (équivalente). Si pour toute suite de subdivisions, dont le pas δ_n tend vers 0 (pour $n \to \infty$), et pour tout choix de points ξ_k dans le $k^{\text{ième}}$ sous-intervalle, la limite ci-dessous existe et tend vers une même valeur S, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \qquad (= S)$$

est appelée l'*intégrale définie* de f sur $[a\,,\,b]$.
f est alors dite intégrable (au sens de Riemann) sur $[a\,,\,b]$.

Théorème. Toute fonction continue sur un intervalle fermé est intégrable (au sens de Riemann) sur cet intervalle.

Remarque. Il existe des fonctions autres que les fonctions continues qui sont intégrables. Exemple :

Si f est bornée sur $[a\,,\,b]$ et continue sauf dans un ensemble dénombrable de points, alors f est intégrable.

Liste d'intégrales définies

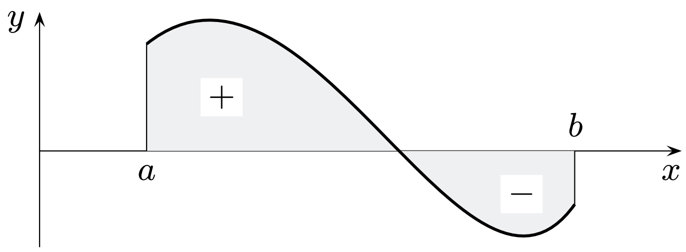
Certaines intégrales définies peuvent être calculées en appliquant directement la définition :

$f(x)$	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
x^k	$\dfrac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$
$\cos x$	$\sin b - \sin a$
$\sin x$	$-(\cos b - \cos a)$
e^x	$\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a$

4.1.3 Intégrales et aires

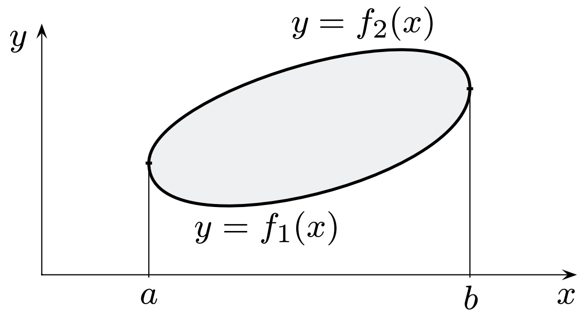
Le signe de l'intégrale

Selon le signe de f, l'intégrale représente l'aire entre l'axe x et le graphe de f voir la valeur opposée de cette aire.



L'aire délimitée par une courbe fermée

$$\text{Aire} \;=\; \int_a^b \big(f_2(x) \;-\; f_1(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

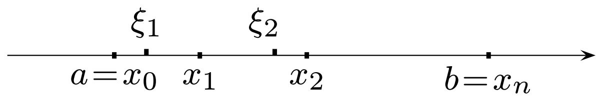


3.4.4 Intégrale et travail

Le travail effectué par la force F pour déplacer un point de a à b (F est supposée avoir la même direction que le déplacement) est

- à *force F constante* : travail $W = F \cdot \ell$

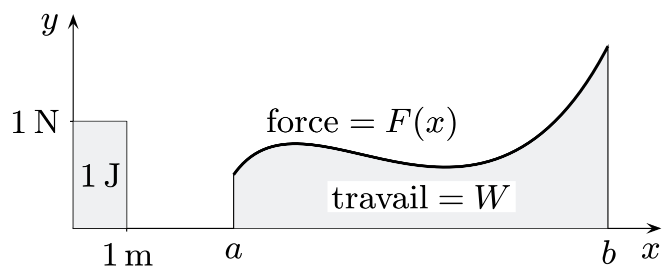
- à *force F variable*, $F(x)$: travail approximatif $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k$



Travail : $W_a^b = \displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$.

Représentation graphique du travail (attention aux unités!)

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$



4.2 Propriétés de l'intégrale définie

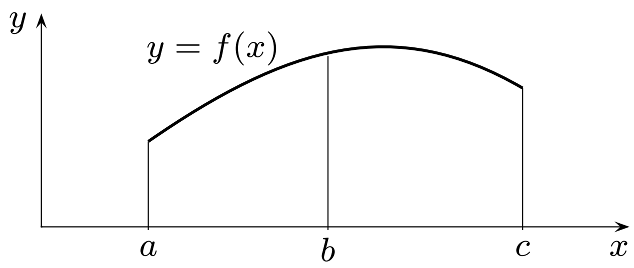
4.2.1 Quelques propriétés élémentaires

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
(en particulier : $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$).

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$

Cette formule est valable pour tout choix de a, b, c. Il n'est *pas nécessaire* que $a < b < c$.

On parle quelquefois de l'*additivité* de l'intégrale.



Propriété de linéarité :

(3a) $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$

(3b) $\displaystyle\int_a^b \mathrm{cste}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{cste}\cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$

Inégalités

(4) $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[\,a\,,\,b\,]$ implique $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

(en particulier : $f(x) \geqslant 0$ implique $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$).

(5) $\displaystyle\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$

est dite *inégalité de Schwarz*.

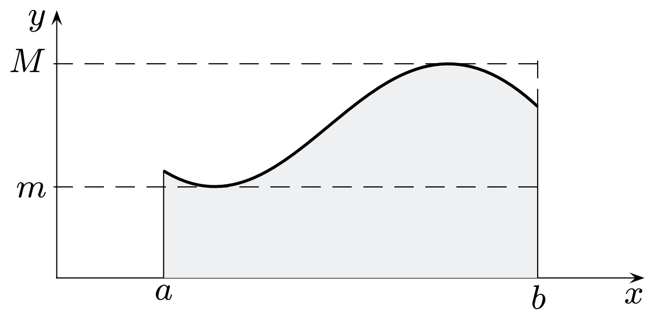
Majoration d'une intégrale

(6a) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$ si $a < b$.

(6b) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x\right|$ pour tout a et b.

(7) Soient m le minimum de f sur $[\,a\,,\,b\,]$ et M le maximum de f sur $[\,a\,,\,b\,]$; alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M \cdot (b-a)$$



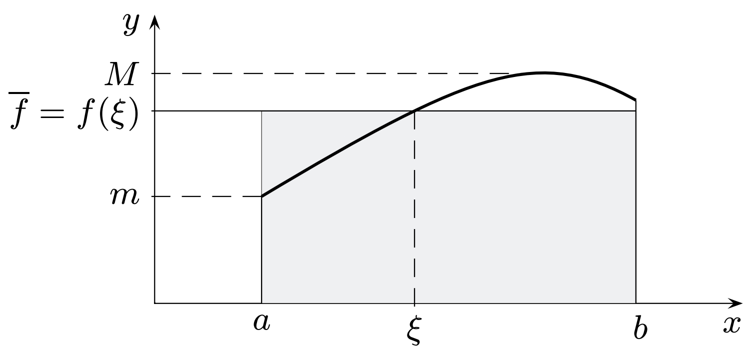
4.2.2 Théorème de la moyenne

Définition. $\overline{f} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est appelée *moyenne de f* sur $[\,a\,,\,b\,]$.

Formulation intuitive du théorème de la moyenne

Une fonction continue sur $[\,a\,,\,b\,]$ atteint sa moyenne $\overline{f}$ en un certain point ξ de $[\,a\,,\,b\,]$.

Autre formulation. L'aire sous la courbe est égale à l'aire d'un rectangle de longueur $b-a$ et de hauteur $\overline{f} = f(\xi)$ (pour un certain ξ).



De façon précise :

Théorème (théorème de la moyenne). Soit f continue sur $[\,a\,,\,b\,]$. Alors il existe $\xi \in [\,a\,,\,b\,]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

Généralisation du théorème de la moyenne (moyenne pondérée)

Soient $f(x)$ et $p(x)$ continues sur $[\,a\,,\,b\,]$; $m = \min f$ sur $[\,a\,,\,b\,]$, $M = \max f$ sur $[\,a\,,\,b\,]$, $p(x) \geqslant 0$ sur $[\,a\,,\,b\,]$ (*poids*).

On a alors

$$m \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x) \cdot p(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

Théorème. Il existe $\xi \in [\,a\,,\,b\,]$ tel que

$$\int_a^b f(x) \cdot p(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

$f(\xi)$ est appelé *moyenne pondérée* de f.

4.2.3 Changement du symbole de la variable d'intégration

Dans une intégrale définie, on peut librement changer la désignation de la variable d'intégration :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(A)\,\mathrm{d}A = \int_a^b f(\square)\,\mathrm{d}\square = \ldots$$

4.3 Intégrale indéfinie (primitive)

4.3.1 Primitive

Définition intuitive

La recherche d'une primitive F d'une fonction f donnée est l'opération inverse de la dérivation.

Chercher une primitive :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, bend left, "\text{dériver}"] & F' = f \arrow[l, bend left, "\text{chercher la primitive}"] \end{tikzcd}$$

DÉFINITION. Si

$$F' = f$$

alors F est appelée *une primitive de* f.

Remarque. Parfois, une *primitive* est aussi appelée *antidérivée* ou *intégrale indéfinie*.

L'ensemble des primitives

PROPOSITION. Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$. Alors :

- toute fonction de la forme $F(x)+\text{cste}$ est aussi une primitive et
- toute primitive de $f(x)$ est de la forme $F(x) + \text{cste}$.

On peut également dire :

- « Deux primitives (de la même fonction) (de la fonction $f(x)$) ne se distinguent que par une constante additive».
- « Si l'on connaît une primitive $F(x)$, on les connaît toutes : $F(x) + \text{cste}$ ».

Quelquefois, l'ensemble des primitives est appelé *intégrale indéfinie de* f.

Notation. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ signifie : l'ensemble des primitives de f.

4.3.2 Recherche de primitives

L'intégration (indéfinie) est un « sport » et un « art »

La définition de primitive (fonction dont la dérivée est donnée) ne comporte pas de règle permettant de calculer effectivement cette primitive. Le choix parmi les méthodes d'intégration données ci-dessous relève plutôt de l'intuition et de l'expérience acquise que d'une réflexion systématique et déductive.

La première approche au problème est faite de la manière suivante.

- La liste des dérivées des fonctions « usuelles » est inversée afin d'obtenir une liste des primitives.
- Certaines règles de calcul pour les dérivées donneront lieu à des règles de calcul correspondantes pour primitives.

Liste de quelques primitives

Dans le tableau suivant, c désigne la constante additive.

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{c}\ (n \neq -1)$	e^x	$\mathrm{e}^x + \mathrm{c}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x + \mathrm{c}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x + \mathrm{c} \\ -\operatorname{arc\,ctg} x + \mathrm{c}' \end{cases}$
$\cos x$	$\sin x + \mathrm{c}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\begin{cases} \operatorname{arg\,cth} x + \mathrm{c} \\ \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1} + \mathrm{c}, \quad \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$
$\sin x$	$-\cos x + \mathrm{c}$		
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + \mathrm{c}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\begin{cases} \operatorname{arg\,th} x + \mathrm{c} \\ \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x} + \mathrm{c}, \quad \lvert x\rvert < 1 \end{cases}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + \mathrm{c}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\begin{cases} \operatorname{arg\,sh} x + \mathrm{c} \\ \ln\lvert x + \sqrt{x^2+1}\rvert + \mathrm{c} \end{cases}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + \mathrm{c}$		
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + \mathrm{c}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \arcsin x + \mathrm{c}, & \lvert x\rvert < 1 \\ -\arccos x + \mathrm{c}', & \lvert x\rvert < 1 \end{cases}$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x + \mathrm{c}$		
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x + \mathrm{c}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\begin{cases} \operatorname{arg\,ch} x + \mathrm{c} \\ \ln\lvert x + \sqrt{x^2-1} + \mathrm{c} \\ \qquad \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$

Règles de calcul et méthodes d'intégration

(1) *Linéarité*

PROPOSITION

$$\int \big(af(x) + bg(x)\big)\,\mathrm{d}x = a \int f(x)\,\mathrm{d}x + b \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

(2) *Intégration par parties*

PROPOSITION

$$\int f \cdot g'\,\mathrm{d}x = f \cdot g - \int f' g\,\mathrm{d}x$$

(3) *Changement de variable (substitution)*:

On pose le problème : Trouver $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Premier pas. *Introduction d'une nouvelle variable* t : $x = \varphi(t)$, d'où

$$F\big(\varphi(t)\big) = \int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Deuxième pas. *Calcul de l'intégrale transformée* : $F\big(\varphi(t)\big) = \dots$

Troisième pas. *Réintroduction de l'ancienne variable* : $t = \varphi^{-1}(x)$.

4.4 Intégration de fonctions rationnelles

4.4.1 Fonctions rationnelles

L'intégration de fonctions rationnelles se fait en deux étapes.

(1) Décomposition de la fonction donnée en éléments simples. Il s'agit d'un problème algébrique (sect. 2.4).

(2) Intégration des éléments simples. Pour les quatres types d'éléments simples, les primitives seront calculées ci-dessous.

Intégration des éléments simples

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln|x-a| + \text{cste}.$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + \text{cste}\ (k \geqslant 2).$

(3) $\displaystyle\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}\,\mathrm{d}x$ (pour x^2+ax+b définie positive)

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\beta-(a\alpha/2)}{x^2+ax+b}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\alpha}{2}\ln|x^2+ax+b| + \Big(\beta - \frac{a\alpha}{2}\Big)\int \frac{1}{(x+a/2)^2+c^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\alpha}{2}\ln|x^2+ax+b| + \frac{\beta-(a\alpha/2)}{c}\int \frac{1}{\Big(\dfrac{x+(a/2)}{c}\Big)^2+1}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{c} \\
&= \frac{\alpha}{2}\ln|x^2+ax+b| + \frac{\beta-(a\alpha/2)}{c}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+(a/2)}{c}\right) + \text{cste}
\end{aligned}$$

où $c^2 = b - \dfrac{a^2}{4}$.

(4) $\displaystyle\int \frac{\alpha x+\beta}{\big(x^2+ax+b\big)^k}\,\mathrm{d}x$ (pour x^2+ax+b définie positive)

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+a}{\big(x^2+ax+b\big)^k}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\beta-(a\alpha/2)}{\big(x^2+ax+b\big)^k}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\alpha}{2}\,\frac{1}{(k-1)\big(x^2+ax+b\big)^{k-1}} \\
&\quad + \frac{\beta-(a\alpha/2)}{c^{2k}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\bigg(\Big(\dfrac{x+(a/2)}{c}\Big)^2+1\bigg)^k}
\end{aligned}$$

où $c^2 = b - \dfrac{a^2}{4}$.

On introduit $t = \dfrac{x + (a/2)}{c}$, d'où $\mathrm{d}x = c \cdot \mathrm{d}t$. Ainsi on trouve

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\alpha x + \beta}{\left(x^2 + ax + b\right)^k}\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\alpha}{2}\, \frac{1}{(k-1)\left(x^2 + ax + b\right)^{k-1}} + \frac{\beta - (a\alpha/2)}{c^{2k-1}} \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2 + 1\right)^k}}_{I_k}
\end{aligned}$$

Calcul de $I_k = \displaystyle\int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^k}$.

Comme $\dfrac{1}{\left(t^2+1\right)^k} = \dfrac{1}{\left(t^2+1\right)^{k-1}} - \dfrac{t^2}{\left(t^2+1\right)^k}$, on a

$$\begin{aligned}
I_k &= I_{k-1} - \int \frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^k}\, \mathrm{d}t \\
&= I_{k-1} - \frac{1}{2} \int \underbrace{t}_{f} \cdot \underbrace{\frac{2t}{\left(t^2+1\right)^k}}_{g'}\ \mathrm{d}t \quad \text{(intégration par parties)} \\
&= I_{k-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{-t}{(k-1)\left(t^2+1\right)^{k-1}} + \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}t}{(k-1)\left(t^2+1\right)^{k-1}}}_{I_{k-1}/(k-1)} \right)
\end{aligned}$$

Le résultat est donc

$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{2k-3}{2(k-1)} \cdot I_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)\left(t^2+1\right)^{k-1}} \qquad (k \geqslant 2) \\
I_1 &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arc\,tg} t + \text{cste}
\end{aligned}$$

4.4.2 Fonctions rationnelles de fonctions trigonométriques

L'intégration des fonctions rationnelles de fonctions trigonométriques peut être ramenée à l'intégration de fonctions rationnelles à l'aide de substitutions bien choisies.

Soit à résoudre : $\int f(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ (f rationnelle).

Premier cas. Si $f(u, v)$ est *impaire* en u (resp. v), c'est-à-dire si un changement de signe de $\cos x$ (resp. $\sin x$) ne provoque qu'un changement de signe de $f(\cos x, \sin x)$, alors la substitution $t = \sin x$ (resp. $t = \cos x$) ramène le problème à l'intégration d'une fonction rationnelle.

Deuxième cas. Si $f(u, v)$ est *paire* en u et v, c'est-à-dire si $\cos x$ et $\sin x$ ne figurent qu'aux puissances paires (c'est-à-dire $f(\cos x, \sin x)$ ne change pas de signe si $\cos x$ ou $\sin x$ changent de signe), alors la substitution $t = \operatorname{tg} x$ ramène le problème à une intégrale d'une fonction rationnelle.

Troisième cas. La substitution $t = \operatorname{tg}(x/2)$ ramène toutes les intégrales du type étudié à des intégrales de fonctions rationnelles.

Dans ce cas on aura :

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

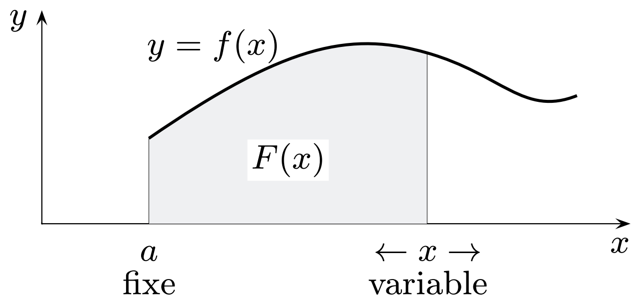
4.5 Théorème fondamental du calcul infinitésimal

4.5.1 Théorème fondamental du calcul infinitésimal

Une troisième notion d'intégrale

Pour une fonction (intégrable) f donnée et une valeur a fixe, nous considérons *l'intégrale, fonction de sa limite supérieure* :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$



Rapport entre intégrale définie et intégrale indéfinie
(ou : rapport entre calcul différentiel et intégral)

Théorème. Soit f continue.
Soit $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, alors $F' = f$
(c'est-à-dire F est dérivable et est une primitive de f)

Ce théorème est appelé *théorème fondamental du calcul infinitésimal.*

Autre formulation du théorème fondamental

(a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}x = f(x)$.

(b) L'intégrale définie, considérée comme une fonction de sa limite supérieure, est une primitive de la fonction à intégrer.

(c) La dérivée d'une intégrale définie par rapport à sa limite supérieure est la fonction à intégrer, prise en cette limite supérieure.

Calcul d'intégrales définies à l'aide de primitives

La proposition ci-dessous est une conséquence immédiate du théorème fondamental.

Proposition. Soit F une primitive de f ; alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Conséquence pratique

Le calcul d'une intégrale définie est ramené à

(1) la recherche d'une primitive F,

(2) $F(b) - F(a)$.

Notation. $F\big|_a^b = F(b) - F(a)$.

4.5.2 Méthode d'intégration

S'il ne nous importe pas de connaître une primitive, on peut, dans certains cas, trouver directement l'intégrale définie.

Intégration par parties

PROPOSITION. $\displaystyle\int_a^b fg' \,\mathrm{d}x = fg\big|_a^b - \int_a^b f'g \,\mathrm{d}x\,.$

Substitution

PROPOSITION. Soit $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Posons $x = \varphi(t)$ où

- $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;
- φ, φ' sont continues sur $[\alpha\,,\,\beta\,]$;
- $f\big(\varphi(t)\big)$ est définie et continue sur $[\alpha\,,\,\beta\,]$;

alors

$$I = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Complément. Si φ est monotone, on a $\alpha = \varphi^{-1}(a)$, $\beta = \varphi^{-1}(b)$.

Remarque. Du point de vue pratique, la proposition signifie : *si*, lors d'un changement de variable dans une intégrale définie, *on transforme aussi les limites* d'intégration, il n'est alors *pas nécessaire de revenir à l'ancienne variable.*

4.5.3 Dérivées d'intégrales dépendant de leurs limites

Proposition

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$ «théorème fondamental»;

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = -f(x)$;

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\underbrace{\int_a^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t}_{F(b(x))} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b}\cdot\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} = f\big(b(x)\big)\cdot b'(x);$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\underbrace{\int_{a(x)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t}_{F(a(x))} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = -f\big(a(x)\big)\cdot a'(x);$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{a(x)}^{c} + \int_c^{b(x)}\right)\\ &= f\big(b(x)\big)\cdot b'(x) - f\big(a(x)\big)\cdot a'(x)\,.\end{aligned}$$

4.6 Intégrales généralisées

(appelées aussi intégrales impropres)

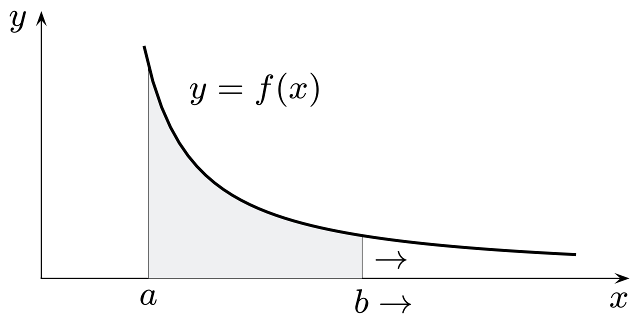
4.6.1 Intégrales avec des bornes infinies

(intégrales impropres de seconde espèce)

Définition. Si la limite ci-dessous existe, nous écrivons :

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{déf}}{=} \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

On dira alors que l'intégrale généralisée *existe* ou qu'elle *converge*.



Remarque. On admet implicitement que f est intégrable.

Deux problèmes concernant les intégrales généralisées

En face d'une intégrale généralisée, on essayera de répondre aux deux questions suivantes :

(1) L'intégrale, *existe-t-elle* ?

(2) Quelle est la *valeur de l'intégrale* (si elle existe) ?

Il n'y a pas de méthode générale permettant de répondre à ces deux questions dans n'importe quel cas. Toutefois, les réponses partielles données ci-dessous permettent d'aborder beaucoup de problèmes qui se posent dans les applications.

Calcul de la valeur des intégrales généralisées

Parfois on peut trouver directement la valeur d'une intégrale généralisée (le problème de l'existence étant ainsi résolu en même temps). Ceci est souvent possible si l'on connaît une *primitive F de la fonction à intégrer f*. Le problème est ainsi ramené au calcul de la limite :

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\big(F(b) - F(a)\big)$$

D'autres méthodes existent, par exemple par le développement en série de Taylor (sect. 6.7).

Existence (convergence) d'une intégrale généralisée de fonctions positives

Dans certains cas où l'on ne peut pas trouver la valeur d'une intégrale généralisée, on peut au moins décider de sa convergence.

Majorer, minorer (critère de comparaison)

Une méthode générale consiste à comparer la fonction à intégrer avec des fonctions dont on sait que l'intégrale impropre existe ou n'existe pas.

Proposition

(a) Soit f une fonction positive, *majorée* par une fonction M dont l'*intégrale généralisée existe*. Alors l'intégrale généralisée de f existe aussi.

(b) Soit f une fonction positive, *minorée* par une fonction m dont l'*intégrale généralisée n'existe pas*. Alors l'intégrale généralisée de f n'existe pas non plus.

Fonction test

Proposition. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ existe si et seulement si $\alpha > 1$.

Critère de convergence (ou d'existence)

Proposition

(a) Soit $0 \leqslant f \leqslant \text{cste}\,/x^\alpha$ pour un $\alpha > 1$; alors

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{existe (converge)}$$

(b) Soit $0 \leqslant \text{cste}\,/x^\alpha \leqslant f$ pour un $\alpha \leqslant 1$; alors

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{n'existe pas (diverge)}$$

(c) Si aucune des conditions (a) ou (b) n'est satisfaite, *le critère ne s'applique pas.*

Fonctions à signe variable

Intégrales (généralisée) absolument convergentes

Définition. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^\infty \bigl|f(x)\bigr|\,\mathrm{d}x$ converge, l'intégrale $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ est dite *absolument convergente.*

Proposition. La convergence absolue d'une intégrale généralisée implique la convergence ; c'est-à-dire :
si $\displaystyle\int_a^\infty \bigl|f(x)\bigr|\,\mathrm{d}x$ converge, alors $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge aussi.

Remarque. La convergence n'entraîne pas nécessairement la convergence absolue.

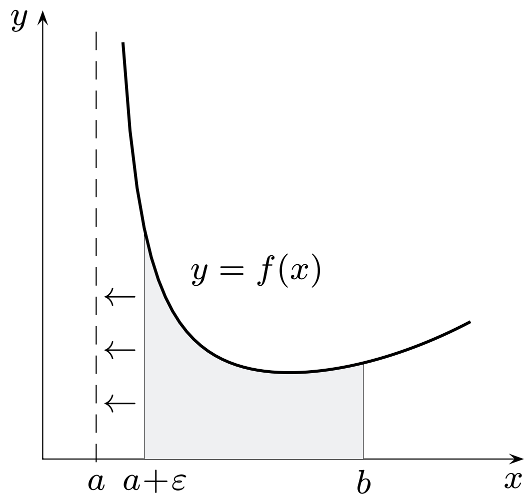
Utilisation des critères précédents, dans le cas où les fonctions ne sont plus positives. On peut essayer de démontrer la convergence de $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ en étudiant $\int_a^\infty \bigl|f(x)\bigr|\,\mathrm{d}x$. Si la deuxième intégrale converge, l'intégrale originale converge aussi (elle converge même absolument). Toutefois, il s'agit là d'un critère qui ne permet pas de trancher la question lorsque l'intégrale converge sans converger absolument.

4.6.2 Intégrales de certaines fonctions discontinues (intégrales impropres de première espèce)

Définition. Soit f une fonction continue sur $(a\,,\,b\,]$.
Si la limite ci-dessous existe, on notera :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{déf}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

On dira alors que l'intégrale *existe* ou qu'elle *converge.*



Calcul d'une intégrale impropre de première espèce

On peut quelquefois calculer la valeur d'une telle intégrale généralisée, par exemple si une primitive de la fonction à intégrer est connue.

Existence (convergence) des intégrales impropres de première espèce

Comme dans le cadre des « intégrales impropres de seconde espèce», on peut majorer (resp. minorer) la fonction à intégrer par des fonctions dont la convergence (resp. divergence) de l'intégrale est connue.

Fonctions test

Proposition. Soit $a < b$;

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} \quad \begin{cases} \text{converge pour } \alpha < 1 \\ \text{diverge pour } \alpha \geqslant 1 \end{cases}$$

Critère de convergence

Proposition

(a) Soit pour un certain $\alpha < 1 : 0 \leqslant f(x) \leqslant \text{cste}/(x-a)^\alpha$ sur $(a\,, b\,]$; alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{converge}$$

(b) Soit pour un certain $\alpha \geqslant 1 : 0 \leqslant \text{cste}/(x-a)^\alpha \leqslant f(x)$ sur $(a\,, b\,]$; alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{diverge}$$

(c) Si aucune des conditions (a) ou (b) n'est satisfaite, le critère ne s'applique pas.

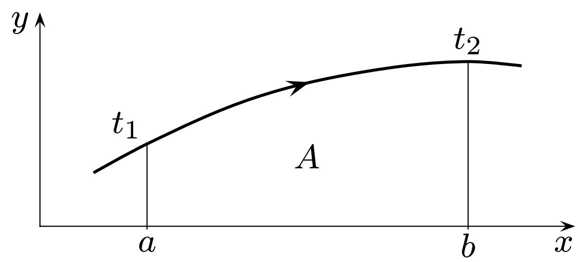
4.7 Applications des intégrales

Dans cette section, les fonctions et les dérivées sont supposées existantes et continues.

4.7.1 Aire sous une courbe paramétrée

Soit une courbe paramétrée $\{x = x(t) ; y = y(t)\}$, avec $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ $(y > 0)$; alors l'aire sous la courbe est

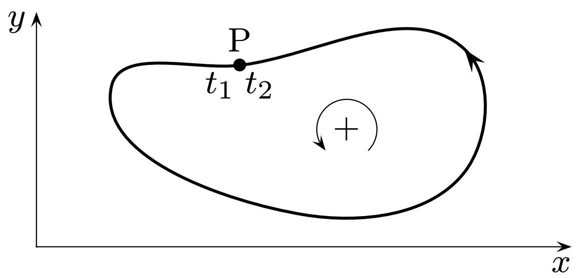
$$A = \int_a^b y\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)\,\mathrm{d}t$$



4.7.2 Aire délimitée par une courbe fermée

Soit une courbe fermée paramétrée $\{x = x(t); y = y(t)\}$ où $x(t_1) = x(t_2)$ et $y(t_1) = y(t_2)$; alors l'aire «intérieure» est

$$A = -\int_{t_1}^{t_2} y \cdot x' \, \mathrm{d}t$$



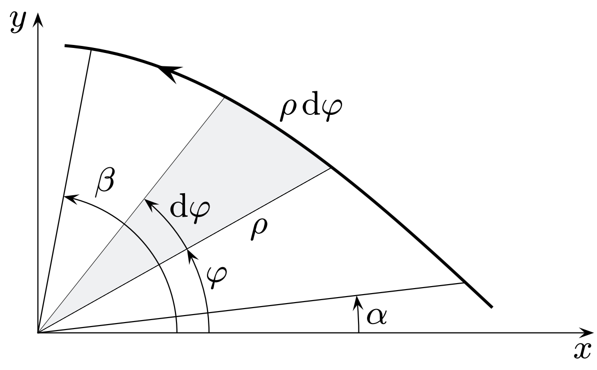
Autre formule : $A = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} x \cdot y' \, \mathrm{d}t$.

Formule «symétrique» : $A = \displaystyle\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (xy' - x'y) \, \mathrm{d}t$.

4.7.3 Aire en coordonnées polaires

L'élément d'aire en coordonnées polaires est $\mathrm{d}A = \dfrac{\rho^2}{2} \, \mathrm{d}\rho$, donc

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, \mathrm{d}\varphi$$



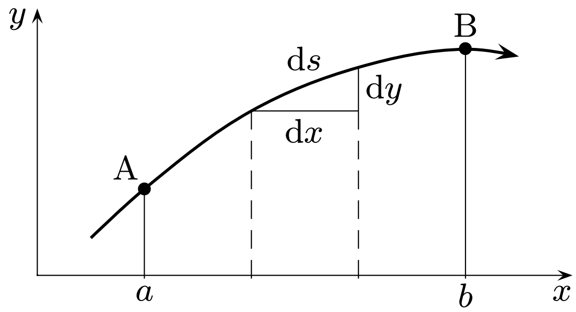
4.7.4 Longueur d'un arc de courbe (plane)

On a pour l'élément d'arc ds :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \qquad \mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

La *longueur de l'arc* $\widehat{\mathrm{AB}}$ (abscisse curviligne) est

$$L_{\widehat{\mathrm{AB}}} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}s$$



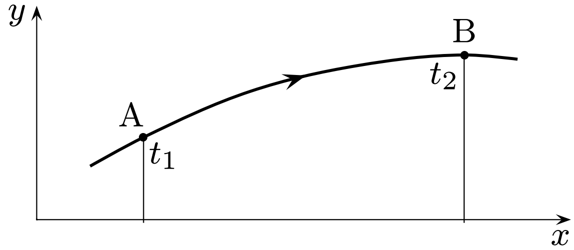
4.7.5 Longueur d'un arc paramétré

Pour une courbe paramétrée $\big\{x = x(t); y = y(t)\big\}$ avec $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, on a

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

d'où la longueur de l'arc $\widehat{\mathrm{AB}}$

$$L_{\widehat{\mathrm{AB}}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^{\,2} + y'^{\,2}}\,\mathrm{d}t$$



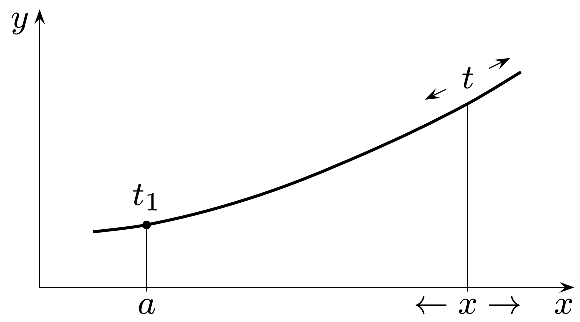
4.7.6 Abscisse curviligne comme paramètre

Si la *courbe est donnée sous forme explicite* $y = y(x)$, alors

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\right)^2}\, \mathrm{d}\xi$$

Si la courbe est *paramétrée* par $\{x = x(t); y = y(t)\}$, alors

$$s(t) = \int_{t_1}^t \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2}\, \mathrm{d}\tau$$



4.7.7 Abscisse curviligne et vecteur tangent

Soit une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne $\{x = x(s); y = y(s)\}$; alors

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 1$$

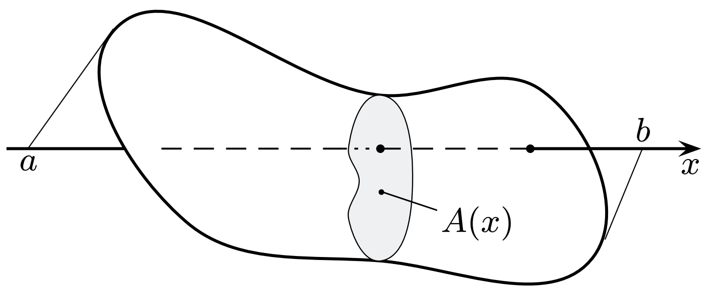
Proposition. Le vecteur tangent d'une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne est de longueur $\equiv 1$.

4.7.8 Volume

Le volume «intérieur» à une surface fermée est

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

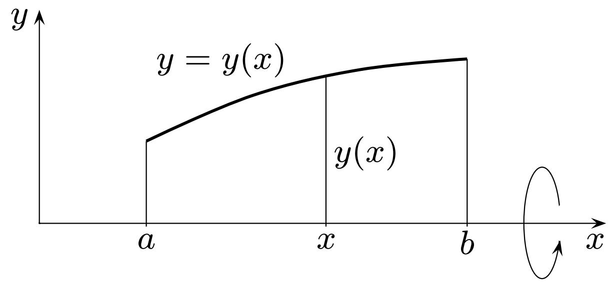
où $A(x)$ est l'aire d'une section verticale.



4.7.9 Volume d'un corps de révolution

Avec $A(x) = \pi \cdot y^2$, on a dans ce cas :

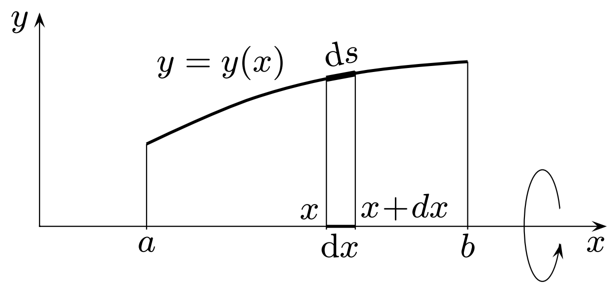
$$V = \pi \int_a^b y^2\,\mathrm{d}x$$



4.7.10 Aire d'une surface de révolution

Soit $\mathrm{d}A = 2\pi y\,\mathrm{d}s = 2\pi y\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\,\mathrm{d}x$ l'élément d'aire engendré par la rotation de l'élément d'arc $\mathrm{d}s$ autour de l'axe x ; alors

$$A = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

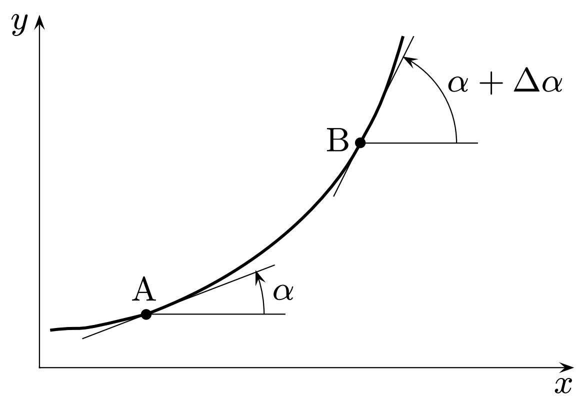


4.8 Courbure, cercle osculateur

La *courbure moyenne d'un arc* est

$$k_{\text{moyenne}} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

où $\Delta\alpha$ est l'angle de contingence de l'arc $\widehat{\mathrm{AB}}$.



Définition. La courbure en A est définie par $k = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$.

4.8.1 Calcul de la courbure

La courbure pour une *courbe explicite* est

$$k = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}$$

La courbure pour une *courbe paramétrée* est

$$k = \frac{x'y'' - x''y'}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}$$

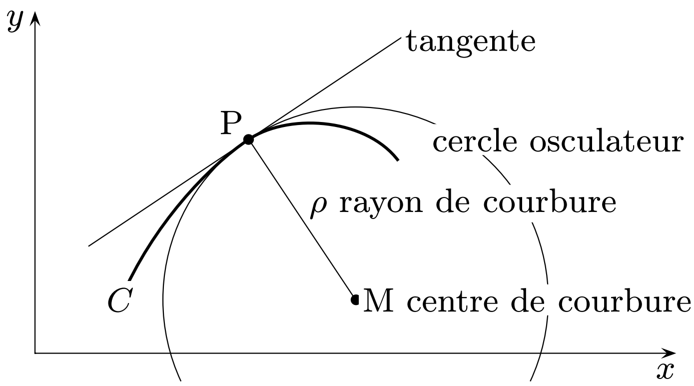
4.8.2 Rayon de courbure, cercle osculateur et centre de courbure

Le *rayon de courbure* est $\rho = 1/k$.

Le *cercle osculateur* est le cercle qui :

- passe par P,
- a même tangente que C (en P),
- a même courbure que C (en P).

Le *centre de courbure* est le centre du cercle osculateur.



Chapitre 5

Séries

5.1 Séries numériques, séries alternées

5.1.1 Séries numériques

Définition de la convergence d'une série numérique

Soit la série :

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_1 + a_2}_{S_2} + a_3}_{S_3} + a_4}_{S_4} + a_5 + \cdots}_{\text{etc.}} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Définition. On dit que *la série* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *converge si la suite* s_k *des sommes partielles converge* $(s_k \to S)$. S est alors appelée la somme de la série.

La notation $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sera souvent abrégée en $\sum a_i$.

Exemple. La série géométrique

$$1 + p + p^2 + p^3 + \cdots \begin{cases} = \dfrac{1}{1-p} & \text{pour } |p| < 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{pour } |p| \geqslant 1 \end{cases}$$

Propositions et règles de calcul pour toutes les séries

(1) Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge, alors $a_i \to 0$.

(2) «On peut multiplier une série convergente terme par terme par un nombre». De façon précise : si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a$, alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lambda a$$

On dit aussi : «On peut mettre en évidence un facteur commun aux termes d'une série convergente».

(3) «On peut additionner deux séries convergentes terme par terme». De façon précise : si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a$, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = b$, alors

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \pm \sum_{i=1}^{\infty} b_i = a \pm b$$

(4) Si la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge (resp. diverge), alors, après modification d'un nombre fini de termes, la série converge (resp. diverge) toujours.

(5) *Critère de Cauchy*. La série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $N \leqslant n < m$ implique : $|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon$. (Intuitivement : pour des indices n et m suffisamment grands, la somme $|a_n + \cdots + a_m|$ est aussi petite que l'on veut.)

5.1.2 Séries alternées

Définition. Une série $\sum a_i$ est dite *série alternée*, si a_i et a_{i+1} sont de signe opposé quel que soit i.

Critère de Leibniz

Proposition. Soit $\sum a_i$ une *série alternée* telle que

(a) $\lim a_i = 0$,

(b) $|a_i|$ est décroissant,

alors $\sum a_i$ converge.

5.1.3 Convergence absolue

DÉFINITION. Une série $\sum a_i$ est dite *absolument convergente*, si la série $\sum |a_i|$ des valeurs absolues converge.

PROPOSITION. Toute série absolument convergente est convergente.

Remarque. Il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes. Exemple : « la série harmonique »

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Règles de calcul pour les séries absolument convergentes

(1) Si $\sum a_i$ et $\sum b_i$ convergent absolument, alors $\sum(a_i \pm b_i)$ converge absolument.

(2) Si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ et $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ convergent absolument (vers a resp. vers b), alors leur « produit »

$$\sum_{\substack{(k+\ell=i)\\ i=0}}^{\infty} a_k \cdot b_\ell$$

converge absolument (vers $a \cdot b$).

(3) Toute sous-série d'une série absolument convergente est absolument convergente.

(4) Si une série est absolument convergente, on peut permuter librement les termes : la série restera absolument convergente et la somme sera la même.

Séries convergentes mais pas absolument convergentes

Ces séries sont aussi appelées *semi-convergentes*.

THÉORÈME (Riemann). Soit $\sum a_i$ convergente mais pas absolument convergente. En permutant ses termes, on peut obtenir n'importe quelle somme ou même une série divergente.

5.1.4 Séries complexes

Excepté le paragraphe sur les séries alternées et le théorème de Riemann sur les séries semi-convergentes, toutes les définitions et propositions figurant ci-dessus sont également valables pour des séries à termes complexes. Notamment :

- la définition de la convergence d'une série,
- les propositions et règles de calcul pour toutes les séries,
- la définition de la convergence absolue,
- la proposition selon laquelle toute série absolument convergente est convergente,
- les règles de calcul pour les séries absolument convergentes.

Exemple. La série géométrique complexe :

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \begin{cases} = \dfrac{1}{1-z} & \text{si } |z| < 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } |z| \geqslant 1 \end{cases}$$

5.2 Séries à termes positifs, critères de convergence

Majorer et minorer des séries à termes positifs

(1) Majorer. Soit $0 \leqslant a_i \leqslant b_i$; si $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ converge, alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge aussi.

(2) Minorer. Soit $0 \leqslant b_i \leqslant a_i$; si $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ diverge, alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge aussi.

Majorer et minorer des séries quelconques

(1) Majorer : soit $0 \leqslant |a_i| \leqslant b_i$; si $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ converge, alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge (absolument).

(2) Minorer : soit $0 \leqslant b_i \leqslant |a_i|$; si $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ diverge, alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ n'est pas absolument convergente (c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ est soit divergente soit semi-convergente).

5.2.1 Tests de d'Alembert et de Cauchy (test du quotient et test de la racine $n^{\text{ième}}$)

Test du rapport ou test de d'Alembert

PROPOSITION

(a) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *converge (absolument)* si, à partir d'un certain indice, on a

$$\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \leqslant p < 1$$

(b) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *diverge* si, à partir d'un certain indice, on a

$$\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \geqslant 1$$

(c) Si aucune des deux conditions n'est satisfaite, le test ne permet pas de conclure

Test de la racine $n^{\text{ième}}$ ou test de Cauchy

PROPOSITION

(a)

$\sum a_i$ *converge (absolument)* si, à partir d'un certain indice, on a

$$\sqrt[i]{|a_i|} \leqslant p < 1$$

(b) $\sum a_i$ *diverge* si, à partir d'un certain indice, on a

$$\sqrt[i]{|a_i|} \geqslant 1$$

(c) Si aucune des deux conditions n'est satisfaite, le test ne permet pas de conclure.

5.2.2 Cas particulier des tests de d'Alembert et de Cauchy

Proposition. Si

$$\lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = p$$

alors on a pour

- $p < 1$ *convergence (absolue)*,
- $p > 1$ *divergence*,
- $p = 1$ test non concluant.

Proposition. Si

$$\lim_{i\to\infty}\sqrt[i]{|a_i|} = p$$

alors on a pour

- $p < 1$ *convergence (absolue)*,
- $p > 1$ *divergence*,
- $p = 1$ test non concluant.

5.2.3 Comparaison avec une intégrale

Proposition. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série à termes positifs avec $a_n \to 0$.
Soit $f(x)$, (définie et) décroissante, à partir d'un $k > 0$, telle que $f(n) = a_n$ pour $n > k$. Alors :

- si $\displaystyle\int_k^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *converge*, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ *converge aussi*,
- si $\displaystyle\int_k^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverge*, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_n$ *diverge aussi.*

5.3 Suite de fonctions, séries de fonctions, convergences simple et uniforme

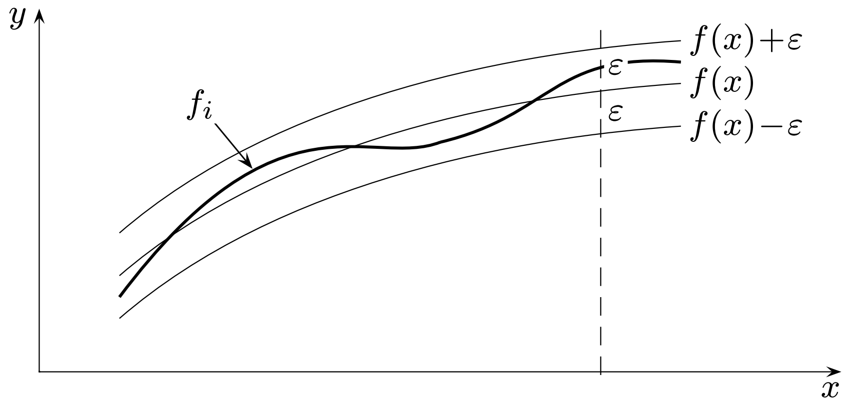
5.3.1 Suites de fonctions réelles

Convergence simple et convergence uniforme

DÉFINITION. Soit f_1, f_2, f_3, … une suite de fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$.
On dit que la suite f_i *converge simplement* (ou ponctuellement) vers f, si pour tout $x \in A$, $f_i(x)$ converge vers $f(x)$.
Si $f_i(x)$ converge vers $f(x)$ seulement pour les $x \in D \subset A$, on appelle D *domaine de convergence* de la suite.

DÉFINITION. On dit qu'une suite f_1, f_2, … de fonctions, définies sur $A \subset \mathbb{R}$, *converge uniformément* vers f si, pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit soit-il), il existe un indice N (qui ne dépend pas de x, mais seulement de ε!) tel que pour tout $x \in A$ on a : $\big|f_i(x) - f(x)\big| < \varepsilon$ si $i > N$.

Autrement dit : f_i est à l'intérieur de la bande $f(x) + \varepsilon$, $f(x) - \varepsilon$.



Définition équivalente de la convergence uniforme

Appelons

$$\sup_{x\in A}\bigl|f(x)-g(x)\bigr| = d(f,g)$$

la *distance* des deux fonctions f et g.

Appelons l'ensemble des fonctions dont la distance à f est $< \varepsilon$ un *ε-voisinage* (ouvert) de f : $V_\varepsilon(f) = \bigl\{g \mid d(g,f) < \varepsilon\bigr\}$.

On peut formuler la définition de la convergence uniforme de la manière suivante :

On dit que la suite $f_1,\ f_2,\ \ldots$ converge uniformément vers f si, pour tout ε-voisinage $V_\varepsilon(f)$, il existe un indice N à partir duquel toutes les f_i sont dans $V_\varepsilon(f)$.

PROPOSITION. Une suite f_i qui converge uniformément vers f converge aussi simplement vers f.

Remarque. Une suite f_i qui converge simplement vers f *ne converge pas nécessairement* aussi uniformément vers f.

Limite uniforme d'une suite de fonctions continues

PROPOSITION. Soit f_i une suite de fonctions continues sur $[\,a\,,\,b\,]$.
Si la suite f_i converge uniformément vers f, alors f est aussi continue sur $[\,a\,,\,b\,]$.

Intégration de suites uniformément convergentes

PROPOSITION. Soit f_i une suite de fonctions continues sur $[\,a\,,\,b\,]$.
Si les f_i *convergent uniformément* vers f, on a :

$$\lim_{i\to\infty}\int_a^b f_i(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \left(= \int_a^b \lim_{i\to\infty} f_i(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Intuitivement. Dans une suite uniformément convergente on peut permuter lim et $\int$:

$$\lim \int f_i \,\mathrm{d}x = \int \lim f_i \,\mathrm{d}x$$

Dérivation de suites uniformément convergentes

PROPOSITION. Soit f_i une suite de fonctions *continûment dérivables* sur $[\,a\,,\,b\,]$.
Si les f_i *convergent* (au moins simplement) vers f et si les f_i' *convergent uniformément* vers g, alors

$$f \text{ est dérivable} \quad \text{et} \quad f' = g$$

Intuitivement. Dans une suite dont les dérivées sont continues et convergent uniformément, on peut inverser limite et dérivée :

$$\big(\lim f_i\big)' = \lim\big(f_i'\big)$$

5.3.2 Séries de fonctions réelles

DÉFINITION. Soient $a_i(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$, … des fonctions réelles définies sur $A \subset \mathbb{R}$.
On dit que la série $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ converge *simplement* (resp. *uniformément*) vers a si la suite des sommes partielles convergent *simplement* (resp. *uniformément*) vers $a(x)$.

Intégration de séries uniformément convergentes

PROPOSITION. Soit $a_i(x)$ une suite de fonctions continues sur $[\,a\,,\,b\,]$.
Si la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge uniformément (vers f), on a :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b a_i(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x) \right) \mathrm{d}x \qquad \left(= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

Intuitivement. Une série uniformément convergente peut être intégrée terme par terme.

Autre formulation. Dans une série uniformément convergente, on peut permuter $\sum$ et $\int$.

Dérivation des séries de fonctions

PROPOSITION. Soit $a_i(x)$ une suite de fonctions continûment dérivables.
Si la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *converge* (au moins simplement) vers f et si la série des dérivées $\sum_{i=1}^{\infty} a_i'$ *converge uniformément* vers g, alors f est dérivable et $f' = g$.

Intuitivement. Dans une série convergente, dont les dérivées convergent uniformément, on peut permuter $\sum$ et $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$:

$$\left(\sum a_i\right)' = \sum a_i'$$

Autre formulation. Une série convergente de fonctions peut être dérivée terme par terme, si la nouvelle série converge uniformément.

Chapitre 6

Séries de Taylor

6.1 Approximations locales par des polynômes

Dans cette section, on suppose l'existence de toutes les dérivées utilisées.

Approximation linéaire (sect. 3.7)

$$f_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

est appelée *approximation linéaire* ou *approximation d'ordre* 1 de f dans un voisinage du point a.

f_1 est le (seul) polynôme de degré 1 ayant en a :

- la même valeur que f,
- la même dérivée que f.

$y = f_1(x)$ est la *tangente* à la courbe $y = f(x)$ en a, plus précisément : au point de coordonnées $\big(a, f(a)\big)$.

Approximation d'ordre 2

$$f_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x - a)^2$$

est appelée *approximation d'ordre* 2 de la fonction f.

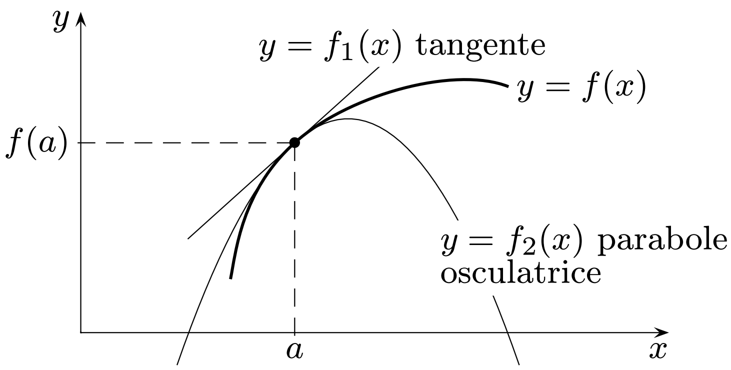
f_2 est le (seul) polynôme de degré 2 ayant en a :

- la même valeur que f,
- la même dérivée que f,
- la même dérivée seconde que f.

$y = f_2(x)$ est la *parabole osculatrice* de $y = f(x)$ au point de coordonnées $\big(a, f(a)\big)$:

- elle passe par le point $\big(a, f(a)\big)$ du graphe de $y = f(x)$,
- elle a la même tangente que $y = f(x)$ en ce point de contact,
- elle a la même courbure que $y = f(x)$ en ce point.

Interprétation géométrique des approximations d'ordre 1 et 2



Approximation d'ordre n

$$f_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$$

est appelée *approximation* (locale) *d'ordre* n de la fonction f (dans un voisinage du point a).

$f_n(x)$ est le polynôme de degré n ayant en a :

- la même valeur que f,
- la même dérivée que f,

  $\vdots$
- la même dérivée $n^{\text{ième}}$ que f.

6.2 Formule de Taylor

6.2.1 Précision de l'approximation linéaire

THÉORÈME. Si f'' existe dans un intervalle comprenant a et x, alors il existe ξ entre a et x tel que

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a) \cdot (x-a)}_{f_1(x)} + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2}_{R}$$

Le terme $R = \dfrac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2$ sera appelé *reste*.

Majorer le reste. Si l'on veut estimer la précision de l'approximation linéaire f_1 d'une fonction f, on essayera de majorer le reste R. La difficulté principale dans l'application de la formule ci-dessus réside dans le fait qu'elle postule l'existence d'une valeur ξ sans donner de méthode pour trouver cette valeur.

En général, il suffit de remplacer ξ par une valeur (entre a et x) pour laquelle $|f''|$ est maximale.

Précision en un point

Problème. Estimer la précision de l'approximation linéaire f pour une valeur x donnée.

Méthode de calcul. Remplacer dans la formule du reste R la valeur ξ par celle parmi les valeurs $*$ (entre a et x) pour laquelle $\left|f''(*)\right|$ est maximale. On a alors

$$|R| \leqslant \frac{\left|f''(*)\right|}{2}|x-a|^2$$

Précision dans un intervalle

Problème. Estimer la précision de l'approximation linéaire dans un intervalle (symétrique) autour de a : $(a-\rho\,,\, a+\rho)$.

Marche à suivre

(1) Remplacer dans la formule du reste R la valeur ξ par celle des valeurs $*$ entre $a-\rho$ et $a+\rho$ pour laquelle $\left|f''(*)\right|$ est maximale.

(2) Remplacer dans la formule du reste R la valeur $|x-a|$ par ρ.

Précision donnée, intervalle cherché

Problème. Trouver un intervalle (symétrique) $[\,a-\rho\,,\, a+\rho\,]$ dans lequel l'imprécision de l'approximation linéaire ne dépasse pas une valeur ε donnée.

Solution. Au cas où $|f''|$ prend son maximum soit en a, soit à une des extrémités d'un (petit) intervalle autour de a, on peut procéder de la manière suivante :

- *Si $|f''|$ est maximale en a* : résoudre $\dfrac{\left|f''(a)\right|}{2}\,\rho^2 < \varepsilon$. D'où $\rho < \dots$
- *Si $|f''|$ est maximale à une des extrémité de l'intervalle* (par exemple en $a+\rho$) : résoudre $\dfrac{\left|f''(a+\rho)\right|}{2}\,\rho^2 < \varepsilon$. D'où $\rho < \dots$

  Dans ce cas, il est souvent nécessaire de majorer $\left|f''(a+\rho)\right|$ pour trouver une inégalité «maniable».

6.2.2 Une autre définition de la dérivée

Comportement du reste pour $x \to a$

Proposition. On a $R \to 0$ (pour $x \to a$) et en plus

$$\frac{R}{x-a} \longrightarrow 0 \qquad (\text{pour } x \to a)$$

Intuitivement : R non seulement tend vers 0, mais R tend vers zéro plus «vite» que $x-a$.

Autre définition de la dérivée

Intuitivement, une fonction f est dite dérivable en a, si elle peut être approchée dans un voisinage de a par une fonction linéaire (affine) $f_1(x) = f(a) + mx$. m sera alors appelée *dérivée de f en a.*
De façon précise :

NOUVELLE DÉFINITION. f est appelée *dérivable en a* s'il existe un nombre m et une fonction $R(x)$ telle que

$$\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{x-a} = 0$$

et telle que la fonction f peut s'écrire :

$$f(x) = f(a) + m(x-a) + R(x)$$

m sera appelé *dérivée de f en a.*

6.2.3 Précision de l'approximation d'ordre n

THÉORÈME (formule de Taylor). Si f est $n+1$ fois continûment dérivable sur $[\,a\,,\,x\,]$ (resp. $[\,x\,,\,a\,]$), alors

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) &+ \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + R_n \end{aligned}$$

où le reste R_n peut (par exemple) être noté :

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1} \qquad \text{pour un certain } \xi \text{ entre } a \text{ et } x$$

ou

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_{t=a}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque

« $R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$ pour un certain ξ entre a et x » signifie, plus exactement : il existe ξ entre a et x tel que $R_n = \ldots$

Précision de l'approximation d'ordre n

Problème. Que vaut l'approximation d'ordre n dans un intervalle $[\,a-d\,,\ a+d\,]$ donnée ?

Méthode de résolution. On peut souvent estimer la précision de f_n en majorant le reste R_n :

$$\big|R_n(x)\big| \leqslant \left|\frac{f^{(n+1)}(*)}{(n+1)!}\,d^{n+1}\right|$$

Il faut choisir la valeur $*$ entre a et x de sorte que $|f^{(n+1)}|$ soit maximale.

6.3 Séries de Taylor

6.3.1 La notion de série de Taylor

L'expression :

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \cdots$$

est appelée *série de Taylor de la fonction f.*

La valeur a est appelée *centre* du développement de Taylor.

Proposition. Soit

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

Il revient alors au même de dire que

(a) $R_n \to 0$ (si $n \to \infty$) pour un certain x ; ou

(b) la série de Taylor tend vers $f(x)$ (pour ce même x) ; ou

(b′) $f(x) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$ (pour ce même x).

Remarque. Pour qu'une fonction puisse être développée en série de Taylor autour de a, il est nécessaire (mais pas suffisant) que toutes les dérivées existent en a.

6.3.2 Exemples de fonctions entières

Définition. Une fonction f est appelée *fonction entière*, si sa série de Taylor converge vers $f(x)$ pour tout x, quel que soit le centre de développement.

Quelques fonctions entières et leur série de Taylor

$\mathrm{e}^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$	(pour tout x)
$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} - \cdots$	(pour tout x)
$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} - \cdots$	(pour tout x)
$\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} + \cdots$	(pour tout x)
$\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} + \cdots$	(pour tout x)

Fonction exponentielle complexe

La définition donnée ci-dessous est *une* des définitions possibles. La série converge (même absolument) pour tout z.

DÉFINITION. La fonction exponentielle complexe est définie par la série

$$\mathrm{e}^z \overset{\text{déf}}{=} 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad \text{pour tout } z \text{ complexe}$$

Remarque. Les fonctions cos, sin, ch et sh peuvent être définies d'une manière analogue pour des valeurs complexes de la variable.

Une démonstration des formules d'Euler

Soit y réel.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos y + i \sin y\end{aligned}$$

6.4 Domaine de convergence

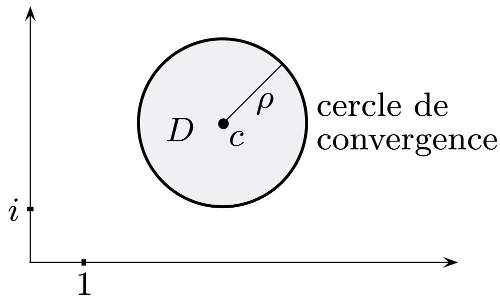
6.4.1 Convergence des séries entières

DÉFINITION. Une série du type $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ ou plus généralement $a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$ sera appelée *série entière*.

Séries entières complexes

Pour la convergence de la série $a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots$, il existe trois possibilités :

(1) *Convergence à l'intérieur d'un disque* D de centre $z = c$; divergence à l'extérieur. Le rayon ρ du disque est appelé *rayon de convergence*.



(Aucun énoncé général n'est possible pour l'éventuelle convergence ou divergence de la série sur le bord du disque.)

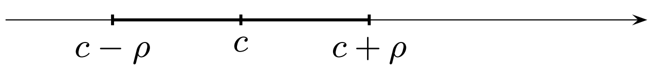
(2) *Convergence pour* $z = c$ *seulement*. On dit alors aussi que «le rayon de convergence est nul» ($\rho = 0$).

(3) *Convergence pour tout* $z \in D$. On dit alors aussi que «le rayon de convergence est infini».

Remarque. La série converge même absolument à l'intérieur du cercle de convergence. Elle converge uniformément dans tout disque fermé contenu à l'intérieur du cercle de convergence.

Séries entière réelles

Proposition. La série $a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$ converge à l'intérieur d'un intervalle symétrique autour de c. Elle diverge à l'extérieur de cet intervalle. (Un énoncé général concernant l'éventuelle convergence ou divergence sur les points limites de l'intervalle n'est pas possible.)



Trois cas sont possibles :

(1) $\rho = 0$, convergence pour $x = c$ seulement.

(2) ρ *fini*.

(3) $\rho = \infty$, convergence pour tout x réel.

6.4.2 Calcul du rayon de convergence

PROPOSITION. Si l'une ou l'autre des limites ci-dessous existe, le rayon de convergence d'une série $a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\cdots$ peut être calculé à l'aide des formules :

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|a_{n+1}/a_n\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Formule d'Hadamard

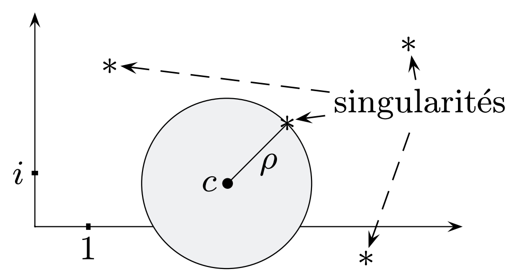
PROPOSITION. $\rho = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

6.4.3 Convergence et singularités

Domaine de convergence d'une série de Taylor d'une fonction complexe

PROPOSITION. Soit $f(z)$ une fonction pouvant être développée en série de Taylor complexe autour de c (rayon de convergence $\rho \neq 0$). Alors le disque de convergence est le plus grand disque ouvert, de centre c, ne contenant pas de singularités de f.

Si f n'a pas de singularité (pour z fini), sa série de Taylor converge dans tout le plan complexe, f est alors une fonction entière.



Autres formulations

- Le disque de convergence ne contient aucune singularité dans son intérieur mais (au moins) une sur sa circonférence.
- Le rayon de convergence est la distance entre le centre du développement et la singularité la plus proche.

6.5 Opérations élémentaires sur les séries entières

Dans la suite, on étudiera des séries de puissance de x. Pour des séries de puissances de $(x-a)$, les résultats seront analogues.

Addition, soustraction

Deux séries entières peuvent être additionnées ou soustraites terme par terme. De façon précise :

Proposition. Si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ pour $|x| < \rho_1$ et $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$ pour $|x| < \rho_2$, alors

$$f(x) \pm g(x) = a_0 \pm b_0 + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + \cdots$$

pour $|x| < \rho$, où $\rho \geqslant \min(\rho_1, \rho_2)$.

Multiplication par un nombre

Proposition. Si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ pour $|x| < \rho$, alors

$$\lambda f(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \cdots \qquad \text{pour } |x| < \rho$$

Multiplication de deux séries entières

Deux séries entières peuvent être multipliées «comme des polynômes». De façon précise :

PROPOSITION. Si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ pour $|x| < \rho_1$ et $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$ pour $|x| < \rho_2$, alors

$$f(x) \cdot g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots \qquad \text{pour } |x| < \rho$$

où $\rho \geqslant \min(\rho_1, \rho_2)$ et où

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0b_0 \\
c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 \\
c_2 &= a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 \\
c_3 &= a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 \\
&\ \vdots \\
c_n &= a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{a-1}b_1 + a_nb_0 \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Quotient de deux séries entières

Problème

Soit $\begin{cases} f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \\ g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots \end{cases} \qquad (b_0 \neq 0).$

Trouver : $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$

Solution. On trouve les inconnues c_i par la «méthode des coefficients indéterminés» :

L'équation $h = f/g$ équivaut à $f = g \cdot h$; d'où

$$\begin{aligned}&a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\\&= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots)\end{aligned}$$

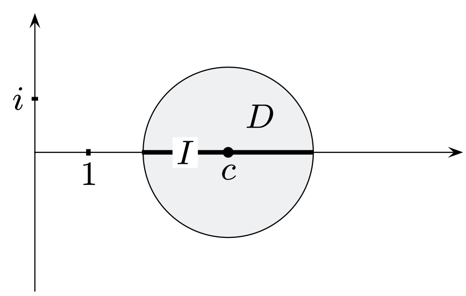
En effectuant le produit à droite et en comparant les coefficients des premier et second membres, on obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned}a_0 &= b_0 \cdot c_0\\a_1 &= b_0 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_0\\a_2 &= b_0 \cdot c_2 + b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_0\\a_3 &= b_0 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 + b_2 \cdot c_1 + b_3 \cdot c_0\\&\vdots\end{aligned}$$

On peut maintenant calculer successivement c_0, c_1, c_2, etc.

Convergence d'une série de Taylor d'une fonction réelle

Si une fonction réelle $f(x)$ peut être considérée comme la restriction (sur $\mathbb{R}$) d'une fonction complexe $f(z)$, il est souvent facile de trouver l'intervalle de convergence d'une série de Taylor de $f(x)$, en cherchant d'abord le cercle de convergence de la fonction $f(z)$; sur la figure ci-dessous c est le centre de développement, I l'intervalle de convergence de la série de Taylor de la fonction réelle $f(x)$ et D est le domaine de convergence de la série de Taylor de la fonction complexe $f(z)$.



6.6 Intégration et dérivation des séries entières

On peut intégrer et dériver une série entière terme par terme. Plus précisément :

Proposition

(1) Si $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ pour $|x| < \rho$, alors

$$F(x) = c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \frac{x^3}{3} + \cdots \quad \text{converge aussi pour } |x| < \rho$$

et $F'(x) = f(x)$.

(2) Si $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$ pour $|x| < \rho$, alors

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots \quad \text{pour } |x| < \rho$$

Corollaire. Toute fonction définie par une série entière est infiniment dérivable (à l'intérieur de l'intervalle de convergence). Les dérivées peuvent être obtenues en dérivant la série terme par terme.

La « formule générale du binôme »

Les *coefficients binomiaux* sont

$$n \textit{ entier}: \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}^{k \text{ facteurs}}}{k!},$$

$$\alpha \textit{ réel}: \binom{\alpha}{k} = \frac{\overbrace{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}^{k \text{ facteurs}}}{k!}.$$

Proposition (formule générale du binôme). On a

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k} x^k + \cdots \quad \text{pour } |x| < 1$$

CHAPITRE 7

Calcul différentiel de fonctions de plusieurs variables

7.1 Fonctions différentiables, dérivées partielles

7.1.1 Fonctions différentiables

Définition intuitive. $f(x, y)$ est appelée *différentiable* (ou *dérivable*) en un point (x_0, y_0) si elle peut être approchée (dans un voisinage de (x_0, y_0)) par une fonction linéaire (affine). Plus précisément :

DÉFINITION. $f(x, y)$ est appelée *différentiable* en un point $\mathrm{A} = (x_0, y_0)$ s'il existe une fonction ℓ, linéaire en $(x-x_0)$ et en $(y-y_0)$ (c'est-à-dire : $\ell = a(x - x_0) + b(y - y_0)$), telle que

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \underbrace{a(x - x_0) + b(y - y_0)}_{\ell} + \underbrace{r(x, y)}_{\text{reste}}$$

où $\lim\limits_{\mathrm{X}\to\mathrm{A}} \dfrac{r(\mathrm{X})}{d(\mathrm{A}, \mathrm{X})} = 0$, $\mathrm{X} = (x, y)$.

Continuité des fonctions différentiables

PROPOSITION. Soit $f(x, y)$ différentiable au point (x_0, y_0) ; alors f est continue en ce point.

7.1.2 Dérivées partielles

Dérivée partielle par rapport à x

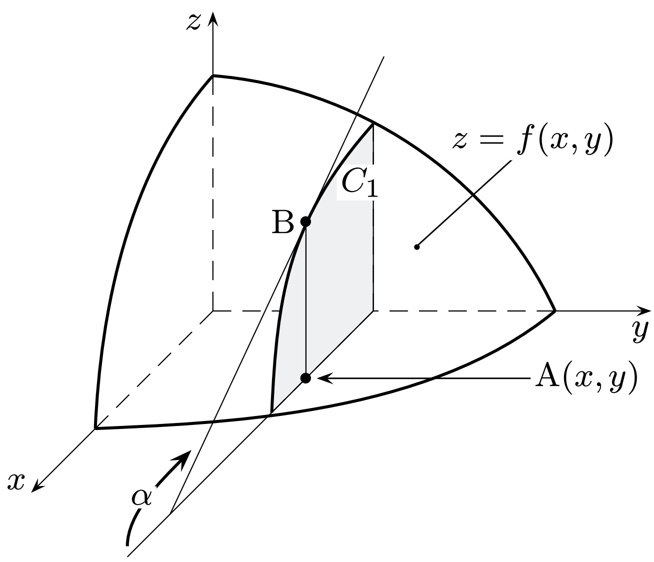
Si l'on garde y fixe, la fonction $f(x,y)$ reste fonction de x. Sa dérivée (par rapport à x), si elle existe, est appelée *dérivée partielle de f par rapport à x* et est notée $\partial f/\partial x$.

Définition. Si la limite ci-dessous existe, alors

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} \overset{\text{déf}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x\,,\,y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

est appelée *dérivée partielle de f par rapport à x* au point $\mathrm{A}(x,y)$.

Géométriquement : considérons la surface $z = f(x,y)$. La dérivée partielle $\partial f/\partial x$ (en A) est égale à la *pente de la courbe C_1* (en B), donc est égale à $\operatorname{tg}\alpha$.



Dérivée partielle par rapport à y

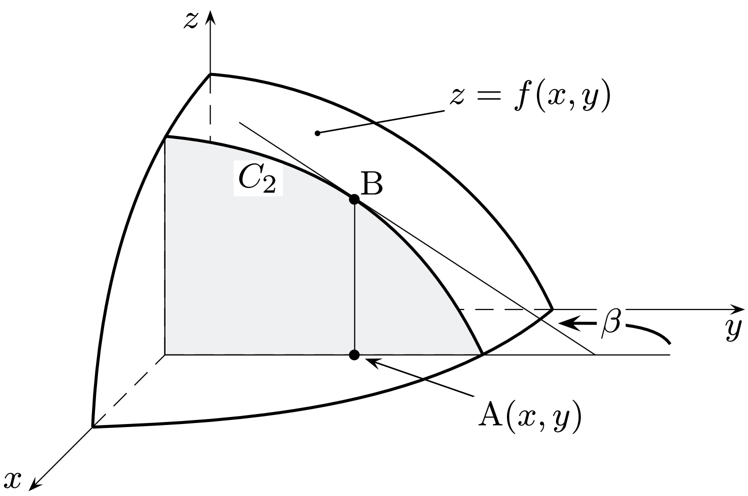
Par analogie à la dérivée partielle définie ci-dessus, nous définissons :

Définition. Si la limite existe, alors

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} \overset{\text{déf}}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x\,,\, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

est appelée *dérivée partielle de f par rapport à y* au point A(x,y).

Géométriquement : la dérivée partielle $\partial f/\partial y$ (en A) est égale à la *pente de la courbe* C_2 (en B), donc est égale à $\operatorname{tg}\beta$.



Notation pour les dérivées partielles. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, f_x, $\mathrm{D}_x f$, $\partial_x f$

7.1.3 Fonctions différentiables et dérivées partielles

Existence et signification des dérivées partielles

Proposition. Si $f(x, y)$ est différentiable au point (x_0, y_0), alors

(1) les dérivées partielles f_x et f_y existent, et

(2) f_x et f_y sont les coefficients des termes linéaires de la fonction approchant f, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x_0, y_0) &+ f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \\ &+ f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + r(x, y) \end{aligned}$$

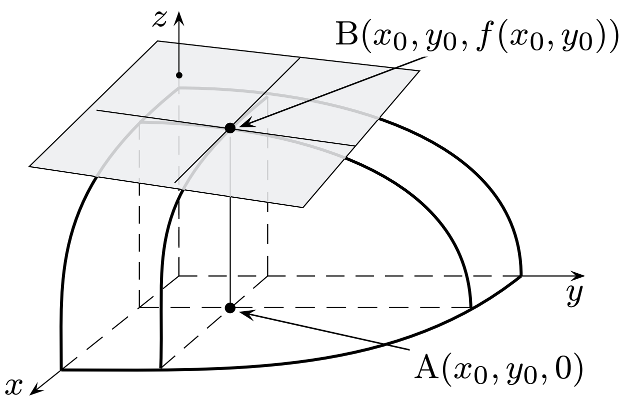
Approximation d'ordre 1

Définition. La fonction

$$f_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

sera appelée *approximation d'ordre* 1 de la fonction $f(x, y)$ dans un voisinage de (x_0, y_0).

Géométriquement : $z = f_1(x, y)$ est l'équation du *plan tangent* de la surface $z = f(x, y)$ (au point $(x_0,\, y_0,\, f(x_0, y_0))$).



7.1.4 Différentielles totales

L'expression $\mathrm{d}f = f_x \,\mathrm{d}x + f_y \,\mathrm{d}y$ sera appelée *différentielle totale de* f.

Interprétation historique. $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ sont des accroissements « infinitésimaux » des variables et $\mathrm{d}f$ est l'accroissement correspondant de f.

Une interprétation correcte. $\mathrm{d}f$ est l'accroissement de l'approximation d'ordre 1 lors d'accroissements $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ des variables.

Dans les applications, $\mathrm{d}f$ est souvent interprétée comme l'accroissement approximatif de f lors de « petits » accroissements $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ des variables. Cette même situation peut être exprimée, de manière plus correcte, en écrivant :

$$\Delta f \approx f_x \cdot \Delta x + f_y \cdot \Delta y$$

7.1.5 Application : propagation d'erreurs de mesure

Des valeurs x, y, z sont mesurées avec certaines imprécisions : $\pm\Delta x$, $\pm\Delta y$, $\pm\Delta z$. Une valeur $f(x, y, z)$ est alors calculée. Quelle est l'erreur possible de f ?

Une méthode simple et souvent suffisante consiste à estimer l'erreur en remplaçant f par son approximation linéaire. On a

$$\begin{aligned} |\Delta f| &= |f_x \,\Delta x + f_y \,\Delta y + f_z \,\Delta z| \\ &\leqslant \underbrace{|f_x| \cdot |\Delta x| + |f_y| \cdot |\Delta y| + |f_z| \cdot |\Delta z|}_{\text{erreur absolue maximale}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left|\frac{\Delta f}{f}\right| &\approx \left|\frac{f_x \,\Delta x + f_y \,\Delta y + f_z \,\Delta z}{f}\right| \\ &\leqslant \underbrace{\left|\frac{f_x}{f}\right| \cdot |\Delta x| + \left|\frac{f_y}{f}\right| \cdot |\Delta y| + \left|\frac{f_z}{f}\right| \cdot |\Delta z|}_{\text{erreur relative maximale}} \\ &= \left|\frac{\partial}{\partial x} \ln|f|\right| \cdot |\Delta x| + \left|\frac{\partial}{\partial y} \ln|f|\right| \cdot |\Delta y| + \left|\frac{\partial}{\partial z} \ln|f|\right| \cdot |\Delta z| \end{aligned}$$

7.1.6 Commutativité des dérivées partielles (théorème de H. A. Schwarz)

Théorème. Si f_x, f_y, f_{xy} et f_{yx} existent et sont continues dans un voisinage d'un point, alors $f_{xy} = f_{yx}$ en ce point.

7.2 Dérivées de fonctions composées

7.2.1 Dérivée totale (ou dérivée le long d'une courbe)

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables et soient $x = x(t)$ et $y = y(t)$ deux fonctions de t.

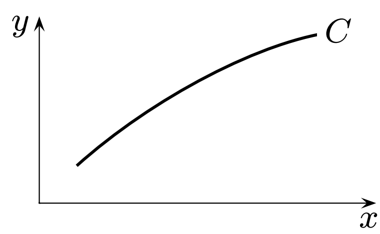
Nous étudions ici la *fonction composée* $f\big(x(t), y(t)\big)$.

Notation. Par la suite, la fonction composée $f\big(x(t), y(t)\big)$ sera en général notée simplement $f(t)$ ou f. (Elle est une fonction de la seule variable t.)

Définition. Si elle existe, la dérivée (par rapport à t) de la fonction composée $f\big(x(t), y(t)\big)$ sera appelée la *dérivée totale de f par rapport à t* (et sera notée $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$).

Proposition. $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,.$

Géométriquement : Soit donné : *une fonction* $f(x, y)$ dans le plan (x, y), *une courbe paramétrée* C : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\,. \end{cases}$



La restriction de f sur C, f_C, peut alors être considérée comme fonction de t : $f_C(t)$.

La dérivée $\mathrm{d}f_C/\mathrm{d}t$ est la dérivée totale $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$; on dit aussi qu'on *dérive* $f(x, y)$ « *le long de la courbe* C ».

Trois et plusieurs variables

PROPOSITION. Soit $f(x, y, z)$, avec $x = x(t)$, $y = y(t)$ et $z = z(t)$. Alors

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f_x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + f_z \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

Cas particulier (exemple)

PROPOSITION. Soit $f = f\big(x(t), y(t), z(t), t\big)$. Alors

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

7.2.2 Dérivées partielles de fonctions composées

Soit $f(x, y)$ et $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v)\,. \end{cases}$

On notera : $f = f(u, v) = f\big(x(u, v)\,,\, y(u, v)\big)$. Alors :

PROPOSITION

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

Trois et plusieurs variables (exemple)

Proposition. Soit $f(x,y,z)$ et $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v)\,. \end{cases}$

Alors
$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

Cas particulier (exemple)

Proposition. Soit $f(x)$ où $x = (u,v)$. Alors
$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}$$

7.2.3 Dérivées de fonctions implicites

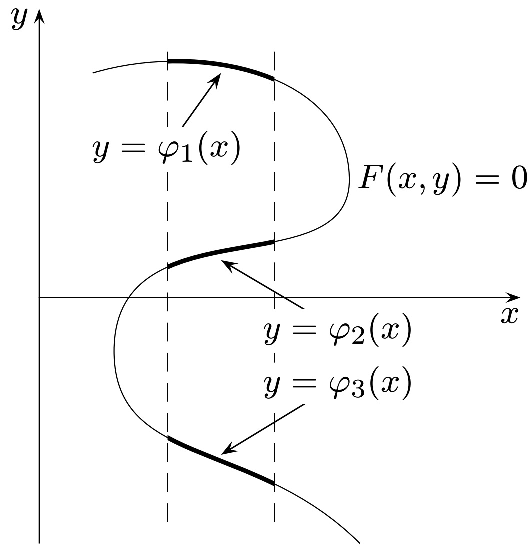
La notion de fonction implicite

Soit $F(x,y)$ une fonction de deux variables. Sous certaines conditions, l'équation $F(x,y) = 0$ définit une (ou plusieurs) «fonctions implicites» $y = \varphi(x)$, c'est-à-dire des fonctions satisfaisant à l'identité $F\big(x,\varphi(x)\big) \equiv 0$.

On dit alors aussi que φ est défini sous forme implicite ou que F définit φ sous forme implicite.

Calcul de la dérivée d'une fonction implicite

Proposition. Si F est continûment dérivable et si l'équation $F(x,y) = 0$ *définit une fonction implicite* $y = y(x)$ (continûment dérivable), alors
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}$$



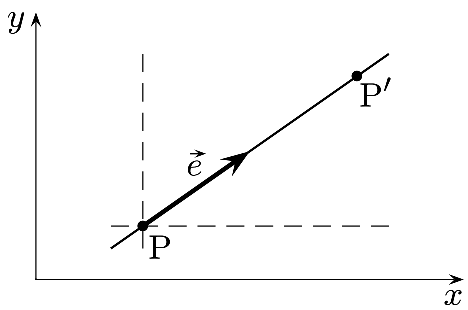
7.3 Dérivée directionnelle, gradient

7.3.1 Dérivée suivant une direction donnée (dérivée directionnelle)

Définition. Si la limite existe, on appelle

$$\mathrm{D}_{\vec{e}} f = \lim_{\mathrm{P}' \to \mathrm{P}} \frac{f(\mathrm{P}') - f(\mathrm{P})}{d(\mathrm{P}', \mathrm{P})}$$

dérivée au point P de $f(x, y)$ *suivant la direction* définie par le vecteur *unitaire* $\vec{e}$.

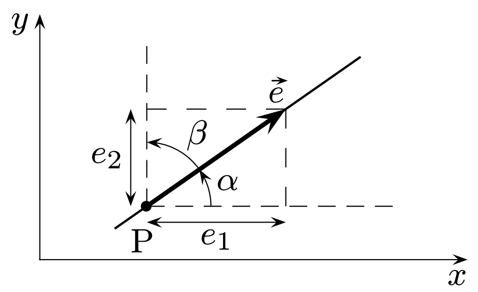


Calcul de la dérivée directionnelle

PROPOSITION. Si f est différentiable en un point $\mathrm{P}(x, y)$, alors

$$\mathrm{D}_{\vec{e}} f = f_x \cdot \cos\alpha + f_y \cdot \cos\beta = f_x \cdot e_1 + f_y \cdot e_2$$

où $\vec{e}$ est le vecteur unitaire $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta) = (e_1, e_2)$.



7.3.2 Notion de « champ »

Souvent, certaines fonctions sont appelées des *champs*. Spécialement en physique, les fonctions associant une valeur (scalaire, vectorielle, etc.) à tout point de l'espace (ou du plan) sont, en général, appelées des « champs » (scalaires, vectoriels, etc.).

Un *champ scalaire* $f(x, y)$ est donc la même chose qu'une *fonction* $f(x, y)$.

Un *champ vectoriel* $\vec{a}\,(x, y)$ est une application qui associe un vecteur $\vec{a}\,(x, y)$ à tout point (x, y) du plan.

7.3.3 Gradient

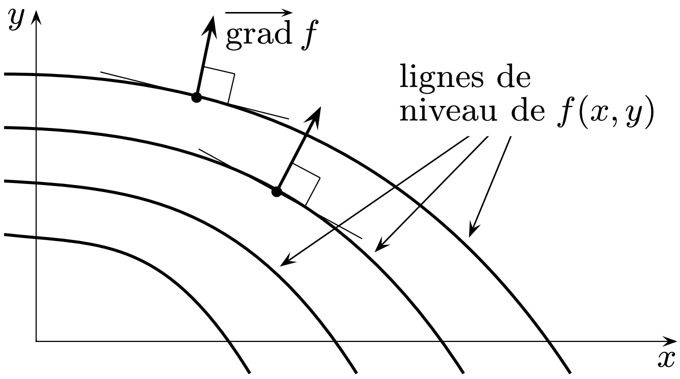
DÉFINITION. Soit donnée une fonction $f(x, y)$.
Le champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = (f_x, f_y)$ est appelé *gradient de* f.

Gradient et dérivée directionnelle

PROPOSITION. $\mathrm{D}_{\vec{e}} f = f_x \cdot e_1 + f_y \cdot e_2 = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \vec{e}$.

Interprétation géométrique du gradient

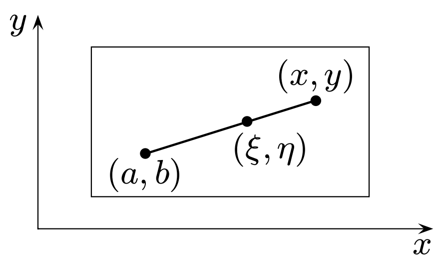
En tout point P, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ est *orthogonal à la ligne de niveau* de f passant par P, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ *pointe dans la direction de la plus forte croissance de* f. Sa longueur est égale à la dérivée directionnelle; elle mesure le «taux de croissance» de f (dans cette direction).



7.4 Développement de Taylor

Formule de Taylor pour des fonctions de deux variables

On suppose que les dérivées de $f(x, y)$, jusqu'à l'ordre $n+1$, existent et sont continues dans un domaine rectangulaire D comprenant le point (a, b) et le point (x, y). Ces hypothèses impliquent la *formule de Taylor*.



PROPOSITION (formule de Taylor). On a

$$\begin{aligned}
f(x,y) = f(a,b) &+ f_x(a,b)\cdot(x-a) + f_y(a,b)\cdot(y-b)\\
&+ \frac{f_{xx}(a,b)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f_{xy}(a,b)}{1!\,1!}(x-a)(y-b)\\
&+ \frac{f_{yy}(a,b)}{2!}(y-b)^2 + \frac{f_{xxx}(a,b)}{3!}(x-a)^3\\
&+ \frac{f_{xxy}(a,b)}{2!\,1!}(x-a)^2(y-b) + \cdots\\
&+ \cdots\\
&+ \sum_{k=0}^{n} \frac{f_{\overbrace{x\cdots x}^{k \text{ fois}}\ \overbrace{y\cdots y}^{n-k \text{ fois}}}(a,b)}{k!\,(n-k)!}(x-a)^k(y-b)^{n-k} + R_n
\end{aligned}$$

où

$$R_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f_{\overbrace{x\cdots x}^{k \text{ fois}}\ \overbrace{y\cdots y}^{n+1-k \text{ fois}}}(\xi,\eta)}{k!\,(n+1-k)!}(x-a)^k(y-b)^{n+1-k}$$

pour un certain point (ξ,η) sur le segment droit délimité par (a,b) et (x,y).

7.5 Maxima et minima

7.5.1 Trois problèmes à distinguer

Le vocabulaire au sujet des «maxima et minima» n'est pas totalement standardisé. Nous proposons de *distinguer* les *trois problèmes* suivants :

(1) *Recherche des valeurs stationnaires*

DÉFINITION. On dit que $f(x, y)$ prend une *valeur stationnaire* au point (a, b) si $f_x = f_y = 0$ (en ce point).

(2) *Recherche des extrema locaux* (ou extrema relatifs)

DÉFINITION. On dit que $f(x, y)$ admet un *maximum local* (ou maximum relatif) au point (a, b) si dans un certain voisinage de ce point on a

$$f(x, y) < f(a, b) \qquad \text{pour } (x, y) \neq (a, b)$$

On dit que $f(x, y)$ admet un *minimum local* (ou minimum relatif) en (a, b) si dans un certain voisinage de ce point on a

$$f(x, y) > f(a, b) \qquad \text{pour } (x, y) \neq (a, b)$$

(3) *Recherche des extrema absolus*

DÉFINITION. On dit que $f(x, y)$ a un *maximum absolu* au point (a, b) si dans tout le domaine de définition de f on a :

$$f(x, y) < f(a, b) \qquad \text{pour } (x, y) \neq (a, b)$$

(si $f(x, y) > f(a, b)$, il s'agit d'un *minimum absolu*).

Extrema au sens strict et extrema au sens large

DÉFINITION. Si $f(x, y) < f(a, b)$ (pour $(x, y) \neq (a, b)$), on parle d'un *maximum au sens strict*.
Si $f(x, y) \leqslant f(a, b)$, on parle d'un *maximum au sens large*.

Dans ce qui suit, extremum signifiera extremum au sens strict. Pour trouver les extrema au sens large, on peut appliquer les méthodes données ci-après par analogie.

7.5.2 Résolution des trois problèmes

Extrema locaux

PROPOSITION. Une fonction $f(x, y)$ peut avoir des extrema locaux :

- en des points où f est stationnaire ;
- en des points où f n'est pas différentiable.

Pour trouver tous les extrema locaux, il convient d'établir une liste des points stationnaires et une liste des points où f n'est pas dérivable. Les points stationnaires seront examinés selon la méthode donnée ci-après. Pour l'étude des points où f n'est pas dérivable, il n'existe pas de méthode générale : on essayera de déterminer, de cas en cas, s'il s'agit d'un extremum local.

Extrema absolus

PROPOSITION. Une fonction $f(x, y)$ peut atteindre son maximum absolu (resp. son minimum absolu) :

- soit en des points où f est stationnaire,
- soit en des points où f n'est pas différentiable,
- soit sur le bord du domaine de définition.

On établira une liste des points où f est stationnaire et une liste des points où f n'est pas dérivable. Puis on comparera les valeurs respectives de f en ces points et on trouvera ainsi le maximum (resp. le minimum) de f à l'intérieur du domaine de définition. Il faudra encore faire une comparaison avec les valeurs que f prend sur le bord du domaine.

Classification des valeurs stationnaires

La *recherche des valeurs stationnaires* se fait par la résolution du système d'équation $f_x = f_y = 0$.

Dans les applications, il s'agit souvent de trouver et de *discuter les valeurs stationnaires*. La plupart du temps les fonctions impliquées sont suffisamment «régulières» pour que des questions de dérivabilité n'interviennent pas. On peut alors développer la fonction donnée à l'aide de la formule de Taylor et étudier essentiellement la forme quadratique définie par les termes de degré 2.

Soit $f(x,y)$ trois fois continûment dérivable.

Soit $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.

Posons : $f_{xx}(a,b) = r,\ f_{xy}(a,b) = s,\ f_{yy}(a,b) = t$. Donc :

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2!}\big(r\cdot(x-a)^2 + 2s\cdot(x-a)(y-b) + t\cdot(y-b)^2\big) + R_2$$

Posons :

$$\Delta = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix}$$

On a :

Proposition

Cas 1 Si $\Delta > 0$ et $r > 0$, alors f a un *minimum* (local) en (a,b).
Si $\Delta > 0$ et $r < 0$, alors f a un *maximum* (local) en (a,b).

Cas 2 Si $\Delta < 0$, alors f n'a ni un minimum ni un maximum en (a,b).
La surface $z = f(x,y)$ a (en deuxième approximation) la forme d'une selle (ou la forme d'un col) en ce point.

Cas 3 Si $\Delta = 0$ (cas dégénéré) des investigations plus poussées sont nécessaires.

7.6 Extrema liés (multiplicateurs de Lagrange)

7.6.1 Valeurs stationnaires avec contraintes

Problème. Trouver les *valeurs stationnaires de* $f(x,y)$ avec la *contrainte* $g(x,y) = 0$ (on parle alors souvent d'«extrema liés»).

Solution. Nous ramenons la question à résoudre à un problème sans contrainte.

Proposition. Soient $f(x,y)$ et $g(x,y)$ dérivables.
Si le point (a,b) n'est pas un point stationnaire de g, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(1) La fonction $f(x,y)$ *est stationnaire* au point (a,b) *avec la contrainte* $g(x,y)=0$.

(2) Pour une certaine valeur de λ, la *fonction de Lagrange*

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

est stationnaire au point (a,b,λ).

Cette proposition permet de formuler la «recette» suivante :

- Définir la fonction de Lagrange $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$.
- Trouver les points (x,y,λ) où F est stationnaire, en posant $F_x = F_y = F_\lambda = 0$; puis «oublier» λ.
- Vérifier si aux points (x,y) trouvés, $g(x,y)$ n'est pas stationnaire.

7.6.2 Généralisations

(a) *n variables*

Pour trouver les valeurs stationnaires de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec la contrainte $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, on introduit la fonction de Lagrange :

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda g(x_1, \ldots, x_n)$$

Les solutions du problème posé sont alors trouvées en cherchant les valeurs stationnaires de F :

$$F_{x_1} = F_{x_2} = \ldots = F_{x_n} = F_\lambda = 0$$

(b) *Plusieurs contraintes* ($n-1$ contraintes au plus, pour n variables)

Les valeurs stationnaires de $f(x,y,z)$ avec les deux contraintes $g_1(x,y,z)=0$ et $g_2(x,y,z)=0$, par exemple, se trouvent en cherchant les valeurs stationnaires de la fonction de Lagrange suivante :

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) - \lambda g_1(x,y,z) - \mu g_2(x,y,z)$$

CHAPITRE 8

Intégrales de fonctions de plusieurs variables

8.1 Intégrales doubles

8.1.1 Calcul de certains volumes

Domaine rectangulaire

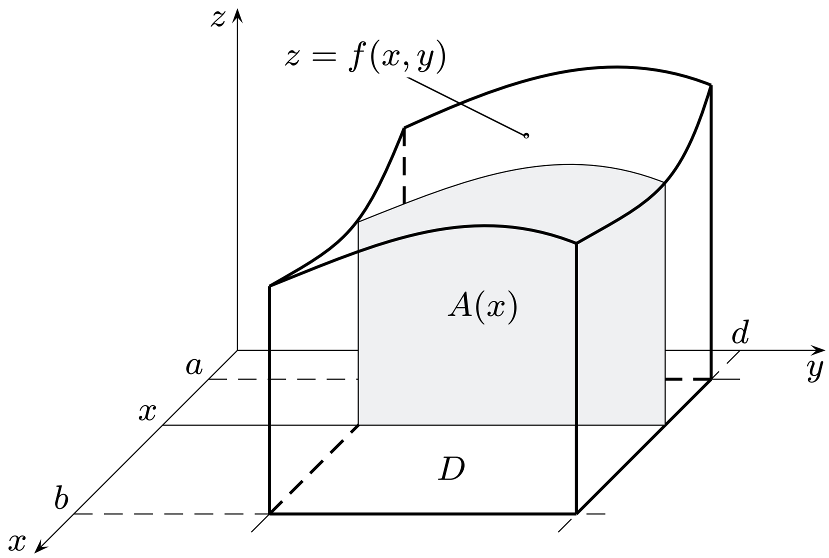
Le volume V «sous la surface $z = f(x, y)$», où $f(x, y)$ est supposée continue, peut être calculé soit en intégrant d'abord sur y puis sur x soit en intégrant d'abord sur x puis sur y.

Intégration sur y puis sur x. On a

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad A(x) = \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

donc :

$$V = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

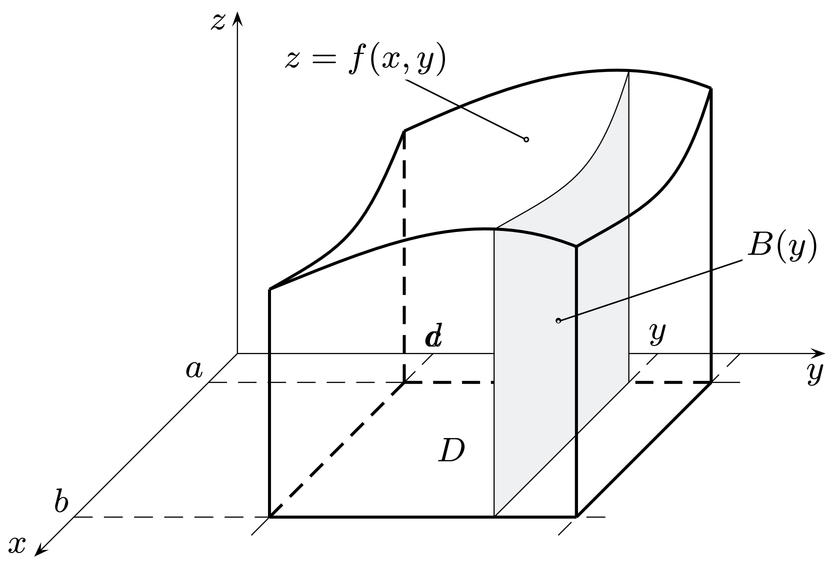


Intégration sur x puis sur y. On a

$$V = \int_c^d B(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{avec} \quad B(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

donc :

$$V = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$



Notations

On parle de l'intégrale (double) de $f(x, y)$ sur le domaine (rectangulaire) D et on note aussi :

$$V = \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ou encore

$$V = \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}S\,, \text{ où } \mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \text{ est l'}\textit{élément d'aire}$$

Pour éviter tout malentendu quant à la signification des symboles, dans la suite, on préfère à des notations, comme par exemple $\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, des notations univoques, soit

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

ou encore

$$\int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Cas particulier

$$\int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x) \cdot g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right) \cdot \left(\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y \right).$$

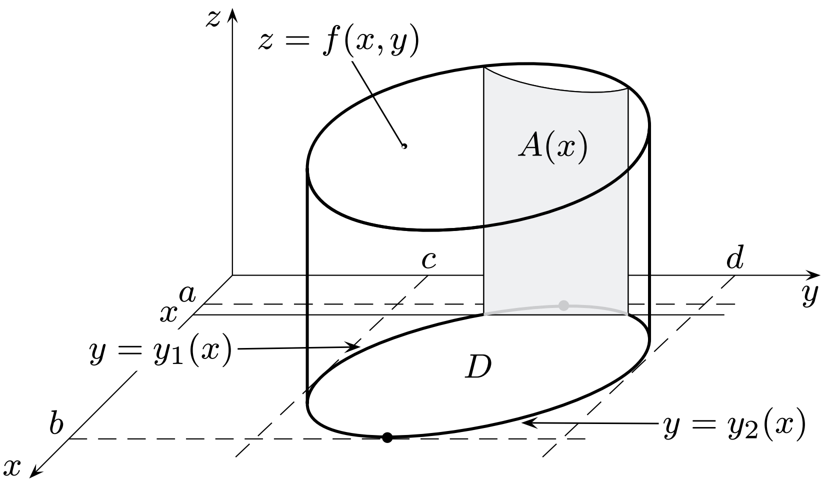
Domaine convexe

Intégration sur y puis sur x. Soit

$$A(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

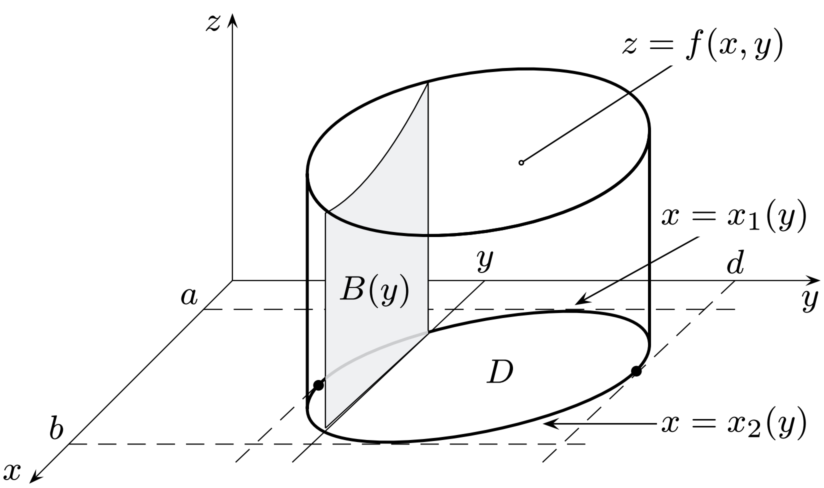
Alors :

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x$$



Intégration sur x puis sur y. Soit $B(y) = \displaystyle\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$; alors

$$V = \int_c^d B(y)\,\mathrm{d}y = \int_{y=c}^{d} \int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



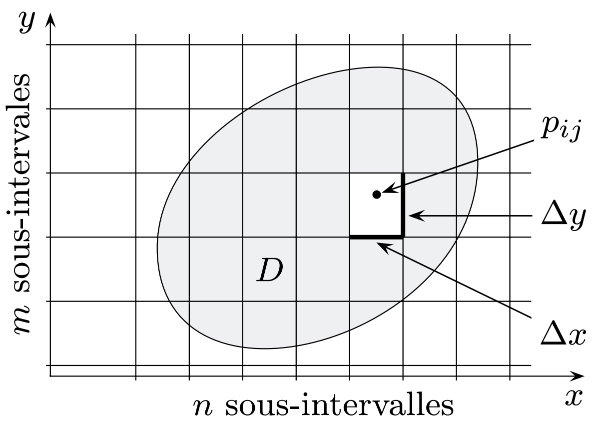
8.1.2 Intégrales doubles en général

Définition provisoire

Somme de Riemann: $S_{n,m} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(p_{ij}) \cdot \Delta x \, \Delta y$.

Si la limite existe, on l'appelle *intégrale double de f sur le domaine D*:

$$\iint_D f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} S_{n,m}$$



Définition générale

La définition donnée ci-dessus est suffisante, si l'on admet que $f(x, y)$ est continue et que la courbe délimitant le domaine d'intégration D est continûment dérivable par morceaux. Ces conditions sont souvent satisfaites dans les applications.

Pour connaître les limites de la validité de la notion d'intégrale double, il serait nécessaire d'étudier la *théorie de la mesure*.

Trois propriétés des intégrales doubles

(1) *Linéarité*: $\displaystyle\iint_D (\lambda f + \mu g)\,\mathrm{d}S = \lambda \iint_D f\,\mathrm{d}S + \mu \iint_D g\,\mathrm{d}S$.

(2) *Additivité*: $\displaystyle\iint_{D_1 \cup D_2} f\,\mathrm{d}S = \iint_{D_1} f\,\mathrm{d}S + \iint_{D_2} f\,\mathrm{d}S$ si $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

(3) *Théorème de la moyenne.* Soit $f(x, y)$ continue et D convexe. Alors, il existe un point $(\xi, \eta) \in D$ tel que

$$\iint_D f \, \mathrm{d}S = f(\xi, \eta) \cdot \mathrm{Aire}(D)$$

8.2 Changement de variables dans une intégrale double

Dans ce qui suit, un changement de coordonnées se fera toujours entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées curvilignes. Le passage d'un système de coordonnées curvilignes à un autre peut se faire de manière analogue.

8.2.1 Jacobien

DÉFINITION. Soit (u, v) des coordonnées curvilignes définies par $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$.
Alors le déterminant

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

est appelé *jacobien* du changement de coordonnées.

Notation. Le jacobien est parfois noté : $J = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

Mise en garde

Quelquefois, l'inverse $\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$ est appelé jacobien.

8.2.2 Intégrales doubles en coordonnées curvilignes

Soit $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ un changement de coordonnées dans le plan. Le jacobien sera noté $J(u,v)$ ou simplement J. Une fonction $f(x,y)$ donne lieu à une fonction composée $f\big(x(u,v)\,,\,y(u,v)\big)$ qui sera simplement notée $f(u,v)$ ou f. Avec ces notations, nous avons :

PROPOSITION. $$\iint_D f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f\cdot|J|\cdot\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Cas particulier

Coordonnées polaires : $\displaystyle\iint_D f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$

8.3 Intégrales triples

Les méthodes pour calculer les intégrales triples sont analogues à celles développées pour les intégrales doubles.

8.3.1 Coordonnées cartésiennes

Pour des domaines convexes, on trouve :

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{z=z_1}^{z_2}\int_{y=y_1(z)}^{y_2(z)}\int_{x=x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Cas particulier : volumes

$$V = \iiint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint \mathrm{d}V$$

où $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ est l'*élément de volume.*

8.3.2 Coordonnées curvilignes

Soit $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$

et le jacobien $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$.

Alors :

PROPOSITION. $I = \displaystyle\iiint_D f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_D f \cdot |J| \cdot \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$

où $\mathrm{d}V = |J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$ est l'*élément de volume*.

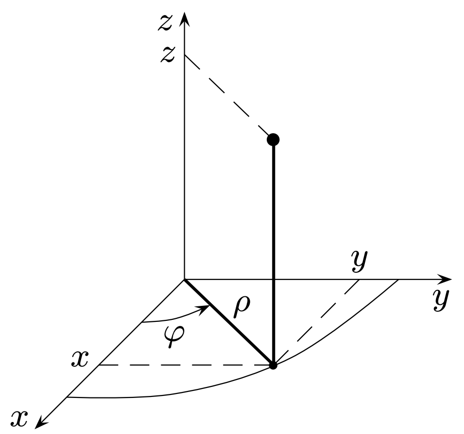
Deux cas particuliers

(1) *Coordonnées cylindriques* : elles sont définies par

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

et alors $J = \rho$ et $\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$ d'où

$$I = \iiint f \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

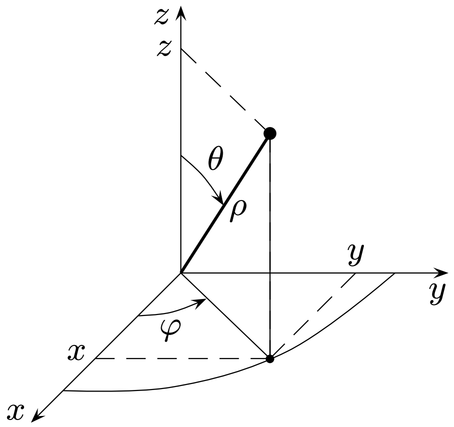


(2) *Coordonnées sphériques* : elles sont définies par

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}$$

et alors $J = \rho^2 \sin\theta$ et $\mathrm{d}V = \rho^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$ d'où

$$I = \iiint f \cdot \rho^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$$



8.3.3 Applications

Volumes

$$V = \iiint_D \mathrm{d}V$$

Centre de gravité (densité constante)

Les coordonnées du centre de gravité sont :

$$\overline{x} = \frac{\iiint x \,\mathrm{d}V}{\iiint \mathrm{d}V} = \frac{\iiint x \,\mathrm{d}V}{V}, \qquad \overline{y} = \frac{\iiint y \,\mathrm{d}V}{V}, \qquad \overline{z} = \frac{\iiint z \,\mathrm{d}V}{V}$$

Centre de gravité (densité $\gamma(x, y, z)$ variable)

Les coordonnées sont dans ce cas :

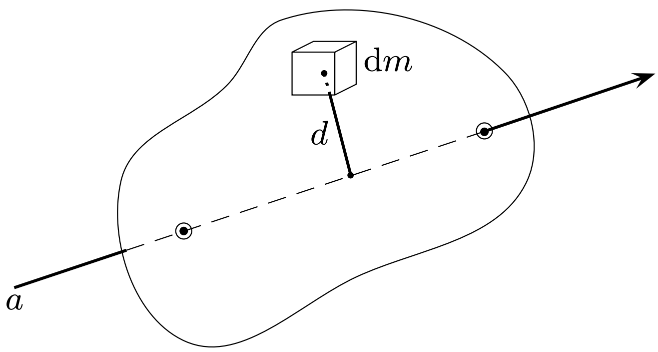
$$\overline{x} = \frac{\iiint x\gamma \,\mathrm{d}V}{\iiint \,\mathrm{d}m} = \frac{\iiint x\gamma \,\mathrm{d}V}{m}\,, \qquad \overline{y} = \frac{\iiint y\gamma \,\mathrm{d}V}{m}\,, \qquad \overline{z} = \frac{\iiint z\gamma \,\mathrm{d}V}{m}$$

Moments d'inertie

Moment d'inertie par rapport à un axe a :

$$I_a = \iiint d^2 \,\mathrm{d}m$$

où $\mathrm{d}m = \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}V$.



Moments d'inertie par rapport aux axes x, y ou z; on a respectivement :

$$I_x = \iiint (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}m$$

$$I_y = \iiint (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}m\,, \qquad I_z = \iiint (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m$$

8.3.4 Formule de Steiner-Huygens

Cette formule met en relation les moments d'inerties par rapport à deux axes parallèles. La distance entre les deux axes est c.

Si a est un axe passant par le centre de gravité, alors

$$I_{a'} = I_a + c^2 m$$

8.4 Intégrales dépendant d'un paramètre

8.4.1 Limites d'intégration constantes

Intuitivement. Pour dériver une fonction $F(t) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$, on «peut dériver sous le signe intégral». Plus précisément :

PROPOSITION (formule de Leibniz). Soit f et f_t continues dans le rectangle $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant t \leqslant d$. Alors, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{x=a}^{b} f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$$

8.4.2 Limites d'intégration variables

PROPOSITION. Supposons f et f_t continues pour $a \leqslant x \leqslant b$ et $c \leqslant t \leqslant d$. Soient $a(t)$ et $b(t)$ dérivables sur $[\,c\,,\,d\,]$. Soit

$$F(t) = \int_{x=a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Alors, on a

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)\,\mathrm{d}t - f\big(a(t),t\big)\cdot a'(t) + f\big(b(t),t\big)\cdot b'(t)$$

Chapitre 9

Champs vectoriels plans et potentiels

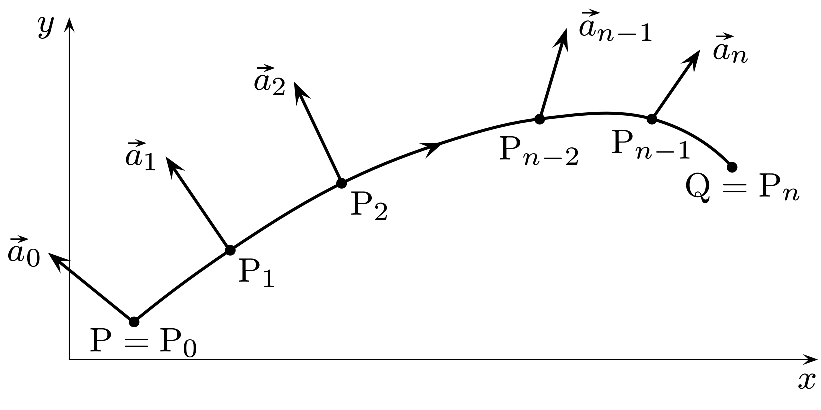
9.1 Intégrales curvilignes planes

9.1.1 Définition des intégrales curvilignes

Données

Soient une *courbe orientée* C et un *champ vectoriel* défini sur C par : $\vec{a} = (a, b) = \big(a(x, y)\,,\, b(x, y)\big)$.

On effectue la *subdivision de* C en n sous-arcs délimités par les points P_0, P_1, …, P_n.



On pose : $\big(\Delta\vec{x}\big)_1 = \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$, $\big(\Delta\vec{x}\big)_2 = \overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$.

Avec ces notations, on a la définition suivante :

Définition. Si la limite ci-dessous existe, et si elle est indépendante de la suite de subdivisions de plus en plus fines choisies, alors

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{n\to\infty\\|\Delta\vec{x}|\to 0}} S_n &= \lim_{\substack{n\to\infty\\|\Delta\vec{x}|\to 0}} \left(\vec{a}_1\cdot\left(\Delta\vec{x}\right)_1+\vec{a}_2\cdot\left(\Delta\vec{x}\right)_2+\cdots+\vec{a}_n\cdot\left(\Delta\vec{x}\right)_n\right)\\ &= \int_C \vec{a}\cdot \mathrm{d}\vec{x}\end{aligned}$$

est dite *intégrale du champ vectoriel* $\vec{a}$ *le long de* C.

9.1.2 Calcul des intégrales curvilignes en coordonnées cartésiennes

Paramétrisation de C : $\begin{cases} x = x(t)\\ y = y(t)\end{cases}$ $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,

alors $\vec{x} = \vec{x}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$.

Vecteur tangent de C : $\vec{x}\,' = (x', y')$.

Champ vectoriel $\vec{a}$ *sur la courbe* C :

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \Big(a\big(x(t), y(t)\big)\ ,\ b\big(x(t), y(t)\big)\Big)$$

Proposition. On a $\displaystyle\int \vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{x} = \int \vec{a}\cdot\vec{x}\,'\,\mathrm{d}t$ $(\mathrm{d}\vec{x} = \vec{x}\,'\,\mathrm{d}t)$; l'intégrale curviligne est ramenée à une intégrale simple.

Autres notations

$\displaystyle\int_C \vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{x} = \int_C a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y$ avec $\mathrm{d}\vec{x} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$.

$\displaystyle\int_C \vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{x} = \int_{s_1}^{s_2} a_t\,\mathrm{d}s$, où a_t est la composante tangente de $\vec{a}$ et s est l'abscisse curviligne de C.

9.1.3 Existence de l'intégrale curviligne

Les problèmes de l'existence de l'intégrale curviligne et ceux d'éventuelles généralisations de la définition sont semblables aux problèmes correspondants pour intégrales simples.

Pour éviter des difficultés, nous adopterons, par la suite (sauf mention explicite du contraire), que

- les *champs vectoriels* étudiés sont *continus* ($a(x, y)$, $b(x, y)$ sont continues) ;
- les *courbes paramétrées* ont un *vecteur tangent continu* (x', y' sont continues).

Ainsi, l'existence de l'intégrale (dans le sens de Riemann) est assurée.

9.1.4 Exemples d'intégrales curvilignes

Travail d'une force

$\vec{F}$ désigne le champ de force agissant sur un point matériel qui parcourt une courbe C. Alors

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{t_1}^{t_2} (f_1 \cdot x' + f_2 \cdot y')\,\mathrm{d}t = \int_{s_1}^{s_2} F_t\,\mathrm{d}s$$

est le *travail de F le long de C*.

Tension électrique

$\vec{E}$ désigne le champ électrique agissant sur une charge ponctuelle parcourant C. Alors

$$V = \int_{C(\mathrm{A},\mathrm{B})} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{t_1}^{t_2} (E_1 \cdot x' + E_2 \cdot y')\,\mathrm{d}t = \int_{s_1}^{s_2} E_t\,\mathrm{d}s$$

est la tension entre A et B *le long de C* (V dépend de l'arc choisi entre A et B).

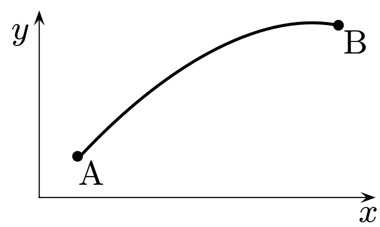
9.1.5 Indépendance de la paramétrisation

Proposition. $\int_C \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ est *indépendante de la paramétrisation* choisie de la courbe orientée C; c'est-à-dire, lors d'un changement de paramètre : $t = t(s)$ tel que $\mathrm{d}t/\mathrm{d}s \neq 0$, on a

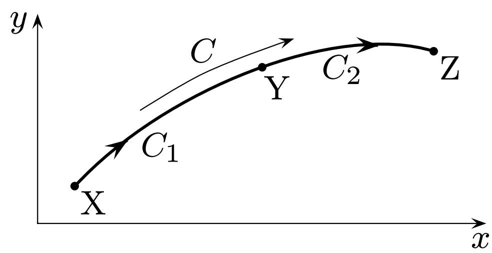
$$\int_{t_1}^{t_2} \left(a \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + b \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t = \int_{s_1}^{s_2} \left(a \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + b \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \right) \mathrm{d}s$$

9.1.6 Règles de calcul

(1) *Inversion de l'orientation* : $\displaystyle\int_{C(\mathrm{A,B})} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = - \int_{C(\mathrm{B,A})} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{x}.$



(2) *Additivité* : $\displaystyle\int_{C_1(\mathrm{X,Y})} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{x} + \int_{C_2(\mathrm{Y,Z})} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{C(\mathrm{X,Z})} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{x}.$

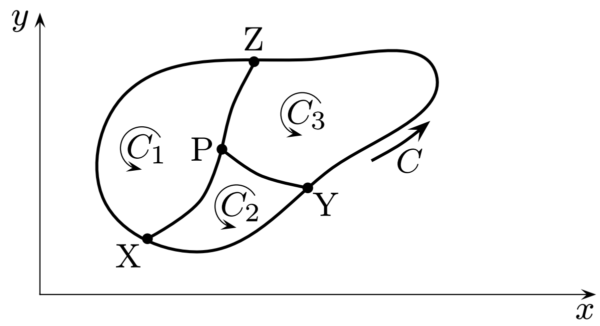


(3) *Décomposition* : $\displaystyle\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_3}$ où

C est la courbe fermée orientée X, Y, Z, X;

C_1 est la courbe fermée orientée X, P, Z, X;

C_2 est la courbe fermée orientée Y, P, X, Y ;
C_3 est la courbe fermée orientée Z, P, Y, Z.



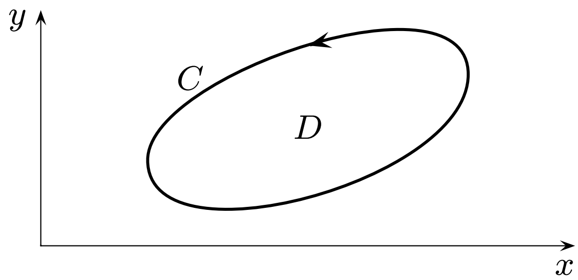
(4) *Majorer une intégrale curviligne* : soit $|\vec{a}| \leqslant M$ et L = longueur de C ; alors

$$\left| \int_C \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{x} \right| \leqslant ML$$

9.1.7 Formule de Riemann-Green

Données

Soit $\vec{a} = \big(a(x,y)\,,\, b(x,y)\big)$ un *champ vectoriel* où a et b sont continûment dérivables dans un domaine simplement connexe comprenant la *courbe orientée fermée* C. Soit D le domaine simplement connexe dont C est la frontière.



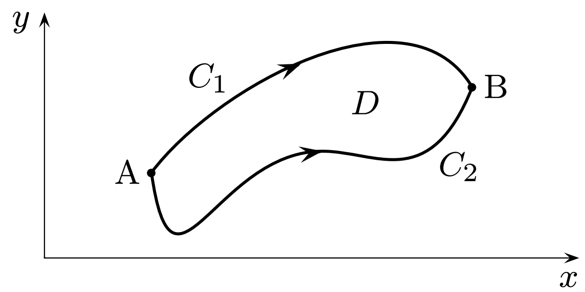
Théorème (formule de Riemann-Green)

$$\iint_D (b_x - a_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_C a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y \right) = \oint_C \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

L'intégrale curviligne dépend (souvent) du chemin (exemple)

Si $\vec{a}$ est continûment dérivable, la formule de Riemann implique :

$$\int_{C_1} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{C_2} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{x} + \iint_D (b_x - a_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



9.2 Gradient et potentiel

9.2.1 Intégrales curvilignes et gradients

Théorème. Soit $\vec{a} = (a, b)$ un champ vectoriel, défini dans un domaine *simplement connexe* ; soient $a(x, y)$ et $b(x, y)$ continûment différentiables ; alors, les *conditions* suivantes sont *équivalentes* :

(1) $\vec{a}$ est un gradient, c'est-à-dire : il existe ϕ telle que $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = (\phi_x, \phi_y)$.

(2) L'intégrale $\int_{\widehat{\mathrm{AB}}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ ne dépend pas de l'arc choisi entre A et B (mais seulement des points A et B).

(2′) L'intégrale curviligne le long d'une courbe fermée s'annule : $\oint \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$.

(3) $a_y = b_x$.

On dit alors souvent : «$\vec{a}$ dérive d'un potentiel ϕ».

Si $\vec{a}$ est une force, on dit : «$\vec{a}$ est un champ conservatif».

Domaines non simplement connexes

Si le domaine n'est pas simplement connexe, on a toujours :

$$\vec{a} \text{ est un gradient } \Longleftrightarrow \oint = 0 \Longrightarrow a_y = b_x$$

Par contre, la condition (3) ($a_y = b_x$) n'implique pas les conditions (1) et (2).

9.2.2 Recherche du potentiel

Soit $\vec{a} = \big(a(x,y)\,,\, b(x,y)\big)$ avec $a_y = b_x$ (dans un domaine simplement connexe). On demande de trouver le (un) potentiel ϕ de $\vec{a}$.

Première méthode

Comparer les deux expressions suivantes :

$\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = a(x,y)$ implique : $\phi(x,y) = \displaystyle\int a(x,y)\,\mathrm{d}x + \varphi(y)$;

$\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = b(x,y)$ implique : $\phi(x,y) = \displaystyle\int b(x,y)\,\mathrm{d}y + \psi(x)$.

Deuxième méthode

$\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = a(x,y)$ implique : $\phi(x,y) = \displaystyle\int a(x,y)\,\mathrm{d}x + \varphi(y)$.

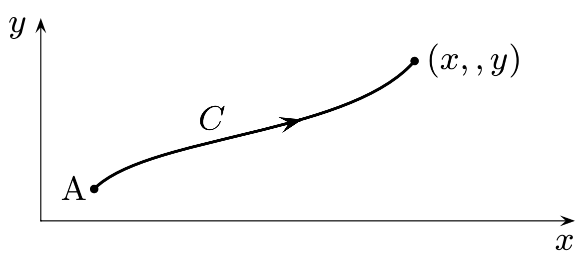
Pour cette fonction ϕ, on a :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = b(x,y) \quad \text{(équation pour } \varphi'\text{)}$$

Troisième méthode ou méthode générale

Choisir un point A.

Calculer l'intégrale curviligne : $\phi(x,y) = \displaystyle\int_C \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$.



Le point A ainsi que la courbe C seront choisis de telle manière à simplifier les calculs.

9.3 Différentielles totales

9.3.1 Formes différentielles

Les expressions du type

$$a(x,y)\,\mathrm{d}x + b(x,y)\,\mathrm{d}y$$

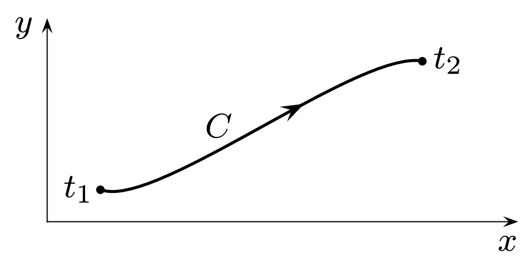
seront appelées *formes différentielles*.

Remarque. Les différentielles totales $\mathrm{d}f = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y$ sont des formes différentielles particulières.

9.3.2 Intégration des formes différentielles

DÉFINITION. Soit $a(x,y)\,\mathrm{d}x + b(x,y)\,\mathrm{d}y$ une forme différentielle, et soit C une courbe paramétrée continûment dérivable et régulière ($(x', y') \neq (0,0)$).
On appelle *intégrale de la forme $a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y$ le long de C* :

$$\int_C a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{t_1}^{t_2} (ax' + by')\,\mathrm{d}t$$



9.3.3 Analogies entre champs vectoriels et formes différentielles

Champ vectoriel : $\vec{a} = \big(a(x,y)\,,\, b(x,y)\big)$	*Forme différentielle* : $a(x,y)\,\mathrm{d}x + b(x,y)\,\mathrm{d}y$
Gradient : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = (f_x, f_y)$ dans ce cas f est souvent appelé *potentiel* du champ vectoriel (f_x, f_y)	*Différentielle totale* : $\mathrm{d}f = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y$ dans ce cas f est souvent appelé *potentiel* de la forme différentielle $f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y$

Intégrale le long d'une courbe orientée

$\displaystyle\int_C \vec{a}\cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{t_1}^{t_2} (ax' + by'\,\mathrm{d}t)$	$\displaystyle\int_C a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y = \int_{t_1}^{t_2} (ax' + by'\,\mathrm{d}t)$

Intégrales curvilignes et différentielles totales

Théorème. Soit $a(x,y)\,\mathrm{d}x + b(x,y)\,\mathrm{d}y$ une forme différentielle, définie dans un *domaine simplement connexe*; soient $a(x,y)$ et $b(x,y)$ continûment dérivables; alors les *conditions* suivantes sont *équivalentes* :

(1) $a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y$ est une différentielle totale, c'est-à-dire :
il existe f telle que $\mathrm{d}f = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y = a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y$.

(2) L'intégrale $\int_{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y$ ne dépend pas de l'arc choisi entre A et B (mais seulement des points A et B).

(2′) L'intégrale curviligne le long d'une courbe fermée s'annule :
$\oint a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y = 0$.

(3) $a_y = b_x$.

Chapitre 10

Exemples d'équations différentielles d'ordre 1

10.1 Croissance exponentielle

Proposition. L'*équation de la croissance* (ou décroissance) *exponentielle* :

$$y' + \alpha y = 0$$

a les solutions suivantes :

$$y = \mathrm{cste} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha x} \qquad \text{cste «arbitraire»}$$

La croissance exponentielle dans la pratique

Dans les applications, on trouve souvent la situation suivante : une quantité y varie avec le temps, soit $y = y(t)$. Pendant des intervalles de temps Δt (Δt «petit»), *l'accroissement* Δy *de* y *est proportionnel à* y *et à* Δt. En formule :

$$\Delta y = k \cdot y \cdot \Delta t$$

d'où l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k \cdot y$ dont la solution est

$$y = \mathrm{cste} \cdot \mathrm{e}^{kt}$$

Progressions géométriques et croissance exponentielle

Un processus discret qui satisfait à une loi de progression géométrique est souvent approché par un processus continu correspondant à une loi de croissance exponentielle.

Progression géométrique :	*Croissance exponentielle* :
$a_n = a_0 p^n$	$a(t) = a_0\,\mathrm{e}^{kt}$
Termes pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$:	*Valeurs pour* $t = 0, \tau, 2\tau, \ldots$:
$a_0 \xrightarrow{\cdot p} a_0 p \xrightarrow{\cdot p} a_0 p^2 \xrightarrow{\cdot p} \ldots$	$a_0 \xrightarrow{\cdot \mathrm{e}^{k\tau}} a_0\,\mathrm{e}^{k\tau} \xrightarrow{\cdot \mathrm{e}^{k\tau}} a_0\,\mathrm{e}^{2k\tau} \xrightarrow{\cdot \mathrm{e}^{k\tau}} \ldots$
Différence de 2 *termes consécutifs* :	*Equation différentielle de* $a(t)$:
$\Delta a = a_0 p^{n+1} - a_0 p^n = a_0 p^n (p-1)$	$\mathrm{d}a = k \cdot a \cdot \mathrm{d}t$
L'accroissement Δa est proportionnel à la valeur «déjà atteinte».	L'accroissement $\mathrm{d}a$ est proportionnel à a.

10.2 Equations à variables séparées, changement de variables, équations homogènes

10.2.1 Equations à variables séparées

DÉFINITION. $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ est dite *équation à variables séparées.*

Méthode de solution

A partir de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ on a successivement

$$g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x\,, \text{ d'où } \quad \int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

puis intégrer.

10.2.2 Changement de variables

Changement de fonction inconnue (variable dépendante)

Méthode de solution (exemple : $y' = \sqrt{x+y}$)

Premier pas. *Introduction d'une nouvelle variable* (plutôt : nouvelle fonction) $z^2(x) = x + y$ d'où $2zz' = 1 + y'$, d'où $y' = 2zz' - 1$ et nous trouvons l'*équation auxiliaire* :

$$2zz' - 1 = z$$

Deuxième pas. *Résolution de l'équation auxiliaire*

$$\frac{2z\,\mathrm{d}z}{z+1} = \mathrm{d}x \qquad \left(\frac{z}{z+1} = 1 - \frac{1}{z+1}\right)$$

En intégrant

$$\int \mathrm{d}z - \int \frac{\mathrm{d}z}{z+1} = \frac{x}{2} + \text{cste}$$

d'où la *solution de l'équation auxiliaire* (dans ce cas, sous forme implicite) :

$$z - \ln|z+1| = \frac{x}{2} + \text{cste}$$

Troisième pas. *Réintroduction de la variable originale* :

$$\sqrt{x+y} - \ln\big(\sqrt{x+y} + 1\big) = \frac{x}{2} + \text{cste}$$

c'est la *solution de l'équation originale* (dans ce cas, sous forme implicite).

Changement de la variable indépendante

Attention aux notations ! Soit x l'ancienne variable, t la nouvelle variable. En utilisant le symbole y', on risque des malentendus : s'agit-il de la dérivée par rapport à x ou par rapport à t ? Pour éviter ces difficultés, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Méthode de solution (exemple : $y' - 2xy + 2x^2 = 1$)

Premier pas. *Introduction d'une nouvelle variable*: $t = x^2$, soit $x = \sqrt{t}$; on a donc

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot 2x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot 2\sqrt{t}$$

En reportant dans l'équation donnée : $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot 2\sqrt{t} - 2\sqrt{t}\,y + 2t = 1$, on obtient l'*équation auxiliaire* :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y = \frac{1 - 2t}{2\sqrt{t}}$$

Deuxième pas. *Résolution de l'équation auxiliaire* (solution de l'équation homogène et solution particulière avec second membre) : $y_{\text{hom}} = \text{cste e}^t$, $y_{\text{part}} = \sqrt{t}$ (deviné, contrôlé) d'où la solution de l'équation auxiliaire :

$$y(t) = \text{cste e}^t + \sqrt{t}$$

Troisième pas. *Réintroduction de l'ancienne variable*:

$$y(x) = \text{cste e}^{x^2} + x$$

10.2.3 Equations homogènes

DÉFINITION. L'équation du premier ordre $y' = f(y/x)$ est appelée *équation homogène*.

Méthode de solution

La *subtitution* $z = y/x$ donne $y' = xz' + z$, d'où l'*équation auxiliaire* (à variables séparables) :

$$xz' + z = f(z)$$

En intégrant on a

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(\text{cste}\,x)$$

d'où

$$x = k \cdot \exp \int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z}\,, \qquad y = k \cdot z \cdot \exp \int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z}$$

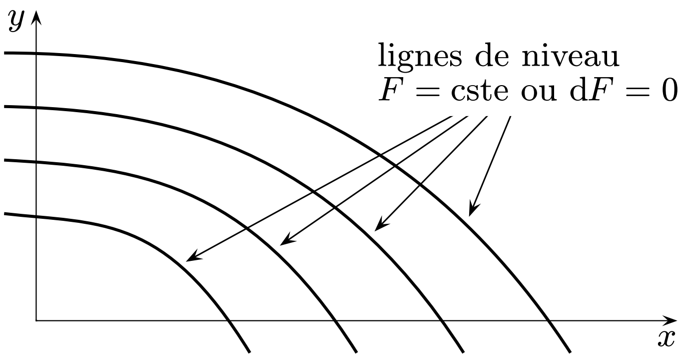
Solution sous forme paramétrée : $x(z)$, $y(z)$.

10.3 Equation aux différentielles totales, facteur intégrant

10.3.1 Equation différentielle des lignes de niveau

Soit la fonction $F(x, y)$.

Ses *lignes de niveau* sont définies par $F(x, y) = \text{cste}$.



Les *trois formes de l'équation différentielle des lignes de niveau* sont

$$\mathrm{d}F = 0\,, \qquad F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y = 0\,, \quad f_x + F_y y' = 0$$

10.3.2 Intégration des équations aux différentielles totales

DÉFINITION. L'équation $a(x, y)\,\mathrm{d}x + b(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$, où $a_y = b_x$, est appelée *équation aux différentielles totales*.

Méthode de solution

Premier pas. Intégrer la différentielle totale $a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y$, c'est-à-dire : trouver une fonction $F(x, y)$ telle que $\mathrm{d}F = a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y$.

Deuxième pas. Alors $F(x, y) = \text{cste}$ est une représentation implicite des solutions.

10.3.3 Facteur intégrant

Problème. Résoudre $a(x, y)\,\mathrm{d}x + b(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ même si $a_y \neq b_x$.

Méthode de solution

Premier pas. Rechercher un «facteur intégrant» $M(x, y)$, tel que $M \cdot a\,\mathrm{d}x + M \cdot b\,\mathrm{d}y$ est une *différentielle totale*.

Deuxième pas. Intégrer l'équation $M \cdot a\,\mathrm{d}x + M \cdot b\,\mathrm{d}y = 0$ (les solutions de cette équation sont les mêmes que celles de l'équation originale).

Remarque. On essayera de trouver un facteur intégrant «simple», par exemple $M = M(x)$ ou $M = M(y)$.

10.4 Familles de courbes, enveloppes, équation de Clairaut

10.4.1 Famille de courbes

Equation différentielle d'une famille de courbes

On suppose qu'une famille de courbes est donnée par son équation $f(x, y, c) = 0$. Chaque valeur du paramètre c détermine une courbe.

Proposition. L'équation différentielle d'une famille de courbes $f(x, y, c) = 0$ est obtenue *en éliminant le paramètre c* du système d'équations :

$$\begin{cases} f(x, y, c) = 0 \\ f_x(x, y, c) + f_y(x, y, c) \cdot y' = 0 \end{cases} \quad \downarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

où la deuxième équation s'obtient par dérivation par rapport à x de la première.

Remarque. Les courbes de la famille satisfont à l'équation différentielle ainsi trouvée. Mais l'équation différentielle peut encore avoir d'autres solutions (singulières), notamment d'éventuelles enveloppes (§ 10.4.2).

10.4.2 Enveloppes d'une famille de courbes

PROPOSITION. Une éventuelle *enveloppe* de la famille $f(x, y, c) = 0$ satisfait à *l'équation* qu'on obtient *en éliminant le paramètre* c des équations :

$$\begin{cases} f(x, y, c) = 0 \\ f_c = 0 \end{cases}$$

PROPOSITION. Une éventuelle *enveloppe* satisfait à la *même équation différentielle que la famille de courbes* ; elle correspond à une *solution singulière* de cette équation différentielle.

Remarque. L'équation différentielle d'une famille de courbes peut avoir d'autres solutions singulières que celles qui représentent les enveloppes.

10.4.3 Equation de Clairaut

DÉFINITION. L'équation $y = xy' + f(y')$ est dite *équation de Clairaut*.

Méthode de solution

On *dérive l'équation donnée* : $y' = y' + xy'' + \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y'} \cdot y''$ d'où l'équation auxiliaire :

$$y'' \left(x + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y'} \right) = 0$$

Deux cas se présentent :

(1) $y" = 0$ d'où la solution générale : $y = ax + b$.

Toutes ces droites ne représentent pas une solution; remplacer y dans l'équation donnée, implique $b = f(a)$ d'où

$$y = ax + f(a)$$

c'est *la solution générale* (famille de droites).

(2) $x + \mathrm{d}f/\mathrm{d}y' = 0$ d'où la solution singulière.

Si on ne peut pas résoudre cette équation directement, on trouve une «représentation paramétrique» de la solution en ajoutant à cette équation une deuxième : l'équation de Clairaut donnée, dans laquelle x a été remplacée par $-\mathrm{d}f/\mathrm{d}y'$:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y'} \\ y = -\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y'} \cdot y' + f(y') \end{cases}$$

C'est la représentation paramétrique de la *solution singulière* (paramètre : y').

10.5 Existence et unicité

10.5.1 Théorème d'existence et d'unicité

DÉFINITION. L'équation $y' = f(x, y)$ est appelée *équation différentielle « explicite » d'ordre* 1.

Théorème d'existence et d'unicité

Formulation intuitive

Pour les fonctions $f(x, y)$ suffisamment régulières et pour des valeurs initiales (x_0, y_0) données, l'équation $y' = f(x, y)$ possède *localement* une et une seule solution (satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$).

Formulation exacte

Théorème

Hypothèses. Soit D un domaine fermé rectangulaire :

$$D = \big\{(x,y) \mid x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a \,; y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\big\}$$

Soit $f(x,y)$ continue dans D et f_y continue dans D.
Thèse. Dans un certain intervalle $x_0 - c \leqslant x \leqslant x_0 + c$ (au moins), il existe une et une seule solution de l'équation $y' = f(x,y)$ satisfaisant à la condition initiale $y_0 = y(x_0)$.
Une valeur pour c peut être trouvée : $c = \min(a, b/M)$ où $M = \max_D \big|f(x,y)\big|$.

10.5.2 Approximation successive

La méthode de l'approximation successive permet de construire par itération une solution de l'équation différentielle $y' = f(x,y)$. (Cette méthode est aussi utilisée pour démontrer l'existence d'une solution.) Admettons les mêmes hypothèses que ci-dessus :

Premier pas. *Remplacer l'équation différentielle par une équation intégrale.*

Proposition. Toute solution de l'équation

$$y' = f(x,y) \qquad \text{avec } y(x_0) = y_0$$

satisfait aussi à l'équation

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y)\,\mathrm{d}t$$

et vice versa.

Deuxième pas. *Construction de la solution par* « *approximation successives* ». Posons

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,\mathrm{d}t$$

Ensuite, nous avons successivement

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_1(t)\big)\,\mathrm{d}t \\ y_3(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_2(t)\big)\,\mathrm{d}t \\ &\vdots \\ y_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

THÉORÈME. La suite de fonctions $y_n(x)$, définie ci-dessus, tend vers une fonction $y(x)$, solution de $y' = f(x, y)$ et satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

CHAPITRE 11

Equations différentielles linéaires à coefficients constants

11.1 L'équation $y' + ay = f(x)$

11.1.1 L'équation homogène $y' + ay = 0$

PROPOSITION. La *solution générale* de l'équation homogène (ou équation sans second membre)

$$y' + ay = 0$$

s'écrit

$$y = \mathrm{c}\,\mathrm{e}^{-ax}$$

où c est une constante arbitraire.

11.1.2 L'équation non homogène $y' + ay = f(x)$

Proposition. La *solution générale* de l'équation non homogène (équation avec second membre)

$$y' + ay = f(x)$$

s'écrit

$$y = y_{\text{part}} + y_{\text{hom}} = y_{\text{part}} + \mathrm{c}\,\mathrm{e}^{-ax}$$

où

y_{hom} est la solution de «l'équation homogène correspondante» : $y' + ay = 0$;

y_{part} est la solution *quelconque* de l'équation non homogène donnée (dite : solution «particulière»).

11.1.3 Recherche d'une solution particulière

Première méthode

Deviner. Il ne s'agit pas d'une «méthode» proprement dite, mais plutôt de quelques conseils qui peuvent, dans certains cas, aider à trouver une solution.

Si le second membre est une fonction suffisamment simple (ex. polynôme, fonction exponentielle, fonction trigonométrique, hyperbolique), l'idée générale est de chercher une solution «ressemblant» au second membre.

(1) *Le second membre $f(x)$ n'est pas solution de l'équation homogène.* On peut souvent trouver une solution en posant :

y_{part} = combinaison linéaire du second membre et de certaines de ses dérivées.

(2) *Le second membre $f(x)$ est solution de l'équation homogène correspondante.* Essayer avec $y_{\text{part}} = \mathrm{c} \cdot x \cdot f(x)$.

Deuxième méthode

Variation des constantes (toujours applicable). Poser

$$y_{\text{part}} = c(x) \cdot y_1 = c(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$$

En remplaçant y dans l'équation donnée $y' + ay = f(x)$ par cette expression, on trouve une équation pour $c'(x)$:

$$c'(x) = \mathrm{e}^{ax} \cdot f(x)$$

d'où $c(x)$ par intégration.

11.2 L'équation $y'' + ay' + by = 0$

11.2.1 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème. L'ensemble des solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ est un espace vectoriel de dimension 2, c'est-à-dire :
il suffit de connaître *deux solution linéairement indépendantes* («solutions de base»), toutes leurs combinaisons linéaires sont alors aussi des solutions et *toute solution est une combinaison linéaire de ces deux solutions de base.*

11.2.2 Recherche de deux solutions linéairement indépendantes

Soit $y'' + ay' + by = 0$. Poser $y = \mathrm{e}^{rx}$. L'équation donnée conduit à :

$$\underbrace{r^2 + ar + b}_{\substack{\text{polynôme}\\ \text{caractéristique}}} = 0$$

qui est appelée *équation caractéristique*. Soient r_1, r_2 les solutions de cette équation. Plusieurs cas se présentent :

(1) r_1, r_2 sont différentes et réelles :

$$y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x}\,, \qquad y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes.

(2) $r_1 = r_2$ $(= r)$:

$$y_1 = \mathrm{e}^{rx}\,, \qquad y_2 = x \cdot \mathrm{e}^{rx}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes.

(3) r_1, r_2 sont complexes conjugués, avec $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$:

$$\varphi_1 = \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}\,, \qquad \varphi_2 = \mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)x}$$

sont deux solutions (complexes) linéairement indépendantes, et

$$y_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$y_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2i} = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$$

sont deux solutions réelles linéairement indépendantes.

11.3 L'équation $y'' + ay' + by = f(x)$

11.3.1 La solution générale

PROPOSITION. La *solution générale* de l'équation $y'' + ay' + by = f(x)$ s'écrit :

$$y = y_{\text{part}} + y_{\text{hom}} = y_{\text{part}} + \mathrm{c}_1 y_1 + \mathrm{c}_2 y_2$$

où :

y_{part} est la solution quelconque de l'équation donnée;

y_{hom} est la solution générale de l'équation homogène correspondante.

11.3.2 Recherche d'une solution particulière

Première méthode

Deviner (pour certains seconds membres seulement).

(1) *Le second membre n'est pas solution de l'équation homogène correspondante.* Essayer :

$y_{\text{part}} =$ combinaison linéaire du second membre et de ses dérivées (premières et secondes).

(2) *Le second membre est solution de l'équation homogène.* Essayer :

$y_{\text{part}} = x \cdot$ (combinaison linéaire du second membre et de ses dérivées).

Si cette expression est encore solution de l'équation homogène, essayer :

$y_{\text{part}} = x^2 \cdot$ (combinaison linéaire du second membre et de ses dérivées).

Etc.

Deuxième méthode

Variation des constantes. Principe : chercher une solution de la forme $y_{\text{part}} = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$, où y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène correspondante.

Remarque. Il y a *trop d'inconnues*. En introduisant deux fonctions inconnues $c_1(x)$ et $c_2(x)$, on a « trop de liberté » pour satisfaire à une seule équation. Il sera possible d'*imposer une condition* aux fonctions $c_1(x)$ et $c_2(x)$. Calculons

$$y_p' = c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_1y_1' + c_2y_2'$$

La *condition imposée* est alors $c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$.
Verbalement : « *on peut dériver* $y_{\text{part}} = c_1(x) \cdot y_1 + c_2(x) \cdot y_2$ *une fois, comme si* c_1 *et* c_2 *étaient des constantes.* »

Remplaçant dans $y'' + ay' + by = f(x)$, nous obtenons :

$$(c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1'y_1' + c_2'y_2') + a(c_1y_1' + c_2y_2') + b(c_1y_1 + c_2y_2) = f(x)$$

d'où

$$c_1 \underbrace{(y_1'' + ay_1' + by_1)}_{0} + c_2 \underbrace{(y_2'' + ay_2' + by_2)}_{0} + c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x)$$

d'où la deuxième équation

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x)$$

Enfin c_1' et c_2' peuvent être trouvés en résolvant le système linéaire :

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

d'où c_1', c_2'. En intégrant, on trouve $c_1(x)$ et $c_2(x)$.

Décomposition du second membre

La recherche d'une solution particulière peut souvent être facilitée par la décomposition du second membre en une somme (ou combinaison linéaire) de termes plus simples. La méthode repose sur la proposition suivante :

PROPOSITION. Soit $\varphi(x)$ solution de $y'' + ay' + by = f(x)$.
Soit $\psi(x)$ solution de $y'' + ay' + by = g(x)$. Alors :

$$\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x) \text{ est solution de } y'' + ay' + by = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

11.4 Seconds membres particuliers

11.4.1 Oscillations forcées

Soit $x'' + 2\lambda x' + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t)$ l'écriture sous forme standard de l'équation différentielle des « vibrations forcées » ou « oscillations forcées » où :

λ est le coefficient d'amortissement ;

ω_0 est la pulsation de l'oscillation libre, non amortie ;

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ est la pulsation de l'oscillation amortie libre ;

Ω est la pulsation d'excitation (en mécanique : Ω est la pulsation de la force perturbatrice $F_0 \cos(\Omega t)$ où $F_0 = f_0 m$).

Solution de l'équation homogène

$$x_{\text{hom}} = \mathrm{e}^{-\lambda t}(\mathrm{c}_1 \cos \omega t + \mathrm{c}_2 \sin \omega t) \text{ où } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}.$$

Solution de l'équation non homogène

$$x(t) = \underbrace{\alpha \cos \Omega t + \beta \sin \Omega t}_{x_{\text{part}}} + \underbrace{\mathrm{e}^{-\lambda t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)}_{x_{\text{hom}}}$$

où

x_{part} est le *mouvement stationnaire* ou *régime permanent* ;

x_{hom} est le *mouvement transitoire* tendant vers 0 pour $t \to \infty$, c_1 et c_2 dépendent des conditions initiales ;

α et β sont données par :

$$\alpha = \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2) f_0}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2\lambda\Omega \cdot f_0}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}$$

Discussion du mouvement stationnaire, résonance

La solution particulière s'écrit encore

$$\alpha \cos \Omega t + \beta \sin \Omega t = A \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$

avec

$$A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \quad \text{et} \quad \cos \varphi = \frac{\alpha}{A}$$

λ étant donné, pour quelle valeur $\Omega_{\text{rés}}$ de Ω l'amplitude est-elle maximale ? Quelle est cette amplitude $A_{\text{rés}}$?

On trouve

$$\Omega_{\text{rés}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}\,, \qquad A_{\text{rés}} = \frac{f_0}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} = \frac{f_0}{2\lambda\omega}$$

Nous avons les cas :

(1) $\lambda > \omega_0^2/2$, il n'y a pas d'extremum relatif donc il n'y a pas de résonance ;

(2) $0 < \lambda < \omega_0^2/2$, il y a résonance ;

(3) $\lambda = 0$ (ici, pas d'amortissement). En cas de résonance : $A_{\text{rés}\to\infty}$ («catastrophe»).

11.5 L'équation $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$

11.5.1 Recherche de n solutions linéairement indépendantes

Introduire dans l'équation $y = \mathrm{e}^{rx}$; on obtient :

$$r^n\,\mathrm{e}^{rx} + a_1 r^{n-1}\,\mathrm{e}^{rx} + \cdots + a_n\,\mathrm{e}^{rx} = 0$$

d'où l'équation caractéristique :

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

Désignons ses solutions par r_1, r_2, ..., r_n.

Types de racines	*Solutions de base correspondantes*
racine simple : r	$y = \mathrm{e}^{rx}$
racine double : $r_1 = r_2 = r$	$y_1 = \mathrm{e}^{rx}$; $y_2 = x\,\mathrm{e}^{rx}$
racine triple : $r_1 = r_2 = r_3 = r$	$y_1 = \mathrm{e}^{rx}$; $y_2 = x\,\mathrm{e}^{rx}$;; $y_3 = x^2\,\mathrm{e}^{rx}$
$\vdots$	$\vdots$
racines complexes (conjuguées) : $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$	$(\varphi_1 = \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}$; $\varphi_2 = \mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)x})$ d'où : $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$
racines complexes doubles : $r_1 = r_2 = \alpha + i\beta$, $r_3 = r_4 = \alpha - i\beta$	$\varphi_1 = \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}$; $\varphi_2 = \mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)x}$ $\varphi_3 = x\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}$; $\varphi_4 = x\,\mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)x}$ d'où : $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ $y_3 = x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_4 = x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$

Solution générale

Elle est donnée par

$$y = \mathrm{c}_1 y_1 + \cdots + \mathrm{c}_n y_n$$

où y_i désignent les solutions de base.

11.5.2 Problème aux valeurs initiales

PROPOSITION. Il existe une et une seule solution de l'équation $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$, satisfaisant aux conditions initiales données :

$$y(x_0) = \alpha_1\,,\; y'(x_0) = \alpha_2\,,\; \ldots\,,\; y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n$$

11.5.3 Wronskien

DÉFINITION. Soient f_1, f_2, …, f_n n fonctions ($n-1$ fois dérivables) ; alors

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

est appelé *wronskien* des n fonctions.

PROPOSITION. Soient y_1, y_2, …, y_n n solutions de l'équation $y^{(n)} + ay^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$; alors

$$W(x) \begin{cases} \equiv 0 & \text{si les } y_1 \text{ sont } \textit{linéairement dépendantes} \\ \neq 0 & \text{pour tout } x, \text{ si les } y_i \text{ sont} \\ & \textit{linéairement indépendantes} \end{cases}$$

COROLLAIRE. Il suffit de connaître le wronskien pour une valeur x_0 quelconque de la variable pour savoir si les fonctions considérées sont linéairement dépendantes ou indépendantes.

Plus précisément

$W(x_0) = 0$ implique que les y_i sont linéairement dépendantes ;

$W(x_0) \neq 0$ implique que les y_i sont linéairement indépendantes.

11.6 L'équation $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$

11.6.1 Solution générale

Appelons :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$$

l'équation (avec second membre) donnée et

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

l'équation homogène correspondante.

Proposition. La *solution générale* de l'équation

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$$

s'écrit :

$$y = y_{\text{part}} + y_{\text{hom}} \quad (= y_{\text{part}} + \mathrm{c}_1 y_1 + \mathrm{c}_2 y_2 + \cdots + \mathrm{c}_n y_n)$$

où

y_{part} est une solution quelconque de l'équation donnée (solution particulière) ;

y_{hom} est la solution générale de l'équation homogène correspondante.

($y_1, \ldots, y_n$ sont n solutions linéairement indépendantes de cette équation homogène.)

11.6.2 Recherche d'une solution particulière

Première méthode

Deviner. Les calculs qu'on devrait faire en appliquant la méthode de la variation des constantes peuvent souvent être évités en « devinant » une solution.

Pour certaines classes de seconds membres (fonctions étant elles-mêmes solutions d'une équation homogène à coefficients constants), nous allons partiellement systématiser la recherche d'une solution « particulière » :

(1) *Le second membre n'est pas solution de l'équation homogène correspondante.* Essayer :

$y_{\text{part}} =$ combinaison linéaire du second membre et de ses dérivées.

(2) *Le second membre est solution de l'équation homogène correspondante.* Essayer :

$y_{\text{part}} = x \cdot$ (combinaison linéaire du second membre et de ses dérivées).

Si cette expression est encore solution de l'équation homogène, essayer :

$y_{\text{part}} = x^2 \cdot$ (combinaison linéaire du second membre et de ses dérivées).

Etc.

Décomposition du second membre. Si le second membre est une somme (ou une combinaison linéaire) de fonctions, il est possible de décomposer le problème donné en problèmes partiels :

Proposition

(1) Soit $\varphi(x)$ solution de $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y_n = f(x)$;
alors $\mathrm{c}\cdot\varphi$ est solution de $y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_n y_n = \mathrm{c}\cdot f(x)$.

(2) Soient
$\varphi(x)$ solution de $y^{(n)} + \cdots + a_n y_n = f(x)$,
$\psi(x)$ solution de $y^{(n)} + \cdots + a_n y_n = g(x)$;
alors
$\varphi + \psi$ est solution de $y^{(n)} + \cdots + a_n y_n = f(x) + g(x)$.

Si le second membre est par exemple $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$, on trouvera donc des solutions pour les équations correspondantes avec seconds membres $f(x)$ (resp. $g(x)$). Appelons ces solutions $\varphi(x)$ (resp. $\psi(x)$). Une solution du problème donné sera alors : $\alpha\varphi + \beta\psi$.

Deuxième méthode

Variation des constantes. On cherche une solution de la forme :

$$y_{\text{part}} = c_1(x) \cdot y_1 + \cdots + c_n(x) \cdot y_n$$

où $c_i(x)$ sont des fonctions à déterminer et y_i sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène correspondante.

En admettant n fonctions «arbitraire» $c_i(x)$, on s'est accordé une liberté de choix plus grande que nécessaire pour résoudre le problème posé. C'est pourquoi on pourra *imposer* $n-1$ *conditions*. Choisissons les conditions suivantes : on peut dériver la solution particulière «comme si les $c_i(x)$ étaient des constantes». Tenant compte de ces conditions, on remplace y par l'équation donnée par l'expression pour y_{part}. Ainsi, on trouvera une $n^{\text{ième}}$ équation.

$$\left.\begin{aligned} c_1' \cdot y_1 + \cdots + c_n' \cdot y_n &= 0 \\ c_1' \cdot y_1' + \cdots + c_n' \cdot y_n' &= 0 \\ &\vdots \\ c_1' \cdot y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n' \cdot y_n^{(n-2)} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Ces équations équivalent à dire que y_{part} peut être dérivée $n-1$ fois «comme si les c_i étaient des constantes».

$$c_1' \cdot y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' \cdot y_n^{(n-1)} = f(x)$$

Cette équation est obtenue en remplaçant y dans l'équation donnée par y_{part} et en tenant compte des $n-1$ équations ci-dessus.

Le déterminant de ce système linéaire est le wronskien $W(x)$ des fonctions $y_1, \ldots, y_n$: $W(x) \neq 0$. Le système est donc régulier et possède une et une seule solution :

$$c_1', \, c_2', \, \ldots, \, c_n'$$

Après intégration, on trouve : $c_1(x)$, $c_2(x)$, …, $c_n(x)$.

Chapitre 12

Equations différentielles linéaires à coefficients variables

12.1 Ensemble des solutions d'une équation linéaire

12.1.1 Equation homogène

Théorème. Soit $y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$ une équation différentielle linéaire, homogène à coefficients variables. Soient $a_i(x)$ continues sur I. Soit $x_0 \subset I$. Alors :

(1) L'ensemble des solutions est un *espace vectoriel de dimension n*; c'est-à-dire : il existe n solutions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, linéairement indépendantes, telles que la *solution générale* s'écrit :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

(2) Le *problème aux valeurs initiales a exactement une solution*, c'est-à-dire : il existe sur I une et une seule solution satisfaisant aux conditions initiales

$$y(x_0) = \alpha_1\,,\ y'(x_0) = \alpha_2\,,\ \ldots\,,\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont donnés.

Wronskien

PROPOSITION. Soient $y_1, \ldots, y_n$ n solutions de l'équation

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$$

Soit $W(x)$ leur wronskien. Alors :

(1) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont *linéairement indépendantes* si et seulement si

$$W(x) \neq 0 \qquad \text{pour tout } x \in I$$

(2) Pour tout $x_0 \in I$:

$$W(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,\mathrm{d}t\right) \cdot W(x_0)$$

12.1.2 Equation non homogène

La *solution générale* de l'équation

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) \cdot y = f(x)$$

s'écrit

$$\begin{aligned} y &= y_{\text{part}} + y_{\text{hom}} \\ &= y_{\text{part}} + c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \end{aligned}$$

où

y_{part} est une *solution quelconque* de l'équation donnée;

y_{hom} est la *solution générale* de l'équation correspondante sans second membre;

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont n solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène correspondante.

Recherche d'une solution particulière

Il est souvent difficile de «deviner» une solution. Par contre, la méthode de la variation des constantes est toujours applicable.

12.2 Equation d'Euler

DÉFINITION. Une équation de la forme

$$x_n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

est dite *équation d'Euler*.

Recherche de n solutions linéairement indépendantes

Poser $y = x^r$. En remplaçant y dans l'équation donnée, on trouve l'*équation caractéristique* :

$$r(r-1)\cdots(r-n+1) + a_1 \cdot r(r-1)\cdots(r-n+2) + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

Les n solutions de l'équation caractéristique sont désignées par : $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Types de racines	*Solutions de base correspondantes*
racine simple (réelle) r	$y = x^r$
racine double $r_1 = r_2 = r$	$y_1 = x^r$ $y_2 = \ln x \cdot x^r$
racine triple $r_1 = r_2 = r_3 = r$	$y_1 = x^r$ $y_2 = \ln x \cdot x^r$ $y_3 = (\ln x)^2 \cdot x^r$
racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \beta i$ $r_2 = \alpha - \beta i$	$\varphi_1 = x^{\alpha + i\beta} = x^\alpha \cdot \mathrm{e}^{i\beta \ln x}$ $\varphi_2 = x^{\alpha - i\beta} = x^\alpha \cdot \mathrm{e}^{-i\beta \ln x}$ d'où $y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x)$ $y_2 = x^\alpha \sin(\beta \ln x)$

12.3 L'équation $y' + a(x)y = f(x)$

12.3.1 L'équation homogène $y' + a(x)y = 0$

Méthode de solution

Par *séparation des variables* on a

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -a(x)\,\mathrm{d}x$$

d'où la *solution générale* :

$$y = \text{cste} \cdot \mathrm{e}^{-A(x)}$$

où $A'(x) = a(x)$.

12.3.2 L'équation non homogène $y' + a(x)y = f(x)$

Recherche d'une solution particulière

Par *variation des constantes* on trouve

$$y_{\text{part}} = c(x) \cdot \mathrm{e}^{-A(x)}$$

En remplaçant y par $c(x) \cdot \mathrm{e}^{-A(x)}$ dans l'équation donnée, on obtient :

$$c'(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \cdot f(x)$$

d'où $c(x)$ par intégration.

12.4 Equations à coefficients analytiques

Méthode de solution

Soit l'équation du type : $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$.

Supposons que $a(x)$ et $b(x)$ peuvent être développés en séries de Taylor, par exemple dans un voisinage de $x_0 = 0$.

Poser :

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

Remplacer y dans l'équation donnée et *comparer* les coefficients des puissances respectives. On obtient *deux solutions linéairement indépendantes*, y_1 et y_2, en posant :

- pour y_1 : $c_0 = 1$ et $c_1 = 0$,
- pour y_2 : $c_0 = 0$ et $c_1 = 1$.

Chapitre 13

Méthodes particulières, exemples d'équations différentielles non linéaires

13.1 Abaissement de l'ordre

L'équation ne contient pas la fonction inconnue

Poser $z(x) = y'(x)$.

L'équation ne contient pas la variable indépendante

La *fonction cherchée* est $y(x)$. *Considérer* y comme *nouvelle variable* et $y'(y) = p(y)$ comme *nouvelle fonction inconnue*.

Calculer

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\,, \quad \text{ensuite} \quad y''' = \cdots\,, \quad \text{etc.}$$

En replaçant y, ... dans l'équation donnée, on obtient une nouvelle équation différentielle dont l'ordre est réduit de 1.

L'équation ne contient ni la fonction cherchée, ni la variable

L'ordre peut être abaissé de 2 *s'il est* $\geqslant 3$, en combinant les deux méthodes ci-dessus.

L'équation est linéaire et une solution est connue

Plus précisément : équation linéaire homogène (pouvant avoir des coefficients variables) dont une solution est connue.

Soit $y_1(x)$ la solution connue.

Premier pas. Poser $y = y_1 \cdot z$. On obtient une équation du même ordre pour la nouvelle fonction inconnue $z(x)$, ne contenant pas explicitement z.

Deuxième pas. Poser $z' = u$. Ainsi l'ordre sera abaissé de 1.

13.2 Exemples d'équations non linéaires

13.2.1 Equation de Bernoulli

Définition. Une équation de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = f(x) \cdot y^m$$

où $m \neq 0$, 1, est dite *équation de Bernoulli.*

Méthode de solution

(1) *Diviser par* y^m : $a(x)\dfrac{y'}{y^m} + b(x)y^{1-m} = f(x)$.

(2) *Poser* $z = y^{1-m}$ d'où $z' = (1-m)y^{-m} \cdot y'$.

Ceci conduit à l'équation auxiliaire (linéaire) à résoudre :

$$\frac{a(x)}{1-m} \cdot z' + b(x) \cdot z = f(x)$$

13.2.2 Equation de Riccati

Définition. Une équation de la forme

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

est dite *équation de Riccati.*

Cette équation peut être résolue *si une solution* (particulière) *est connue.*

Méthode de solution

Soit y_1 la solution connue. Poser $y = y_1 + 1/u$. Ceci conduit à

$$u' + (2ay_1 + b)u = -a$$

qui est une équation auxiliaire (linéaire) à résoudre.