

MATHÉMATIQUES

2^e cycle

Cours et exercices corrigés

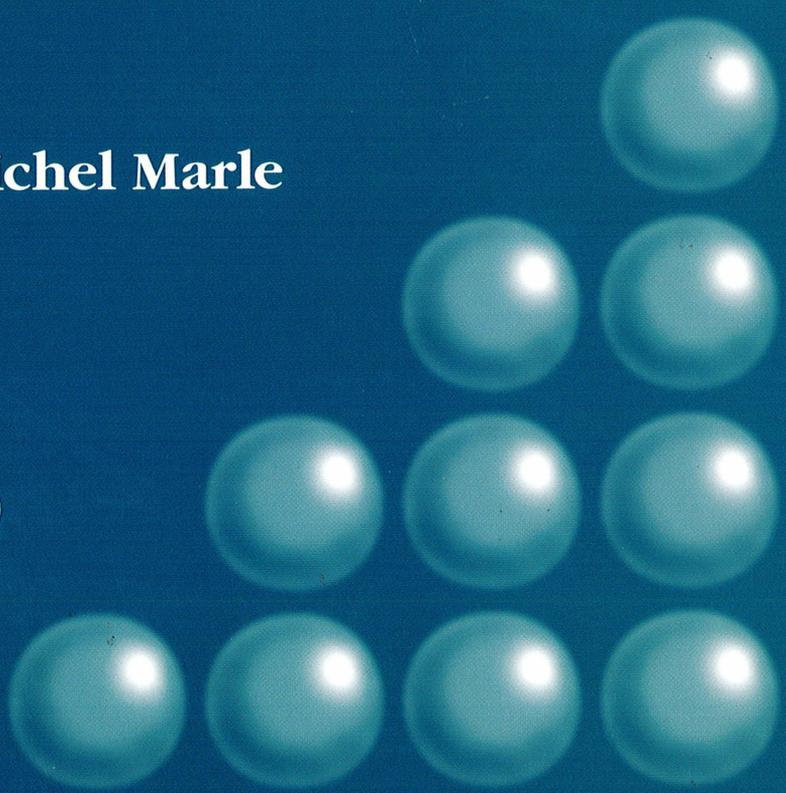
Collection dirigée par
Charles-Michel Marle
Philippe Pilibossian

Systemes dynamiques

Une introduction

Charles-Michel Marle

ellipses



MATHÉMATIQUES POUR LE 2^E CYCLE

Collection dirigée par Charles-Michel MARLE et Philippe PILIBOSSIAN

SYSTÈMES
DYNAMIQUES
Une introduction

Charles-Michel MARLE

Professeur émérite
Université Pierre et Marie Curie



Dans la même collection *Mathématiques pour le 2^e cycle*

- ▶ *Algèbre et théorie des nombres. Cryptographie - Primalité*, Sabah Al Fakir, 288 pages.
- ▶ *Algèbre linéaire*, Francette Bories-Longuet, 160 pages.
- ▶ *Algèbre linéaire numérique. Cours et exercices*, Grégoire Allaire et Sidi Mahmoud Kaber, 256 pages.
- ▶ *Analyse complexe et distributions*, Alain Yger, 400 pages.
- ▶ *Calcul différentiel*, Gilles Christol, Anne Cot, Charles-Michel Marle, 224 pages.
- ▶ *Cours d'algèbre*, Renée Elkik, 192 pages.
- ▶ *Cours de calcul formel. Algorithmes fondamentaux*, Philippe Saux Picart, 192 pages.
- ▶ *Cours de calcul formel. Corps finis - Systèmes polynomiaux - Applications*, Philippe Saux Picart et Éric Rannou, 224 pages.
- ▶ *Distributions - Espaces de Sobolev, Applications*, Marie-Thérèse Lacroix-Sonnier, 160 pages.
- ▶ *Éléments d'analyse convexe et variationnelle*, Dominique Azé, 240 pages.
- ▶ *Éléments d'intégration et d'analyse fonctionnelle*, Aziz El Kacimi Alaoui, 256 pages.
- ▶ *Géométrie différentielle avec 80 figures*, Catherine Doss-Bachelet, Jean-Pierre François et Claude Piquet, 208 pages.
- ▶ *Intégration et théorie de la mesure - Une approche géométrique*, Paul Krée, 240 pages.
- ▶ *Introduction à Scilab. Exercices pratiques corrigés d'algèbre linéaire*, Grégoire Allaire et Sidi Mahmoud Kaber, 240 pages.
- ▶ *Les groupes finis et leurs représentations*, Gérard Rauch, 192 pages.
- ▶ *Logique, ensemble, catégories. Le point de vue constructif*, Pierre Ageron, 128 pages.
- ▶ *Précis d'analyse réelle. Topologie - Calcul différentiel - Méthodes d'approximations*, vol. 1, Vilmos Komornik, 208 pages.
- ▶ *Précis d'analyse réelle. Analyse fonctionnelle - Intégrale de Lebesgue - Espaces fonctionnels*, vol. 2, Vilmos Komornik, 256 pages.
- ▶ *Quelques aspects des mathématiques actuelles*, ouvrage collectif, 256 pages.
- ▶ *Systèmes dynamiques. Une introduction*, Charles-Michel Marle, 288 pages.
- ▶ *Théorie de Galois*, Ivan Gozard, 224 pages.
- ▶ *Topologie*, Gilles Christol, Anne Cot, Charles-Michel Marle, 192 pages.
- ▶ *Une introduction à la géométrie projective*, Daniel Lehmann, 128 pages.

Ouvrages du même auteur

- *Les écoulements polyphasiques en milieu poreux*, (première édition 175 pages, seconde édition augmentée 300 pages). Technip, Paris, 1965 et 1972.
- *Mesures et probabilités* (474 pages), Hermann, Paris, 1974.
- *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics* (526 pages, avec Paulette Libermann), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.
- *Topologie* (192 pages, avec Gilles Christol et Anne Cot), Ellipses / éditions marketing S.A., Paris, 1997.
- *Calcul différentiel* (224 pages, avec Gilles Christol et Anne Cot), Ellipses / éditions marketing S.A., Paris, 1997.

ISBN 2-7298-1530-9

© Ellipses Édition Marketing S.A., 2003
32, rue Bague 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (Art. L. 122-4). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Présentation de la Collection Mathématiques pour le deuxième cycle

Cette collection se propose de mettre à la disposition des étudiants de licence et de maîtrise de mathématiques des ouvrages couvrant l'essentiel des programmes actuels des universités françaises. Certains de ces ouvrages pourront être utiles aussi aux étudiants qui préparent le CAPES ou l'agrégation, ainsi qu'aux élèves des grandes écoles.

Nous avons voulu rendre ces livres accessibles à tous : les sujets traités sont présentés de manière simple et progressive, tout en respectant scrupuleusement la rigueur mathématique. Chaque volume comporte un exposé du cours avec des démonstrations détaillées de tous les résultats essentiels, et de nombreux exercices corrigés.

Charles-Michel Marle

Philippe Pilibossian

Avant-propos

Ce livre est issu d'un cours que j'ai professé pendant plusieurs années à l'Université Pierre et Marie Curie. J'avais auparavant enseigné le Calcul différentiel comme on le fait traditionnellement dans les universités françaises (l'ouvrage [18] de la même collection est, en partie, issu de cet enseignement), c'est-à-dire en me limitant, faute de temps, à la présentation des principales définitions et à la preuve des grands théorèmes (inversion locale, fonctions implicites, existence et unicité des solutions maximales des équations différentielles sous les hypothèses de Cauchy-Lipschitz, différentiabilité par rapport aux données de Cauchy). Je m'étais aperçu du fait que cet enseignement était trop abstrait pour faire sentir aux étudiants l'importance et l'intérêt du sujet. Je souhaitais leur présenter, à la suite du cours de Calcul différentiel, un enseignement ne nécessitant pas beaucoup de connaissances préalables autres que celles normalement acquises dans ce cours, illustrant l'utilisation de ces grands théorèmes pour des applications précises, et ouvert sur des sujets de recherche actuels. La théorie des systèmes dynamiques m'a semblé satisfaire tous ces critères.

Certes, j'ai dû me limiter, dans ce livre de niveau second cycle, aux aspects relativement élémentaires de la théorie. Pour l'étude des aspects plus avancés, les ouvrages (principalement en langue anglaise) ne manquent pas; le lecteur pourra consulter les conseils de lecture et la liste bibliographique figurant à la fin du présent ouvrage.

J'ai d'abord songé à commencer cet ouvrage par un chapitre de géométrie différentielle, car les variétés différentiables constituent le cadre naturel pour l'étude globale des systèmes dynamiques différentiables. Quelques discussions avec des collègues m'en ont dissuadé : la présentation, dès le premier chapitre, de notions nouvelles relativement abstraites (variétés différentiables, espaces et fibrés tangents et cotangents) risquait de décourager certains lecteurs. C'est pourquoi j'ai choisi d'exposer d'abord la théorie dans le cadre des espaces affines de dimension finie. Cela suffit pour la présentation et l'étude de la plupart des notions ayant un caractère local.

Cependant, la notion de variété différentiable apparaît inévitablement, même lorsque les systèmes dynamiques considérés sont définis sur un ouvert d'un espace affine (ne serait-ce que sous forme de variétés stable et instable d'un point d'équilibre hyperbolique). J'ai donc présenté les quelques notions de géométrie différentielle nécessaires pour la compréhension de ce livre dans un dernier chapitre, avec d'autres compléments. Le lecteur n'en aura pas besoin avant le chapitre V; aguerri par l'étude des quatre premiers chapitres il pourra, lorsqu'il en en éprouvera le besoin, se reporter au chapitre VII où il trouvera un exposé bref, mais rigoureux et complet, de toutes ces notions.

Il m'a semblé utile aussi d'inclure dans le présent livre les preuves de certains résultats de Topologie rarement données dans les cours de ce niveau. Le lecteur trouvera par exemple, au chapitre VII, une preuve du théorème de Jordan, ainsi qu'une preuve élémentaire de la simple connexité de l'intérieur d'une courbe de Jordan (ce dernier résultat est en général enseigné à un niveau plus élevé, une fois acquise la théorie de l'homologie). Ces résultats

sont utilisés au chapitre IV pour la démonstration du théorème de Poincaré-Bendixson, et au chapitre VI pour la théorie de l'indice.

J'ai voulu éviter au lecteur d'avoir à se reporter trop souvent à d'autres parties éloignées du texte. C'est pourquoi le repérage des formules, par des signes tels que (*), (**) ou (***), est le plus souvent local; il n'a de valeur que dans le paragraphe courant. Les renvois à d'autres parties du texte se font par le numéro de chapitre en chiffres romains, suivi des numéros de paragraphe et de sous-paragraphe et, éventuellement, de la lettre repérant le sous-sous-paragraphe. Exemples : V.6.3 désigne le théorème de Hartman et Grobman pour un système dynamique à temps continu. À l'intérieur d'un même chapitre, le numéro de chapitre est omis.

J'ai été beaucoup encouragé par les étudiants qui ont suivi mon cours et ont manifesté un réel intérêt pour les sujets traités. Je les remercie tous chaleureusement. Mes remerciements s'adressent aussi aux collègues qui se sont intéressés à ce cours, parfois en participant à son enseignement : Dominique Bernardi, Jacky Cresson, Jean-Charles Moreau, Daniel Pecker, Bertrand Schuman, Bruno Vallet.

Je remercie mon collègue et ami Paul Krée, qui a participé à l'enseignement dont est issu ce livre et m'a fait nombre de suggestions judicieuses : alors que je traitais des systèmes dynamiques différentiables, il présentait aux étudiants les aspects probabilistes de la théorie. Nous avons songé à tirer de notre cours un livre commun, mais nos sujets d'intérêt ayant divergé, ce projet n'a pas abouti, ou plutôt s'est transformé pour aboutir d'une part à l'ouvrage [38] de Paul Krée dans la même collection, d'autre part au présent livre.

Paulette Libermann et Tadashi Tokieda ont lu, l'une la totalité, l'autre les quatre premiers chapitres du manuscrit, et m'ont permis de faire de nombreuses corrections et améliorations. Je leur exprime toute ma reconnaissance pour leur aide et pour l'intérêt qu'ils ont témoigné pour mon travail, en précisant que je reste seul responsable des imperfections qui peuvent subsister dans ce livre.

La réalisation de ce livre n'aurait pas été possible sans les logiciels \TeX et METAFONT, dus à Donald Knuth, utilisés pour sa typographie, et le logiciel MetaPost (dérivé de METAFONT) dû à John Hobby, que j'ai employé pour faire les figures qui l'illustrent. Je me joins à toute la communauté mathématique pour remercier les créateurs de ces logiciels de les avoir généreusement mis gratuitement à la disposition de tous. Une attitude qui contraste singulièrement avec celle du plus grand nombre, de nos jours où l'esprit mercantile est glorifié!

Je remercie mon co-directeur de collection Philippe Pilibossian, ainsi que Corinne Baud, des Éditions Ellipses, pour leur aide patiente et attentive.

Paris, février 2003

Charles-Michel Marle

Table des matières

Chapitre premier. Généralités sur les systèmes dynamiques	1
1. La notion de système dynamique	1
2. Trajectoires, orbites et ensembles limites	5
3. Générateur (infinitésimal) d'un système dynamique	7
4. Exemples de systèmes dynamiques	9
5. Exercices	17
6. Solutions	17
Chapitre II. Rappels sur les équations différentielles	18
1. Équations différentielles sous forme canonique	18
2. Le théorème d'existence et d'unicité	19
3. Bouts d'une solution maximale	22
4. Le flot d'une équation différentielle	25
5. Transformation par difféomorphisme	31
6. Exercices	33
7. Solutions	34
Chapitre III. Points d'équilibre d'un système dynamique	39
1. Généralités sur les points d'équilibre	39
2. Stabilité d'un point d'équilibre	42
3. Bassin d'attraction d'un point d'équilibre	50
4. Points d'équilibre instables	52
5. Points d'équilibre des champs linéaires en dimension 2	54
6. Le flot d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point d'équilibre	58
7. Cas d'un champ de vecteurs dans le plan	68
8. Exercices	88
9. Solutions	89
Chapitre IV. Orbites périodiques	93
1. Généralités sur les orbites périodiques	93
2. Temps de transit et application de Poincaré	95
3. Orbites périodiques attractives	107
4. Un exemple : l'équation de Van der Pol	108
5. Le théorème de Poincaré-Bendixson	121
6. Exercices	129
7. Solutions	130
Chapitre V. Linéarisation et conjugaison	136
1. Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre	136
2. Conjugaison topologique ou différentiable	138
3. Obstacles à la conjugaison	142
4. Quelques résultats préliminaires	144
5. Cas d'un système dynamique à temps discret	150
6. Cas d'un système dynamique à temps continu	157
7. Variétés stable et instable d'un point hyperbolique	159
8. Conjugaison différentiable	173

9. Application aux orbites périodiques	174
10. Exercices	175
11. Solutions	175
Chapitre VI. La théorie de l'indice	177
1. Le degré d'une application du cercle dans lui-même	177
2. Courbes de Jordan	183
3. Indice d'une courbe de Jordan relativement à un champ de vecteurs	188
4. Indice d'un point d'équilibre isolé	196
5. Le théorème de Poincaré-Hopf	198
6. Variantes et extensions de la théorie de l'indice	204
7. Exercices	206
8. Solutions	206
Chapitre VII. Compléments	208
1. Compléments d'algèbre linéaire	208
2. Compléments au théorème du point fixe	222
3. Le théorème de Jordan	226
4. Notions de géométrie différentielle	247
5. Les fibrés tangent et cotangent	253
6. Orientation	262
7. Exercices	265
8. Solutions	266
Bibliographie	273
1. Conseils de lecture	273
2. Références	274
Index	277

Chapitre premier

Généralités sur les systèmes dynamiques

Nous présentons dans ce chapitre la notion de système dynamique. Nous faisons d'abord appel à l'intuition du lecteur afin de lui montrer que cette notion est bien adaptée à la représentation mathématique de l'évolution de systèmes physiques au cours du temps (du moins dans le cadre de la physique classique, déterministe et non relativiste). Nous en donnons ensuite une définition mathématique précise, tant pour les systèmes à temps continu (définition 1.2) que pour les systèmes à temps discret (définition 1.4). Ces définitions sont assez générales pour englober à la fois les systèmes qui évoluent sans perte d'information (paramétrés par \mathbb{R} s'ils sont à temps continu, par \mathbb{Z} s'ils sont à temps discret) et ceux qui sont irréversibles (paramétrés par \mathbb{R}^+ ou par \mathbb{N}). Nous définissons les concepts de *trajectoire*, d'*orbite* et d'*ensemble limite* d'un système dynamique. Puis nous montrons qu'un système dynamique à temps discret est entièrement déterminé par une application, appelée *générateur* du système. Nous montrons de même, sous certaines hypothèses de régularité et de différentiabilité (qui seront supposées satisfaites dans la suite de ce livre), qu'un système dynamique à temps continu est entièrement déterminé par un champ de vecteurs, appelé *générateur infinitésimal* du système. Nous présentons enfin plusieurs exemples de systèmes dynamiques : systèmes associés à la méthode de Newton, à la transformation de Gauss, systèmes de Feigenbaum et de Hénon, pendule plan sans frottement, fer à cheval de S. Smale. L'étude du pendule plan nous montrera qu'il peut être utile d'employer comme espace des phases d'un système des objets plus généraux que des ouverts d'un espace vectoriel de dimension finie. Ces objets, les *variétés différentiables*, sont définis au chapitre VII.

1. La notion de système dynamique

1.1. Présentation intuitive. — Avant de définir de manière précise la notion de système dynamique, nous allons essayer d'en donner une idée intuitive. Considérons un système physique (par exemple, le système solaire) dont l'état varie en fonction du temps. Une origine du temps et une unité de temps étant choisies, l'ensemble des temps sera identifié à l'ensemble \mathbb{R} des réels. Supposons que l'état du système, à un instant donné, puisse être représenté mathématiquement par un point d'un ensemble Ω . Par abus de langage, nous dirons "l'instant t ", au lieu de dire l'instant représenté (avec l'origine de temps et l'unité de temps choisies) par le réel t . De même, nous dirons "l'état x du système", au lieu de dire l'état du système représenté par l'élément x de l'ensemble Ω .

Supposons aussi que lorsque l'état du système, à un instant t_1 , est un point x_1 de Ω , son état x_2 à tout autre instant postérieur $t_2 \geq t_1$, s'il existe, est entièrement déterminé par le point x_1 et par la durée $t_2 - t_1$ de l'intervalle de temps considéré. Attention : il importe de remarquer que x_2 ne dépend pas séparément de t_1 et de t_2 , mais seulement de la différence $t_2 - t_1$ (et bien sûr aussi de x_1).

a) Cas où tous les mouvements sont positivement illimités. — Considérons d'abord le cas, un peu plus simple, où quel que soit l'état x_0 du système à un instant initial donné

t_0 , le système existe encore à tout instant postérieur $t \geq t_0$. Nous dirons alors que tous les mouvements du système sont positivement illimités. Dans ce cas, l'évolution du système au cours du temps est décrite par une famille $\{\varphi_t ; t \in \mathbb{R}^+\}$ d'applications de Ω dans Ω , paramétrée par l'ensemble \mathbb{R}^+ des réels positifs ou nuls. Pour tout $x \in \Omega$ et tout $t \geq 0$, $\varphi_t(x)$ est l'état du système à la fin d'un intervalle de temps de longueur t , sachant que son état au début de cet intervalle de temps est x .

La famille d'applications $\{\varphi_t ; t \in \mathbb{R}^+\}$ vérifie, pour tous t et $s \in \mathbb{R}^+$,

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t}. \quad (1)$$

En effet, soit $x \in \Omega$ un état du système et $t_0 \in \mathbb{R}$ un instant. Si le système est dans l'état x à l'instant t_0 , son état à l'instant $t_0 + s$ est $\varphi_s(x)$; son état à l'instant $t_0 + s + t$ peut être évalué en partant de l'état x à l'instant t_0 et en disant qu'après une durée de temps de $s + t$, l'état est $\varphi_{s+t}(x)$; il peut être aussi évalué en partant de l'état $\varphi_s(x)$ du système à l'instant $t_0 + s$, et en disant qu'à partir de cet état, après une durée t , l'état devient $\varphi_t(\varphi_s(x))$. On a donc bien, pour tout $x \in \Omega$ et tous t et $s \in \mathbb{R}^+$,

$$\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{s+t}(x),$$

ce qui exprime l'égalité (1).

D'autre part, on a nécessairement

$$\varphi_0 = \text{id}_\Omega. \quad (2)$$

En effet, si l'état du système à un instant t_0 est un point x de Ω , son état, à la fin d'un intervalle de temps de longueur nulle ayant pour début l'instant t_0 , est $\varphi_0(x)$. Mais la fin d'un intervalle de temps de longueur nulle dont le début est l'instant t_0 est bien sûr l'instant t_0 , et on a bien

$$\varphi_0(x) = x.$$

b) Cas où de plus le système évolue sans perte d'information. — Supposons tous les mouvements du système positivement illimités et, de plus, que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, l'application φ_t soit une bijection de Ω sur lui-même. Nous pouvons considérer la bijection réciproque $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$. Nous avons alors une famille d'applications bijectives de Ω sur lui-même $\{\varphi_t ; t \in \mathbb{R}\}$, paramétrée par l'ensemble \mathbb{R} de tous les réels. Nous dirons alors que le système évolue sans perte d'information, car la connaissance de l'état à un instant particulier t_0 suffit pour déterminer l'état à tout instant postérieur et aussi à tout instant antérieur à l'instant t_0 .

La famille d'applications $\{\varphi_t ; t \in \mathbb{R}\}$ vérifie (1) pour tous t et $s \in \mathbb{R}$, ainsi que (2). En d'autres termes, $t \mapsto \varphi_t$ est un homomorphisme du groupe additif \mathbb{R} dans le groupe des permutations de l'ensemble Ω .

c) Cas général. — Nous allons malheureusement devoir compliquer un peu le schéma décrit ci-dessus, pour tenir compte du fait que les systèmes étudiés ne sont en général pas éternels. Si, à un certain instant, l'état du système considéré est un point x de Ω , il peut arriver qu'à la fin d'un intervalle de temps de longueur $t > 0$, le système n'existe plus; l'application φ_t n'est alors pas définie au point x . Pour décrire l'évolution du système, nous devons donc utiliser une famille $\{\varphi_t ; t \in \mathbb{R}^+\}$ d'applications, paramétrée par l'ensemble \mathbb{R}^+ des réels positifs ou nuls, chacune de ces applications φ_t , à valeurs dans Ω , étant maintenant définie, non plus sur Ω entier, mais sur une partie U_t de Ω . Le même raisonnement que celui fait ci-dessus, pour un intervalle de temps de durée nulle, montre que nous devons avoir

$$U_0 = \Omega \quad \text{et} \quad \varphi_0 = \text{id}_\Omega. \quad (3)$$

D'autre part, nous devons avoir nécessairement, pour tous t_1 et t_2 réels vérifiant $0 \leq t_1 \leq t_2$,

$$U_{t_2} \subset U_{t_1}.$$

En effet, si $x \in U_{t_2}$, le système considéré, supposé dans l'état x à un instant t_0 , existe encore à l'instant $t_0 + t_2$; il existe donc aussi à tout instant compris entre t_0 et $t_0 + t_2$ et, en particulier, à l'instant $t_0 + t_1$, ce qui prouve que $x \in U_{t_1}$.

Soient t et s deux éléments de \mathbb{R}^+ . Soit $x \in U_s$ tel que $\varphi_s(x) \in U_t$. En raisonnant comme lors de la preuve de (1), nous voyons que $x \in U_{s+t}$ et que

$$\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{s+t}(x). \quad (4)$$

Réciproquement, si $x \in U_{s+t}$, alors $x \in U_s$, puisque $0 \leq s \leq s+t$; si le système considéré est dans l'état x à un instant t_0 , son état à l'instant $t_0 + s$ est $\varphi_s(x)$, et son état à l'instant $t_0 + s + t$ est $\varphi_{s+t}(x)$. Par suite, $\varphi_s(x) \in U_t$ et nous avons encore (4).

d) Cas d'un système qui évolue sans perte d'information. — Supposons maintenant de plus que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, l'application φ_t , définie sur la partie U_t de Ω , soit injective. Comme dans le paragraphe b) ci-dessus, nous dirons que le système évolue sans perte d'information (mais nous ne supposons plus nécessairement les mouvements positivement illimités). Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, nous pouvons considérer l'application réciproque $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$; elle est définie sur la partie $\varphi_t(U_t)$ de Ω , que nous noterons U_{-t} . Nous avons ainsi une famille d'applications injectives $\{\varphi_t ; t \in \mathbb{R}\}$, paramétrée par l'ensemble \mathbb{R} de tous les réels. Cette famille d'applications vérifie

$$U_0 = \Omega, \quad \varphi_0 = \text{id}_\Omega,$$

et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$U_{-t} = \varphi_t(U_t), \quad \varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}.$$

Enfin, pour tous t et $s \in \mathbb{R}$ et tout $x \in U_s$, on a $\varphi_s(x) \in U_t$ si et seulement si $x \in U_{s+t}$ et, lorsque c'est le cas,

$$\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{s+t}(x).$$

Après ces considérations, nous pouvons donner la définition :

1.2. Définition. — On appelle *système dynamique à temps continu sur un ensemble Ω* une famille d'applications $\{\varphi_t ; t \in \mathbb{R}^+\}$, ou $\{\varphi_t ; t \in \mathbb{R}\}$, paramétrée soit par l'ensemble \mathbb{R}^+ des réels positifs ou nuls, soit par l'ensemble \mathbb{R} de tous les réels, vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) Chaque application φ_t est définie sur une partie U_t de Ω , et à valeurs dans Ω .
- (ii) L'application φ_0 , définie sur Ω entier, est id_Ω .
- (iii) Si $0 \leq t_1 \leq t_2$, alors $U_{t_2} \subset U_{t_1}$.
- (iv) Soient t et s deux éléments de l'ensemble (\mathbb{R}^+ ou \mathbb{R}) qui paramètre la famille d'applications considérée. Soit $x \in U_s$. Alors $\varphi_s(x)$ est élément de U_t si et seulement si x est élément de U_{s+t} et, lorsque c'est le cas,

$$\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{s+t}(x).$$

L'ensemble Ω est appelé *espace des phases* du système dynamique.

1.3. Remarques

a) Système dynamique paramétré par \mathbb{R} . — Soit $\{\varphi_t ; t \in \mathbb{R}\}$ un système dynamique sur Ω , au sens de la définition ci-dessus, paramétré par l'ensemble \mathbb{R} de tous les réels. En plus des propriétés (i) à (iv) de la définition 1.2, ce système vérifie aussi les propriétés suivantes :

- (v) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $U_{-t} = \varphi_t(U_t)$, et l'application φ_t est une bijection de U_t sur U_{-t} , dont l'inverse est φ_{-t} .
- (vi) Si $t_2 \leq t_1 \leq 0$, alors $U_{t_2} \subset U_{t_1}$.

Montrons d'abord (v). D'après la propriété (ii), $U_0 = \Omega$ et $\varphi_0 = \text{id}_\Omega$. Puisque $t - t = 0$, on peut affirmer, compte tenu de la propriété (iv), que pour tout élément x de U_t , $\varphi_t(x)$ est élément de U_{-t} et que $\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) = x$. En échangeant les rôles de t et $-t$, on conclut que φ_t est une bijection de U_t sur U_{-t} , et que $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$.

Montrons maintenant (vi). Soit $x \in U_{t_2}$. D'après (v), $\varphi_{t_2}(x) \in U_{-t_2}$. Mais nous avons $0 \leq t_1 - t_2 \leq -t_2$, donc d'après la propriété (iii), $U_{-t_2} \subset U_{t_1-t_2}$, et $\varphi_{t_2}(x) \in U_{t_1-t_2}$. Mais alors, d'après la propriété (iv), $x \in U_{t_1}$.

b) Systèmes dynamiques mesurables, continus ou différentiables. — Nous n'avons fait jusqu'à présent aucune hypothèse sur l'espace des phases Ω . Cet ensemble est presque toujours muni d'une certaine structure, conservée par toutes les applications φ_t .

Par exemple, lorsque l'ensemble Ω est muni d'une tribu \mathcal{A} de parties, dites *parties mesurables* de Ω , et que les applications φ_t sont toutes mesurables (voir [38] pour la définition de ces notions), on dit qu'on a affaire à un *système dynamique mesurable* sur l'espace mesurable (Ω, \mathcal{A}) .

Dans la suite, nous supposerons toujours que Ω est un espace topologique et que toutes les applications φ_t sont continues. Nous dirons alors que le système dynamique considéré est *continu*.

Le plus souvent, nous supposerons même que Ω est un ouvert d'un espace affine réel de dimension finie et que les applications φ_t sont différentiables de classe C^p (avec p entier ≥ 1 , ou $p = +\infty$). Nous dirons alors que le système dynamique considéré est *différentiable*.

On rencontre aussi le cas où Ω est un ouvert d'un espace affine de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et où les applications φ_t sont analytiques (on dit alors aussi qu'elles sont de classe C^ω). Le système dynamique considéré est alors dit *analytique*.

L'étude de quelques exemples nous montrera d'ailleurs qu'il est utile de considérer le cas, encore un peu plus général, où l'espace des phases Ω est une variété différentiable plutôt qu'un ouvert d'un espace affine de dimension finie. La notion de variété différentiable sera définie plus loin (VII.4.3).

On rencontre aussi, dans l'étude des équations d'évolution, le cas où l'espace des phases d'un système dynamique est un espace fonctionnel de dimension infinie. Ce cas ne sera pas abordé dans le présent cours.

c) Systèmes dynamiques discrets. — Dans certains cas, il est utile de restreindre l'ensemble des valeurs que peut prendre le paramètre t en ne considérant qu'une famille dénombrable de valeurs possibles, de la forme kT , avec $T > 0$ fixé et $k \in \mathbb{N}$ ou $k \in \mathbb{Z}$. En prenant T pour unité de temps, nous pouvons nous ramener au cas où la famille d'applications considérée est paramétrée par \mathbb{N} ou par \mathbb{Z} .

Cette restriction de l'ensemble des valeurs possibles du paramètre est faite parfois pour simplifier l'étude d'un système à temps continu. Il arrive aussi qu'elle soit imposée par la nature du système physique qu'on veut représenter mathématiquement (on peut penser par exemple au cas où le système étudié est une pièce métallique qu'on frappe à coups de marteau; le paramètre, qui est alors le nombre de coups de marteau reçus par la pièce, est par nature à valeurs dans \mathbb{N}).

Nous sommes ainsi conduits à la définition suivante.

1.4. Définition. — On appelle *système dynamique à temps discret* sur un ensemble Ω une famille d'applications $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{N}\}$, ou $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$, paramétrée soit par l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels, soit par l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs, vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) Chaque application φ_n est définie sur une partie U_n de Ω , et à valeurs dans Ω .

- (ii) L'application φ_0 , définie sur Ω entier, est id_Ω .
- (iii) Si $0 \leq n_1 \leq n_2$, alors $U_{n_2} \subset U_{n_1}$.
- (iv) Soient n et m deux éléments de l'ensemble (\mathbb{N} ou \mathbb{Z}) qui paramètre la famille d'applications considérée. Soit $x \in U_m$. Alors $\varphi_m(x) \in U_n$ si et seulement si $x \in U_{m+n}$ et, lorsque c'est le cas,

$$\varphi_n(\varphi_m(x)) = \varphi_{m+n}(x).$$

2. Trajectoires, orbites et ensembles limites

2.1. Avertissement. — Nous considérons dans ce paragraphe un système dynamique à temps continu $\{\varphi_t ; t \in \mathbb{R}\}$ sur un espace des phases Ω , paramétré par l'ensemble des réels \mathbb{R} . Nous allons définir quelques notions, comme celles de trajectoire, d'orbite et d'ensemble limite, et prouver quelques résultats simples concernant ces notions. Ces définitions gardent leur sens, moyennant parfois une légère adaptation, lorsque le système dynamique est paramétré par l'ensemble \mathbb{R}^+ des réels positifs ou nuls, ou lorsque le système dynamique est à temps discret, paramétré par \mathbb{N} ou par \mathbb{Z} . Les résultats établis restent tous valables (moyennant parfois une légère adaptation) lorsque le système dynamique considéré est discret et paramétré par \mathbb{Z} ; certains (mais pas tous) restent aussi valables lorsque le système est paramétré par \mathbb{R}^+ ou par \mathbb{N} . Nous laisserons au lecteur le soin de faire les (très légères) adaptations nécessaires.

2.2. Définitions. — Soit $\{\varphi_t ; t \in \mathbb{R}\}$ un système dynamique à temps continu sur un espace des phases Ω , paramétré par l'ensemble des réels \mathbb{R} . Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note U_t la partie de Ω sur laquelle l'application φ_t est définie. Pour tout point x de Ω , on note I_x l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $x \in U_t$, c'est-à-dire tels que $\varphi_t(x)$ soit défini.

1. On appelle *trajectoire* d'un point x de Ω l'application, définie sur I_x et à valeurs dans Ω , $t \mapsto \varphi_t(x)$.
2. On appelle *orbite* d'un point x de Ω la partie $\{\varphi_t(x) ; t \in I_x\}$ de l'espace des phases Ω .
3. Un élément x de Ω est dit *point fixe*, ou *point d'équilibre* du système dynamique si son orbite est $\{x\}$.
4. L'orbite d'un point x de Ω est dite *périodique* si x n'est pas un point d'équilibre et s'il existe un élément T de I_x , vérifiant $T > 0$ et $\varphi_T(x) = x$. On dit alors que T est une *période* de l'orbite périodique considérée.

2.3. Proposition. — Les hypothèses et notations sont celles des définitions précédentes.

1. L'orbite d'un point x de Ω contient toujours le point x .
2. Si les orbites d'un point x et d'un point y de Ω ont une intersection non vide, elles sont confondues.
3. La propriété "deux points x et y de Ω appartiennent à la même orbite" est une relation d'équivalence sur Ω . La partition de l'espace des phases Ω en classes d'équivalence (pour cette relation) est appelée *portrait de phases* du système dynamique.
4. Soit x un point de Ω dont l'orbite est périodique de période $T > 0$. Alors $I_x = \mathbb{R}$, et l'orbite de x est aussi périodique de période kT , pour tout entier $k \geq 1$.

Preuve : Soit $x \in \Omega$. D'après 1.2 (ii), $0 \in I_x$ et $\varphi_0(x) = x$, ce qui prouve 1.

Si les orbites de x et de y se rencontrent en un point z , il existe $s_1 \in I_x$ et $s_2 \in I_y$ tels que $\varphi_{s_1}(x) = \varphi_{s_2}(y) = z$. D'après 1.2 (iv), $s_2 - s_1 \in I_y$ et nous avons

$$x = \varphi_{-s_1} \circ \varphi_{s_2}(y) = \varphi_{s_2 - s_1}(y).$$

Mais alors, toujours d'après 1.2 (iv), pour tout $t \in I_x$, $t + s_2 - s_1 \in I_y$ et $\varphi_t(x) = \varphi_{t+s_2-s_1}(y)$. Nous avons ainsi prouvé que l'orbite de x est contenue dans celle de y . L'inclusion inverse se démontre de même, et ainsi nous avons prouvé 2.

La propriété 3 est conséquence immédiate des propriétés 1 et 2.

Soit x un point de Ω dont l'orbite est périodique de période $T > 0$. On a $\varphi_T(x) = x$ donc, d'après 1.2 (iv), $\varphi_{2T}(x) = \varphi_T \circ \varphi_T(x) = x$, ce qui prouve que $2T \in I_x$ et que l'orbite de x est aussi périodique de période $2T$. On montre de même que $-T \in I_x$ et que $\varphi_{-T}(x) = x$. Une récurrence facile permet alors de montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $kT \in I_x$ et que $\varphi_{kT}(x) = x$. La propriété 4 en découle. \square

2.4. Définition. — Les hypothèses et notations étant celles des définitions 2.2, on suppose de plus que Ω est un espace topologique séparé. Soit x un point de Ω .

On suppose I_x non borné à droite. On appelle ensemble ω -limite (\dagger) de x et on note $L_\omega(x)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la trajectoire $t \mapsto \varphi_t(x)$ du point x , lorsque t tend vers $+\infty$.

De même, on suppose I_x non borné à gauche. On appelle ensemble α -limite (\dagger) de x et on note $L_\alpha(x)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la trajectoire $t \mapsto \varphi_t(x)$ du point x , lorsque t tend vers $-\infty$.

2.5. Proposition. — Les hypothèses et notations sont celles de la définition précédente. Soit x un point de Ω tel que I_x soit non borné à droite. On a alors les propriétés suivantes.

1. L'ensemble $L_\omega(x)$ est une partie fermée de Ω .
2. Soit y un point appartenant à l'orbite de x . Alors I_y est non borné à droite et $L_\omega(y) = L_\omega(x)$.
3. On suppose de plus les applications φ_t continues. Soit $z \in L_\omega(x)$. Alors l'orbite de z est contenue dans $L_\omega(x)$.

Preuve :

1. On rappelle que l'ensemble des valeurs d'adhérence de l'application $t \mapsto \varphi_t(x)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ est l'intersection des adhérences de toutes les parties de Ω de la forme $W_s = \{ \varphi_t(x) ; t \in I_x, t \geq s \}$. On peut écrire

$$L_\omega(x) = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \overline{W_s}.$$

Cela prouve que $L_\omega(x)$ est fermé, puisqu'il est intersection de fermés.

2. Soit y un point de l'orbite de x . On a donc $y = \varphi_\theta(x)$, pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. Appliquant 1.2 (iv), on voit que pour tout $t \in I_x$, on a $t - \theta \in I_y$ et

$$\varphi_t(x) = \varphi_{t-\theta}(\varphi_\theta(x)) = \varphi_{t-\theta}(y).$$

(\dagger) L'origine de ces termes est la suivante; la première lettre de l'alphabet grec, α , et la dernière lettre de cet alphabet, ω , sont employées pour désigner le début et la fin de toutes choses. "Je suis l'alpha et l'omega, dit le Seigneur Dieu qui est, qui était et qui vient, le tout-puissant. . . . Je suis l'alpha et l'omega, le premier et le dernier, le commencement et la fin". Apocalypse de Jean, I.8 et XXII.13.

Comme t peut prendre des valeurs arbitrairement grandes, on voit que I_y n'est pas borné à droite. De plus, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$W_s = \{ \varphi_t(x) ; t \in I_x, t \geq s \} = \{ \varphi_\tau(y) ; \tau \in I_y, \tau \geq s - \theta \}.$$

Il est facile d'en déduire que $L_\omega(y) = L_\omega(x)$.

3. Soit $z \in L_\omega(x)$ et z_1 un point de l'orbite de z . Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi_\theta(z) = z_1$. Soit V un voisinage de z_1 . Puisque φ_θ est continue et applique z sur z_1 , $(\varphi_\theta)^{-1}(V)$ est un voisinage de z . Puisque $z \in L_\omega(x)$, il existe des réels t arbitrairement grands tels que $\varphi_t(x) \in (\varphi_\theta)^{-1}(V)$. Mais alors $\varphi_\theta(\varphi_t(x))$, c'est-à-dire $\varphi_{t+\theta}(x)$, est élément de V . En posant $t + \theta = \tau$, on voit qu'il existe des réels τ arbitrairement grands tels que $\varphi_\tau(x)$ soit élément de V . Mais V étant un voisinage arbitraire de z_1 , cela prouve que z_1 est élément de $L_\omega(x)$. \square

2.6. Remarques

a) *Ensembles α -limites.* — On pourrait énoncer et prouver, pour les ensembles α -limites, une proposition analogue à 2.5. Nous laissons au lecteur le soin de le faire.

b) *Une convention graphique.* — Lorsqu'on représente le portrait de phases d'un système dynamique à temps continu sur une figure, il est d'usage de placer, sur les courbes représentant les orbites, des flèches pour indiquer le sens de parcours des orbites lorsque le temps t croît. Nous l'avons fait, par exemple, sur les figures I.3 et I.4 ci-après.

3. Générateur (infinitésimal) d'un système dynamique

Nous allons montrer qu'un système dynamique à temps discret est entièrement déterminé par la donnée d'une seule application, appelée *générateur* de ce système dynamique. Nous montrerons ensuite que moyennant certaines hypothèses supplémentaires de différentiabilité, un système dynamique à temps continu est déterminé par la donnée d'un champ de vecteurs, appelé *générateur infinitésimal* de ce système.

3.1. Définition. — Soit $\{ \varphi_n ; n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z} \}$ un système dynamique à temps discret sur un ensemble Ω . On appelle *générateur* de ce système l'application φ_1 , définie sur une partie U_1 de Ω , et à valeurs dans Ω .

3.2. Proposition. — Un système dynamique à temps discret $\{ \varphi_n ; n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z} \}$ sur un ensemble Ω est entièrement déterminé par son générateur. Plus précisément, en notant U_n la partie de Ω sur laquelle est définie l'application φ_n , on a

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est l'itérée n -ième de φ_1 :

$$U_{n+1} = (\varphi_1)^{-1}(U_n) = (\varphi_n)^{-1}(U_1), \quad \varphi_{n+1} = \varphi_1 \circ \varphi_n = \varphi_n \circ \varphi_1 = (\varphi_1)^{n+1} ;$$

(ii) si le système dynamique est paramétré par \mathbb{Z} , l'application φ_1 est une bijection de U_1 sur U_{-1} dont l'inverse est φ_{-1} ; de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_{-n} est l'itérée n -ième de φ_{-1} ; ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi_{-n} = (\varphi_n)^{-1} = (\varphi_{-1})^n.$$

Preuve : Nous avons $(\varphi_1)^{-1}(U_1) \subset U_2$ car un élément de $(\varphi_1)^{-1}(U_1)$ est un élément x de U_1 qui vérifie $\varphi_1(x) \in U_1$; la propriété 1.2 (iv) montre alors que $x \in U_2$. Réciproquement, nous avons aussi $U_2 \subset (\varphi_1)^{-1}(U_1)$, car si $x \in U_2$, alors $x \in U_1$ compte tenu de la propriété 1.2 (iii) et alors, d'après la propriété 1.2 (iv), $\varphi_1(x) \in U_1$ donc $x \in (\varphi_1)^{-1}(U_1)$. On voit alors que l'application φ_2 , définie sur U_2 , n'est autre que $(\varphi_1)^2 = \varphi_1 \circ \varphi_1$.

De proche en proche, on montre par le même raisonnement que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = (\varphi_1)^{-1}(U_n) = (\varphi_n)^{-1}(U_1)$ et que $\varphi_{n+1} = (\varphi_1)^{n+1} = \varphi_1 \circ \varphi_n = \varphi_n \circ \varphi_1$. Si le système dynamique à temps discret considéré est paramétré par \mathbb{Z} , on voit immédiatement que φ_1 est injective, que $U_{-1} = \varphi_1(U_1)$, que $\varphi_{-1} = (\varphi_1)^{-1}$ et, plus généralement, que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi_{-n} = (\varphi_n)^{-1} = (\varphi_{-1})^n$. \square

3.3. Définition. — Soit $\{\varphi_t ; t \in \mathbb{R}\}$ un système dynamique à temps continu sur un ensemble Ω , paramétré par l'ensemble \mathbb{R} de tous les réels. Nous faisons les deux hypothèses suivantes :

(H 1) l'ensemble Ω est un ouvert d'un espace affine réel de dimension finie ;

(H 2) pour tout point $x \in \Omega$, l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $x \in U_t$ contient un intervalle ouvert centré sur l'origine, et l'application $t \mapsto \varphi_t(x)$ est différentiable à l'origine.

Posons, pour tout $x \in \Omega$,

$$X(x) = \left. \frac{d\varphi_t(x)}{dt} \right|_{t=0},$$

le terme figurant dans le membre de droite désignant la dérivée à l'origine de l'application $t \mapsto \varphi_t(x)$, l'élément x de Ω étant considéré comme fixé. Le champ de vecteurs X ainsi défini sur Ω est appelé *générateur infinitésimal* du système dynamique.

3.4. Proposition. — Soit $\{\varphi_t ; t \in \mathbb{R}\}$ un système dynamique à temps continu vérifiant les hypothèses (H 1) et (H 2) de la définition précédente. Soit X son générateur infinitésimal. Pour tout point $x \in \Omega$, l'ensemble I_x des $t \in \mathbb{R}$ tels que $x \in U_t$ est un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant l'origine. L'application, définie sur I_x et à valeurs dans E ,

$$t \mapsto \psi(t) = \varphi_t(x)$$

est une solution de l'équation différentielle

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = X(\psi(t)) \quad (*)$$

qui vérifie la donnée de Cauchy

$$\psi(0) = x. \quad (**)$$

Preuve : Nous savons déjà, d'après la propriété 1.2 (ii), que $0 \in I_x$. Soit t_0 un élément de I_x , et t un réel compris entre 0 et t_0 .

Si $t_0 \geq 0$, on a $0 \leq t \leq t_0$; la propriété 1.2 (iii) montre alors que $U_{t_0} \subset U_t$; on a donc $x \in U_t$, c'est-à-dire $t \in I_x$.

Si $t_0 < 0$ on a $t_0 \leq t \leq 0$ et la propriété 1.3 (vi) montre qu'on a encore $t \in I_x$. Nous avons ainsi prouvé que I_x est un intervalle contenant 0.

L'hypothèse (H 2) montre que l'ensemble des $s \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi_{t_0}(x) \in U_s$ contient un intervalle ouvert $] -\varepsilon, \varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$. La propriété (iv) de la définition 1.2 montre alors que pour tout réel s vérifiant $-\varepsilon < s < \varepsilon$, le point x est élément de U_{t_0+s} . Autrement dit, $I_x \supset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, ce qui prouve que I_x est voisinage de t_0 , qui est un quelconque de ses éléments. Nous avons donc prouvé que I_x est ouvert. De plus, d'après la propriété 1.2 (iv), pour tout $s \in] -\varepsilon, \varepsilon[$, nous avons

$$\psi(t_0 + s) = \varphi_s(\psi(t_0)).$$

D'après l'hypothèse (H 2), l'application $s \mapsto \varphi_s(\psi(t_0))$ est différentiable à l'origine. Par suite, l'application $t \mapsto \psi(t)$ est différentiable au point t_0 , et sa dérivée en ce point est

$$\left. \frac{d\psi(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d\psi(t_0 + s)}{ds} \right|_{s=0} = X(\psi(t_0)).$$

Nous avons ainsi prouvé que $t \mapsto \psi(t)$ est une solution de l'équation différentielle (*). D'après la propriété 1.2 (ii), cette solution vérifie (**). \square

3.5. Commentaire. — La proposition 3.2 montre qu'un système dynamique à temps discret sur un ensemble Ω est constitué par les itérées d'une application φ_1 d'une partie U_1 de Ω dans Ω et aussi, si φ_1 est injective, par les itérées de $(\varphi_1)^{-1}$. Les systèmes dynamiques discrets que nous considérerons dans la suite seront généralement définis sur un ouvert Ω d'un espace affine réel de dimension finie, et leur générateur φ_1 sera une application différentiable, et même, le plus souvent, un difféomorphisme d'un ouvert U_1 de Ω sur un autre ouvert U_{-1} de Ω .

De même, la proposition 3.4 montre que sous certaines hypothèses (les hypothèses (H 1) et (H 2) de la définition 3.3) on peut, de manière très simple, associer à un système dynamique à temps continu son générateur infinitésimal, qui est un champ de vecteurs X . Les trajectoires du système dynamique sont des solutions de l'équation différentielle définie par ce champ de vecteurs. L'étude des systèmes dynamiques à temps continu apparaît donc comme étroitement liée à celle des équations différentielles. C'est pourquoi, dans le chapitre II, nous allons rappeler les notions sur les équations différentielles dont nous aurons besoin dans la suite.

4. Exemples de systèmes dynamiques

4.1. Un système à temps discret sur l'intervalle $[0, 1]$. — Soit g l'application de $[0, 1]$ dans lui-même

$$g(x) = x^2, \quad x \in [0, 1].$$

C'est un homéomorphisme, d'inverse

$$g^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad y \in [0, 1].$$

Soit $\{g^n; n \in \mathbb{Z}\}$ le système dynamique à temps discret de générateur g . Il est facile de montrer que ce système admet deux points d'équilibre, 0 et 1, et que pour tout point x vérifiant $0 < x < 1$, les ensembles ω -limite et α -limite de x sont, respectivement,

$$L_\omega(x) = \{0\} \quad \text{et} \quad L_\alpha(x) = \{1\}.$$

4.2. La transformation de Gauss. — Pour tout réel x , notons $[x]$ la partie entière de x , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x . Nous remarquons alors que $x - [x]$ est un élément de l'intervalle semi-ouvert $]0, 1[$.

On appelle *transformation de Gauss* l'application $\mathcal{G} : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow]0, 1[$,

$$\mathcal{G}(u) = \frac{1}{u} - \left[\frac{1}{u} \right].$$

Soit I l'ensemble des réels irrationnels appartenant à l'intervalle ouvert $]0, 1[$. Il est facile de vérifier que \mathcal{G} applique l'ensemble I dans lui-même. Le système dynamique ayant pour générateur l'application de Gauss \mathcal{G} apparaît naturellement dans l'étude du développement en fraction continuée d'un réel irrationnel.

4.3. Le système de Feigenbaum. — Soit \mathcal{F} l'application de l'intervalle $[-1, 1]$ dans lui-même

$$\mathcal{F}(x) = 1 - \mu x^2, \quad x \in [-1, 1],$$

où μ est un paramètre réel vérifiant $0 \leq \mu \leq 2$. On considère le système dynamique à temps discret $\{\mathcal{F}^n; n \in \mathbb{N}\}$. Son comportement dépend de la valeur du paramètre μ (voir [24]). Lorsque ce paramètre varie, on observe de brusques changements de comportement du système lorsque μ traverse certaines valeurs; ces modifications brusques de comportement sont appelées *bifurcations de Feigenbaum*. Le lecteur est invité à rechercher les points d'équilibre et les orbites périodiques du système. Il pourra aussi, s'il dispose d'un ordinateur, en faire une étude expérimentale.

4.4. La méthode de Newton. — Soit f une fonction différentiable, définie sur un ouvert I de \mathbb{R} , à valeurs réelles. Le lecteur connaît probablement déjà la *méthode de Newton* pour déterminer, par approximations successives, les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Cette méthode consiste à choisir un élément x_0 de I , à calculer $y_0 = f(x_0)$, puis, si $y_0 \neq 0$, à déterminer la tangente, au point de coordonnées (x_0, y_0) , au graphe de la fonction f , et à chercher l'abscisse x_1 du point où cette tangente coupe l'axe des abscisses. Si $x_1 \in I$, on recommence toute la construction en remplaçant x_0 par x_1 , et on obtient ainsi x_2 . On construit ainsi, de proche en proche, les termes d'une suite $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ (figure I.1). Lorsque cette suite converge vers un élément x de I , cet élément est solution de l'équation $f(x) = 0$.

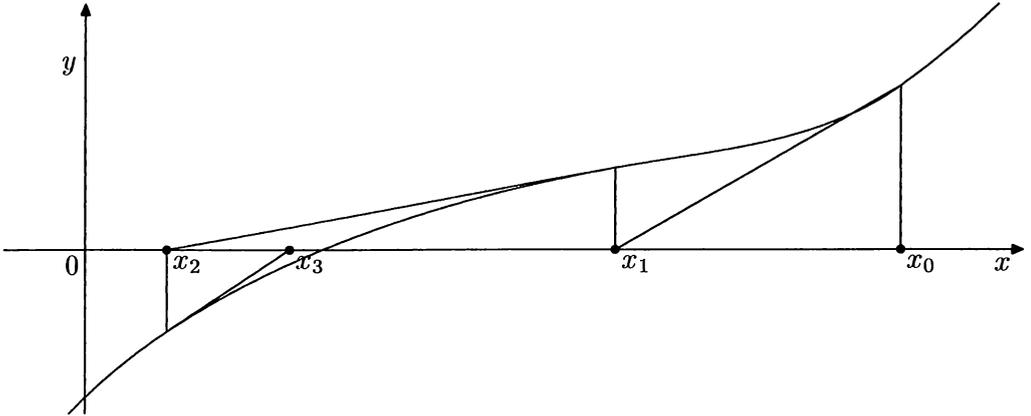


Figure I.1. La méthode de Newton

La méthode de Newton consiste en fait à construire l'orbite, issue du point x_0 , du système dynamique à temps discret $\{\mathcal{N}^n ; n \in \mathbb{N}\}$, engendré par l'application

$$x \mapsto \mathcal{N}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

définie sur l'ensemble U_1 des éléments x de I tels que $f'(x) \neq 0$.

Il est facile de voir que les points d'équilibre du système dynamique à temps discret de générateur \mathcal{N} sont les éléments x de I tels que $f(x) = 0$ et $f'(x) \neq 0$.

4.5. Le système de Hénon. — (Voir [32]). Considérons l'application \mathcal{H} de \mathbb{R}^2 dans lui-même

$$(x, y) \mapsto (X, Y), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X = x \cos \alpha - (y - x^2) \sin \alpha, \\ Y = x \sin \alpha + (y - x^2) \cos \alpha, \end{cases}$$

où α est un paramètre réel. Le système dynamique à temps discret $\{\mathcal{H}^n ; n \in \mathbb{N}\}$, appelé *système de Hénon*, a un comportement tout à fait remarquable. Le lecteur est invité à en rechercher les points d'équilibre, les orbites périodiques et, s'il dispose d'un ordinateur, à en faire une étude expérimentale.

4.6. Le pendule plan. — Donnons un exemple de système dynamique à temps continu : le mouvement d'un pendule plan (figure I.2).

Le pendule est constitué par un point matériel de masse m (†), attaché à une extrémité d'une

(†) La masse m n'apparaît pas dans les équations du mouvement en raison d'une propriété physique remarquable : l'égalité de la "masse inerte" et de la "masse pesante", découverte par Galilée. La recherche d'une explication de cette remarquable propriété a été une des motivations qui ont conduit Albert Einstein à découvrir la théorie de la Relativité générale.

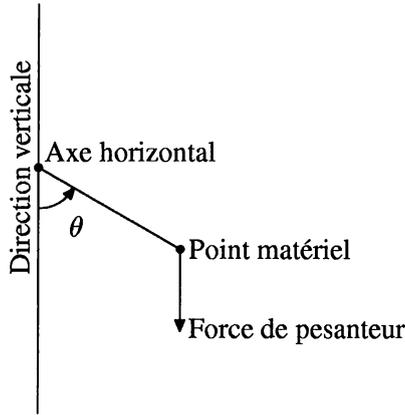


Figure I.2. Pendule plan

tige rectiligne rigide de longueur l et de masse négligeable. La tige peut tourner, autour de son autre extrémité, dans un plan vertical fixe. Le frottement est supposé négligeable. On appelle θ l'angle (orienté) que fait le pendule avec la verticale, cet angle étant 0 si le pendule est en position verticale avec le point matériel au dessous du point d'attache, et $\pm\pi$ si le pendule est en position verticale avec le point matériel au dessus du point d'attache.

Les équations du mouvement sont

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \end{cases}$$

Nous avons noté g l'accélération de la pesanteur. Cette équation différentielle est associée à un champ de vecteurs qui est le générateur infinitésimal d'un système dynamique à temps continu.

Apparemment, l'espace des phases du système est le plan \mathbb{R}^2 , avec pour coordonnées θ et ω . Mais en examinant les choses de plus près, nous voyons qu'en fait θ n'est pas un réel, mais un angle, c'est-à-dire un élément du cercle trigonométrique S^1 , isomorphe à $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. L'espace des phases est donc non pas \mathbb{R}^2 , mais le produit $S^1 \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire un cylindre. Cet exemple montre que l'étude de systèmes mécaniques, même relativement simples, conduit à considérer des systèmes dynamiques dont l'espace des phases n'est pas un ouvert d'un espace affine, mais plutôt une variété différentiable. Dans le cas présent, nous pouvons cependant étudier le système comme si l'espace des phases était \mathbb{R}^2 (on dit que \mathbb{R}^2 est le *revêtement universel* du cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$), à condition de ne pas oublier que θ n'est défini que modulo 2π ; nous devons, après l'étude, effectuer le quotient de \mathbb{R}^2 par la relation d'équivalence pour laquelle (θ_1, ω_1) est équivalent à (θ_2, ω_2) si $\omega_1 = \omega_2$ et $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les points d'équilibre sont les couples (θ, ω) pour lesquels $\frac{d\theta}{dt} = 0$ et $\frac{d\omega}{dt} = 0$. Nous voyons que sur l'espace des phases vrai, c'est-à-dire sur le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$, il existe deux points d'équilibre, un point C de coordonnées $\theta = 0$ modulo 2π , $\omega = 0$, et un point S de coordonnées $\theta = \pi$ modulo 2π , $\omega = 0$. Sur son revêtement universel \mathbb{R}^2 , chacun de ces points apparaît une infinité de fois; nous dirons que chaque point d'équilibre a une infinité de *représentants*; de sorte que nous avons pour points d'équilibre les représentants du point C , de coordonnées $\theta = 2k\pi$, $\omega = 0$ et les représentants du point S , de coordonnées

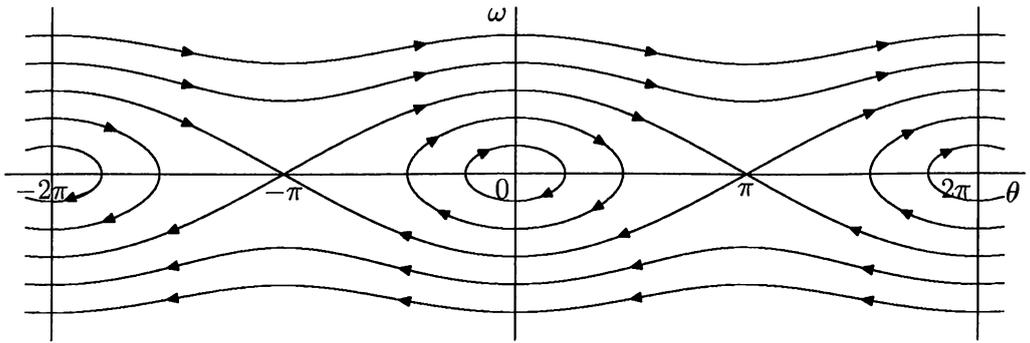


Figure I.3. Portrait de phases dans \mathbb{R}^2 du pendule plan.

$\theta = (2k + 1)\pi$, $\omega = 0$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Sur la figure I.3, qui représente le portrait de phases du système, apparaissent trois représentants du point d'équilibre C , les points $(\theta = -2\pi, \omega = 0)$, $(\theta = 0, \omega = 0)$ et $(\theta = 2\pi, \omega = 0)$; et deux représentants du point d'équilibre S , les points $(\theta = -\pi, \omega = 0)$ et $(\theta = \pi, \omega = 0)$.

Posons

$$H(\theta, \omega) = \frac{1}{2} ml^2 \omega^2 + mgl(1 - \cos \theta).$$

La fonction H a une signification physique importante : c'est l'énergie totale du pendule. Il est facile de vérifier que pour toute solution $t \mapsto (\theta(t), \omega(t))$ de l'équation différentielle du mouvement, $H(\theta(t), \omega(t))$ reste constant. On exprime ce fait en disant qu'en l'absence de frottement, le pendule est un système mécanique *conservatif* : chaque mouvement a lieu à énergie constante. On remarque que H admet un minimum relatif strict au point d'équilibre C ($\theta = 0$ modulo 2π , $\omega = 0$).

Les figures I.3 et I.4 sont deux représentations du portrait de phases du système.

Sur la figure I.3, l'espace des phases est le plan \mathbb{R}^2 (avec pour coordonnées θ et ω), revêtement universel de l'espace des phases vrai, le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$. Dans ce plan, nous avons tracé les courbes d'équation $H(\theta, \omega) = \text{constante}$, ce qui donne l'allure qualitative du portrait de phases.

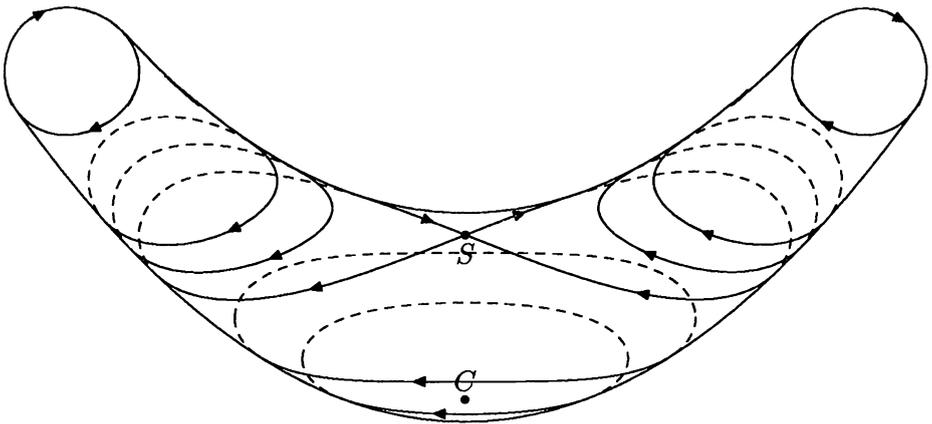


Figure I.4. Vue en perspective du portrait de phases du pendule plan.

La figure I.4 donne une vue en perspective du portrait de phases sur l'espace des phases vrai, le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$. Pour faire cette figure, nous avons plongé ce cylindre dans un

espace de dimension 3 (le lecteur pourra penser à l'espace physique usuel) en le courbant; la surface ainsi obtenue est donc difféomorphe à un cylindre, mais ses génératrices ne sont plus des lignes droites (ce sont des paraboles). Nous dirons que c'est une surface cylindrique. Cette courbure a été choisie de telle sorte que les lignes d'énergie fixée, d'équation $H(\theta, \omega) = \text{constante}$, soient les intersections de cette surface cylindrique avec des plans parallèles. La vue en perspective donnée sur la figure I.4 est une projection sur un plan de l'objet de l'espace à trois dimensions ainsi construit, la direction de projection étant choisie de manière telle que les projections des deux points d'équilibre C et S soient distinctes et bien visibles.

Nous allons classier les orbites du pendule plan selon leur énergie.

a) Il n'existe aucune orbite d'énergie strictement négative.

b) Il existe une orbite unique d'énergie nulle; elle se réduit à un point, le point d'équilibre C ($\theta = 0$ modulo 2π , $\omega = 0$).

c) Les orbites d'énergie h strictement comprise entre 0 et $2mgl$ sont toutes périodiques. Lors du mouvement sur une orbite de ce type, l'angle θ (en convenant de choisir sa détermination appartenant à l'intervalle $] -\pi, \pi[$) varie entre deux valeurs extrêmes opposées, $-\theta_M(h)$ et $\theta_M(h)$, avec

$$\theta_M(e) = \arccos \left(1 - \frac{h}{mgl} \right).$$

Le pendule oscille autour de sa position d'équilibre stable (qui correspond au point d'équilibre C).

d) Il existe exactement trois orbites distinctes d'énergie $2mgl$. L'une, réduite à un point, est le point d'équilibre S ($\theta = \pi$ modulo 2π , $\omega = 0$). Les deux autres sont des arcs de courbe partant du point d'équilibre S et aboutissant à ce même point, l'angle θ variant de manière monotone pendant le mouvement. L'un de ces arcs de courbe est situé sur le demi-cylindre $\omega > 0$, l'autre sur le demi-cylindre $\omega < 0$. Attention : ces orbites sont des arcs de courbe *ouverts*, adhérents au point d'équilibre S ; ce point n'en fait pas partie. Sur la figure I.3, ces orbites sont représentées par les deux arcs de courbe qui joignent les points ($\theta = -\pi$, $\omega = 0$) et ($\theta = \pi$, $\omega = 0$), situés, l'un dans le demi-plan $\omega > 0$, l'autre dans le demi-plan $\omega < 0$. Ces orbites sont dites *homoclines*, car chacune d'elles revient sur elle-même sous un certain angle non nul. Nous montrerons plus loin que lors des mouvements correspondant à ces orbites, le point d'équilibre S n'est atteint qu'asymptotiquement, lorsque le temps t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Dans un mouvement de ce type le pendule fait, en un temps infini, un seul tour, en partant (pour $t = -\infty$) de sa position d'équilibre instable (correspondant au point d'équilibre S) et en revenant à ce point (pour $t = +\infty$). Le mouvement a lieu dans le sens trigonométrique pour l'orbite homocline pour laquelle $\omega > 0$, et dans le sens inverse du sens trigonométrique pour l'orbite homocline pour laquelle $\omega < 0$.

e) Enfin les orbites d'énergie $h > 2mgl$ sont toutes périodiques, ω restant de signe constant sur chacune d'elles; lors des mouvements correspondants l'angle θ varie de manière monotone (croissante si $\omega > 0$ et décroissante si $\omega < 0$). Lors de ces mouvements, le pendule tourne dans son plan et fait, au cours du temps, un nombre illimité de tours, dans le sens trigonométrique si $\omega > 0$, dans le sens inverse du sens trigonométrique si $\omega < 0$.

4.7. Le fer à cheval de Smale. — C'est un système dynamique à temps discret, découvert et décrit pour la première fois par le grand mathématicien américain Stephen Smale [57]. Dans un plan euclidien \mathcal{E}^2 , on considère une partie compacte S réunion d'un pavé carré Δ et de deux demi-disques D_0 et D_1 , de diamètre égal au côté de Δ , accolés à deux côtés opposés de ce carré. Une application continue et injective f , définie sur un ouvert U de \mathcal{E}^2 , d'adhérence compacte contenant S , et à valeurs dans ce même ouvert U , applique S comme représenté sur la figure I.5 : le pavé Δ est étiré dans une direction (sur la figure, la direction verticale) et comprimé dans la direction perpendiculaire (sur la figure, la direction horizontale); les deux demi-disques sont comprimés; l'ensemble S est courbé en forme de fer à cheval, et placé de manière telle que les parties rectangulaires R_0 et R_1 de Δ (de sommets a, b, c, d et a', b', c', d' , respectivement) et représentées en gris sur la partie gauche de la figure I.5, soient appliquées, respectivement, sur les parties rectangulaire R^0 et R^1 de Δ (de sommets $f(a), f(b), f(c), f(d)$ et $f(a'), f(b'), f(c'), f(d')$, respectivement), et représentées en gris sur la partie droite de cette figure.

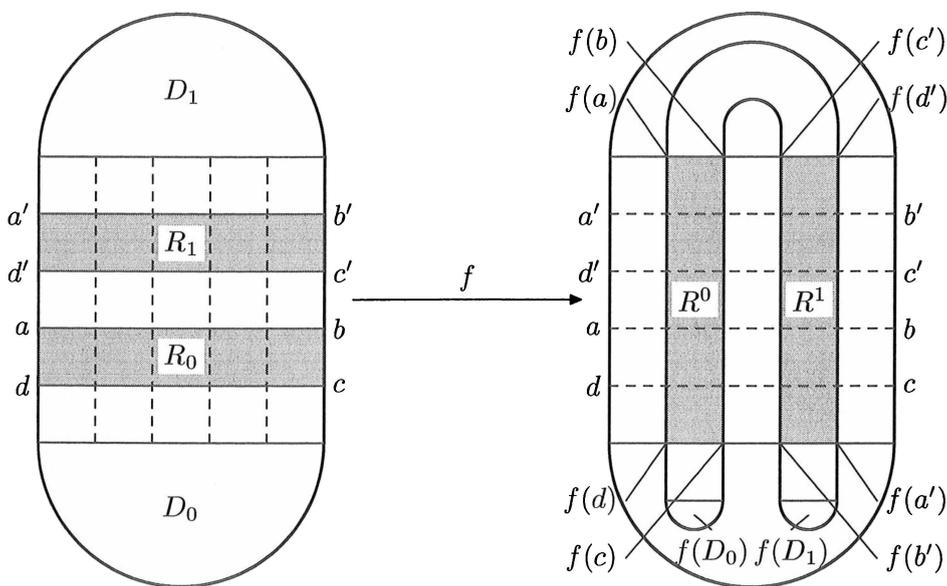


Figure I.5. L'application "fer à cheval" de S. Smale

On remarquera qu'outre l'étirement vertical et la contraction horizontale, l'application f fait subir une rotation d'un demi-tour au rectangle R_1 pour l'appliquer sur son image $f(R_1) = R^1$. On notera aussi, en observant la figure I.5, que R_0 et R_1 sont des rectangles dont le grand côté est horizontal, R^0 et R^1 des rectangles dont le grand côté est vertical.

On impose de plus à l'application f d'être telle que sa restriction à chacun des rectangles R_0 et R_1 soit une application affine de ce rectangle, respectivement, sur le rectangle R^0 et le rectangle R^1 . On lui impose aussi d'appliquer le complémentaire, dans S , du rectangle fermé $a'b'cd$, dans l'intérieur du demi-disque D_0 , et l'intérieur du rectangle $abc'd'$ dans l'intérieur du demi-disque D_1 . On lui impose enfin d'être telle que sa restriction au demi-disque fermé D_0 soit une application contractante de ce demi-disque dans l'intérieur de lui-même. D'après le théorème du point fixe VII.2.1, la restriction de f à D_0 possède un point fixe unique p , élément de l'intérieur de D_0 . Le système dynamique à temps discret considéré est engendré par l'application f . Nous avons, d'après la définition de f ,

$$f(R_0) = R^0, \quad f(R_1) = R^1, \quad f^{-1}(R^0) = R_0, \quad f^{-1}(R^1) = R_1. \quad (*)$$

Nous allons déterminer l'ensemble Λ des points x du pavé Δ tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f^n(x)$ soit élément de Δ . Posons :

$$\Lambda_+ = \{ x \in \Delta ; \forall n \in \mathbb{N} f^n(x) \in \Delta \},$$

$$\Lambda_- = \{ x \in \Delta ; \forall n \in \mathbb{N} f^{-n}(x) \text{ défini et } \in \Delta \}.$$

Nous avons alors $\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_-$. Nous allons prouver que

$$\Lambda_+ = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(R_0 \cup R_1), \quad \Lambda_- = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^n(R^0 \cup R^1).$$

En effet, un point $x \in \Delta$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) \in R_0 \cup R_1$ est élément de Λ_+ , car $R_0 \cup R_1 \subset \Delta$. Réciproquement, un point $x \in \Delta$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $f^n(x)$ n'est pas élément de $R_0 \cup R_1$ ne peut pas être élément de Λ_+ , car $f^{n+1}(x)$ est élément soit de l'intérieur de D_0 , soit de l'intérieur de D_1 , donc n'est pas élément de Δ .

De même, un point $x \in \Delta$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in f^n(R^0 \cup R^1)$ appartient à Λ_- , car $f^{-n}(x)$ est défini et élément de $R^0 \cup R^1$, donc de Δ . Réciproquement, un point $x \in \Delta$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $x \notin f^n(R^0 \cup R^1)$ ne peut pas être élément de Λ_- , car alors soit $f^{-n}(x)$ n'est pas défini, soit $f^{-n}(x)$ est défini mais n'appartient pas à $R^0 \cup R^1$; dans ce dernier cas, $f^{-(n+1)}(x)$ soit n'est pas défini, soit est défini mais n'est pas élément de Δ .

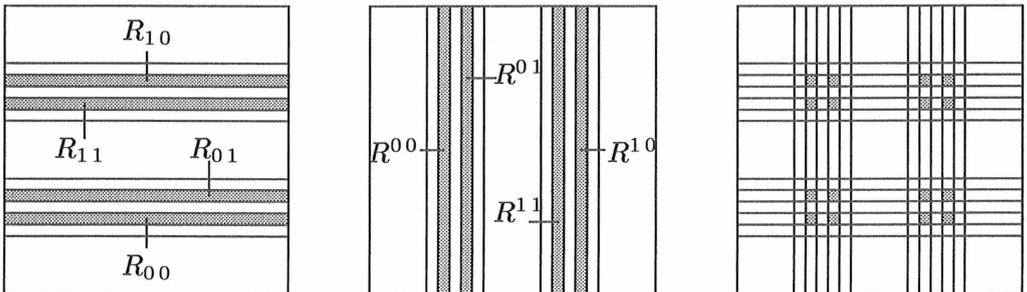
Soient (i_0, i_1, \dots, i_k) et (j_0, j_1, \dots, j_l) deux suites finies dont les termes sont égaux à 0 ou 1. Posons

$$R_{i_0 i_1 \dots i_k} = R_{i_0} \cap f^{-1}(R_{i_1}) \cap \dots \cap f^{-k}(R_{i_k}),$$

$$R^{j_0 j_1 \dots j_l} = R^{j_0} \cap f(R^{j_1}) \cap \dots \cap f^l(R^{j_l}),$$

$$R_{i_0 i_1 \dots i_k}^{j_0 j_1 \dots j_l} = R_{i_0 i_1 \dots i_k} \cap R^{j_0 j_1 \dots j_l}.$$

Les $R_{i_0 i_1 \dots i_k}$ sont des rectangles, dont le grand côté est horizontal et égal au côté du pavé Δ , et dont le petit côté est vertical et d'autant plus petit que k est plus élevé. De même, les $R^{j_0 j_1 \dots j_l}$ sont des rectangles dont le grand côté est vertical et égal au côté du pavé Δ , et dont le petit côté est horizontal et d'autant plus petit que l est plus élevé. Les R_i et R^j ont déjà été représentés sur la figure I.5. Sur la figure I.6 nous avons représenté, à titre d'exemple, les $R_{i_0 i_1}$, les $R^{j_0 j_1}$ et leurs intersections. Remarquons que si les suites finies ayant le même nombre de termes (i_0, i_1, \dots, i_k) et $(i'_0, i'_1, \dots, i'_k)$, dont les termes sont égaux à 0 ou 1, sont distinctes, $R_{i_0 i_1 \dots i_k}$ et $R_{i'_0 i'_1 \dots i'_k}$ sont disjoints. De même, si les suites finies ayant le même nombre de termes (j_0, j_1, \dots, j_k) et $(j'_0, j'_1, \dots, j'_k)$, dont les termes sont égaux à 0 ou 1, sont distinctes, $R^{j_0 j_1 \dots j_k}$ et $R^{j'_0 j'_1 \dots j'_k}$ sont disjoints.



(a) Les R_{i_j}

(b) Les R^{k_l}

(c) Les $R_{i_j}^{k_l} = R_{i_j} \cap R^{k_l}$

Figure I.6. Les rectangles R_{i_j} et R^{k_l} et leurs intersections

D'autre part, nous avons toujours

$$R_{i_0 i_1 \dots i_k i_{k+1}}^{j_0 j_1 \dots j_l} \subset R_{i_0 i_1 \dots i_k}^{j_0 j_1 \dots j_l}, \quad R_{i_0 i_1 \dots i_k}^{j_0 j_1 \dots j_l j_{l+1}} \subset R_{i_0 i_1 \dots i_k}^{j_0 j_1 \dots j_l}.$$

En utilisant les formules (*), nous voyons également que

$$f(R_{i_0 i_1 \dots i_k}^{j_0 j_1 \dots j_l}) = R_{i_1 \dots i_k}^{j_0 j_1 \dots j_l}, \quad f^{-1}(R_{i_0 i_1 \dots i_k}^{j_0 j_1 \dots j_l}) = R_{j_0 i_0 i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}.$$

En examinant ces formules le lecteur remarquera que f et f^{-1} agissent sur les $R_{i_0 i_1 \dots i_k}^{j_0 j_1 \dots j_l}$ en faisant passer le premier indice d'une ligne (celui situé le plus à gauche dans cette ligne), respectivement, de la ligne du bas à la ligne du haut, et de la ligne du haut à la ligne du bas, cet indice étant toujours placé en première position.

D'après les expressions de Λ_+ , Λ_- et Λ , nous voyons qu'un point $x \in \Delta$ est élément de Λ si et seulement s'il existe deux suites infinies $(i_0, i_1, \dots, i_n, \dots)$ et $(j_0, j_1, \dots, j_m, \dots)$, dont les termes sont égaux à 0 ou 1, telles que pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$, le point $x \in \Delta$ qu'elles déterminent existe (car l'intersection de la suite décroissante de compacts non vides $(R_{i_0 i_1 \dots i_n}^{j_0 j_1 \dots j_n}, n \in \mathbb{N})$ est non vide) et est unique (en raison du fait que les $R_{i_0 i_1 \dots i_n}^{j_0 j_1 \dots j_n}$ sont des pavés carrés dont le côté tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$). Nous avons donc prouvé qu'il existe une application bijective de l'ensemble Λ sur l'ensemble des couples ordonnés de suites infinies $((i_0, i_1, \dots, i_n, \dots), (j_0, j_1, \dots, j_m, \dots))$ dont les termes sont égaux à 0 ou à 1. Mais un tel couple ordonné de suites infinies peut être identifié à une suite infinie bilatère marquée

$$(\dots, j_m, \dots, j_1, j_0 ; i_0, i_1, \dots, i_n, \dots).$$

Une telle suite bilatère est dite *marquée* pour indiquer qu'on a placé une marque (représentée par un point-virgule) entre deux termes consécutifs (ici les termes j_0 et i_0). Cette marque sert à indiquer que la première suite unilatère est formée par les termes placés à droite du point-virgule, et la seconde par les termes placés à gauche de ce signe.

Cette identification est commode car elle permet de donner à l'application f la forme très simple suivante :

$$f : (\dots, j_1, j_0 ; i_0, i_1, \dots) \mapsto (\dots, j_1, j_0, i_0 ; i_1, i_2, \dots).$$

L'application f a donc pour effet de déplacer le point-virgule d'un cran vers la droite. Cette application, définie sur l'ensemble des suites bilatères marquées, est appelée *shift de Bernoulli*.

La topologie de Λ (induite par celle du plan \mathcal{E}^2) est celle d'un *espace de Cantor* (voir par exemple [23] chapitre I paragraphe 9).

Un point x de l'ouvert U sur lequel l'application f est définie est dit *non errant* (définition due à D. Birkhoff [9]) si pour tout voisinage V de x et tout entier $N > 0$, il existe un entier $n_1 \geq N$ et un entier $n_2 \leq -N$ tels que $f^{n_1}(V) \cap V \neq \emptyset$ et $f^{n_2}(V) \cap V \neq \emptyset$. L'ensemble des points non errants du système dynamique à temps discret engendré par f est noté $\Omega(f)$. On montre aisément (voir par exemple [37] chapitre 7) que $\Omega(f) \cap \Delta = \Lambda$. L'ensemble Λ a de remarquables propriétés. En particulier, il contient une infinité d'orbites périodiques, de périodes aussi grandes qu'on le veut (ce sont les orbites des suites bilatères périodiques). Il contient également une orbite partout dense dans Λ . Le lecteur trouvera dans les ouvrages [20, 29, 37, 50] une étude plus complète du fer à cheval de Smale et de l'ensemble Λ .

5. Exercices

Exercice I.1. Les propriétés énoncées dans la proposition 2.3 restent-elles applicables aux systèmes dynamiques paramétrés par \mathbb{R}^+ ou par \mathbb{N} ? Si elles ne le sont pas, donner des exemples de systèmes pour lesquels elles ne sont pas vérifiées.

Exercice I.2. Dans les hypothèses de la définition 2.4, quels sont les ensembles limites d'un point d'équilibre? d'un point dont l'orbite est périodique?

6. Solutions

Solution I.1. Pour un système dynamique sur un ensemble Ω paramétré par \mathbb{R}^+ ou par \mathbb{N} , la propriété 1 de la proposition 2.3 reste vraie : l'orbite d'un point de Ω contient toujours ce point. Par contre, la propriété 2 de cette proposition ne subsiste pas. Considérons par exemple le système dynamique à temps discret, sur l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$, engendré par l'application

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0.$$

L'orbite de 0 est $\{0\}$, et l'orbite de 1 est $\{0, 1\}$. ces deux orbites ont en commun le point 0 et ne sont pas confondues. La propriété 3 de la proposition 2.3 ne subsiste pas non plus, car pour une relation d'équivalence, deux classes d'équivalence sont soit disjointes, soit confondues. La propriété 4 de la proposition 2.3 subsiste, moyennant une légère adaptation : si x est un point de Ω dont l'orbite est périodique de période $T > 0$, l'ensemble I_x est l'ensemble des temps tout entier, c'est-à-dire \mathbb{R}^+ ou \mathbb{N} , selon que le système dynamique considéré est paramétré par \mathbb{R}^+ ou par \mathbb{N} , et l'orbite de x est aussi périodique de période kT , pour tout entier $k \geq 1$.

Solution I.2. Dans les hypothèses de 2.4, l'ensemble α -limite et l'ensemble ω -limite d'un point d'équilibre x sont tous deux le singleton $\{x\}$. De même, l'ensemble α -limite et l'ensemble ω -limite d'un point dont l'orbite γ est périodique sont tous deux égaux à γ .

Rappels sur les équations différentielles

Nous indiquons dans ce chapitre les notions sur les équations différentielles dont nous aurons besoin dans la suite. Pour la plupart, ces notions sont enseignées en licence de mathématiques; elles sont rappelées ici sans démonstration. Le lecteur pourra trouver ces démonstrations dans tout cours de calcul différentiel, comme par exemple [18].

Certains résultats, malheureusement pas toujours enseignés en licence malgré leur importance, sont présentés avec leur démonstration. Il en est ainsi par exemple du théorème des bouts (3.3), de la proposition relative à l'image directe d'un champ de vecteurs (5.1) et du théorème de redressement local (5.2).

Pour les équations différentielles satisfaisant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, nous introduirons (paragraphe 4) les concepts de *flot* et (pour les équations autonomes) de *flot réduit*. Nous verrons que les applications partielles construites avec le flot (ou le flot réduit) constituent un système dynamique à temps continu, naturellement associé à l'équation différentielle. Dans le cas où l'équation est autonome, le champ de vecteurs qui lui est associé n'est autre que le générateur infinitésimal de ce système dynamique.

1. Équations différentielles sous forme canonique

1.1. Notations et conventions. — Dans ce paragraphe \mathcal{E} est un espace affine réel, dont l'espace vectoriel associé E est muni d'une norme. Nous devons supposer parfois (par exemple dans l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz 2.8), de plus, que l'espace normé E est complet, c'est-à-dire est un espace de Banach. Rappelons que cette condition est automatiquement satisfaite lorsque E est de dimension finie. Rappelons aussi que toute application linéaire de \mathbb{R} dans E est automatiquement continue et que l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}, E)$ de toutes les applications linéaires de \mathbb{R} dans E est un espace vectoriel normé qui s'identifie à E , grâce à l'isomorphisme conservant la norme qui, à un élément φ de $\mathcal{L}(\mathbb{R}, E)$, associe l'élément $\varphi(1)$ de E . L'isomorphisme réciproque associe, à chaque élément x de E , l'application linéaire $t \mapsto tx$ de \mathbb{R} dans E . Nous utiliserons systématiquement cette identification. De même, nous identifierons les espaces $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}, E))$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}, E)))$, etc. . . , à E . Une application φ d'un intervalle ouvert I de \mathbb{R} dans \mathcal{E} étant donnée, nous noterons $\varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(n)}$ ses dérivées première, seconde, . . . , d'ordre n , lorsqu'elles existent. Nous noterons aussi, occasionnellement, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, . . . , $\frac{d^n\varphi}{dt^n}$ ces dérivées, lorsque ces notations paraîtront plus commodes. Rappelons que lorsque l'application φ est n fois différentiable sur I , ses dérivées $\varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(n)}$ sont des applications de I , respectivement, dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, E)$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}, E))$, . . . , $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\dots E) \dots))$. Mais compte tenu des identifications mentionnées ci-dessus, nous pouvons considérer toutes les dérivées $\varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(n)}$ de l'application φ comme étant à valeurs dans E .

1.2. Définitions. — Une équation différentielle du premier ordre, sous forme canonique, dans l'espace affine \mathcal{E} d'espace vectoriel associé E , est une relation de la forme

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \quad (1)$$

où f est une application d'une partie $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ dans E . Une solution (ou courbe intégrale) de cette équation différentielle est une application différentiable φ d'un intervalle ouvert I de \mathbb{R} dans \mathcal{E} telle que, pour tout $t \in I$, $(t, \varphi(t))$ soit élément de $\tilde{\Omega}$ et que $(t, \varphi(t), \varphi'(t))$ vérifie la relation (1).

1.3. Définitions. — Une équation différentielle autonome du premier ordre, sous forme canonique, dans l'espace affine \mathcal{E} d'espace vectoriel associé E , est une relation de la forme

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)), \quad (2)$$

où X est un champ de vecteurs sur une partie Ω de \mathcal{E} , c'est-à-dire une application de Ω dans E . Une solution (ou courbe intégrale) de cette équation différentielle est une application différentiable φ d'un intervalle ouvert I de \mathbb{R} dans \mathcal{E} telle que, pour tout $t \in I$, $\varphi(t)$ soit élément de Ω et que $(\varphi(t), \varphi'(t))$ vérifie la relation (2). Les solutions (ou courbes intégrales) de l'équation différentielle autonome (2) sont aussi appelées courbes intégrales du champ de vecteurs X .

En d'autres termes, une équation différentielle du premier ordre, sous forme canonique, de la forme (1), est autonome si la partie $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ sur laquelle l'application f est définie est de la forme $\mathbb{R} \times \Omega$, où Ω est une partie de \mathcal{E} , et si, pour chaque $x \in \Omega$, la fonction f est constante sur la partie $\mathbb{R} \times \{x\}$ de $\mathbb{R} \times \Omega$. On dit alors que f ne dépend pas de sa première variable $t \in \mathbb{R}$.

La proposition suivante indique une importante propriété de l'ensemble des solutions d'une équation autonome.

1.4. Proposition. — Soit $\varphi : I \rightarrow E$ une solution de l'équation différentielle autonome (2) et soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Désignons par $T_{t_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la translation

$$t \mapsto T_{t_0}(t) = t - t_0.$$

Alors l'application $\varphi \circ T_{t_0}$ du translaté $I + t_0$ de l'intervalle I dans E est aussi solution de l'équation autonome (2).

Preuve : Voir par exemple [18], chapitre IV, paragraphe 2.2. □

2. Le théorème d'existence et d'unicité

Soit \mathcal{E} un espace affine réel dont l'espace vectoriel associé E est muni d'une norme, et f une application d'une partie $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ dans E . On considère l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)). \quad (1)$$

2.1. Définition. — Une solution $\varphi : I \rightarrow \mathcal{E}$ de l'équation différentielle (1) est dite maximale si toute solution de (1) dont l'intervalle de définition contient I et dont la restriction à I coïncide avec φ est égale à φ .

2.2. Définitions. — Une donnée de Cauchy pour l'équation différentielle (1) est un point (t_0, x_0) de la partie $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ sur laquelle est définie cette équation. On dit qu'une solution $\varphi : I \rightarrow \mathcal{E}$ de l'équation (1) satisfait la donnée de Cauchy (t_0, x_0) si $t_0 \in I$ et $\varphi(t_0) = x_0$.

On appelle problème de Cauchy la recherche d'une solution de l'équation (1) satisfaisant une donnée de Cauchy spécifiée (t_0, x_0) .

2.3. Définition. — Soit $(t_0, x_0) \in \tilde{\Omega}$. On appelle *tonneau de sécurité ouvert* (resp., *fermé*) de centre (t_0, x_0) une partie de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ de la forme $I_0 \times B_0$, où I_0 est un intervalle ouvert (resp., fermé) de centre t_0 , de longueur $2l > 0$, et B_0 une boule ouverte (resp., fermée) de centre x_0 , de rayon $r > 0$, telle que

$$I_0 \times B_0 \subset \tilde{\Omega} \quad \text{et} \quad \sup_{(t,x) \in I_0 \times B_0} \|f(t,x)\| < \frac{r}{l}.$$

2.4. Remarques

a) Cas où f est localement bornée. — Si f est localement bornée sur $\tilde{\Omega}$, et en particulier si f est continue sur $\tilde{\Omega}$, tout point intérieur à $\tilde{\Omega}$ est centre d'un tonneau de sécurité. Soit en effet (t_0, x_0) un point intérieur à $\tilde{\Omega}$. Puisque f est localement bornée, il existe un voisinage W de (t_0, x_0) dans $\tilde{\Omega}$ sur lequel f est bornée; il existe donc un réel $M > 0$ tel que $\sup_{(t,x) \in W} \|f(t,x)\| < M$. Puisque (t_0, x_0) est intérieur à $\tilde{\Omega}$, le voisinage W de (t_0, x_0) dans $\tilde{\Omega}$ est aussi voisinage de (t_0, x_0) dans $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$. L'ensemble des parties de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ de la forme $[t_0 - l, t_0 + l] \times B_F(x_0, lM)$, avec $l > 0$, est un système fondamental de voisinages de (t_0, x_0) dans $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ (nous avons noté $B_F(x_0, lM)$ la boule fermée de \mathcal{E} , de centre x_0 et de rayon lM). Pour $l > 0$ assez petit, nous avons donc $[t_0 - l, t_0 + l] \times B_F(x_0, lM) \subset W$, et nous voyons que $[t_0 - l, t_0 + l] \times B_F(x_0, lM)$ est un tonneau de sécurité fermé centré sur le point (t_0, x_0) . Bien entendu, $]t_0 - l, t_0 + l[\times B(x_0, lM)$, où $B(x_0, lM)$ désigne la boule ouverte de \mathcal{E} de centre x_0 et de rayon lM , est un tonneau de sécurité ouvert de centre (t_0, x_0) .

b) Homothétique d'un tonneau de sécurité. — Soit $I_0 \times B_0$ un tonneau de sécurité (par exemple fermé) de centre (t_0, x_0) . Notons $I_0 = [t_0 - l, t_0 + l]$, $B_0 = B_F(x_0, r)$, avec $l > 0$, $r > 0$. Tout point (t_1, x_1) de Ω intérieur à $I_0 \times B_0$, c'est-à-dire vérifiant $|t_1 - t_0| < l$ et $\|x_1 - x_0\| < r$, est aussi centre d'un tonneau de sécurité $I_1 \times B_1$. Il suffit de prendre $I_1 = [t_1 - l_1, t_1 + l_1]$, $B_1 = B_F(x_1, r_1)$, en choisissant l_1 et r_1 de manière telle qu'ils vérifient

$$\frac{r_1}{l_1} = \frac{r}{l}, \quad 0 < l_1 \leq l - |t_1 - t_0|, \quad 0 < r_1 \leq r - \|x_1 - x_0\|.$$

Ces conditions impliquent en effet $I_1 \times B_1 \subset I_0 \times B_0 \subset \Omega$, donc

$$\sup_{(t,x) \in I_1 \times B_1} \|f(t,x)\| \leq \sup_{(t,x) \in I_0 \times B_0} \|f(t,x)\| < \frac{r}{l} = \frac{r_1}{l_1}.$$

Cette remarque est souvent utile pour l'étude de l'existence des solutions d'une équation différentielle.

c) Intérêt des tonneaux de sécurité. — Soit $\varphi : I \rightarrow \mathcal{E}$ une solution de l'équation différentielle (1) satisfaisant la donnée de Cauchy (t_0, x_0) . L'existence d'un tonneau de sécurité $I_0 \times B_0$ de centre $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{E}$ permet de montrer que le graphe de la restriction de φ à $I \cap I_0$ est contenu dans ce tonneau de sécurité. C'est ce qui résulte du lemme suivant, et c'est là le principal intérêt de la notion de tonneau de sécurité.

2.5. Lemme. — Soit $\varphi : I \rightarrow \mathcal{E}$ une solution de l'équation différentielle (1) satisfaisant la donnée de Cauchy (t_0, x_0) . S'il existe un tonneau de sécurité (par exemple ouvert) $I_0 \times B_0$ de centre (t_0, x_0) , la solution φ vérifie, pour tout $t \in I \cap I_0$,

$$\|\varphi(t) - \varphi(t_0)\| < r,$$

où $r > 0$ est le rayon de la boule B_0 . Cela exprime que le graphe de la restriction de φ à $I \cap I_0$ est contenu dans $I_0 \times B_0$.

Preuve : Soit $2l > 0$ la longueur de l'intervalle I_0 . D'après la définition d'un tonneau de sécurité, nous avons

$$\sup_{(t,x) \in I_0 \times B_0} \|f(t,x)\| = M < \frac{r}{l}.$$

Supposons qu'il existe $t_1 \in I \cap I_0$ tel que $\|\varphi(t_1) - \varphi(t_0)\| \geq r$. Nécessairement, $t_1 \neq t_0$; supposons par exemple $t_1 > t_0$. Posons

$$t_M = \sup \{ t \in I \cap I_0 ; t \geq t_0, \forall \theta \in [t_0, t], \|\varphi(\theta) - \varphi(t_0)\| < r \}.$$

Le réel t_M existe, car c'est la borne supérieure d'une partie de \mathbb{R} non vide (elle contient t_0) et majorée par t_1 . Il appartient à l'intervalle $[t_0, t_1]$, donc à $I \cap I_0$. Puisque φ est continue, nous avons

$$\|\varphi(t_M) - \varphi(t_0)\| = r. \quad (*)$$

D'autre part, d'après la définition même de t_M , pour tout $t \in [t_0, t_M[$, $(t, \varphi(t))$ est élément de $I_0 \times B_0$, donc

$$\|\varphi'(t)\| = \|f(t, \varphi(t))\| \leq M < \frac{r}{l}.$$

Mais alors, d'après le théorème des accroissements finis,

$$\|\varphi(t_M) - \varphi(t_0)\| \leq M|t_M - t_0| \leq Ml < r,$$

ce qui contredit (*). □

2.6. Définitions. — Soient E et F deux espaces vectoriels normés, ou deux espaces affines dont les espaces vectoriels associés sont normés.

1. Une application f , définie sur une partie Ω de E et à valeurs dans F , est dite *lipschitzienne* s'il existe un réel $k \geq 0$ tel que, pour tous x_1 et $x_2 \in \Omega$,

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq k\|x_2 - x_1\|.$$

Le réel k est appelé *rapport* de l'application f . On dit alors aussi que f est *k-lipschitzienne* pour dire qu'elle est lipschitzienne de rapport k .

2. Dans les mêmes hypothèses, on dit que l'application f est *localement lipschitzienne* si tout point x de Ω possède un voisinage (dans Ω) tel que la restriction de f à ce voisinage soit lipschitzienne, son rapport pouvant dépendre du point x .

3. Soit A un ensemble, et g une application définie sur une partie $\tilde{\Omega}$ de $A \times E$, à valeurs dans F . On dit que f est *lipschitzienne relativement à sa seconde variable* $x \in E$ s'il existe un réel $k \geq 0$ tel que, pour tout $a \in A$, tous x_1 et $x_2 \in E$ tels que (a, x_1) et (a, x_2) soient éléments de $\tilde{\Omega}$,

$$\|g(a, x_2) - g(a, x_1)\| \leq k\|x_2 - x_1\|.$$

4. On suppose de plus l'ensemble A muni d'une topologie. L'application g est dite *localement lipschitzienne relativement à sa seconde variable* $x \in E$ si tout point $(a, x) \in \tilde{\Omega}$ possède un voisinage $W \subset A \times E$ tel que la restriction de f à $\tilde{\Omega} \cap W$ soit lipschitzienne relativement à sa seconde variable (son rapport pouvant dépendre du point $(a, x) \in \tilde{\Omega}$ considéré).

2.7. Exemple important. — Soit \mathcal{E} un espace affine dont l'espace vectoriel associé E est normé et f une application définie sur un ouvert $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$, à valeurs dans un autre espace vectoriel normé F . Si f est différentiable de classe C^p , avec $p \geq 1$, elle est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable (et même par rapport à l'ensemble $(t, x) \in \tilde{\Omega}$ des deux variables dont elle dépend). Cela résulte en effet aisément de l'inégalité des accroissements finis.

2.8. Théorème de Cauchy-Lipschitz. — Soit \mathcal{E} un espace affine dont l'espace vectoriel associé E est un espace de Banach réel, et $f : \tilde{\Omega} \rightarrow E$ une application d'une partie $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ dans E . On considère l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)). \quad (1)$$

Soit $(t_0, x_0) \in \tilde{\Omega}$ une donnée de Cauchy, qu'on suppose centre d'un tonneau de sécurité fermé $I_0 \times B_0$ contenu dans $\tilde{\Omega}$ (avec $I_0 = [t_0 - l, t_0 + l]$, $l > 0$, $B_0 = B_F(x_0, r)$, boule fermée de centre x_0 et de rayon $r > 0$). On suppose aussi la restriction de f à $I_0 \times B_0$ continue, et lipschitzienne relativement à sa seconde variable. Il existe alors une solution de l'équation différentielle (1) satisfaisant la donnée de Cauchy (t_0, x_0) , définie sur l'intervalle ouvert $]t_0 - l, t_0 + l[$. Cette solution est unique, au sens suivant : toute autre solution de l'équation différentielle (1) satisfaisant la même donnée de Cauchy (t_0, x_0) coïncide avec elle sur l'intersection de son intervalle de définition avec l'intervalle $]t_0 - l, t_0 + l[$.

Preuve : Voir par exemple [18], chapitre V, paragraphe 2.7. □

2.9. Théorème d'existence et d'unicité globales. — Soit \mathcal{E} un espace affine dont l'espace vectoriel associé E est un espace de Banach réel, et $f : \tilde{\Omega} \rightarrow E$ une application d'un ouvert $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ dans E . On suppose f continue sur $\tilde{\Omega}$ et localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. On considère l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)). \quad (1)$$

Pour toute donnée de Cauchy $(t_0, x_0) \in \tilde{\Omega}$ il existe une solution maximale unique de l'équation différentielle (1) satisfaisant cette donnée de Cauchy.

Preuve : Voir par exemple [18], chapitre V, paragraphe 2.10. □

3. Bouts d'une solution maximale

Nous considérons dans ce paragraphe l'équation différentielle, dans l'espace affine \mathcal{E} dont l'espace vectoriel associé E est normé,

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \quad (1)$$

où f est une application d'une partie $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ dans E . Les hypothèses sur E et f seront précisées en temps utile.

3.1. Définition. — Soit φ une solution maximale de l'équation différentielle (1), $]a, b[$ son intervalle de définition (a pouvant être fini ou égal à $-\infty$, et b fini ou égal à $+\infty$). On appelle *bout droit* (resp., *bout gauche*) de cette solution maximale l'ensemble des valeurs d'adhérence, lorsque $t \rightarrow b$ (resp., lorsque $t \rightarrow a$), de l'application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R} \times \mathcal{E} : t \mapsto (t, \varphi(t))$.

3.2. Commentaires

a) Projection des bouts sur le facteur \mathbb{R} . — Il importe de remarquer que le bout droit (resp., gauche) de la solution φ est une partie de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$, qui peut éventuellement être vide. Si cette partie est non vide, sa projection sur le facteur \mathbb{R} est nécessairement le singleton $\{b\}$ (resp., le singleton $\{a\}$); en effet, b (resp., a) est la limite, donc l'unique valeur d'adhérence, de l'injection canonique de $]a, b[$ dans \mathbb{R} , $t \mapsto t$, lorsque $t \rightarrow b$ (resp., lorsque $t \rightarrow a$).

Nous voyons donc que si $b = +\infty$ (resp., si $a = -\infty$), le bout droit (resp., gauche) de la solution φ est vide.

b) Ensembles limites. — Supposons l'intervalle de définition de la solution maximale φ non borné à droite (resp., à gauche), c'est-à-dire de la forme $]a, +\infty[$ (resp., de la forme $] - \infty, b[$). Le bout droit (resp., gauche) de la solution φ est alors vide. Afin d'étudier le comportement de $\varphi(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ (resp., lorsque $t \rightarrow -\infty$), il est utile d'introduire la notion d'ensemble ω -limite (resp., d'ensemble α -limite) de φ : c'est, par définition, l'ensemble des valeurs d'adhérence de l'application $t \mapsto \varphi(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ (resp., lorsque $t \rightarrow -\infty$). Les ensembles ω -limite et α -limite de φ sont des parties de \mathcal{E} , qui peuvent éventuellement être vides. Leurs propriétés sont plus compliquées que celles des bouts. Nous les avons déjà définis, pour les trajectoires d'un système dynamique, dans le chapitre précédent (I.2.4).

3.3. Théorème. — On se place dans les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité globales 2.9 : l'espace vectoriel E associé à l'espace affine \mathcal{E} est de Banach, Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$, l'application f est continue sur $\tilde{\Omega}$ et localement lipschitzienne relativement à sa seconde variable. Les bouts d'une solution maximale $\varphi :]a, b[\rightarrow \mathcal{E}$ de l'équation différentielle (1) ont les propriétés suivantes.

(i) Si un bout (droit ou gauche) de φ est non vide, il est contenu dans la frontière de $\tilde{\Omega}$.

(ii) Si $b < +\infty$ et s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $t \mapsto \|\varphi'(t)\|$ soit bornée sur $]b - \epsilon, b[$, la limite

$$\lim_{t \rightarrow b, t \in]a, b[} \varphi(t)$$

existe, et le bout droit de la solution φ est le singleton $\{ (b, \lim_{t \rightarrow b, t \in]a, b[} \varphi(t)) \}$. De même, si $-\infty < a$ et s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $t \mapsto \|\varphi'(t)\|$ soit bornée sur $]a, a + \epsilon[$, la limite

$$\lim_{t \rightarrow a, t \in]a, b[} \varphi(t)$$

existe, et le bout gauche de la solution φ est le singleton $\{ (a, \lim_{t \rightarrow a, t \in]a, b[} \varphi(t)) \}$.

(iii) Si $b < +\infty$ et si le bout droit de φ est vide (resp., si $-\infty < a$ et si le bout gauche de φ est vide), alors pour toute partie compacte K de \mathcal{E} , il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]a, b[$ vérifiant $b - \epsilon < t$ (resp., vérifiant $t < a + \epsilon$), $\varphi(t)$ n'est pas élément de K .

Preuve : Nous établirons ces propriétés pour le bout droit. Le cas du bout gauche est analogue.

(i) Soit (b, y) un élément du bout droit de φ . C'est une valeur d'adhérence de l'application $t \mapsto (t, \varphi(t))$, qui prend ses valeurs dans $\tilde{\Omega}$. Par suite, (b, y) est adhérent à $\tilde{\Omega}$. Supposons $(b, y) \in \tilde{\Omega}$. Il existe alors un tonneau de sécurité fermé $[b - l, b + l] \times B_F(y, r)$, centré sur (b, y) , contenu dans $\tilde{\Omega}$, avec $l > 0$, $r > 0$. Considérons le tonneau fermé de même centre (b, y) , homothétique du précédent dans le rapport $1/3$, c'est-à-dire $[b - l/3, b + l/3] \times B_F(y, r/3)$. C'est un voisinage de (b, y) ; comme (b, y) est valeur d'adhérence de $t \mapsto (t, \varphi(t))$, il existe $s \in]a, b[$ tel que

$$(s, \varphi(s)) \in [b - l/3, b + l/3] \times B_F(y, r/3).$$

Autrement dit, $0 < b - s \leq l/3$ et $\|\varphi(s) - y\| \leq r/3$. Mais alors $[s - 2l/3, s + 2l/3] \times B_F(\varphi(s), 2l/3)$ est un tonneau de sécurité fermé, de centre $(s, \varphi(s))$ (remarque 2.4.b). Le théorème d'existence 2.8 nous permet alors d'affirmer que la solution maximale de (1) qui satisfait la donnée de Cauchy $(s, \varphi(s))$ est définie sur un intervalle qui contient $]s - 2l/3, s + 2l/3[$. Mais cette solution n'est autre que φ , et puisque $b - s \leq l/3$,

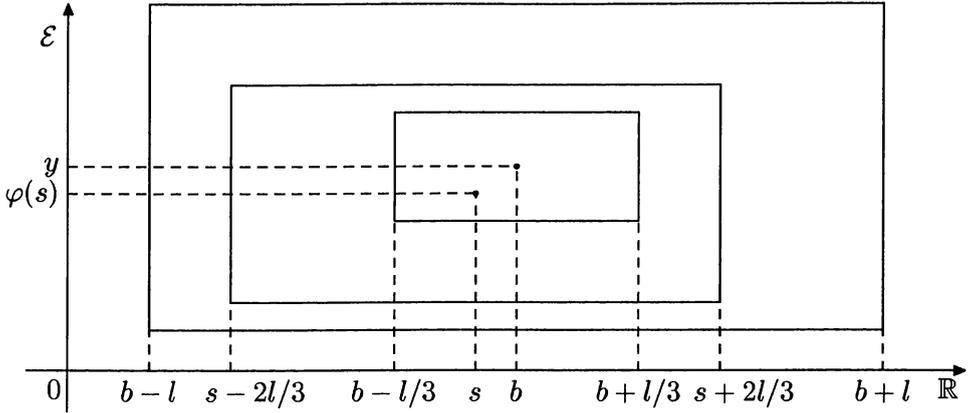


Figure II.1. Illustration de la preuve du théorème 3.3.

$s + 2l/3 \geq b + l/3 > b$. Nous avons ainsi prouvé que b n'est pas l'extrémité droite de l'intervalle de définition de la solution maximale φ , contrairement à la définition même de b . Notre hypothèse de départ, selon laquelle (b, y) appartient à $\tilde{\Omega}$, est donc fautive. Le point (b, y) , élément de l'adhérence de $\tilde{\Omega}$ mais pas de $\tilde{\Omega}$, est donc nécessairement élément de la frontière de $\tilde{\Omega}$.

(ii) Soit $(t_n, n \in \mathbb{N})$ une suite croissante de points de l'intervalle $]b - \epsilon, b[$, qui converge vers b . D'après le théorème des accroissements finis, pour tous p et $q \in \mathbb{N}$,

$$\|\varphi(t_p) - \varphi(t_q)\| \leq \sup_{t \in]b - \epsilon, b[} \|\varphi'(t)\| |t_p - t_q| \leq M |t_p - t_q|,$$

où nous avons noté M un majorant de $\|\varphi'(t)\|$ pour $t \in]b - \epsilon, b[$. Cette inégalité montre que la suite $(\varphi(t_n), n \in \mathbb{N})$ est de Cauchy dans l'espace complet \mathcal{E} . Cette suite converge donc vers un élément ξ de \mathcal{E} . L'élément ξ ne dépend pas du choix de la suite (t_n) , car avec deux suites croissantes (t_n) et (t'_n) dans $]b - \epsilon, b[$ convergeant vers b , on peut, en considérant la réunion des termes de ces deux suites et en l'ordonnant selon l'ordre croissant, former une nouvelle suite croissante (s_n) , convergeant vers b , dont les suites (t_n) et (t'_n) sont extraites; la convergence de la suite $(\varphi(s_n))$ montre que les deux suites $(\varphi(t_n))$ et $(\varphi(t'_n))$, qui en sont extraites, ont la même limite. Nous pouvons alors affirmer que l'application $t \mapsto \varphi(t)$ a pour limite ξ lorsque $t \rightarrow b, t \in]a, b[$. Aussi, lorsque $t \rightarrow b$, l'application $t \mapsto (t, \varphi(t))$ converge vers (b, ξ) , et a donc ce point de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ pour unique valeur d'adhérence.

(iii) Si la propriété énoncée était fautive, il existerait une partie compacte K de \mathcal{E} ayant la propriété suivante : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $t_n \in [b - (1/n), b[$ tel que $\varphi(t_n) \in K$. La suite $(\varphi(t_n), n \in \mathbb{N})$, contenue dans un compact, admet une valeur d'adhérence $\xi \in K$. Le point (b, ξ) de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ serait alors élément du bout droit de φ , en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle ce bout droit est vide. \square

3.4. Commentaires

a) *Équations définies sur $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$.* — Si le domaine de définition $\tilde{\Omega}$ de la fonction f est $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ entier, la frontière de $\tilde{\Omega}$ est vide. Le théorème 3.3 montre alors que les bouts droit et gauche de toute solution maximale de (1) sont vides.

b) *Explosions.* — Considérons, pour simplifier, une équation différentielle autonome, satisfaisant les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité globales 2.9. La partie $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ est alors de la forme $\mathbb{R} \times \Omega$, où Ω est un ouvert de l'espace affine \mathcal{E} . Soit $\varphi :]a, b[\rightarrow \mathcal{E}$ une solution maximale de cette équation, pour laquelle $b < +\infty$ (le cas

$-\infty < a$ donnerait lieu à un raisonnement analogue). Pourquoi ne peut-on pas prolonger cette solution au delà de b ? Le théorème 3.3 donne des éléments de réponse :

- ou bien le bout droit de la solution est non vide, et il est contenu dans la frontière de $\tilde{\Omega} = \mathbb{R} \times \Omega$; comme la frontière du facteur \mathbb{R} est vide, le bout droit de φ est nécessairement contenu dans $\{b\} \times \text{Fr}(\Omega)$, où $\text{Fr}(\Omega)$ désigne la frontière de l'ouvert Ω de \mathcal{E} ; la solution φ ne peut être prolongée au delà de b car elle a atteint la frontière du domaine de définition de l'équation;
- ou bien le bout droit de la solution φ est vide; dans ce cas, pour toute partie compacte K de \mathcal{E} , la valeur $\varphi(t)$ de la solution "sort de K " (c'est-à-dire n'est plus dans K) lorsque $t \rightarrow b$; en un certain sens (précisé ci-dessous) ou peut dire que la solution "part à l'infini", ou "explose", lorsque $t \rightarrow b$.

Le lecteur remarquera que lorsque \mathcal{E} est de dimension finie, ses parties compactes sont ses parties fermées et bornées. Il est alors tout à fait légitime de dire que $\varphi(t)$ "part à l'infini" lorsque $t \rightarrow b$ pour dire que, pour toute partie compacte K de \mathcal{E} , $\varphi(t)$ sort de K . Lorsque \mathcal{E} est de dimension infinie, il existe des parties fermées et bornées de \mathcal{E} non compactes, et $\varphi(t)$ peut sortir de tout compact, lorsque $t \rightarrow b$, tout en restant bornée. On peut cependant dire que $\varphi(t)$ "part à l'infini" dans l'infinité des dimensions de \mathcal{E} .

4. Le flot d'une équation différentielle

Soit \mathcal{E} un espace affine dont l'espace vectoriel associé E est un espace de Banach réel. Considérons l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \tag{1}$$

où f est une application d'un ouvert $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ dans E . Nous nous plaçons dans les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité 2.9 : l'application f est supposée continue sur $\tilde{\Omega}$ et localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. Nous savons alors, d'après 2.9, que pour toute donnée de Cauchy $(t_0, x_0) \in \tilde{\Omega}$ il existe une solution maximale unique $\varphi_{(t_0, x_0)}$ de l'équation (1), définie sur un intervalle ouvert $I_{(t_0, x_0)}$ de \mathbb{R} contenant t_0 , vérifiant $\varphi_{(t_0, x_0)}(t_0) = x_0$. Cela justifie la définition suivante.

4.1. Définition. — On appelle *flot* (ou *coulée*) de l'équation différentielle (1), satisfaisant les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité 2.9, l'application Φ de la partie

$$D = \bigcup_{(t_0, x_0) \in \tilde{\Omega}} I_{(t_0, x_0)} \times \{(t_0, x_0)\} = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \tilde{\Omega} ; t \in I_{(t_0, x_0)}\}$$

de $\mathbb{R} \times \tilde{\Omega}$ dans \mathcal{E} ,

$$(t, t_0, x_0) \mapsto \Phi(t, t_0, x_0) = \varphi_{(t_0, x_0)}(t).$$

4.2. Commentaire. — En d'autres termes, le flot Φ de l'équation différentielle (1) est l'application, fonction de trois variables t, t_0 et x_0 , ainsi définie : le couple (t_0, x_0) formé par les deux dernières variables est une donnée de Cauchy, élément de $\tilde{\Omega}$. Ce couple étant fixé, la première variable t est élément de l'intervalle I_{t_0, x_0} sur lequel est définie la solution maximale de l'équation différentielle (1) qui satisfait la donnée de Cauchy (t_0, x_0) ; enfin, l'application $t \mapsto \Phi(t, t_0, x_0)$ est précisément cette solution maximale. Le flot Φ vérifie donc

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0, x_0) = f(t, \Phi(t, t_0, x_0)), \quad \Phi(t_0, t_0, x_0) = x_0.$$

Le concept de flot d'une équation différentielle est important et d'emploi commode, car il rassemble, sous forme d'une seule application, toutes les solutions maximales de cette équation.

4.3. Exemple. — Le flot de l'équation différentielle, sur \mathbb{R} ,

$$y'(t) = y(t),$$

est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et a pour expression

$$\Phi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{t-t_0}.$$

4.4. Proposition. — *Le flot $\Phi : D \rightarrow \mathcal{E}$ de l'équation différentielle (1), qui est supposée satisfaire les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité 2.9, vérifie les propriétés suivantes.*

1. Soient $(t_0, x_0) \in \tilde{\Omega}$, t_1 et t_2 deux réels. On suppose le triplet (t_1, t_0, x_0) élément du domaine D de définition de Φ . Alors le triplet (t_2, t_0, x_0) est élément de D si et seulement si $(t_2, t_1, \Phi(t_1, t_0, x_0))$ est élément de D . Lorsque c'est le cas, on a

$$\Phi(t_2, t_0, x_0) = \Phi(t_2, t_1, \Phi(t_1, t_0, x_0)). \quad (*)$$

2. En particulier, si le triplet (t_1, t_0, x_0) est élément de D , alors $(t_0, t_1, \Phi(t_1, t_0, x_0))$ est aussi élément de D , et

$$\Phi(t_0, t_1, \Phi(t_1, t_0, x_0)) = x_0. \quad (**)$$

Preuve : Voir par exemple [18], chapitre VI, paragraphe 2.3. □

4.5. Remarque. — Afin de mieux mettre en évidence la signification des résultats énoncés dans la proposition précédente, posons, pour tous t_0 et $t \in \mathbb{R}$,

$$U_{(t, t_0)} = \{ x_0 \in \mathcal{E} ; (t, t_0, x_0) \in D \},$$

et, pour tout $x_0 \in U_{(t, t_0)}$,

$$\Phi_{(t, t_0)}(x_0) = \Phi(t, t_0, x_0).$$

Nous voyons alors que $\Phi_{(t, t_0)}$ est une application, définie sur la partie $U_{(t, t_0)}$ de \mathcal{E} , à valeurs dans \mathcal{E} . La relation (*) de la proposition précédente peut alors être mise sous la forme

$$\Phi_{(t_2, t_0)} = \Phi_{(t_2, t_1)} \circ \Phi_{(t_1, t_0)}. \quad (*)$$

Pour donner tout son sens à la relation (*) mise sous cette forme nouvelle, on doit ajouter la précision suivante : soit $x_0 \in U_{(t_1, t_0)}$; alors $\Phi_{(t_1, t_0)}(x_0)$ est élément de $U_{(t_2, t_1)}$ si et seulement si x_0 est élément de $U_{(t_2, t_0)}$.

Quant à la relation (**), avec ces nouvelles notations, elle exprime le fait que l'application $\Phi_{(t_1, t_0)} : U_{(t_1, t_0)} \rightarrow \mathcal{E}$ est injective et a pour image $U_{(t_0, t_1)}$, et que lorsqu'on la considère comme une bijection de $U_{(t_1, t_0)}$ sur son image, elle a pour inverse

$$(\Phi_{(t_1, t_0)})^{-1} = \Phi_{(t_0, t_1)}.$$

Ces propriétés ressemblent beaucoup à celles des éléments d'un groupe. Cependant, la famille d'applications $\{ \Phi_{(t, t_0)} ; t_0 \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \}$, munie des lois de composition et d'inversion données par les formules (*) et (**), n'est en général pas un groupe, car la loi de composition n'est pas définie pour tout couple ordonné d'éléments : si $\Phi_{(t_1, t_0)}$ et $\Phi_{(s_1, s_0)}$ sont deux éléments de cette famille d'applications, l'application composée $\Phi_{(s_1, s_0)} \circ \Phi_{(t_1, t_0)}$ n'appartient à la famille (sauf cas particulier) que si $s_0 = t_1$. On dit que cette famille d'applications, munie des lois de composition et d'inversion (*) et (**), est un *groupe local*.

Le principal résultat concernant le flot d'une équation différentielle fait l'objet du théorème suivant.

4.6. Théorème. — Soit \mathcal{E} un espace affine dont l'espace vectoriel associé E est un espace de Banach réel, $\tilde{\Omega}$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ et $f : \tilde{\Omega} \rightarrow E$ une application continue, et localement lipschitzienne relativement à sa seconde variable. On note Φ le flot de l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

Le domaine de définition D du flot Φ est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{E}$, et l'application $\Phi : D \rightarrow \mathcal{E}$ est continue et localement lipschitzienne.

Si, de plus, l'application f est différentiable de classe C^p , le flot Φ est différentiable de classe C^p .

Preuve : Voir par exemple [18], chapitre VI, paragraphes 2.7 et 4.4. □

4.7. Remarque. — Dans les hypothèses du théorème précédent, lorsque l'application f est différentiable de classe C^p , on a souvent à considérer les dérivées (ou différentielles) partielles du flot $\Phi : (t, s, v) \mapsto \Phi(t, s, v)$ par rapport à chacune des variables dont il dépend (on a noté (t, s, v) un élément de D). Sa dérivée partielle par rapport à la première variable t est facile à calculer : ainsi qu'on l'a vu en 4.2, elle est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, s, v) = f(t, \Phi(t, s, v)).$$

En différentiant les deux membres de cette égalité par rapport à v , et en remarquant que la différentiation par rapport à v et la dérivation par rapport à t commutent, on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial t} (D_3 \Phi(t, s, v)) = D_2 f(t, \Phi(t, s, v)) \circ D_3 \Phi(t, s, v), \quad (*)$$

où on a noté $D_3 \Phi(t, s, v)$ la différentielle partielle de Φ par rapport à sa troisième variable $v \in \mathcal{E}$ au point $(t, s, v) \in D$, et $D_2 f(t, x)$ la différentielle partielle de f par rapport à sa seconde variable $x \in \mathcal{E}$ au point $(t, x) \in \tilde{\Omega}$. Ce sont des éléments de l'espace $\mathcal{L}(E, E)$ des applications linéaires continues de E dans lui-même. Pour s et v fixés, si l'on considère l'application $t \mapsto \Phi(t, s, v)$ comme connue, l'égalité (*) ci-dessus est une équation différentielle linéaire dans $\mathcal{L}(E, E)$, dont $t \mapsto D_3 \Phi(t, s, v)$ est solution. On dit que cette équation est la *linéarisée* de l'équation différentielle (1) le long de la solution $t \mapsto \Phi(t, s, v)$.

Quant à la dérivée partielle du flot Φ par rapport à sa seconde variable, on peut en obtenir une expression en dérivant les deux membres de l'égalité

$$\Phi(t, s, \Phi(s, t, v)) = v$$

par rapport à la variable réelle s . Le membre de droite ne dépendant pas de s , nous obtenons, en posant $\Phi(s, t, v) = u$,

$$\frac{\partial \Phi(t, s, u)}{\partial s} + D_3 \Phi(t, s, u) \frac{\partial \Phi(s, t, v)}{\partial s} = 0.$$

Mais d'autre part

$$\frac{\partial \Phi(s, t, v)}{\partial s} = f(s, \Phi(s, t, v)) = f(s, u),$$

et nous obtenons

$$\frac{\partial \Phi(t, s, u)}{\partial s} = -D_3 \Phi(t, s, u) f(s, u).$$

4.8. Corollaire. — Dans les hypothèses du théorème précédent, et avec les notations de la remarque 4.5, pour tout couple (t_1, t_0) de réels, l'ensemble

$$U_{(t_1, t_0)} = \{x \in \mathcal{E} ; (t_1, t_0, x) \in D\}$$

est un ouvert de \mathcal{E} . Si cet ouvert est non vide, l'application $x \mapsto \Phi_{(t_1, t_0)}(x) = \Phi(t_1, t_0, x)$ est un homéomorphisme localement lipschitzien de $U_{(t_1, t_0)}$ sur $U_{(t_0, t_1)}$, dont l'inverse est $\Phi_{(t_0, t_1)}$. Si, de plus, l'application f est différentiable de classe C^p , l'application $x \mapsto \Phi_{(t_1, t_0)}(x)$ est un difféomorphisme de classe C^p de $U_{(t_1, t_0)}$ sur $U_{(t_0, t_1)}$.

Preuve : Voir par exemple [18], chapitre VI, paragraphe 2.8. □

La démonstration du théorème 4.6, assez délicate, est basée sur le lemme suivant, souvent commode pour majorer l'écart entre deux solutions d'une équation différentielle.

4.9. Lemme. — *On se place dans les hypothèses de la définition 4.1. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé et borné de \mathbb{R} , et W une partie de $\tilde{\Omega}$ vérifiant les conditions suivantes :*

- (i) *la restriction de f à W est majorée en norme par un réel $M \geq 0$, et lipschitzienne relativement à sa seconde variable, de rapport $k \geq 0$;*
- (ii) *pour toute donnée de Cauchy $(t_0, x_0) \in W$ et tout $t \in [a, b]$, le triplet (t, t_0, x_0) est élément du domaine D de définition du flot Φ , et $(t, \Phi(t, t_0, x_0)) \in W$.*

On note $C([a, b], \mathcal{E})$ l'espace des applications continues de $[a, b]$ dans \mathcal{E} , muni de la norme de la convergence uniforme.

Alors l'application de W dans $C([a, b], \mathcal{E})$ qui, à chaque $(t_0, x_0) \in W$, associe la restriction à $[a, b]$ de l'application $t \mapsto \Phi(t, t_0, x_0)$, est continue et lipschitzienne. Plus précisément, pour tous $t \in [a, b]$, (t_0, x_0) et $(t_1, x_1) \in W$, on a

$$\|\Phi(t, t_1, x_1) - \Phi(t, t_0, x_0)\| \leq e^{k(b-a)} (\|x_1 - x_0\| + M |t_1 - t_0|).$$

Preuve : Voir par exemple [18], chapitre VI, paragraphe 2.5. □

4.10. Cas d'une équation différentielle autonome. — *On considère une équation différentielle autonome dans un espace affine \mathcal{E} dont l'espace vectoriel associé E est un espace de Banach réel, de la forme*

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)), \tag{2}$$

où X est un champ de vecteurs sur un ouvert Ω de \mathcal{E} , c'est-à-dire une application de Ω dans E . On suppose l'application X continue et localement lipschitzienne. Les théorèmes d'existence et d'unicité 2.8 et 2.9 sont évidemment applicables à cette équation, et permettent de définir son flot Φ . Celui-ci est défini sur un ouvert D de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{E}$, et à valeurs dans \mathcal{E} .

D'après la proposition 1.4, pour toute solution φ de l'équation différentielle (2), définie sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} , et tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'application de $I + \theta$ (translaté de I par θ) dans \mathcal{E} , $t \mapsto \varphi \circ T_\theta(t) = \varphi(t - \theta)$ est aussi solution de l'équation (2). En raison de l'unicité de la solution maximale satisfaisant une donnée de Cauchy spécifiée, cette propriété signifie que le flot Φ de l'équation différentielle (2) vérifie la propriété suivante : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, un triplet $(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{E}$ est élément de D si et seulement si $(t - \theta, t_0 - \theta, x_0)$ est élément de D ; lorsque c'est le cas,

$$\Phi(t - \theta, t_0 - \theta, x_0) = \Phi(t, t_0, x_0).$$

En particulier, en faisant $\theta = t_0$, nous voyons que (t, t_0, x_0) est élément de D si et seulement si $(t - t_0, 0, x_0)$ est élément de D , et que lorsque c'est le cas,

$$\Phi(t, t_0, x_0) = \Phi(t - t_0, 0, x_0).$$

C'est pourquoi on utilise souvent, plutôt que le flot Φ lui-même, le *flot réduit* de l'équation différentielle autonome (2), ainsi défini.

4.11. Définition. — *On considère l'équation différentielle autonome*

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)), \tag{2}$$

où X est un champ de vecteurs continu et localement lipschitzien défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} , dont l'espace vectoriel associé E est de Banach.

Soit Φ son flot, et D l'ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega$ sur lequel il est défini. On appelle *flot réduit* de l'équation différentielle autonome (2) l'application Ψ , définie sur l'ouvert D_r de $\mathbb{R} \times \Omega$:

$$D_r = \{ (t, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{E} ; (t, 0, x_0) \in D \},$$

ayant pour expression

$$\Psi(t, x_0) = \Phi(t, 0, x_0).$$

4.12. Propriétés du flot réduit. — La connaissance du flot réduit équivaut à celle du flot lui-même, puisque

$$D = \{ (t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{E} ; (t - t_0, x_0) \in D_r \}, \quad \Phi(t, t_0, x_0) = \Psi(t - t_0, x_0).$$

D'après le théorème 4.6, le flot réduit est une application continue et localement lipschitzienne de D_r dans \mathcal{E} . Lorsque l'application f est différentiable de classe C^p , avec $p \geq 1$, le flot réduit est différentiable de classe C^p .

Exprimé au moyen du flot réduit, le corollaire 4.8 prend la forme suivante.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$U_t = U_{(t,0)} = \{ x \in \mathcal{E} ; (t, x) \in D_r \}$$

est un ouvert de \mathcal{E} . Si cet ouvert est non vide, l'application $x \mapsto \Psi_t(x) = \Psi(t, x)$ est un homéomorphisme localement lipschitzien de U_t sur U_{-t} , dont l'inverse est Ψ_{-t} . Lorsque de plus f est différentiable de classe C^p , avec $p \geq 1$, l'application $x \mapsto \Psi_t(x)$ est un difféomorphisme de classe C^p de U_t sur U_{-t} .

Les règles de composition du flot, exprimées par la proposition 4.4 et la remarque 4.5, s'expriment, au moyen du flot réduit, sous la forme suivante.

Soient t_1 et t_2 deux réels, et x un élément de l'ouvert U_{t_1} . Alors $\Psi(t_1, x)$ est élément de U_{t_2} si et seulement si x est élément de $U_{t_1+t_2}$, et lorsque c'est le cas,

$$\Psi(t_2, \Psi(t_1, x)) = \Psi(t_1 + t_2, x),$$

qu'on peut écrire aussi, de manière abrégée,

$$\Psi_{t_2} \circ \Psi_{t_1} = \Psi_{t_1+t_2}.$$

On a bien entendu aussi, pour tout $x \in U$, $\Psi(0, x) = x$, c'est-à-dire

$$\Psi_0 = \text{id}_\Omega.$$

Dans le cas particulier où le domaine D_r du flot réduit est égal à $\mathbb{R} \times \Omega$, c'est-à-dire où toute solution maximale de l'équation différentielle autonome (2) est définie sur \mathbb{R} entier, l'application $t \mapsto \Psi_t$ est un homomorphisme du groupe additif \mathbb{R} dans le groupe des homéomorphismes localement lipschitziens de l'ouvert Ω de \mathcal{E} sur lui-même.

4.13. Système dynamique associé à une équation différentielle

a) Cas d'une équation autonome. — On considère l'équation différentielle autonome, dans l'espace affine \mathcal{E} dont l'espace vectoriel associé E est un espace de Banach réel,

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)), \quad (2)$$

où X est un champ de vecteurs localement lipschitzien défini sur un ouvert Ω de \mathcal{E} . Soit Ψ le flot réduit de cette équation (défini dans le paragraphe précédent). Pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous notons, comme dans le paragraphe précédent, U_t l'ensemble des éléments x de Ω tels que (t, x) soit élément du domaine de définition D_r de Ψ , et Ψ_t l'application, définie sur U_t et à valeurs dans Ω ,

$$\Psi_t(x) = \Psi(t, x).$$

La famille d'applications $\{ \Psi_t ; t \in \mathbb{R} \}$ est un système dynamique à temps continu, au sens de la définition I.1.2, admettant X comme générateur infinitésimal (définition I.3.3). Cela résulte en effet directement des règles de composition du flot réduit établies dans le paragraphe précédent. Nous dirons que $\{ \Psi_t ; t \in \mathbb{R} \}$ est le *système dynamique déterminé par le champ de vecteurs X* .

b) *Cas d'une équation non autonome.* — On considère maintenant l'équation non autonome, dans l'espace affine \mathcal{E} dont l'espace vectoriel associé E est un espace de Banach réel,

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \quad (1)$$

où f est une application continue, définie sur un ouvert $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ et à valeurs dans E , localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. Soit Φ le flot de cette équation, et D l'ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{E}$ sur lequel il est défini. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, soit V_s l'ensemble des éléments (t, x) de $\tilde{\Omega}$ tels que $(t + s, t, x)$ soit élément de D . Il est facile de voir que pour tout $s \in \mathbb{R}$, V_s est un ouvert de $\tilde{\Omega}$. Soit χ_s l'application de V_s dans $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ définie par

$$\chi_s(t, x) = (t + s, \Phi(t + s, t, x)).$$

Les règles de composition du flot permettent aisément de montrer que χ_s est une bijection de V_s sur V_{-s} , et que la famille d'applications $\{\chi_s ; s \in \mathbb{R}\}$ est un système dynamique à temps continu, au sens de la définition I.1.2. Son générateur infinitésimal est le champ de vecteurs $(t, x) \mapsto (1, f(t, x))$, défini sur Ω .

Le lecteur aura sans doute reconnu, dans la construction des applications χ_s présentée ci-dessus, le procédé classique permettant d'associer à une équation différentielle non autonome dans \mathcal{E} , une équation différentielle autonome dans $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ (voir par exemple [18], chapitre IV, paragraphe 2.3 b).

4.14. Une formule utile. — Les hypothèses et notations étant celles du paragraphe 4.11, nous supposons de plus le champ de vecteurs X de classe C^p , avec $p \geq 1$. La formule (*) de la remarque 4.7 devient, puisque $\Psi(t, x) = \Phi(t, 0, x)$,

$$\frac{\partial}{\partial t}(D_2\Psi(t, x)) = DX(\Psi(t, x)) \circ D_2\Psi(t, x), \quad (*)$$

où $D_2\Psi$ désigne la différentielle partielle du flot réduit Ψ par rapport à sa seconde variable. Pour chaque élément $x \in \Omega$ considéré comme fixé, l'équation (*) est une équation différentielle linéaire dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, E)$, à coefficients en général non constants, puisque $DX(\Psi(t, x))$ dépend en général de t . L'application $t \mapsto D_2\Psi(t, x)$ en est la solution qui vérifie la donnée de Cauchy

$$D_2\Psi(0, x) = \text{id}_E,$$

qu'on obtient en différentiant par rapport à x l'identité

$$\Psi(0, x) = x.$$

Supposons maintenant que $a \in \Omega$ soit un point d'équilibre du champ de vecteurs X , c'est-à-dire un point tel que $X(a) = 0$. Nous savons alors que $\Psi(t, a)$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$, et est égal à a . En faisant $x = a$ dans l'équation (*), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t}(D_2\Psi(t, a)) = DX(a) \circ D_2\Psi(t, a). \quad (**)$$

C'est une équation différentielle à coefficients constants dans $\mathcal{L}(E, E)$. L'application $t \mapsto D_2\Psi(t, a)$, qui en est la solution vérifiant la donnée de Cauchy

$$D_2\Psi(0, a) = \text{id}_E,$$

n'est autre que

$$D_2\Psi(t, a) = \exp(tDX(a)). \quad (***)$$

Nous utiliserons plus loin cette formule, dans le cas où E est de dimension finie; elle nous permettra notamment d'exprimer les valeurs propres de $D_2\Psi_t(x, a)$ au moyen de celles de $DX(a)$.

4.15. Courbes intégrales, orbites et portrait de phases d'un champ de vecteurs

Soit X un champ de vecteurs localement lipschitzien défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} dont l'espace vectoriel associé E est un espace de Banach réel, et

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)) \quad (2)$$

l'équation différentielle autonome qui lui est associée. Ainsi que nous l'avons vu au paragraphe 4.13.a, le flot réduit Ψ de cette équation détermine un système dynamique à temps continu $\{\Psi_t; t \in \mathbb{R}\}$, admettant le champ X pour générateur infinitésimal. Afin d'alléger le langage, nous appellerons :

- *courbe intégrale* du champ de vecteurs X , toute solution maximale $t \mapsto \varphi(t)$ de l'équation différentielle (2) dont l'intervalle de définition contient l'origine 0, c'est-à-dire toute trajectoire (au sens de la définition I.2.2.1) du système dynamique déterminé par X ;
- *orbite* du champ de vecteurs X , toute orbite (au sens de la définition I.2.2.2) du système dynamique déterminé par X ;
- *point d'équilibre* du champ de vecteurs X , tout point d'équilibre (au sens de la définition I.2.2.3) du système dynamique déterminé par X ;
- *portrait de phases* du champ de vecteurs X , le portrait de phases (au sens de la proposition I.2.3.3) du système dynamique déterminé par X .

De même, nous appellerons *ensemble α -limite* et *ensemble ω -limite* d'un point $x \in \Omega$, relativement au champ de vecteurs X , les ensembles α -limite et ω -limite du point x relativement au système dynamique déterminé par le champ X (au sens de la définition I.2.4).

5. Transformation par difféomorphisme

Nous nous limiterons pour simplifier au cas d'une équation différentielle autonome.

5.1. Proposition. — On considère l'équation différentielle autonome, dans l'espace affine \mathcal{E} dont l'espace vectoriel associé E est un espace de Banach réel,

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)), \quad (*)$$

où X est un champ de vecteurs localement lipschitzien sur l'ouvert Ω de \mathcal{E} . Soit h un difféomorphisme de classe C^q (avec $q \geq 2$) de Ω sur un ouvert $h(\Omega)$ d'un autre espace affine \mathcal{F} , dont l'espace vectoriel associé F est un espace de Banach réel. On pose, pour tout $y \in h(\Omega)$,

$$(h_*X)(y) = Dh(h^{-1}(y))(X(h^{-1}(y))).$$

Alors h_*X est un champ de vecteurs localement lipschitzien sur l'ouvert $h(\Omega)$ de \mathcal{F} , appelé *image directe* du champ de vecteurs X par le difféomorphisme h . Lorsque X est différentiable de classe C^p (avec $1 \leq p \leq q - 1$), h_*X l'est aussi.

D'autre part, soit $\varphi : I \rightarrow \mathcal{E}$ une solution de l'équation différentielle (*). L'application composée $\psi = h \circ \varphi : I \rightarrow \mathcal{F}$ est solution de l'équation différentielle

$$\psi'(t) = (h_*X)(\psi(t)), \quad (**)$$

appelée *image directe* de l'équation différentielle (*) par le difféomorphisme h . Si φ est solution maximale de l'équation différentielle (*), $\psi = h \circ \varphi$ est solution maximale de l'équation différentielle (**).

Preuve : Posons, pour alléger l'écriture, $Y = h_*X$. Soient y_1 et y_2 deux points de $h(\Omega)$, $x_1 = h^{-1}(y_1)$ et $x_2 = h^{-1}(y_2)$ leurs antécédents dans Ω . Nous avons

$$\begin{aligned} Y(y_1) - Y(y_2) &= Dh(x_1)(X(x_1)) - Dh(x_2)(X(x_2)) \\ &= Dh(x_1)(X(x_1) - X(x_2)) + (Dh(x_1) - Dh(x_2))(X(x_2)). \end{aligned}$$

L'application $Dh \circ h^{-1}$ est localement lipschitzienne, car composée de Dh , qui est différentiable de classe C^{q-1} (avec $q-1 \geq 1$), donc localement lipschitzienne, et de h^{-1} , qui est différentiable de classe C^q puisque h est un difféomorphisme de classe C^q , donc localement lipschitzienne. L'application $X \circ h^{-1}$ est elle aussi localement lipschitzienne, car composée de deux applications localement lipschitziennes. Les deux applications $Dh \circ h^{-1}$ et $X \circ h^{-1}$ sont donc, *a fortiori*, localement bornées. Par suite, tout point de $h(\Omega)$ possède un voisinage tel que, si y_1 et y_2 appartiennent à ce voisinage, on ait

$$\|Dh(x_1)(X(x_1) - X(x_2))\| \leq Mk \|y_1 - y_2\|,$$

et aussi

$$\|(Dh(x_1) - Dh(x_2))(X(x_2))\| \leq M'k' \|y_1 - y_2\|,$$

k, k', M et M' étant des constantes réelles positives. On en déduit

$$\|Y(y_1) - Y(y_2)\| \leq (Mk + M'k') \|y_1 - y_2\|,$$

ce qui prouve que le champ de vecteurs Y est localement lipschitzien.

Si le champ de vecteurs X est différentiable de classe C^p , avec $1 \leq p \leq q-1$, le champ de vecteurs Y l'est aussi, car il s'exprime au moyen de Dh , de h^{-1} et de X , qui sont différentiables de classe C^p .

Enfin, soit $\varphi : I \rightarrow \mathcal{E}$ une solution de l'équation différentielle (*). L'application $h \circ \varphi$ est différentiable, comme composée d'applications différentiables. Calculons sa dérivée en un point t de I :

$$\begin{aligned} \frac{d(h \circ \varphi(t))}{dt} &= Dh(\varphi(t)) \left(\frac{d\varphi(t)}{dt} \right) = Dh(h^{-1} \circ h \circ \varphi(t)) (X \circ h^{-1} \circ h \circ \varphi(t)) \\ &= (h_* X)(h \circ \varphi(t)). \end{aligned}$$

Ceci prouve que $h \circ \varphi$ est solution de l'équation différentielle (**). Si φ est maximale, on voit que $h \circ \varphi$ l'est aussi, car si ce n'était pas le cas, il existerait une autre solution $\hat{\psi}$ de l'équation différentielle (**) qui la prolonge strictement, et $h^{-1} \circ \hat{\psi}$ serait une solution de (*) prolongeant strictement φ . \square

Le théorème qui précède est à la base des transformations d'équations différentielles par "changement de fonction inconnue". Il va nous permettre d'établir l'important résultat suivant.

5.2. Théorème de redressement local. — On considère l'équation différentielle autonome, dans l'espace affine \mathcal{E} dont l'espace vectoriel associé E est un espace de Banach réel,

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)), \quad (2)$$

où X est un champ de vecteurs différentiable de classe C^q (avec $q \geq 2$) sur l'ouvert Ω de \mathcal{E} . Soit a un point de Ω tel que $X(a) \neq 0$. Il existe un voisinage ouvert U de a , contenu dans Ω , et un difféomorphisme h , de classe C^q , de U sur un ouvert $h(U)$ d'un autre espace affine \mathcal{F} dont l'espace vectoriel associé F est un espace de Banach réel, tel que l'image directe du champ de vecteurs $X|_U$ (restriction à U du champ de vecteurs X) par le difféomorphisme h soit un champ de vecteurs constant.

Preuve : Soit $\mathbb{R}X(a)$ le sous-espace vectoriel de dimension 1 de E engendré par $X(a)$. On sait (c'est une conséquence facile du théorème de Hahn-Banach, voir par exemple [17], chapitre IX, paragraphe 2.9) qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé H de E

supplémentaire de $\mathbb{R}X(a)$. L'espace affine \mathcal{F} de l'énoncé sera en fait le produit $\mathbb{R} \times H$. L'application, de $\mathbb{R} \times H$ dans E ,

$$(\theta, v) \mapsto \theta X(a) + v,$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach (c'est-à-dire une application linéaire, continue, bijective et d'inverse continue).

Soit Ψ le flot réduit de l'équation (2). Pour $(s, y) \in \mathbb{R} \times H$ assez voisin de l'origine $(0, 0)$, nous pouvons poser

$$g(s, y) = \Psi(s, a + y).$$

Nous définissons ainsi une application g , définie sur un voisinage ouvert V de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R} \times H$, à valeurs dans \mathcal{E} , qui applique $(0, 0)$ sur a . Nous voyons immédiatement que cette application est différentiable de classe C^q . Sa différentielle à l'origine, notée $Dg(0, 0)$, vérifie, pour tout $(\theta, v) \in \mathbb{R} \times H$,

$$Dg(0, 0)(\theta, v) = D_1\Psi(0, 0)\theta + D_2\Psi(0, 0)v = \theta X(a) + v,$$

car $\frac{\partial \Psi(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=0} = X(x)$ et $\Psi(0, x) = x$, donc $D_2\Psi(0, 0) = \text{id}_E$. Nous voyons ainsi que $Dg(0, 0)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R} \times H$ sur E . Le théorème d'inversion locale montre alors qu'en restreignant éventuellement V , nous pouvons faire en sorte que g soit un difféomorphisme de classe C^q de V sur son image $g(V)$. Toujours en restreignant V , nous pouvons aussi faire en sorte que $g(V)$ soit contenu dans Ω . Posons alors $g(V) = U$ et $h = g^{-1}$. Nous voyons que U est un voisinage ouvert de a contenu dans Ω , et h un difféomorphisme de classe C^q de U sur l'ouvert V de $\mathbb{R} \times H$. Soit $Y = h_*(X|_U)$ l'image directe, par le difféomorphisme h , de la restriction à U du champ de vecteurs X . Le flot réduit de Y se déduit du flot réduit de X (restreint à U) par composition avec h et h^{-1} . Plus précisément, le flot réduit de Y est l'application

$$\begin{aligned} (t, (s, y)) &\mapsto h \circ \Psi(t, h^{-1}(s, y)) = h \circ \Psi(t, g(s, y)) = h \circ \Psi(t, \Psi(s, a + y)) \\ &= h \circ \Psi(s + t, a + y) = (s + t, y). \end{aligned}$$

Cela prouve que le champ de vecteurs Y sur l'ouvert V de $\mathbb{R} \times H$ est le champ constant dont la composante sur le facteur \mathbb{R} est 1 et la composante sur le facteur H est nulle. \square

6. Exercices

Exercice II.1. On considère l'équation différentielle sur \mathbb{R} :

$$\frac{dx}{dt} = x^2.$$

Déterminer son flot réduit en ayant soin de bien préciser son domaine de définition.

Exercice II.2. Même question pour l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 4.$$

Exercice II.3. Même question pour l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = x^3.$$

Exercice II.4. Même question pour l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2x}, \quad x > 0.$$

Exercice II.5. Même question pour l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - x.$$

Exercice II.6. On note (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 , x et y les coordonnées correspondantes. On considère le champ de vecteurs

$$X(x, y) = xe_1 + 2ye_2.$$

Trouver un difféomorphisme du demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ sur un autre ouvert de \mathbb{R}^2 qui transforme ce champ de vecteurs en un champ constant.

Exercice II.7. Même question pour le champ de vecteurs

$$X(x, y) = e_1 + \sin xe_2,$$

mais on demande cette fois un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 entier transformant ce champ de vecteurs en un champ constant.

Exercice II.8. Même question pour le champ de vecteurs

$$X(x, y) = xe_1 + (1 - x^2)e_2,$$

mais on demande un difféomorphisme défini sur l'ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1\}$, transformant ce champ de vecteurs en un champ constant.

Exercice II.9. Déterminer toutes les solutions maximales de l'équation différentielle non autonome

$$\frac{dx}{dt} = -3x^{4/3} \sin t,$$

en précisant soigneusement leurs intervalles de définition. Pour quelles données de Cauchy (t_0, x_0) la solution maximale vérifiant cette donnée de Cauchy est-elle définie sur \mathbb{R} entier?

7. Solutions

Solution II.1. Le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz est applicable à cette équation et montre que si une solution $t \mapsto x(t)$ s'annule pour une valeur particulière de t , elle est identiquement nulle. Donc une solution non identiquement nulle ne s'annule pour aucune valeur de t , ce qui permet d'écrire pour la déterminer

$$\frac{dx}{x^2} = dt,$$

d'où

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(t_0)} = t - t_0,$$

ou, en posant $x(t_0) = x_0$,

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + x_0(t - t_0)}.$$

Le dénominateur s'annule pour $t = t_0 + 1/x_0$. L'intervalle de définition de la solution maximale de l'équation qui prend la valeur x_0 pour $t = t_0$ est le plus grand intervalle de \mathbb{R} qui contient t_0 et ne contient pas $t_0 + 1/x_0$. C'est donc

- l'intervalle $] -\infty, t_0 + 1/x_0[$ si $x_0 > 0$,
- l'intervalle $]t_0 + 1/x_0, +\infty[$ si $x_0 < 0$.

Le flot de cette équation différentielle est l'application

$$(t, t_0, x_0) \mapsto \Phi(t, t_0, x_0) = \begin{cases} \frac{x_0}{1 + x_0(t_0 - t)} & \text{si } x_0 \neq 0, \\ 0 & \text{si } x_0 = 0. \end{cases}$$

Son domaine de définition est l'ensemble des $(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient

$$\begin{cases} -\infty < t < t_0 + \frac{1}{x_0} & \text{si } x_0 > 0, \\ t_0 + \frac{1}{x_0} < t < +\infty & \text{si } x_0 < 0, \\ t \in \mathbb{R} & \text{quelconque si } x_0 = 0. \end{cases}$$

Le flot réduit s'en déduit en faisant $t_0 = 0$. C'est l'application

$$(t, x_0) \mapsto \Psi(t, x_0) = \begin{cases} \frac{x_0}{1 - tx_0} & \text{si } x_0 \neq 0, \\ 0 & \text{si } x_0 = 0. \end{cases}$$

Son domaine de définition est l'ensemble des $(t, x_0) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient

$$\begin{cases} -\infty < t < \frac{1}{x_0} & \text{si } x_0 > 0, \\ \frac{1}{x_0} < t < +\infty & \text{si } x_0 < 0, \\ t \in \mathbb{R} & \text{quelconque si } x_0 = 0. \end{cases}$$

Solution II.2. En procédant comme dans l'exercice précédent, on obtient les résultats suivants. Le flot réduit de cette équation différentielle est l'application

$$(t, x_0) \mapsto \Psi(t, x_0) = \begin{cases} 2 \frac{x_0 + 2 + (x_0 - 2) \exp(4t)}{x_0 + 2 - (x_0 - 2) \exp(4t)} & \text{si } x_0 \neq 2, x_0 \neq -2, \\ -2 & \text{si } x_0 = -2, \\ 2 & \text{si } x_0 = 2. \end{cases}$$

Son domaine de définition est l'ensemble des $(t, x_0) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient

$$\begin{cases} t > \frac{1}{4} \ln \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2} & \text{si } x_0 < -2, \\ t \in \mathbb{R} & \text{quelconque si } -2 \leq x_0 \leq 2, \\ t < \frac{1}{4} \ln \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2} & \text{si } x_0 > 2. \end{cases}$$

Solution II.3. En procédant comme dans l'exercice II.1, on obtient les résultats suivants. Le flot réduit de cette équation est l'application

$$(t, x_0) \mapsto \Psi(t, x_0) = \begin{cases} \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2x_0^2 t}} & \text{si } x_0 \neq 0, \\ 0 & \text{si } x_0 = 0. \end{cases}$$

Son domaine de définition est l'ensemble des $(t, x_0) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient

$$\begin{cases} t < \frac{1}{2x_0^2} & \text{si } x_0 \neq 0, \\ t \in \mathbb{R} & \text{quelconque si } x_0 = 0. \end{cases}$$

Solution II.4. Toujours en procédant comme dans l'exercice II.1, on obtient les résultats suivants. Le flot réduit de cette équation est l'application

$$(t, x_0) \mapsto \Psi(t, x_0) = \sqrt{x_0^2 - t}.$$

Il est défini sur l'ensemble des $(t, x_0) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient $x_0 > 0$ (puisque cette condition a été imposée à l'équation) et $t < x_0^2$.

Solution II.5. Toujours en procédant comme dans l'exercice II.1, on obtient les résultats suivants. Le flot réduit de cette équation a pour expression

$$(t, x_0) \mapsto \Psi(t, x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - (x_0^2 - 1) \exp(2t)}}.$$

Son domaine de définition est

$$D = \{ (t, x_0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0^2 - (x_0^2 - 1) \exp(2t) > 0 \}.$$

Solution II.6. Soit X un champ de vecteurs différentiable défini sur un ouvert d'un espace affine de dimension finie n . Pour obtenir un difféomorphisme qui transforme (au moins sur une partie de son domaine de définition) ce champ de vecteurs en un champ constant, la méthode générale, basée sur la preuve du théorème 5.2, consiste à choisir un hyperplan (ou, plus généralement, une hypersurface) T qui coupe transversalement les courbes intégrales du champ X , à munir T d'un système de coordonnées locales (u_i) ($1 \leq i \leq n - 1$) et à associer, à chaque $(s, (u_i))$, avec $s \in \mathbb{R}$, le point au temps s de la courbe intégrale du champ de vecteurs X qui passe, au temps 0, par le point de T de coordonnées (u_i) . Le difféomorphisme cherché est l'application inverse de celle ainsi construite.

Dans le cas présent, le champ de vecteurs X est défini sur le plan \mathbb{R}^2 . La courbe intégrale $t \mapsto (x(t), y(t))$ qui passe, pour $t = 0$, par le point (x_0, y_0) a pour expression

$$x(t) = x_0 \exp(t), \quad y(t) = y_0 \exp(2t).$$

Nous voyons que la droite d'équation $x = 1$ coupe transversalement, en un point unique, chacune des courbes intégrales de X contenues dans le demi-plan $x > 0$. Nous pouvons donc lui faire jouer le rôle de l'hyperplan désigné ci-dessus par T . Comme système de coordonnées sur cette droite, nous prendrons l'ordonnée, notée u . L'application qui, à (s, u) , fait correspondre le point au temps s de la courbe intégrale de X qui passe, au temps 0, par le point $(1, u)$ a pour expression

$$(s, u) \mapsto (x = \exp(s), y = u \exp(2s)).$$

Son inverse est l'application

$$(x, y) \mapsto \left(s = \ln x, u = \frac{y}{x^2} \right).$$

C'est un difféomorphisme, défini sur le demi-plan $x > 0$, qui transforme le champ de vecteurs X en champ constant. Les composantes de l'image du champ de vecteurs X par le difféomorphisme $(x, y) \mapsto (s, u)$ s'obtiennent en effet en calculant

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} s(x(t), y(t)) \\ u(x(t), y(t)) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/x & 0 \\ -2y/x^3 & 1/x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solution II.7. La solution $t \mapsto (x(t), y(t))$ de cette équation différentielle qui prend la valeur (x_0, y_0) pour $t = 0$ est

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t, \\ y(t) = y_0 + \cos x_0 - \cos(x_0 + t). \end{cases}$$

Les courbes intégrales sont des sinusoides qui se déduisent les unes des autres par des translations parallèlement à l'axe des ordonnées. Appliquons la même méthode que dans l'exercice précédent, en prenant pour T l'axe des ordonnées, et pour coordonnée sur cet

axe l'ordonnée, notée u . L'application qui associe, à (s, u) , le point au temps s de la courbe intégrale qui, au temps 0, passe par le point $(0, u)$, a pour expression

$$(s, u) \mapsto (x = s, y = u + 1 - \cos s).$$

Le difféomorphisme cherché est l'application inverse de la précédente. Son expression est

$$(x, y) \mapsto (s = x, u = y - 1 + \cos x).$$

Solution II.8. La solution $t \mapsto (x(t), y(t))$ de cette équation différentielle qui prend la valeur (x_0, y_0) pour $t = 0$, avec $|x_0| < 1$, est

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \exp(t), \\ y(t) = y_0 + t + \frac{x_0^2(1 - \exp(2t))}{2}. \end{cases}$$

Nous nous intéressons aux courbes intégrales contenues dans l'ouvert

$$U = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1 \}.$$

Il n'existe aucune droite du plan \mathbb{R}^2 qui rencontre chacune de ces courbes en un point unique. Par contre, la courbe d'équation

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad -1 < x < 1,$$

rencontre chacune de ces courbes en un point unique. Nous pouvons donc lui faire jouer le rôle de l'hypersurface notée T dans l'exercice II.6. Nous paramétrons cette courbe au moyen d'un paramètre u , selon

$$u \mapsto \left(x(u) = u, y(u) = \frac{1}{u^2 - 1} \right).$$

Nous voyons ainsi que l'application

$$(s, u) \mapsto \left(x = u \exp(s), y = \frac{1}{u^2 - 1} + s + \frac{u^2(1 - \exp(2s))}{2} \right)$$

est un difféomorphisme, défini sur l'ouvert

$$V = \{ (s, u) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < u < 1, |u| \exp(s) < 1 \}$$

et appliquant V sur l'ouvert U . Le difféomorphisme inverse transforme le champ de vecteurs X en un champ constant.

Solution II.9. Cette équation différentielle est de la forme

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

la fonction f étant de classe C^1 . Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que pour toute donnée de Cauchy (t_0, x_0) , il existe une solution maximale unique $t \mapsto x(t)$ vérifiant $x(t_0) = x_0$. Si $x_0 = 0$, nous voyons immédiatement que l'application constante $t \mapsto 0$, définie sur \mathbb{R} entier, est solution; c'est donc la solution maximale pour toute donnée de Cauchy de la forme $(t_0, 0)$. Si $x_0 \neq 0$, l'unicité de la solution maximale vérifiant une donnée de Cauchy montre que pour tout élément t de l'intervalle de définition de la solution, $x(t) \neq 0$. De plus, par continuité, nous voyons que $x(t)$ est de même signe que x_0 . Afin de déterminer cette solution nous pouvons écrire

$$-\frac{1}{3} x^{-4/3} dx = \sin t dt,$$

ou encore

$$d(x^{-1/3}) = -d(\cos t),$$

qui s'intègre en

$$x^{-1/3} - x_0^{-1/3} = \cos t_0 - \cos t,$$

d'où l'expression de la solution

$$x(t) = \frac{x_0}{(1 + x_0^{1/3}(\cos t_0 - \cos t))^3}.$$

L'intervalle de définition de cette solution est le plus grand intervalle ouvert contenant t_0 sur lequel l'expression $1 + x_0^{1/3}(\cos t_0 - \cos t)$, qui figure au dénominateur du membre de droite de l'égalité ci-dessus, est non nul. C'est donc le plus grand intervalle ouvert contenant t_0 sur lequel on a

$$x_0^{1/3} \cos t < 1 + x_0^{1/3} \cos t_0,$$

ou encore

$$\cos t \begin{cases} < \cos t_0 + x_0^{-1/3} & \text{si } x_0 > 0, \\ > \cos t_0 + x_0^{-1/3} & \text{si } x_0 < 0. \end{cases}$$

En remarquant que $\cos t$ est toujours compris entre -1 et 1 et prend, lorsque t parcourt \mathbb{R} , toutes les valeurs comprises entre -1 et 1 , nous voyons que la solution maximale satisfaisant la donnée de Cauchy (t_0, x_0) est définie sur \mathbb{R} entier si et seulement si

$$-(1 + \cos t_0)^{-3} x_0 < (1 - \cos t_0)^{-3},$$

avec, par convention, $(1 - \cos t_0)^{-3} = +\infty$ si $\cos t_0 = 1$ et $-(1 + \cos t_0)^{-3} = -\infty$ si $\cos t_0 = -1$. On remarque d'ailleurs que dans le plan \mathbb{R}^2 (coordonnées (t, x)), les courbes d'équations

$$x(1 - \cos t)^3 = 1 \quad \text{et} \quad x(1 + \cos t)^3 = -1$$

sont des réunions de graphes de solutions maximales de l'équation différentielle étudiée (chaque composante connexe d'une de ces courbes est le graphe d'une solution maximale). Dans le plan \mathbb{R}^2 , la réunion de ces courbes est la frontière de l'ensemble des données de Cauchy pour lesquelles les solutions maximales sont définies sur \mathbb{R} entier.

Chapitre III

Points d'équilibre d'un système dynamique

Nous étudions dans ce chapitre les éléments remarquables les plus simples du portrait de phases d'un système dynamique : les points d'équilibre. Nous montrons d'abord (propositions 1.4 et 1.5) que sous des hypothèses assez peu restrictives, lorsqu'un élément de l'espace des phases d'un système dynamique a un ensemble ω -limite (resp., α -limite) réduit à un point en lequel le générateur (ou le générateur infinitésimal) du système est défini, ce point est un point d'équilibre du système.

Nous introduisons ensuite les notions de point d'équilibre ω -stable (ou α -stable) au sens de Liapounov et de point d'équilibre attractif (ou répulsif). Nous établissons deux formes de l'important théorème de Liapounov applicables, l'une aux systèmes à temps discret (2.5), l'autre aux systèmes à temps continu (2.6), et nous en donnons plusieurs applications. Nous établissons ensuite deux variantes du théorème de Liapounov; l'une est relative au bassin d'attraction d'un point d'équilibre; l'autre permet, dans certains cas, de prouver l'instabilité d'un point d'équilibre.

Dans le paragraphe 5, nous décrivons tous les points d'équilibre isolés (nœuds, cols, foyers et centres) des champs de vecteurs linéaires dans le plan.

Les paragraphes 6 et 7 étendent cette classification aux points d'équilibre isolés des champs de vecteurs différentiables, mais pas nécessairement linéaires. Nous introduisons d'abord certaines notions, telles que celle de demi-droite tangente à une courbe paramétrée en une de ses extrémités (6.4) et celle de direction caractéristique en un point d'équilibre (6.10) qui sont applicables en toute dimension. Enfin, dans le paragraphe 7, nous faisons une étude directe du portrait de phases d'un champ de vecteurs différentiable dans le plan, au voisinage d'un point d'équilibre non dégénéré; nous montrons que la classification de ces points en nœuds, cols et foyers, faite précédemment pour les champs de vecteurs linéaires, subsiste dans ce contexte plus général. Au chapitre V, en utilisant des méthodes beaucoup moins élémentaires (théorème de Hartman et Grobman et théorème d'existence des variétés stable et instable) nous montrerons que certains de ces résultats s'étendent en dimension quelconque.

1. Généralités sur les points d'équilibre

1.1. Rappel. — Soit $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ un système dynamique sur un ensemble Ω , paramétré par un ensemble des temps Θ qui pourra être \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ , \mathbb{N} ou \mathbb{Z} . Comme précédemment, pour tout $t \in \Theta$, nous notons U_t le sous-ensemble de Ω sur lequel l'application φ_t est définie. Une *point d'équilibre* de ce système (définition I.2.2) est un point a de Ω dont l'orbite est $\{a\}$, c'est-à-dire tel que pour tout $t \in \Theta$ pour lequel $a \in U_t$, $\varphi_t(a) = a$. Bien entendu, si le point a n'appartient à U_t pour aucune valeur de t autre que $t = 0$, c'est un point d'équilibre; mais ce cas ne présente guère d'intérêt; nous l'écartérons dans la suite.

Les propositions qui suivent montrent que la connaissance du générateur ou du générateur infinitésimal d'un système dynamique (selon que ce système est à temps discret ou à temps continu) permet en général de déterminer facilement ses points d'équilibre.

1.2. Proposition. — Soit $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}\}$ un système dynamique à temps discret sur un ensemble Ω , et $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \Omega$ son générateur. Un point $a \in U_1$ est point d'équilibre si et seulement si $\varphi_1(a) = a$. Lorsque c'est le cas, $\varphi_n(a)$ est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ si l'ensemble des temps est \mathbb{N} , et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si l'ensemble des temps est \mathbb{Z} , et on a $\varphi_n(a) = a$.

Preuve : Si le point a de U_1 est point d'équilibre, on a évidemment $\varphi_1(a) = a$. Réciproquement, si $\varphi_1(a) = a$, alors $a \in U_2$ et $\varphi_2(a) = \varphi_1 \circ \varphi_1(a) = a$. De proche en proche on voit que $\varphi_n(a)$ est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et vérifie $\varphi_n(a) = a$. Si le système dynamique est paramétré par \mathbb{Z} , φ_1 est une bijection de U_1 sur U_{-1} , d'inverse φ_{-1} . On voit alors que $a \in U_{-1}$ et que $\varphi_{-1}(a) = a$. Puisque $\varphi_{-2} = \varphi_{-1} \circ \varphi_{-1}$, on voit que $a \in U_{-2}$ et que $\varphi_{-2}(a) = a$. De proche en proche, on montre de même que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a \in U_n$ et $\varphi_n(a) = a$. \square

1.3. Proposition. — Soit \mathcal{E} un espace affine dont l'espace vectoriel associé E est un espace de Banach réel, Ω un ouvert de \mathcal{E} , $X : \Omega \rightarrow E$ un champ de vecteurs localement lipschitzien défini sur Ω , Ψ son flot réduit et $\{\Psi_t ; t \in \mathbb{R}\}$ le système dynamique qui lui est associé. Un point a de Ω est point d'équilibre du système si et seulement si $X(a) = 0$. Lorsque c'est le cas, $\Psi_t(a)$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ et vérifie $\Psi_t(a) = a$.

Preuve : L'application $t \mapsto \Psi_t(a)$ est la solution maximale de l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)) \quad (*)$$

qui vérifie $\varphi(0) = a$. Si le point a est un point d'équilibre, cette application est une application constante, donc sa dérivée, en tout point de l'intervalle ouvert sur lequel elle est définie, est nulle; en particulier, sa dérivée au point $t = 0$, qui n'est autre que $X(a)$, est nulle. Réciproquement, si $X(a) = 0$, l'application constante $t \mapsto a$, définie sur \mathbb{R} entier, est visiblement solution de l'équation différentielle (*) et prend la valeur a pour $t = 0$; elle est maximale, puisque définie sur \mathbb{R} entier. D'après le théorème d'existence et d'unicité globales II.2.9, cette solution est nécessairement l'application $t \mapsto \Psi_t(a)$. \square

Les deux propositions suivantes montrent, d'abord pour un système dynamique à temps discret, puis pour un système dynamique à temps continu, moyennant des hypothèses peu restrictives en pratique, que si une orbite admet pour limite (lorsque le temps tend vers une extrémité de son intervalle de définition) un point a de l'ensemble sur lequel est défini le générateur (ou le générateur infinitésimal) du système dynamique, alors le point a est un point d'équilibre.

1.4. Proposition. — Soit $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}\}$ un système dynamique à temps discret sur un ensemble Ω . On suppose que Ω est un espace topologique séparé et que les applications φ_n sont continues. Soit x_0 un point de Ω tel que $\varphi_n(x_0)$ soit défini pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x_0)$ existe et appartienne à l'ensemble U_1 sur lequel est défini le générateur φ_1 du système. Appelons a cette limite. Alors a est un point d'équilibre. Si de plus $x_0 \neq a$ et si le générateur φ_1 est une application injective, les points $x_n = \varphi_n(x_0)$ sont deux à deux distincts, et distincts de a .

Preuve : Posons $\varphi_1(a) = b$. Supposons $b \neq a$. Puisque Ω est séparé, il existe un voisinage U de a et un voisinage V de b disjoints, c'est-à-dire tels que $U \cap V = \emptyset$ (voir figure III.1). Puisque φ_1 est continue, $(\varphi_1)^{-1}(V)$ est un voisinage de a , donc $U \cap (\varphi_1)^{-1}(V)$ est aussi un voisinage de a . Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x_0) = a$, il existe un entier N tel que, pour tout

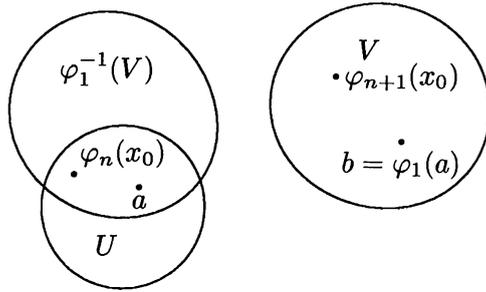


Figure III.1. Illustration de la preuve de la proposition 1.4.

$n \geq N$, on ait $\varphi_n(x_0) \in U \cap (\varphi_1)^{-1}(V)$. Soit n un entier vérifiant $n \geq N$. Nous avons alors $\varphi_n(x_0) \in U \cap (\varphi_1)^{-1}(V)$, donc $\varphi_1(\varphi_n(x_0)) = \varphi_{n+1}(x_0) \in V$, en contradiction avec $\varphi_{n+1}(x_0) \in U$, puisque $U \cap V = \emptyset$. Nous avons ainsi prouvé que $b = a$, donc (compte tenu de la proposition 1.2) que a est un point d'équilibre.

Supposons de plus $x_0 \neq a$ et φ_1 injective. Les points $x_n = \varphi_n(x_0)$ sont deux à deux distincts car si ce n'était pas le cas l'orbite du point x_0 serait périodique et on ne pourrait pas avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x_0) = a$. S'il existait un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi_n(x_0) = a$, nécessairement cet entier serait > 0 puisque $x_0 \neq a$, et il existerait un entier m vérifiant $0 \leq m < n$ tel que $\varphi_m(x_0) \neq a$ et $\varphi_{m+1}(x_0) = a$. Nous aurions alors $\varphi_1(a) = \varphi_1(\varphi_m(x_0)) = a$, ce qui contredirait l'injectivité de φ_1 . \square

1.5. Proposition. — Soit $X : \Omega \rightarrow E$ un champ de vecteurs localement lipschitzien sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} dont l'espace vectoriel associé est un espace de Banach réel, Ψ son flot réduit et $\{\Psi_t ; t \in \mathbb{R}\}$ le système dynamique qui lui est associé. Soit x_0 un point de Ω et $I(x_0) =]\alpha, \beta[$ l'intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant l'origine sur lequel est définie l'application $t \mapsto \Psi_t(x_0)$. On suppose que $\lim_{t \rightarrow \beta} \Psi_t(x_0)$ existe et que c'est un élément a de Ω . Alors a est un point d'équilibre. De plus, l'extrémité droite β de l'intervalle $I(x_0)$ est égale à $+\infty$ et, si $x_0 \neq a$, l'application $t \mapsto \Psi_t(x_0)$ est injective et pour tout réel $t \in I(x_0)$, $\Psi_t(x_0) \neq a$.

Preuve : Supposons $X(a) \neq 0$. Considérons la solution $t \mapsto \Psi_t(a)$ qui passe par a pour $t = 0$. Sa dérivée au point $t = 0$ est $X(a)$, qui par hypothèse est non nul. Il existe donc un réel $\theta > 0$ tel que $\Psi_\theta(a)$ soit défini et non égal à a . Posons $\Psi_\theta(a) = b$ (voir figure III.2).

D'après les propriétés du flot réduit (II.4.12), l'application Ψ_θ est définie sur un ouvert U_θ contenant a ; elle a pour image un ouvert $U_{-\theta}$ contenant b , et c'est un homéomorphisme de U_θ sur $U_{-\theta}$, qui applique a sur b . Soient U un voisinage ouvert de a et V un voisinage ouvert de b tels que $U \cap V = \emptyset$. Soit $W = U \cap (\Psi_\theta)^{-1}(V \cap U_{-\theta})$. C'est un voisinage de a ; comme $\lim_{t \rightarrow \beta} \Psi_t(x_0) = a$, il existe $t_0 \in I(x_0)$ tel que, pour tout $s \in]t_0, \beta[$, $\Psi_s(x_0)$ soit élément de W . Soit $t \in]t_0, \beta[$. Nous avons $\Psi_t(x_0) \in W$, donc $\Psi_\theta \circ \Psi_t(x_0) \in \Psi_\theta(W)$. Cela prouve que $t + \theta \in I(x_0)$, et que $\Psi_{t+\theta}(x_0)$, qui est égal à $\Psi_\theta \circ \Psi_t(x_0)$, est élément de $\Psi_\theta(W)$. Comme $\Psi_\theta(W) \subset V$, et comme $V \cap U = \emptyset$, $\Psi_{t+\theta}(x_0)$ n'est pas élément de U , donc n'est pas non plus élément de W puisque $W \subset U$. Cela contredit le fait que pour tout $s \in]t_0, \beta[$, $\Psi_s(x_0) \in W$. Nous avons donc prouvé que $X(a) = 0$. D'après 1.3, le point a est bien un point d'équilibre.

Montrons maintenant que $\beta = +\infty$. Bien entendu, $\beta > 0$ puisque $I(x_0)$ contient 0. Supposons β fini. Le point (β, a) de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ serait alors élément du bout droit de la solution maximale $t \mapsto \Psi_t(x_0)$ de l'équation différentielle associée au champ de vecteurs X . D'après le théorème II.3.3, (β, a) devrait être élément de la frontière de $\mathbb{R} \times \Omega$ dans

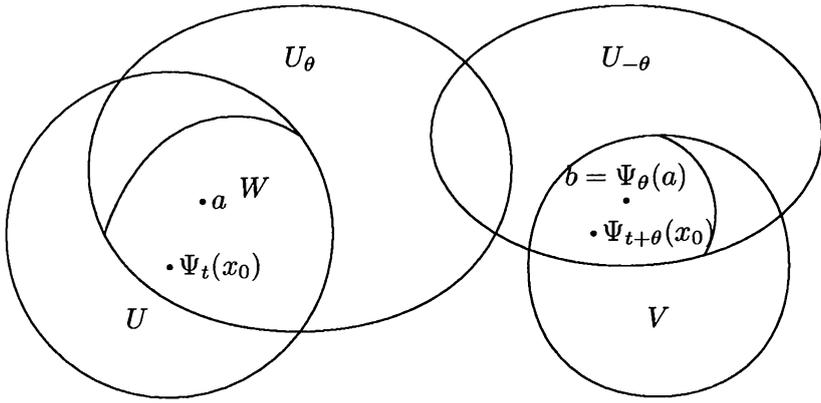


Figure III.2. Illustration de la preuve de la proposition 1.5.

$\mathbb{R} \times E$. Ce n'est pas le cas puisque a est élément de Ω . Nous pouvons donc conclure que $\beta = +\infty$.

Supposons $x_0 \neq a$. L'application $t \mapsto \Psi_t(x_0)$ est injective, car si ce n'était pas le cas l'orbite de x_0 serait périodique et nous ne pourrions pas avoir $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Psi_t(x_0) = a$. De plus, si pour un élément t_1 de $I(x_0)$, nous avons $\Psi_{t_1}(x_0) = a$, nous aurions deux solutions maximales de l'équation différentielle associée au champ de vecteurs X prenant la valeur a pour $t = t_1$: la solution constante $t \mapsto a$, et la solution $t \mapsto \Psi_t(x_0)$; si $x_0 \neq a$, cette dernière solution n'est pas constante; nous aurions donc deux solutions maximales distinctes vérifiant la même donnée de Cauchy (t_1, a) , ce qui est impossible. Nous avons donc prouvé que pour tout $t \in I(x_0)$, $\Psi_t(x_0) \neq a$. \square

1.6. Remarque. — On peut bien entendu énoncer et prouver des propositions analogues aux propositions 1.4 et 1.5 où on remplace les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x_0)$ et $\lim_{t \rightarrow \beta} \Psi_t(x_0)$, respectivement par les limites $\lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi_n(x_0)$ et $\lim_{t \rightarrow \alpha} \Psi_t(x_0)$. Nous laissons au lecteur le soin de le faire.

2. Stabilité d'un point d'équilibre

2.1. Définitions. — Soit $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ un système dynamique sur un ensemble Ω , dont l'ensemble des temps Θ peut être \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ , \mathbb{N} ou \mathbb{Z} . On suppose que Ω est un espace topologique séparé. Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre.

1. On dit que le point d'équilibre a est ω -stable au sens de Liapounov si pour tout voisinage V de a , il existe un autre voisinage W de a tel que, pour tout point $x \in W$ et tout $t \in \Theta$ vérifiant $t \geq 0$, $\varphi_t(x)$ est défini et appartient à V .

2. On suppose que l'ensemble des temps Θ est \mathbb{R} ou \mathbb{Z} . On dit que le point d'équilibre a est α -stable au sens de Liapounov si pour tout voisinage V de a , il existe un autre voisinage W de a tel que, pour tout point $x \in W$ et tout $t \in \Theta$ vérifiant $t \leq 0$, $\varphi_t(x)$ est défini et appartient à V .

2.2. Définitions. — Soit $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ un système dynamique sur un ensemble Ω , dont l'ensemble des temps Θ peut être \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ , \mathbb{N} ou \mathbb{Z} . On suppose que Ω est un espace topologique séparé. Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre.

1. On dit que le point d'équilibre a est attractif, ou asymptotiquement ω -stable, s'il existe un voisinage W de a tel que, pour tout point $x \in W$ et tout $t \in \Theta$ vérifiant $t \geq 0$, $\varphi_t(x)$ est défini et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x) = a$.

2. On suppose que l'ensemble des temps Θ est \mathbb{R} ou \mathbb{Z} . On dit que le point d'équilibre a est *répulsif*, ou *asymptotiquement α -stable*, s'il existe un voisinage W de a tel que, pour tout point $x \in W$ et tout $t \in \Theta$ vérifiant $t \leq 0$, $\varphi_t(x)$ est défini et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) = a$.

2.3. Remarque. — Une lecture peu attentive des définitions ci-dessus peut laisser croire qu'un point d'équilibre attractif est automatiquement ω -stable au sens de Liapounov. Il n'en est rien : on peut donner des exemples de points d'équilibre attractifs et non ω -stables, ainsi que des exemples de points d'équilibre ω -stables et non attractifs (voir exercice III.1).

Nous allons établir un important théorème, dû à Alexandre Liapounov, donnant des conditions suffisantes pour qu'un point d'équilibre soit ω -stable, et aussi des conditions suffisantes pour qu'un tel point soit attractif. Nous l'énoncerons d'abord pour un système dynamique à temps discret, puis pour un système dynamique à temps continu ayant pour générateur infinitésimal un champ de vecteurs localement lipschitzien. Dans les deux cas, la preuve de la seconde partie du théorème repose sur le lemme suivant.

2.4. Lemme. — Soit $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ un système dynamique sur un ensemble Ω , dont l'ensemble des temps Θ peut être \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ , \mathbb{N} ou \mathbb{Z} . On suppose que Ω est un espace topologique séparé et que les applications φ_t sont continues. Soit x_0 un point de Ω tel que, pour tout $t \in \Theta$ vérifiant $t \geq 0$, $\varphi_t(x_0)$ soit défini. On suppose aussi qu'il existe une fonction f , définie et continue sur un ouvert V de Ω , à valeurs réelles, telle que pour tout $t \in \Theta$ vérifiant $t \geq 0$, $\varphi_t(x_0)$ soit élément de V , et que l'application $t \mapsto f(\varphi_t(x_0))$ soit décroissante au sens large, c'est-à-dire telle que $t \leq s$ implique $f(\varphi_t(x_0)) \geq f(\varphi_s(x_0))$. Soit $L_\omega(x_0)$ l'ensemble ω -limite de x_0 (définition I.2.4). Alors f est constante sur $V \cap L_\omega(x_0)$.

Preuve : La propriété est trivialement vérifiée si $V \cap L_\omega(x_0)$ est vide ou réduit à un seul point. Supposons donc qu'il existe au moins deux points distincts b et c de $V \cap L_\omega(x_0)$, et que $f(b) \neq f(c)$. Supposons par exemple $f(b) < f(c)$ (nous pouvons toujours nous ramener à ce cas en échangeant b et c). La fonction f étant continue, il existe un voisinage W de b et un voisinage W' de c tels que $W \subset V$, $W' \subset V$, $W \cap W' = \emptyset$, et que, pour tout $x \in W$ et tout $x' \in W'$, on ait $f(x) < f(x')$. Puisque b et c sont éléments de $L_\omega(x_0)$, il existe une infinité de réels s , pouvant être arbitrairement grands, et une infinité de réels s' , pouvant aussi être arbitrairement grands, tels que $\varphi_s(x_0) \in W$ et $\varphi_{s'}(x_0) \in W'$. En choisissant $s < s'$, nous avons $f(\varphi_s(x_0)) \geq f(\varphi_{s'}(x_0))$ car la fonction $t \mapsto f(\varphi_t(x_0))$ est décroissante. Mais cela est en contradiction avec $\varphi_s(x_0) \in W$ et $\varphi_{s'}(x_0) \in W'$. Nous concluons que $f(b) = f(c)$. \square

2.5. Théorème de Liapounov; cas d'un système à temps discret. — Soit $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}\}$ un système dynamique à temps discret sur un ensemble Ω . On suppose que Ω est un ouvert d'un espace affine de dimension finie \mathcal{E} , que l'ensemble U_1 sur lequel est défini le générateur φ_1 du système est un ouvert et que ce générateur φ_1 est une application continue. Soit $a \in U_1$ un point d'équilibre. On suppose qu'il existe une fonction f , définie sur un voisinage ouvert V de a , continue sur V , à valeurs réelles, vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) la fonction f admet un minimum strict au point a : autrement dit, pour tout $x \in V$, $x \neq a$, on a $f(x) > f(a)$;
- (ii) pour tout $x \in V \cap U_1 \cap (\varphi_1)^{-1}(V)$, on a $f(\varphi_1(x)) \leq f(x)$.

Alors le point d'équilibre a est ω -stable au sens de Liapounov.

Si de plus la fonction f vérifie :

(iii) pour tout $x \in V \cap U_1 \cap (\varphi_1)^{-1}(V)$ vérifiant $x \neq a$, on a $f(\varphi_1(x)) < f(x)$, alors le point d'équilibre a est attractif.

Preuve : Munissons l'espace vectoriel E associé à l'espace affine \mathcal{E} d'une norme quelconque, et l'espace \mathcal{E} de la distance associée. Soit V_1 un voisinage de a . Puisque V est aussi voisinage de a , $V \cap V_1$ est voisinage de a . Il existe donc $r > 0$ tel que la boule fermée $B_F(a, r)$, de centre a et de rayon r , soit contenue dans $V \cap V_1$. Posons, pour alléger l'écriture, $K = B_F(a, r)$. Puisque φ_1 est continue et vérifie $\varphi_1(a) = a$, et que U_1 est voisinage de a , $K \cap U_1 \cap (\varphi_1)^{-1}(K)$ est voisinage de a . Il existe donc un réel $r' > 0$ tel que la boule fermée $B_F(a, r')$, de centre a et de rayon r' , soit contenue dans $K \cap U_1 \cap (\varphi_1)^{-1}(K)$. Soit $B(a, r')$ la boule ouverte de centre a et de rayon r' , et $K - B(a, r')$ son complémentaire relativement à K . C'est une partie de Ω non vide (puisque $0 < r' < r$), fermée et bornée, donc compacte. La restriction de f à $K - B(a, r')$ est continue, donc atteint son minimum m en un point au moins; ce point est nécessairement distinct de a , puisque a n'est pas élément de $K - B(a, r')$. Par suite, m est strictement supérieur à $f(a)$. Posons alors

$$W = \{ x \in B(a, r') ; f(x) < m \}.$$

C'est un voisinage du point a contenu dans U_1 , donc pour tout point $x \in W$, $\varphi_1(x)$ existe, et vérifie $f(\varphi_1(x)) \leq f(x) < m$. Comme W est contenu dans $(\varphi_1)^{-1}(K)$, $\varphi_1(x)$ est élément de K . Il ne peut pas être élément de $K - B(a, r')$, car si c'était le cas, nous aurions $f(\varphi_1(x)) \geq m$. Donc $\varphi_1(x)$ est élément de $B(a, r')$, et même de W , puisque $f(\varphi_1(x)) < m$. Nous pouvons donc définir $\varphi_2(x) = \varphi_1(\varphi_1(x))$, et nous voyons comme ci-dessus qu'il est élément de W . De proche en proche, nous voyons de même que pour tout entier $n \geq 1$, le point $\varphi_n(x) = \varphi_1(\varphi_{n-1}(x))$ est élément de W . Comme W est un voisinage de a contenu dans V_1 , nous avons prouvé que le point d'équilibre a est ω -stable au sens de Liapounov.

Supposons maintenant de plus la propriété (iii) vérifiée. En choisissant un voisinage V_1 quelconque de a , on définit le voisinage W de a comme ci-dessus. Soit $x_0 \in W$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = \varphi_n(x_0)$. La suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ est contenue dans W , lui-même contenu dans la boule fermée $B_F(a, r')$. Celle-ci étant compacte, la suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ admet des valeurs d'adhérence. Soit b l'une d'elles; c'est un élément de $B_F(a, r')$, donc aussi de U_1 , et bien entendu un élément de $L_\omega(x_0)$. Nous voyons que $\varphi_1(b)$ est défini, et appartient à V . De plus, $\varphi_1(b)$, ainsi d'ailleurs que tout point de l'orbite de b , est élément de $L_\omega(x_0)$. D'après le lemme 2.4, $f(\varphi_1(b)) = f(b)$. Mais cela n'est possible que si $b = a = \varphi_1(a)$. Nous avons ainsi prouvé que la suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ admet a comme unique valeur d'adhérence. Comme cette suite est contenue dans le compact $B_F(a, r')$, elle converge vers a (voir par exemple [17], chapitre IV, paragraphe 1.6 b). \square

2.6. Théorème de Liapounov; cas d'un système à temps continu. — Soit $X : \Omega \rightarrow E$ un champ de vecteurs localement lipschitzien sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, dont l'espace vectoriel associé E est muni d'une norme, Ψ son flot réduit et $\{ \Psi_t ; t \in \mathbb{R} \}$ le système dynamique qui lui est associé. Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre. On suppose qu'il existe une fonction f , définie et continue sur un voisinage ouvert V de a , à valeurs réelles, vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) la fonction f admet un minimum strict au point a : autrement dit, pour tout $x \in V$, $x \neq a$, on a $f(x) > f(a)$;
- (ii) la fonction f est différentiable sur $V - \{ a \}$ et, pour tout point $x \in V$, $x \neq a$, on a $\langle df(x), X(x) \rangle \leq 0$.

Alors le point d'équilibre a est ω -stable au sens de Liapounov.

Si de plus la fonction f vérifie :

(iii) pour tout point $x \in V$, $x \neq a$, on a $\langle df(x), X(x) \rangle < 0$,

alors le point d'équilibre a est attractif.

Preuve : Soit V_1 un voisinage de a . Puisque V est aussi voisinage de a , $V \cap V_1$ est voisinage de a . Il existe donc $r > 0$ tel que la boule fermée $B_F(a, r)$, de centre a et de rayon r , soit contenue dans $V \cap V_1$. Soit $S = \{x \in \mathcal{E} ; \|x - a\| = r\}$ la sphère de centre a et de rayon r . C'est la frontière de la boule fermée $B_F(a, r)$, et c 'est une partie de \mathcal{E} fermée et bornée, donc compacte (voir figure III.3).

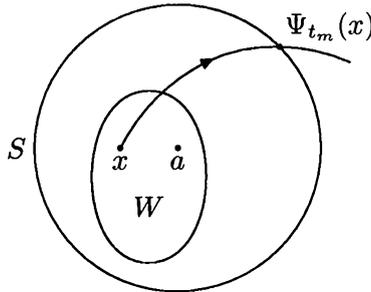


Figure III.3. Illustration de la preuve du théorème 2.6.

Puisque la restriction de f à S est continue, elle atteint son minimum sur S en un point de S ; comme $a \notin S$, ce minimum m vérifie $m > f(a)$. Soit

$$W = \{x \in E ; \|x - a\| < r \text{ et } f(x) < m\}.$$

C'est un voisinage ouvert de a , contenu dans $B_F(x, r)$, donc aussi dans V_1 . Soit $x \in W$, et I_x l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $\Psi_t(x)$ existe. Si $x = a$, nous avons bien sûr $I_a = \mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Psi_t(a) = a$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\Psi_t(a) \in V_1$. Supposons maintenant $x \neq a$. Nous savons alors que pour tout $t \in I_x$, $\Psi_t(x) \neq a$. Montrons que pour tout $t \in I_x$ vérifiant $t \geq 0$, $\Psi_t(x)$ est élément de la boule ouverte $B(a, r)$. Supposons que ce ne soit pas le cas et posons $t_m = \inf\{t \in I_x ; t \geq 0 \text{ et } \|\Psi_t(x) - a\| \geq r\}$; nous avons $\Psi_{t_m}(x) \in S$ et, pour tout t vérifiant $0 \leq t < t_m$, $\Psi_t(x) \in B(a, r)$. La fonction $t \mapsto f(\Psi_t(x))$ est différentiable en tout $t \in I_x$ tel que $\Psi_t(x)$ appartienne à V , donc en tout t vérifiant $0 \leq t \leq t_m$, et a pour dérivée

$$\frac{d}{dt} f(\Psi_t(x)) = \langle df(\Psi_t(x)), \frac{d}{dt} \Psi_t(x) \rangle = \langle df(\Psi_t(x)), X(\Psi_t(x)) \rangle \leq 0,$$

ce qui prouve que $t \mapsto f(\Psi_t(x))$ est décroissante sur $[0, t_m]$. Par suite, $f(\Psi_{t_m}(x)) \leq f(x) < m$. Ceci est en contradiction avec le fait que $\Psi_{t_m}(x) \in S$ et que m est la borne inférieure de f sur S . Nous avons ainsi prouvé que pour tout $t \in I_x$ vérifiant $t \geq 0$, $\Psi_t(x)$ est élément de $B(a, r)$, donc, *a fortiori*, élément de $B_F(a, r)$. Comme $B_F(a, r)$ est compact, cela prouve (théorème II.3.3) que $\Psi_t(x)$ est défini pour tout $t \geq 0$ (autrement dit, que l'intervalle I_x n'est pas borné à droite) et appartient à $B(a, r)$. Nous avons bien prouvé que a est stable au sens de Liapounov.

Supposons maintenant de plus la propriété (iii) vérifiée. Choisissons un voisinage V_1 quelconque de a , et définissons le voisinage W de a comme ci-dessus. Soit $x \in W$. Pour tout $t \geq 0$, $\Psi_t(x)$ appartient au compact $B_F(a, r)$; l'application $t \mapsto \Psi_t(x)$ admet donc des valeurs d'adhérence lorsque $t \rightarrow +\infty$. Soit b une de ces valeurs d'adhérence. C'est un élément de $B_F(a, r)$, donc aussi de l'ouvert V , et un élément de $L_\omega(x)$. L'application

$\theta \mapsto \Psi_\theta(b)$ étant continue et prenant la valeur b pour $\theta = 0$, nous pouvons affirmer que pour $\theta > 0$ assez petit, $\Psi_\theta(b)$ est élément de V . D'autre part, $\Psi_\theta(b)$ est, comme b , élément de $L_\omega(x)$. D'après le lemme 2.4, nous avons nécessairement $f(\Psi_\theta(b)) = f(b)$. Si b était distinct de a , nous aurions

$$\frac{d}{d\theta} f(\Psi_\theta(x)) \Big|_{\theta=0} = \langle df(b), X(b) \rangle < 0,$$

de sorte que pour $\theta > 0$ assez petit, nous aurions $f(\Psi_\theta(b)) < f(b)$. Cela prouve que $b = a$. Lorsque $t \rightarrow +\infty$, l'application $t \mapsto \Psi_t(x)$ a pour seule valeur d'adhérence le point a , et prend ses valeurs dans un compact; elle converge donc vers a . Nous avons prouvé que le point a est attractif. \square

2.7. Remarques

a) Dérivée de Lie. — L'expression $\langle df(x), X(x) \rangle$, qui figure dans l'énoncé du théorème de Liapounov 2.6, a une interprétation très simple : soit $t \mapsto \Psi_t(x)$ la solution de l'équation différentielle associée au champ de vecteurs X passant par le point x pour $t = 0$. Nous avons alors, ainsi d'ailleurs que nous l'avons vu au cours de la démonstration,

$$\langle df(x), X(x) \rangle = \frac{d}{dt} (f \circ \Psi_t(x)) \Big|_{t=0}.$$

On appelle souvent cette expression valeur au point x de la *dérivée de Lie* de la fonction f selon le champ de vecteurs X , et on la note $(\mathcal{L}(X)f)(x)$.

b) Points d'équilibre α -stables ou répulsifs. — Il est facile d'énoncer et de prouver des propriétés analogues à celles indiquées par les théorèmes 2.5 et 2.6 en remplaçant ω -stable par α -stable et attractif par répulsif. Nous laissons au lecteur le soin de le faire.

Nous allons appliquer le théorème de Liapounov 2.6 pour prouver la stabilité et le caractère attractif de l'origine pour certains champs de vecteurs linéaires.

2.8. Proposition. — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et $A \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme linéaire de E . On considère l'équation différentielle linéaire

$$\varphi'(t) = A(\varphi(t)).$$

Si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative (resp., strictement positive), l'origine de E est un point d'équilibre ω -stable et attractif (resp., α -stable et répulsif) pour le système dynamique associé au flot de cette équation différentielle.

Preuve : Nous traiterons le cas où les valeurs propres de A ont toutes une partie réelle strictement négative (celui où elles ont toutes une partie réelle strictement positive s'en déduit en changeant A en $-A$ et t en $-t$). Remarquons d'abord que l'origine est évidemment un point d'équilibre, puisque $A(0) = 0$. D'après l'hypothèse faite sur les valeurs propres de A , il existe un réel $M < 0$, strictement supérieur aux parties réelles de toutes les valeurs propres de A . Un théorème d'algèbre linéaire (rappelé et prouvé en VII.1.17) montre qu'il existe sur E un produit scalaire euclidien $(x, y) \mapsto (x|y)$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$(A(x) | x) \leq M(x|x).$$

Posons, pour tout $x \in E$, $f(x) = (x|x)$. C'est une fonction différentiable sur E , qui admet à l'origine un minimum strict puisque $f(0) = 0$ et que, pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, $f(x) > 0$. Pour tout $x \in E$, nous avons

$$\langle df(x), A(x) \rangle = 2(A(x) | x) \leq 2M(x|x) < 0 \quad \text{pour tout } x \in E, x \neq 0,$$

puisque $M < 0$. Le théorème de Liapounov 2.6 s'applique donc, et montre que l'origine est un point d'équilibre ω -stable et attractif. \square

Le théorème VII.1.17, combiné avec une inégalité, permet d'étendre le résultat ci-dessus à certains points d'équilibre d'équations différentielles pas nécessairement linéaires. C'est l'objet de la proposition suivante.

2.9. Proposition. — Soit $X : \Omega \rightarrow E$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, d'espace vectoriel associé E , Ψ son flot réduit et $\{\Psi_t ; t \in \mathbb{R}\}$ le système dynamique qui lui est associé. Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre, et $A = DX(a)$ la différentielle de X au point a . Si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative (resp., strictement positive), le point d'équilibre a est ω -stable et attractif (resp., α -stable et répulsif).

Preuve : Comme ci-dessus, nous traiterons seulement le cas où les valeurs propres de A ont toutes une partie réelle strictement négative. Il existe un réel $M < 0$ et un produit scalaire euclidien $(x, y) \mapsto (x|y)$ sur E tel que, pour tout $x \in E$,

$$(A(x) | x) \leq M(x|x).$$

Nous pouvons remplacer la norme dont l'espace E était initialement muni par la norme $x \mapsto \|x\| = (x|x)^{1/2}$. Nous savons en effet que c'est bien une norme (la norme euclidienne associée au produit scalaire considéré) qui peut, sans que cela ne change rien, remplacer la norme initiale car sur l'espace E , de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Posons, pour tout $x \in \Omega$,

$$f(x) = (x - a|x - a).$$

L'application f est différentiable et admet au point a un minimum strict ($f(a) = 0$ et, pour tout $x \in \Omega$, $x \neq a$, $f(x) > 0$). Nous avons, pour tout $x \in \Omega$, $x \neq a$,

$$\langle df(x), X(x) \rangle = 2(x - a | X(x)).$$

Mais, d'après la définition même de la différentielle,

$$X(x) = X(a) + DX(a)(x - a) + \eta(x - a), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{\|\eta(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \langle df(x), X(x) \rangle &= 2(x - a | A(x - a) + \eta(x - a)) \\ &= 2(x - a | A(x - a)) + 2(x - a | \eta(x - a)) \\ &\leq 2M(x - a|x - a) + 2\|x - a\| \|\eta(x - a)\| \\ &\leq 2 \left(M + \frac{\|\eta(x - a)\|}{\|x - a\|} \right) \|x - a\|^2. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé l'inégalité de Schwarz pour écrire

$$(x - a | \eta(x - a)) \leq \|x - a\| \|\eta(x - a)\|.$$

Mais puisque $M < 0$ et que $\frac{\|\eta(x - a)\|}{\|x - a\|}$ tend vers 0 lorsque $\|x - a\|$ tend vers 0, il existe un voisinage V du point a tel que, pour tout $x \in V$, $x \neq a$, on ait

$$\langle df(x), X(x) \rangle < 0.$$

Les hypothèses du théorème de Liapounov 2.6 étant satisfaites, ce théorème montre que le point d'équilibre a est ω -stable et attractif. \square

La proposition ci-dessous n'est pas l'analogie exact de la proposition précédente pour un système dynamique à temps discret, et sa démonstration ne nécessite pas l'emploi du théorème de Liapounov. Nous l'indiquons cependant car, avec une hypothèse à peine plus restrictive, elle a l'avantage de permettre d'estimer la vitesse de convergence de la suite $(\varphi_n(x), n \in \mathbb{N})$ vers le point d'équilibre a . La remarque 2.11 ci-après indique ce que serait l'analogie de la proposition précédente pour un système dynamique à temps discret.

2.10. Proposition. — Soit $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}\}$ un système dynamique à temps discret sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, d'espace vectoriel associé E . On suppose que le générateur φ_1 de ce système est défini sur un ouvert U_1 de \mathcal{E} , $U_1 \subset \Omega$, et que φ_1 est une application différentiable de classe C^1 de l'ouvert U_1 sur un autre ouvert U_{-1} de \mathcal{E} , $U_{-1} \subset \Omega$. Soit $a \in U_1$ un point d'équilibre, et $A = D\varphi_1(a)$ la différentielle du générateur φ_1 au point a . Si toutes les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1, le point d'équilibre a est ω -stable et attractif.

Preuve : Les valeurs propres de $D\varphi_1(a)$ étant toutes de module strictement inférieur à 1, il existe un réel K , vérifiant $0 < K < 1$, tel que ces valeurs propres λ_i vérifient toutes $0 < |\lambda_i| < K$. D'après le théorème d'algèbre linéaire VII.1.17, il existe sur E une norme euclidienne, notée $x \mapsto \|x\|$, telle que, pour tout $x \in E$, $\|A(x)\| \leq K\|x\|$. Remplaçons la norme dont l'espace E était initialement muni par cette norme euclidienne; cela ne change rien aux propriétés topologiques et uniformes de E , car cet espace étant de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Rappelons que la norme de l'endomorphisme A (associée à la norme euclidienne dont l'espace E est désormais muni) est

$$\|A\| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} \|A(x)\|.$$

Nous avons donc $\|A\| \leq K < 1$. Soit K_1 un réel vérifiant $K < K_1 < 1$. L'application $x \mapsto \|D\varphi_1(x)\|$ est continue, puisque φ_1 est de classe C^1 , et elle prend au point a une valeur strictement inférieure à K_1 . L'ensemble W des éléments x de U_1 tels que $\|D\varphi_1(x)\| < K_1$ est donc un voisinage du point a . Soit $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$, de centre a et de rayon r , soit contenue dans W . D'après l'inégalité des accroissements finis nous avons, pour tout $x \in B(a, r)$,

$$\|\varphi_1(x) - a\| \leq \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \|D\varphi_1(a + \lambda(x - a))\| \|x - a\| \leq K_1 \|x - a\|.$$

Puisque $K_1 < 1$, cette dernière inégalité montre que si $x \in B(a, r)$, $\varphi_1(x)$ est aussi élément de $B(a, r)$; il est donc possible de définir $\varphi_2(x) = \varphi_1(\varphi_1(x))$, et à nouveau $\varphi_2(x)$ est élément de $B(a, r)$. De proche en proche, nous voyons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(x)$ est défini et élément de $B(a, r)$. De plus,

$$\|\varphi_n(x) - a\| \leq K_1^n \|x - a\|,$$

ce qui implique, puisque $K_1 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = a$. Le point d'équilibre a est donc attractif. Pour tout voisinage V de a , on peut choisir r assez petit pour que $B(x, r) \subset V$; pour tout $x \in B(x, r)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(x)$ est élément de $B(x, r)$, donc aussi de V , ce qui prouve que a est ω -stable. \square

2.11. Remarque. — On peut affaiblir les hypothèses de la proposition ci-dessus, en supposant seulement que le générateur φ_1 est continu sur U_1 et différentiable au point a , et que sa différentielle en ce point a toutes ses valeurs propres de module strictement inférieur à 1. Le même résultat subsiste (le point d'équilibre a est ω -stable et attractif). La démonstration, analogue à celle de la proposition 2.9, utilise le théorème de Liapounov 2.5.

Le théorème qui suit est un résultat classique de mécanique, qui était connu avant le théorème de Liapounov.

2.12. Théorème de Lejeune-Dirichlet. — Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension finie dont l'espace vectoriel associé E est muni d'un produit scalaire euclidien, noté $(x, y) \mapsto (x|y)$. Soit U un ouvert de \mathcal{E} et $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable de

classe C^2 . Soit m un réel strictement positif. On considère l'équation différentielle du second ordre

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\text{grad}\Phi(x). \quad (*)$$

Si la fonction Φ admet un minimum relatif strict en un point a de U , le point a est un point d'équilibre ω -stable.

Preuve : Rappelons que $\text{grad}\Phi(x)$, appelé *gradient* de Φ au point x , désigne l'unique élément de E tel que, pour tout $y \in E$,

$$(\text{grad}\Phi(x) \mid y) = \langle d\Phi(x), y \rangle,$$

où $d\Phi(x)$, élément du dual $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ de E , désigne la différentielle de Φ au point x .

Posons $\Omega = U \times E$ et $\frac{dx}{dt} = v$. Nous obtenons ainsi une équation différentielle du premier ordre, pour le couple $(x, v) \in \Omega$, équivalente à l'équation différentielle du deuxième ordre (*) sur U ,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m} \text{grad}\Phi(x). \end{cases} \quad (**)$$

Le point $(a, 0)$ de Ω est bien sûr un point d'équilibre pour cette équation différentielle, puisque $\text{grad}\Phi(a) = 0$. Dans l'énoncé du théorème, nous avons dit que a était point d'équilibre (pour l'équation différentielle du second ordre (*)); c'est un léger abus de langage, pour dire que $(a, 0)$ est point d'équilibre pour l'équation différentielle du premier ordre (**) à laquelle se ramène cette équation.

Posons

$$H(x, v) = \frac{1}{2}m(v|v) + \Phi(x).$$

En Mécanique, H est l'énergie du système considéré : le premier terme du membre de droite est l'énergie cinétique et le second l'énergie potentielle.

Il est facile de vérifier que l'énergie H reste constante sur chaque courbe intégrale de l'équation différentielle. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t), v(t)) &= m \left(\frac{dv(t)}{dt} \mid v(t) \right) + \left\langle d\Phi(x(t)), \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle \\ &= - \left(\text{grad}\Phi(x(t)) \mid v(t) \right) + \left(\text{grad}\Phi(x(t)) \mid v(t) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Liapounov 2.6, avec pour f la fonction H , nous voyons que le point $(a, 0)$ de Ω est un point d'équilibre ω -stable (mais en général pas attractif). \square

2.13. Remarque. — Le théorème de Lejeune-Dirichlet s'étend aisément à des systèmes mécaniques conservatifs plus généraux dont l'espace de configuration est une variété différentiable et l'énergie cinétique une métrique riemannienne sur cette variété.

2.14. Autre exemple d'application. — On considère l'équation différentielle dans \mathbb{R}^3 (coordonnées x, y, z),

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y(z - 1), \\ \frac{dy}{dt} = -x(z - 1), \\ \frac{dz}{dt} = -z^3. \end{cases}$$

L'origine est visiblement un point d'équilibre. Afin d'étudier sa stabilité, nous devons employer une fonction admettant à l'origine un minimum strict, satisfaisant les hypothèses du théorème de Liapounov 2.6. Nous cherchons cette fonction sous la forme

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2,$$

où a , b et c sont des constantes strictement positives. Soit $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ une solution de cette équation différentielle. Nous avons

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = (4a - 2b)x(t)y(t)(z(t) - 1) - 2c(z(t))^4.$$

En prenant $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, nous voyons que f satisfait les hypothèses de la première partie du théorème de Liapounov 2.6. Nous concluons que l'origine est un point d'équilibre ω -stable (mais pas nécessairement attractif).

3. Bassin d'attraction d'un point d'équilibre

3.1. Définitions. — Soit $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ un système dynamique sur un ensemble Ω , dont l'ensemble des temps Θ peut être \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ , \mathbb{N} ou \mathbb{Z} . On suppose que Ω est un espace topologique séparé. Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre.

On appelle *bassin d'attraction* du point a l'ensemble des éléments x de Ω tels que pour tout $t \in \Theta$, $t \geq 0$, $\varphi_t(x)$ soit défini, et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x) = a$.

On appelle *bassin de répulsion* du point a l'ensemble des éléments x de Ω tels que pour tout $t \in \Theta$, $t \leq 0$, $\varphi_t(x)$ soit défini, et que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) = a$.

3.2. Remarque. — On voit qu'un point d'équilibre est attractif (resp., répulsif) au sens des définitions 2.2 si et seulement si son bassin d'attraction (resp., de répulsion) est un voisinage de ce point.

Nous allons établir un théorème, basé sur le même principe que le théorème de Liapounov 2.6, qui permet de reconnaître si une partie compacte de l'ensemble Ω est contenue dans le bassin d'attraction d'un point d'équilibre. Sa démonstration utilise la définition ci-dessous et le lemme ci-après.

3.3. Définition. — Soit $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ un système dynamique sur un ensemble Ω , dont l'ensemble des temps Θ peut être \mathbb{R} ou \mathbb{Z} . On dit que l'orbite d'un point $x \in \Omega$ est *complète* si $\varphi_t(x)$ est défini pour tout $t \in \Theta$.

3.4. Lemme. — Soit $X : \Omega \mapsto E$ un champ de vecteurs lipschitzien sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie d'espace vectoriel associé E , Ψ son flot réduit et $\{\Psi_t ; t \in \mathbb{R}\}$ le système dynamique associé. Soit x un point de Ω tel que l'intervalle ouvert I_x sur lequel est définie l'application $t \mapsto \Psi_t(x)$ soit non borné à droite, et dont l'ensemble ω -limite $L_\omega(x)$ est compact et contenu dans Ω . Pour tout élément z de $L_\omega(x)$, l'orbite de z est complète et contenue dans $L_\omega(x)$.

Preuve : Soit $z \in L_\omega(x)$. Puisque $L_\omega(x) \subset \Omega$, $z \in \Omega$. L'intervalle I_z sur lequel est définie l'application $t \mapsto \Psi_t(z)$ est donc non vide : il est ouvert et contient l'origine. Notons-le $]a, b[$. Pour tout élément s de cet intervalle, $\Psi_s(z)$ est élément de $L_\omega(x)$. En effet, soit W un voisinage de $\Psi_s(z)$. Puisque Ψ_s est continue, $(\Psi_s)^{-1}(W)$ est un voisinage de z . Ce point étant élément de $L_\omega(x)$, il existe une infinité de réels t , pouvant être arbitrairement grands, tels que $\Psi_t(x) \in (\Psi_s)^{-1}(W)$. Mais alors $\Psi_s(\Psi_t(x))$ existe, est égal à $\Psi_{s+t}(x)$, et est élément de W . En posant $s + t = \tau$, nous voyons qu'il existe une infinité de réels τ , pouvant être arbitrairement grands, tels que $\Psi_\tau(x) \in W$. Nous avons ainsi prouvé que $\Psi_s(z) \in L_\omega(x)$.

Si, par exemple, b était fini, $\Psi_s(z)$ sortirait de tout compact lorsque $s \rightarrow b$ (théorème II.3.3). Ce n'est pas le cas puisque $\Psi_s(z)$ est élément de $L_\omega(x)$, qui est compact par hypothèse. Donc $b = +\infty$, et de même $a = -\infty$. Nous avons bien prouvé que l'orbite de z est complète et contenue dans $L_\omega(x)$. \square

3.5. Théorème. — Soit $X : \Omega \rightarrow E$ un champ de vecteurs localement lipschitzien sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, d'espace vectoriel associé E , Ψ son flot réduit et $\{\Psi_t ; t \in \mathbb{R}\}$ le système dynamique qui lui est associé. Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre. On suppose qu'il existe une fonction f , définie sur un voisinage ouvert V de a , continue sur V , à valeurs réelles, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) la fonction f admet un minimum strict au point a : autrement dit, pour tout $x \in V$, $x \neq a$, on a $f(x) > f(a)$;

(ii) la fonction f est différentiable sur $V \setminus \{a\}$ et, pour tout point $x \in V$, $x \neq a$, on a $\langle df(x), X(x) \rangle \leq 0$.

Soit P une partie compacte de E contenue dans $V \cap \Omega$, positivement invariante par le système dynamique, c'est-à-dire telle que pour tout $x \in P$ et tout $t \geq 0$, $\Psi_t(x)$ existe et soit élément de P . On suppose qu'il n'existe aucune orbite complète du système contenue dans P sur laquelle la fonction f a une valeur constante, autre qu'éventuellement l'orbite du point a (qui est le singleton $\{a\}$). Alors le point d'équilibre a est élément de P , et son bassin d'attraction contient P . Si de plus P est un voisinage de a , le point d'équilibre a est attractif.

Preuve : Soit $x \in P$. L'application $t \mapsto \Psi_t(x)$ est définie sur un intervalle I_x qui contient \mathbb{R}^+ , et prend ses valeurs dans le compact P . L'ensemble de ses valeurs d'adhérence lorsque $t \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire l'ensemble ω -limite $L_\omega(x)$, est donc non vide et contenu dans P . On sait (I.2.5) que $L_\omega(x)$ est fermé. Comme il est contenu dans le compact P , $L_\omega(x)$ est compact. Soit z un élément de $L_\omega(x)$. D'après le lemme précédent, son orbite est complète et contenue dans $L_\omega(x)$, donc aussi dans P et dans V . Compte tenu de (ii), la fonction $t \mapsto f(\Psi_t(x))$ est décroissante au sens large. Le lemme 2.4 montre alors que f est constante sur $L_\omega(x)$, donc aussi sur l'orbite de z . Mais comme nous avons supposé qu'il n'y avait pas d'autre orbite complète contenue dans P sur laquelle f est constante qu'éventuellement le singleton $\{a\}$, nous voyons que $z = a$. L'application $t \mapsto \Psi_t(x)$, qui est à valeurs dans le compact P et a pour unique valeur d'adhérence a lorsque $t \rightarrow +\infty$, converge vers a . Nous avons donc prouvé que $a \in P$ et que P est contenu dans le bassin d'attraction de a . Si de plus P est un voisinage de a , ce point d'équilibre est attractif (remarque 3.2). \square

3.6. Exemple d'application. — Reprenons l'exemple 4.6 du chapitre I (pendule plan), mais en supposant maintenant qu'il y a une force de frottement proportionnelle à la vitesse angulaire. L'équation différentielle du mouvement devient

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{k}{m} \omega, \end{cases}$$

où k est une constante strictement positive. La fonction H est toujours définie par

$$H(\theta, \omega) = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 + m g l (1 - \cos \theta).$$

En calculant la dérivée de la fonction $t \mapsto H(\theta(t), \omega(t))$, on obtient

$$\frac{d}{dt} H(\theta(t), \omega(t)) = -k l^2 \omega^2 \leq 0.$$

Soit h un réel vérifiant $0 < h < 2mgl$, et P l'ensemble

$$P = \{ (\theta, \omega) \in \mathbb{R}^2 ; -\pi < \theta < \pi, H(\theta, \omega) \leq h \}.$$

On vérifie aisément que P est une partie compacte de \mathbb{R}^2 . Cela n'est pas immédiatement visible à cause de la double inégalité stricte $-\pi < \theta < \pi$. Mais compte tenu de l'autre condition $H(\theta, \omega) \leq h$, nous pouvons remplacer $-\pi < \theta < \pi$ par $-\pi \leq \theta \leq \pi$ sans que cela modifie P ; en effet, lorsque $\theta = \pi$ modulo 2π , $H(\theta, \omega) \geq 2mgl > h$, donc (θ, ω) n'est pas élément de P . Il est aisé de vérifier que P est positivement invariant, car H ne peut que décroître lorsque t croît, et si initialement θ est strictement compris entre $-\pi$ et π , il le reste pour tout $t > 0$ car si ce n'était pas le cas, il prendrait à un certain instant la valeur $-\pi$ ou π , ce qui est impossible car à cet instant H serait strictement supérieur à h . Enfin, P ne peut contenir d'orbite complète sur laquelle H est constante, autre que le singleton $\{(0, 0)\}$, car dès qu'il y a mouvement, ω prend au cours du mouvement une valeur non nulle, et alors la dérivée de H par rapport à t devient strictement négative. Comme P est un voisinage du point $(0, 0)$, le théorème précédent montre que ce point est attractif et que P est contenu dans son bassin d'attraction.

4. Points d'équilibre instables

Le théorème suivant, basé sur le même principe que le théorème de Liapounov 2.6, permet dans certains cas de reconnaître qu'un point d'équilibre n'est pas ω -stable.

4.1. Théorème. — Soit $X : \Omega \rightarrow E$ un champ de vecteurs localement lipschitzien sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, d'espace vectoriel associé E , Ψ son flot réduit et $\{\Psi_t ; t \in \mathbb{R}\}$ le système dynamique qui lui est associé. Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre. On suppose qu'il existe une fonction f , définie et continue sur un voisinage ouvert V de a , à valeurs réelles, et un ouvert W contenu dans V , vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) pour tout $x \in W$, $f(x) > f(a)$;
- (ii) la fonction f est différentiable sur W et, pour tout point $x \in W$, on a $\langle df(x), X(x) \rangle > 0$.
- (iii) le point a est élément de $V \cap \text{Fr}(W)$, où $\text{Fr}(W)$ désigne la frontière de l'ouvert W , et la fonction f est constante sur $V \cap \text{Fr}(W)$.

Alors le point d'équilibre a est ω -instable (c'est-à-dire n'est pas ω -stable).

Preuve : Nous devons prouver qu'il existe un voisinage ouvert V_1 de a tel que, pour tout voisinage V_2 de a contenu dans V_1 , il existe un point x de V_2 tel que la proposition logique (P) pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\Psi_t(x)$ est défini et élément de V_1

soit fausse. Prenons pour V_1 un voisinage ouvert de a dont l'adhérence $\overline{V_1}$ est compacte et contenue dans V . Soit V_2 un voisinage de a contenu dans V_1 (voir figure III.4).

D'après (iii), le point a est adhérent à W . Comme V_2 est un voisinage de a , $V_2 \cap W$ est non vide; soit x un point de $V_2 \cap W$. Supposons que pour ce point x , la proposition logique P soit vraie. L'application $t \mapsto \Psi_t(x)$, définie sur \mathbb{R}^+ , prend ses valeurs dans V_1 , donc *a fortiori* dans $\overline{V_1}$, qui est compact. Elle admet donc, lorsque $t \rightarrow +\infty$, une valeur d'adhérence z , élément de $\overline{V_1}$. Nous allons considérer successivement deux cas, qui couvrent toutes les possibilités.

Premier cas. Supposons que $\Psi_t(x)$ ne soit pas contenu dans W pour tout $t \geq 0$. Puisque W est ouvert, il existe alors $t_m > 0$ tel que pour tout $t \in [0, t_m[$, $\Psi_t(x)$ soit élément de

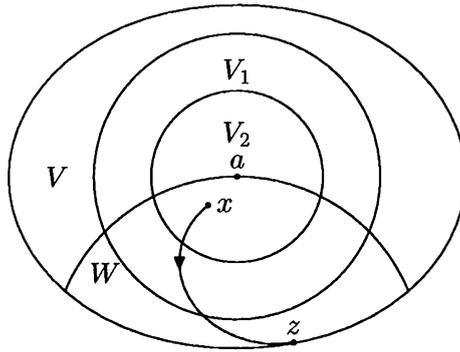


Figure III.4. Illustration de la preuve du théorème 4.1.

W et que $\Psi_{t_m}(x)$ ne soit pas élément de W . Le point $\Psi_{t_m}(x)$ est nécessairement élément de la frontière de W . Compte tenu de (ii), la fonction $t \mapsto f(\Psi_t(x))$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0, t_m]$. Donc $f(\Psi_{t_m}(x)) > f(x) \geq f(a)$. Le point $\Psi_{t_m}(x)$ ne peut pas être élément de $V \cap \text{Fr}(W)$ puisque, d'après (iii), la fonction f est constante sur cet ensemble et prend la valeur $f(a)$. Donc $\Psi_{t_m}(x)$ appartient à la partie de la frontière de W qui n'est pas contenue dans V , ce qui prouve que ce point n'appartient pas à V . Ce résultat est en contradiction avec (P).

Deuxième cas. Supposons $\Psi_t(x)$ contenu dans W pour tout $t \geq 0$. Compte tenu de (ii), la fonction $t \mapsto f(\Psi_t(x))$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ . Le point z , élément de $L_\omega(x)$, n'est pas élément de W . En effet, s'il l'était, les points de l'orbite de z assez voisins de z , c'est-à-dire de la forme $\Psi_s(z)$, avec $|s|$ assez petit, seraient aussi éléments de W . En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 3.4, on montrerait qu'ils sont éléments de $L_\omega(x)$. Le lemme 2.4 montrerait alors que f est constante sur la partie de l'orbite de z formée par ces points, et cela serait en contradiction avec (ii). Comme z est valeur d'adhérence d'une application à valeurs dans W , et n'est pas élément de W , c'est un élément de la frontière de W . S'il était élément de V , il serait élément de $V \cap \text{Fr}(W)$, et l'on aurait, compte tenu de (iii), $f(z) = f(a)$. Cela serait en contradiction avec $f(z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(\Psi_t(x)) > f(x) \geq f(a)$. Nous voyons ainsi que z n'est pas élément de V . Comme $\overline{V_1} \subset V$, il existe un voisinage V_3 de z tel que $V_3 \cap \overline{V_1} = \emptyset$. Comme z est valeur d'adhérence de l'application $t \mapsto \Psi_t(x)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, il existe $t > 0$ tel que $\Psi_t(x) \in V_3$, et ce résultat contredit (P).

En conclusion, la proposition logique (P) est fausse, et nous avons prouvé que le point a n'est pas ω -stable. □

4.2. Exemple d'application. — Dans le plan \mathbb{R}^2 (coordonnées x, y), considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

Le champ de vecteurs correspondant est

$$X(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y},$$

où on a noté $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ les champs de vecteurs constants sur \mathbb{R}^2 , égaux, respectivement, au premier et au second vecteur de la base canonique. Prenons pour fonction f et pour

ouvert W :

$$f(x, y) = xy, \quad W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, y > 0 \}.$$

Il est facile de vérifier que les hypothèses du théorème 4.1 sont satisfaites. L'origine $(0, 0)$ est donc ω -instable.

5. Points d'équilibre des champs linéaires en dimension 2

5.1. Le problème étudié. — Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2, et $A \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme linéaire de E . Nous supposons A injectif (donc bijectif). L'équation différentielle linéaire

$$\varphi'(t) = A(\varphi(t)) \quad (*)$$

admet donc l'origine pour unique point d'équilibre. Nous nous proposons de mettre, par le choix d'une base convenable de E , l'équation différentielle $(*)$ sous la forme la plus simple possible afin de déterminer l'allure qualitative de son portrait de phase.

Le polynôme caractéristique de A est

$$\lambda^2 - \text{Trace}(A)\lambda + \det(A).$$

Nous allons distinguer plusieurs cas, selon la réalité et éventuellement le signe des zéros de ce polynôme (c'est-à-dire des valeurs propres de A).

5.2. Cas où A a deux valeurs propres réelles distinctes. — Soient λ_1 et λ_2 ces valeurs propres. On sait qu'il existe une base (e_1, e_2) de E telle que e_1 soit vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 , et e_2 vecteur propre associé à λ_2 . La matrice de A dans la base (e_1, e_2) est

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

En notant x et y les coordonnées associées à la base (e_1, e_2) , l'équation différentielle $(*)$ s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1 x, \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y. \end{cases}$$

Sa solution générale est

$$\begin{cases} x(t) = x(0)e^{\lambda_1 t}, \\ y(t) = y(0)e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t)$ et $y(t)$ gardent un signe constant.

Nous allons distinguer deux sous-cas, selon que les deux valeurs propres de A sont de même signe ou de signes contraires

a) Cas où les deux valeurs propres de A sont de même signe. — Désignons par λ_1 la plus petite des deux valeurs propres. Nous avons donc $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$. Supposons $x(0)$ et $y(0)$ non nuls. Nous voyons alors que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x(0)/y(0) > 0, \\ -\infty & \text{si } x(0)/y(0) < 0. \end{cases}$$

Le portrait de phases est représenté sur la partie gauche et la partie centrale de la figure III.5. La partie gauche, notée (a), est relative au cas où $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, et la partie centrale, notée (b), au cas où $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Plus précisément, pour la partie gauche, nous avons pris $\lambda_1 = 2\lambda_2 < 0$, et pour la partie centrale $\lambda_2 = 2\lambda_1 > 0$.

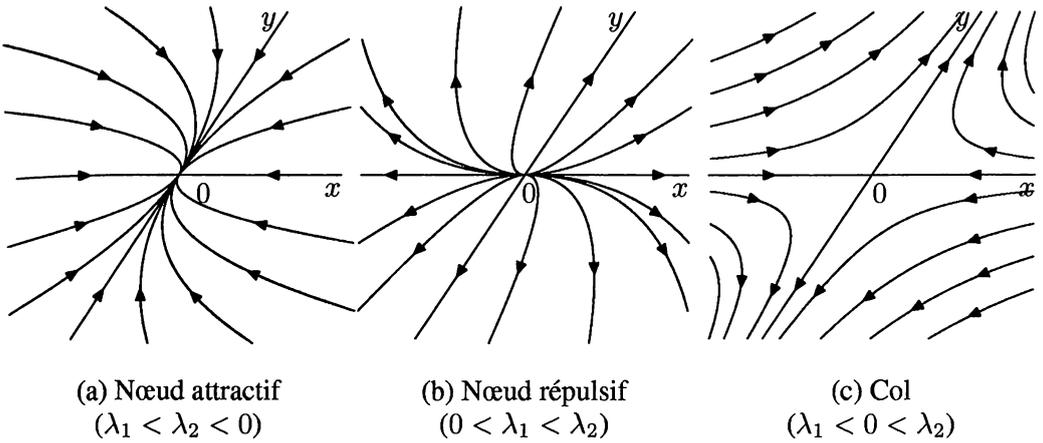


Figure III.5. Valeurs propres λ_1 et λ_2 réelles distinctes

Lorsque les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont strictement négatives, l'origine est un point d'équilibre ω -stable et attractif. On dit que c'est un *nœud attractif*, ou un *puits*.

Lorsque les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont strictement positives, l'origine est un point d'équilibre α -stable et répulsif. On dit que c'est un *nœud répulsif*, ou une *source*.

On remarque que dans les deux cas, les courbes intégrales qui ont l'origine pour point limite sont presque toutes tangentes, en ce point, à l'axe parallèle au vecteur propre associé à la valeur propre de A la plus petite en valeur absolue : l'axe des x , parallèle au vecteur propre associé à λ_1 , lorsque $0 < \lambda_1 < \lambda_2$; l'axe des y , parallèle au vecteur propre associé à λ_2 , lorsque $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

b) Cas où les deux valeurs propres de A sont réelles de signes contraires. — Supposons par exemple $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Si $x(0) \neq 0$, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x(0) > 0, \\ -\infty & \text{si } x(0) < 0. \end{cases}$$

De même, si $y(0) \neq 0$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } y(0) > 0, \\ -\infty & \text{si } y(0) < 0. \end{cases}$$

Le portrait de phases est représenté sur la partie droite, notée (c), de la figure III.5. Nous avons pris $\lambda_1 = -2\lambda_2$, avec $\lambda_2 > 0$. L'origine n'est ni α -stable, ni ω -stable, ni attractif, ni répulsif. On dit que c'est un *col*.

5.3. Cas où A a une valeur propre double. — Soit λ cette valeur propre. Nous avons $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ puisque nous avons supposé A inversible. Nous avons

$$\text{Trace}(A) = 2\lambda, \quad \det(A) = \lambda^2.$$

Deux sous-cas doivent être distingués, selon qu'il existe ou non une base de E formée de vecteurs propres.

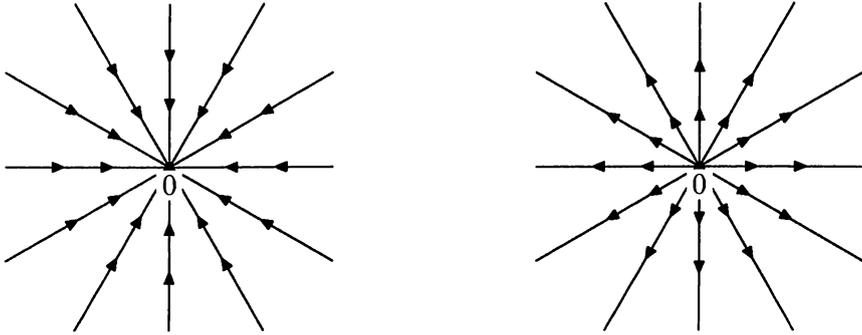
a) Cas où il existe une base de E formée de vecteurs propres. — Tout élément non nul de E est alors vecteur propre, associé à la valeur propre λ ; autrement dit, $A = \lambda \text{id}_E$. L'équation différentielle (*) s'écrit

$$\varphi'(t) = \lambda\varphi(t),$$

et sa solution générale est

$$\varphi(t) = \exp(\lambda t)\varphi(0).$$

Les orbites du système dynamique associé à cette équation sont, d'une part, le singleton $\{0\}$, puisque l'origine est l'unique point d'équilibre, et d'autre part les demi-droites issues



Nœud attractif ($A = \lambda \text{id}_E$, avec $\lambda < 0$)

Nœud répulsif ($A = \lambda \text{id}_E$, avec $\lambda > 0$)

Figure III.6. Valeur propre λ double réelle et $A = \lambda \text{id}_E$

de l'origine (ouvertes, c'est-à-dire ne contenant pas l'origine). Le portrait de phases est représenté sur la figure III.6. La partie gauche de cette figure est relative au cas où $\lambda < 0$ et la partie droite à celui où $\lambda > 0$.

Lorsque la valeur propre λ est strictement positive, l'origine est un point d'équilibre α -stable et répulsif. On dit que c'est un *nœud répulsif*, ou une *source*.

Lorsque la valeur propre λ est strictement négative, l'origine est un point d'équilibre ω -stable et attractif. On dit que c'est un *nœud attractif*, ou un *puits*.

b) Cas où il n'existe pas de base de E formée de vecteurs propres. — Il existe toutefois un vecteur propre f_1 associé à la valeur propre λ (tous les autres vecteurs propres lui étant proportionnels). Soit e_2 un autre élément de E tel que (f_1, e_2) soit une base de E . La matrice de A dans cette base est

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

avec $\mu \neq 0$ puisque e_2 n'est pas vecteur propre de A . Posons $e_1 = \mu f_1$. Alors (e_1, e_2) est aussi une base de E , et la matrice de A dans cette base est

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

L'équation différentielle (*) s'écrit, au moyen des coordonnées x et y associées à la base (e_1, e_2) ,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x + y, \\ \frac{dy}{dt} = \lambda y. \end{cases}$$

Sa solution générale est

$$\begin{cases} x(t) = (x(0) + y(0)t)e^{\lambda t}, \\ y(t) = y(0)e^{\lambda t}. \end{cases}$$

On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t)$ garde un signe constant, tandis que $x(t)$ ne garde pas un signe constant : en supposant $y(0) \neq 0$, $x(t)$ est du même signe que $y(t)$ lorsque $t > -x(0)/y(0)$, et de signe contraire lorsque $t < -x(0)/y(0)$. On remarque aussi que si $y(0) \neq 0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = -\infty.$$

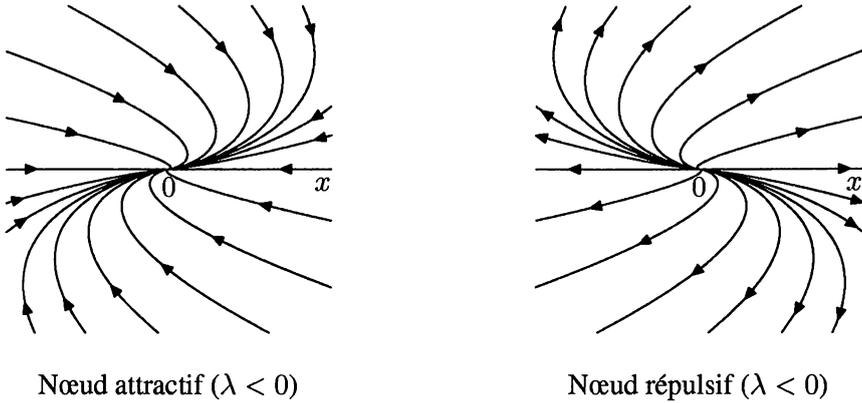


Figure III.7. Valeur propre λ double réelle avec une seule direction propre

Le portrait de phases est représenté sur la figure III.7. La partie gauche de cette figure est relative au cas où $\lambda < 0$ et la partie droite à celui où $\lambda > 0$.

Lorsque la valeur propre λ est strictement positive, l'origine est un point d'équilibre α -stable et répulsif. On dit que c'est un *nœud impropre répulsif*, ou une *source*.

Lorsque la valeur propre λ est strictement négative, l'origine est un point d'équilibre ω -stable et attractif. On dit que c'est un *nœud impropre attractif*, ou un *puits*.

5.4. Cas où A a deux valeurs propres complexes conjuguées. — On notera ces deux valeurs propres $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, avec α et β réels et $\beta > 0$. On sait qu'il existe deux éléments e_1 et e_2 de E tels que $e_1 + ie_2$ soit un vecteur propre de A (dans le complexifié $E_{\mathbb{C}}$ de E) associé à la valeur propre $\alpha - i\beta$, et $e_1 - ie_2$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha + i\beta$. Les éléments e_1 et e_2 de E sont linéairement indépendants car s'ils ne l'étaient pas, les éléments $e_1 + ie_2$ et $e_1 - ie_2$ de $E_{\mathbb{C}}$ ne le seraient pas non plus, ce qui est impossible puisque ce sont des vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes. La matrice de A dans la base (e_1, e_2) est

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

et l'équation différentielle (*) s'écrit, au moyen des coordonnées associées à la base (e_1, e_2) ,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y, \\ \frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y. \end{cases}$$

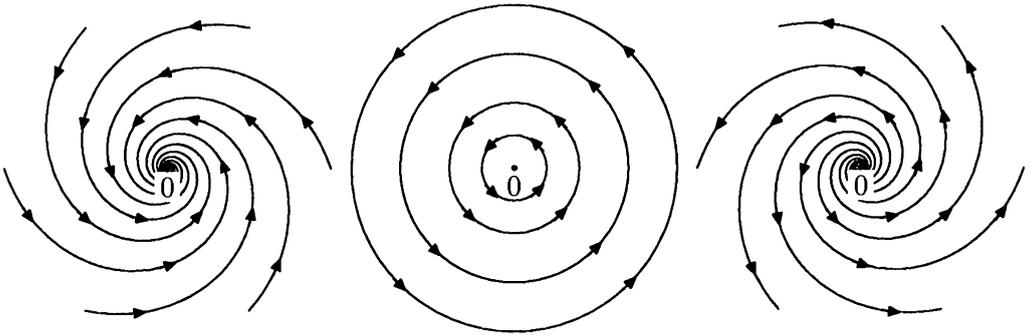
Sa solution générale est

$$\begin{cases} x(t) = (x(0) \cos \beta t - y(0) \sin \beta t) e^{\alpha t}, \\ y(t) = (y(0) \cos \beta t + x(0) \sin \beta t) e^{\alpha t}. \end{cases}$$

Lorsque $\alpha = 0$, toutes les orbites, autres que $\{0\}$, sont périodiques, de même période $(2\pi)/\beta$. L'origine est un point d'équilibre α -stable et ω -stable, mais n'est ni attractif ni répulsif. On dit que c'est un *centre*. Le portrait de phases correspondant est représenté sur la partie centrale, notée (b), de la figure III.8.

Lorsque $\alpha < 0$, l'origine est un point d'équilibre ω -stable et attractif. On dit que c'est un *foyer attractif*. Le portrait de phases correspondant est représenté sur la partie gauche, notée (a), de la figure III.8.

Lorsque $\alpha > 0$, l'origine est un point d'équilibre α -stable et répulsif. On dit que c'est un *foyer répulsif*. Le portrait de phases correspondant est représenté sur la partie droite, notée (c), de la figure III.8.

(a) Foyer attractif ($\alpha < 0$)(b) Centre ($\alpha = 0$)(c) Foyer répulsif ($\alpha > 0$)Figure III.8. Valeurs propres complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, avec $\beta > 0$

5.5. Remarque. — Sur la figure III.8, les trajectoires du système tournent autour de l'origine, lorsque le temps t croît, dans le sens trigonométrique. Cela n'a évidemment aucun caractère intrinsèque. Si nous avons choisi les éléments e_1 et e_2 de E de manière telle que $e_1 + ie_2$ soit associé à la valeur propre $\alpha + i\beta$, et $e_1 - ie_2$ à la valeur propre $\alpha - i\beta$, nous aurions obtenu un portrait de phases dans lequel les trajectoires tournent autour de l'origine, lorsque t croît, dans le sens contraire du sens trigonométrique.

6. Le flot d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point d'équilibre

6.1. Le problème étudié. — Soit X un champ de vecteurs de classe C^1 défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, d'espace vectoriel associé E , admettant un point d'équilibre $a \in \Omega$, c'est-à-dire vérifiant $X(a) = 0$. Nous allons étudier l'allure qualitative, au voisinage du point a , des solutions de l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)), \quad (*)$$

ainsi que l'allure qualitative, au voisinage du point a , du portrait de phases de cette équation.

Posons

$$DX(a) = A.$$

Nous nous limiterons ici au cas où A est un élément inversible de $\mathcal{L}(E, E)$; le point d'équilibre a est alors dit *non dégénéré*. Dans ce cas, a est un point d'équilibre isolé du champ de vecteurs X : en effet, d'après le théorème d'inversion locale, l'application différentiable X est, au voisinage de a , un difféomorphisme local; le point a possède donc un voisinage sur lequel X ne s'annule en aucun point autre que a . Signalons cependant que la définition 6.10 a un sens même lorsque le champ de vecteurs X n'est pas supposé différentiable.

Les notions que nous introduirons et les résultats que nous établirons dans ce paragraphe sont (à l'exception de l'exemple 6.3) valables quelle que soit la dimension de l'espace \mathcal{E} . Puis, dans le paragraphe 7, nous nous concentrerons sur le cas où \mathcal{E} est de dimension 2. Nous reviendrons plus loin (chapitre V) sur l'étude qualitative des courbes intégrales d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point d'équilibre non dégénéré sans faire d'hypothèse restrictive sur la dimension de \mathcal{E} . Nous établirons alors des résultats beaucoup plus précis (les théorèmes de Hartman et Grobman, ainsi que le théorème d'existence des variétés stable et instable d'un point d'équilibre hyperbolique).

Précisons quelque peu ce que nous entendons par allure qualitative des solutions et du portrait de phases de l'équation différentielle (*) au voisinage du point a . Nous étudierons

successivement des questions relevant de la Topologie, puis d'autres relevant du Calcul différentiel. Les questions relevant de la Topologie auxquelles nous tenterons de répondre sont :

- le point a est-il ω -stable, α -stable, attractif, répulsif?
- existe-t-il une ou plusieurs courbes intégrales de l'équation différentielle (*) admettant $\{a\}$ comme ensemble ω -limite (resp., α -limite), c'est-à-dire qui convergent vers a lorsque $t \rightarrow +\infty$ (resp., lorsque $t \rightarrow -\infty$)?

Les questions relevant du Calcul différentiel que nous examinerons sont :

- s'il existe des courbes intégrales de l'équation différentielle (*) qui admettent $\{a\}$ comme ensemble ω -limite ou α -limite, ces courbes ont-elles au point a une tangente?
- lorsque c'est le cas, comment peut-on déterminer celle-ci?
- si elles n'ont pas de tangente en ce point, les courbes qui admettent $\{a\}$ comme ensemble ω -limite ou α -limite forment-elles des spirales qui s'enroulent autour de a (l'espace \mathcal{E} étant ici supposé de dimension 2)?

Nous allons voir que lorsque \mathcal{E} est de dimension 2, l'étude des valeurs propres et vecteurs propres de A permet de répondre à ces questions, sauf dans deux cas :

- lorsque les valeurs propres de A sont imaginaires pures,
- lorsque A admet une valeur propre réelle double (nous pourrions dans ce cas répondre aux questions relevant de la Topologie, mais non à celles relevant du Calcul différentiel).

Dans tous les autres cas, \mathcal{E} étant toujours supposé de dimension 2, le portrait de phases de l'équation différentielle (*), au voisinage du point a , a qualitativement la même allure que celui de l'équation différentielle linéaire, dans l'espace vectoriel E

$$\psi'(t) = A(\psi(t)) \quad (**)$$

au voisinage de l'origine. Cette allure qualitative a été étudiée dans le paragraphe précédent; elle est illustrée par les figures III.5, III.6 et III.10.

On peut interpréter ce résultat en remarquant que l'équation différentielle linéaire (**), appelée *linéarisée* de l'équation différentielle (*) au voisinage de a , apparaît comme une approximation de cette équation; on peut en effet écrire

$$X(x) = X(a) + DX(a)(x - a) + \mathbf{o}(x - a),$$

ou compte tenu de $X(a) = 0$ et de $DX(a) = A$,

$$X(x) = A(x - a) + \mathbf{o}(x - a),$$

ce qui veut dire que $X(x) - A(x - a)$ est négligeable auprès de $x - a$. Lorsqu'on identifie l'espace affine \mathcal{E} à l'espace vectoriel associé en prenant le point a pour origine, l'équation différentielle (*) s'identifie à l'équation différentielle linéaire (**) modifiée par une petite perturbation, qui est relativement d'autant plus petite qu'on se place plus près du point a ; il est donc compréhensible que le flot de l'équation différentielle (*) soit, au voisinage du point a , qualitativement comparable à celui de sa linéarisée (**) au voisinage de l'origine. On appelle *méthode de linéarisation* la pratique consistant à remplacer l'équation (*) par sa linéarisée (**), afin d'établir certaines propriétés de l'équation initialement donnée (*). Bien entendu, les considérations qui précèdent n'ayant aucun caractère rigoureux, la méthode de linéarisation doit être justifiée par des résultats précis, que nous allons établir.

La proposition suivante répond à certaines questions relevant de la Topologie.

6.2. Proposition. — Soit $X : \Omega \rightarrow E$ un champ de vecteurs de classe C^1 défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, $a \in \Omega$ un point d'équilibre de ce champ, et $A = DX(a)$. Si les valeurs propres de A ont toutes une partie réelle strictement négative (resp., strictement positive), le point d'équilibre a est ω -stable et attractif (resp., α -stable et répulsif).

Preuve : Nous n'avons fait que répéter la proposition 2.9, déjà prouvée. \square

La proposition qui précède ne couvre pas le cas où certaines valeurs propres de A sont imaginaires pures, de la forme $\pm i\beta$, avec β réel non nul. Nous avons vu que dans ce cas, lorsque de plus \mathcal{E} est de dimension 2, l'origine est un centre pour l'équation linéaire (**); toutes les solutions de cette équation autres que la solution nulle sont périodiques de période $2\pi/\beta$. On se doute bien qu'une perturbation du champ de vecteurs linéaire A , même très petite, risque fort de détruire le caractère périodique de la plupart des solutions. Il n'y a donc aucune raison pour que l'allure qualitative du portrait de phases de l'équation différentielle (*) au voisinage du point d'équilibre a soit comparable à celle du portrait de phases de sa linéarisée (**), représentée sur la figure III.9. L'exemple ci-dessous illustre cette destruction de la périodicité par une petite perturbation.

6.3. Exemple. — Dans le plan \mathbb{R}^2 (coordonnées x et y) considérons le champ de vecteurs

$$X(x, y) = (-\beta y + \lambda x(x^2 + y^2)^k)e_1 + (\beta x + \lambda y(x^2 + y^2)^k)e_2,$$

où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^2 , β et λ des réels, avec $\beta > 0$, et k un entier > 0 . Ce champ de vecteurs est différentiable de classe C^∞ (et même polynomial), et admet un point d'équilibre à l'origine. L'équation différentielle qui lui est associée s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\beta y + \lambda x(x^2 + y^2)^k, \\ \frac{dy}{dt} = \beta x + \lambda y(x^2 + y^2)^k. \end{cases} \quad (*)$$

La différentielle de X à l'origine (que nous identifions à sa matrice relativement à la base canonique de \mathbb{R}^2) est

$$A = DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

La linéarisée à l'origine de l'équation (*) est donc l'équation différentielle linéaire (obtenue en remplaçant λ par 0 dans (*)),

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\beta y, \\ \frac{dy}{dt} = \beta x. \end{cases} \quad (**)$$

Afin de déterminer les solutions de (*) autres que la solution identiquement nulle, nous utilisons des coordonnées polaires, en posant

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} &= \rho \frac{d\rho}{dt} = \lambda(x^2 + y^2)^{k+1} = \lambda \rho^{2(k+1)}, \\ -y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} &= \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \beta(x^2 + y^2) = \beta \rho^2, \end{aligned}$$

d'où, puisque nous nous intéressons aux solutions pour lesquelles $\rho \neq 0$,

$$\frac{d\rho}{dt} = \lambda \rho^{2k+1}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \beta.$$

En notant $x_0 = \rho_0 \cos \theta_0$, $y_0 = \rho_0 \sin \theta_0$, avec $\rho_0 > 0$, la donnée de Cauchy pour $t = 0$, nous voyons que $(\rho(t), \theta(t))$, donc aussi $(x(t), y(t))$, est défini pour $t \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$2\lambda k \rho_0^{2k} t < 1$$

et a pour expression

$$\begin{cases} \rho(t) = \rho_0(1 - 2\lambda k \rho_0^{2k} t)^{-1/(2k)}, \\ \theta(t) = \theta_0 + \beta t, \end{cases}$$

ou, en revenant aux coordonnées cartésiennes x et y ,

$$\begin{cases} x(t) = \rho_0(1 - 2\lambda k \rho_0^{2k} t)^{-1/(2k)} \cos(\theta_0 + \beta t), \\ y(t) = \rho_0(1 - 2\lambda k \rho_0^{2k} t)^{-1/(2k)} \sin(\theta_0 + \beta t). \end{cases}$$

Si $\lambda < 0$, cette solution de (*) est définie sur l'intervalle $] -1/(2|\lambda|k\rho_0^{2k}), +\infty[$, et tend vers le point d'équilibre 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$. L'origine est donc un point d'équilibre ω -stable et attractif.

Si $\lambda > 0$, cette solution de (*) est définie sur l'intervalle $] -\infty, 1/(2|\lambda|k\rho_0^{2k})[$, et tend vers le point d'équilibre 0 lorsque $t \rightarrow -\infty$. L'origine est donc un point d'équilibre α -stable et répulsif.

Ainsi, lorsque $\lambda \neq 0$, l'équation différentielle (*), à la différence de sa linéarisée (**), n'a pas de solution périodique, et a un portrait de phases qualitativement bien différent (même dans un voisinage arbitrairement petit de l'origine) de celui de sa linéarisée.

Nous n'avons pas encore répondu aux questions relevant de la Topologie dans le cas où les valeurs propres de $A = DX(a)$ sont réelles et de signes contraires; nous le ferons plus loin, en répondant en même temps, pour ce cas, aux questions relevant du Calcul différentiel.

Afin d'aborder les questions relevant du Calcul différentiel, considérons une courbe paramétrée dans \mathcal{E} , c'est-à-dire une application continue $\varphi :]c, d[\rightarrow \mathcal{E}$ d'un intervalle ouvert $]c, d[$ de \mathbb{R} dans l'espace affine \mathcal{E} . L'extrémité gauche c de l'intervalle considéré peut être soit un réel fini, soit $-\infty$, et de même l'extrémité droite d peut être soit un réel fini, soit $+\infty$. Soit $a \in \mathcal{E}$, et supposons que la courbe paramétrée φ admette ce point pour extrémité droite, c'est-à-dire vérifie

$$\lim_{s \rightarrow d} \varphi(s) = a.$$

Supposons également que pour tout $s \in]c, d[$, $\varphi(s) \neq a$. Pour tout $s \in]c, d[$, la demi-droite d'origine a passant par le point $\varphi(s)$, notée $\Delta(s)$, est alors bien définie, puisque les points a et $\varphi(s)$ sont distincts. Nous dirons que la courbe paramétrée φ admet une demi-droite tangente en son extrémité droite a si $\Delta(s)$ admet une limite lorsque s tend vers d ; lorsqu'elle existe, cette limite est la demi-droite tangente à φ en son extrémité droite a . La proposition ci-dessous rend cette définition rigoureuse.

6.4. Proposition. — Soit $\varphi :]c, d[\rightarrow \mathcal{E}$ une courbe paramétrée dans un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, d'espace vectoriel associé E , c'est-à-dire une application continue d'un intervalle ouvert $]c, d[$ de \mathbb{R} dans \mathcal{E} , les extrémités c et d de cet intervalle pouvant être soit des réels finis, soit, respectivement, $-\infty$ et $+\infty$. Soit $a \in \mathcal{E}$. On suppose que

$$\lim_{s \rightarrow d} \varphi(s) = a$$

et que pour tout $s \in]c, d[$, le point $\varphi(s)$ est distinct de a . Soit e un vecteur non nul élément de E . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

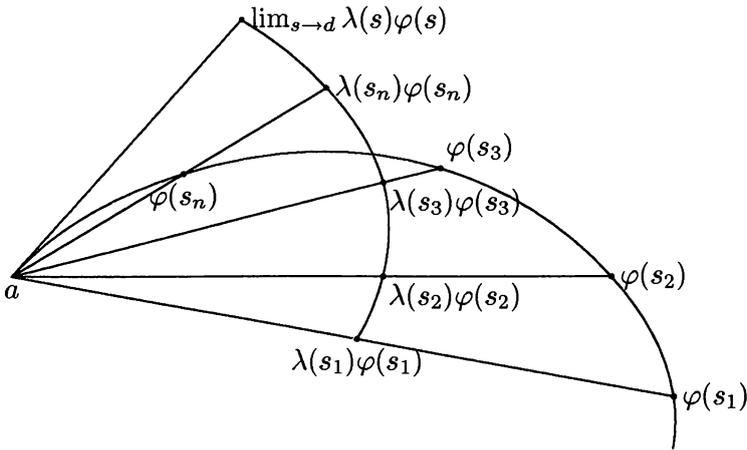


Figure III.9. Demi-droite tangente à une courbe paramétrée en une extrémité

1. Il existe une fonction continue λ , définie sur $]c, d[$, à valeurs strictement positives, telle que

$$\lim_{s \rightarrow d} \lambda(s)(\varphi(s) - a) = e.$$

2. Il existe une norme $x \mapsto \|x\|$ sur E telle que

$$\lim_{s \rightarrow d} \frac{\varphi(s) - a}{\|\varphi(s) - a\|} = \frac{e}{\|e\|}.$$

3. Pour toute norme $x \mapsto \|x\|$ sur E , on a

$$\lim_{s \rightarrow d} \frac{\varphi(s) - a}{\|\varphi(s) - a\|} = \frac{e}{\|e\|}.$$

Lorsque ces trois propriétés équivalentes sont satisfaites, on dit que la courbe paramétrée φ admet pour demi-droite tangente en son extrémité droite (le point a) la demi-droite affine

$$\Delta = \{ a + \mu e ; \mu \in \mathbb{R}^+ \}.$$

L'élément non nul e de E est dit vecteur directeur de cette demi-droite tangente; il est unique à multiplication par un réel strictement positif près.

Preuve : Les propriétés étudiées dans cette proposition sont illustrées par la figure III.9. La propriété 3 implique bien sûr la propriété 2 qui, elle-même, implique la propriété 1, puisqu'il suffit de prendre $\lambda(s) = \|e\| \|\varphi(s) - a\|^{-1}$. Il reste à prouver que la propriété 1 implique la propriété 3. Supposons donc la propriété 1 satisfaite, et soit $x \mapsto \|x\|$ une norme quelconque sur E . Pour tout $s \in]c, d[$, nous avons

$$\frac{\varphi(s) - a}{\|\varphi(s) - a\|} - \frac{e}{\|e\|} = \frac{\varphi(s) - a}{\|\varphi(s) - a\|} - \frac{e}{\lambda(s)\|\varphi(s) - a\|} + \frac{e}{\lambda(s)\|\varphi(s) - a\|} - \frac{e}{\|e\|},$$

d'où

$$\left\| \frac{\varphi(s) - a}{\|\varphi(s) - a\|} - \frac{e}{\|e\|} \right\| \leq \frac{1}{\lambda(s)\|\varphi(s) - a\|} \|\lambda(s)(\varphi(s) - a) - e\| + \left| \frac{1}{\lambda(s)\|\varphi(s) - a\|} - \frac{1}{\|e\|} \right| \|e\|.$$

Mais puisque $\lim_{s \rightarrow d} \lambda(s)(\varphi(s) - a) = e$, nous avons

$$\lim_{s \rightarrow d} \lambda(s)\|\varphi(s) - a\| = \|e\|, \quad \lim_{s \rightarrow d} \frac{1}{\lambda(s)\|\varphi(s) - a\|} = \frac{1}{\|e\|},$$

et nous voyons que les deux termes du membre de droite de l'inégalité ci-dessus tendent vers 0 lorsque $s \rightarrow d$. La propriété 3 est donc satisfaite.

Enfin, prouvons que s'il existe deux vecteurs e et e' éléments de E non nuls, et deux fonctions continues λ et λ' , définies sur $]c, d[$ et à valeurs strictement positives, telles que

$$\lim_{s \rightarrow d} \lambda(s)(\varphi(s) - a) = e, \quad \lim_{s \rightarrow d} \lambda'(s)(\varphi(s) - a) = e',$$

alors e et e' sont colinéaires et de même sens (cela signifie que chacun d'eux est égal au produit de l'autre par un réel strictement positif). Soit $x \rightarrow \|x\|$ une norme quelconque sur E . Puisque les propriétés 1 et 3 sont équivalentes, nous avons

$$\lim_{s \rightarrow d} \frac{\varphi(s) - a}{\|\varphi(s) - a\|} = \frac{e}{\|e\|} = \frac{e'}{\|e'\|},$$

ce qui prouve que e et e' sont colinéaires et de même sens. \square

6.5. Remarques

a) La propriété 1 de l'énoncé ci-dessus peut sembler moins commode d'emploi que les propriétés 2 ou 3, mais elle a l'avantage de ne pas nécessiter l'introduction d'une norme sur E .

b) Supposons que la courbe paramétrée φ admette un point b de \mathcal{E} pour extrémité gauche, c'est-à-dire que l'on ait

$$\lim_{s \rightarrow c} \varphi(s) = b,$$

les autres hypothèses étant les mêmes que celles de la proposition précédente. En procédant comme dans cette proposition, on peut définir la demi-droite tangente à la courbe φ en son extrémité gauche b ; lorsqu'elle existe c'est la limite, lorsque s tend vers c , de la famille, paramétrée par s , de demi-droites ayant b pour origine et passant $\varphi(s)$.

La proposition suivante, qui nous permettra de définir la notion de direction caractéristique, est l'analogue de la précédente, la courbe paramétrée φ étant remplacée par une suite.

6.6. Proposition. — Soit $(x_n, n \in \mathbb{N})$ une suite dans un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, d'espace vectoriel associé E . On suppose que cette suite converge vers un élément a de \mathcal{E} et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq a$. Soit e un vecteur non nul élément de E . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

1. Il existe une suite $(\lambda_n, n \in \mathbb{N})$, dont les termes sont des réels strictement positifs, telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n(x_n - a) = e.$$

2. Il existe une norme $x \mapsto \|x\|$ sur E telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - a}{\|x_n - a\|} = \frac{e}{\|e\|}.$$

3. Pour toute norme $x \mapsto \|x\|$ sur E , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - a}{\|x_n - a\|} = \frac{e}{\|e\|}.$$

Lorsque ces trois propriétés équivalentes sont satisfaites, on dit que la suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ converge vers a en venant de la direction de e . Cette direction est unique, tout autre vecteur non nul e' de E ayant les mêmes propriétés que e étant colinéaire à e et de même sens.

Preuve : Elle est identique à celle de la proposition 6.4. □

La proposition suivante montre que la notion de demi-droite tangente à une courbe paramétrée en une de ses extrémités et celle de suite convergeant vers un point en venant d'une direction donnée relèvent du Calcul différentiel, car elles se transforment de manière naturelle sous l'effet d'un difféomorphisme. Cette proposition nous permettra de montrer (au chapitre VII) que ces notions conservent un sens lorsqu'on remplace l'espace affine \mathcal{E} par une variété différentiable.

6.7. Proposition. — Soit $h : U \rightarrow V$ un difféomorphisme de classe C^1 d'un ouvert U de l'espace affine \mathcal{E} sur un ouvert V de l'espace affine \mathcal{F} , ces deux espaces étant de même dimension finie, a un point de U et $b = h(a)$. On note E et F les espaces vectoriels associés, respectivement, à \mathcal{E} et \mathcal{F} .

1. Soit $\varphi :]c, d[\rightarrow U$ une courbe paramétrée dans U , ayant le point a pour extrémité droite, c'est-à-dire vérifiant $\lim_{s \rightarrow d} \varphi(s) = a$, et admettant en ce point une demi-droite tangente de vecteur directeur $e \in E$, $e \neq 0$ (au sens de la proposition 6.4). Alors la courbe paramétrée $h \circ \varphi :]c, d[\rightarrow V$ a pour extrémité droite le point $b = h(a)$, et admet en ce point la demi-droite tangente de vecteur directeur $Dh(a)(e) \in F$.

2. Soit $(x_n, n \in \mathbb{N})$ une suite dans U qui converge vers le point a en venant de la direction d'un vecteur non nul $e \in E$ (au sens de la proposition 6.6). Alors la suite $(h(x_n), n \in \mathbb{N})$ converge vers $b = h(a)$ en venant de la direction du vecteur non nul $Dh(a)(e) \in F$.

Preuve : Il nous suffit de prouver la propriété 1, la preuve de la propriété 2 étant pratiquement identique. Nous avons, puisque l'application h est continue,

$$\lim_{s \rightarrow d} h \circ \varphi(s) = h\left(\lim_{s \rightarrow d} \varphi(s)\right) = h(a) = b,$$

ce qui prouve que la courbe paramétrée $h \circ \varphi$ a bien b pour extrémité droite. D'autre part, puisque φ admet en son extrémité droite a la demi-droite tangente de vecteur directeur e , il existe une fonction continue λ , définie sur $]c, d[$, à valeurs strictement positives, telle que

$$\lim_{s \rightarrow d} \lambda(s)(\varphi(s) - a) = e.$$

D'autre part nous avons, pour tout $x \in U$,

$$h(x) - b = h(x) - h(a) = Dh(a)(x - a) + R(x - a), \quad \text{avec} \quad R(x - a) = \mathbf{o}(x - a).$$

Par suite, puisque $Dh(a)$ est une application linéaire,

$$\lambda(s)(h \circ \varphi(s) - b) = Dh(a)\left(\lambda(s)(\varphi(s) - a)\right) + \lambda(s)R(\varphi(s) - a).$$

Faisons tendre s vers d . Nous savons que $\lambda(s)(\varphi(s) - a)$ a pour limite le vecteur non nul e de E . Le premier terme du membre de droite de l'égalité ci-dessus a donc pour limite

$$\lim_{s \rightarrow d} Dh(a)\left(\lambda(s)(\varphi(s) - a)\right) = Dh(a)(e),$$

qui est un élément non nul de F , car e est non nul et $Dh(a)$ est un isomorphisme de E sur F . D'autre part, comme $R(\varphi(s) - a)$ est négligeable auprès de $\varphi(s) - a$, le second terme $\lambda(s)R(\varphi(s) - a)$ du membre de droite de l'égalité ci-dessus tend vers 0 lorsque $s \rightarrow d$. Nous pouvons en effet écrire, après avoir muni de normes les espaces E et F ,

$$\lambda(s)R(\varphi(s) - a) = \lambda(s)\|\varphi(s) - a\| \frac{R(\varphi(s) - a)}{\|\varphi(s) - a\|}.$$

Lorsque $s \rightarrow d$, le premier facteur du membre de droite, $\lambda(s)\|\varphi(s) - a\|$, tend vers une limite finie $\|e\|$, tandis que le second, $\frac{R(\varphi(s) - a)}{\|\varphi(s) - a\|}$, tend vers 0. Nous avons donc

$$\lim_{s \rightarrow d} \lambda(s)(h \circ \varphi(s) - b) = Dh(a)(e),$$

ce qui prouve que la courbe paramétrée $h \circ \varphi$ admet pour demi-droite tangente en son extrémité droite b la demi-droite $\{b + \mu Dh(a)(e) ; \mu \in \mathbb{R}^+\}$. \square

6.8. Remarque. — Dans les hypothèses de la proposition 6.4, lorsque de plus la courbe paramétrée φ est différentiable, rien ne permet d'affirmer en général que lorsque $s \rightarrow d$, la direction du vecteur tangent à la courbe au point $\varphi(s)$ converge. Cependant, lorsque la courbe paramétrée φ est solution de l'équation différentielle associée à un champ de vecteurs X de classe C^1 admettant a comme point d'équilibre non dégénéré, on a le résultat suivant.

6.9. Proposition. — *Considérons l'équation différentielle*

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)),$$

où X est un champ de vecteurs de classe C^1 défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, d'espace vectoriel associé E . Soit a un point d'équilibre non dégénéré de X , c'est-à-dire un point de Ω vérifiant $X(a) = 0$ et tel que $DX(a)$ soit un élément inversible de $\mathcal{L}(E, E)$. Soit $t \mapsto \varphi(t)$ une solution de cette équation différentielle ayant $\{a\}$ pour ensemble ω -limite (resp., pour ensemble α -limite), c'est-à-dire vérifiant $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = a$ (resp., $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = a$), et admettant en ce point la demi-droite tangente de vecteur directeur $e \in E$, $e \neq 0$. Alors la courbe paramétrée $t \mapsto X(\varphi(t))$, dans l'espace vectoriel E associé à l'espace affine \mathcal{E} (\dagger), tend vers l'origine 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$ (resp., lorsque $t \rightarrow -\infty$) et admet en ce point la demi-droite tangente de vecteur directeur $-e$ (resp., de vecteur directeur e). Le vecteur e est vecteur propre de $DX(a)$ associé à une valeur propre strictement négative (resp., strictement positive).

Preuve : Nous traiterons le cas où $\{a\}$ est ensemble ω -limite de φ , la même méthode s'appliquant aussi au cas où $\{a\}$ est ensemble α -limite de φ . D'après 6.4, il existe une fonction continue $\lambda : t \mapsto \lambda(t)$, à valeurs strictement positives, telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t)(\varphi(t) - a) = e.$$

Puisque $DX(a)$ est un isomorphisme, le théorème d'inversion locale montre que le champ de vecteurs X (considéré comme application de Ω dans E), restreint à un voisinage convenable de a dans Ω , est un difféomorphisme de ce voisinage sur un voisinage de l'origine dans l'espace vectoriel E . La courbe paramétrée $t \mapsto X(\varphi(t))$ est donc, pour t assez grand, l'image de la courbe paramétrée $t \mapsto \varphi(t)$ par le difféomorphisme X . La proposition 6.7 montre que cette courbe paramétrée, qui a pour extrémité droite $X(a) = 0$, admet en ce point la demi-droite tangente de vecteur directeur $DX(a)(e)$. Nous avons même prouvé (lors de la démonstration de la proposition 6.7) que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t)X(\varphi(t)) = DX(a)(e).$$

Mais puisque φ est solution de l'équation différentielle associée au champ de vecteurs X , cette égalité s'écrit aussi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} = DX(a)(e).$$

(†) En Mécanique, si la courbe paramétrée $t \mapsto \varphi(t)$ est la trajectoire d'un point mobile, la courbe paramétrée $t \mapsto X(\varphi(t)) = \varphi'(t)$ est appelée *hodographe* de cette trajectoire.

Soit t_0 un élément de l'intervalle de définition de φ et de λ . Posons, pour tout $t \geq t_0$,

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t \frac{ds}{\lambda(s)}.$$

La fonction $t \mapsto \theta(t)$ est de classe C^1 et strictement croissante, donc inversible, et son inverse $\theta \mapsto t(\theta)$ est de classe C^1 . Prenons θ pour nouvelle variable indépendante. Posons

$$\theta_0 = \theta(t_0), \quad \theta_M = \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t), \quad \psi(\theta) = \varphi(t(\theta)).$$

Nous avons

$$\frac{d\psi(\theta)}{d\theta} = \frac{d\varphi}{dt}(t(\theta)) \frac{dt(\theta)}{d\theta} = \lambda(t(\theta)) \frac{d\varphi}{dt}(t(\theta)),$$

et par suite

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_M} \frac{d\psi(\theta)}{d\theta} = DX(a)(e).$$

Le vecteur e étant non nul et $DX(a)$ étant un isomorphisme, $DX(a)(e)$ est non nul. Cela prouve que θ_M est fini, car dans le cas contraire, l'inégalité des accroissements finis montre que $\psi(\theta)$ ne resterait pas borné lorsque $\theta \rightarrow \theta_M$. Nous pouvons écrire

$$\frac{d\psi(\theta)}{d\theta} = DX(a)(e) + r(\theta), \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta \rightarrow \theta_M} r(\theta) = 0,$$

d'où

$$\psi(\theta_M) - \psi(\theta) = (\theta_M - \theta)DX(a)(e) + \int_{\theta}^{\theta_M} r(\tau) d\tau,$$

puis, après avoir muni E d'une norme quelconque,

$$\left\| \frac{\psi(\theta_M) - \psi(\theta)}{\theta_M - \theta} - DX(a)(e) \right\| = \frac{1}{\theta_M - \theta} \left\| \int_{\theta}^{\theta_M} r(\tau) d\tau \right\| \leq \sup_{\tau \in [\theta, \theta_M]} \|r(\tau)\|.$$

Comme le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 lorsque $\theta \rightarrow \theta_M$, nous en déduisons

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_M} \frac{\psi(\theta_M) - \psi(\theta)}{\theta_M - \theta} = DX(a)(e),$$

ou, en revenant à la variable indépendante t ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\int_t^{+\infty} \lambda(s)^{-1} ds} (a - \varphi(t)) = DX(a)(e).$$

Mais nous avons aussi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t)(a - \varphi(t)) = -e.$$

Nous pouvons donc écrire

$$DX(a)(e) = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda(t) \int_t^{+\infty} \lambda(s)^{-1} ds} e,$$

ce qui exprime que e est vecteur propre de $DX(a)$ associé à la valeur propre

$$- \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda(t) \int_t^{+\infty} \lambda(s)^{-1} ds},$$

qui est strictement négative. □

Nous pouvons maintenant définir la notion de *direction caractéristique*.

6.10. Définition. — Soit X un champ de vecteurs continu défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, d'espace vectoriel associé E , et a un point d'équilibre de ce champ de vecteurs. On suppose le point d'équilibre a isolé, c'est-à-dire tel qu'il existe un voisinage U de a , $U \subset \Omega$, sur lequel X ne s'annule en aucun point autre que a . Soit e un vecteur élément de E non nul. On dit que la direction de e est caractéristique (relativement au point d'équilibre a du champ de vecteurs X) s'il existe une suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ dans U avec, pour tout n , $x_n \neq a$, qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- (i) la suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ converge vers a en venant de la direction de e (au sens de la proposition 6.6),
- (ii) la suite $(X(x_n), n \in \mathbb{N})$ converge vers 0 en venant soit de la direction de e , soit de la direction de $-e$ (au sens de 6.6).

La proposition ci-dessous montre que la notion de direction caractéristique se comporte bien lors d'une transformation par difféomorphisme.

6.11. Proposition. — Soit X un champ de vecteurs continu défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, a un point d'équilibre isolé de X , e un vecteur non nul de l'espace vectoriel E associé à \mathcal{E} . Soit h un difféomorphisme de classe C^1 de Ω sur un ouvert $h(\Omega)$ d'un espace affine \mathcal{F} de même dimension que \mathcal{E} , d'espace vectoriel associé F . Soit $Y = h_*(X)$ le champ de vecteurs sur $h(\Omega)$, image directe du champ de vecteurs X par le difféomorphisme h (proposition II.5.1); rappelons qu'il est défini par

$$Y(y) = Dh(h^{-1}(y)) \left(X(h^{-1}(y)) \right).$$

Le point $h(a)$ est alors un point d'équilibre isolé du champ de vecteurs continu Y , et le vecteur $Dh(a)(e)$ est un élément non nul de F , dont la direction est caractéristique (relativement au point d'équilibre $h(a)$ de Y) si et seulement si la direction du vecteur e est caractéristique (relativement au point d'équilibre a de X).

Preuve : C'est une conséquence immédiate de la définition 6.10 et de la proposition 6.7. □

La définition 6.10 d'une direction caractéristique a un sens même lorsque le champ de vecteurs X n'est pas supposé différentiable. Lorsque ce champ est différentiable et que $DX(a)$ est un isomorphisme, la proposition 6.9 permet de penser qu'on doit pouvoir utiliser une caractérisation plus simple (les directions caractéristiques coïncident avec les directions propres de $DX(a)$). La proposition suivante montre que c'est bien le cas.

6.12. Proposition. — Soit X un champ de vecteurs de classe C^1 défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, $a \in \Omega$ un point d'équilibre de X , et e un vecteur non nul élément de l'espace vectoriel E associé à \mathcal{E} . On suppose que $DX(a)$ est un élément inversible de $\mathcal{L}(E, E)$. La direction de e est caractéristique si et seulement si e est vecteur propre de $DX(a)$.

Preuve : Supposons e vecteur propre de $DX(a)$ associé à la valeur propre λ . Celle-ci est nécessairement réelle non nulle, puisque $e \in E$ et que $DX(a)$ est un isomorphisme. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = a + 2^{-n}e.$$

Par construction, la suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ converge vers a en venant de la direction de e . Mais $DX(a)$ étant un isomorphisme, la restriction de X à un voisinage convenable de a est un

difféomorphisme, et la proposition 6.7 montre que la suite $(X(x_n), n \in \mathbb{N})$ converge vers $X(a) = 0$ en venant de la direction de $DX(a)e = \lambda e$, c'est-à-dire de la direction de e si $\lambda > 0$, et de celle de $-e$ si $\lambda < 0$.

Réciproquement, supposons la direction de e caractéristique. D'après la définition 6.10, il existe une suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ dans Ω qui converge vers a en venant de la direction de e telle que, de plus, la suite $(X(x_n), n \in \mathbb{N})$ converge vers 0 en venant de la direction de ϵe , avec $\epsilon = \pm 1$. Comme ci-dessus, X étant un difféomorphisme local au voisinage de a , la suite $(X(x_n), n \in \mathbb{N})$ converge vers 0 en venant de la direction de $DX(a)(e)$. Par suite, ϵe et $DX(a)(e)$ sont colinéaires et de même sens, ce qui exprime que e est vecteur propre de $DX(a)$ associé à une valeur propre de même signe que ϵ . \square

7. Cas d'un champ de vecteurs dans le plan

7.1. Aperçu du contenu de ce paragraphe. — Nous poursuivons l'étude commencée dans le paragraphe précédent, en supposant maintenant l'espace affine \mathcal{E} de dimension 2. Nous allons nous intéresser à l'allure qualitative des courbes intégrales $t \mapsto \varphi(t)$ de l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t))$$

(où X est un champ de vecteurs continu défini sur un ouvert Ω de \mathcal{E}) qui tendent, lorsque $t \rightarrow +\infty$ (resp., lorsque $t \rightarrow -\infty$) vers un point d'équilibre isolé a de X .

Nous montrerons d'abord (proposition 7.2) que si la courbe paramétrée φ admet, en son extrémité a , une demi-droite tangente (au sens de la proposition 6.4), la direction de cette demi-droite tangente est une direction caractéristique relativement au point d'équilibre a . Ce résultat n'utilise que très peu d'hypothèses sur le champ de vecteurs X : il suffit qu'il soit continu et admette en a un point d'équilibre isolé; par contre, il utilise le fait que l'espace \mathcal{E} est de dimension 2.

Puis, sous des hypothèses assez générales (vérifiées notamment lorsque X est de classe C^1 et que $DX(a)$ est un élément inversible de $\mathcal{L}(E, E)$ non égal à un multiple de id_E) nous montrerons que le comportement qualitatif de la courbe intégrale φ au voisinage du point a est de l'un ou l'autre des deux types suivants, qui s'excluent mutuellement :

- ou bien la courbe φ admet, au point a , une demi-droite tangente au sens de la proposition 6.4; dans ce cas, la direction de cette demi-droite tangente est caractéristique relativement au point d'équilibre a ;
- ou bien cette courbe forme une spirale qui s'enroule autour du point a .

Ce dernier comportement, illustré par les figure III.8 a et c, a une signification intuitive assez claire; nous devons cependant en donner une définition rigoureuse. Pour cela, une idée naturelle consiste à utiliser des coordonnées polaires au voisinage du point a , ce point étant choisi pour pôle, et à convenir de dire que la courbe $t \mapsto \varphi(t)$ forme une spirale qui s'enroule autour de a lorsque $t \rightarrow +\infty$ (resp., lorsque $t \rightarrow -\infty$) si l'angle polaire de $\varphi(t)$ tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, lorsque $t \rightarrow +\infty$ (resp., lorsque $t \rightarrow -\infty$). C'est précisément ce que formalise la définition 7.5 ci-dessous. Auparavant, la définition 7.3 donne un sens précis au concept de description paramétrique d'une courbe en coordonnées polaires. Le théorème 7.6 est l'énoncé formel et précis du résultat annoncé ci-dessus. Nous passerons ensuite à l'étude des divers types classiques de points d'équilibre non dégénérés : nœuds, foyers et cols (propositions 7.7 et 7.10).

7.2. Proposition. — Soit X un champ de vecteurs continu défini sur un ouvert Ω de l'espace affine \mathcal{E} de dimension 2, et $a \in \Omega$ un point d'équilibre isolé de X . Soit $\varphi :]-\infty, d[\rightarrow \mathcal{E}$ (resp., $\varphi :]c, +\infty[\rightarrow \mathcal{E}$) une solution de l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t))$$

telle que, pour tout élément t de son intervalle de définition, $\varphi(t) \neq a$, et que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = a \quad (\text{resp.}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = a).$$

On suppose que la courbe φ admet, en son extrémité a , une demi-droite tangente au sens de la proposition 6.4. Alors la direction du vecteur directeur de cette demi-droite tangente est caractéristique (relativement au point d'équilibre a), au sens de la définition 6.10

Preuve : Nous supposons par exemple φ définie sur $]c, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = a$ (le cas où cette limite serait atteinte pour $t \rightarrow -\infty$ étant analogue). Comme $\varphi(t)$ converge, lorsque $t \rightarrow +\infty$, vers le point d'équilibre isolé a , nous pouvons aussi (en remplaçant si nécessaire l'intervalle $]c, +\infty[$ par un sous-intervalle $]c', +\infty[$, avec $c' > c$ et suffisamment grand) nous ramener au cas où pour tout élément t de l'intervalle de définition de φ , $X(\varphi(t)) \neq 0$. Pour tout élément t de l'intervalle de définition de φ , l'arc de courbe $\varphi([t, +\infty[)$ va du point $\varphi(t)$ au point a , et admet en chacun de ses points $\varphi(s)$ (avec $t \leq s < +\infty$) une tangente, de vecteur directeur $X(\varphi(s))$. D'après le théorème de Rolle, on peut choisir s de manière telle que ce vecteur soit parallèle à la demi-droite issue de a et passant par $\varphi(t)$ (voir figure III.10).

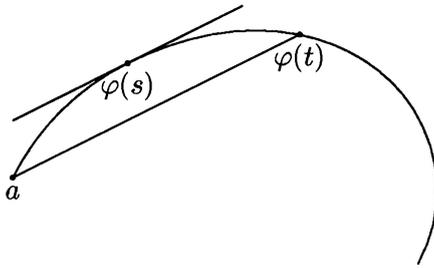


Figure III.10. Application du théorème de Rolle

Pour ceux qui ne seraient pas convaincus par cette application du théorème de Rolle, voici une preuve calculatoire de cette propriété. Choisissons un repère affine de \mathcal{E} ; notons $x(t)$, $y(t)$ les coordonnées de $\varphi(t)$, a_1 et a_2 les coordonnées de a dans cette base. Fixons t et considérons l'expression suivante

$$A(s) = (y(t) - a_2)(x(s) - a_1) - (x(t) - a_1)(y(s) - a_2)$$

comme une fonction de la variable réelle s . Cette fonction est de classe C^1 ; elle prend la valeur 0 pour $s = t$, et tend vers 0 lorsque $s \rightarrow +\infty$; si sa dérivée était toujours de même signe, cette fonction serait monotone et ne tendrait pas vers 0 lorsque $s \rightarrow +\infty$; nous pouvons donc affirmer que la dérivée de cette fonction ne garde pas un signe constant; comme cette dérivée est continue, il existe un élément s de $[t, +\infty[$ où elle s'annule, c'est-à-dire où l'on a

$$(y(t) - a_2) \frac{dx(s)}{ds} - (x(t) - a_1) \frac{dy(s)}{ds} = 0,$$

ce qui exprime précisément le fait que les vecteurs $\varphi(t) - a$ et $X(\varphi(s))$ sont colinéaires. Nous construisons alors deux suites croissantes $(t_n, n \in \mathbb{N})$ et $(s_n, n \in \mathbb{N})$ qui tendent toutes deux vers $+\infty$ en procédant comme suit; en supposant ces suites construites jusqu'au rang $n - 1$, nous choisissons pour t_n un réel quelconque vérifiant $t_n > \sup(s_{n-1}, 2^n)$; puis nous prenons pour s_n un élément de $[t_n, +\infty[$ tel que que $X(\varphi(s_n))$ soit colinéaire

à $\varphi(t_n) - a$. Munissons l'espace vectoriel E associé à l'espace affine \mathcal{E} d'une norme quelconque. Les deux suites

$$\left(\frac{\varphi(t_n) - a}{\|\varphi(t_n) - a\|}, n \in \mathbb{N} \right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\varphi(s_n) - a}{\|\varphi(s_n) - a\|}, n \in \mathbb{N} \right)$$

ont pour limite le vecteur directeur unitaire e de la demi-droite tangente à la courbe paramétrée φ en son extrémité a . D'autre part, pour chaque n les vecteurs $X(\varphi(s_n))$ et $\varphi(t_n) - a$ sont colinéaires, mais peuvent être de même sens ou de sens contraires; cependant l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles ces vecteurs sont de même sens, et celui des valeurs de n pour lesquelles ces vecteurs sont de sens contraires ne peuvent pas être tous deux finis, puisque leur réunion est infinie. En remplaçant la suite $(s_n, n \in \mathbb{N})$ par une suite extraite, nous pouvons nous ramener à l'un des deux cas suivants :

- (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X(\varphi(s_n))$ et $\varphi(t_n) - a$ sont colinéaires et de même sens,
- (ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X(\varphi(s_n))$ et $\varphi(t_n) - a$ sont colinéaires et de sens contraires.

La suite

$$\left(\frac{X(\varphi(s_n))}{\|X(\varphi(s_n))\|}, n \in \mathbb{N} \right)$$

converge vers e dans le cas (i), vers $-e$ dans le cas (ii). Dans les deux cas, la suite $(\varphi(s_n), n \in \mathbb{N})$ vérifie les propriétés de la définition 6.10, et cela prouve que la direction de e est caractéristique. \square

7.3. Définition. — Soit φ une courbe paramétrée dans l'espace affine \mathcal{E} de dimension 2, c'est-à-dire une application continue d'un intervalle ouvert $]c, d[$ de \mathbb{R} dans \mathcal{E} (c pouvant être fini ou égal à $-\infty$, et d fini ou égal à $+\infty$). Soit a un point de \mathcal{E} . On appelle *description paramétrique de φ en coordonnées polaires de pôle a* (en abrégé, *description polaire de φ de pôle a*) un triplet (h, ρ, θ) , où

- h est un difféomorphisme de classe C^1 d'un voisinage ouvert U de a contenant $\varphi(]c, d[)$ sur un voisinage ouvert $h(U)$ de l'origine de \mathbb{R}^2 , appliquant le point a sur l'origine,
- ρ est une application continue de $]c, d[$ dans \mathbb{R}^+ ,
- θ est une application continue de $]c, d[$ dans \mathbb{R} ,

tel que l'on ait, pour tout $t \in]c, d[$,

$$h(\varphi(t)) = (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \sin \theta(t)).$$

7.4. Commentaires

a) Illustration. — La définition 7.3 est illustrée par la figure III.11.

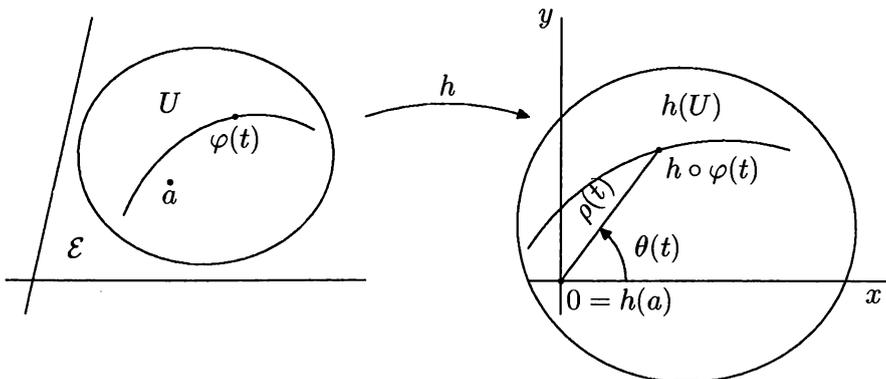


Figure III.11. Description paramétrique d'une courbe en coordonnées polaires

b) Interprétation. — L'application composée $h \circ \varphi :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^2 . La définition 7.3 exprime tout simplement le fait que pour tout $t \in]c, d[$, $(\rho(t), \theta(t))$ sont des coordonnées polaires, au sens usuel, du point $h \circ \varphi(t)$.

c) Raison d'être du difféomorphisme h . — La définition 7.3 peut, à première vue, sembler inutilement compliquée : pourquoi prendre l'image de la courbe φ par un difféomorphisme h et employer les coordonnées polaires usuelles dans \mathbb{R}^2 , au lieu de mettre directement un système de coordonnées polaires dans \mathcal{E} , avec le point a pour pôle? Voici la réponse. Pour munir \mathcal{E} de coordonnées polaires de pôle a , il faut pouvoir définir dans \mathcal{E} une distance euclidienne et la notion d'angle orienté. Pour cela, nous devons choisir un repère affine (a, e_1, e_2) de \mathcal{E} , d'origine a , et convenir que cette base est orthonormée de sens direct. La structure euclidienne nous permet alors de définir, pour tout point x de \mathcal{E} , la distance $\rho(x)$ de ce point au point a ; si le point x est distinct de a , nous pourrions aussi mesurer, sur le cercle trigonométrique de centre a , la longueur $\theta(x)$ (définie modulo 2π) de l'arc orienté formé par le vecteur e_1 et le vecteur unitaire $(x - a) / \|x - a\|$. Comme au départ \mathcal{E} n'était muni d'aucune structure autre que sa structure d'espace affine de dimension 2, nous avons dû faire un choix arbitraire, celui de la base (e_1, e_2) de l'espace vectoriel E associé à \mathcal{E} . Or à cette base nous pouvons associer l'application affine h de \mathcal{E} dans \mathbb{R}^2 qui applique a sur l'origine, et dont la partie linéaire applique les vecteurs e_1 et e_2 , respectivement, sur le premier et le second vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^2 . Nous voyons donc que nous n'avons pas pu faire l'économie du difféomorphisme h ; tout au plus avons-nous pu lui imposer d'être d'une forme particulière, puisque dans cette construction c'est une application affine. Il nous a semblé préférable de ne pas imposer au difféomorphisme h une telle restriction, car cela nous permettra d'adapter facilement la définition 7.3 au cas où, au lieu de courbes paramétrées dans un espace affine \mathcal{E} de dimension 2, nous aurons à considérer des courbes paramétrées sur une surface (variété différentiable de dimension 2).

d) Existence. — Toute courbe paramétrée $\varphi :]c, d[\rightarrow \mathcal{E}$ telle que, pour tout $t \in]c, d[$, $\varphi(t) \neq a$, admet une description paramétrique polaire de pôle a . Soit en effet (a, e_1, e_2) un repère affine de \mathcal{E} d'origine a . Tout point x de \mathcal{E} peut, de manière unique, s'exprimer sous la forme

$$x = a + h_1(x) e_1 + h_2(x) e_2.$$

L'application $h = (h_1, h_2) : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ainsi définie est une application affine bijective, donc un difféomorphisme. Choisissons, pour un élément t_0 de $]c, d[$ particulier, une détermination $\theta(t_0)$ de l'angle polaire de $h(\varphi(t_0))$ dans \mathbb{R}^2 . Pour tout $t \in]c, d[$, soient $\rho(t)$ et $\theta(t)$ les coordonnées polaires de $h(\varphi(t))$, la détermination de $\theta(t)$ étant choisie par continuité, à partir de celle prise pour $\theta(t_0)$. Nous voyons alors que (h, ρ, θ) est une description paramétrique polaire de φ de pôle a .

7.5. Définition. — Les hypothèses générales étant celles de la définition 7.3, on suppose de plus que $c = -\infty$ (resp., que $d = +\infty$), que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = a \quad (\text{resp., que } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = a),$$

et que pour $|t|$ assez grand, $\varphi(t) \neq a$. On dit que la courbe φ forme une spirale qui s'enroule autour du point a lorsque $t \rightarrow -\infty$ (resp., lorsque $t \rightarrow +\infty$) si pour toute description paramétrique polaire (h, ρ, θ) de pôle a de φ , éventuellement restreinte à un sous-intervalle $] - \infty, d'[$ de $] - \infty, d[$ (resp., un sous-intervalle $]c', +\infty[$ de $]c, +\infty[$), l'angle polaire $\theta(t)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ lorsque $t \rightarrow -\infty$ (resp., lorsque $t \rightarrow +\infty$).

7.6. Théorème. — Soit X un champ de vecteurs continu défini sur un ouvert Ω de l'espace affine \mathcal{E} de dimension 2, et $a \in \Omega$ un point d'équilibre isolé de X . Soit $\varphi :]-\infty, d[\rightarrow \mathcal{E}$ (resp., $\varphi :]c, +\infty[\rightarrow \mathcal{E}$) une solution de l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t))$$

telle que, pour tout élément t de son intervalle de définition, $\varphi(t) \neq a$, et que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = a \quad (\text{resp.}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = a).$$

1. On suppose que l'ensemble des vecteurs non nuls de l'espace vectoriel E associé à l'espace affine \mathcal{E} dont la direction est non caractéristique relativement au point d'équilibre a est dense. Alors le comportement de $\varphi(t)$ lorsque $t \rightarrow -\infty$ (resp., lorsque $t \rightarrow +\infty$) est de l'un des deux types suivants :

- (i) ou bien la courbe φ admet, en son extrémité a , une demi-droite tangente au sens de la proposition 6.4 ; dans ce cas, la direction du vecteur directeur de cette demi-droite tangente est caractéristique (relativement au point d'équilibre a) ;
- (ii) ou bien la courbe φ forme une spirale qui s'enroule autour du point a lorsque $t \rightarrow -\infty$ (resp., lorsque $t \rightarrow +\infty$), au sens de la définition 7.5.

2. Si, de plus, aucune direction n'est caractéristique relativement au point d'équilibre a , le comportement (i) est exclu, et pour toute description paramétrique polaire (h, ρ, θ) de pôle a de φ , éventuellement restreinte à un sous-intervalle $] -\infty, d'[$ de $] -\infty, d[$ (resp., un sous-intervalle $]c', +\infty[$ de $]c, +\infty[$), l'angle polaire $\theta(t)$ varie, pour $|t|$ assez grand, de manière strictement monotone en fonction de t .

Preuve : Nous traiterons le cas où $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = a$ (celui où $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = a$ étant tout à fait analogue).

1. Soit (h, ρ, θ) une description paramétrique polaire de φ de pôle a (nous savons, d'après 7.4.d, qu'une telle description existe). Soit $Y = h_*(X)$ le champ de vecteurs image directe de X par le difféomorphisme h ; il est défini sur un voisinage de l'origine de \mathbb{R}^2 , par la formule

$$Y(y) = Dh(h^{-1}(y)) \left(X(h^{-1}(y)) \right).$$

Le champ de vecteurs Y est continu et admet l'origine pour point d'équilibre isolé. La courbe paramétrée $t \mapsto \psi(t) = h \circ \varphi(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\psi'(t) = Y(\psi(t)).$$

Elle vérifie, pour tout élément t de son intervalle de définition, $\psi(t) \neq 0$ et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = 0.$$

De plus, d'après la proposition 6.11, pour tout vecteur non nul e de E , $Dh(a)(e)$ est un vecteur non nul de \mathbb{R}^2 dont la direction est caractéristique (relativement au point d'équilibre 0 de Y) si et seulement si la direction de e est caractéristique (relativement au point d'équilibre a de X). Comme $Dh(a)$ est un isomorphisme et comme, par hypothèse, l'ensemble des vecteurs non nuls de E dont la direction est non caractéristique (relativement au point d'équilibre a de X) est dense, nous pouvons affirmer que l'ensemble des vecteurs non nuls de \mathbb{R}^2 dont la direction est non caractéristique (relativement au point d'équilibre 0 de Y) est dense.

D'autre part, en notant ψ_1 et ψ_2 les deux composantes de ψ , Y_1 et Y_2 les deux composantes de Y , nous pouvons écrire

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1(t)}{dt} = Y_1(\psi(t)), \\ \frac{d\psi_2(t)}{dt} = Y_2(\psi(t)). \end{cases}$$

Un calcul simple (analogue à celui fait lors de l'étude de l'exemple 6.3) montre que les coordonnées polaires $\rho(t)$ et $\theta(t)$ sont des fonctions différentiables de t , qui vérifient

$$\begin{cases} \rho(t) \frac{d\rho(t)}{dt} = \psi_1(t)Y_1(\psi(t)) + \psi_2(t)Y_2(\psi(t)), \\ (\rho(t))^2 \frac{d\theta(t)}{dt} = -\psi_2(t)Y_1(\psi(t)) + \psi_1(t)Y_2(\psi(t)). \end{cases} \quad (*)$$

Nous allons montrer que lorsque $t \rightarrow +\infty$, $\theta(t)$ admet une limite, finie ou non. Supposons que ce ne soit pas le cas. Les limites inférieure et supérieure

$$\theta_m = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) \quad \text{et} \quad \theta_M = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \theta(t)$$

(qui existent toujours dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) sont alors distinctes. L'intervalle $]\theta_m, \theta_M[$ est non vide. Mais nous venons de voir que l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^2 dont la direction est non caractéristique (relativement au point d'équilibre 0 de Y) est dense. Il existe donc un vecteur non nul de \mathbb{R}^2 dont la direction est non caractéristique et dont l'angle polaire θ_{nc} vérifie

$$\theta_m < \theta_{nc} < \theta_M.$$

D'après les définitions des limites inférieure et supérieure, on peut trouver des valeurs de t arbitrairement grandes pour lesquelles $\theta_m < \theta(t) < \theta_{nc}$, et aussi des valeurs de t arbitrairement grandes pour lesquelles $\theta_{nc} < \theta(t) < \theta_M$. La fonction θ étant continue, si pour un certain réel t elle vérifie $\theta(t) < \theta_{nc}$, et pour un autre réel t' , $\theta_{nc} < \theta(t')$, il existe un troisième réel t'' , compris entre t et t' , tel que $\theta(t'') = \theta_{nc}$. Nous voyons ainsi qu'il existe des valeurs de t arbitrairement grandes pour lesquelles $\theta(t) = \theta_{nc}$. De plus, lorsque $t \rightarrow +\infty$, l'angle polaire θ oscille entre les valeurs θ_m et θ_M ; par suite, la valeur θ_{nc} est traversée une infinité de fois en croissant, et une infinité de fois en décroissant. En utilisant ces propriétés, on voit qu'il existe une suite strictement croissante $(t_n, n \in \mathbb{N})$ d'éléments de l'intervalle de définition de θ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\theta(t_n) = \theta_{nc}, \quad \left. \frac{d\theta(t)}{dt} \right|_{t=t_n} \begin{cases} \geq 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \leq 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Les points $\psi(t_n)$ sont tous situés sur la demi-droite de \mathbb{R}^2 issue de l'origine et d'angle polaire θ_{nc} (voir figure III.12), et forment une suite qui tend vers l'origine. D'après l'expression de $\frac{d\theta(t)}{dt}$ donnée par les formules (*) ci-dessus, nous avons

$$-\psi_2(t_n)Y_1(\psi(t_n)) + \psi_1(t_n)Y_2(\psi(t_n)) \begin{cases} \geq 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \leq 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La fonction, définie sur un voisinage ouvert de l'origine dans \mathbb{R}^2 ,

$$y = (y_1, y_2) \mapsto -y_2Y_1(y) + y_1Y_2(y)$$

est continue; pour chaque $n \in \mathbb{N}$, elle prend au point $\psi(t_n)$ une valeur de même signe que $(-1)^n$; ses valeurs aux points $\psi(t_n)$ et $\psi(t_{n+1})$ sont donc de signes contraires. Par continuité, on voit qu'il existe un point $z_n = (z_{n1}, z_{n2})$ situé sur le segment de droite d'extrémités $\psi(t_n)$ et $\psi(t_{n+1})$ tel que

$$-z_{n2}Y_1(z_n) + z_{n1}Y_2(z_n) = 0.$$

Cette égalité exprime que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux vecteurs $z_n = (z_{n1}, z_{n2})$ et $Y(z_n) = (Y_1(z_n), Y_2(z_n))$ (tous deux non nuls, puisque $z_n \neq 0$ et que 0 est un point d'équilibre isolé du champ de vecteurs Y) sont colinéaires. Ces deux vecteurs peuvent être de même sens ou de sens contraires; l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles ces

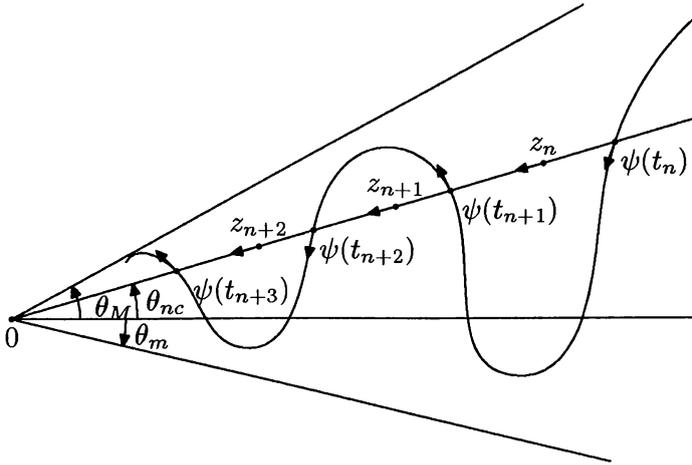


Figure III.12. Illustration de la preuve du théorème 7.6

deux vecteurs sont de même sens et l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles ils sont de sens contraires ne pouvant être tous deux finis (puisque leur réunion est infinie), on peut supposer, en remplaçant éventuellement la suite $(z_n, n \in \mathbb{N})$ par une suite extraite, que l'une ou l'autre des deux propriétés ci-dessous est satisfaite :

- (i) ou bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, les vecteurs z_n et $Y(z_n)$ sont colinéaires et de même sens,
- (ii) ou bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, les vecteurs z_n et $Y(z_n)$ sont colinéaires et de sens contraires.

La suite $(z_n, n \in \mathbb{N})$ converge vers l'origine en venant de la direction d'angle polaire θ_{nc} , et la suite $(Y(z_n), n \in \mathbb{N})$ converge vers 0 en venant soit de la direction d'angle polaire θ_{nc} (dans le cas (i)), soit de la direction opposée, d'angle polaire $\theta_{nc} + \pi$ (dans le cas (ii)). D'après la définition 6.10, cela prouve que la direction d'angle polaire θ_{nc} est caractéristique relativement au point d'équilibre que le champ de vecteurs Y admet à l'origine. Ainsi, en supposant que $\theta_m < \theta_M$, nous sommes arrivés à une contradiction. Nous avons donc prouvé que les limites inférieure θ_m et supérieure θ_M de $\theta(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ sont égales, c'est-à-dire que $\theta(t)$ a une limite (finie ou non) lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Si la limite de $\theta(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ est finie, la courbe paramétrée ψ admet, à l'origine, une demi-droite tangente dont le vecteur directeur f a pour angle polaire $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t)$. D'après la proposition 6.7, la courbe paramétrée φ admet, en son extrémité a , une demi-droite tangente de vecteur directeur $(Dh(a))^{-1}(f)$, et d'après la proposition 7.2, la direction de ce vecteur est caractéristique (relativement au point d'équilibre a du champ de vecteurs X).

Supposons que l'on ait $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = +\infty$ (le même raisonnement s'applique au cas où $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = -\infty$). Pour prouver que la courbe φ forme, lorsque $t \rightarrow +\infty$, une spirale qui s'enroule autour du point a , il suffit, d'après la définition 7.5, de montrer que pour toute autre description paramétrique polaire (h', ρ', θ') de φ , $\theta'(t)$ tend, lorsque $t \rightarrow +\infty$, soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$. Or nous savons, d'après ce qui précède, que $\theta'(t)$ admet une limite, finie ou non, lorsque $t \rightarrow +\infty$. Si cette limite était finie, la courbe paramétrée $h' \circ \varphi$ admettrait à l'origine une demi-droite tangente; d'après la proposition 6.7, la courbe φ elle-même et son image $h \circ \varphi$ par le difféomorphisme h admettraient, respectivement en a et en l'origine, des demi-droites tangentes; mais alors $\theta(t)$ tendrait vers une limite finie lorsque $t \rightarrow +\infty$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse. Nous avons ainsi prouvé que lorsque $t \rightarrow +\infty$, la courbe φ forme une spirale qui s'enroule autour du point a .

2. Supposons que le point d'équilibre a de X n'admette aucune direction caractéristique. La courbe φ ne peut avoir, en son extrémité a , de demi-droite tangente, puisque la direction du vecteur directeur de celle-ci serait caractéristique. Compte tenu de ce qui précède, nous savons que lorsque $t \rightarrow +\infty$, la courbe φ forme une spirale qui s'enroule autour du point a . Soit (h, ρ, θ) une description paramétrique polaire de φ , de pôle a . Nous allons prouver que pour t assez grand, $\theta(t)$ varie de manière strictement monotone en fonction de t . D'après l'expression de $\frac{d\theta(t)}{dt}$ donnée par la formule (*) ci-dessus, il suffit de prouver que pour t assez grand, l'expression

$$R(t) = -\psi_2(t)Y_1(\psi(t)) + \psi_1(t)Y_2(\psi(t))$$

garde un signe constant. Supposons que ce ne soit pas le cas; comme cette expression est une fonction continue de t , il existe des valeurs de t arbitrairement grandes pour lesquelles $R(t) = 0$. Il existe donc une suite strictement croissante $(t_n, n \in \mathbb{N})$, qui tend vers $+\infty$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(t_n) = 0$, ce qui exprime que dans \mathbb{R}^2 , les vecteurs $\psi(t_n)$ et $Y(\psi(t_n))$ sont colinéaires. Comme dans la première partie de cette démonstration, en remplaçant éventuellement la suite $(t_n, n \in \mathbb{N})$ par une suite extraite, nous pouvons nous ramener à l'un ou l'autre des deux cas suivants :

- (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi(t_n)$ et $Y(\psi(t_n))$ sont colinéaires et de même sens,
- (ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi(t_n)$ et $Y(\psi(t_n))$ sont colinéaires et de sens contraires.

Les points $\frac{\psi(t_n)}{\|\psi(t_n)\|}$ sont éléments du cercle trigonométrique S^1 , qui est compact. En remplaçant à nouveau la suite $(t_n, n \in \mathbb{N})$ par une suite extraite, nous pouvons nous ramener au cas où la suite $\left(\frac{\psi(t_n)}{\|\psi(t_n)\|}, n \in \mathbb{N}\right)$ converge. La limite de cette suite est un vecteur unitaire e de \mathbb{R}^2 . Mais d'après la définition 6.10, la direction de e est alors une direction caractéristique, relativement au point d'équilibre que le champ de vecteurs Y admet à l'origine. D'après la proposition 6.11, la direction du vecteur non nul $(Dh(a))^{-1}(e)$ est caractéristique, relativement au point d'équilibre a de X . Comme nous avons supposé qu'aucune direction n'est caractéristique relativement à ce point d'équilibre, nous avons abouti à une contradiction. Nous avons ainsi prouvé que pour t assez grand, l'angle polaire θ varie de manière strictement monotone en fonction de t . \square

Dans les deux propositions précédentes, nous n'avons pas eu besoin de supposer le champ de vecteurs X différentiable; il nous a suffi de le supposer continu. Dans les propositions suivantes, nous supposons le champ de vecteurs X différentiable de classe C^1 et le point d'équilibre a non dégénéré.

La proposition suivante montre que lorsque les valeurs propres de $DX(a)$ sont complexes conjuguées de partie réelle non nulle, le comportement qualitatif des courbes intégrales de l'équation différentielle $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$ qui tendent vers le point d'équilibre a est le même que celui des courbes intégrales de l'équation linéarisée $\psi'(t) = DX(a)(\psi(t))$, illustré par la figure III.10.

7.7. Proposition. — Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^1 défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension 2. On note E l'espace vectoriel associé à \mathcal{E} . Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre non dégénéré de X , c'est-à-dire un point tel que $X(a) = 0$ et que $DX(a)$ soit un élément inversible de $\mathcal{L}(E, E)$. On suppose les deux valeurs propres de $DX(a)$ complexes conjuguées de la forme $\alpha \pm i\beta$, avec $\alpha < 0$ (resp., avec $\alpha > 0$) et β réel non nul. Le point a qui, d'après la proposition 6.2, est ω -stable et attractif (resp., α -stable et répulsif) possède alors la propriété

suivante : toutes les courbes intégrales $t \mapsto \varphi(t)$ qui tendent vers ce point lorsque $t \rightarrow +\infty$ (resp., lorsque $t \rightarrow -\infty$) forment des spirales qui s'enroulent autour de ce point (au sens de la définition 7.5). On dit que a est un foyer attractif (resp., un foyer répulsif).

Preuve : D'après la proposition 6.12, les directions caractéristiques en a sont les directions des vecteurs propres de $DX(a)$. Cet endomorphisme, dont les valeurs propres sont complexes, n'a pas de vecteur propre réel. Par suite, toutes les directions sont non caractéristiques, relativement au point d'équilibre a . Le résultat annoncé découle donc directement du théorème 7.6. \square

Nous allons maintenant traiter le cas où les valeurs propres de $DX(a)$ sont réelles et distinctes. Le résultat de notre étude sera la proposition 7.10, dont la démonstration utilise les deux lemmes ci-dessous. Les démonstrations de ces deux lemmes étant assez délicates et faisant appel à des calculs peu éclairants, nous conseillons au lecteur de lire d'abord la proposition 7.10; il aura ainsi une vue d'ensemble des résultats que nous allons établir, avant d'aborder les preuves de ces deux lemmes. Le premier de ces lemmes sera utile aussi bien dans le cas où les deux valeurs propres de $DX(a)$ sont de même signe que dans celui où elles sont de signes contraires.

7.8. Lemme. — *Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^1 défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension 2, d'espace vectoriel associé E . Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre non dégénéré de X , c'est-à-dire un point tel que $X(a) = 0$ et que $DX(a)$ soit un élément inversible de $\mathcal{L}(E, E)$. On suppose les deux valeurs propres de $DX(a)$ réelles et distinctes. Soit e un vecteur propre de $DX(a)$ associé à la valeur propre λ .*

1. *Si les deux valeurs propres de $DX(a)$ sont de même signe et si λ est celle dont la valeur absolue est la plus petite, il existe une infinité de courbes intégrales du champ de vecteurs X qui admettent $\{a\}$ pour ensemble limite (α -limite si $\lambda > 0$, ω -limite si $\lambda < 0$) et qui, toutes, admettent en leur extrémité a une demi-droite tangente; parmi elles, une infinité ont en ce point une demi-droite tangente de vecteur directeur e , et une infinité ont en ce point une demi-droite tangente de vecteur directeur $-e$.*

2. *Dans tous les cas, il existe au moins deux courbes intégrales du champ de vecteurs X qui admettent $\{a\}$ pour ensemble limite (α -limite si $\lambda > 0$, ω -limite si $\lambda < 0$) qui, toutes deux, admettent en leur extrémité a une demi-droite tangente; l'une d'elles a en ce point une demi-droite tangente de vecteur directeur e , et l'autre une demi-droite tangente de vecteur directeur $-e$.*

Preuve : Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que les deux valeurs propres de $DX(a)$, lorsqu'elles sont de même signe, ne jouent pas le même rôle. Si e est un vecteur propre associé à la valeur propre la plus petite en valeur absolue, il existe une infinité de courbes intégrales distinctes du champ de vecteurs X ayant $\{a\}$ pour ensemble limite avec, en ce point, une demi-droite tangente de vecteur directeur e . Si e est un vecteur propre associé à la valeur propre la plus grande en valeur absolue, le présent lemme affirme l'existence de deux courbes intégrales de X ayant $\{a\}$ pour ensemble limite, l'une de ces courbes ayant en ce point une demi-droite tangente de vecteur directeur e , et l'autre une demi-droite tangente de vecteur directeur $-e$. Nous verrons plus loin (lemme 7.9) qu'il n'y a pas plus de deux courbes intégrales de X ayant $\{a\}$ pour ensemble limite avec, en ce point, une demi-droite tangente ayant pour vecteur directeur un vecteur propre de $DX(a)$ associé à la valeur propre la plus grande en valeur absolue.

Choisissons un repère affine (a, e_1, e_2) de \mathcal{E} , d'origine a , les vecteurs e_1 et e_2 étant deux vecteurs propres de $DX(a)$ associés respectivement aux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 . En notant $X_1(x, y)$ et $X_2(x, y)$ les composantes, dans la base (e_1, e_2) , de la valeur prise par le champ de vecteurs X au point de coordonnées (x, y) , l'équation différentielle associée au champ de vecteurs X s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = X_2(x, y). \end{cases} \quad (*)$$

Le point d'équilibre a est le point de coordonnées $x = 0, y = 0$ et, compte tenu du choix des vecteurs de base, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0, y=0} &= \lambda_1, & \frac{\partial X_1(x, y)}{\partial y} \Big|_{x=0, y=0} &= 0, \\ \frac{\partial X_2(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0, y=0} &= 0, & \frac{\partial X_2(x, y)}{\partial y} \Big|_{x=0, y=0} &= \lambda_2. \end{aligned}$$

En coordonnées polaires (ρ, θ) , l'équation différentielle $(*)$ s'écrit (voir exemple 6.3) :

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = X_1(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cos \theta + X_2(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sin \theta, \\ \rho \frac{d\theta}{dt} = -X_1(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sin \theta + X_2(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cos \theta. \end{cases} \quad (**)$$

La démonstration comporte alors trois étapes; la première est utile pour la preuve des parties 1 et 2 du lemme; la seconde nous permettra de prouver la partie 1 et la troisième de prouver la partie 2.

a) Première étape : construction de K . — Soient η et r deux réels vérifiant $0 < \eta < \pi/2, r > 0$. Soit K l'ensemble des points de E dont les coordonnées polaires (ρ, θ) vérifient

$$0 \leq \rho \leq r, \quad -\eta \leq \theta \leq \eta.$$

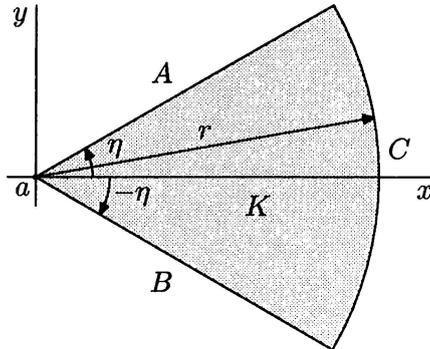


Figure III.13. Le compact K et sa frontière $\{a\} \cup A \cup B \cup C$

L'ensemble K est une partie compacte de E ayant la forme d'une part de tarte, illustrée sur la figure III.13. Sa frontière est réunion du point a (coordonnées $x = 0, y = 0$), du segment de droite A (ensemble des points dont les coordonnées polaires (ρ, θ) vérifient $\theta = \eta, 0 < \rho \leq r$), du segment de droite B (ensemble des points dont les coordonnées polaires (ρ, θ) vérifient $\theta = -\eta, 0 < \rho \leq r$), et de l'arc de cercle C (ensemble des points

dont les coordonnées polaires (ρ, θ) vérifient $\rho = r$, $-\eta \leq \theta \leq \eta$. Nous allons montrer qu'en prenant r et η assez petits, nous pouvons faire en sorte que $\frac{d\rho}{dt}$ soit non nul et ait un signe constant sur K et que $\frac{d\theta}{dt}$ soit non nul et ait un signe constant sur chacun des segments de droite A et B , les signes pris par cette expression sur A et sur B étant opposés. Notons $P(\rho, \theta)$ et $Q(\rho, \theta)$ les membres de droite des égalités (***) ci-dessus, considérés comme des fonctions de classe C^1 de (ρ, θ) . Afin d'étudier leur signe, nous considérons la variable θ comme fixée et nous faisons varier ρ , à partir de la valeur $\rho = 0$ pour laquelle les deux fonctions P et Q s'annulent. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(\rho, \theta)}{\partial \rho} &= \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \operatorname{tg}^2 \theta \frac{\partial X_2}{\partial y} + \operatorname{tg} \theta \left(\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial X_2}{\partial x} \right) \right) \cos^2 \theta, \\ \frac{\partial Q(\rho, \theta)}{\partial \rho} &= \left(\frac{\partial X_2}{\partial y} - \frac{\partial X_1}{\partial x} + \operatorname{cotg} \theta \frac{\partial X_2}{\partial x} - \operatorname{tg} \theta \frac{\partial X_1}{\partial y} \right) \cos \theta \sin \theta.\end{aligned}$$

Pour alléger l'écriture, nous n'avons pas indiqué explicitement dans ces expressions en quel point les valeurs des dérivées partielles de X_1 et de X_2 doivent être évaluées : c'est bien sûr au point de coordonnées $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Nous ferons la même convention dans la suite de la démonstration.

Choisissons tout d'abord l'angle η de manière telle que $0 < \eta < \pi/2$ et que

$$\operatorname{tg}^2 \eta \leq \frac{|\lambda_1|}{5|\lambda_2|}.$$

En remarquant que lorsque ρ tend vers 0 les dérivées partielles de X_1 par rapport à x et à y , au point de coordonnées $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, tendent, respectivement vers λ_1 et 0, tandis que celles de X_2 tendent, respectivement, vers 0 et λ_2 , nous voyons qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout ρ vérifiant $0 \leq \rho \leq r$, et tout θ vérifiant $-\eta \leq \theta \leq \eta$, nous ayons

$$\left| \frac{\partial X_1}{\partial x} - \lambda_1 \right| \leq \frac{|\lambda_1|}{4}, \quad \left| \frac{\partial X_2}{\partial y} - \lambda_2 \right| \leq \frac{|\lambda_2|}{4}, \quad \left| \frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial X_2}{\partial x} \right| \leq \frac{|\lambda_1|}{4},$$

et aussi

$$\operatorname{cotg} \eta \left| \frac{\partial X_2}{\partial x} \right| \leq \frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{4}, \quad \operatorname{tg} \eta \left| \frac{\partial X_1}{\partial y} \right| \leq \frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{4}.$$

Nous voyons alors que pour tous (ρ, θ) vérifiant $0 \leq \rho \leq r$, $-\eta \leq \theta \leq \eta$, la valeur absolue de $\frac{\partial X_1}{\partial x}$ est strictement supérieure à la somme des valeurs absolues de $\frac{\partial X_2}{\partial y} \operatorname{tg}^2 \theta$ et de $\left(\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial X_2}{\partial x} \right) \operatorname{tg} \theta$. Par suite, $\frac{\partial P(\rho, \theta)}{\partial \rho}$ est de même signe que $\frac{\partial X_1}{\partial x}$, qui lui-même est de même signe que λ_1 . Nous avons alors, pour tous (ρ_1, θ) vérifiant $0 < \rho_1 \leq r$, $-\eta \leq \theta \leq \eta$,

$$P(\rho_1, \theta) = \int_0^{\rho_1} \frac{\partial P(\rho, \theta)}{\partial \rho} d\rho.$$

Comme l'expression sous le signe d'intégration est non nulle pour $\rho > 0$ et a un signe constant (celui de λ_1), nous voyons que $P(\rho_1, \theta)$ est non nul et de même signe que λ_1 .

Un raisonnement tout à fait analogue permet de montrer que pour ρ_1 vérifiant $0 < \rho_1 \leq r$, $Q(\rho_1, -\eta)$ et $Q(\rho_1, \eta)$ sont non nuls et, respectivement, du signe de $(\lambda_1 - \lambda_2)$ et du signe de $(\lambda_2 - \lambda_1)$.

D'après les formules (**), les signes de $P(\rho, \theta)$ et de $Q(\rho, \theta)$ sont, respectivement, ceux de $\frac{d\rho}{dt}$ et de $\frac{d\theta}{dt}$. Nous avons bien prouvé qu'en choisissant convenablement r et η , nous pouvons faire en sorte que

- dans $K - \{a\}$, et en particulier sur l'arc de cercle C , $\frac{d\rho}{dt}$ soit partout non nul et de même signe que λ_1 ,
- sur le segment de droite A , $\frac{d\theta}{dt}$ soit partout non nul et de même signe que $\lambda_2 - \lambda_1$,
- sur le segment de droite B , $\frac{d\theta}{dt}$ soit partout non nul et de même signe que $\lambda_1 - \lambda_2$.

b) *Deuxième étape : cas où λ_1 et $\lambda_2 - \lambda_1$ sont de même signe.* — Dans ce cas, λ_1 et λ_2 sont de même signe et, de plus, $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Nous raisonnerons en supposant $\lambda_1 < 0$, mais notre raisonnement s'adapterait facilement au cas où $\lambda_1 > 0$ en changeant le sens de variation de t . Au moyen de flèches, nous avons représenté sur la partie gauche de la figure III.14 le sens dans lequel les courbes intégrales du champ de vecteurs X traversent la frontière de K , lorsque le temps t croît. Cette figure permet de deviner que toute courbe intégrale $t \mapsto \varphi(t)$ du champ de vecteurs X qui rencontre, pour $t = t_0$, le segment de droite A , ou le segment de droite B , ou encore l'arc de cercle C , entre, pour $t > t_0$ et $t - t_0$ assez petit, à l'intérieur de K . Nous allons prouver ce résultat rigoureusement en supposant, par exemple, que $\varphi(t_0) \in A$ (les cas où $\varphi(t_0) \in B$ et où $\varphi(t_0) \in C$ pouvant être traités de même).

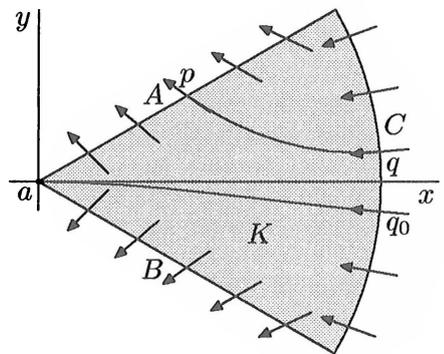
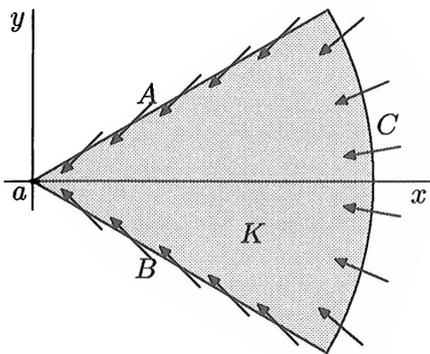


Figure III.14. Sens de traversée de la frontière de K

Nous avons

$$\theta(\varphi(t_0)) = \eta, \quad 0 < \rho(\varphi(t_0)) \leq r, \quad \left. \frac{d\theta(\varphi(t))}{dt} \right|_{t=t_0} < 0, \quad \left. \frac{d\rho(\varphi(t))}{dt} \right|_{t=t_0} < 0.$$

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que, pour $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon$, $\varphi(t)$ soit défini, et que l'on ait

- pour $t_0 - \varepsilon \leq t < t_0$, $\eta < \theta(\varphi(t)) < \pi/2$, donc $\varphi(t) \notin K$,
- pour $t_0 < t \leq t_0 + \varepsilon$, $0 < \theta(\varphi(t)) < \eta$ et $0 < \rho(\varphi(t)) < r$, donc $\varphi(t) \in \overset{\circ}{K}$ et, a fortiori, $\varphi(t) \in K$. Nous avons désigné par $\overset{\circ}{K}$ l'intérieur de K .

Montrons maintenant que pour tout $t \geq t_0$ pour lequel $\varphi(t)$ est défini, nous avons $\varphi(t) \in K$. Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe $t_1 > t_0$ tel que $\varphi(t_1)$ soit défini et n'appartienne pas à K . L'ensemble

$$\{t \in]t_0, t_1[; \text{ pour tout } \tau \in]t_0, t[, \varphi(\tau) \in \overset{\circ}{K}\}$$

est non vide (il contient $]t_0, t_0 + \varepsilon[$) et majoré par t_1 . Il admet donc une borne supérieure t_2 , qui vérifie $t_0 + \varepsilon \leq t_2 \leq t_1$. Puisque pour tout t vérifiant $t_0 < t < t_2$, nous avons $\varphi(t) \in \overset{\circ}{K} \subset K$ et que K est fermé, nous avons $\varphi(t_2) \in K$; d'autre part $\varphi(t_2) \notin \overset{\circ}{K}$, car

si $\varphi(t_2)$ appartenait à $\overset{\circ}{K}$, cet ensemble étant ouvert, nous aurions aussi $\varphi(t) \in \overset{\circ}{K}$ pour $t > t_2$ et $t - t_2$ assez petit, ce qui serait en contradiction avec la définition de t_2 . Donc $\varphi(t_2)$ est élément de la frontière de K . Or cela n'est pas possible : $\varphi(t_2)$ ne peut pas être égal au point d'équilibre a , en raison du théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz; il ne peut pas non plus être élément des segments de droite A ou B , ni de l'arc de cercle C , car le raisonnement fait ci-dessus pour $\varphi(t_0)$ s'appliquerait à $\varphi(t_2)$ et montrerait qu'il existe $\varepsilon' > 0$ tel que pour $t_2 - \varepsilon' \leq t < t_2$, $\varphi(t) \notin K$, en contradiction avec la définition de t_2 . Ainsi, en supposant l'existence d'un élément $t_1 > t_0$ tel que $\varphi(t_1)$ soit défini et ne soit pas élément de K , nous aboutissons à une contradiction. Nous pouvons donc affirmer que pour tout $t \geq t_0$ tel que $\varphi(t)$ soit défini, $\varphi(t) \in K$. Comme K est compact, le théorème II.3.3 (voir aussi le commentaire II.3.4.b) montre que $\varphi(t)$ est défini pour tout $t \geq t_0$, et nous pouvons affirmer que l'ensemble ω -limite de φ (ensemble des valeurs d'adhérence de l'application $t \mapsto \varphi(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$) est non vide. Comme $\rho(\varphi(t))$ varie de façon strictement monotone en fonction de t , cet ensemble ne peut être autre que $\{a\}$. Nous avons donc prouvé que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = a$. Comme $\varphi(t)$ reste dans K pour tout $t \geq t_0$, la courbe φ ne forme pas une spirale qui s'enroule autour du point a . Le théorème 7.6 permet alors d'affirmer que la courbe paramétrée φ admet, en son extrémité a , une demi-droite tangente dont le vecteur directeur est vecteur propre de $DX(a)$. Toujours parce que $\varphi(t) \in K$ pour tout $t \geq t_0$, l'angle polaire de ce vecteur propre appartient à l'intervalle $[-\eta, +\eta]$; ce vecteur propre est donc nécessairement colinéaire à e_1 et de même sens. Nous terminons la démonstration de la partie 1 du lemme en remarquant que tout ce que nous avons fait pour e_1 s'applique aussi à $-e_1$, qui est aussi vecteur propre de $DX(a)$ associé à la même valeur propre λ_1 .

c) Troisième étape : cas où λ_1 et $\lambda_2 - \lambda_1$ sont de signes contraires. — Ce cas se rencontre lorsque λ_1 et λ_2 sont de signes contraires, et aussi lorsque λ_1 et λ_2 sont de même signe et que de plus $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Son étude est un peu plus délicate que celle du cas, étudié précédemment, où λ_1 et $\lambda_2 - \lambda_1$ étaient supposés de même signe. Nous raisonnerons en supposant $\lambda_1 < 0$, mais notre raisonnement s'adapterait facilement au cas où $\lambda_1 > 0$ en changeant le sens de variation de t . Au moyen de flèches, nous avons représenté sur la partie droite de la figure III.14 le sens dans lequel les courbes intégrales du champ de vecteurs X traversent la frontière de K , lorsque le temps t croît. Cette figure permet de deviner que chaque courbe intégrale $t \mapsto \varphi(t)$ du champ de vecteurs X qui rencontre, pour $t = t_0$, l'arc de cercle C en un point autre qu'une des deux extrémités de cet arc entre, pour $t > t_0$ et $t - t_0$ assez petit, à l'intérieur de K . Elle permet aussi de deviner que pour un certain $t > t_0$, certaines de ces courbes sortent de K en traversant le segment de droite A , que d'autres en sortent en traversant le segment de droite B , et qu'entre ces deux familles (la famille des courbes intégrales qui sortent de K en traversant A et celle des courbes intégrales qui sortent de K en traversant B), il doit exister au moins une courbe intégrale qui reste dans K pour tout $t \geq t_0$. Lorsque $t \rightarrow +\infty$, cette dernière ne peut pas faire autre chose que tendre vers le point d'équilibre a ; en ce point elle admet nécessairement une demi-droite tangente de vecteur directeur e . Nous allons prouver rigoureusement ces propriétés.

Soit p un point du segment de droite A non égal à une extrémité de ce segment, et $t \mapsto \varphi(t)$ la courbe intégrale du champ de vecteurs X qui vérifie $\varphi(0) = p$. Montrons qu'il existe un élément $t_1 < 0$ tel que pour $t_1 < t < 0$, $\varphi(t) \in \overset{\circ}{K}$, et que $\varphi(t_1) \in C$ (voir figure II.17). Le raisonnement est semblable à celui fait ci-dessus. On montre d'abord qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $-\varepsilon \leq t < 0$, on ait $\varphi(t) \in \overset{\circ}{K}$. On montre ensuite que $\varphi(t)$ ne peut être élément de K pour tout $t < 0$ pour lequel il est défini : en effet, si $\varphi(t)$ était élément de K pour

tout $t < 0$ pour lequel il est défini, la compacité de K permettrait de prouver que $\varphi(t)$ est défini pour tout $t < 0$ et que l'ensemble α -limite de φ est non vide; comme $\rho(\varphi(t))$ croît lorsque t décroît, cet ensemble α -limite devrait être contenu dans l'arc de cercle C ; mais en tout point de C , le champ de vecteurs X est non tangent à cet arc de cercle; pour cette raison, l'ensemble α -limite de φ ne peut pas être contenu dans C . Il existe donc $t_1 < 0$ tel que $\varphi(t_1) \notin K$. On considère alors l'ensemble

$$\{ t \in [-\infty, 0[; \text{ pour tout } \tau \in]t, 0[, \varphi(\tau) \text{ existe et } \varphi(\tau) \in \overset{\circ}{K} \}.$$

Cet ensemble est non vide (il contient $[-\varepsilon, 0[$) et minoré par t_1 ; il admet donc une borne inférieure $t_2 < 0$. En raisonnant comme ci-dessus, on montre que $\varphi(t_2)$ appartient à la frontière de K , ne peut pas être le point d'équilibre a , et ne peut pas appartenir aux segments de droite A ou B . Par suite, $\varphi(t_2) \in C$.

Nous avons prouvé que la courbe intégrale $t \mapsto \varphi(t)$ du champ de vecteurs X qui passe, pour $t = 0$, par un point p du segment de droite A autre que l'une des extrémités de ce segment, reste dans $\overset{\circ}{K}$ pour $t_2 < t < 0$ et atteint l'arc de cercle C pour $t = t_2$, en un point $q = \varphi(t_2)$. Nous avons ainsi défini une application $\chi_A : p \mapsto q$ du segment de droite A (privé de ses extrémités) dans l'arc de courbe C . Le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz montre que cette application est injective, et la différentiabilité du flot permet de montrer qu'elle est continue (et même que c'est un difféomorphisme). Nous admettrons ici cette propriété, mais le lecteur soucieux de rigueur en trouvera la preuve dans le chapitre IV, où nous étudierons l'application de Poincaré. En faisant tendre le point p vers l'extrémité du segment de droite A où ce segment rencontre l'arc de cercle C , nous voyons que l'application χ_A se prolonge par continuité à ce point, et l'applique sur lui-même. Ainsi prolongée, χ_A est une bijection continue du segment de droite A privé de son extrémité a sur une partie connexe de l'arc de cercle C dont une extrémité (qui est un point fixe de χ_A) est le point que A et C ont en commun.

En procédant de la même manière, nous construisons une bijection continue χ_B du segment de droite B privé de son extrémité a sur une partie connexe de l'arc de cercle C dont une extrémité (qui est un point fixe de χ_B) est le point que B et C ont en commun.

Le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz montre que les images des applications χ_A et χ_B sont des parties disjointes de l'arc de cercle C . Comme χ_A et χ_B sont toutes deux définies sur des segments de droite privés d'une de leurs extrémités, leurs images sont aussi des arcs de cercle privés d'une de leurs extrémités. Il existe donc au moins un point q_0 de C qui n'est l'image d'aucun point de A par l'application χ_A , ni d'aucun point de B par l'application χ_B . Nous verrons plus loin que le point q_0 est en fait unique; mais pour le moment il nous suffit de savoir qu'il existe.

Soit alors ψ la courbe intégrale du champ de vecteurs X qui vérifie $\psi(0) = q_0$. Les mêmes raisonnements que ceux présentés ci-dessus permettent d'établir successivement les résultats suivants : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour t vérifiant $0 < t < \varepsilon$, $\psi(t) \in \overset{\circ}{K}$; si $\psi(t)$ n'était pas élément de K pour tout $t > 0$ pour lequel $\psi(t)$ est défini, il existerait $t_2 > 0$ tel que $\psi(t_2)$ soit défini et élément de la frontière de K ; mais cela est impossible car $\psi(t_2)$ ne saurait ni être égal à a , ni être élément de A (car alors q_0 serait image d'un point de A par χ_A), ni être élément de B (pour une raison similaire) ni être élément de C (en raison de la décroissance de $\rho(\psi(t))$); on conclut, comme ci-dessus, que $\psi(t)$ est défini pour tout $t > 0$, que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = a$ et que la courbe paramétrée ψ admet, en son extrémité a , une demi-droite tangente de vecteur directeur e_1 .

On termine la démonstration de la partie 2 du lemme, donc du lemme entier, en remarquant que tout ce qui a été dit pour le vecteur propre e_1 de $DX(a)$ s'applique aussi à $-e_1$. \square

7.9. Lemme. — Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^1 défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension 2, d'espace vectoriel associé E . Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre non dégénéré de X , c'est-à-dire un point tel que $X(a) = 0$ et que $DX(a)$ soit un élément inversible de $\mathcal{L}(E, E)$. On suppose les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de $DX(a)$ réelles, distinctes et telles que λ_1 et $\lambda_2 - \lambda_1$ soient de signes contraires. Soient e_1 et e_2 des vecteurs propres de $DX(a)$ associés, respectivement, aux valeurs propres λ_1 et λ_2 . Parmi les courbes intégrales de X qui admettent $\{a\}$ pour ensemble limite, il y en a une qui admet, au point a , une demi-droite tangente de vecteur directeur e_1 et une qui admet, au point a , une demi-droite tangente de vecteur directeur $-e_1$; toutes les autres ont, au point a , une demi-droite tangente de vecteur directeur e_2 ou $-e_2$.

Preuve : Nous traiterons le cas où $\lambda_1 < 0$ donc (puisque λ_1 et $\lambda_2 - \lambda_1$ sont de signes contraires) $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$. Le cas où $\lambda_1 > 0$ se traite de la même manière. La proposition 6.9 montre que toute courbe intégrale de X qui admet $\{a\}$ pour ensemble limite et qui, au point a , possède une demi-droite tangente de vecteur directeur e_1 , admet le point $\{a\}$ pour ensemble ω -limite, puisque nous avons supposé $\lambda_1 < 0$. Le lemme 7.8 montre qu'il existe au moins une courbe intégrale de X qui a ces propriétés. Nous devons montrer qu'il n'y en a qu'une.

Comme pour la preuve du lemme 7.8, nous utilisons le repère affine (a, e_1, e_2) pour identifier \mathcal{E} à \mathbb{R}^2 . Nous notons x et y les coordonnées dans ce repère. Nous munissons \mathbb{R}^2 de la norme

$$z = (x, y) \mapsto \|z\| = \sup(|x|, |y|).$$

Soit Ψ le flot réduit de X , et Ψ_1 le difféomorphisme $x \mapsto \Psi_1(x) = \Psi(1, x)$. Nous savons que a est élément de l'ouvert $U_1 \subset \Omega$ sur lequel Ψ_1 est défini, et que

$$\Psi_1(a) = a.$$

D'après la formule établie au paragraphe II.4.14, nous avons

$$D\Psi_1(a) = \exp(DX(a)).$$

Les vecteurs de base e_1 et e_2 sont donc vecteurs propres de $D\Psi_1(a)$ associés, respectivement, aux valeurs propres $\exp(\lambda_1)$ et $\exp(\lambda_2)$ (proposition VII.1.18). Puisque $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$, nous avons

$$0 < \exp(\lambda_1) < \exp(\lambda_2).$$

Soit $R : U_1 \rightarrow E$ l'application

$$z \mapsto R(z) = \Psi_1(z) - a - D\Psi_1(a)(z - a).$$

L'application R est de classe C^1 et vérifie $R(a) = 0$; sa différentielle en un point z de U_1 est $DR(z) = D\Psi_1(z) - D\Psi_1(a)$; en particulier, nous avons $DR(a) = 0$. Soit ε un réel vérifiant

$$0 < \varepsilon < \frac{\exp(\lambda_2) - \exp(\lambda_1)}{2}. \quad (*)$$

Puisque DR est continue et nulle au point a et que U_1 est un ouvert contenant a , il existe $r > 0$ tel que la boule fermée de centre a et de rayon r soit contenue dans U_1 et qu'en tout point z de cette boule, on ait

$$\|DR(z)\| \leq \varepsilon.$$

Soit k un réel vérifiant $0 < k \leq 1$ et S l'ensemble des points de \mathcal{E} (identifié à \mathbb{R}^2 comme indiqué ci-dessus) dont les coordonnées (x, y) vérifient

$$0 \leq x \leq r, \quad -kx \leq y \leq kx.$$

Soient φ et ψ deux courbes intégrales du champ de vecteurs X qui vérifient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = a$$

et qui toutes deux ont au point a une demi-droite tangente de vecteur directeur e_1 . Pour t assez grand, $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ appartiennent à l'intérieur $\overset{\circ}{S}$ de S , puisque lorsque $t \rightarrow +\infty$ $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ tendent vers a en venant de la direction de e_1 . De plus, si t_e est un réel tel que, pour tout $t \geq t_e$, le point $\varphi(t)$ soit élément de $\overset{\circ}{S}$, l'abscisse de $\varphi(t)$ prend, lorsque t parcourt l'intervalle $]t_e, +\infty[$, toutes les valeurs comprises entre l'abscisse de $\varphi(t_e)$ et 0; la même propriété est aussi vérifiée par ψ . Il existe donc des réels t_0 et t'_0 tels que pour tout $t \geq t_0$ et tout $t' \geq t'_0$, on ait $\varphi(t) \in \overset{\circ}{S}$ et $\psi(t') \in \overset{\circ}{S}$, et que de plus $\varphi(t_0)$ et $\psi(t'_0)$ aient même abscisse x_0 . La figure III.15 illustre la situation. Afin d'alléger les notations nous écrirons

$$\varphi(t_0) = z_0 = (x_0, y_0), \quad \psi(t'_0) = z'_0 = (x_0, y'_0).$$

Nous allons supposer que $y'_0 \neq y_0$ et montrer que cette hypothèse conduit à une contradiction.

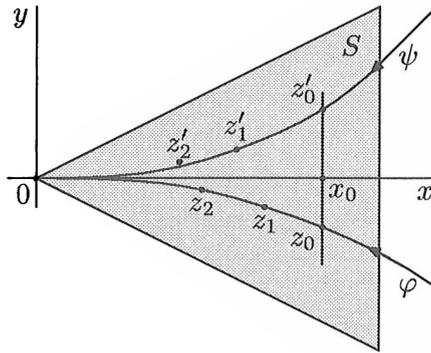


Figure III.15. Illustration de la preuve du lemme 7.9

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$z_n = (x_n, y_n) = \Psi_1^n(z_0), \quad z'_n = (x'_n, y'_n) = \Psi_1^n(z'_0).$$

Puisque $z_n = \varphi(t_0 + n)$ et $z'_n = \psi(t'_0 + n)$, nous pouvons affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n et z'_n sont éléments de $\overset{\circ}{S}$. D'après la définition même de S , et compte tenu de la norme que nous avons choisie sur \mathbb{R}^2 , nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|z_n\| = \sup(|x_n|, |y_n|) = |x_n| = x_n, \quad \|z'_n\| = \sup(|x'_n|, |y'_n|) = |x'_n| = x'_n,$$

où nous avons aussi tenu compte du fait que x_n et x'_n sont positifs. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|y'_n - y_n| \geq |x'_n - x_n|. \tag{H_n}$$

L'inégalité (H_0) est vraie, puisque $x'_0 = x_0$. Supposons l'inégalité (H_n) vraie pour $0 \leq n \leq m$, et montrons qu'elle est encore vraie pour $n = m + 1$. Nous avons

$$z'_{m+1} - z_{m+1} = (\exp(\lambda_1)(x'_m - x_m), \exp(\lambda_2)(y'_m - y_m)) + R(z'_m) - R(z_m). \tag{**}$$

Le segment de droite d'extrémités z_m et z'_m est contenu dans l'ensemble S , sur lequel $\|DR\|$ est majoré par ε . L'inégalité des accroissements finis (voir par exemple [18], chapitre I, paragraphe 5.6) montre que

$$\|R(z'_m) - R(z_m)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|DR(z_m + t(z'_m - z_m))\| \|z'_m - z_m\| \leq \varepsilon \|z'_m - z_m\|. \tag{***}$$

En utilisant $(**)$ et $(***)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} |y'_{m+1} - y_{m+1}| &\geq \exp(\lambda_2)|y'_m - y_m| - \varepsilon \|z'_m - z_m\|, \\ |x'_{m+1} - x_{m+1}| &\leq \exp(\lambda_1)|x'_m - x_m| + \varepsilon \|z'_m - z_m\|, \end{aligned} \tag{****}$$

En retranchant la seconde inégalité de la première, nous obtenons

$$|y'_{m+1} - y_{m+1}| - |x'_{m+1} - x_{m+1}| \geq \exp(\lambda_2)|y'_m - y_m| - \exp(\lambda_1)|x'_m - x_m| - 2\varepsilon\|z'_m - z_m\|.$$

Mais nous avons, puisque l'inégalité (H_m) est supposée vraie,

$$\|z'_m - z_m\| = \sup(|x'_m - x_m|, |y'_m - y_m|) = |y'_m - y_m|,$$

et par suite, compte tenu du choix de ε (voir (*)),

$$|y'_{m+1} - y_{m+1}| - |x'_{m+1} - x_{m+1}| \geq (\exp(\lambda_2) - \exp(\lambda_1) - 2\varepsilon)|y'_m - y_m| \geq 0,$$

qui n'est autre que l'inégalité (H_{m+1}) . Nous avons ainsi prouvé par récurrence que l'inégalité (H_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La première inégalité (****), dans laquelle nous remplaçons $m+1$ par n , peut maintenant s'écrire

$$|y'_n - y_n| \geq (\exp(\lambda_2) - \varepsilon)|y'_{n-1} - y_{n-1}|,$$

et par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|y'_n - y_n| \geq (\exp(\lambda_2) - \varepsilon)^n |y'_0 - y_0|,$$

ce qui implique

$$|y'_n| \geq (\exp(\lambda_2) - \varepsilon)^n |y'_0 - y_0| - |y_n|,$$

ou encore, puisque $|y_n| \leq x_n$,

$$|y'_n| \geq (\exp(\lambda_2) - \varepsilon)^n |y'_0 - y_0| - x_n.$$

Mais nous avons

$$z_n = (\exp(\lambda_1)x_{n-1}, \exp(\lambda_2)y_{n-1}) + R(z_{n-1}).$$

En procédant comme ci-dessus et en tenant compte du fait que $|y_{n-1}| \leq x_{n-1}$, nous en déduisons

$$0 < x_n \leq (\exp(\lambda_1) + \varepsilon)x_{n-1},$$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 < x_n \leq (\exp(\lambda_1) + \varepsilon)^n x_0.$$

De même, puisque $x'_0 = x_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < x'_n \leq (\exp(\lambda_1) + \varepsilon)^n x_0.$$

Nous en déduisons

$$|y'_n| \geq (\exp(\lambda_2) - \varepsilon)^n |y'_0 - y_0| - (\exp(\lambda_1) + \varepsilon)^n x_0,$$

puis

$$\frac{|y'_n|}{x'_n} \geq \left(\frac{\exp(\lambda_2) - \varepsilon}{\exp(\lambda_1) + \varepsilon} \right)^n \frac{|y'_0 - y_0|}{x_0} - 1.$$

Mais compte tenu de (*), nous avons

$$\frac{\exp(\lambda_2) - \varepsilon}{\exp(\lambda_1) + \varepsilon} > 1,$$

ce qui prouve que si $y'_0 \neq y_0$, alors, pour n assez grand, $\frac{|y'_n|}{x'_n} \geq 1$, ce qui est

en contradiction avec le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z'_n = (x'_n, y'_n)$ est élément de $\overset{\circ}{S}$. L'hypothèse selon laquelle $y'_0 \neq y_0$ nous ayant conduit à une contradiction, nous avons nécessairement $y'_0 = y_0$, c'est-à-dire $\varphi(t_0) = \psi(t'_0)$, et par suite, d'après le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz, pour tout t pour lequel $\psi(t)$ est défini,

$$\psi(t) = \varphi(t + t_0 - t'_0).$$

Les deux solutions φ et ψ de l'équation différentielle associée à X ne diffèrent que par un changement de paramètre correspondant à un changement de l'origine des temps; les courbes intégrales qui leur sont associées sont donc confondues.

Deux courbes intégrales distinctes de X ne pouvant avoir de point commun, l'existence d'au moins une courbe intégrale qui a au point a une demi-droite tangente exclut l'existence de courbes intégrales qui, lorsque t tend vers l'infini, convergent vers le point a en formant une spirale s'enroulant autour de ce point. Toutes les courbes intégrales de X qui admettent $\{a\}$ pour ensemble limite, autres que celle, unique, qui a en a une demi-droite tangente de vecteur directeur e_1 , et que celle, unique, qui a en a une demi-droite tangente de vecteur directeur $-e_1$, ont donc en a une demi-droite tangente de vecteur directeur e_2 ou $-e_2$ puisque, d'après la proposition 6.9, ce vecteur directeur doit être vecteur propre de $DX(a)$. \square

Nous pouvons maintenant énoncer :

7.10. Proposition. — Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^1 défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension 2, d'espace vectoriel associé E . Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre non dégénéré de X , c'est-à-dire un point tel que $X(a) = 0$ et que $DX(a)$ soit un élément inversible de $\mathcal{L}(E, E)$. On suppose les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de $DX(a)$ réelles et distinctes. Soient e_1 et e_2 des vecteurs propres de $DX(a)$ associés, respectivement, aux valeurs propres λ_1 et λ_2 .

1. Supposons $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Il y a alors exactement deux courbes intégrales de X qui tendent vers a lorsque $t \rightarrow +\infty$; l'une admet en ce point une demi-droite tangente de vecteur directeur e_1 , et l'autre une demi-droite tangente de vecteur directeur $-e_1$. De même, il y a exactement deux courbes intégrales de X qui tendent vers a lorsque $t \rightarrow -\infty$; l'une admet en ce point une demi-droite tangente de vecteur directeur e_2 , et l'autre une demi-droite tangente de vecteur directeur $-e_2$. Le point a n'est ni α -stable, ni ω -stable, ni attractif, ni répulsif; on dit que c'est un col.

2. Supposons λ_1 et λ_2 de même signe, et $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Le point a est
 - ω -stable et attractif si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$; on dit alors que c'est un nœud attractif;
 - α -stable et répulsif si $0 < \lambda_2 < \lambda_1$; on dit alors que c'est un nœud répulsif.

De plus, toutes les courbes intégrales de X qui admettent $\{a\}$ pour ensemble limite (ω -limite si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, α -limite si $0 < \lambda_2 < \lambda_1$) ont en a une demi-droite tangente. Parmi elles, exactement une a en ce point une demi-droite tangente de vecteur directeur e_1 , et exactement une a en ce point une demi-droite tangente de vecteur directeur $-e_1$; toutes les autres ont en a une demi-droite tangente de vecteur directeur e_2 ou $-e_2$. L'ensemble des courbes intégrales de X qui ont en a une demi-droite tangente de vecteur directeur e_2 et l'ensemble des courbes intégrales de X qui ont en a une demi-droite tangente de vecteur directeur $-e_2$ sont tous deux infinis.

Preuve :

1. Supposons $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Nous voyons alors que λ_1 et $\lambda_2 - \lambda_1$ sont de signes contraires; les conclusions du lemme 7.9 s'appliquent à e_1 . Mais nous voyons aussi que λ_2 et $\lambda_1 - \lambda_2$ sont aussi de signes contraires; les conclusions de ce lemme s'appliquent donc aussi à e_2 . Les résultats annoncés découlent immédiatement de ce lemme et de la proposition 6.9.

2. Supposons λ_1 et λ_2 de même signe, λ_2 étant la valeur propre dont la valeur absolue est la plus petite. La partie 1 du lemme 7.8 montre que l'ensemble des courbes intégrales

de X qui admettent $\{a\}$ pour ensemble limite et qui ont en a une demi-droite tangente de vecteur directeur e_2 et l'ensemble des courbes intégrales de X qui admettent $\{a\}$ pour ensemble limite et ont en a une demi-droite tangente de vecteur directeur $-e_2$ sont tous deux infinis. D'autre part, puisque λ_1 et $\lambda_2 - \lambda_1$ sont de signes contraires, les résultats du lemme 7.9 s'appliquent à e_1 . Les résultats annoncés en découlent. \square

7.11. Commentaires

a) Allure qualitative du portrait de phases. — Les propositions 7.7 et 7.10 montrent qu'au voisinage d'un point d'équilibre non dégénéré a du champ de vecteurs X , lorsque les deux valeurs propres de $DX(a)$ sont distinctes et ne sont pas imaginaires pures, l'allure qualitative du portrait de phases de l'équation différentielle associée à X est la même que celle du portrait de phases de l'équation linéarisée en a au voisinage de l'origine, représentée sur les figures III.5, III.6 et III.10. La seule différence notable est la suivante : alors que certaines courbes intégrales de l'équation linéarisée sont des demi-droites (voir les figures III.5 et III.6), aucune de celles de l'équation différentielle associée à X n'est en général une demi-droite.

b) Cas d'exception. — Les propositions 7.7 et 7.10 ne sont pas applicables lorsque $DX(a)$ a des valeurs propres imaginaires pures. L'exemple 6.3 montre que le point a peut alors, selon les cas, être ω -stable ou α -stable, attractif ou répulsif. L'étude de $DX(a)$ ne suffit pas pour déterminer le comportement qualitatif des courbes intégrales au voisinage de a .

Ces propositions ne sont pas non plus applicables lorsque $DX(a)$ a une valeur propre réelle double. Dans ce cas, le signe de cette valeur propre nous renseigne déjà sur la stabilité et le caractère attractif ou répulsif du point a , puisque la proposition 6.2 est applicable. Pour pousser plus loin l'étude qualitative du portrait de phases au voisinage de a , deux cas sont à examiner séparément.

c) Premier cas. — Le sous-espace propre associé à cette valeur propre est de dimension 1. Soit e un vecteur propre de $DX(a)$; tout autre vecteur propre est le produit de e par un réel non nul. D'après le théorème 7.6, les courbes intégrales qui tendent vers le point a lorsque $t \rightarrow \pm\infty$, soit admettent en a une demi-droite tangente, soit forment des spirales qui s'enroulent autour du point a . En remarquant que deux courbes intégrales distinctes ne peuvent pas se rencontrer, il est facile de voir que si une courbe intégrale forme une spirale qui s'enroule autour de a , aucune courbe intégrale tendant vers a ne peut avoir de demi-droite tangente en ce point, et par suite toutes les courbes intégrales qui tendent vers a forment des spirales qui s'enroulent autour de ce point. De même, si une courbe intégrale qui tend vers a admet une demi-droite tangente en ce point, aucune courbe intégrale tendant vers a ne peut former de spirale s'enroulant autour de ce point; toutes les courbes intégrales qui tendent vers a admettent donc en ce point une demi-droite tangente. Le portrait de phases au voisinage de a peut donc avoir deux allures, qualitativement bien différentes :

- ou bien toutes les courbes intégrales qui tendent vers a forment des spirales qui s'enroulent autour de ce point;
- ou bien toutes les courbes intégrales qui tendent vers a admettent en ce point une demi-droite tangente; d'après la proposition 6.9, celle-ci a pour vecteur directeur soit e , soit $-e$. La figure III.7 donne un exemple de ce comportement.

d) Deuxième cas. — L'isomorphisme $DX(a)$ est proportionnel à id_E ; dans ce cas toutes les directions sont caractéristiques; les hypothèses du théorème 7.6 ne sont plus satisfaites, et les courbes intégrales qui convergent vers a peuvent avoir des comportements divers.

7.12. Autre remarque. — Revenons au cas où le point d'équilibre a est un col, c'est-à-dire où les deux valeurs propres de $DX(a)$ sont réelles de signes contraires. L'ensemble formé par le point a et la réunion des deux courbes intégrales qui tendent vers a lorsque $t \rightarrow +\infty$ est appelé *variété stable* de a . De même, l'ensemble formé par le point a et la réunion des deux courbes intégrales qui tendent vers a lorsque $t \rightarrow -\infty$ est appelé *variété instable* de a . Les variétés stable et instable d'un point d'équilibre a seront étudiées plus en détail au chapitre V, dans un cadre plus général. Elles ont toujours en commun le point a . Elles peuvent avoir d'autres points en commun : lors de l'étude du portrait de phases du pendule plan (I.4.6 et figure I.4), nous avons vu un exemple de col dont les variétés stable et instable sont confondues (il est vrai qu'il s'agit d'un champ de vecteurs défini non sur un ouvert du plan, mais sur un cylindre). Dans l'exemple suivant, les variétés stable et instable d'un col ont en commun un arc de courbe.

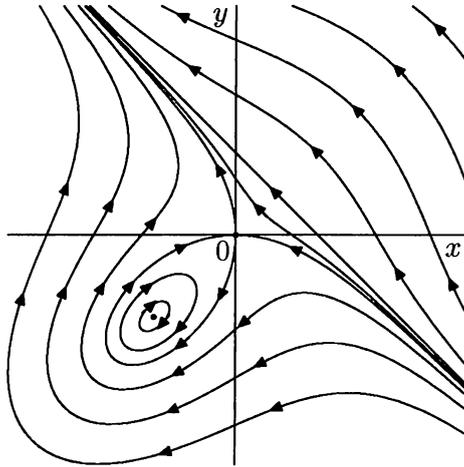


Figure III.16. Courbes stable et instable ayant un arc commun

7.13. Exemple. — On considère l'équation différentielle dans \mathbb{R}^2 (coordonnées x et y),

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + x^2. \end{cases} \quad (*)$$

Il y a deux points d'équilibre : l'origine ($x = 0$, $y = 0$), et le point ($x = -1$, $y = -1$). Le système linéarisé à l'origine s'écrit

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -u, \\ \frac{dv}{dt} = v. \end{cases}$$

L'origine est donc un col (aussi bien pour le système (*) que pour le système linéarisé à l'origine). Les courbes stable et instable de l'origine (pour le système (*)) sont tangentes, à l'origine, respectivement à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées.

Le système (*) est en fait un système hamiltonien, de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x}, \end{cases}$$

avec

$$H(x, y) = xy + \frac{x^3 + y^3}{3}.$$

Il est facile d'en déduire que la fonction H est constante sur chaque courbe intégrale. Cette remarque permet de déterminer aisément l'allure qualitative du portrait de phases, représentée sur la figure III.19. On remarque que les courbes stable et instable de l'origine ont une partie commune formant une boucle, avec l'origine pour point anguleux, contenue dans le quart de plan ($x \leq 0, y \leq 0$).

7.14. Extension aux champs de vecteurs sur une surface. — Dans les paragraphes 6 et 7, nous avons pris soin de n'introduire que des notions qui se transforment de manière naturelle par difféomorphisme (voir les propositions 6.7 et 6.11, la définition 7.3 et le commentaire 7.4.c). C'est pourquoi les résultats du paragraphe 7 restent applicables, moyennant une adaptation facile, aux champs de vecteurs définis sur une surface.

8. Exercices

Exercice III.1. Donner un exemple de système dynamique ayant un point d'équilibre ω -stable mais non attractif, ainsi qu'un exemple de système dynamique ayant un point d'équilibre attractif mais non ω -stable.

Exercice III.2. On considère l'équation différentielle dans le plan

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y - x^2. \end{cases}$$

Étudier la stabilité et la stabilité asymptotique de l'origine. [On pourra utiliser pour fonction de Liapounov $L(x, y) = x^2 + y^2$]. Déterminer $r > 0$, aussi grand que possible, tel que le disque centré à l'origine de rayon r soit contenu dans le bassin d'attraction de l'origine.

Exercice III.3. Étudier les point d'équilibre de l'équation différentielle dans le plan

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - 1. \end{cases}$$

Exercice III.4. Étudier la stabilité de l'origine pour l'équation différentielle dans le plan

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \exp(-x - 3y) - 1, \\ \frac{dy}{dt} = -x(1 - y^2). \end{cases}$$

Exercice III.5. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application

$$g(x) = ax + bx^2 + cx^3,$$

avec a, b et $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. On considère les itérés de $g, g^0 = \text{id}_{\mathbb{R}}, g^1 = g, g^2 = g \circ g, \dots, g^n = g \circ g^{n-1}, \dots$, qui constituent un système dynamique à temps discret admettant l'origine pour point d'équilibre. Étudier la stabilité et le caractère attractif ou répulsif de ce point. [Indications : on pourra distinguer les cas $|a| < 1, |a| = 1$ et $|a| > 1$.]

9. Solutions

Solution III.1. Dans le plan, le système dynamique associé à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x,$$

admet l'origine pour point d'équilibre. Ce point est un centre, ω -stable mais non attractif (voir 5.4 et figure III.8 b).

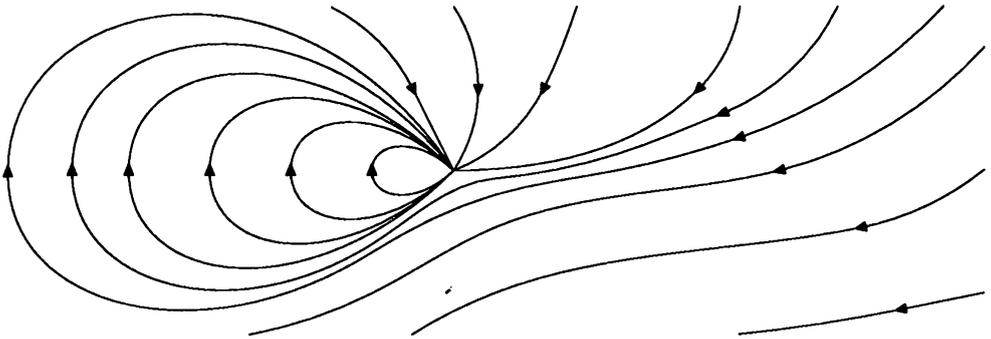


Figure III.17. Point d'équilibre attractif mais non ω -stable.

Dans le plan, le système dynamique associé à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y^2, \quad \frac{dy}{dt} = 2xy,$$

a pour courbes intégrales

- des cercles centrés sur l'axe des ordonnées, tous tangents en 0 à l'axe des abscisses, privés de l'origine,
- les demi-axes $(x > 0, y = 0)$ et $(x < 0, y = 0)$,
- l'origine 0, qui est un point d'équilibre.

Toutes les courbes intégrales, sauf les demi-axes $(x > 0, y = 0)$ et $(x < 0, y = 0)$, ont le singleton $\{0\}$ pour ensemble α -limite et pour ensemble ω -limite. L'origine n'est ni ω -stable, ni α -stable, car il existe des courbes intégrales issues de points arbitrairement proches de l'origine, qui s'en éloignent autant qu'on veut lorsque t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Une seule chose empêche l'origine d'être un point d'équilibre attractif (resp., répulsif) : le fait que le demi-axe $(x > 0, y = 0)$ (resp., le demi-axe $(x < 0, y = 0)$) soit une courbe intégrale qui ne tend pas vers l'origine lorsque $t \rightarrow +\infty$ (resp., lorsque $t \rightarrow -\infty$). Pour y remédier, il suffit de transformer le plan en sphère S^2 par projection stéréographique. On obtient ainsi, sur la sphère S^2 , un champ de vecteurs ayant un unique point d'équilibre, le singleton réduit à ce point étant ensemble α -limite et ω -limite de tout point de la sphère. Ce point est, à la fois, attractif et répulsif, sans être α -stable ni ω -stable.

La figure III.17 donne un autre exemple de système dynamique, cette fois dans le plan, ayant un point d'équilibre attractif mais non ω -stable.

Solution III.2. Le système linéarisé à l'origine s'écrit

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -2u, \\ \frac{dv}{dt} = -v. \end{cases}$$

La matrice de ce système a pour valeurs propres -2 et -1 . L'origine est donc un nœud attractif (proposition 7.10); c'est un point d'équilibre ω -stable et attractif. On peut également obtenir ce résultat en utilisant pour fonction de Liapounov

$$L(x, y) = x^2 + y^2.$$

Soit $t \mapsto (x(t), y(t))$ une solution de l'équation différentielle étudiée. Nous avons

$$\frac{d}{dt} L(x(t), y(t)) = 2x \frac{dx(t)}{dt} + 2y \frac{dy(t)}{dt} = -(4x^2 + 2xy(x+y) + 2y^2),$$

où pour alléger nous avons écrit x pour $x(t)$ et y pour $y(t)$. Posons $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Nous obtenons

$$\frac{d}{dt} L(x(t), y(t)) = -r^2(3 + \cos(2\theta) + \sqrt{2}r \sin(2\theta) \sin(\theta + \pi/4)).$$

En remarquant que $\cos(2\theta) \geq -1$ et que $\sin(2\theta) \sin(\theta + \pi/4) \geq -1$, nous voyons que

$$3 + \cos(2\theta) + \sqrt{2}r \sin(2\theta) \sin(\theta + \pi/4) \geq 2 - \sqrt{2}r.$$

Donc pour $r < \sqrt{2}$, $\frac{d}{dt} L(x(t), y(t)) \leq 0$, l'inégalité étant stricte si de plus $r \neq 0$. Le théorème de Liapounov (2.6) montre que l'origine est un point d'équilibre stable et attractif. Pour tout réel ρ vérifiant $0 < \rho < \sqrt{2}$, le disque fermé de centre l'origine et de rayon ρ est positivement invariant et ne contient aucune orbite complète sur laquelle L est constante, autre que celle réduite au point d'équilibre. Le théorème 3.5 montre que ce disque fermé est contenu dans le bassin d'attraction de l'origine. Il est facile d'en déduire que le disque ouvert de centre l'origine et de rayon $\sqrt{2}$ est contenu dans ce bassin d'attraction.

Solution III.3. Les points d'équilibre sont $A = (1, 1)$ et $B = (-1, -1)$.

Le système linéarisé au point A s'obtient en posant $x = 1 + u$, $y = 1 + v$, en portant ces expressions dans l'équation en en négligeant les termes de degré supérieur à 1. Nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u - v, \\ \frac{dv}{dt} = 2u. \end{cases}$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice de ce système sont les racines de l'équation

$$\lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Elles sont distinctes, complexes conjuguées l'une de l'autre, de partie réelle positive. Le point A est donc un foyer répulsif (proposition 7.7).

En procédant de même, on obtient pour système linéarisé au point B

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u - v, \\ \frac{dv}{dt} = -2u. \end{cases}$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice de ce système sont les racines de l'équation

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0,$$

c'est-à-dire $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Elles sont réelles distinctes de signes contraires. Le point B est un col (proposition 7.10).

Solution III.4. Le système linéarisé à l'origine est

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -u - 3v, \\ \frac{dv}{dt} = -u. \end{cases}$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice de ce système sont les racines de l'équation

$$\lambda^2 + \lambda - 3 = 0.$$

Elles sont réelles distinctes de signes contraires. L'origine est un col (proposition 7.10).

Solution III.5. L'application g est différentiable de classe C^∞ et sa dérivée à l'origine est $g'(0) = a$, non nulle par hypothèse. D'après le théorème d'inversion locale, g restreinte à un voisinage assez petit W de l'origine, est un difféomorphisme de W sur son image $g(W)$. En restreignant éventuellement le système dynamique à $W \cup g(W)$, nous pouvons supposer que l'ensemble des temps paramétrant le système dynamique est \mathbb{Z} .

D'après la proposition 2.10, si $|a| = |g'(0)| < 1$, l'origine est un point d'équilibre ω -stable et attractif.

Toujours d'après la proposition 2.10 (moyennant une légère adaptation consistant à raisonner sur le système dynamique de générateur g^{-1}), si $|a| = |g'(0)| > 1$, l'origine est un point d'équilibre α -stable et répulsif.

Il reste à traiter les cas où $|a| = 1$.

Supposons d'abord $a = 1$. Nous voyons alors que pour $|x|$ assez petit, $g(x) = x + bx^2 + cx^3$ est de même signe que x . Nous pouvons donc étudier séparément les restrictions à \mathbb{R}^+ et à \mathbb{R}^- du système dynamique considéré, puisque ces ensembles, ou du moins leur intersection avec un voisinage assez petit de l'origine, sont invariants par g . Plusieurs sous-cas sont à considérer suivant la valeur de b .

Supposons $b > 0$. Nous avons alors :

- pour $x > 0$, $g(x) > x$,
- pour $x < 0$, $g(x) > x$, donc $|g(x)| < |x|$.

Le théorème de Liapounov 2.5 (avec, pour fonction de Liapounov, la fonction $x \mapsto |x|$), nous montre que pour le système restreint à \mathbb{R}^+ , l'origine est α -stable et répulsif; tandis que pour le système restreint à \mathbb{R}^- , ce point est ω -stable et attractif. Donc pour le système complet, l'origine n'est certainement ni ω -stable, ni α -stable.

Supposons maintenant $b < 0$. Les mêmes conclusions subsistent, les rôles de \mathbb{R}^+ et de \mathbb{R}^- étant échangés.

Supposons maintenant $b = 0$. Le raisonnement est du même type, mais le terme cx^3 étant impair (alors que bx^2 était pair), le comportement sera maintenant le même sur \mathbb{R}^+ et sur \mathbb{R}^- . Les résultats, toujours basés sur le théorème de Liapounov 2.5, sont les suivants :

- si $c > 0$, l'origine est α -stable et répulsif,
- si $c < 0$, l'origine est ω -stable et attractif,
- si $c = 0$, $g(x) = x$, et tous les points de \mathbb{R} sont points d'équilibre.

Supposons maintenant $a = -1$. Alors pour $|x|$ assez petit, $g(x)$ et x sont de signes opposés. Calculons $g^2(x)$. Nous obtenons

$$g^2(x) = x - 2(b^2 + c)x^3 + o(x^3).$$

Nous pouvons appliquer à g^2 les résultats obtenus précédemment pour $a = 1$, et $b = 0$. Il est en effet facile de prouver que pour ce qui concerne la stabilité de l'origine et son caractère attractif ou répulsif, les propriétés des systèmes dynamiques de générateur g et de générateur $g^2 = g \circ g$ sont les mêmes. Nous obtenons :

— si $b^2 + c > 0$, l'origine est ω -stable et attractif,

— si $b^2 + c < 0$, l'origine est α -stable et répulsif.

Enfin, si $a = -1$ et $b^2 + c = 0$, avec $b \neq 0$, nous obtenons en calculant $g^2(x)$,

$$g^2(x) = x + 4b^4x^5 + o(x^5),$$

et le théorème de Liapounov montre que l'origine est α -stable et répulsif.

Chapitre IV

Orbites périodiques

Après les points d'équilibre, les orbites périodiques sont les éléments remarquables les plus simples du portrait de phases d'un système dynamique. Nous nous concentrons, dans ce chapitre, sur l'étude des orbites périodiques des systèmes à temps continu, car celle des orbites périodiques des systèmes à temps discret se ramène immédiatement à l'étude de points d'équilibre. Nous définissons l'application de retour de Poincaré (2.6) et nous l'utilisons pour étudier la stabilité d'une orbite périodique. En suivant le traitement particulièrement élégant qu'en donnent Hirsch et Smale [35], nous étudions, à titre d'exemple, l'orbite périodique de l'équation de Van der Pol.

Enfin, dans le dernier paragraphe, nous établissons le théorème de Poincaré-Bendixson : un ensemble limite compact et sans point d'équilibre, pour le flot réduit d'un champ de vecteurs différentiable sur un ouvert d'un plan, est nécessairement une orbite périodique.

1. Généralités sur les orbites périodiques

1.1. Rappel. — Soit $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ un système dynamique sur un ensemble Ω , dont l'ensemble des temps Θ est \mathbb{R} ou \mathbb{Z} . Nous supposons donc (remarque I.1.3.a) que pour tout $t \in \Theta$, l'application φ_t est une bijection de la partie U_t de Ω , sur la partie U_{-t} . L'orbite d'un point $x \in \Omega$ est dite *périodique* (définition I.2.2) si x n'est pas un point d'équilibre et s'il existe $T \in \Theta$, $T > 0$, tel que $\varphi_T(x)$ soit défini et égal à x . On dit alors que T est une *période* de l'orbite de x . Nous avons prouvé (proposition I.2.3) que lorsque l'orbite d'un point x est périodique de période T , l'ensemble I_x des éléments t de Θ tels que $\varphi_t(x)$ soit défini est égal à Θ , et que pour tout entier $k \geq 1$, l'orbite de x est périodique de période kT . En fait, la démonstration a été faite dans le chapitre I en supposant $\Theta = \mathbb{R}$, mais elle reste valable sans changement pour $\Theta = \mathbb{Z}$.

La proposition suivante indique une propriété très simple qui montre que la périodicité d'une orbite ne dépend pas du choix d'un point particulier de cette orbite.

1.2. Proposition. — Soit $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ un système dynamique sur un ensemble Ω , dont l'ensemble des temps Θ est \mathbb{R} ou \mathbb{Z} . Soit $x \in \Omega$ un point dont l'orbite \mathcal{O} est périodique de période $T > 0$.

1. Pour tout point y de l'orbite \mathcal{O} de x , l'orbite de y est périodique de période T , et coïncide avec \mathcal{O} .

2. On suppose que Ω est un espace topologique séparé et que l'application $t \mapsto \varphi_t(x)$ est continue. L'ensemble des $\theta \in \Theta$ vérifiant $\theta > 0$ tels que l'orbite \mathcal{O} soit périodique de période θ possède un plus petit élément $T_m > 0$, appelé *plus petite période positive*, ou *période primitive* de l'orbite \mathcal{O} . Un réel $\theta > 0$ est tel que l'orbite \mathcal{O} soit périodique de période θ si et seulement si $\theta = kT_m$, où k est un entier ≥ 1 .

Preuve :

1. Nous savons déjà que l'ensemble I_x des éléments t de Θ tels que $\varphi_t(x)$ soit défini est Θ tout entier. L'orbite \mathcal{O} de x est donc $\{\varphi_t(x) ; t \in \Theta\}$. Soit y un point de cette orbite. Il existe $t \in \Theta$ tel que $y = \varphi_t(x)$. On a

$$\varphi_T(y) = \varphi_T \circ \varphi_t(x) = \varphi_{T+t}(x) = \varphi_t \circ \varphi_T(x) = \varphi_t(x) = y.$$

D'autre part, un point z de Ω est élément de l'orbite de y si et seulement s'il existe $\tau \in \Theta$ tel que $\varphi_\tau(y) = z$; en posant $t + \tau = \theta$, nous voyons que z est élément de l'orbite de y si et seulement s'il existe $\theta \in \Theta$ tel que $\varphi_\theta(x) = z$, c'est-à-dire si et seulement si z est élément de l'orbite de x .

2. Soit A l'ensemble des $\theta \in \Theta$ vérifiant $\theta > 0$ tels que \mathcal{O} soit périodique de période θ . Il est non vide puisque \mathcal{O} est supposée périodique, et il est minoré par 0. Il admet donc une borne inférieure T_m . Lorsque $\Theta = \mathbb{Z}$, T_m est élément de A , car la topologie de \mathbb{Z} étant discrète, la borne inférieure de A est en fait le plus petit élément de A . Nous allons prouver que cela est vrai aussi lorsque $\Theta = \mathbb{R}$. Nous avons $T_m \geq 0$ puisque T_m est borne inférieure d'une partie A de \mathbb{R}^+ . Si nous avions $T_m = 0$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existerait un élément θ de A vérifiant $0 < \theta < \epsilon$, et nous aurions, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi_{k\theta}(x) = x$; l'application $t \mapsto \varphi_t(x)$ prendrait la valeur x sur une partie dense de \mathbb{R} ; étant continue, cette application serait constante, et le point x serait un point d'équilibre du système dynamique, contrairement à nos hypothèses. Nous avons donc prouvé que $T_m > 0$. D'autre part, l'application $t \mapsto \varphi_t(x)$ étant continue, nous avons

$$\varphi_{T_m}(x) = \lim_{\theta \rightarrow T_m, \theta \in A} \varphi_\theta(x) = x,$$

ce qui prouve que T_m est élément de A .

Nous savons déjà que pour tout entier $k \geq 1$, l'orbite \mathcal{O} est périodique de période kT_m . Réciproquement, soit $\theta \in \Theta$ vérifiant $\theta > 0$ tel que \mathcal{O} soit périodique de période θ . Nous avons bien sûr $\theta \geq T_m$. Soit k le plus grand entier tel que $kT_m \leq \theta$. Nous avons

$$\varphi_{\theta - kT_m}(x) = \varphi_\theta \circ (\varphi_{T_m})^{-k}(x) = x.$$

Si $\theta - kT_m$ était strictement positif, les égalités ci-dessus prouveraient que l'orbite \mathcal{O} est périodique de période $\theta - kT_m$; mais comme $\theta - kT_m < T_m$, cela contredirait le fait que T_m est la plus petite période positive de \mathcal{O} . Donc $\theta - kT_m = 0$. \square

1.3. Remarque. — Les propriétés ci-dessus ne subsistent pas lorsque l'ensemble des temps du système est \mathbb{R}^+ ou \mathbb{N} , car les applications φ_t peuvent alors ne plus être injectives.

Les définitions ci-dessous sont les analogues, pour les orbites périodiques, des définitions III.2.1 et III.2.2 relatives aux points d'équilibre.

1.4. Définitions. — Soit $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ un système dynamique sur un espace topologique séparé Ω , dont l'ensemble des temps Θ est \mathbb{R} ou \mathbb{Z} . Soit \mathcal{O} une orbite périodique, de période $T > 0$.

1. On dit que l'orbite périodique \mathcal{O} est ω -stable (resp., α -stable) au sens de Liapounov si pour tout voisinage V de \mathcal{O} , il existe un autre voisinage W de \mathcal{O} tel que, pour tout point $x \in W$ et tout $t \in \Theta$ vérifiant $t \geq 0$ (resp., vérifiant $t \leq 0$), $\varphi_t(x)$ soit défini et élément de V .

2. On suppose l'espace Ω muni d'une distance d telle que sa topologie soit associée à cette distance. On dit que l'orbite périodique \mathcal{O} est attractive (resp., répulsive) s'il existe un voisinage W de \mathcal{O} tel que, pour tout $x \in W$ et tout $t \in \Theta$ vérifiant $t \geq 0$ (resp., vérifiant $t \leq 0$), $\varphi_t(x)$ soit défini et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\varphi_t(x), \mathcal{O}) = 0$ (resp., $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi_t(x), \mathcal{O}) = 0$).

3. On appelle *bassin d'attraction* (resp., *bassin de répulsion*) de l'orbite périodique \mathcal{O} l'ensemble des $z \in \Omega$ dont l'ensemble ω -limite $L_\omega(z)$ (resp., l'ensemble α -limite $L_\alpha(z)$) est \mathcal{O} .

1.5. Remarques

a) Dans les hypothèses de la définition 1.4, l'orbite périodique \mathcal{O} est toujours contenue dans son bassin d'attraction et dans son bassin de répulsion; elle est attractive (resp., répulsive) si et seulement si son bassin d'attraction (resp., de répulsion) est un voisinage de \mathcal{O} dans Ω .

b) Soit $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$ un système dynamique à temps discret sur un ensemble Ω , dont l'ensemble des temps est \mathbb{Z} . Soit un entier $k > 0$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\psi_n = \varphi_{nk}.$$

On voit immédiatement que $\{\psi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$ est un système dynamique à temps discret, et qu'un point x de Ω est point d'équilibre pour ce système si et seulement si l'orbite de x , pour le système $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$, est périodique de période k . Lorsque l'ensemble Ω est un espace topologique séparé, on voit aisément qu'un point d'équilibre x du système $\{\psi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$ est ω -stable (resp., α -stable) au sens de Liapounov si et seulement si l'orbite de x pour le système $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$, qui est périodique de période k , est ω -stable (resp., α -stable) au sens de Liapounov. De même, lorsque l'espace Ω est muni d'une distance et de la topologie associée à cette distance, un point d'équilibre x du système $\{\psi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$ est attractif (resp., répulsif) si et seulement si l'orbite de x pour le système $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$, qui est périodique de période k , est attractive (resp., répulsive). En résumé, la recherche des orbites périodiques de période k du système $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$, et l'étude de leur stabilité et de leur caractère attractif ou répulsif, se ramène à la recherche des points d'équilibre du système $\{\psi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$ et à l'étude de leur stabilité et de leur caractère attractif ou répulsif.

C'est pourquoi dans la suite nous allons nous intéresser essentiellement aux orbites périodiques des systèmes dynamiques à temps continu, dont l'étude nécessite l'emploi de méthodes nouvelles.

2. Temps de transit et application de Poincaré

2.1. Hypothèses générales et notations. — Dans tout ce paragraphe, X est un champ de vecteurs différentiable de classe C^p (avec $p \geq 1$), défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, d'espace vectoriel associé E . On note Ψ son flot réduit et $\{\Psi_t ; t \in \mathbb{R}\}$ le système dynamique associé. On rappelle (II.4.11) que le flot réduit Ψ est une application différentiable de classe C^p , définie sur un ouvert D_r de $\mathbb{R} \times \Omega$, à valeurs dans \mathcal{E} . Pour tout $(t, x) \in D_r$, on pose $\Psi_t(x) = \Psi(t, x)$. Lorsque $t \in \mathbb{R}$ est fixé, l'ensemble des $x \in \mathcal{E}$ tels que (t, x) soit élément de D_r est un ouvert U_t de \mathcal{E} , contenu dans Ω , et Ψ_t est un difféomorphisme de classe C^p de U_t sur U_{-t} .

Le lemme suivant indique une propriété remarquable de la différentielle de l'application Ψ_t , conséquence facile des propriétés de composition du flot réduit.

2.2. Lemme. — *Sous les hypothèses et avec les notations précisées ci-dessus, soit $a \in \Omega$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $(\lambda, a) \in D_r$, c'est-à-dire tels que $\Psi_\lambda(a)$ soit défini. On pose $\Psi_\lambda(a) = b$. La différentielle $D\Psi_\lambda(a)$ de Ψ_λ au point a vérifie*

$$D\Psi_\lambda(a)(X(a)) = X(b),$$

(et par suite, si $X(a) \neq 0$, alors $X(b) \neq 0$). On exprime ce résultat en disant que le difféomorphisme Ψ_λ laisse invariant le champ de vecteurs X .

Preuve : Puisque $b \in \Omega$, le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer que pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit en valeur absolue, (t, b) est élément du domaine de définition du flot réduit Ψ . D'après les propriétés de composition de Ψ (II.4.12), nous avons

$$\Psi_t(b) = \Psi_t \circ \Psi_\lambda(a) = \Psi_{\lambda+t}(a) = \Psi_\lambda \circ \Psi_t(a).$$

Dérivons par rapport à t , puis faisons $t = 0$. Nous obtenons

$$\left. \frac{d}{dt} \Psi_t(b) \right|_{t=0} = D\Psi_\lambda(\Psi_0(a)) \left(\left. \frac{d}{dt} \Psi_t(a) \right|_{t=0} \right).$$

Mais nous avons

$$\Psi_0(a) = a, \quad \left. \frac{d}{dt} \Psi_t(b) \right|_{t=0} = X(b), \quad \left. \frac{d}{dt} \Psi_t(a) \right|_{t=0} = X(a).$$

Le résultat annoncé en découle. □

2.3. Proposition. — Soit X un champ de vecteurs de classe C^p ($p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, et Ψ son flot réduit. Soit $a \in \Omega$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $X(a) \neq 0$ et que $\Psi_\lambda(a)$ soit défini. On pose $\Psi_\lambda(a) = b$. Alors $X(b) \neq 0$. Soit \mathcal{Q} un hyperplan affine de \mathcal{E} (c'est-à-dire un sous-espace affine de \mathcal{E} de codimension 1) passant par le point b et non parallèle à $X(b)$. Il existe une application τ , différentiable de classe C^p , définie sur un voisinage ouvert V du point a dans Ω , à valeurs dans \mathbb{R} , vérifiant

$$\tau(a) = \lambda \quad \text{et, pour tout } x \in V, \quad \Psi_{\tau(x)}(x) = \Psi(\tau(x), x) \text{ est élément de } \mathcal{Q}.$$

L'application τ est appelée application temps de transit jusqu'à \mathcal{Q} .

Preuve : Désignons par E l'espace vectoriel associé à l'espace affine \mathcal{E} . Par hypothèse $X(a) \neq 0$, et $D\Psi_\lambda(a)$ est un isomorphisme de E sur lui-même, puisque c'est la différentielle au point a du difféomorphisme Ψ_λ . Le lemme ci-dessus montre alors que $X(b) \neq 0$.

La figure IV.1 illustre la situation.

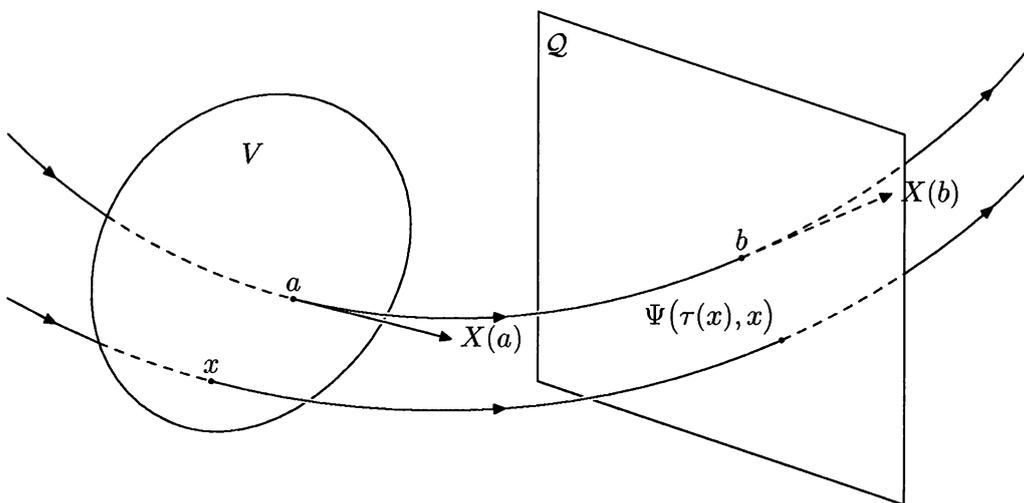


Figure IV.1. Application temps de transit jusqu'à \mathcal{Q}

Soit Q l'hyperplan vectoriel de E associé à l'hyperplan affine \mathcal{Q} de \mathcal{E} . Soit h_Q une forme linéaire sur E ayant Q pour noyau. Un point y de \mathcal{E} est élément de \mathcal{Q} si et seulement

s'il est de la forme $y = b + z$, avec $z \in Q$, c'est-à-dire tel que $h_Q(z) = 0$. Considérons l'équation implicite

$$h_Q(\Psi(t, x) - b) = 0, \quad (*)$$

dans laquelle l'inconnue est $t \in \mathbb{R}$, tandis que l'élément x de Ω est considéré comme un paramètre. Pour $x = a$, cette équation a pour solution $t = \lambda$. On va prouver qu'il existe une application τ , définie sur un voisinage ouvert V du point a , à valeurs réelles, vérifiant $\tau(a) = \lambda$, telle que pour tout $x \in V$, l'équation implicite ci-dessus ait pour solution $\tau(x)$. Appliquons pour cela le théorème des fonctions implicites. Nous devons vérifier que la différentielle partielle de l'application $(t, x) \mapsto h_Q(\Psi(t, x) - b)$ par rapport à sa première variable t , au point (λ, a) , est un isomorphisme de \mathbb{R} sur lui-même; ou, en termes moins savants, que la dérivée de l'application $t \mapsto h_Q(\Psi(t, a) - b)$, au point $t = \lambda$, est non nulle. Or en tenant compte de $\Psi(\lambda, a) = b$ et de $Dh_Q(0) = h_Q$ (qui résulte du fait que h_Q est une application linéaire), nous avons

$$\frac{d}{dt} h_Q(\Psi(t, a) - b) \Big|_{t=\lambda} = Dh_Q(\Psi(\lambda, a) - b) \left(\frac{d}{dt} \Psi(t, a) \Big|_{t=\lambda} \right) = h_Q(X(b)) \neq 0,$$

car par hypothèse $X(b)$ n'est pas parallèle à l'hyperplan Q , c'est-à-dire n'est pas élément du noyau de h_Q .

D'autre part, le flot réduit Ψ est une application différentiable de classe C^p , et l'application linéaire h_Q est évidemment différentiable de classe C^∞ , donc l'application composée $h_Q \circ (\Psi - b)$ est différentiable de classe C^p . Les hypothèses nécessaires à l'application du théorème des fonctions implicites sont donc satisfaites. Ce théorème nous permet d'affirmer qu'il existe un voisinage ouvert V du point a contenu dans Ω , une application τ , différentiable de classe C^p , de V dans \mathbb{R} , et un voisinage W de (λ, a) dans $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$, contenu dans l'ouvert D_r de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ sur lequel le flot réduit Ψ est défini, tels qu'un couple (t, x) élément de W vérifie l'équation implicite (*) si et seulement si x est élément de V et $t = \tau(x)$. Pour terminer la preuve de la proposition, il suffit alors de remarquer que (t, x) vérifie l'équation implicite (*) si et seulement si $\Psi(t, x)$ est élément de Q . \square

La proposition suivante est une variante de la proposition 2.3, à rapprocher du théorème II.5.2 de redressement local d'un champ de vecteurs, qui nous sera utile plus tard.

2.4. Proposition. — Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^p (avec $p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, et Ψ son flot réduit. Soit $a \in \Omega$ tel que $X(a) \neq 0$, et \mathcal{P} un hyperplan affine de \mathcal{E} passant par le point a et non parallèle à $X(a)$. Pour tout voisinage U de a dans Ω , il existe un voisinage ouvert V de a dans Ω , contenu dans U , un réel $\eta > 0$ et une application $\theta : V \rightarrow]-\eta, +\eta[$, différentiable de classe C^p , vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) pour tout $x \in V$, $\Psi(\theta(x), x)$ est élément de $\mathcal{P} \cap V$,
- (ii) lorsque $x \in \mathcal{P} \cap V$, $\theta(x) = 0$,
- (iii) l'application $(t, y) \mapsto \Psi(t, y)$ est un C^p -difféomorphisme de $]-\eta, +\eta[\times (\mathcal{P} \cap V)$ sur V , d'inverse $x \mapsto (-\theta(x), \Psi(\theta(x), x))$.

Preuve : Considérons l'application, définie sur le produit d'un voisinage de 0 dans \mathbb{R} et d'un voisinage de a dans \mathcal{P} :

$$(t, y) \mapsto \Psi(t, y).$$

Étant définie par restriction du flot réduit Ψ , cette application est différentiable de classe C^p . Sa différentielle au point $(0, a)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R} \times P$ sur E , où nous avons noté E l'espace vectoriel associé à l'espace affine \mathcal{E} et P l'hyperplan vectoriel associé à l'hyperplan affine \mathcal{P} ; nous avons en effet, si $u \in \mathbb{R}$ et $v \in P$,

$$D\Psi(0, a)(u, v) = uX(a) + v;$$

or, par hypothèse, $X(a)$ n'est pas parallèle à \mathcal{P} . Le théorème des fonctions inverses montre qu'il existe un voisinage ouvert W de a dans l'hyperplan affine \mathcal{P} et un réel $\eta > 0$, tels que l'application $(t, y) \mapsto \Psi(t, y)$, restreinte à $] -\eta, +\eta[\times W$, soit un C^p -difféomorphisme. Son inverse est de la forme $x \mapsto (-\theta(x), \Psi(\theta(x), x))$. En restreignant W et en diminuant η si nécessaire, nous pouvons faire en sorte que $\Psi(] -\eta, +\eta[\times W) \subset U$. Le voisinage $V = \Psi(] -\eta, +\eta[\times W)$ de a dans Ω vérifie $\mathcal{P} \cap V = W$, et le triplet (V, η, θ) a toutes les propriétés désirées. \square

2.5. Corollaire de la proposition 2.3 : application de Poincaré. — Soit X un champ de vecteurs de classe C^p ($p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, et Ψ son flot réduit. Soit $a \in \Omega$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $X(a) \neq 0$ et que $\Psi_\lambda(a)$ soit défini. On pose $\Psi_\lambda(a) = b$. Soit \mathcal{Q} un hyperplan affine de \mathcal{E} passant par b et non parallèle à $X(b)$, et \mathcal{P} un hyperplan affine de \mathcal{E} passant par a et non parallèle à $X(a)$. Comme dans la proposition 2.3, on désigne par V le voisinage ouvert de a dans \mathcal{E} sur lequel l'application temps de transit τ est définie. Alors il existe un voisinage ouvert U de a dans \mathcal{P} contenu dans $\mathcal{P} \cap V$, tel que l'application, définie sur U et à valeurs dans l'hyperplan affine \mathcal{Q} ,

$$x \mapsto g(x) = \Psi(\tau(x), x),$$

soit un difféomorphisme de classe C^p de U sur un voisinage ouvert $g(U)$ de b dans \mathcal{Q} . L'application g est appelée *application de Poincaré associée à (λ, a) et au couple d'hyperplans $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$* .

Le lecteur remarquera que dans cet énoncé, U est un voisinage de a dans \mathcal{P} , non dans \mathcal{E} , et $g(U)$ un voisinage de b dans \mathcal{Q} , non dans \mathcal{E} .

Preuve : La figure IV.2 illustre la situation.

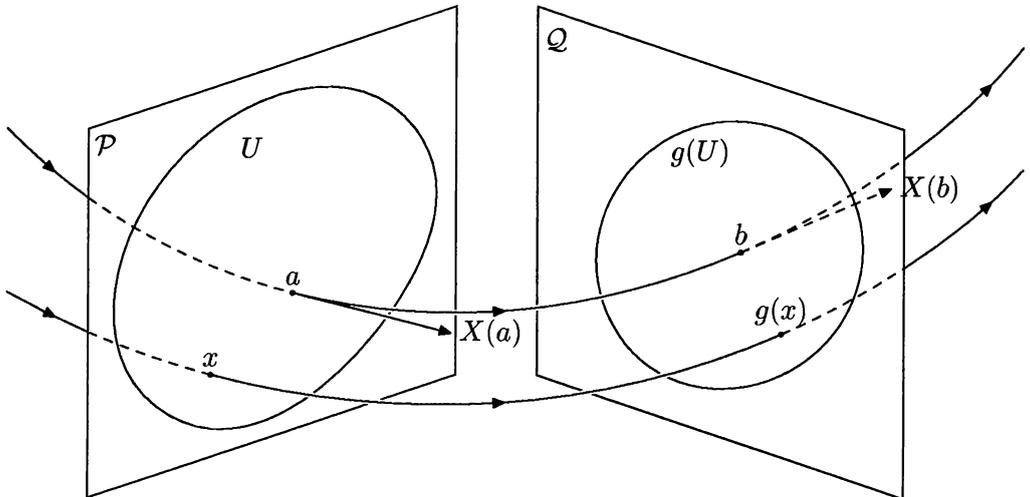


Figure IV.2. Application de Poincaré associée à (λ, a) et $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$

L'application de V dans \mathcal{E} , $x \mapsto \Psi(\tau(x), x)$, est de classe C^p car Ψ et τ sont de classe C^p . Puisque V est un voisinage ouvert de a dans \mathcal{E} et que $a \in \mathcal{P}$, $V \cap \mathcal{P}$ est un voisinage ouvert de a dans \mathcal{P} . La restriction à $V \cap \mathcal{P}$ de l'application $x \mapsto \Psi(\tau(x), x)$, considérée comme définie sur $V \cap \mathcal{P}$ et à valeurs dans \mathcal{E} , est différentiable de classe C^p , car elle est composée de l'injection canonique de \mathcal{P} dans \mathcal{E} (qui est une application affine, donc différentiable de

classe C^∞) et de l'application de V dans \mathcal{E} , $x \mapsto \Psi(\tau(x), x)$ qui, comme nous venons de le voir, est de classe C^p . Cette même application, $x \mapsto \Psi(\tau(x), x)$, définie sur $V \cap \mathcal{P}$, mais considérée maintenant comme à valeurs dans l'hyperplan affine \mathcal{Q} , est encore différentiable de classe C^p , car on peut la considérer comme composée de l'application $x \mapsto \Psi(\tau(x), x)$ à valeurs dans \mathcal{E} , et d'une projection de \mathcal{E} sur \mathcal{Q} parallèlement à un vecteur non parallèle à \mathcal{Q} quelconque, par exemple le vecteur $X(b)$; une telle projection est une application affine, donc différentiable de classe C^∞ . En résumé, nous avons prouvé que l'application $x \mapsto g(x) = \Psi(\tau(x), x)$, définie sur $V \cap \mathcal{P}$ et à valeurs dans \mathcal{Q} , est différentiable de classe C^p . Nous allons montrer que la différentielle de g au point a est un isomorphisme de l'hyperplan vectoriel P associé à l'hyperplan affine \mathcal{P} sur l'hyperplan vectoriel Q associé à l'hyperplan affine \mathcal{Q} . Il suffit, pour cela, de montrer que cette application linéaire est injective, car P et Q sont de même dimension. Soit donc $u \in P$, $u \neq 0$. Nous avons

$$Dg(a)(u) = D_1\Psi(\tau(a), a)(D\tau(a)(u)) + D_2\Psi(\tau(a), a)(u),$$

où nous avons noté $D_1\Psi(t, x)$ et $D_2\Psi(t, x)$ les différentielles partielles de Ψ au point (t, x) par rapport à sa première et à sa seconde variables, respectivement. Nous avons utilisé le fait que l'injection canonique de \mathcal{P} dans \mathcal{E} étant une application affine, sa différentielle au point a est l'application linéaire associée, c'est-à-dire l'injection canonique de P dans E ; l'image de u par cette différentielle est donc tout simplement u , puisque ce vecteur est élément de P . De même, nous avons utilisé le fait que la projection de \mathcal{E} sur \mathcal{Q} parallèlement à $X(b)$ étant une application affine, sa différentielle au point b est l'application linéaire associée; appliquée à un vecteur parallèle à \mathcal{Q} , cette application n'est autre que l'application identique.

Mais puisque τ est une application à valeurs réelles, $D\tau(a)(u)$ est un réel. D'autre part, d'après la définition du flot réduit,

$$\frac{d}{dt} \Psi(t, x) = X(\Psi(t, x)),$$

donc en particulier

$$\frac{d}{dt} \Psi(t, a) \Big|_{t=\lambda} = X(\Psi(\lambda, a)) = X(b).$$

La différentielle partielle $D_1\Psi(\tau(a), a)$ est donc l'application linéaire $s \mapsto sX(b)$ de \mathbb{R} dans l'espace vectoriel E associé à \mathcal{E} . Nous avons donc

$$D_1\Psi(\tau(a), a)(D\tau(a)(u)) = D\tau(a)(u)X(b).$$

D'autre part, compte tenu de $\tau(a) = \lambda$, nous avons

$$D_2\Psi(\tau(a), a)(u) = D\Psi_\lambda(a)(u).$$

Nous pouvons donc écrire

$$Dg(a)(u) = (D\tau(a)(u))X(b) + D\Psi_\lambda(a)(u). \tag{*}$$

Mais puisque Ψ_λ est un difféomorphisme, $D\Psi_\lambda(a)$ est un isomorphisme de E sur lui-même. L'élément u de P étant non nul, $D\Psi_\lambda(a)(u)$ est non nul, et c'est un élément de $D\Psi_\lambda(a)(P)$. Par hypothèse, $X(a)$ n'est pas parallèle à l'hyperplan affine \mathcal{P} , c'est-à-dire n'est pas élément de l'hyperplan vectoriel P . L'isomorphisme $D\Psi_\lambda(a)$ applique $X(a)$ sur $X(b)$ d'après le lemme 2.2, et applique P sur $D\Psi_\lambda(a)(P)$. Le vecteur $X(b)$ n'est donc pas élément de $D\Psi_\lambda(a)(P)$. Le membre de droite de l'égalité (*) ci-dessus est donc somme de deux termes appartenant à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ; le premier, $(D\tau(a)(u))X(b)$, appartient au sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par le vecteur non nul $X(b)$; le second, $D\Psi_\lambda(a)(u)$, est élément de $D\Psi_\lambda(a)(P)$. Le membre de droite de (*) ne peut donc être nul que si chacun de ces deux termes est

nul. Or le second, $D\Psi_\lambda(a)(u)$, est non nul puisque u est non nul et que $D\Psi_\lambda(a)$ est un isomorphisme. Nous avons ainsi prouvé que le membre de droite de (*) est non nul, c'est-à-dire que $Dg(a)$ est un isomorphisme de P sur Q .

Le théorème d'inversion locale montre qu'il existe un voisinage ouvert U de a dans \mathcal{P} , contenu dans $V \cap \mathcal{P}$, tel que $g(U)$ soit un voisinage ouvert de b dans Q et que la restriction de g à U soit un difféomorphisme de classe C^p de U sur $g(U)$. \square

L'énoncé suivant traite du cas particulier où l'orbite du point a est périodique de période $T > 0$, et où $\lambda = T$.

2.6. Corollaire : application de retour de Poincaré. — Soit X un champ de vecteurs de classe C^p ($p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, et Ψ son flot réduit. Soit $a \in \Omega$ tel que $X(a) \neq 0$ et que l'orbite \mathcal{O} du point a soit périodique de période $T > 0$. Soit \mathcal{P} un hyperplan affine de \mathcal{E} passant par a et non parallèle à $X(a)$.

1. Il existe une application τ , différentiable de classe C^p , définie sur un voisinage ouvert V de a dans Ω , à valeurs réelles, vérifiant

$$\tau(a) = T \quad \text{et, pour tout } x \in V, \quad \Psi_{\tau(x)}(x) = \Psi(\tau(x), x) \text{ est élément de } \mathcal{P}.$$

L'application τ est appelée *application temps de transit jusqu'à \mathcal{P}* . Sa restriction à $V \cap \mathcal{P}$ est appelée *application temps de retour dans \mathcal{P}* .

2. Il existe un voisinage ouvert U de a dans \mathcal{P} , contenu dans $V \cap \mathcal{P}$, tel que la restriction à U de l'application, définie sur U et à valeurs dans l'hyperplan affine \mathcal{P} ,

$$x \mapsto g(x) = \Psi(\tau(x), x),$$

soit un difféomorphisme de classe C^p de U sur un autre voisinage ouvert $g(U)$ de a dans \mathcal{P} , vérifiant $g(a) = a$. L'application g est appelée *application de retour de Poincaré* (associée à l'orbite périodique \mathcal{O} , au point a et à l'hyperplan affine \mathcal{P}).

Preuve : La figure IV.3 illustre la situation.

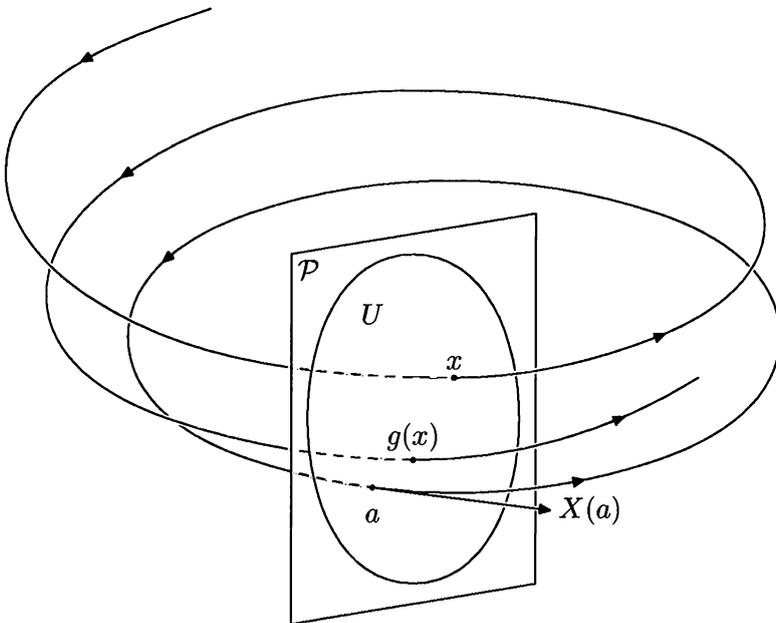


Figure IV.3. Application de retour de Poincaré associée à une orbite périodique

Puisque l'orbite \mathcal{O} du point a est périodique de période T , nous avons $b = \Psi_T(a) = a$. Nous pouvons choisir l'hyperplan \mathcal{Q} , passant par a et non parallèle à $X(a)$, confondu avec l'hyperplan \mathcal{P} . Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.3 et son corollaire 2.5. \square

2.7. Définition. — Dans les hypothèses et avec les notations du corollaire précédent, on appelle système dynamique de retour de Poincaré le système dynamique à temps discret, défini sur le voisinage ouvert $U \cup g(U)$ de a dans \mathcal{P} , ayant pour générateur l'application de retour $g : U \rightarrow g(U)$.

2.8. Commentaire. — Explicitons la définition du système dynamique de retour. Posons $U_1 = U$, $g_1 = g$, $U_{-1} = g(U)$, $g_{-1} = g^{-1}$. L'application $g_1 = g$ est un difféomorphisme du voisinage ouvert U_1 de a dans \mathcal{P} sur le voisinage ouvert U_{-1} de a dans \mathcal{P} , dont l'inverse est le difféomorphisme g_{-1} . Notons g_0 l'application identique de $U_1 \cup U_{-1}$. Pour tout entier $n > 0$, nous pouvons définir g_n en posant $g_n = g_1 \circ g_{n-1}$; l'application g_n est définie sur l'ouvert $U_n = g_{n-1}^{-1}(U)$; de même, nous pouvons définir g_{-n} en posant $g_{-n} = g_{-1} \circ g_{-(n-1)}$. Nous voyons que g_{-n} est définie sur $U_{-n} = g_n(U_n)$, et n'est autre que g_n^{-1} . Nous avons ainsi construit, sur l'ouvert $U_1 \cup U_{-1}$ de \mathcal{P} , un système dynamique à temps discret $\{g_n ; n \in \mathbb{Z}\}$, ayant $g = g_1$ pour générateur. C'est le système de retour de Poincaré.

Le système de retour de Poincaré admet le point a pour point d'équilibre. Nous allons voir que les propriétés de stabilité et le caractère attractif ou répulsif de ce point d'équilibre, pour le système à temps discret $\{g_n ; n \in \mathbb{Z}\}$, sont étroitement liées aux propriétés de stabilité et au caractère attractif ou répulsif de l'orbite périodique \mathcal{O} , pour le système dynamique à temps continu $\{\Psi_t ; t \in \mathbb{R}\}$.

2.9. Théorème. — Soit X un champ de vecteurs de classe C^p ($p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, et Ψ son flot réduit. Soit $a \in \Omega$ tel que $X(a) \neq 0$ et que l'orbite \mathcal{O} du point a soit périodique de période $T > 0$. Soit \mathcal{P} un hyperplan affine de \mathcal{E} passant par a et non parallèle à $X(a)$, U un voisinage ouvert de a dans \mathcal{P} sur lequel est définie l'application de retour de Poincaré $g : U \rightarrow g(U)$ (corollaire 2.6). L'orbite périodique \mathcal{O} du système dynamique à temps continu $\{\Psi_t ; t \in \mathbb{R}\}$ est ω -stable au sens de Liapounov (resp., α -stable au sens de Liapounov) si et seulement si le point a est point d'équilibre ω -stable au sens de Liapounov (resp., α -stable au sens de Liapounov) du système dynamique à temps discret $\{g_n ; n \in \mathbb{Z}\}$ engendré par l'application de retour g (définition 2.7 et commentaire 2.8).

Preuve : Supposons que le point a soit ω -stable pour le système dynamique à temps discret engendré par g (le cas où a est α -stable pour ce système est analogue). Soit W un voisinage ouvert de \mathcal{O} dans Ω . La proposition 2.4 montre qu'il existe un voisinage ouvert V de a dans Ω , contenu dans W , un réel $\eta > 0$ et une application C^p -différentiable $\theta : V \rightarrow]-\eta, +\eta[$ tels que $(t, x) \mapsto \Psi(t, x)$ soit un C^p -difféomorphisme de $]-\eta, \eta[\times (\mathcal{P} \cap V)$ sur V , d'inverse $y \mapsto (-\theta(y), \Psi(\theta(y), y))$. En diminuant, si nécessaire, la valeur de η , nous pouvons supposer que Ψ est définie et injective sur $]-\eta, +\eta[\times (\mathcal{P} \cap V)$.

Soit m le plus petit entier ≥ 0 tel que

$$(m - 1)\eta < T < (m + 1)\eta.$$

L'application $t \mapsto \Psi(t, a)$ étant injective sur $]-\eta, +\eta[$, nous avons nécessairement $m \geq 1$. L'application temps de retour τ étant continue et vérifiant $\tau(a) = T$, nous pouvons, en restreignant éventuellement V , supposer que $\mathcal{P} \cap V \subset U$ et que pour tout $x \in \mathcal{P} \cap V$,

$$(m - 1)\eta < \tau(x) < (m + 1)\eta. \tag{*}$$

Puisque a est ω -stable pour $\{g^n; n \in \mathbb{Z}\}$, il existe un voisinage ouvert U' de a dans \mathcal{P} tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in U'$, $g^n(x)$ soit défini et appartienne à $\mathcal{P} \cap V$. Nous voyons alors que le domaine de définition de Ψ contient $[-\eta, +\infty[\times U'$.

La double inégalité (*) montre que $\Psi([\eta, (m+1)\eta[\times U') \cap \mathcal{P}$ contient $g(U')$. Choisissons une norme sur l'espace vectoriel E associé à \mathcal{E} ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit B_n une boule ouverte de \mathcal{P} , de centre a , de rayon $r_n > 0$, dont l'adhérence \overline{B}_n est contenue dans $U' \cap g(U')$. Nous choisissons les rayons r_n afin qu'ils forment une suite décroissante convergeant vers 0. Posons :

$$W'_n = \Psi([\eta, (m+1)\eta[\times B_n).$$

Nous pouvons écrire

$$W'_n = \bigcup_{k=0}^m \Psi_{k\eta}(\Psi([\eta, +\eta[\times B_n)).$$

Comme $\Psi([\eta, +\eta[\times B_n)$ est ouvert, W'_n est une réunion d'ouverts, donc un ouvert. Il contient l'orbite périodique \mathcal{O} , puisque $[0, T] \times \{a\} \subset]-\eta, (m+1)\eta[\times B_n$. Nous allons montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $W'_n \subset W$. Les $\overline{W}'_n \cap (\Omega - W)$ sont des parties compactes de Ω qui forment une suite décroissante d'intersection vide, puisque $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{W}'_n = \mathcal{O}$ est contenu dans W . Il existe donc bien $n \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{W}'_n \subset W$ et, *a fortiori*, $W'_n \subset W$.

Montrons enfin que pour tout $x \in W'_n$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$, $z = \Psi(t, x) \in W'_n$, ce qui impliquera $z = \Psi(t, x) \in W$. D'après la définition de W'_n , il existe $s \in]-\eta, (m+1)\eta[$ et $y \in B_n$ tel que $x = \Psi(s, y)$, donc $z = \Psi(t+s, y)$. Si $t+s < (m+1)\eta$, le point z est élément de W'_n . Dans le cas contraire, soit $y_1 = g(y)$. Comme $B_n \subset U' \cap g(U')$, y_1 est élément de B_n et $z = \Psi(t+s-\tau(y), y_1)$. Si $t+s-\tau(y_1) < (m+1)\eta$, $z \in W'_n$. Dans le cas contraire, nous répétons le même raisonnement en remplaçant y par y_1 ; nous posons $y_2 = g(y_1)$, nous voyons que $y_2 \in B_n$ et que nous pouvons écrire $z = \Psi(t+s-\tau(y)-\tau(y_1), y_2)$. En répétant cette opération un nombre fini de fois, nous formons une suite finie (y, y_1, \dots, y_k) dans B_n telle que $z = \Psi(t+s-\tau(y)-\tau(y_1)-\dots-\tau(y_{k-1}), y_k)$, avec $t+s-\tau(y)-\tau(y_1)-\dots-\tau(y_{k-1}) < (m+1)\eta$. Ceci prouve que $z \in W'_n$.

Réciproquement, supposons que l'orbite périodique \mathcal{O} soit ω -stable pour le flot réduit de X (le cas où \mathcal{O} est α -stable pour ce système est analogue). Soit W' un voisinage ouvert de a dans \mathcal{P} , $W' \subset U$. Nous allons prouver qu'il existe un autre voisinage W'_1 de a dans \mathcal{P} , $W'_1 \subset W'$, tel que pour tout $x \in W'_1$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $g^n(x)$ soit défini et appartienne à W' . Cela nous permettra de conclure que a est un point d'équilibre ω -stable du système dynamique à temps discret engendré par l'application de retour g .

Montrons d'abord qu'il existe $r > 0$ tel que l'unique point d'intersection de l'orbite \mathcal{O} avec le disque fermé de l'hyperplan affine \mathcal{P} de centre a et de rayon r soit le point a . En d'autres termes, le réel $r > 0$ doit être tel que si $x \in \mathcal{P} \cap \mathcal{O}$ vérifie $\|x - a\| \leq r$, alors nécessairement $x = a$. Pour cela considérons, comme dans la démonstration de 2.3, une forme linéaire h_P sur E ayant pour noyau l'hyperplan vectoriel P associé à \mathcal{P} . Nous avons

$$\frac{d}{dt} h_P(\Psi(t, a))|_{t=0} = h_P(X(a)) \neq 0,$$

car par hypothèse $X(a)$ n'est pas parallèle à \mathcal{P} . L'application $t \mapsto h_P(\Psi(t, a))$ est donc strictement monotone au voisinage de $t = 0$. Aussi il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout réel t vérifiant $|t| < \varepsilon$ et $t \neq 0$, nous ayons $h_P(\Psi(t, a)) \neq h_P(a)$, ce qui exprime que le point $\Psi(t, a)$ n'est pas élément de \mathcal{P} . Soit $A = \mathcal{O} - \{\Psi(t, a); |t| < \varepsilon\}$. C'est une partie fermée (et même compacte) de \mathcal{E} , puisque c'est le complémentaire, relativement

au compact \mathcal{O} , d'un petit arc de courbe ouvert contenant le point a . Comme $a \notin A$, la distance $d(a, A)$ est strictement positive. Soit r un réel vérifiant $0 < r < d(a, A)$ et assez petit pour que $B_F(a, r) \cap \mathcal{P}$ soit contenu dans W' (nous avons noté $B_F(a, r)$ la boule fermée de \mathcal{E} , de centre a et de rayon r). Nous avons alors

$$B_F(a, r) \cap \mathcal{O} \cap \mathcal{P} = \{a\},$$

ce qui prouve que r a bien les propriétés voulues. Posons

$$D_1 = B(a, r/2) \cap \mathcal{P}, \quad D_2 = D_1 \cap g^{-1}(D_1), \quad D_3 = (B_F(a, r) \cap \mathcal{P}) - D_2,$$

où nous avons noté $B(a, r/2)$ la boule ouverte de \mathcal{E} de centre a et de rayon $r/2$. Puisque a est le seul point de \mathcal{O} appartenant à $B_F(a, r) \cap \mathcal{P}$, et que ce point est élément de D_2 , nous voyons que $D_3 \cap \mathcal{O} = \emptyset$. Posons alors $W = \Omega - D_3$. C'est un ouvert de \mathcal{E} (car D_3 est fermé), qui contient l'orbite périodique \mathcal{O} , donc un voisinage de \mathcal{O} . Utilisons maintenant l'hypothèse selon laquelle l'orbite périodique \mathcal{O} est ω -stable : il existe un voisinage ouvert W_1 de \mathcal{O} , contenu dans W , tel que pour tout $x \in W_1$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\Psi(t, x)$ est défini et élément de W .

Finalement, posons $W'_1 = W_1 \cap \mathcal{P} \cap D_2$. C'est un voisinage ouvert de a dans \mathcal{P} , contenu dans W' . Montrons qu'il a bien les propriétés voulues. Soit $x \in W'_1$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après la définition de W_1 , $g^n(x)$ est défini et appartient à W , car compte tenu de la définition de l'application de retour g , il existe $t \in \mathbb{R}^+$ tel que $g^n(x) = \Psi(t, x)$. De plus, $g^n(x)$ est bien sûr élément de \mathcal{P} , donc de $W \cap \mathcal{P}$. Mais nous avons

$$W \cap \mathcal{P} = \mathcal{P} - D_3 = D_2 \cup \{x \in \mathcal{P} ; \|x - a\| > r\}.$$

En résumé, nous avons prouvé que pour tout $x \in W'_1$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $g^n(x)$ est défini et est élément, soit de D_2 , soit de $\{x \in \mathcal{P} ; \|x - a\| > r\}$. Mais $D_2 \subset W'$ et, d'après la définition même de D_2 , $g(D_2) \subset D_1$. Comme $D_1 \cap \{x \in \mathcal{P} ; \|x - a\| > r\}$ est vide, nous pouvons affirmer que $g(x) \in D_2$. De proche en proche, nous prouvons de même que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $g^n(x)$ est élément de D_2 , donc de W' . \square

Établissons d'abord une propriété qui nous sera utile pour prouver la proposition 2.11.

2.10. Lemme. — Soit C une courbe simple compacte de classe C^p ($p \geq 1$) plongée dans un espace affine \mathcal{E} de dimension finie. Cela signifie que C est une partie connexe et compacte de \mathcal{E} telle que, pour tout $x \in C$, il existe un voisinage ouvert V de x dans \mathcal{E} , un intervalle ouvert I de \mathbb{R} contenant l'origine et une application différentiable et injective $\varphi : I \rightarrow \mathcal{E}$, de classe C^p , dont la différentielle ne s'annule en aucun point de I , telle que

$$\varphi(0) = x \quad \text{et} \quad C \cap V \subset \varphi(I) \subset C.$$

Soit a un point de C et \mathcal{P} un hyperplan affine passant par a , non contenant pas la tangente en a à l'arc de courbe C . Soit d la distance associée à une norme sur l'espace vectoriel E associé à \mathcal{E} . Alors il existe un voisinage U de a dans \mathcal{P} et un réel λ vérifiant $0 < \lambda \leq 1$, tels que pour tout point $z \in U$,

$$\lambda \|z - a\| \leq d(z, C) \leq \|z - a\|. \quad (*)$$

Preuve : Pour tout point z de \mathcal{E} , la distance $d(z, C) = \inf_{x \in C} \|z - x\|$ existe, puisque C est compacte, et majorée par $\|z - a\|$, puisque $a \in C$. La seconde inégalité (*) de l'énoncé est donc toujours vérifiée. D'après les hypothèses faites dans l'énoncé, il existe un voisinage V de a dans \mathcal{E} , un intervalle ouvert I de \mathbb{R} contenant l'origine et une application différentiable $\varphi : I \rightarrow \mathcal{E}$, dont la différentielle ne s'annule pas, telle que $\varphi(0) = a$ et $C \cap V \subset \varphi(I) \subset C$. Soit $r > 0$ telle que la boule fermée de \mathcal{E} de centre a et de rayon r soit contenue dans V . Raisonnons par l'absurde en supposant que pour

tout voisinage U de a dans \mathcal{P} et tout réel $\lambda \in]0, 1]$, il existe un point z de U tel que $\lambda \|z - a\| > d(z, C)$. Soit $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{N})$ une suite décroissante de réels strictement positifs, convergeant vers 0, avec $\varepsilon_0 < 1/2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe alors un point $z_n \in \mathcal{P}$ vérifiant

$$\|z_n - a\| \leq \varepsilon_n r \quad \text{et} \quad \varepsilon_n \|z_n - a\| > d(z_n, C).$$

Comme C est compacte, il existe un point $x_n \in C$ tel que $d(z_n, C) = \|z_n - x_n\|$. On a

$$\|x_n - a\| \leq \|x_n - z_n\| + \|z_n - a\| \leq 2\|z_n - a\| \leq 2\varepsilon_n r \leq r,$$

ce qui prouve que le point x_n se trouve dans V , donc qu'il existe $t_n \in I$ tel que $x_n = \varphi(t_n)$. Ces inégalités prouvent aussi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$. Puisque $\varepsilon_n \|z_n - a\| > \|z_n - x_n\|$, x_n est distinct de a , donc $t_n \neq 0$. En prenant si nécessaire une suite extraite, nous pouvons supposer les t_n tous de même signe. La demi-droite issue de a passant par le point x_n a pour limite, lorsque $n \rightarrow +\infty$, une demi-droite tangente à la courbe C au point a . Posons

$$y_n = a + \frac{x_n - a}{\|x_n - a\|}.$$

La suite $(y_n, n \in \mathbb{N})$ converge vers un point y de la droite tangente en a à la courbe C , tel que $\|y - a\| = 1$. Mais la distance de y_n à l'hyperplan \mathcal{P} vérifie

$$\begin{aligned} d(y_n, \mathcal{P}) &= \frac{d(x_n, \mathcal{P})}{\|x_n - a\|} \leq \frac{\|z_n - x_n\|}{\|x_n - a\|} \\ &\leq \frac{\|z_n - x_n\|}{\|z_n - a\| - \|z_n - x_n\|} \\ &\leq \frac{\|z_n - x_n\|}{\|z_n - a\|} \frac{1}{1 - \frac{\|z_n - x_n\|}{\|z_n - a\|}} \\ &\leq \varepsilon_n \frac{1}{1 - \varepsilon_n}. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(y_n, \mathcal{P}) = 0$, nous avons $d(y, \mathcal{P}) = 0$, ce qui prouve que $y \in \mathcal{P}$. Cela contredit l'hypothèse selon laquelle l'hyperplan \mathcal{P} ne contient pas la tangente en a à l'arc de courbe C . En conclusion, il existe bien un voisinage U de a dans \mathcal{P} et un réel λ vérifiant $0 < \lambda \leq 1$, tels que pour tout point $z \in U$, la double inégalité (*) ci-dessus soit vérifiée. □

2.11. Proposition. — Soit X un champ de vecteurs de classe C^p ($p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, et Ψ son flot réduit. Soit $a \in \Omega$ tel que $X(a) \neq 0$ et que l'orbite \mathcal{O} du point a soit périodique de période $T > 0$. Soit \mathcal{P} un hyperplan affine de \mathcal{E} passant par a et non parallèle à $X(a)$, U un voisinage ouvert de a dans \mathcal{P} sur lequel est définie l'application de retour de Poincaré $g : U \rightarrow g(U)$ (corollaire 2.6). Soit $z \in \Omega$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que le point $x_0 = \Psi(t_0, z)$ soit élément de U , que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^n(x_0)$ soit élément de U , et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(x_0) = a ;$$

- (ii) pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\Psi(t, z)$ est défini et, en notant d la distance associée à une norme sur E ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\Psi(t, z), \mathcal{O}) = 0.$$

De plus, ces deux propriétés équivalentes impliquent la propriété :

- (iii) le point z appartient au bassin d'attraction de \mathcal{O} .

Preuve : Montrons d'abord que (i) implique (ii); supposons donc la propriété (i) satisfaite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = g^n(x)$ et, en notant τ l'application temps de retour, $\tau_n = \tau(x_n)$. Nous avons

$$x_{n+1} = \Psi(\tau_n, x_n) = \Psi(\tau_n + \tau_{n-1}, x_{n-1}) = \cdots = \Psi\left(t_0 + \sum_{m=0}^n \tau_m, z\right).$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ et que l'application temps de retour τ est continue, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = \tau(a) = T > 0$. La série de terme général τ_m est donc divergente. L'égalité ci-dessus prouve que $\Psi(t, z)$ est défini pour des valeurs arbitrairement grandes de t , donc pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Raisonnons par l'absurde, en supposant que la propriété (ii) n'est pas vérifiée. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une suite croissante $(t_m, m \in \mathbb{N}^*)$ de réels positifs, avec $t_1 > t_0$, qui tend vers $+\infty$, tels que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $d(\Psi(t_m, z), \mathcal{O}) > \varepsilon$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $n(m) \in \mathbb{N}$ tel que

$$t_0 + \sum_{k=0}^{n(m)} \tau_k \leq t_m < t_0 + \sum_{k=0}^{n(m)+1} \tau_k.$$

En remplaçant si nécessaire la suite $(t_m, m \in \mathbb{N}^*)$ par une suite extraite, nous pouvons supposer que la suite $(t_0 + \sum_{k=0}^{n(m)} \tau_k, m \in \mathbb{N}^*)$ est croissante et tend vers $+\infty$. Posons

$$\theta_m = t_m - t_0 - \sum_{k=0}^{n(m)} \tau_k.$$

Nous avons alors $0 \leq \theta_m \leq \tau_{n(m)+1}$, ce qui prouve que la suite $(\theta_m, m \in \mathbb{N}^*)$ est bornée, donc possède une valeur d'adhérence θ . En remplaçant à nouveau la suite $(t_m, m \in \mathbb{N}^*)$ par une suite extraite, nous pouvons supposer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_m = \theta \in [0, T]$. Nous avons, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\Psi(t_m, z) = \Psi(\theta_m, x_{n(m)}).$$

Or lorsque $m \rightarrow +\infty$, le membre de droite de cette égalité a une limite, $\Psi(\theta, a)$, qui est un point de \mathcal{O} . Ceci contredit l'hypothèse selon laquelle pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $d(\Psi(t_m, z), \mathcal{O}) > \varepsilon$. Nous avons ainsi prouvé que la propriété (ii) est vérifiée.

Montrons maintenant que (ii) implique (iii); supposons donc la propriété (ii) satisfaite. Soit $(t_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de réels positifs, croissante et tendant vers $+\infty$. La propriété (ii) implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\Psi(t_n, z), \mathcal{O}) = 0$. Comme \mathcal{O} est compacte, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un point $y_n \in \mathcal{O}$ tel que $d(\Psi(t_n, z), \mathcal{O}) = \|\Psi(t_n, z) - y_n\|$. La suite $(y_n, n \in \mathbb{N})$ est contenue dans le compact \mathcal{O} , donc admet une valeur d'adhérence $y \in \mathcal{O}$. Ainsi il y a au moins un point y de \mathcal{O} qui appartient à $L_\omega(z)$. Mais d'après la proposition I.2.5, l'orbite du point y , qui n'est autre que \mathcal{O} , est contenue dans $L_\omega(z)$. Enfin la propriété (ii) montre que $L_\omega(z)$ ne peut contenir aucun point autre que ceux de \mathcal{O} . Nous avons ainsi prouvé que $L_\omega(z) = \mathcal{O}$, c'est-à-dire que z appartient au bassin d'attraction de \mathcal{O} .

Montrons maintenant que (ii) implique (i); supposons donc la propriété (ii) vérifiée. La propriété (iii) l'est aussi, puisque nous avons prouvé que (ii) implique (iii). La proposition 2.4 montre qu'il existe un voisinage V de a dans Ω , un réel $\eta > 0$ et une application C^p -différentiable $\theta : V \rightarrow]-\eta, +\eta[$ tels que $(t, x) \mapsto \Psi(t, x)$ soit un C^p -difféomorphisme de $[-\eta, +\eta[\times (\mathcal{P} \cap V)$ sur V , d'inverse $y \mapsto (-\theta(y), \Psi(\theta(y), y))$.

D'après le lemme 2.10, il existe un voisinage U' de a dans \mathcal{P} et un réel λ vérifiant $0 < \lambda \leq 1$ tels que, pour tout point x de U' ,

$$\lambda \|x - a\| \leq d(x, \mathcal{O}) \leq \|x - a\|.$$

Soit $r > 0$ tel que la boule $B(a, r)$ de \mathcal{E} soit contenue dans V et que $P \cap B(a, r)$ soit contenu dans $U \cap U'$. La propriété (ii) montre qu'il existe $t_m \geq 0$ tel que pour tout réel $t \geq t_m$, $d(\Psi(t, z), \mathcal{O}) < \lambda r$. Comme $B(a, r)$ est un voisinage de a , la propriété (iii) implique qu'il existe des réels $t \geq 0$, arbitrairement grands, tels que $\Psi(t, z) \in B(a, r)$. Mais alors $\Psi(\theta(\Psi(t, z)), \Psi(t, z))$, c'est-à-dire $\Psi(t + \theta(\Psi(t, z)), z)$ est élément de U . En prenant t assez grand, nous pouvons supposer que $t_0 = t + \theta(\Psi(t, z)) \geq t_m$. Nous avons ainsi prouvé l'existence de $t_0 \geq 0$ tel que $x_0 = \Psi(t_0, z) \in U$.

Posons $x_1 = g(x_0)$ Nous avons $x_1 = \Psi(\tau(x_0), x_0) = \Psi(t_0 + \tau(x_0), z)$. Puisque $t_0 + \tau(x_0) \geq t_m$, $d(x_1, \mathcal{O}) < \lambda r$, donc

$$\|x_1 - a\| \leq \lambda^{-1} d(x_1, \mathcal{O}) < \lambda^{-1} \lambda r = r,$$

ce qui prouve que $x_1 \in P \cap B(a, r)$. De proche en proche, nous voyons de même que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $x_n = g^n(x_0) \in P \cap B(a, r)$. Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n - a\| \leq \lambda^{-1} d(x_n, \mathcal{O}).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, \mathcal{O}) = 0$, nous avons aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - a\| = 0$. \square

2.12. Remarque. — En procédant de la même manière, on peut prouver un énoncé analogue à celui de la proposition 2.11, les propriétés équivalentes (i) et (ii) étant remplacées par les propriétés (i') et (ii') ci-dessous :

(i') *il existe $t_0 \in \mathbb{R}^-$ tel que le point $x_0 = \Psi(t_0, z)$ soit élément de $g(U)$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{-n}(x_0)$ soit élément de $g(U)$, et que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g^{-n}(x_0) = a ;$$

(ii') *pour tout $t \in \mathbb{R}^-$, $\Psi(t, z)$ est défini et, en notant d la distance associée à une norme sur E ,*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\Psi(t, z), \mathcal{O}) = 0.$$

Quant à la propriété (iii), impliquée par les propriétés équivalentes (i) et (ii), elle est remplacée par (iii') ci-dessous :

(iii') *le point z appartient au bassin de répulsion de \mathcal{O} .*

2.13. Théorème. — Soit X un champ de vecteurs de classe C^p ($p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, et Ψ son flot réduit. Soit $a \in \Omega$ tel que $X(a) \neq 0$ et que l'orbite \mathcal{O} du point a soit périodique de période $T > 0$. Soit \mathcal{P} un hyperplan affine de \mathcal{E} passant par a et non parallèle à $X(a)$, U un voisinage ouvert de a dans \mathcal{P} sur lequel est définie l'application de retour de Poincaré $g : U \rightarrow g(U)$ (corollaire 2.6). Considérons les deux propriétés suivantes :

- (i) *le point a est point d'équilibre attractif (resp., répulsif) du système dynamique à temps discret engendré par g ;*
- (ii) *l'orbite périodique \mathcal{O} est attractive (resp., répulsive) pour le système dynamique à temps continu associé au champ de vecteurs X .*

La propriété (i) implique la propriété (ii). Réciproquement, si la propriété (ii) est satisfaite et si, de plus, l'orbite périodique \mathcal{O} du système dynamique à temps continu $\{\Psi_t ; t \in \mathbb{R}\}$ est ω -stable (resp., α -stable) au sens de Liapounov, alors la propriété (i) est satisfaite et, de plus, le point d'équilibre a du système dynamique à temps discret engendré par g est ω -stable (resp., α -stable) au sens de Liapounov.

Preuve : Nous traiterons le cas attractif (le cas répulsif étant analogue). Supposons a point d'équilibre attractif du système dynamique à temps discret engendré par l'application de retour g . Il existe un voisinage ouvert W'_1 de a dans \mathcal{P} , $W'_1 \subset U$, tel que pour tout $x \in W'_1$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $g^n(x)$ soit défini et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(x) = a$. En remarquant que $\tau(g^n(x))$ converge, lorsque $n \rightarrow +\infty$, vers $\tau(a) = T > 0$, il est facile d'en déduire que pour tout $x \in W'_1$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\Psi(t, x)$ est défini. En restreignant éventuellement W'_1 et en utilisant la proposition 2.4, nous pouvons supposer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $(t, x) \mapsto \Psi(t, x)$ soit un difféomorphisme de $] -\eta, +\eta[\times W'_1$ sur son image, cette dernière étant un voisinage ouvert de a dans Ω . Posons

$$W_1 = \Psi(] -\eta, +\eta[\times W'_1).$$

Nous voyons que W_1 est un ouvert de \mathcal{E} contenant l'orbite périodique \mathcal{O} et contenu dans Ω . De plus, pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in W_1$, $\Psi(t, x)$ est défini et la proposition 2.11 montre que $L_\omega(x) = \mathcal{O}$. L'orbite \mathcal{O} est donc attractive au sens de Liapounov.

Supposons maintenant l'orbite périodique \mathcal{O} attractive et ω -stable au sens de Liapounov pour le système dynamique à temps continu $\{\Psi_t ; t \in \mathbb{R}\}$. Il existe donc un voisinage ouvert W de \mathcal{O} dans Ω tel que pour tout $x \in W$ et tout $t \geq 0$, $\Psi(t, x)$ existe et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\Psi(t, x), \mathcal{O}) = 0$. Posons $W' = \mathcal{P} \cap W \cap U$; c'est un voisinage de a dans U . Mais d'après le théorème 2.9, a est un point d'équilibre ω -stable au sens de Liapounov du système dynamique à temps discret engendré par g . Il existe donc un voisinage W'' de a dans U tel que pour tout $x \in W''$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $g^n(x)$ soit défini et appartienne à W' . Puisque $W'' \subset W$, pour tout $x \in W''$, $\Psi(t, x)$ existe et $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\Psi(t, x), \mathcal{O}) = 0$. La proposition 2.11 montre alors que pour tout $x \in W''$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g^n(x) - a\| = 0$, ce qui exprime que a est point d'équilibre attractif du système dynamique à temps discret engendré par g . \square

2.14. Remarque. — Dans le théorème ci-dessus, la propriété (ii) seule n'implique pas la propriété (i). Cela n'a rien de surprenant : le fait d'être attractif, ou répulsif, pour un point d'équilibre ou une orbite périodique, n'est pas une propriété locale. Le système dynamique à temps discret engendré par l'application de retour g est défini sur un voisinage du point a dans l'hyperplan \mathcal{P} qui, en général, ne rencontre pas toutes les orbites du champ de vecteurs X ; par conséquent, ce système à temps discret ne saurait rendre compte de toutes les propriétés du système dynamique à temps continu associé à X .

3. Orbites périodiques attractives

En utilisant les théorèmes 2.9 et 2.13, nous allons établir une condition suffisante pour qu'une orbite périodique d'un champ de vecteurs de classe C^p ($p \geq 1$) soit à la fois ω -stable et attractive. Nous aurons besoin de quelques résultats d'algèbre linéaire, rappelés au chapitre VII.

3.1. Théorème. — Soit X un champ de vecteurs de classe C^p (avec $p \geq 1$) sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} , de dimension finie. On note Ψ le flot réduit de X et $\{\Psi_t ; t \in \mathbb{R}\}$ le système dynamique associé. Soit $a \in \Omega$ tel que $X(a) \neq 0$, dont l'orbite \mathcal{O} est périodique de période $T > 0$. On note $D\Psi_T(a)$ la différentielle du difféomorphisme Ψ_T au point a , et on suppose que cet automorphisme linéaire de l'espace vectoriel E associé à l'espace affine \mathcal{E} admet 1 pour valeur propre simple et a toutes ses autres valeurs propres de module strictement inférieur à 1. Alors l'orbite périodique \mathcal{O} est ω -stable et attractive.

Preuve : D'après le lemme 2.2, nous avons

$$D\Psi_T(a)(X(a)) = X(\Psi_T(a)) = X(a).$$

Comme nous avons supposé $X(a)$ non nul, cela prouve que $X(a)$ est vecteur propre de $D\Psi_T(a)$, associé à la valeur propre 1. Nous avons supposé aussi que 1 était valeur propre simple de $D\Psi_T(a)$; le noyau de $(D\Psi_T(a) - \text{id}_E)$ est donc le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}X(a)$, de dimension 1, de l'espace E . Le polynôme caractéristique Π_A de $D\Psi_T(a)$ est de la forme

$$\Pi_A(\lambda) = (\lambda - 1)\Pi_1(\lambda),$$

où $\Pi_1(\lambda)$ est un polynôme en une indéterminée λ non divisible par $(\lambda - 1)$, donc premier avec $(\lambda - 1)$. Posons

$$P = \ker \Pi_1(D\Psi_T(a)).$$

Le théorème VII.1.6 montre que P est un sous-espace vectoriel de E invariant par $D\Psi_T(a)$ (c'est-à-dire vérifiant $D\Psi_T(a)(P) \subset P$), supplémentaire de $\mathbb{R}X(a)$, donc non parallèle à $X(a)$. Le sous-espace P de E est de codimension 1 : c'est un hyperplan vectoriel.

Pour construire une application de retour de Poincaré, choisissons pour hyperplan affine \mathcal{P} l'hyperplan parallèle à P passant par a . Comme précédemment, nous notons g l'application de retour de Poincaré, U le voisinage ouvert de a dans \mathcal{P} sur lequel elle est définie, et $\{g^n; n \in \mathbb{Z}\}$ le système dynamique à temps discret qu'elle engendre.

Soit $u \in P$. Lors de la démonstration de 2.5, nous avons calculé $Dg(a)(u)$; compte tenu du fait que nous avons maintenant $b = a$ et $\lambda = T$, nous avons

$$Dg(a)(u) = (D\tau(a)(u))X(a) + D\Psi_T(a)(u).$$

Mais puisque $D\Psi_T(a)$ laisse P invariant et que $u \in P$, $D\Psi_T(a)(u)$ est élément de P . Comme $Dg(a)(u)$ est aussi élément de P , nous avons nécessairement

$$D\tau(a)(u) = 0 \quad \text{pour tout } u \in P.$$

Ainsi $Dg(a)$ n'est autre que la restriction de $D\Psi_T(a)$ à P . Ses valeurs propres sont les racines du polynôme Π_1 , c'est-à-dire les valeurs propres de $D\Psi_T(a)$ autres que 1. Par hypothèse, elles sont toutes de module strictement inférieur à 1. La proposition III.2.10 montre alors que a est un point d'équilibre ω -stable et attractif du système dynamique à temps discret $\{g^n; n \in \mathbb{Z}\}$. Enfin, les théorèmes 2.9 et 2.13 montrent que l'orbite périodique \mathcal{O} est ω -stable et attractive. \square

3.2. Remarques

a) On établirait de même une condition suffisante pour que l'orbite périodique \mathcal{O} soit α -stable et répulsive (remplacer " $D\Psi_T(a)$ admet 1 pour valeur propre simple et a toutes ses autres valeurs propres de module strictement inférieur à 1" par " $D\Psi_T(a)$ admet 1 pour valeur propre simple et a toutes ses autres valeurs propres de module strictement supérieur à 1").

b) Le théorème précédent est en pratique plus difficile à utiliser que son analogue III.2.10 pour les points d'équilibre, car les conditions à vérifier portent sur la différentielle de Ψ_T , et non sur la différentielle du champ de vecteurs X .

4. Un exemple : l'équation de Van der Pol

4.1. Motivations physiques. — Considérons un circuit électrique comportant une résistance \mathcal{R} , une self \mathcal{L} et un condensateur \mathcal{C} , disposés en triangle (voir figure IV.4).

On note 1, 2 et 3 les sommets du triangle. La résistance est placée sur le côté 1–2, la self sur le côté 2–3 et le condensateur sur le côté 3–1. Choisissons un sens positif sur chaque côté, par exemple de 1 vers 2, de 2 vers 3 et de 3 vers 1, représentés par des flèches sur la figure IV.4. Notons $i_{\mathcal{R}}$, $i_{\mathcal{L}}$ et $i_{\mathcal{C}}$ l'intensité (comptée algébriquement) du courant électrique, à l'instant considéré, dans la branche du circuit contenant la résistance, la self et la capacité, respectivement.

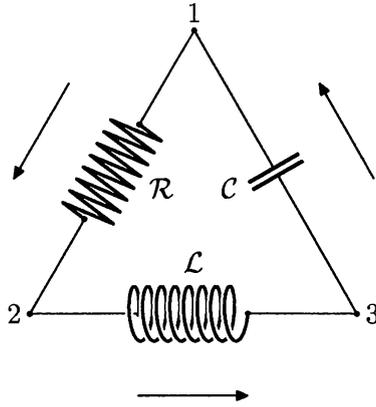


Figure IV.4. Circuit électrique avec résistance, self et condensateur

La première loi de Kirchhoff, qui exprime qu'il n'y a pas accumulation de charge électrique aux sommets du triangle, nous donne les relations

$$i_{\mathcal{R}} = i_{\mathcal{L}} = i_C = i.$$

Notons V_1 , V_2 et V_3 le potentiel électrique aux sommets 1, 2 et 3, respectivement. Écrivons les équations qui lient l'intensité du courant qui passe dans chaque branche du circuit à la différence de potentiel entre les deux extrémités de cette branche. Pour la branche 1-2, cette relation est la *loi d'Ohm*. Nous l'écrivons sous la forme

$$V_1 - V_2 = g(i_{\mathcal{R}}),$$

où g est une fonction d'une variable réelle, car nous voulons pouvoir traiter le cas où la résistance \mathcal{R} est non linéaire, et même (avec une fonction g pouvant prendre des valeurs négatives) celui où cette résistance est en fait un générateur de courant électrique.

Pour la branche 2-3, cette relation est la *loi de Faraday*. Elle s'écrit

$$L \frac{di_{\mathcal{L}}}{d\theta} = V_2 - V_3,$$

où L est une constante strictement positive appelée *inductance* de la self \mathcal{L} , et où θ désigne le temps.

Pour la branche 3-1, cette relation est la *loi de la capacité*,

$$i_C = C \frac{d(V_3 - V_1)}{d\theta},$$

où C est une constante strictement positive, la *capacité* du condensateur \mathcal{C} .

Posons

$$W = V_1 - V_3.$$

La première loi de Kirchhoff, la loi de Faraday et la loi d'Ohm nous permettent d'écrire

$$L \frac{di}{d\theta} = V_2 - V_3 = V_2 - V_1 + V_1 - V_3 = W - g(i).$$

De même, la loi de la capacité et la première loi de Kirchhoff nous permettent d'écrire

$$C \frac{dW}{dt} = -i.$$

Nous avons donc obtenu, pour le couple de fonctions (i, W) , le système différentiel

$$\begin{cases} L \frac{di}{d\theta} = W - g(i), \\ C \frac{dW}{d\theta} = -i. \end{cases}$$

Posons

$$x = \sqrt{L} i, \quad y = \sqrt{C} W, \quad t = \frac{\theta}{\sqrt{LC}},$$

et désignons par f la fonction, d'une variable réelle x ,

$$f(x) = \sqrt{C} g\left(\frac{x}{\sqrt{L}}\right).$$

Moyennant ce changement de fonctions inconnues (x et y au lieu de i et W) et ce changement d'unité de temps (mesuré maintenant par t au lieu de θ), le système différentiel ci-dessus devient

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - f(x), \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

C'est une équation différentielle dans \mathbb{R}^2 appelée *équation de Liénard*.

Dans le cas particulier où

$$f(x) = x^3 - x,$$

l'équation de Liénard est appelée *équation de Van der Pol*.

4.2. Cas où f est linéaire. — Considérons le cas où la résistance \mathcal{R} est linéaire. La loi d'Ohm s'écrit

$$V_1 - V_2 = R i_{\mathcal{R}},$$

où R est une constante. Posons

$$\rho = \sqrt{\frac{C}{L}} R.$$

Remarquons au passage que pour une résistance au sens usuel, R et ρ sont strictement positifs. Le cas où R et ρ sont nuls est celui où le circuit considéré est non dissipatif, et le cas où R et ρ sont strictement négatifs celui où dans la branche 1-2 du circuit, on a une source de courant électrique.

L'équation de Liénard devient

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\rho x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

C'est une équation différentielle linéaire dans \mathbb{R}^2 , ayant pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\rho & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$\Pi_A(\lambda) = \lambda^2 + \rho\lambda + 1.$$

Utilisant les résultats du paragraphe 5 du chapitre III, nous voyons que l'origine est

- un nœud attractif pour $-\infty < \rho \leq -2$,
- un foyer attractif pour $-2 < \rho < 0$,
- un centre pour $\rho = 0$,
- un foyer répulsif pour $0 < \rho < 2$,
- un nœud répulsif pour $2 \leq \rho < +\infty$.

4.3. Propriétés générales de l'équation de Liénard. — Revenons à l'équation de Liénard sous sa forme générale

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - f(x), \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

Nous supposons la fonction f différentiable de classe C^p , avec $p \geq 1$.

Recherchons les points d'équilibre. Nous voyons immédiatement qu'il en existe un seul, le point $(x = 0, y = f(0))$. Pour l'étude de la nature de ce point, nous employons la méthode de linéarisation, consistant à appliquer les propositions III.6.2, III.7.7 et III.7.10. L'équation linéarisée au voisinage du point d'équilibre s'écrit

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v - f'(0)u, \\ \frac{dv}{dt} = -u. \end{cases}$$

C'est l'équation qui a été étudiée au paragraphe précédent, avec $\rho = f'(0)$.

La proposition III.6.2 nous permet d'affirmer que dans tous les cas où toutes les valeurs propres de la matrice de l'équation linéarisée ont une partie réelle non nulle, la nature (α -stable ou ω -stable, attractive ou répulsive) du point d'équilibre de l'équation de Liénard est la même que celle de l'origine pour l'équation linéarisée. Nous pouvons donc affirmer que le point d'équilibre $(x = 0, y = f(0))$ de l'équation de Liénard est

- ω -stable et attractif si $f'(0) < 0$,
- α -stable et répulsif si $f'(0) > 0$.

Les propositions III.7.7 et III.7.10 nous permettent de mieux préciser la nature de ce point d'équilibre. Elles montrent que ce point est

- un nœud attractif si $-\infty < f'(0) < -2$,
- un foyer attractif si $-2 < f'(0) < 0$,
- un foyer répulsif si $0 < f'(0) < 2$,
- un nœud répulsif si $2 < f'(0) < +\infty$.

Lorsque $f'(0) = 0$, la méthode de linéarisation ne permet pas de conclure : l'origine est dans ce cas un centre pour l'équation linéarisée, mais cela ne permet pas de connaître la nature du point d'équilibre de l'équation de Liénard.

Lorsque $f'(0) = \pm 2$, la proposition III.6.2 s'applique et montre que le point d'équilibre de l'équation de Liénard est ω -stable et attractif si $f'(0) = -2$, α -stable et répulsif si $f'(0) = 2$. Mais les propositions III.7.7 et III.7.10 ne s'appliquant pas, la méthode de linéarisation ne nous permet pas de dire si ce point d'équilibre est un foyer ou un nœud (voir III.7.11 b).

Il est également possible d'avoir des informations sur le point d'équilibre de l'équation de Liénard grâce à la méthode de Liapounov. Posons en effet

$$E(x, y) = x^2 + (y - f(0))^2.$$

Soit $t \mapsto (x(t), y(t))$ une solution de l'équation de Liénard. Nous avons

$$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = -2x(t) (f(x(t)) - f(0)).$$

Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < |x| < \varepsilon$, nous ayons $x(f(x) - f(0)) > 0$ (resp., $x(f(x) - f(0)) < 0$). Alors le théorème de

Liapounov III.2.6 montre que le point d'équilibre $(0, f(0))$ est ω -stable (resp., α -stable) au sens de Liapounov.

Remarquons au passage que sous les mêmes hypothèses, le théorème de Liapounov, du moins sous la forme III.2.6, ne permet pas d'affirmer que le point d'équilibre $(0, f(0))$ est répulsif (resp., attractif), car pour $x(t) = 0, y(t)$ n'étant pas nécessairement égal à $f(0)$, ou encore $(x(t), y(t))$ n'étant pas le point d'équilibre, on a $\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = 0$.

4.4. Application à l'équation de Van der Pol. — Considérons maintenant l'équation de Van der Pol,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - f(x), & \text{avec } f(x) = x^3 - x, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

L'unique point d'équilibre est l'origine $(x = 0, y = 0)$. En posant

$$E(x, y) = x^2 + y^2,$$

nous voyons, comme dans le paragraphe précédent, que pour toute solution $t \mapsto (x(t), y(t))$ de l'équation de Van der Pol,

$$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = 2(x(t))^2(1 - x(t))(1 + x(t)).$$

Nous voyons donc que l'origine est un point d'équilibre α -stable. D'autre part, pour tout réel r vérifiant $0 < r < 1$, le disque fermé

$$D_r = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; E(x, y) \leq r \}$$

est négativement invariant par le système dynamique associé à l'équation de Van der Pol, et ne contient pas d'orbite complète sur laquelle E est constante, autre que celle réduite au point d'équilibre. Le théorème III.3.5 (moyennant les changements de signe appropriés et le remplacement de "bassin d'attraction" par "bassin de répulsion") montre que l'origine est un point d'équilibre répulsif, et que le disque D_r est contenu dans son bassin de répulsion.

L'équation linéarisée, au voisinage de l'origine, est

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u + v, \\ \frac{dv}{dt} = -u. \end{cases}$$

La méthode de linéarisation permet d'affirmer que l'origine est un foyer répulsif.

4.5. Sens de variation des coordonnées le long d'une courbe intégrale

Considérons les quatre parties ouvertes du plan \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{aligned} A &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, y > x^3 - x \}, \\ B &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, y < x^3 - x \}, \\ C &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x < 0, y < x^3 - x \}, \\ D &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x < 0, y > x^3 - x \}. \end{aligned}$$

Pour toute solution $t \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t))$ de l'équation de Van der Pol, nous voyons que $\frac{dx(t)}{dt}$ et $\frac{dy(t)}{dt}$ ont un signe constant dans chacun des ouverts A, B, C et D du plan \mathbb{R}^2 . Nous voyons également que $\frac{dx(t)}{dt}$ est nul sur la courbe d'équation $y = x^3 - x$, et

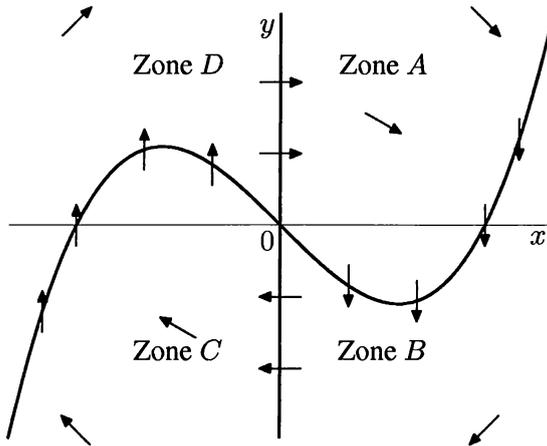


Figure IV.5. Sens de variation de $t \mapsto \varphi(t)$

que $\frac{dy(t)}{dt}$ est nul sur l'axe des ordonnées, d'équation $x = 0$. En utilisant ces remarques, nous avons représenté par des flèches, sur la figure IV.5, le sens de variation de $x(t)$ et de $y(t)$ dans chacun des ouverts A, B, C et D . Nous avons aussi indiqué la direction des tangentes aux orbites de l'équation aux points où ces orbites traversent les courbes qui séparent deux de ces ouverts, et le sens de la traversée lorsque t croît.

La disposition des flèches sur la figure IV.5 permet de penser que les trajectoires de l'équation de Van der Pol tournent autour de l'origine dans le sens inverse du sens trigonométrique, en passant successivement, lorsque t croît, dans les ouverts A, B, C et D , puis à nouveau A , et ainsi de suite. Nous allons prouver ce résultat, de manière rigoureuse. Mais prouvons d'abord le résultat très simple ci-dessous, mettant en évidence une symétrie du portrait de phases.

4.6. Lemme. — *L'origine de \mathbb{R}^2 est un centre de symétrie pour le portrait de phases de l'équation de Van der Pol. Plus précisément, si $t \mapsto (x(t), y(t))$ est une solution de cette équation, la composée de cette solution avec la symétrie par rapport à l'origine, c'est-à-dire l'application $t \mapsto (-x(t), -y(t))$ est aussi solution de l'équation.*

Preuve : Posons $\tilde{x}(t) = -x(t)$, $\tilde{y}(t) = -y(t)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= -\frac{dx(t)}{dt} = -y(t) + f(x(t)) = \tilde{y}(t) - f(\tilde{x}(t)), \\ \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} &= -\frac{dy(t)}{dt} = x(t) = -\tilde{x}(t), \end{aligned}$$

car la fonction f est impaire. Nous avons ainsi vérifié que $t \mapsto (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ est solution de l'équation de Van der Pol. □

4.7. Lemme. — *Soit $y_0 > 0$, et $t \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t))$ la solution maximale de l'équation de Van der Pol qui vérifie $x(0) = 0, y(0) = y_0$. Il existe deux réels $t_1(y_0)$ et $t_2(y_0)$, vérifiant $0 < t_1(y_0) < t_2(y_0)$, tels que $\varphi(t)$ soit défini pour tout t vérifiant $0 \leq t \leq t_2(y_0)$ et soit*

- élément de l'ouvert A pour $0 < t < t_1(y_0)$,
- élément de l'arc de courbe $(x > 0, y = x^3 - x)$ pour $t = t_1(y_0)$,
- élément de l'ouvert B pour $t_1(y_0) < t < t_2(y_0)$,
- élément du demi-axe $(x = 0, y < 0)$ pour $t = t_2(y_0)$.

Preuve : Nous avons

$$x(0) = 0, \quad \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = y_0 > 0, \quad y(0) - f(x(0)) = y_0 > 0.$$

Par suite, pour $t > 0$ mais assez petit,

$$x(t) > 0, \quad y(t) - f(x(t)) > 0,$$

ce qui exprime que $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ est élément de A .

Nous allons montrer que $\varphi(t)$ ne peut pas être élément de A pour tout $t > 0$ pour lequel il est défini. Faisons un raisonnement par l'absurde, en supposant $\varphi(t) \in A$ pour tout $t > 0$ pour lequel $\varphi(t)$ est défini. Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont donc, respectivement, croissante et décroissante, et le point $\varphi(t)$ est élément, pour tout $t > 0$ pour lequel il est défini, de la partie K du plan \mathbb{R}^2

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x, x^3 - x \leq y \leq y_0 \},$$

qui est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^2 , représentée sur la figure IV.6.

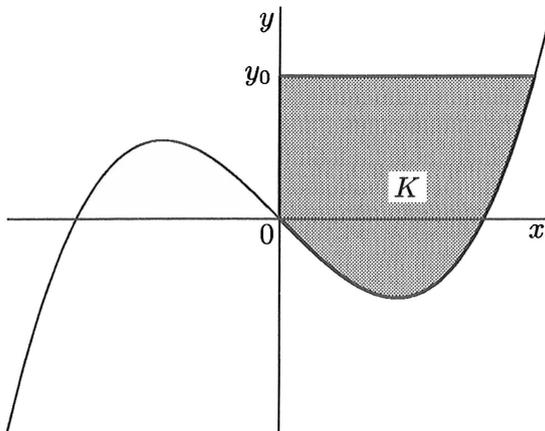


Figure IV.6. La partie K de \mathbb{R}^2

Le théorème II.3.3 nous permettrait alors d'affirmer que $\varphi(t)$ est défini pour tout $t \geq 0$. Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$, monotones et bornées, ont une limite lorsque $t \rightarrow +\infty$. La proposition III.1.5 montre que le point $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ est un point d'équilibre. Ce point ne peut pas être l'origine, car $t \mapsto x(t)$ est croissante et prend des valeurs strictement positives pour $t > 0$ assez petit. L'origine étant l'unique point d'équilibre de l'équation de Van der Pol, nous sommes arrivés à une contradiction, et nous avons ainsi prouvé par l'absurde que $\varphi(t)$ ne peut pas être élément de A pour tout $t > 0$ pour lequel il est défini. Nous pouvons alors affirmer que le réel

$$t_1(y_0) = \sup \{ t \in \mathbb{R} ; t > 0, \varphi(t) \text{ défini et } \varphi(\theta) \in A \text{ pour tout } \theta \text{ tel que } 0 < \theta < t \}$$

existe. Le point $\lim_{t \rightarrow t_1(y_0), t < t_1(y_0)} \varphi(t)$ existe, puisque sur $]0, t_1(y_0)[$, $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont monotones et bornées. Ce point appartient nécessairement à la frontière de A , et même, plus précisément, à la partie de cette frontière constituée par l'arc de courbe $(x > 0, y = x^3 - x)$, car $\lim_{t \rightarrow t_1(y_0)} x(t)$ étant > 0 , ce point n'est sûrement pas élément de l'axe des ordonnées. Comme il appartient au domaine de définition de l'équation, ce point n'est autre que $\varphi(t_1(y_0))$, et nous sommes ainsi assurés du fait que $\varphi(t_1(y_0))$ est défini et appartient à l'arc de courbe $(x > 0, y = x^3 - x)$.

Nous avons

$$x(t_1(y_0)) > 0, \quad y(t_1(y_0)) - f(x(t_1(y_0))) = 0,$$

$$\left. \frac{d}{dt}(y(t) - f(x(t))) \right|_{t=t_1(y_0)} = -x(t_1(y_0)) < 0.$$

Par suite, pour $t - t_1(y_0) > 0$ mais assez petit,

$$x(t) > 0, \quad y(t) - f(x(t)) < 0,$$

ce qui exprime que $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ est élément de B .

Supposons que pour tout $t > t_1(y_0)$ tel que $\varphi(t)$ soit défini, nous ayons $\varphi(t) \in B$. Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont donc décroissantes pour $t > t_1(y_0)$. La première, $x(t)$, minorée par 0, a une limite finie lorsque $t \rightarrow t_{\max}$, extrémité droite de l'intervalle de définition de φ . Si la seconde, $y(t)$, avait aussi une limite finie, $\varphi(t)$ resterait, pour $t_1(y_0) < t < t_{\max}$, dans une partie compacte de \mathbb{R}^2 . D'après le théorème II.3.3, nous devrions alors avoir $t_{\max} = +\infty$ et le point $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ serait un point d'équilibre. Le seul point d'équilibre de l'équation de Van der Pol étant l'origine, cela n'est pas possible. En effet,

- ou bien $y(t_1(y_0)) < 0$; mais alors, $t \mapsto y(t)$ étant décroissante, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) < 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ ne peut être l'origine;
- ou bien $y(t_1(y_0)) \geq 0$; mais alors $x(t_1(y_0)) \geq 1$ puisque $(x(t_1(y_0)), y(t_1(y_0)))$ est sur l'arc de courbe $(x > 0, y = x^3 - x)$; si nous avons $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, il existerait $\theta > t_1(y_0)$ tel que $x(\theta) = 1/2$; le point $(x(\theta), y(\theta))$ étant élément de l'ouvert B , nous aurions $y(\theta) < 0$; la fonction $t \mapsto y(t)$ étant décroissante, nous aurions $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) < 0$, et le point $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ ne serait pas l'origine.

Toujours sous l'hypothèse selon laquelle pour tout $t > t_1(y_0)$ tel que $\varphi(t)$ existe, ce point est élément de B , nous venons de voir qu'en supposant que $\lim_{t \rightarrow t_{\max}} y(t)$ est fini, nous arrivons à une contradiction. Nous allons montrer qu'en supposant que $\lim_{t \rightarrow t_{\max}} y(t) = -\infty$ (ce qui est la seule autre possibilité, puisque $t \mapsto y(t)$ est décroissante), nous arrivons aussi à une contradiction. Puisque $\frac{dy(t)}{dt} = -x(t)$ reste borné, $y(t)$ ne peut tendre vers $-\infty$ lorsque $t \rightarrow t_{\max}$ que si $t_{\max} = +\infty$. Considérons alors l'équation

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t) - f(x(t)).$$

Puisque $x(t)$ tend vers une quantité finie, que f est continue et que $y(t)$ tend vers $-\infty$, $\frac{dx(t)}{dt}$ tend vers $-\infty$. Cela entraînerait $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$, en contradiction avec le fait que si $\varphi(t)$ reste dans l'ouvert B , $x(t)$ est minoré par 0.

En résumé, nous avons prouvé que l'hypothèse selon laquelle, pour tout $t > t_1(y_0)$ pour lequel $\varphi(t)$ est défini, ce point appartient à l'ouvert B , nous conduit, dans tous les cas possibles, à une contradiction. Nous pouvons donc affirmer que

$$t_2(y_0) = \sup\{t \in \mathbb{R} ; t > t_1(y_0), \varphi(t) \text{ défini}$$

$$\text{et } \varphi(\theta) \in B \text{ pour tout } \theta \text{ vérifiant } t_1(y_0) < \theta < t\}$$

existe. Sur l'intervalle $]t_1(y_0), t_2(y_0)[$, les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont décroissantes; la première est minorée par 0; la dérivée de la seconde est égale à $-x(t)$, donc est bornée, et par suite (l'intervalle $]t_1(y_0), t_2(y_0)[$ étant lui aussi borné), $y(t)$ est bornée. Les limites de ces deux fonctions lorsque $t \rightarrow t_2(y_0)$ existent donc, et le point

$\lim_{t \rightarrow t_2(y_0)} \varphi(t)$, dont ce sont les coordonnées, est nécessairement élément de la frontière de B . Ce point ne peut pas être l'origine (car $t_2(y_0)$ est fini, or une courbe intégrale ne peut tendre vers un point d'équilibre que lorsque t tend vers l'infini). Ce ne peut être un élément de l'arc de courbe ($x > 0$, $y = x^3 - x$), car en tout point de cet arc de courbe, les orbites de l'équation de Van der Pol traversent cet arc de courbe, lorsque t croît, dans le sens allant de A vers B . Donc le point $\lim_{t \rightarrow t_2} \varphi(t)$ ne peut qu'être élément du demi-axe ($x = 0$, $y < 0$). C'est un élément du domaine de définition de l'équation de Van der Pol; nous sommes donc assurés que $t_2(y_0)$ appartient à l'intervalle de définition de φ , et que ce point n'est autre que $\varphi(t_2(y_0))$. \square

4.8. Proposition. — *Les hypothèses et notations étant les mêmes que celles du lemme précédent, il existe une suite réelle $(t_n(y_0))$, $n \in \mathbb{N}$, vérifiant $t_0(y_0) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < t_n(y_0) < t_{n+1}(y_0)$, telle que $\varphi(t)$ soit défini pour tout t vérifiant $0 \leq t < \sup_{n \in \mathbb{N}} t_n(y_0)$ et soit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,*

- élément du demi-axe ($x = 0$, $y > 0$) pour $t = t_{4k}(y_0)$,
- élément de l'ouvert A pour $t_{4k}(y_0) < t < t_{4k+1}(y_0)$,
- élément de l'arc de courbe ($x > 0$, $y = x^3 - x$) pour $t = t_{4k+1}(y_0)$,
- élément de l'ouvert B pour $t_{4k+1}(y_0) < t < t_{4k+2}(y_0)$,
- élément du demi-axe ($x = 0$, $y < 0$) pour $t = t_{4k+2}(y_0)$,
- élément de l'ouvert C pour $t_{4k+2}(y_0) < t < t_{4k+3}(y_0)$,
- élément de l'arc de courbe ($x < 0$, $y = x^3 - x$) pour $t = t_{4k+3}(y_0)$,
- élément de l'ouvert D pour $t_{4k+3}(y_0) < t < t_{4(k+1)}(y_0)$.

Preuve : Pour alléger les notations, nous écrirons t_n au lieu de $t_n(y_0)$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion. Nous avons posé $t_0 = 0$, et $\varphi(0)$ est bien élément du demi-axe ($x = 0$, $y > 0$). D'après le lemme 4.7, les deux termes suivants de la suite, t_1 et t_2 , existent et ont les propriétés désirées; en particulier, $x(t_2) = 0$ et $y(t_2) < 0$. En remplaçant y_0 par $-y(t_2)$ et en utilisant à nouveau le lemme 4.7, nous voyons que la solution de l'équation de Van der Pol qui passe, pour $t = 0$, par le point $(0, -y(t_2))$, traverse l'arc de courbe ($x > 0$, $y = x^3 - x$) à un instant t'_1 et le demi-axe ($x = 0$, $y < 0$) à un instant t'_2 . Le lemme 4.6 montre que la composée de cette solution avec la symétrie par rapport à l'origine, c'est-à-dire la solution de l'équation qui passe, au temps $t = 0$, par le point $(0, y(t_2))$, traverse l'arc de courbe ($x < 0$, $y = x^3 - x$) à l'instant t'_1 et le demi-axe ($x = 0$, $y > 0$) à l'instant t'_2 . En posant $t_3 = t_2 + t'_1$ et $t_4 = t_2 + t'_2$, nous vérifions que les deux termes suivants de la suite, t_3 et t_4 , existent et ont bien les propriétés désirées. Il ne reste plus qu'à effectuer une récurrence sur k , en reprenant le raisonnement qui précède après avoir remplacé y_0 par $y(t_{4k})$. \square

4.9. Proposition. — *Les hypothèses et notations étant celles du lemme 4.7, soit $y_0 > 0$. Notons $\sigma(y_0)$ l'ordonnée du point $\varphi(t_2)$ où la courbe intégrale, issue au temps $t = 0$ du point $(0, y_0)$, atteint, pour la première fois lorsque t croît à partir de 0, le demi-axe ($x = 0$, $y < 0$). L'application σ a les propriétés suivantes.*

1. *L'application σ est différentiable de classe C^∞ , strictement décroissante et à valeurs strictement négatives sur son domaine de définition $]0, +\infty[$.*
2. *Il existe un réel $y_r > 0$ unique tel que, pour tout $y_0 > 0$,*

$$\sigma(y_0) + y_0 \begin{cases} < 0 & \text{si } y_0 < y_r, \\ = 0 & \text{si } y_0 = y_r, \\ > 0 & \text{si } y_0 > y_r. \end{cases}$$

Preuve : L'application qui associe, au point $(0, y_0)$ du demi-axe $(x = 0, y > 0)$ le point $(0, \sigma(y_0))$ du demi-axe $(x = 0, y < 0)$, est une application de Poincaré. Le corollaire 2.5 permet d'affirmer qu'au voisinage de chaque point, c'est un difféomorphisme de classe C^∞ . Par suite, l'application σ est de classe C^∞ et, au voisinage de chaque point, elle est strictement monotone. Nous allons voir qu'elle est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Supposons $y'_0 > y_0 > 0$, et considérons les arcs de courbes intégrales de l'équation de Van der Pol issus, à l'instant $t = 0$, respectivement du point $(0, y'_0)$ et du point $(0, y_0)$, le temps t variant, pour le premier de 0 à $t_2(y'_0)$, et pour le second de 0 à $t_2(y_0)$. Ces deux arcs de courbe sont contenus dans le demi-plan $(x > 0)$ et, d'après le théorème d'existence et d'unicité, ils ne se rencontrent pas. On en déduit aisément que $\sigma(y'_0) < \sigma(y_0)$. Cela peut sembler évident, mais la démonstration rigoureuse de ce résultat repose sur le théorème de Jordan (VII.3.13) établi au chapitre VII. Notons φ la solution de l'équation de Van der Pol passant, pour $t = 0$, par le point $(0, y_0)$. Avec les notations de la proposition 4.8, soit Γ la réunion de l'arc de courbe

$$\{ \varphi(t) ; 0 \leq t \leq t_2(y_0) \}$$

et de son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Nous voyons que Γ est une courbe fermée simple. D'après le théorème de Jordan (voir VII.3.13), le complémentaire de Γ dans le plan \mathbb{R}^2 a deux composantes connexes dont une seule est d'adhérence compacte. Cette composante connexe est appelée "intérieur de Γ ", et l'autre "extérieur de Γ ". Si nous avons $\sigma(y'_0) > \sigma(y_0)$, l'autre arc de courbe intégrale, issu pour $t = 0$ d'un point $(0, y'_0)$ situé dans l'extérieur de Γ , atteindrait, pour $t = t_2(y'_0)$, un point $(0, \sigma(y'_0))$ de l'intérieur de Γ ; il traverserait nécessairement Γ pour une valeur de t comprise entre 0 et $t_2(y'_0)$, en un point situé dans le demi-plan $x > 0$, donc appartenant à la courbe intégrale issue de $(0, y_0)$. Cela n'est pas possible en raison du théorème d'existence et d'unicité. D'autre part, d'après sa définition même, l'application σ est à valeurs strictement négatives. Posons, pour tout $y_0 > 0$,

$$\alpha(y_0) = (\sigma(y_0))^2 - (y_0)^2.$$

Nous pouvons écrire

$$\alpha(y_0) = (\sigma(y_0) + y_0)(\sigma(y_0) - y_0).$$

En remarquant que $\sigma(y_0) - y_0$ est toujours strictement négatif, nous voyons que $\alpha(y_0)$ et $\sigma(y_0) + y_0$ sont de signes contraires. Notons $t \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t))$ la courbe intégrale de l'équation de Van der Pol qui vérifie $\varphi(0) = (0, y_0)$. En remarquant que $x(0) = x(t_2(y_0)) = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \alpha(y_0) &= \int_0^{t_2(y_0)} \frac{d}{dt} (x(t)^2 + y(t)^2) dt \\ &= -2 \int_0^{t_2(y_0)} x(t)f(x(t)) dt. \end{aligned}$$

Nous allons montrer qu'il existe un réel $y_1 > 0$ tel que, pour $0 < y_0 < y_1$, $\alpha(y_0) > 0$, et que sur l'intervalle $[y_1, +\infty[$, $\alpha(y_0)$ soit une fonction strictement décroissante de y_0 qui tend vers $-\infty$ lorsque y_0 tend vers $+\infty$. Cela prouvera qu'il existe un réel $y_r > 0$ unique tel que $\alpha(y_r) = 0$ et que $\alpha(y_0)$ est strictement positif pour $0 < y_0 < y_r$, et strictement négatif pour $y_0 > y_r$.

Soit $t \mapsto \psi(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ la courbe intégrale de l'équation de Van der Pol qui vérifie $\psi(0) = (1, 0)$. Nous avons

$$\tilde{x}(0) = 1 > 0, \quad \tilde{y}(0) - f(\tilde{x}(0)) = 0, \quad \left. \frac{d}{dt} (\tilde{y}(t) - f(\tilde{x}(t))) \right|_{t=0} = -\tilde{x}(0) = -1 < 0,$$

donc pour $t < 0$ assez petit en valeur absolue

$$\tilde{x}(t) > 0 \quad \tilde{y}(t) - f(\tilde{x}(t)) > 0,$$

ce qui exprime que $\psi(t)$ est élément de l'ouvert A de \mathbb{R}^2 (voir figure IV.5). Nous allons montrer qu'il existe $\theta < 0$ tel que $\psi(t)$ soit élément de A pour $\theta < t < 0$, et que $\psi(\theta)$ soit élément du demi-axe ($x = 0, y > 0$). Supposons que pour tout $t < 0$ pour lequel $\psi(t)$ est défini, nous ayons $\psi(t) \in A$. Pour t négatif et décroissant, $\tilde{x}(t)$ serait décroissant et $\tilde{y}(t)$ croissant. Étant minoré par 0, $\tilde{x}(t)$ aurait une limite lorsque t tendrait vers t_{\min} , extrémité gauche de l'intervalle de définition de ψ . Si $\tilde{y}(t)$ était borné, il aurait aussi une limite finie lorsque $t \rightarrow t_{\min}$, en raison de sa monotonie. Le point $\lim_{t \rightarrow t_{\min}} \psi(t)$ serait, d'après III.1.5, un point d'équilibre, ce qui est impossible, l'unique point d'équilibre étant l'origine, car $\lim_{t \rightarrow t_{\min}} \tilde{y}(t)$ est strictement positif. Nous devrions donc avoir $\lim_{t \rightarrow t_{\min}} \tilde{y}(t) = +\infty$. Mais d'après l'équation de Van der Pol, $\frac{d\tilde{y}(t)}{dt}$ tendrait vers un réel fini lorsque $t \rightarrow t_{\min}$. Si t_{\min} était fini, $\tilde{y}(t)$ tendrait, lorsque $t \rightarrow t_{\min}$, vers une quantité finie; donc nécessairement $t_{\min} = -\infty$. Mais alors, d'après l'équation de Van der Pol, $\frac{d\tilde{x}(t)}{dt}$ tendrait vers $+\infty$, ce qui serait en contradiction avec le fait que $\tilde{x}(t)$ reste minoré par 0. Nous avons ainsi prouvé par l'absurde que $\psi(t)$ ne peut pas être élément de A pour tout $t < 0$ pour lequel il est défini. Il existe nécessairement $\theta < 0$ tel que pour $\theta < t < 0$, $\psi(t)$ soit élément de A et que $\psi(\theta)$ soit élément de la frontière de A . En raison de la monotonie des composantes de ψ , $0 \leq \tilde{x}(\theta) \leq 1$ et $\tilde{y}(\theta) > 0$, donc $\psi(\theta)$ ne peut pas être élément de la partie de la frontière de A formée par l'arc de courbe ($x \geq 0, y = x^3 - x$). C'est pourquoi $\psi(\theta)$ est nécessairement élément du demi-axe ($x = 0, y > 0$). Posons alors $y_1 = \tilde{y}(\theta)$. Supposons $y_0 < y_1$. Les positions relatives des courbes intégrales de l'équation de Van der Pol qui passent, pour $t = 0$, respectivement par les points $(0, y_0)$ et $(0, y_1)$ montrent que pour tout t vérifiant $0 < t < t_2(y_0)$, nous avons nécessairement $0 < x(t) < 1$, et par suite $x(t)f(x(t)) < 0$. Nous en déduisons

$$\alpha(y_0) = -2 \int_0^{t_2} x(t)f(x(t)) dt > 0.$$

Supposons maintenant $y_0 \geq y_1$. Lorsque t parcourt l'intervalle $[0, t_2(y_0)]$, $x(t)$ commence par croître, à partir de sa valeur initiale $x(0) = 0$, atteint son maximum pour $t = t_1(y_0)$, puis décroît jusqu'à sa valeur finale $x(t_2(y_0)) = 0$. Le maximum de $x(t)$, sur l'intervalle $[0, t_2(y_0)]$, est nécessairement supérieur ou égal à 1. Cela résulte des positions relatives de cette courbe intégrale et de la courbe intégrale qui passe par les points $(0, y_1)$ et $(1, 0)$. Il existe donc deux réels τ et τ' , vérifiant $0 < \tau \leq t_1(y_0) \leq \tau' < t_2(y_0)$, tels que $x(\tau) = x(\tau') = 1$. Décomposons l'intégrale qui sert à exprimer $\alpha(y_0)$ en une somme de trois termes :

$$\alpha(y_0) = -2(I_1 + I_2 + I_3),$$

avec

$$I_1 = \int_0^{\tau} x(t)f(x(t)) dt, \quad I_2 = \int_{\tau}^{\tau'} x(t)f(x(t)) dt, \quad I_3 = \int_{\tau'}^{t_2(y_0)} x(t)f(x(t)) dt.$$

Sur l'intervalle $]0, \tau[$, x est une fonction différentiable de t , dont la dérivée est partout strictement positive. Nous pouvons donc prendre x comme variable indépendante pour le calcul de l'intégrale I_1 , et considérer t et y comme des fonctions de x . Nous avons

$$I_1 = \int_0^1 x f(x) \frac{dt(x)}{dx} dx = \int_0^1 x f(x) \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^{-1} dx = \int_0^1 \frac{x f(x)}{y(x) - f(x)} dx.$$

Compte tenu de $f(x) = x^3 - x \leq 0$ lorsque $0 \leq x \leq 1$, nous voyons que $I_1 \leq 0$. De plus, lorsque nous remplaçons y_0 par $y'_0 > y_0$, nous voyons que pour tout $x \in [0, 1]$, $y(x)$ est remplacé par $y'(x) > y(x)$. Autrement dit, I_1 est à valeurs négatives, et c'est une fonction croissante de y_0 .

Le même raisonnement s'applique à l'intégrale I_3 , qui est aussi à valeurs négatives, et fonction croissante de y_0 .

Sur l'intervalle $] \tau, \tau' [$, $y(t)$ est une fonction différentiable, strictement décroissante de la variable t , dont la dérivée $-x(t)$ ne s'annule pas. Nous pouvons donc calculer l'intégrale I_2 en considérant y comme la variable indépendante, x et t étant maintenant des fonctions de y . Nous avons

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{y(\tau)}^{y(\tau')} x(y)f(x(y)) \frac{dt(y)}{dy} dy = \int_{y(\tau)}^{y(\tau')} x(y)f(x(y)) \left(\frac{dy(t)}{dt} \right)^{-1} dy \\ &= - \int_{y(\tau)}^{y(\tau')} x(y) \left((x(y))^2 - 1 \right) dy. \end{aligned}$$

Compte tenu de $y(\tau') \leq y(\tau)$, et de $x(y) \left((x(y))^2 - 1 \right) \geq 0$ pour $y(\tau') \leq y \leq y(\tau)$, nous voyons que $I_2 \geq 0$. De plus, lorsque nous remplaçons y_0 par $y'_0 > y_0$, nous voyons que le nouvel intervalle d'intégration $[y'(\tau'), y'(\tau)]$ contient strictement l'ancien intervalle d'intégration $[y(\tau'), y(\tau)]$, et que sur ce dernier, la nouvelle fonction à intégrer pour le calcul de l'intégrale I_2 , $x'(y) \left((x'(y))^2 - 1 \right)$, est, pour chaque valeur de y , supérieure ou égale à l'ancienne fonction $x(y) \left((x(y))^2 - 1 \right)$. Nous avons donc prouvé que I_2 est à valeurs positives et que c'est une fonction croissante de y_0 .

Pour $y_0 \geq y_1$, $I_1 + I_2 + I_3$ est une fonction croissante de y_0 (puisque somme de trois fonctions croissantes), donc $\alpha(y_0) = -2(I_1 + I_2 + I_3)$ est une fonction décroissante de y_0 .

Enfin, pour prouver que $\alpha(y_0)$ tend vers $-\infty$ lorsque $y_0 \rightarrow +\infty$, il suffit de prouver que I_2 tend vers $+\infty$ lorsque $y_0 \rightarrow +\infty$. Soit $M > 0$. Il existe un unique $x_M > 0$ tel que $f(x_M) = x_M^3 - x_M = M + 1$. Soit $t \mapsto \chi(t) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ la solution maximale de l'équation de Van der Pol qui vérifie $\chi(0) = (x_M, M + 1)$. En procédant comme ci-dessus, lorsque nous avons prouvé que la solution $t \mapsto \psi(t)$ vérifiant $\psi(0) = (1, 0)$ rencontrait, pour un certain réel $\theta < 0$, le demi-axe $(x = 0, y > 0)$, nous voyons qu'il existe $\hat{\theta} < 0$ tel que pour $\hat{\theta} < t < 0$, $\chi(t)$ soit élément de A , et que $\chi(\hat{\theta})$ soit élément du demi-axe $(x = 0, y > 0)$. Posons $\chi(\hat{\theta}) = (0, y_M)$. Nous voyons alors que pour $y_0 \geq y_M$, l'intervalle $[y(\tau), y(\tau')]$ sur lequel on intègre pour calculer l'intégrale I_2 (avec y pour variable indépendante) contient l'intervalle $[M, M + 1]$, et que sur cet intervalle, la fonction intégrée prend des valeurs supérieures ou égales à M . Donc pour $y_0 \geq y_M$, nous avons $I_2 \geq M$, ce qui prouve que $\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} I_2 = +\infty$. \square

4.10. Théorème. — *Il existe une orbite périodique unique de l'équation de Van der Pol. Cette orbite périodique est ω -stable et attractive. Son bassin d'attraction est $\mathbb{R}^2 - \{ (0, 0) \}$.*

Preuve : D'après la proposition 4.9, il existe un réel $y_r > 0$ unique tel que $\sigma(y_r) = -y_r$. Soit $t \mapsto \varphi(t)$ la solution maximale de l'équation de Van der Pol qui vérifie $\varphi(0) = (0, y_r)$. Les notations étant celles de 4.7, 4.8 et 4.9, nous avons $\varphi(t_2(y_r)) = (0, \sigma(y_r)) = (0, -y_r)$. L'origine étant un centre de symétrie du portrait de phases, nous voyons que $t_4(y_r) = 2t_2(y_r)$ et que $\varphi(t_4(y_r)) = (0, y_r) = \varphi(0)$. La solution φ est donc périodique

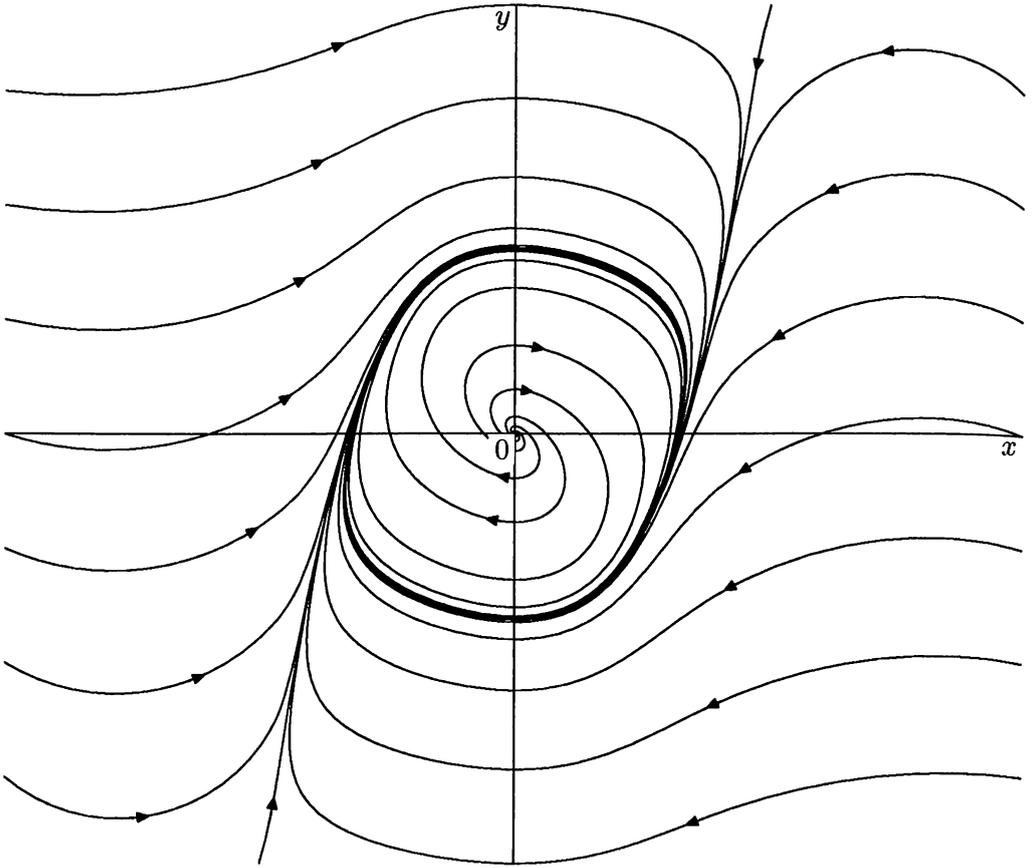


Figure IV.7. Portrait de phases de l'équation de Van der Pol

de période $t_4(y_r)$. Autrement dit, l'orbite \mathcal{O} du point $(0, y_r)$ est périodique, de période $t_4(y_r)$.

Nous allons construire l'application de retour de Poincaré associée à l'orbite \mathcal{O} , en prenant pour droite affine coupant cette orbite au point $(0, y_r)$, l'axe des ordonnées. Compte tenu de la définition de σ et du fait que l'origine est un centre de symétrie pour le portrait de phases, cette application de retour est l'application

$$(0, y) \mapsto (0, r(y)), \quad \text{avec } y > 0, \quad r(y) = -\sigma(-\sigma(y)).$$

Rappelons que d'après 4.9 nous avons, pour $y > 0$,

$$\sigma(y) + y \begin{cases} < 0 & \text{si } y < y_r, \\ = 0 & \text{si } y = y_r, \\ > 0 & \text{si } y > y_r. \end{cases}$$

La fonction σ étant strictement décroissante, nous en déduisons

$$r(y) - y \begin{cases} > 0 & \text{si } y < y_r, \\ = 0 & \text{si } y = y_r, \\ < 0 & \text{si } y > y_r. \end{cases}$$

De plus, r est strictement croissante, donc $r(y) - y_r = r(y) - r(y_r)$ est toujours de même signe que $y - y_r$. En utilisant ces propriétés il est facile de vérifier que pour tout $y > 0$, la suite $(r^n(y), n \in \mathbb{N})$ est

- strictement croissante et majorée par y_r si $y < y_r$,
- constante et égale à y_r si $y = y_r$,

– strictement décroissante et minorée par y_r si $y > y_r$.

Dans tous les cas, la suite $(r^n(y), n \in \mathbb{N})$ a donc une limite qui vérifie, en raison de la continuité de r ,

$$r(\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n(y)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n+1}(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} r^n(y).$$

Mais d'après ce qui précède, y_r est l'unique point fixe de r sur $]0, +\infty[$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n(y) = y_r$. Il est alors facile d'en déduire que y_r est un point d'équilibre ω -stable et attractif pour le système dynamique à temps discret de générateur r . D'après les théorèmes 2.9 et 2.13, cela suffit pour prouver que l'orbite périodique \mathcal{O} est ω -stable et attractive.

Soit (x_0, y_0) un point de \mathbb{R}^2 autre que l'origine, et $t \mapsto \psi(t)$ la solution maximale de l'équation de Van der Pol qui vérifie $\psi(0) = (x_0, y_0)$. En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 4.7, il est facile de prouver qu'il existe $\tau > 0$ tel que $\psi(\tau) = (0, y)$, avec $y > 0$. Si $y = y_r$, l'orbite du point (x_0, y_0) n'est autre que \mathcal{O} . Si $y \neq y_r$, nous avons d'après ce qui précède $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n(y) = y_r$. Les théorèmes 2.9 et 2.13 permettent alors d'affirmer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\psi(t), \mathcal{O}) = 0$. Nous avons ainsi prouvé qu'il n'existe pas d'orbite périodique de l'équation de Van der Pol autre que \mathcal{O} , et en même temps que le bassin d'attraction de \mathcal{O} est $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. \square

4.11. Le portrait de phases de l'équation de Van der Pol. — Il est représenté sur la figure IV.7.

5. Le théorème de Poincaré-Bendixson

5.1. Le problème étudié. — Nous nous intéressons dans ce paragraphe à un champ de vecteurs X , différentiable de classe C^p (avec $p \geq 1$), défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie. Nous noterons Ψ son flot réduit. Après quelques généralités valables en toute dimension, nous supposons \mathcal{E} de dimension 2.

Rappelons (définition I.2.4) que l'ensemble ω -limite (resp., α -limite) d'un point $x \in \Omega$, relativement au champ de vecteurs X , est l'ensemble, noté $L_\omega(x)$ (resp., $L_\alpha(x)$) des valeurs d'adhérence de l'application $t \mapsto \Psi_t(x)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ (resp., lorsque $t \rightarrow -\infty$). Dans ce chapitre et le précédent, nous avons rencontré divers exemples d'ensembles limites. Ainsi un point d'équilibre, ou une orbite périodique, est l'ensemble ω -limite de tout point de son bassin d'attraction, et ensemble α -limite de tout point de son bassin de répulsion.

Il est facile de donner des exemples d'ensembles limites qui contiennent un point d'équilibre mais ne sont pas réduits à un seul point (exercice IV.2).

Lorsque l'espace affine \mathcal{E} est de dimension 2, le théorème de Poincaré-Bendixson, que nous allons établir, affirme que les seuls ensembles limites, relativement au champ de vecteurs X , qui sont compacts et ne contiennent pas de point d'équilibre sont les orbites périodiques.

Ce résultat ne subsiste pas lorsque \mathcal{E} est de dimension supérieure à 2 : dès la dimension 3, les ensembles limites, pour le système dynamique associé à un champ de vecteurs, même s'ils sont compacts et sans point d'équilibre, peuvent être très compliqués. Quant aux ensembles limites pour un système dynamique à temps discret, ils peuvent être très compliqués même lorsque la dimension de l'espace des phases est 2.

5.2. Définition. — Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^p (avec $p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie. On

appelle *section locale du flot de X* une partie connexe S , d'intérieur non vide, d'un hyperplan affine de \mathcal{E} telle qu'en tout point $y \in S$, $X(y)$ soit transverse à S (c'est-à-dire n'appartienne pas à l'hyperplan vectoriel associé à l'hyperplan affine dont S est une partie).

5.3. Remarque. — Dans le cas où \mathcal{E} est de dimension 2, une section locale du flot de X est un segment de droite S , non réduit à un point, tel que pour tout $y \in S$, $X(y)$ ne soit pas parallèle à S .

5.4. Proposition. — Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^p (avec $p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension 2, et S une section locale du flot de X . Soit $t \mapsto \varphi(t)$ une courbe intégrale non constante de X , t_i ($1 \leq i \leq 3$) des éléments de son intervalle de définition vérifiant $t_1 < t_2 < t_3$ tels que les trois points $x_i = \varphi(t_i)$ soient éléments de l'intérieur de S . On suppose de plus que pour tout t vérifiant $t_1 < t < t_2$, $\varphi(t)$ n'appartient pas à S . Alors le point x_2 est situé, sur le segment de droite S , entre les points x_1 et x_3 .

Preuve : La restriction de φ à l'intervalle ouvert $]t_1, t_2[$ est injective, car s'il existait θ_1 et θ_2 tels que $t_1 < \theta_1 < \theta_2 < t_2$ et que $\varphi(\theta_1) = \varphi(\theta_2)$, la courbe intégrale φ serait périodique; son image serait $\varphi([\theta_1, \theta_2])$, donc ne rencontrerait pas S , contrairement à l'hypothèse. Dans le plan \mathcal{E} , soit C la courbe formée par la réunion du segment de droite fermé $[x_1, x_2]$ et de l'arc de courbe $\{\varphi(t) ; t_1 < t < t_2\}$. C'est une courbe fermée sans point double, puisque $\varphi(t_1) = x_1$ et $\varphi(t_2) = x_2$, que $\varphi|_{]t_1, t_2[}$ est injective et que, par hypothèse, $\varphi(t) \notin S$ pour $t_1 < t < t_2$. D'après le théorème de Jordan déjà utilisé lors de la preuve de la proposition 4.8, énoncé au chapitre VI (VI.2.3) et démontré au chapitre VII (VII.3.13), le complémentaire de C dans \mathcal{E} a deux composantes connexes, appelées intérieur de C et extérieur de C , dont une seule (l'intérieur de C) est d'adhérence compacte, la courbe C étant la frontière de chacune de ces deux composantes.

Si $x_1 = x_2$, la courbe intégrale φ est périodique et a pour image $\varphi([t_1, t_2])$; nous avons alors nécessairement $x_3 = x_1 = x_2$, et la propriété que nous voulons démontrer est trivialement satisfaite. Nous supposons donc dans ce qui suit $x_1 \neq x_2$. Les points x_1 et x_2 étant intérieurs au segment de droite S , le complémentaire dans S du segment de droite fermé $[x_1, x_2]$ a deux composantes connexes, qui sont deux segments de droite. Nous noterons S_1 celui auquel le point x_1 est adhérent, et S_2 celui auquel le point x_2 est adhérent. Puisque pour tout t vérifiant $t_1 < t < t_2$, $\varphi(t)$ n'est pas élément de S , les segments de droite S_1 et S_2 ne rencontrent pas C ; chacun d'eux, étant connexe, est contenu soit dans l'intérieur, soit dans l'extérieur de C .

Soit Ψ le flot réduit de X . Puisque $X(x_2)$ n'est pas parallèle à S , le même raisonnement que celui fait lors de la preuve du théorème de redressement local II.5.2 montre que la restriction de Ψ à un voisinage assez petit de $(0, x_2)$ dans $\mathbb{R} \times S$ est un difféomorphisme. Comme de plus x_2 est intérieur à S et distinct de x_1 , il existe des réels $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ tels que le segment de droite fermé K , porté par la même droite affine que S , de centre x_2 et de longueur $2r$, soit contenu dans S et ne contienne pas le point x_1 , et que l'application Ψ restreinte à $[-\varepsilon, \varepsilon] \times K$ soit injective. En remarquant que $\varphi([t_1, t_2 - \varepsilon])$ est compact, donc fermé, et en utilisant la compacité de K , nous voyons qu'il existe un réel ε' vérifiant $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ tel que, pour tout s vérifiant $0 < s \leq \varepsilon'$ et tout $y \in K$, $\Psi(s, y)$ ne soit élément ni de S , ni de $\varphi([t_1, t_2 - \varepsilon])$; comme de plus $\varphi([t_2 - \varepsilon, t_2]) = \Psi([-\varepsilon, 0] \times \{x_2\})$, l'injectivité de Ψ restreint à $[-\varepsilon, \varepsilon] \times K$ montre que $\Psi(s, y)$ n'est pas non plus élément de $\varphi([t_2 - \varepsilon, t_2])$, donc n'est pas élément de la courbe de Jordan C . Comme $]0, \varepsilon'] \times K$ est connexe, nous pouvons affirmer que $\Psi([0, \varepsilon'] \times K)$ est contenu soit dans l'intérieur,

soit dans l'extérieur de C .

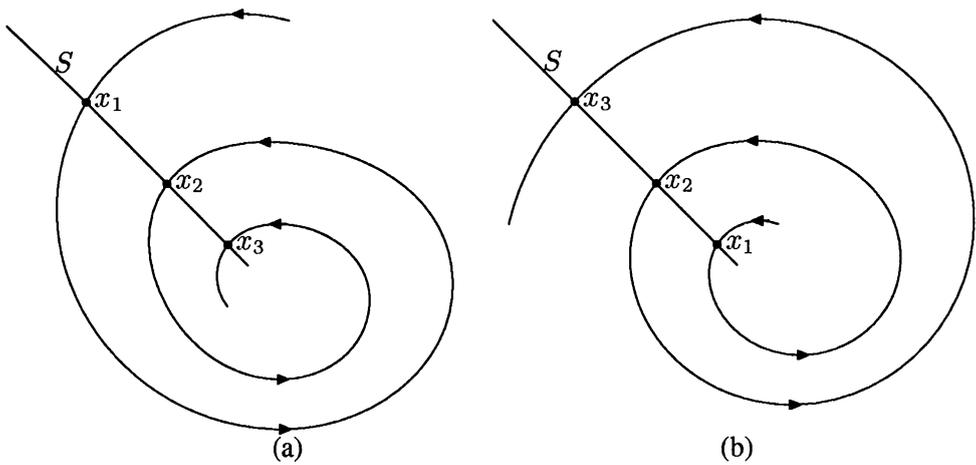


Figure IV.8. Illustration de la preuve de la proposition 5.4.

Comme $]x_1, x_2[$ est une partie de la courbe fermée C , ce segment ouvert sépare, localement, l'intérieur de C de l'extérieur de C . Puisque le champ de vecteurs X est continu et que $X(y)$ n'est parallèle au segment $]x_1, x_2[$ en aucun point y de ce segment, $X(y)$ est, pour tout $y \in]x_1, x_2[$, dirigé du même côté : soit vers l'intérieur de C , soit vers l'extérieur de C . Supposons par exemple que pour tout $y \in]x_1, x_2[$, $X(y)$ soit dirigé vers l'intérieur de C (figure IV.8 a). Alors pour $y \in]x_1, x_2[$ et s réel assez petit, $\Psi(s, y)$ est élément de l'intérieur de C . D'après ce qui précède, cela implique que $\Psi(]0, \varepsilon'] \times K)$ est contenu dans l'intérieur de C . Comme x_2 est adhérent à S_2 , $K \cap S_2 \neq \emptyset$; il existe donc $y \in S_2$ tel que pour tout $s \in]0, \varepsilon']$, $\Psi(s, y)$ soit élément de l'intérieur de C ; mais nous savons aussi que ce point y n'est pas élément de C ; comme $y = \Psi(0, y)$, la connexité de $[0, 1]$ nous permet d'affirmer que y est élément de l'intérieur de C . Étant connexe et rencontrant l'intérieur de C , S_2 est contenu dans l'intérieur de C . Nous voyons de même que pour $0 < t - t_2 \leq \varepsilon'$, $\varphi(t) = \Psi(t - t_2, x_2)$ est élément de l'intérieur de C .

Le même raisonnement, mais en remplaçant x_2 par x_1 et $s > 0$ par $s < 0$, montre que S_1 est contenu dans l'extérieur de C et que pour $t < t_1$ et $t_1 - t$ assez petit, $\varphi(t)$ est élément de l'extérieur de C .

Montrer que x_2 est situé entre x_1 et x_3 , revient à montrer que $x_3 = \varphi(t_3)$ est élément de S_2 . Il suffit pour cela de prouver que pour tout $t > t_2$ pour lequel $\varphi(t)$ est défini, $\varphi(t)$ est à l'intérieur de C . Si ce n'était pas le cas, il existerait $t_m > t_2$ tel que pour $t_2 < t < t_m$, $\varphi(t)$ soit à l'intérieur de C , et que $\varphi(t_m) \in C$. Or $\varphi(t_m)$ ne peut être élément de l'arc de courbe $\varphi([t_1, t_2])$; si c'était le cas, il existerait $\theta \in [t_1, t_2]$ tel que $\varphi(\theta) = \varphi(t_m)$; en supposant $t_1 < \theta$ on aurait, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\varphi(\theta - \varepsilon) \in C$ et $\varphi(t_m - \varepsilon)$ élément de l'intérieur de C , ce qui est impossible puisque $\varphi(\theta - \varepsilon) = \varphi(t_m - \varepsilon)$; en supposant $t_1 = \theta$ on aurait, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\varphi(\theta - \varepsilon)$ élément de l'extérieur de C et $\varphi(t_m - \varepsilon)$ élément de l'intérieur de C , ce qui est impossible pour la même raison. De même, $\varphi(t_m)$ ne peut pas être élément du segment de droite ouvert $]x_1, x_2[$, car le vecteur $X(\varphi(t_m))$ étant dirigé vers l'intérieur de C , $\varphi(t)$ serait, pour $t_m - t$ positif et assez petit, à l'extérieur de C . Nous aboutissons à une contradiction, ce qui prouve que pour tout $t > t_2$ pour lequel $\varphi(t)$ est défini, $\varphi(t)$ est à l'intérieur de C .

Les mêmes raisonnements permettent bien sûr de traiter le cas où pour tout $y \in [x_1, x_2]$, $X(y)$ est dirigé vers l'extérieur de C (figure IV.8 b). □

5.5. Corollaire. — *Les hypothèses sont les mêmes que celles de la proposition précédente. Soient t_i ($1 \leq i \leq n$) n éléments de l'intervalle de définition de φ vérifiant $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, tels que les points $x_i = \varphi(t_i)$ soient tous éléments de S . Alors les points x_1, x_2, \dots, x_n sont placés, sur le segment de droite S , en fonction de leur indice $1, 2, \dots, n$, de manière monotone, ce qui signifie que pour tout i ($1 < i < n$) le point x_i est entre les points x_{i-1} et x_{i+1} .*

Preuve : Si un des points x_i est situé en une extrémité de S (le segment de droite S étant alors fermé en cette extrémité), $X(x_i)$ n'est pas parallèle à S . Par continuité, pour x assez voisin de x_i , $X(x)$ n'est pas parallèle à S . Nous pouvons prolonger un peu S au-delà du point x_i sans que ce segment de droite cesse d'être une section locale du flot de X . Nous pouvons ainsi nous ramener au cas où tous les points x_i sont intérieurs à S . Nous pouvons aussi, en raccourcissant un peu S si nécessaire, nous ramener au cas où ce segment de droite est fermé, les points x_i étant encore tous intérieurs à ce segment. Considérons alors l'ensemble $\{t \in [t_1, t_n]; \varphi(t) \in S\}$. S'il n'était pas fini, il existerait un élément $\theta \in [t_1, t_n]$ dont tout voisinage dans $[t_1, t_n]$ contiendrait un élément $t \in [t_1, t_n]$, tel que $t \neq \theta$ et $\varphi(t) \in S$. Le segment de droite S étant fermé, $\varphi(\theta)$ en serait un élément, et $X(\varphi(\theta))$ serait non parallèle à S ; d'après la proposition 2.4, il existerait un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [t_1, t_n]$ vérifiant $|t - \theta| < \varepsilon$, $\varphi(t)$ n'appartienne pas à S . En supposant l'ensemble $\{t \in [t_1, t_n]; \varphi(t) \in S\}$ infini, nous avons abouti à une contradiction; cet ensemble est donc fini. En ajoutant les éléments de cet ensemble à la suite finie (t_1, t_2, \dots, t_n) lorsqu'ils n'en faisaient pas déjà partie, et en réordonnant cette suite, nous pouvons nous ramener au cas où les seuls éléments $t \in [t_1, t_n]$ tels que $\varphi(t) \in S$ soient les t_i , avec $1 \leq i \leq n$. Autrement dit, nous pouvons supposer que pour tout $t \in [t_1, t_n]$ vérifiant, pour tout i ($1 \leq i \leq n$), $t \neq t_i$, $\varphi(t)$ n'appartient pas à S . Pour tout i vérifiant $2 \leq i \leq n - 1$, la proposition précédente, appliquée au triplet (t_{i-1}, t_i, t_{i+1}) , montre que sur le segment de droite S , le point x_i est placé entre les points x_{i-1} et x_{i+1} . Le résultat annoncé en découle immédiatement. \square

5.6. Proposition. — *Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^p (avec $p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension 2, x un point de Ω dont l'ensemble ω -limite $L_\omega(x)$ (resp., l'ensemble α -limite $L_\alpha(x)$) est non vide. Soit S une section locale du flot de X . Alors $L_\omega(x)$ (resp., $L_\alpha(x)$) rencontre la section locale S en au plus un point. En particulier, si $y \in L_\omega(x)$ (resp., si $y \in L_\alpha(x)$), l'orbite de y (relativement au champ de vecteurs X) rencontre S en au plus un point.*

Preuve : Nous traiterons le cas de $L_\omega(x)$ (celui de $L_\alpha(x)$ étant analogue). Supposons que $L_\omega(x)$ rencontre S en deux points distincts, y_1 et y_2 . En prolongeant un peu S si nécessaire, nous pouvons supposer les points y_1 et y_2 intérieurs à S . Soient U_1 et U_2 des voisinages ouverts disjoints, respectivement, de y_1 et de y_2 . Soit Ψ le flot réduit du champ de vecteurs X . La proposition 2.4 montre que pour $i = 1$ ou 2 , il existe un voisinage ouvert V_i de y_i , $V_i \subset U_i$, un réel $\eta_i > 0$ et une application différentiable $\theta_i : V_i \rightarrow]-\eta_i, +\eta_i[$, tels que pour tout $z \in V_i$, $\Psi(\theta_i(z), z) \in S \cap V_i$. Puisque $V_i \subset U_i$ et que U_1 et U_2 sont disjoints, V_1 et V_2 sont disjoints. En restreignant si nécessaire V_1 et V_2 , nous pouvons faire en sorte que $W_1 = S \cap V_1$ et $W_2 = S \cap V_2$ soient deux segments de droite ouverts disjoints, contenant respectivement y_1 et y_2 . Puisque y_1 et y_2 sont éléments de $L_\omega(x)$, il existe des réels t arbitrairement grands tels que $\Psi(t, x) \in V_1$, et d'autres réels t , arbitrairement grands, tels que $\Psi(t, x) \in V_2$. Nous pouvons donc construire une suite croissante $(t_n, n \in \mathbb{N})$, qui tend vers $+\infty$, telle que pour n impair, $\Psi(t_n, x) \in V_1$ et pour n pair $\Psi(t_n, x) \in V_2$. Nous pouvons aussi faire en sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} - t_n > 2 \sup(\eta_1, \eta_2)$. Posons,

pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t'_n = \begin{cases} t_n + \theta_1(\Psi(t_n, x)) & \text{si } n \text{ impair,} \\ t_n + \theta_2(\Psi(t_n, x)) & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

La suite $(t'_n, n \in \mathbb{N})$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$, car pour $i = 1$ ou 2 , θ_i est à valeurs dans $] -\eta_i, +\eta_i[$. De plus,

$$\Psi(t'_n, x) = \Psi(\theta_i(\Psi(t_n, x)), \Psi(t_n, x)) \in W_i = S \cap V_i,$$

avec $i = 1$ si n est impair et 2 si n est pair. Ce résultat contredit les conclusions du corollaire 5.5, car les points $\Psi(t'_n, x)$ ne sont pas disposés, sur le segment de droite S , de manière monotone en fonction de leur rang, puisque pour n impair ils sont éléments de W_1 , et pour n pair éléments de W_2 . En supposant que $L_\omega(x)$ rencontre S en deux points distincts, nous avons abouti à une contradiction. Ainsi, nous pouvons affirmer que $L_\omega(x)$ rencontre S en au plus un point. Enfin, la dernière assertion est conséquence de la proposition I.2.5, qui montre que si $y \in L_\omega(x)$, l'orbite de y , relativement au champ de vecteurs X , est contenue dans $L_\omega(x)$. \square

5.7. Théorème de Poincaré-Bendixson. — Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^p (avec $p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension 2, x un point de Ω dont l'ensemble ω -limite $L_\omega(x)$ (resp., l'ensemble α -limite $L_\alpha(x)$) est non vide, compact, contenu dans Ω et ne contient aucun point d'équilibre. Alors $L_\omega(x)$ (resp., $L_\alpha(x)$) est une orbite périodique.

Preuve : Nous traiterons le cas de $L_\omega(x)$ (celui de $L_\alpha(x)$ étant analogue). Soit $y \in L_\omega(x)$. La proposition I.2.5 montre que l'orbite de y est contenue dans $L_\omega(x)$. Notons Ψ le flot réduit de X . Son image étant contenue dans le compact $L_\omega(x)$, la courbe intégrale $t \mapsto \Psi(t, y)$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, et l'ensemble $L_\omega(y)$ de ses valeurs d'adhérence lorsque $t \rightarrow +\infty$ est non vide et contenu dans $L_\omega(x)$. Soit $z \in L_\omega(y)$. Puisque $L_\omega(y) \subset L_\omega(x) \subset \Omega$ et que $L_\omega(x)$ ne contient pas de point d'équilibre, $X(z)$ est défini et non nul. Il existe une section locale S du flot de X ayant le point z pour point intérieur. Comme $z \in L_\omega(y)$, la courbe intégrale $t \mapsto \Psi(t, y)$ rencontre tout voisinage de z pour une infinité de valeurs de t , aussi grandes qu'on veut. Les propositions 2.4 et 5.6 montrent que cette courbe intégrale rencontre la section locale S pour une infinité de valeurs distinctes de t , mais en un point unique. Cette courbe intégrale est donc périodique. Nous avons ainsi prouvé que pour tout $y \in L_\omega(x)$, la courbe intégrale passant par y est périodique, et contenue dans $L_\omega(x)$. Nous pouvons affirmer que $L_\omega(x)$ est une réunion d'orbites périodiques, et il ne nous reste plus qu'à prouver que $L_\omega(x)$ est en fait une seule orbite périodique. Soit γ une orbite périodique contenue dans $L_\omega(x)$, z un point de γ et S une section locale du flot de X ayant z pour point intérieur. En restreignant éventuellement S et en utilisant la proposition 2.4, nous pouvons faire en sorte qu'il existe $\eta > 0$ tel que, si $\Psi(t, x) \in S$ pour un certain réel t et si t' est un autre réel vérifiant $0 < |t' - t| \leq \eta$, alors $\Psi(t', x) \notin S$. L'ensemble $A = \{t \in \mathbb{R}^+ ; \Psi(t, x) \in S\}$ est donc fini ou dénombrable. Puisque $z \in L_\omega(x)$, la courbe intégrale $t \mapsto \Psi(t, x)$ rencontre tout voisinage de z pour une infinité de valeurs de t , aussi grandes qu'on le veut. En considérant une suite décroissante de voisinages de z d'intersection $\{z\}$ et en utilisant à nouveau la proposition 2.4, nous voyons qu'il existe une infinité d'éléments de A , formant une suite croissante $(t_n, n \in \mathbb{N})$ qui tend vers $+\infty$, telle que la suite $(\Psi(t_n, x), n \in \mathbb{N})$ converge vers z . L'ensemble A est donc dénombrable, ses éléments forment une suite croissante $(s_n, n \in \mathbb{N})$ qui tend vers $+\infty$, dont la suite $(t_n, n \in \mathbb{N})$ est extraite. La suite $(\Psi(s_n, x), n \in \mathbb{N})$, qui d'après le corollaire 5.5 est monotone sur S , et dont une suite extraite $(\Psi(t_n, x), n \in \mathbb{N})$ converge vers z , converge elle-même vers z . Mais alors la proposition 2.11 montre que x est élément du bassin d'attraction de γ , c'est-à-dire que $L_\omega(x) = \gamma$. \square

Voici quelques conséquences du théorème de Poincaré-Bendixson.

5.8. Corollaire. — Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^p (avec $p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension 2. Soit γ une orbite périodique de X .

1. Soit x un point de Ω dont l'ensemble ω -limite $L_\omega(x)$ (resp., l'ensemble α -limite $L_\alpha(x)$) est γ . Soit Ψ le flot réduit de X et d la distance associée à une norme sur \mathcal{E} . On a, si $\gamma = L_\omega(x)$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\Psi(t, x), \gamma) = 0,$$

et si $\gamma = L_\alpha(x)$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\Psi(t, x), \gamma) = 0.$$

2. Soit B le bassin d'attraction (resp., de répulsion) de l'orbite périodique γ . Alors $B - \gamma$ est une partie ouverte de \mathcal{E} .

Preuve : La partie 1 a été établie lors de la preuve du théorème de Poincaré-Bendixson. Montrons 2, en supposant par exemple que B est le bassin d'attraction de γ . Si $B = \gamma$, $B - \gamma = \emptyset$, qui est effectivement ouvert. Supposons $B - \gamma$ non vide, et soit x un point de cet ensemble. Le vecteur $X(x)$ est non nul car si ce n'était pas le cas, x serait un point d'équilibre et n'appartiendrait pas au bassin d'attraction de γ . Soit y un point de γ , et S une section locale du flot de X ayant le point y pour point intérieur. En restreignant S si nécessaire, nous pouvons supposer que l'application de retour de Poincaré g , associée à l'orbite périodique γ et au sous-espace affine qui contient S , est définie sur S . Puisque $y \in L_\omega(x)$, la proposition 2.4 montre (comme dans la dernière partie de la démonstration du théorème de Poincaré-Bendixson) que la courbe intégrale $t \mapsto \Psi(t, x)$ rencontre S pour une infinité de valeurs positives de t formant une suite croissante $(t_n, n \in \mathbb{N}^*)$ qui tend vers $+\infty$. Les points correspondants $x_n = \Psi(t_n, x)$ sont rangés, sur le segment de droite S , de manière monotone en fonction de leur indice n , et forment une suite qui converge vers y . La réunion de l'arc de courbe intégrale $\{\Psi(t, x); t_1 < t < t_2\}$ et du segment de droite fermé $[x_1, x_2]$ est une courbe fermée simple C . D'après le théorème de Jordan (VI.2.3 et VII.3.13), le complémentaire de cette courbe dans \mathcal{E} a deux composantes connexes, qui sont deux ouverts, l'intérieur de C et l'extérieur de C . L'orbite périodique γ , qui d'après la proposition 5.6 ne rencontre pas le segment de droite $[x_1, x_2]$, donc pas non plus C , est contenue dans l'une de ces composantes connexes; supposons par exemple γ contenue dans l'intérieur de C (figure IV.9 a).

Prenons un réel $\theta > t_2$. Comme dans la démonstration de la proposition 5.4, nous voyons alors que x est à l'extérieur de C , et $\Psi(\theta, x)$ à l'intérieur de C . Soit V un voisinage ouvert de $\Psi(\theta, x)$ contenu dans l'intérieur de C . Comme Ψ_θ est un difféomorphisme qui applique x sur $\Psi(\theta, x)$, $W = \Psi_\theta^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert de x . Soit W' l'intersection de W et de l'extérieur de C ; W' est aussi un voisinage ouvert de x . Pour tout $z \in W'$, $\Psi(\theta, z) \in V$. Le point z étant à l'extérieur et le point $\Psi(\theta, z)$ à l'intérieur de C , il existe $\tau \in [0, \theta]$ tel que $\Psi(\tau, z) \in C$. Si les courbes intégrales de X passant par les points x et z sont distinctes, le point $\Psi(\tau, z)$ est élément du segment de droite ouvert $]x_1, x_2[$, car C est réunion de ce segment de droite et d'un arc de la courbe intégrale de X passant par x . Dans le cas contraire, nous pouvons choisir τ de manière que $\Psi(\tau, z)$ soit égal à x_1 ou à x_2 . Dans tous les cas, nous pouvons donc supposer que $\Psi(\tau, z) \in [x_1, x_2]$. Pour tout entier $n \geq 1$ l'itérée d'ordre n , g^n , de l'application de retour de Poincaré applique le segment de droite $[x_1, x_2]$ sur le segment de droite $[x_{n+1}, x_{n+2}]$, donc $g^n(\Psi(\tau, z))$ est élément de ce segment de droite. Comme la suite $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$ converge vers y , la suite

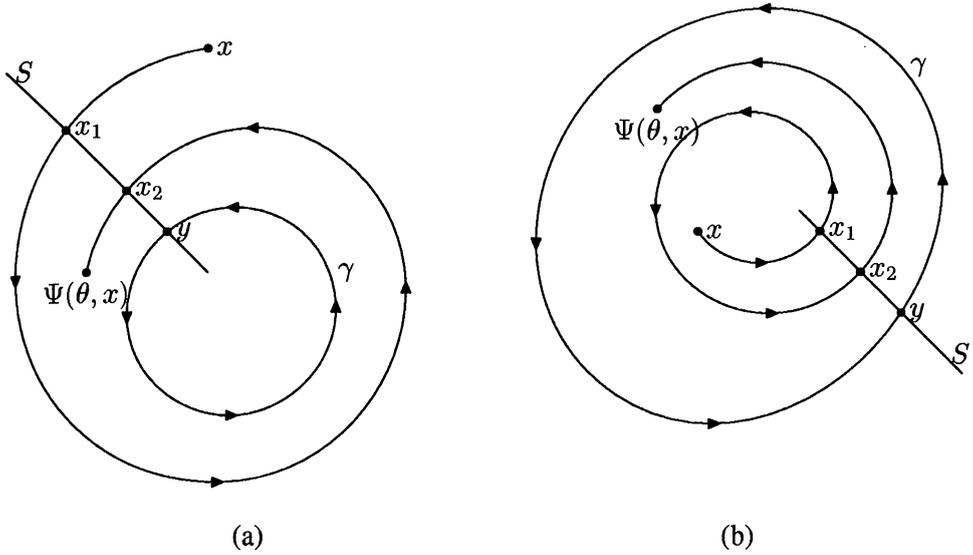


Figure IV.9. Illustration de la preuve du corollaire 5.8.

$(g^n(\Psi(\tau, z)), n \in \mathbb{N})$ converge aussi vers y . La proposition 2.11 montre alors que z est élément du bassin d'attraction de γ .

Le cas où γ est contenue dans l'extérieur de C (figure IV.9 b) est analogue; nous laissons au lecteur le soin de faire les adaptations nécessaires.

Nous avons ainsi montré que tout point de $B - \gamma$ possède un voisinage contenu dans $B - \gamma$, donc que cet ensemble est ouvert. \square

5.9. Remarques

a) Dans les hypothèses du corollaire ci-dessus, soit B le bassin d'attraction de l'orbite périodique γ , et supposons $B - \gamma$ non vide. Le fait que cet ensemble soit ouvert n'implique pas que l'orbite γ soit attractive, car son bassin d'attraction peut être situé d'un seul côté de γ , soit à l'extérieur, soit à l'intérieur de γ .

b) Le corollaire 5.8 n'est applicable qu'aux champs de vecteurs sur un ouvert du plan. Le lecteur remarquera que c'est une propriété particulière à la dimension 2 qui nous a permis d'établir ces résultats : dans le plan, lorsqu'une orbite converge vers une orbite périodique en formant une spirale qui s'enroule autour (ou à l'intérieur) de celle-ci, les orbites voisines sont contraintes de converger aussi vers cette orbite périodique, en formant des spirales emboîtées les unes dans les autres. Cette propriété ne subsiste par dans un espace de dimension supérieure à 2.

Voici encore une conséquence facile du théorème de Poincaré-Bendixson.

5.10. Corollaire. — Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^p (avec $p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension 2. Soit K une partie de Ω compacte, non vide et positivement invariante (resp., négativement invariante), c'est-à-dire, en notant Ψ le flot réduit de X , telle que pour tout $x \in K$ et tout $t \geq 0$ (resp., tout $t \leq 0$), $\Psi(t, x)$ soit défini et élément de K . Alors K contient soit au moins un point d'équilibre, soit au moins une orbite périodique.

Preuve : Soit $x \in K$. Si $X(x) = 0$, x est un point d'équilibre et il n'y a plus rien à démontrer. Dans le cas contraire, supposons par exemple K positivement invariant. L'application $t \mapsto \Psi(t, x)$ est définie pour tout $t \geq 0$, et à valeurs dans le compact K .

L'ensemble de ses valeurs d'adhérence, qui n'est autre que $L_\omega(x)$, est donc non vide, et compact puisque fermé et contenu dans le compact K . Le théorème de Poincaré-Bendixson montre alors que $L_\omega(x)$, ou bien contient au moins un point d'équilibre, ou bien est une orbite périodique. \square

Le théorème suivant donne, sous certaines hypothèses additionnelles, un résultat plus précis : l'existence dans K d'un point d'équilibre. Nous verrons plus loin (chapitre VI) que la théorie de l'indice permet d'en donner une démonstration plus simple.

5.11. Théorème. — Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^p (avec $p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension 2. Soit γ une orbite périodique. On note $\overset{\circ}{K}$ l'intérieur de γ (au sens du théorème de Jordan VII.3.13). On suppose $\overset{\circ}{K}$ contenu dans Ω . Alors $\overset{\circ}{K}$ contient au moins un point d'équilibre.

Preuve : Supposons que $\overset{\circ}{K}$ ne contienne aucun point d'équilibre. Munissons le plan \mathcal{E} d'une structure euclidienne. Nous pouvons alors parler de l'aire $A(C)$ entourée par une courbe fermée différentiable C dans \mathcal{E} . Soit Ψ le flot réduit de X . D'après la définition même de l'intérieur d'une courbe de Jordan, $K = \gamma \cup \overset{\circ}{K}$ est une partie compacte de Ω , positivement et négativement invariante, car la courbe intégrale $t \mapsto \Psi(t, x)$ passant par un point x de $\overset{\circ}{K}$ ne peut rencontrer γ , donc est entièrement contenue dans le compact K et, de ce fait, définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il existe dans K au moins une orbite périodique, la courbe γ . L'ensemble des aires entourées par des orbites périodiques contenues dans K est non vide et minoré par 0. Soit A_m sa borne inférieure.

Montrons d'abord que $A_m < A(\gamma)$. Soit $x \in \overset{\circ}{K}$. Comme K est positivement et négativement invariant, $L_\omega(x)$ et $L_\alpha(x)$ sont tous deux non vides et contenus dans K . Comme K ne contient pas de point d'équilibre, le théorème de Poincaré-Bendixson permet d'affirmer que $L_\omega(x)$ et $L_\alpha(x)$ sont des orbites périodiques. Montrons que l'une au moins de ces deux orbites est distincte de γ . Supposons par exemple que $L_\omega(x) = \gamma$. Prenons une section locale S du flot de X ayant un point de γ pour point intérieur. En procédant comme dans la démonstration de la proposition 5.4, nous pouvons construire une courbe fermée simple C , contenue dans $\overset{\circ}{K}$, formée par un segment de droite compact porté par S et par un arc de la courbe intégrale $t \mapsto \Psi(t, x)$, telle que pour tout $t < 0$, $\Psi(t, x)$ soit à l'intérieur de C . Nous pouvons alors affirmer que $L_\alpha(x)$ est distinct de γ , car contenu dans l'intérieur de C , ce qui implique $A(L_\alpha(x)) < A(\gamma)$. *A fortiori* $A_m < A(\gamma)$.

D'après la définition même de A_m , il existe une suite $(\gamma_n, n \in \mathbb{N})$ d'orbites périodiques contenues dans K , pas nécessairement deux à deux distinctes, telles que la suite des aires $A(\gamma_n)$ entourées par les courbes γ_n converge vers A_m . Prenons un point x_n sur chacune des orbites γ_n . La suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ est contenue dans le compact K , donc admet une valeur d'adhérence. En remplaçant la suite $(\gamma_n, n \in \mathbb{N})$ par une suite extraite, nous pouvons supposer que la suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ converge vers une limite $z \in K$. L'orbite γ_∞ de z est périodique, car si ce n'était pas le cas, un raisonnement identique à celui qui nous a permis de prouver que $A_m < A(\gamma)$ montrerait que $L_\alpha(z)$ et $L_\omega(z)$ sont deux orbites périodiques distinctes. Le point z serait élément du complémentaire de $L_\omega(z)$ dans son bassin d'attraction, et aussi du complémentaire de $L_\alpha(z)$ dans son bassin de répulsion. Or (corollaire 5.8) ces deux ensembles sont ouverts. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$, les points x_n seraient, pour n assez grand, éléments du bassin d'attraction de $L_\omega(z)$ et du bassin de répulsion de $L_\alpha(z)$, ce qui est impossible puisque $L_\alpha(x_n) = L_\omega(x_n) = \gamma_n$. Soit L la longueur de l'orbite périodique γ_∞ . En utilisant l'application de retour de Poincaré relative à γ_∞ , on montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon)$ tel que pour tout

$n \geq N(\varepsilon)$, l'orbite périodique γ_n soit contenue dans une bande de largeur ε entourant γ_∞ . La différence des aires $A(\gamma_\infty)$ et $A(\gamma_n)$ est de l'ordre de $L\varepsilon$. Elle tend donc vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Par suite, $A(\gamma_\infty) = A_m$.

En remplaçant γ par γ_∞ , et en répétant le même raisonnement, nous voyons qu'il existe une orbite périodique contenue à l'intérieur de γ_∞ qui entoure une aire strictement inférieure à A_m , ce qui contredit la définition même de A_m . En supposant que $\overset{\circ}{K}$ ne contient pas de point d'équilibre, nous arrivons à une contradiction. Nous avons ainsi prouvé que $\overset{\circ}{K}$ contient au moins un point d'équilibre. \square

Introduisons une définition qui nous sera utile pour formuler une dernière conséquence du théorème de Poincaré-Bendixson.

5.12. Définition. — Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^p (avec $p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie. On appelle cycle limite de X une orbite périodique γ de X qui est ensemble ω -limite, ou ensemble α -limite, d'au moins un point non élément de γ .

5.13. Théorème. — Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^p (avec $p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension 2. Soit f une intégrale première continue de X , c'est-à-dire une application continue de Ω dans un espace topologique séparé, dont la restriction à chaque orbite de X est constante. On suppose qu'il n'existe aucun ouvert non vide de Ω sur lequel f garde une valeur constante. Alors le champ de vecteurs X n'admet aucun cycle limite.

Preuve : Supposons qu'il existe un cycle limite γ de X . Soit B_a son bassin d'attraction et B_r son bassin de répulsion. Le corollaire 5.8 montre que $B_a - \gamma$ et $B_r - \gamma$ sont ouverts. Par hypothèse, l'un d'eux au moins est non vide. L'intégrale première f est constante sur γ . Comme elle est continue et constante sur chaque orbite, elle prend, en tout point de B_a et de B_r , la même valeur que sur γ . Elle est donc constante sur un ouvert non vide, contrairement à l'hypothèse. Le champ de vecteurs X n'a donc pas de cycle limite. \square

6. Exercices

Exercice IV.1. Soit X un champ de vecteurs C^∞ sur un ouvert Ω d'un espace affine de dimension finie. Soit $x \in \Omega$ tel que l'ensemble ω -limite $L_\omega(x)$ soit non vide.

- 1) On suppose $L_\omega(x)$ compact, contenu dans Ω . Montrer que $L_\omega(x)$ est connexe.
- 2) Donner un exemple montrant que si $L_\omega(x)$ n'est pas compact, il peut avoir plus d'une composante connexe.

Exercice IV.2. Soit X un champ de vecteurs C^∞ sur un ouvert Ω d'un espace affine de dimension 2. Soit $x \in \Omega$ tel que $X(x) \neq 0$ et que l'ensemble ω -limite $L_\omega(x)$ soit compact, non vide, contenu dans Ω .

- 1) Montrer que si $x \in L_\omega(x)$, $L_\omega(x)$ est une orbite périodique.
- 2) On suppose désormais que $L_\omega(x)$ n'est pas une orbite périodique. Montrer que $L_\omega(x)$ est réunion d'une famille non vide de points d'équilibre de X et d'une famille d'orbites de X non réduites à des points.
- 3) On suppose de plus que les points d'équilibre de X sont isolés. Montrer que toute orbite γ de X non réduite à un point contenue dans $L_\omega(x)$ est non périodique et que pour tout point $y \in \gamma$, $L_\alpha(y)$ et $L_\omega(y)$ sont des singletons, les points correspondants étant des points d'équilibre de X contenus dans $L_\omega(x)$.

4) Donner un exemple dans lequel $L_\omega(x)$ n'est ni un point d'équilibre, ni une orbite périodique.

Exercice IV.3. Le théorème de Poincaré-Bendixson est-il applicable sans changement à un champ de vecteurs C^∞ défini sur une surface compacte, par exemple un tore \mathbb{T}^2 ?

Exercice IV.4. On considère l'équation différentielle dans le plan (coordonnées (x, y)):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x^2) - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y(1 - y^2). \end{cases}$$

1) Déterminer les points d'équilibre de cette équation et indiquer leur nature.

2) On pose $x^2 + y^2 = r^2$. Calculer $\frac{dr}{dt}$ en fonction des coordonnées polaires r et θ . En déduire que $\frac{dr}{dt}$ est strictement positif si $0 < r < 1$, et strictement négatif si $r > \sqrt{2}$.

3) En utilisant le théorème de Poincaré-Bendixson, montrer que cette équation différentielle possède une orbite périodique contenue dans la couronne formée par les points dont la distance à l'origine est comprise entre 1 et $\sqrt{2}$.

Exercice IV.5. On considère l'équation différentielle dans \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (1 - x^2 - y^2)x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + (1 - x^2 - y^2)y. \end{cases}$$

Montrer qu'elle admet une orbite périodique unique γ . Calculer l'application de Poincaré pour cette orbite et prouver qu'elle est attractive. [Indication : utiliser des coordonnées polaires.]

Exercice IV.6. Soit p un point d'équilibre attractif d'un système dynamique différentiable. Montrer que p possède un voisinage W tel que pour tout $x \in W$, $x \neq p$, et tout $t > 0$, $\Phi_t(x)$ existe et n'est pas égal à x (Φ désigne le flot réduit du système). En d'autres termes, les orbites passant, pour $t = 0$, par un point x de W autre que p , ne sont pas périodiques et sont définies pour tout $t \geq 0$. Montrer que lorsqu'on remplace p par une orbite périodique attractive γ , la même propriété reste vraie.

Exercice IV.7. On considère l'équation différentielle linéaire

$$\varphi'(t) = A(\varphi(t)),$$

où $A \in \mathcal{L}(E, E)$, E étant un espace vectoriel réel de dimension finie. Montrer que cette équation ne peut pas avoir d'orbite périodique attractive.

7. Solutions

Solution IV.1.

1) Supposons que $L_\omega(x)$ ait au moins deux composantes connexes, et soit K l'une de celles-ci. Soit U un ouvert connexe contenant K , d'adhérence compacte ne rencontrant pas les autres composantes connexes de $L_\omega(c)$ (l'existence d'un tel ouvert est facile à établir en recouvrant K par un nombre fini de boules ouvertes centrées sur des points de K , dont les adhérences ne rencontrent pas les autres composantes connexes de $L_\omega(x)$).

La courbe intégrale $t \mapsto \varphi(t)$ qui passe par le point x pour $t = 0$ rencontre tout voisinage d'un point de K et tout voisinage d'un point d'une autre composante connexe de $L_\omega(x)$ pour une infinité de valeurs de t , aussi grandes qu'on veut. Cette courbe traverse donc la frontière $\text{Fr } U$ pour une infinité de valeurs t_n de t , formant une suite croissante qui tend vers $+\infty$. La suite $(\varphi(t_n), n \in \mathbb{N})$, contenue dans le compact $\text{Fr } U$, admet une valeur d'adhérence, qui est élément de $\text{Fr } U$ et aussi de $L_\omega(x)$. Mais cela est impossible car $L_\omega(x) \cap \text{Fr } U = \emptyset$. Donc $L_\omega(x)$, supposé non vide et compact, est connexe.

2) Considérons par exemple un champ de vecteurs dans le plan (coordonnées x, y) dont les courbes intégrales contenues dans la bande $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < x < 1\}$ sont des spirales emboîtées les unes dans les autres, qui s'enroulent autour de l'origine, tendent vers l'origine lorsque $t \rightarrow -\infty$, et s'écrasent contre les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Pour tout point $z = (x, y)$ autre que l'origine et dont la composante x vérifie $-1 < x < 1$, $L_\omega(z)$ est réunion des deux droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$; cet ensemble a donc deux composantes connexes.

Solution IV.2.

1) Puisque $X(x) \neq 0$, il existe une section locale S du flot de X ayant x pour point intérieur. La proposition 5.6 montre que $L_\omega(x)$ rencontre S en au plus un point. Comme $x \in L_\omega(x)$, $L_\omega(x)$ rencontre S en un point unique, le point x . La courbe intégrale $t \mapsto \varphi(t)$ du champ de vecteurs X qui passe par x pour $t = 0$ est contenue dans $L_\omega(x)$ (car $x \in L_\omega(x)$) et rencontre tout voisinage de x pour une infinité de valeurs de t . La proposition 2.4 montre alors que cette courbe rencontre S pour une infinité de valeurs de t . Comme ces rencontres ne peuvent avoir lieu qu'au point x , cette courbe intégrale est périodique.

2) Si $L_\omega(x)$, supposé compact et non vide, n'est pas une orbite périodique, le théorème de Poincaré-Bendixson montre que $L_\omega(x)$ contient des points d'équilibre de X . Si $y \in L_\omega(x)$ est un élément de $L_\omega(x)$ qui n'est pas un point d'équilibre, toute l'orbite du point y (non réduite à un point puisque y n'est pas point d'équilibre) est contenue dans $L_\omega(x)$ (proposition I.2.5).

3) Soit $y \in \gamma$. Comme $L_\omega(x)$ est compact, $L_\alpha(y)$ et $L_\omega(y)$ sont non vides et contenus dans $L_\omega(x)$. Soit $z \in L_\alpha(y)$. Si $X(z)$ était non nul, il existerait une section locale S du flot de X ayant z pour point intérieur; la proposition 2.4 montrerait que la courbe intégrale de X passant par y rencontre S pour une infinité de valeurs de t , négatives et aussi grandes en valeur absolue qu'on le veut; cette courbe intégrale étant contenue dans $L_\omega(x)$, la proposition 5.6 montrerait que cette rencontre a lieu en un point unique, le point z ; la courbe intégrale passant par y passerait aussi par z et serait périodique. Mais lors de la démonstration du théorème de Poincaré-Bendixson, nous avons vu que si $L_\omega(x)$ contient une orbite périodique, $L_\omega(x)$ est égal à cette orbite périodique. Comme nous avons supposé que $L_\omega(x)$ n'est pas une orbite périodique, nous voyons que $X(z) = 0$. Tous les points de $L_\alpha(y)$ sont donc des points d'équilibre de X . Il en est de même des points de $L_\omega(y)$. Mais d'après l'exercice IV.1, $L_\alpha(y)$ et $L_\omega(y)$ sont connexes. Comme nous avons supposé les points d'équilibre de X isolés, $L_\alpha(y)$ et $L_\omega(y)$ sont des singletons, les points correspondants étant des points d'équilibre de X contenus dans $L_\omega(x)$. Remarquons aussi qu'étant compact, $L_\omega(x)$ ne contient qu'un nombre fini de points d'équilibre de X .

4) Dans le plan (coordonnées (x, y)), posons

$$H(x, y) = xy + \frac{x^3 + y^3}{3},$$

et considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial y} + kH(x, y) \frac{\partial H(x, y)}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + kH(x, y) \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, \end{cases}$$

où k est une constante. Pour $k = 0$, cette équation a été étudiée au paragraphe III.7.13; son portrait de phases est représenté sur la figure III.19. Calculons $\frac{dH}{dt}$. Nous obtenons

$$\frac{dH}{dt} = kH \left(\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right).$$

Nous voyons que $\frac{dH}{dt}$ est nul sur la courbe d'équation $H = 0$ et au point de coordonnées $(-1, -1)$ (qui est le seul point où H n'est pas nul et où les deux dérivées partielles de H sont nulles). Nous voyons donc que lorsque $k \neq 0$, l'équation différentielle considérée a les mêmes points d'équilibre que dans le cas particulier où $k = 0$; ces points sont l'origine et le point de coordonnées $(-1, -1)$. De plus, la cubique d'équation $H(x, y) = 0$ est une réunion d'orbites de cette équation différentielle, toujours comme dans le cas particulier où $k = 0$. Lorsque $k < 0$ (resp., lorsque $k > 0$) la courbe fermée simple formée par la partie de la courbe d'équation $H(x, y) = 0$ contenue dans le quadrant $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 0, y \leq 0\}$ est l'ensemble ω -limite (resp., α -limite) de tout point intérieur à cette courbe autre que le point d'équilibre $(-1, -1)$. Cette courbe fermée simple n'est pas une orbite périodique; c'est la réunion du point d'équilibre $(0, 0)$ et de l'arc de courbe commun à la courbe instable et à la courbe stable de ce point.

Solution IV.3. Remarquons d'abord que sur un tore \mathbb{T}^2 , il existe des courbes fermées simples, par exemple les parallèles, ou les méridiens, dont le complémentaire dans \mathbb{T}^2 est connexe; le théorème de Jordan ne s'applique donc pas aux courbes fermées simples sur \mathbb{T}^2 . Comme ce théorème est un ingrédient essentiel de la preuve du théorème de Poincaré-Bendixson, on peut légitimement penser que ce dernier théorème n'est pas applicable aux champs de vecteurs sur \mathbb{T}^2 . L'exemple suivant montre que c'est bien le cas. Soit (θ_1, θ_2) un système de coordonnées angulaires sur \mathbb{T}^2 , et considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} = k_1, \\ \frac{d\theta_2}{dt} = k_2, \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes non nulles. Si le rapport k_1/k_2 est irrationnel, chaque orbite de cette équation est dense sur le tore. Par suite, l'ensemble α -limite (ou l'ensemble ω -limite) de chaque point de \mathbb{T}^2 est \mathbb{T}^2 entier.

Solution IV.4.

1) L'origine est l'unique point d'équilibre de cette équation, car c'est l'unique point commun aux deux cubiques d'équations $y = x - x^3$ et $x = -y + y^3$. La matrice du système linéarisé en ce point a deux valeurs propres complexes conjuguées de partie réelle positive. L'origine est donc un foyer répulsif.

2) Nous avons

$$\begin{aligned} r \frac{dr}{dt} &= x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - (x^4 + y^4) \\ &= r^2 - r^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ &= r^2 - r^4 \left(1 - \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \right). \end{aligned}$$

Puisque $\sin^2(2\theta)$ est toujours compris entre 0 et 1, nous avons

$$r^2 - r^4 \leq r \frac{dr}{dt} \leq r^2 - \frac{r^4}{2}.$$

Nous voyons que pour $0 < r < 1$, $\frac{dr}{dt} > 0$, et que pour $r > \sqrt{2}$, $\frac{dr}{dt} < 0$.

3) Considérons deux cercles centrés sur l'origine, de rayons $1 - \varepsilon$ et $\sqrt{2} + \varepsilon$, avec $0 < \varepsilon < 1$. La couronne ayant pour frontière la réunion de ces deux cercles est compacte et positivement invariante par le flot de l'équation différentielle, car sur sa frontière, le champ de vecteurs correspondant est dirigé vers l'intérieur. Par suite, l'ensemble ω -limite de tout point de cette couronne est non vide et contenu dans cette couronne. Comme de plus cette couronne ne contient pas de point d'équilibre, le théorème de Poincaré-Bendixson montre que cet ensemble ω -limite est une orbite périodique.

Solution IV.5. L'équation satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité, et l'origine est un point d'équilibre. Pour étudier les solutions autres que le point d'équilibre, on peut poser

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \text{avec } r > 0,$$

car on est sûr que pour tout t , r restera > 0 . On calcule alors

$$\begin{aligned} \cos \theta \frac{dx}{dt} + \sin \theta \frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \\ -\sin \theta \frac{dx}{dt} + \cos \theta \frac{dy}{dt} &= r \frac{d\theta}{dt} = r. \end{aligned}$$

On voit donc que r et θ sont solutions des équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r(1 - r^2), \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1. \end{aligned}$$

L'équation satisfaite par θ a pour solution

$$\theta(t) = \theta(0) + t.$$

L'équation satisfaite par r admet, sur la demi-droite $r > 0$, un point d'équilibre unique, $r = 1$. Ce point d'équilibre est ω -stable et attractif car :

- pour $0 < r < 1$, $\frac{dr}{dt} > 0$,
- pour $1 < r$, $\frac{dr}{dt} < 0$.

Le point d'équilibre $r = 1$ a donc pour bassin attractif la demi-droite $r > 0$ entière : toutes les solutions $t \mapsto r(t)$ vérifiant une donnée de Cauchy $r(0) > 0$ sont définies pour tout $t > 0$ et vérifient $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 1$.

Au point d'équilibre $r = 1$ de l'équation satisfaite par r , correspond une solution périodique du système initial,

$$x(t) = \cos(\theta(0) + t), \quad y(t) = \sin(\theta(0) + t).$$

L'orbite correspondante γ , périodique de période 2π , est le cercle de centre l'origine et de rayon 1. Elle est ω -stable et attractive, et a pour bassin attractif $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. En effet, pour toute solutions $t \mapsto (x(t), y(t))$ autre que le point d'équilibre, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d((x(t), y(t)), \gamma) = \lim_{t \rightarrow +\infty} |r(t) - 1| = 0,$$

et, de plus, $|r(t) - 1|$ est une fonction décroissante de t . Il n'y a donc pas d'autre orbite périodique.

La détermination de l'application de Poincaré nécessite la résolution de l'équation différentielle satisfaite par r . En posant $u = r^2$, nous obtenons

$$\frac{du}{u(1-u)} = 2dt,$$

d'où nous déduisons

$$\ln \left| \frac{u}{1-u} \right| = \ln \left| \frac{u_0}{1-u_0} \right| + 2t.$$

En remarquant que $r(t) - 1$ reste toujours de même signe que $r(0) - 1$, nous en déduisons la solution

$$r(t) = \frac{r(0)e^t}{\sqrt{1 + (r(0))^2(e^{2t} - 1)}}.$$

Prenons pour section de Poincaré le demi-axe ($x > 0, y = 0$). L'application de Poincaré est l'application qui associe, à un point d'abscisse $x > 0$ de ce demi-axe, le point où la courbe intégrale qui passe par ce point traverse de nouveau ce demi-axe pour la première fois lorsque t croît. L'expression $\theta(t) = \theta(0) + t$ montre que l'application temps de retour est constante, égale à 2π . L'application de Poincaré g s'obtient donc en remplaçant, dans l'expression de $r(t)$ ci-dessus, $r(t)$ par $g(x)$, $r(0)$ par x et t par 2π :

$$g(x) = \frac{xe^{2\pi}}{\sqrt{1 + x^2(e^{4\pi} - 1)}}.$$

Solution IV.6. D'après la définition d'un point d'équilibre attractif, il existe un voisinage W de p tel que pour tout $x \in W$ et tout $t \geq 0$, $\Phi_t(x)$ soit défini et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(x) = p$. Il suffit donc de montrer que si $x \neq p$, alors pour tout $t > 0$, $\Phi_t(x) \neq x$.

Supposons qu'il existe $T > 0$ tel que $\Phi_T(x) = x$. L'orbite $\mathcal{O}(x)$ de x serait alors périodique de période T , donc compacte. D'après le théorème d'existence et d'unicité, p n'est pas élément de cette orbite; donc $d(p, \mathcal{O}(x)) > 0$. Cela est en contradiction avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\Phi_t(x), p) = 0$, puisque pour tout $t > 0$, $\Phi_t(x)$ est élément de $\mathcal{O}(x)$.

Remplaçons maintenant p par une orbite périodique attractive γ , et montrons que la même propriété reste vraie. Plus précisément, montrons qu'il existe un voisinage W de γ tel que, pour tout $x \in W$, $x \notin \gamma$, et tout $t > 0$, $\Phi_t(x)$ soit défini et $\neq x$.

D'après la définition d'une orbite périodique attractive, il existe un voisinage W de γ tel que, pour tout $x \in W$ et tout $t \geq 0$, $\Phi_t(x)$ soit défini et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\Phi_t(x), \gamma) = 0$.

Il reste seulement à démontrer que si $x \notin \gamma$, alors $\Phi_t(x) \neq x$. Soit donc $x \in W$, $x \notin \gamma$, et supposons qu'il existe $T > 0$ tel que $\Phi_T(x) = x$. L'orbite $\mathcal{O}(x)$ du point x est alors périodique, donc compacte. Elle n'est pas confondue avec γ puisque $x \in \mathcal{O}(x)$ et $x \notin \gamma$.

D'après le théorème d'existence et d'unicité, elle est disjointe de γ , donc $d(\mathcal{O}(x), \gamma) > 0$. Cela est en contradiction avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\Phi_t(x), \gamma) = 0$, puisque pour tout $t > 0$, $\Phi_t(x)$ est élément de $\mathcal{O}(x)$.

Solution IV.7. Supposons qu'il existe une orbite périodique attractive γ . Nous allons montrer que pour tout voisinage W de γ , il existe un point $x \in W$, $x \notin \gamma$, dont l'orbite est périodique. D'après l'exercice IV.6, ceci serait en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle γ est périodique et attractive, et nous aurons prouvé le résultat désiré.

Soit W un voisinage de γ . Il existe $\epsilon > 0$ tel que tout élément x de E vérifiant $d(x, \gamma) < \epsilon$ soit élément de W . Soit a un point de γ ; nécessairement $a \neq 0$, car γ est une orbite périodique, pas un point d'équilibre. De plus, a n'est pas vecteur propre de A . En effet si

a était vecteur propre de A , associé à la valeur propre λ , la solution de l'équation passant par a pour $t = 0$ serait $x(t) = \exp(tA)(a) = e^{\lambda t}a$, elle ne serait pas périodique. Le vecteur $A(a)$, tangent à l'orbite \mathcal{O} au point a , n'est pas colinéaire à a . Il existe donc un point x situé sur la demi-droite joignant l'origine au point a , non élément de γ , et vérifiant $\|x - a\| < \epsilon$. Le point x est élément de W , et il est de la forme $x = ka$, où k est un réel strictement positif, vérifiant $\|x - a\| = |k - 1| \|a\| < \epsilon$. La solution de l'équation passant par x pour $t = 0$ est

$$\psi(t) = \exp(tA)(x) = \exp(tA)(ka) = k \exp(tA)(a) = k\varphi(t),$$

où nous avons noté $t \mapsto \varphi(t)$ la solution de l'équation qui passe par a pour $t = 0$. Comme φ est périodique, ψ l'est aussi. Nous avons abouti à une contradiction, comme annoncé.

Chapitre V

Linéarisation et conjugaison

Nous revenons dans ce chapitre sur une question déjà abordée au chapitre III : la comparaison des portraits de phases, au voisinage d'un point d'équilibre isolé, d'un système dynamique différentiable et de son linéarisé. Mais alors que les principaux résultats obtenus au chapitre III concernaient les champs de vecteurs sur un ouvert du plan, nous supposons maintenant l'espace des phases de dimension finie quelconque; nous donnons un sens précis à la comparaison de deux portraits de phases en introduisant la notion de conjugaison (topologique ou différentiable), et nous traitons de ce point de vue les systèmes dynamiques à temps discret ou à temps continu. Les démonstrations que nous présentons suivent de près celles du beau livre de M. C. Irwin [37].

Nous établissons le théorème de Hartman et Grobman pour le voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique, d'abord pour un système à temps discret (théorème 5.4) puis pour un système à temps continu (théorème 6.3). Nous définissons les ensembles stable et instable d'un point d'équilibre. Nous prouvons (théorèmes 7.11 et 7.13) que lorsque ce point est hyperbolique, ces ensembles sont des variétés différentiables, et nous déterminons leur espace tangent au point d'équilibre. Ces résultats sont rapprochés de ceux obtenus au chapitre III pour les champs de vecteurs sur un ouvert du plan. Finalement, nous donnons quelques brèves indications sur la conjugaison différentiable (théorèmes de Sternberg 8.1 et 8.2) et sur les variétés stable et instable d'une orbite périodique hyperbolique.

1. Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre

1.1. Présentation du problème. — Considérons un système dynamique $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, l'ensemble des temps Θ pouvant être \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ , \mathbb{Z} ou \mathbb{N} . Nous supposons chaque application φ_t (avec $t \in \Theta$) définie sur un ouvert U_t de Ω , différentiable et de classe C^p , avec $p \geq 2$.

Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre du système. Nous supposons que l'ensemble des $t \in \Theta$ tels que $\varphi_t(a)$ soit défini est Θ tout entier. Cette hypothèse est peu restrictive en pratique : d'après la proposition III.1.2, elle est satisfaite si le système dynamique considéré est à temps discret et si a est élément de l'ouvert U_1 sur lequel est défini le générateur φ_1 du système; d'après la proposition III.1.3, elle est satisfaite aussi si le système dynamique considéré est associé à un champ de vecteurs X de classe C^p sur Ω .

Nous avons, pour tout $t \in \Theta$,

$$\varphi_t(a) = a.$$

En notant $D\varphi_t(a)$ la différentielle de φ_t au point a nous pouvons écrire, pour tout $x \in U_t$,
 $\varphi_t(x) = \varphi_t(a) + D\varphi_t(a)(x - a) + \eta_t(x - a) = a + D\varphi_t(a)(x - a) + \eta_t(x - a)$, (*)
avec

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{\eta_t(x - a)}{\|x - a\|} = 0.$$

Afin d'étudier les propriétés du système dynamique $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ au voisinage du point d'équilibre a , il peut sembler naturel de négliger en première approximation,

dans l'expression de $\varphi_t(x)$ donnée ci-dessus (*), le terme $\eta_t(x - a)$ auprès du terme $D\varphi_t(a)(x - a)$. C'est l'idée de base de la méthode de linéarisation. Pour rendre légitime l'emploi de cette méthode, nous devons vérifier plusieurs choses :

- nous devons d'abord nous assurer que le système formé, pour t parcourant Θ , par les expressions approchées des $\varphi_t(x)$, lorsqu'on néglige $\eta_t(x)$, est bien un système dynamique, appelé *système linéarisé*; cette vérification est assez facile;
- nous devons ensuite prouver que le comportement du système linéarisé, au voisinage du point a , est qualitativement identique, en un sens à préciser, à celui du système dynamique initial; comme nous le verrons, c'est assez difficile, et cela nécessite certaines hypothèses, d'autant plus restrictives que l'on voudra donner un sens plus précis à la notion de comportement qualitativement identique.

La proposition suivante montre que le système linéarisé est bien un système dynamique.

1.2. Proposition. — Soit $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ un système dynamique sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, l'ensemble des temps Θ pouvant être \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ , \mathbb{Z} ou \mathbb{N} . On suppose chaque application φ_t (avec $t \in \Theta$) définie sur un ouvert U_t de Ω , différentiable et de classe C^p , avec $p \geq 2$. Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre du système. On suppose que pour tout $t \in \Theta$, a est élément de U_t , et on note $D\varphi_t(a)$ la différentielle de φ_t au point a . La famille d'applications linéaires de l'espace vectoriel E associé à l'espace affine \mathcal{E} dans lui-même

$$\{ D\varphi_t(a) ; t \in \Theta \}$$

est un système dynamique sur E , appelé *système linéarisé au point a du système* $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$.

Preuve : Soient t et s deux éléments de Θ . Puisque $\Theta = \mathbb{R}$, \mathbb{R}^+ , \mathbb{Z} ou \mathbb{N} , $t + s$ est élément de Θ . Les applications linéaires $D\varphi_t(a)$, $D\varphi_s(a)$ et $D\varphi_{t+s}(a)$ sont définies sur E tout entier, et à valeurs dans E . L'ouvert $U_t \cap U_s \cap U_{t+s}$ est non vide puisque a en est un élément; pour tout élément x de cet ouvert, nous savons (définitions I.1.2 ou I.1.4) que $\varphi_s(x) \in U_t$ et que

$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t \circ \varphi_s(x).$$

Différentions les deux membres de cette égalité :

$$D\varphi_{t+s}(x) = D\varphi_t(\varphi_s(x)) \circ D\varphi_s(x).$$

Faisons maintenant $x = a$. Compte tenu de $\varphi_s(a) = a$, nous obtenons

$$D\varphi_{t+s}(a) = D\varphi_t(a) \circ D\varphi_s(a).$$

D'après la définition I.1.2 si le système considéré est à temps continu, ou la définition I.1.4 s'il est à temps discret, cette égalité prouve que $\{ D\varphi_t(a) ; t \in \Theta \}$ est bien un système dynamique sur E . □

1.3. Remarque. — Dans les hypothèses de la proposition ci-dessus, le système dynamique initial $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ admet le point a pour point d'équilibre, et le système linéarisé $\{ D\varphi_t(a) ; t \in \Theta \}$ admet l'origine pour point d'équilibre. Cela vient du fait qu'en linéarisant, nous avons identifié l'espace affine \mathcal{E} à l'espace vectoriel associé E en prenant le point a pour origine.

La proposition suivante traite du générateur, ou du générateur infinitésimal, du système dynamique linéarisé.

1.4. Proposition. — Les hypothèses et notations sont celles de la proposition 1.2.

1. On suppose le système dynamique $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ à temps discret (autrement dit $\Theta = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{N}). Le générateur du système linéarisé $\{D\varphi_t(a) ; t \in \Theta\}$ est $D\varphi_1(a)$, différentielle au point a du générateur φ_1 du système initial.
2. On suppose que le système dynamique $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ est à temps continu et a pour générateur infinitésimal un champ de vecteurs X de classe C^p , défini sur l'ouvert Ω de \mathcal{E} ; on a donc $\Theta = \mathbb{R}$. Sur l'espace vectoriel E , le système dynamique linéarisé $\{D\varphi_t(a) ; t \in \mathbb{R}\}$ admet pour générateur infinitésimal le champ de vecteurs linéaire $DX(a)$, différentielle au point a du générateur infinitésimal X du système initial.

Preuve :

1. On a $D\varphi_2(a) = D\varphi_1(a) \circ D\varphi_1(a) = (D\varphi_1(a))^2$. De proche en proche on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D\varphi_n(a) = (D\varphi_1(a))^n$. Si $\Theta = \mathbb{Z}$, on a $\varphi_{-1} = \varphi_1^{-1}$ donc $D\varphi_{-1}(a) = (D\varphi_1(a))^{-1}$; on en déduit de proche en proche, comme ci-dessus, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D\varphi_{-n}(a) = (D\varphi_{-1}(a))^n = (D\varphi_1(a))^{-n}$.

2. Soit Φ le flot réduit du champ de vecteurs X . Le système dynamique s'exprime, au moyen de Ψ , sous la forme $\varphi_t(x) = \Phi(t, x)$. Nous avons, d'après la définition du flot réduit (voir II.4.11)

$$\left. \frac{d}{dt} \Phi(t, x) \right|_{t=t_0} = X(\Phi(t_0, x)).$$

D'autre part, pour tout $u \in E$,

$$D\varphi_t(a)(u) = D_2\Phi(t, a)(u) = \left. \frac{d}{ds} \left(\Phi(t, a + su) \right) \right|_{s=0},$$

où nous avons noté $D_2\Phi(t, a)$ la différentielle partielle de Φ par rapport à sa seconde variable, au point (t, a) . Nous avons donc

$$\left. \frac{d}{dt} \left(D\varphi_t(a)(u) \right) \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{d}{ds} \Phi(t, a + su) \right|_{s=0} \right) \right|_{t=t_0}.$$

Puisque Φ est de classe C^p , avec $p \geq 2$, nous pouvons échanger l'ordre des deux dérivations par rapport à s et à t , et écrire

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \left(D\varphi_t(a)(u) \right) \right|_{t=t_0} &= \left. \frac{d}{ds} \left(\left. \frac{d}{dt} \Phi(t, a + su) \right|_{t=t_0} \right) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds} X \left(\Phi(t_0, a + su) \right) \right|_{s=0} \\ &= DX(\Phi(t_0, a)) \circ D_2\Phi(t_0, a)(u) \\ &= DX(a)(D\varphi_{t_0}(a)(u)), \end{aligned}$$

puisque $\Phi(t_0, a) = a$. En particulier, pour $t_0 = 0$, nous avons

$$\left. \frac{d}{dt} \left(D\varphi_t(a)(u) \right) \right|_{t=0} = DX(a)(u).$$

Le système dynamique linéarisé $\{D\varphi_t(a) ; t \in \mathbb{R}\}$ a donc pour générateur infinitésimal, d'après la définition I.3.3, le champ de vecteurs linéaire $DX(a)$. \square

2. Conjugaison topologique ou différentiable

2.1. Définition. — Soient $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ et $\{\psi_t ; t \in \Theta\}$ deux systèmes dynamiques ayant même ensemble des temps Θ (celui-ci pouvant être \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ ,

\mathbb{Z} ou \mathbb{N}), le premier défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} et le second sur un ouvert Υ d'un espace affine \mathcal{F} , les espaces \mathcal{E} et \mathcal{F} étant de même dimension finie.

1. On dit que ces deux systèmes dynamiques sont *topologiquement conjugués* s'il existe un homéomorphisme $h : \Omega \rightarrow \Upsilon$ tel que, pour tout $t \in \Theta$,

$$h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h. \quad (*)$$

2. On dit que ces deux systèmes dynamiques sont *C^p -différentiablement conjugués* (où p est un entier ≥ 1) s'ils sont topologiquement conjugués et si, parmi les homéomorphismes h qui vérifient la relation (*), il en existe au moins un qui est un difféomorphisme de classe C^p .

2.2. Commentaires

a) Explicitons la signification de la relation (*) ci-dessus : pour tout $t \in \Theta$ et tout $x \in \Omega$, $\varphi_t(x)$ est défini si et seulement si $\psi_t(h(x))$ est défini, et lorsque c'est le cas,

$$h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x)).$$

b) L'application h étant une bijection de Ω sur Υ , la relation (*) est équivalente à

$$h \circ \varphi_t \circ h^{-1} = \psi_t, \quad \text{ou à} \quad \varphi_t = h^{-1} \circ \psi_t \circ h.$$

On peut donc dire que deux systèmes dynamiques sont topologiquement conjugués (resp., C^p -différentiablement conjugués) si l'un est image de l'autre par un homéomorphisme (resp., par un difféomorphisme de classe C^p). Cela montre évidemment que la conjugaison topologique et la conjugaison C^p -différentiable sont des relations d'équivalence.

La proposition suivante indique une condition nécessaire et suffisante pour que deux systèmes dynamiques à temps discret soient topologiquement (ou différemment) conjugués.

2.3. Proposition. — Soient $\{\varphi_n ; n \in \Theta\}$ et $\{\psi_n ; n \in \Theta\}$ deux systèmes dynamiques à temps discret, dont l'ensemble des temps est $\Theta = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{N} , le premier défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} et le second sur un ouvert Υ d'un espace affine \mathcal{F} , les espaces \mathcal{E} et \mathcal{F} étant de même dimension finie. Soit φ_1 le générateur du premier système et ψ_1 le générateur du second. Les deux systèmes dynamiques sont topologiquement conjugués (resp., C^p -différentiablement conjugués, avec p entier ≥ 1) si et seulement s'il existe un homéomorphisme (resp., un C^p -difféomorphisme) $h : \Omega \rightarrow \Upsilon$ tel que

$$h \circ \varphi_1 = \psi_1 \circ h.$$

Preuve : La condition indiquée est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Supposons qu'il existe un homéomorphisme (resp., un C^p -difféomorphisme) $h : \Omega \rightarrow \Upsilon$ tel que

$$h \circ \varphi_1 = \psi_1 \circ h. \quad (*)$$

Nous avons alors

$$h \circ \varphi_2 = h \circ \varphi_1 \circ \varphi_1 = \psi_1 \circ h \circ \varphi_1 = \psi_1 \circ \psi_1 \circ h = \psi_2 \circ h.$$

De même, nous montrerions aisément par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$h \circ \varphi_n = \psi_n \circ h. \quad (**)$$

Si $\Theta = \mathbb{N}$, cela suffit pour établir le résultat annoncé. Si $\Theta = \mathbb{Z}$, φ_1 et ψ_1 sont des bijections dont les inverses sont φ_{-1} et ψ_{-1} , respectivement. En composant les deux membres de (*) avec ψ_{-1} à droite et φ_{-1} à gauche, nous obtenons

$$h \circ \varphi_{-1} = \psi_{-1} \circ h.$$

Comme ci-dessus, nous en déduisons que l'égalité (**) est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$. \square

La proposition suivante indique une condition nécessaire et suffisante pour que deux systèmes dynamiques à temps continu, ayant pour générateurs infinitésimaux des champs de vecteurs localement lipschitziens, soient C^p -différentiablement conjugués.

2.4. Proposition. — Soient X et Y deux champs de vecteurs localement lipschitziens définis, le premier sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} , le second sur un ouvert Υ d'un espace affine \mathcal{F} , les espaces \mathcal{E} et \mathcal{F} étant de même dimension finie. Les systèmes dynamiques formés par les flots réduits de ces deux champs de vecteurs sont C^p -différentiablement conjugués (avec $p \geq 2$) si et seulement s'il existe un C^p -difféomorphisme $h : \Omega \rightarrow \Upsilon$ tel que $h_*X = Y$ (notation de la proposition II.5.1), c'est-à-dire tel que, pour tout $x \in \Omega$,

$$Dh(x)(X(x)) = Y(h(x)).$$

Preuve : Soient Φ et Ψ les flots réduits de X et de Y , respectivement. Si les systèmes dynamiques constitués par Φ et Ψ sont C^p -différentiablement conjugués, il existe un C^p -difféomorphisme $h : \Omega \rightarrow \Upsilon$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$h \circ \Phi_t = \Psi_t \circ h, \quad (*)$$

ou en notant x un point de Ω tel que $\Phi_t(x)$ soit défini,

$$h(\Phi_t(x)) = \Psi_t(h(x)).$$

Dérivons par rapport à t ; compte tenu de

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = X(\Phi_t(x)), \quad \frac{d}{dt}\Psi_t(y) = Y(\Psi_t(y)),$$

nous obtenons

$$Dh(X(\Phi_t(x))) = Y(\Psi_t(h(x))).$$

En particulier, pour $t = 0$, nous avons

$$Dh(X(x)) = Y(h(x)). \quad (**)$$

Réciproquement, supposons qu'il existe un C^p -difféomorphisme $h : \Omega \rightarrow \Upsilon$ vérifiant la relation (**) ci-dessus pour tout $x \in \Omega$. La proposition II.5.1 et le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz nous permettent d'affirmer que les flots réduits de X et de Y vérifient, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la relation (*). \square

2.5. Remarque. — Faute de pouvoir définir l'image directe d'un champ de vecteurs par un homéomorphisme, il n'est pas possible de formuler une condition nécessaire et suffisante du même genre que celle de la proposition précédente pour que les systèmes dynamiques constitués par les flots réduits de deux champs de vecteurs soient topologiquement conjugués.

Afin de donner un caractère local à la notion de conjugaison (topologique ou différentiable), nous allons définir la restriction d'un système dynamique à une partie de son ensemble de définition. Cela fait l'objet des propositions suivantes.

2.6. Proposition. — Soit $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ un système dynamique sur un ensemble Ω , paramétré par un ensemble de temps Θ pouvant être \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ , \mathbb{Z} ou \mathbb{N} . Pour chaque $t \in \Theta$, notons U_t la partie de Ω sur laquelle l'application φ_t est définie. Soit W une partie non vide de Ω . Pour chaque $t \in \Theta$, posons

$$\tilde{U}_t = \{x \in W ; \forall \theta \in \Theta \text{ compris entre } 0 \text{ et } t, x \in U_\theta \text{ et } \varphi_\theta(x) \in W\};$$

(nous convenons de dire que $\theta \in \Theta$ est compris entre 0 et t s'il vérifie soit $0 \leq \theta \leq t$, soit $t \leq \theta \leq 0$, selon que $0 \leq t$ ou $t \leq 0$). Notons $\tilde{\varphi}_t$ la restriction de φ_t à \tilde{U}_t , considérée comme application de \tilde{U}_t dans W . Alors $\{\tilde{\varphi}_t ; t \in \Theta\}$ est un système dynamique sur W , appelé restriction à W du système dynamique $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$.

Preuve : D'après sa définition même, chaque $\tilde{\varphi}_t$ est une application définie sur une partie \tilde{U}_t de W et à valeurs dans W . Pour $t = 0$, $\tilde{\varphi}_0 = \text{id}_W$.

Soient t_1 et $t_2 \in \Theta$ vérifiant $0 \leq t_1 \leq t_2$, $x \in \tilde{U}_{t_2}$ et $\theta \in \Theta$ vérifiant $0 \leq \theta \leq t_1$.

A fortiori, θ vérifie $0 \leq \theta \leq t_2$, donc compte tenu de la définition de \tilde{U}_{t_2} , $x \in U_\theta$ et $\varphi_\theta(x) \in W$; cela prouve que $x \in \tilde{U}_{t_1}$. Nous avons prouvé que si $0 \leq t_1 \leq t_2$, $\tilde{U}_{t_2} \subset \tilde{U}_{t_1}$.

Soient t et s deux éléments de Θ , et $x \in \tilde{U}_s$. Montrons que $\tilde{\varphi}_s(x) \in \tilde{U}_t$ si et seulement si $x \in \tilde{U}_{s+t}$.

Supposons d'abord $\tilde{\varphi}_s(x) \in \tilde{U}_t$. Soit $\theta \in \Theta$ compris entre 0 et $s+t$. Nous devons prouver que $x \in U_\theta$ et que $\varphi_\theta(x) \in W$. Nous considérons successivement deux cas, qui épuisent les possibilités.

Premier cas : θ est compris entre 0 et s . Puisque $x \in \tilde{U}_s$, nous avons alors $x \in U_\theta$ et $\varphi_\theta(x) \in W$.

Deuxième cas : θ est compris entre s et $s+t$. Alors $\theta = s + \zeta$, avec ζ compris entre 0 et t . Puisque $\tilde{\varphi}_s(x) \in \tilde{U}_t$, nous avons $\tilde{\varphi}_s(x) \in U_\zeta$ et $\varphi_\zeta(\tilde{\varphi}_s(x)) \in W$. Mais $\varphi_\zeta(\tilde{\varphi}_s(x)) = \varphi_\zeta(\varphi_s(x)) = \varphi_{s+\zeta}(x) = \varphi_\theta(x)$, donc $\varphi_\theta(x) \in W$.

Supposons maintenant $x \in \tilde{U}_{s+t}$. Soit $\theta \in \Theta$ compris entre 0 et t . Nous devons prouver que $\tilde{\varphi}_s(x) \in U_\theta$ et que $\varphi_\theta(\tilde{\varphi}_s(x)) \in W$. Quels que soient les signes de s et de t , $s+t$ est toujours compris, soit entre 0 et s , soit entre 0 et $s+t$. Comme $x \in \tilde{U}_s \cap \tilde{U}_{s+t}$, nous avons $x \in U_{s+\theta}$ et $\varphi_{s+\theta}(x) \in W$. Mais $\varphi_{s+\theta}(x) = \varphi_\theta(\varphi_s(x)) = \varphi_\theta(\tilde{\varphi}_s(x))$, donc $\varphi_\theta(\tilde{\varphi}_s(x)) \in W$.

Nous avons bien prouvé que si s et t sont deux éléments de Θ et x un élément de \tilde{U}_s , alors $\tilde{\varphi}_s(x)$ est élément de \tilde{U}_t si et seulement si $x \in \tilde{U}_{s+t}$. Lorsque c'est le cas, nous avons

$$\tilde{\varphi}_t(\tilde{\varphi}_s(x)) = \varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{s+t}(x) = \tilde{\varphi}_{s+t}(x).$$

Compte tenu des définitions I.1.2 (si le système est à temps continu) ou I.1.4 (s'il est à temps discret), nous avons prouvé que $\{\tilde{\varphi}_t ; t \in \Theta\}$ est bien un système dynamique. \square

2.7. Proposition. — *Les hypothèses et notations sont celles de la proposition précédente.*

1. On suppose le système dynamique considéré à temps discret : $\Theta = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{N} . Alors le générateur $\tilde{\varphi}_1$ du système restreint à W est la restriction à $W \cap U_1$ du générateur φ_1 du système $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$.

2. On suppose le système considéré à temps continu, avec $\Theta = \mathbb{R}$. On suppose de plus que Ω est un ouvert d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, que W est un ouvert de \mathcal{E} contenu dans Ω , et que le système dynamique $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ admet un générateur infinitésimal X , qui est un champ de vecteurs localement lipschitzien sur Ω . Alors le système restreint à W admet pour générateur infinitésimal la restriction à W du champ de vecteurs X .

Preuve : C'est une vérification de routine qui ne présente aucune difficulté. Nous laissons au lecteur le soin de la faire. \square

2.8. Définition. — Soient $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ et $\{\psi_t ; t \in \Theta\}$ deux systèmes dynamiques ayant même ensemble des temps Θ (celui-ci pouvant être \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ , \mathbb{Z} ou \mathbb{N}), le premier défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} et le second sur un ouvert Υ d'un espace affine \mathcal{F} , les espaces \mathcal{E} et \mathcal{F} étant de même dimension finie. Soit A une partie de Ω invariante par le premier système (c'est-à-dire telle que pour tout $x \in A$ et tout $t \in \Theta$, $\varphi_t(x)$ soit défini et élément de A), et B une partie de Υ invariante par le second système.

On dit que le système dynamique $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ au voisinage de l'ensemble invariant A et le système dynamique $\{\psi_t ; t \in \Theta\}$ au voisinage de l'ensemble invariant B sont *localement topologiquement conjugués* (resp., *localement C^p -différentiablement conjugués*, avec $p \geq 1$), s'il existe un voisinage ouvert V de A dans Ω et un voisinage ouvert W de B dans Υ tels que les restrictions des systèmes, respectivement à V et à W , soient topologiquement conjugués (resp., C^p -différentiablement conjugués) par un homéomorphisme (resp., un C^p -difféomorphisme) $h : V \rightarrow W$ tel que $h(A) = B$.

2.9. Commentaire. — Nous utiliserons dans la suite la définition ci-dessus avec, pour partie invariante A de Ω , soit un singleton $\{a\}$ (le point a étant un point d'équilibre), soit une orbite périodique \mathcal{O} .

3. Obstacles à la conjugaison

Nous indiquerons dans la suite de ce chapitre des conditions suffisantes pour qu'un système dynamique soit localement topologiquement conjugué, au voisinage d'un point d'équilibre, au système linéarisé. Mais auparavant, nous allons donner quelques exemples illustrant certains obstacles à la conjugaison.

L'existence de valeurs propres imaginaires pures du champ de vecteurs linéarisé, au voisinage d'un point d'équilibre, peut être un obstacle à la conjugaison, comme le montre l'exemple suivant.

3.1. Exemple. — Considérons l'équation différentielle, dans le plan \mathbb{R}^2 (coordonnées x et y),

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\omega y + \lambda x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = \omega x + \lambda y(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (*)$$

où ω et λ sont deux constantes réelles. Pour déterminer son flot réduit nous utilisons des coordonnées polaires, en posant

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Il est facile de voir que le système (*) implique, si $\rho \neq 0$,

$$\frac{d\rho}{dt} = \lambda \rho^3, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega.$$

En notant $x_0 = \rho_0 \cos \theta_0$, $y_0 = \rho_0 \sin \theta_0$, avec $\rho_0 > 0$, la donnée de Cauchy pour $t = 0$, nous voyons que $(\rho(t), \theta(t))$, donc aussi $(x(t), y(t))$, est défini pour $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $2\lambda\rho_0^2 t < 1$, et a pour expression

$$\begin{cases} \rho(t) = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - 2\lambda\rho_0^2 t}}, \\ \theta(t) = \theta_0 + \omega t. \end{cases}$$

L'origine est un point d'équilibre. Il est facile de voir que c'est

- un point d'équilibre ω -stable et attractif (définitions III.2.1 et III.2.2) si $\lambda < 0$,
- un centre (paragraphe III.5.4) si $\lambda = 0$,
- un point d'équilibre α -stable et répulsif (définitions III.2.1 et III.2.2) si $\lambda > 0$.

L'équation différentielle obtenue en linéarisant l'équation (*) au voisinage de l'origine s'obtient tout simplement en remplaçant λ par 0. Pour cette équation, l'origine est un centre, comme nous l'avons vu au paragraphe III.5.4.

Par suite, si $\lambda \neq 0$, le système dynamique formé par le flot réduit de l'équation différentielle (*) n'est certainement pas localement topologiquement conjugué, au voisinage de l'origine, au système linéarisé. *A fortiori*, pour $\lambda \neq 0$, ce système n'est certainement pas localement différentiablement conjugué, au voisinage de l'origine, au système linéarisé.

L'exemple suivant illustre l'obstacle à la conjugaison différentiable que peut constituer l'existence de résonances. Nous verrons plus loin qu'on dit qu'il y a résonance lorsqu'une des valeurs propres du champ de vecteurs linéarisé, au voisinage du point d'équilibre considéré, s'exprime comme une combinaison linéaire à coefficients entiers des autres valeurs propres. Le lecteur remarquera que dans l'exemple ci-dessous, une des valeurs propres du champ de vecteurs linéarisé est égale au double de l'autre valeur propre.

3.2. Exemple. — Considérons l'équation différentielle, dans le plan \mathbb{R}^2 (coordonnées x et y),

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y^2, \\ \frac{dy}{dt} = y. \end{cases} \quad (*)$$

L'origine est un point d'équilibre. Notant (x_0, y_0) la donnée de Cauchy pour $t = 0$, un calcul facile montre que la solution correspondante est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et a pour expression

$$\begin{cases} x(t) = (x_0 + y_0^2 t) e^{2t}, \\ y(t) = y_0 e^t. \end{cases}$$

L'équation différentielle linéarisée, au voisinage de l'origine, s'écrit

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 2u, \\ \frac{dv}{dt} = v, \end{cases} \quad (**)$$

et en notant (u_0, v_0) la donnée de Cauchy pour $t = 0$, nous voyons que la solution, définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, est

$$\begin{cases} u(t) = u_0 e^{2t}, \\ v(t) = v_0 e^t. \end{cases}$$

Nous allons prouver qu'il n'existe pas de difféomorphisme de classe C^2 , défini sur un voisinage de l'origine de \mathbb{R}^2 , appliquant l'origine sur elle-même, conjuguant localement, au voisinage de l'origine, les flots réduits de l'équation différentielle (*) et de sa linéarisée (**). Supposons qu'un tel difféomorphisme existe, et notons le

$$(x, y) \mapsto (u = f(x, y), v = g(x, y)).$$

Les fonctions f et g devraient vérifier $f(0, 0) = 0$, $g(0, 0) = 0$, et pour tout réel t assez petit en valeur absolue,

$$\begin{aligned} e^{2t} f(x, y) &= f(e^{2t}x + te^{2t}y^2, e^t y), \\ e^t g(x, y) &= g(e^{2t}x + te^{2t}y^2, e^t y). \end{aligned}$$

Dérivons la première relation par rapport à y . Nous obtenons

$$\begin{aligned} e^{2t} f'_y(x, y) &= f'_x(e^{2t}x + te^{2t}y^2, e^t y) 2te^{2t}y \\ &\quad + f'_y(e^{2t}x + te^{2t}y^2, e^t y) e^t. \end{aligned} \quad (***)$$

En faisant $x = 0$, $y = 0$, nous obtenons

$$e^{2t} f'_y(0, 0) = e^t f'_y(0, 0),$$

ce qui implique $f'_y(0, 0) = 0$.

Dérivons une seconde fois l'expression (***) par rapport à y , puis faisons $x = 0, y = 0$. Nous obtenons

$$f'_x(0, 0)2te^{2t} = 0,$$

ce qui implique $f'_x(0, 0) = 0$.

L'application $(x, y) \mapsto (u = f(x, y), v = g(x, y))$ n'est certainement pas un C^2 -difféomorphisme local au voisinage de l'origine, puisque les deux dérivées partielles de f à l'origine sont nulles.

4. Quelques résultats préliminaires

Nous allons établir (ou rappeler) dans le présent paragraphe quelques résultats qui seront utilisés plus loin pour la démonstration du théorème de Hartman et Grobman.

Le lemme ci-dessous indique que lorsqu'on perturbe un isomorphisme linéaire d'un espace de Banach en lui ajoutant une application lipschitzienne de rapport assez petit, le résultat obtenu est un homéomorphisme de cet espace de Banach.

4.1. Lemme. — Soit E un espace de Banach, et $B \in GL(E)$ une application linéaire, continue, inversible et d'inverse continue de E dans lui-même. Soit $\zeta : E \rightarrow E$ une application lipschitzienne de rapport k vérifiant $k < (\|B^{-1}\|)^{-1}$. Alors $B + \zeta$ est un homéomorphisme de E sur lui-même.

Preuve : L'application $B + \zeta$ est continue puisque somme de deux applications continues. Montrons qu'elle est injective. Soient x et y deux points de E . Nous avons

$$(B + \zeta)(x) - (B + \zeta)(y) = B(x - y) + \zeta(x) - \zeta(y),$$

donc, d'après la seconde inégalité triangulaire,

$$\|(B + \zeta)(x) - (B + \zeta)(y)\| \geq \|B(x - y)\| - \|\zeta(x) - \zeta(y)\|.$$

Mais $B^{-1}(B(x - y)) = x - y$, donc

$$\|x - y\| \leq \|B^{-1}\| \|B(x - y)\|,$$

ou encore

$$\|B(x - y)\| \geq (\|B^{-1}\|)^{-1} \|x - y\|.$$

D'autre part, puisque ζ est lipschitzienne de rapport k ,

$$\|\zeta(x) - \zeta(y)\| \leq k\|x - y\|,$$

d'où

$$\|(B + \zeta)(x) - (B + \zeta)(y)\| \geq \left((\|B^{-1}\|)^{-1} - k \right) \|x - y\|.$$

Par hypothèse, nous avons $(\|B^{-1}\|)^{-1} - k > 0$; l'inégalité ci-dessus prouve alors que $B + \zeta$ est injective.

Montrons maintenant que $B + \zeta$ est ouverte. Pour cela, il suffit de prouver que pour tout $x \in E$ et tout voisinage W de x , $(B + \zeta)(W)$ est un voisinage de $(B + \zeta)(x)$. Les boules fermées de centre x et de rayon > 0 formant un système fondamental de voisinages du point x , il suffit pour cela de montrer que pour tout $r > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que l'image par $B + \zeta$ de la boule fermée de centre x et de rayon r contient la boule fermée de centre $(B + \zeta)(x)$ et de rayon ρ . Nous allons voir que cette propriété est vérifiée si l'on choisit $\rho = \left((\|B^{-1}\|)^{-1} - k \right) r$. Soit donc $y \in E$ vérifiant

$$\|y - B(x) - \zeta(x)\| \leq \rho.$$

Nous devons prouver qu'il existe $z \in E$ tel que $\|z - x\| \leq r$ vérifiant $(B + \zeta)(z) = y$, c'est-à-dire $B(z) + \zeta(z) = y$, ou encore, puisque B est inversible,

$$z = B^{-1}(y - \zeta(z)).$$

Posons, pour tout $z \in E$,

$$\Theta(z) = B^{-1}(y - \zeta(z)).$$

Nous sommes ramenés à prouver que l'application Θ possède un point fixe dans la boule fermée de centre x et de rayon ρ . Montrons pour commencer que Θ applique cette boule dans elle-même. Nous avons

$$\begin{aligned} \Theta(z) - x &= B^{-1}(y - \zeta(z) - B(x)) \\ &= B^{-1}(y - B(x) - \zeta(x) + \zeta(x) - \zeta(z)) \\ &= B^{-1}(y - B(x) - \zeta(x)) + B^{-1}(\zeta(x) - \zeta(z)). \end{aligned}$$

Nous en déduisons, puisque $\|y - B(x) - \zeta(x)\| \leq \rho$, et que ζ est k -lipschitzienne,

$$\|\Theta(z) - x\| \leq \|B^{-1}\|\rho + \|B^{-1}\|kr \leq r,$$

puisque nous avons choisi $\rho \leq ((\|B^{-1}\|)^{-1} - k)r$. Nous avons ainsi prouvé que Θ applique la boule fermée de centre x et de rayon r dans elle-même. Montrons maintenant que la restriction de Θ à cette boule est contractante. Soient z_1 et z_2 deux éléments de cette boule. Nous avons

$$\begin{aligned} \|\Theta(z_1) - \Theta(z_2)\| &= \|B^{-1}(\zeta(z_1) - \zeta(z_2))\| \\ &\leq \|B^{-1}\| \|\zeta(z_1) - \zeta(z_2)\| \\ &\leq \|B^{-1}\| k \|z_1 - z_2\|. \end{aligned}$$

Comme $k\|B^{-1}\| < 1$, nous avons bien prouvé que Θ est contractante. La boule fermée de E de centre x et de rayon r étant un espace métrique complet, le théorème du point fixe nous permet d'affirmer que Θ admet un point fixe unique dans cette boule. Ainsi que nous l'avons vu, cela implique que l'application $B + \zeta$ est ouverte.

Pour tout point x de E et tout $r > 0$, l'image par $B + \zeta$ de la boule fermée de centre x et de rayon r contient la boule fermée de centre $(B + \zeta)(x)$ et de rayon $\rho = ((\|B\|)^{-1} - k)r$. Lorsque $r \rightarrow +\infty$, $\rho \rightarrow +\infty$. Par suite, $B + \zeta$ est surjective de E sur lui-même. Comme nous avons déjà prouvé qu'elle est continue, injective et ouverte, l'application $B + \zeta$ est un homéomorphisme. \square

Le lemme qui suit est une variante du théorème du point fixe.

4.2. Lemme. — Soit \mathbb{E} un espace de Banach, et $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ une application linéaire continue de \mathbb{E} dans lui-même. On suppose $\text{id}_{\mathbb{E}} - \widehat{T}$ inversible et d'inverse continue (en fait, la continuité de l'inverse résulte d'un théorème de Banach, il suffit de supposer $\text{id}_{\mathbb{E}} - \widehat{T}$ inversible). Soit $\widehat{\eta}$ une application de \mathbb{E} dans lui-même, lipschitzienne de rapport k . Si ce rapport vérifie

$$k < \|(\text{id}_{\mathbb{E}} - \widehat{T})^{-1}\|^{-1},$$

alors $\widehat{T} + \widehat{\eta}$ admet un point fixe unique dans \mathbb{E} .

Preuve : Montrons d'abord que les applications $(\text{id}_{\mathbb{E}} - \widehat{T})^{-1} \circ \widehat{\eta}$ et $\widehat{T} + \widehat{\eta}$ ont les mêmes points fixes. Un élément g de \mathbb{E} est point fixe de $\widehat{T} + \widehat{\eta}$ si et seulement si

$$\widehat{T}(g) + \widehat{\eta}(g) = g,$$

ou encore si et seulement si

$$\hat{\eta}(g) = (\text{id}_{\mathbb{E}} - \hat{T})(g),$$

ce qui équivaut, puisque $\text{id}_{\mathbb{E}} - \hat{T}$ est inversible, à

$$(\text{id}_{\mathbb{E}} - \hat{T})^{-1} \circ \hat{\eta}(g) = g,$$

qui exprime que g est point fixe de $(\text{id}_{\mathbb{E}} - \hat{T})^{-1} \circ \hat{\eta}$.

Montrons que $(\text{id}_{\mathbb{E}} - \hat{T})^{-1} \circ \hat{\eta}$ est une application contractante. Soient g_1 et g_2 deux éléments de \mathbb{E} . Nous avons

$$\begin{aligned} & \|(\text{id}_{\mathbb{E}} - \hat{T})^{-1} \circ \hat{\eta}(g_1) - (\text{id}_{\mathbb{E}} - \hat{T})^{-1} \circ \hat{\eta}(g_2)\| \\ & \leq \|(\text{id}_{\mathbb{E}} - \hat{T})^{-1}\| \|\hat{\eta}(g_1) - \hat{\eta}(g_2)\| \\ & \leq k \|(\text{id}_{\mathbb{E}} - \hat{T})^{-1}\| \|g_1 - g_2\|. \end{aligned}$$

Puisque nous avons supposé $k < \|(\text{id}_{\mathbb{E}} - \hat{T})^{-1}\|^{-1}$, cette inégalité prouve que $(\text{id}_{\mathbb{E}} - \hat{T})^{-1} \circ \hat{\eta}$ est contractante. L'espace \mathbb{E} étant complet, cette application admet dans \mathbb{E} un point fixe unique, qui est aussi l'unique point fixe de $\hat{T} + \hat{\eta}$. \square

Nous aurons besoin, dans la suite, de prolonger à tout un espace vectoriel normé une application lipschitzienne définie sur une boule de cet espace, de manière telle que l'application prolongée soit encore lipschitzienne. Le lemme ci-dessous montre que c'est possible.

4.3. Lemme. — Soient E et F deux espaces vectoriels normés, k et ρ deux réels strictement positifs et η une application, définie sur la boule fermée de E centrée sur l'origine et de rayon ρ , à valeurs dans F , lipschitzienne de rapport k . Il existe une application $\tilde{\eta}$, définie sur E entier, à valeurs dans F , bornée et lipschitzienne de rapport $2k$, dont la restriction à la boule fermée de centre l'origine et de rayon ρ est η .

Preuve : L'application η est bornée, car elle est lipschitzienne et définie sur une partie bornée de E . Posons, pour tout $x \in E$,

$$\tilde{\eta}(x) = \begin{cases} \eta(x) & \text{si } \|x\| \leq \rho, \\ \eta\left(\frac{\rho x}{\|x\|}\right) & \text{si } \|x\| > \rho. \end{cases}$$

L'application $\tilde{\eta}$ ainsi définie sur E entier a visiblement η pour restriction à la boule de centre l'origine et de rayon ρ . Elle est bornée, car l'ensemble de ses valeurs est le même que l'ensemble des valeurs de η . Montrons qu'elle est lipschitzienne de rapport $2k$. Soient x_1 et x_2 deux points de E .

Si $\|x_1\| \leq \rho$ et $\|x_2\| \leq \rho$, nous avons

$$\|\tilde{\eta}(x_1) - \tilde{\eta}(x_2)\| = \|\eta(x_1) - \eta(x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|.$$

Si $\|x_1\| \leq \rho$ et $\|x_2\| > \rho$, posons $y_2 = \frac{\rho x_2}{\|x_2\|}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|\tilde{\eta}(x_1) - \tilde{\eta}(x_2)\| &= \|\eta(x_1) - \eta(y_2)\| \leq k\|x_1 - y_2\| \\ &\leq k\|x_1 - x_2 + x_2 - y_2\| \\ &\leq k(\|x_1 - x_2\| + \|x_2 - y_2\|). \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \|x_2 - y_2\| &= \left\| x_2 - \frac{\rho}{\|x_2\|} x_2 \right\| \\ &= \|x_2\| - \rho \\ &\leq \|x_2\| - \|x_1\| \\ &\leq \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\|\tilde{\eta}(x_1) - \tilde{\eta}(x_2)\| \leq 2k\|x_1 - x_2\|.$$

Si $\|x_1\| > \rho$ et $\|x_2\| > \rho$, posons $y_1 = \frac{\rho x_1}{\|x_1\|}$, $y_2 = \frac{\rho x_2}{\|x_2\|}$. Nous avons

$$\|\tilde{\eta}(x_1) - \tilde{\eta}(x_2)\| = \|\eta(y_1) - \eta(y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|.$$

Mais

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\| &= \left\| \frac{\rho x_1}{\|x_1\|} - \frac{\rho x_2}{\|x_2\|} \right\| = \left\| \frac{\rho x_1}{\|x_1\|} - \frac{\rho x_2}{\|x_1\|} + \frac{\rho x_2}{\|x_1\|} - \frac{\rho x_2}{\|x_2\|} \right\| \\ &\leq \frac{\rho}{\|x_1\|} (\|x_1 - x_2\| + \left| \|x_1\| - \|x_2\| \right|) \\ &\leq 2\|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Nous avons donc encore

$$\|\tilde{\eta}(x_1) - \tilde{\eta}(x_2)\| \leq 2k\|x_1 - x_2\|.$$

Cette inégalité étant vérifiée dans tous les cas, $\tilde{\eta}$ est lipschitzienne de rapport $2k$. \square

Le résultat qui suit est une variante du lemme de Gronwall, qui nous servira à établir diverses propriétés du flot réduit de champs de vecteurs lipschitziens.

4.4. Lemme. — Soit un réel $T > 0$ et $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, vérifiant, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\gamma(t) - K \int_0^t \gamma(s) ds \leq A + Bt + Ce^{\alpha t},$$

où K, A, B, C et α sont des réels vérifiant $K > 0$ et $\alpha \neq K$. Alors, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\gamma(t) \leq Ae^{Kt} + \frac{B}{K}(e^{Kt} - 1) + \frac{C}{\alpha - K}(\alpha e^{\alpha t} - Ke^{Kt}).$$

Preuve : Posons, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\Gamma(t) = \int_0^t \gamma(s) ds.$$

L'application Γ est continue sur $[0, T]$ et dérivable en tout point t intérieur à cet intervalle, de dérivée $\Gamma'(t) = \gamma(t)$. Nous avons

$$\Gamma'(t) - K\Gamma(t) \leq A + Bt + Ce^{\alpha t},$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}(e^{-Kt}\Gamma(t)) \leq e^{-Kt}(A + Bt + Ce^{\alpha t}).$$

D'après l'inégalité des accroissements finis nous avons, pour tout $t \in [0, T]$,

$$e^{-Kt}\Gamma(t) = e^{-Kt}(\Gamma(t) - e^0\Gamma(0)) \leq \int_0^t (A + Bs + Ce^{\alpha s})e^{-Ks} ds.$$

Un calcul facile, par intégration par parties, de l'intégrale figurant dans le membre de droite conduit à

$$\Gamma(t) \leq \left(\frac{A}{K} + \frac{B}{K^2} \right) (e^{Kt} - 1) - \frac{Bt}{K} + \frac{C}{\alpha - K} (e^{\alpha t} - e^{Kt}). \quad (*)$$

D'autre part, nous avons aussi

$$\gamma(t) = \Gamma'(t) \leq K\Gamma(t) + A + Bt + Ce^{\alpha t}.$$

En remplaçant, dans le membre de droite de l'inégalité ci-dessus, $\Gamma(t)$ par le membre de droite de (*) (ce qui ne fait que renforcer l'inégalité, puisque par hypothèse $K > 0$), nous obtenons le résultat désiré. \square

Les deux lemmes qui suivent seront utilisés dans le paragraphe 6. Leur démonstration utilise le lemme précédent.

4.5. Lemme. — Soit X un champ de vecteurs lipschitzien, de rapport $k > 0$, défini sur un espace affine \mathcal{E} dont l'espace vectoriel associé est un espace de Banach E . Son flot réduit Φ est défini sur $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ tout entier, et pour chaque $t \in \mathbb{R}$, Φ_t est une application de \mathcal{E} dans \mathcal{E} lipschitzienne de rapport $e^{k|t|}$.

Preuve : Soit $x \in \mathcal{E}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi_t(x)$ soit défini, nous avons

$$\frac{d}{dt} \Phi_t(x) = X(\Phi_t(x)),$$

d'où, puisque $\Phi_0(x) = x$,

$$\Phi_t(x) = x + \int_0^t X(\Phi_s(x)) ds. \quad (*)$$

Nous pouvons écrire

$$\|X(\Phi_s(x))\| \leq \|X(\Phi_s(x)) - X(x)\| + \|X(x)\| \leq k\|\Phi_s(x) - x\| + \|X(x)\|.$$

Par suite, en supposant par exemple $t > 0$,

$$\|\Phi_t(x) - x\| \leq k \int_0^t \|\Phi_s(x) - x\| ds + \|X(x)\| t.$$

En appliquant le lemme 4.4 à la fonction $t \mapsto \gamma(t) = \|\Phi_t(x) - x\|$, nous voyons que pour tout $t \geq 0$ pour lequel $\Phi_t(x)$ est défini, nous avons

$$\|\Phi_t(x) - x\| \leq \frac{\|X(x)\|}{k} (e^{kt} - 1).$$

Supposons que l'extrémité droite t_M de l'intervalle ouvert sur lequel l'application $t \mapsto \Phi_t(x)$ est définie soit finie. L'inégalité ci-dessus montre que lorsque $t \rightarrow t_M$, $\Phi_t(x)$

reste borné; de plus, $\frac{d}{dt} \Phi_t(x) = X(\Phi_t(x))$ reste aussi borné, puisque X est lipschitzien.

L'application de l'inégalité des accroissements finis et du critère de Cauchy montre alors que la limite $\lim_{t \rightarrow t_M} \Phi_t(x)$ existe. Le point $(t_M, \lim_{t \rightarrow t_M} \Phi_t(x))$ est élément du bout droit de la solution $t \mapsto \Phi_t(x)$. D'après le théorème II.3.3, ce point doit appartenir à la frontière de $\mathbb{R} \times E$. Ce n'est pas possible, car cette frontière est vide. Nous avons donc nécessairement $t_M = +\infty$. De même, nous pouvons montrer que l'extrémité gauche de l'intervalle sur lequel est définie l'application $t \mapsto \Phi_t(x)$ est $-\infty$.

Soient x_1 et x_2 deux éléments de E , et $t \in \mathbb{R}$. En utilisant (*), nous obtenons

$$\Phi_t(x_1) - \Phi_t(x_2) = x_1 - x_2 + \int_0^t (X(\Phi_s(x_1)) - X(\Phi_s(x_2))) ds.$$

Nous en déduisons, pour $t \geq 0$, l'inégalité

$$\begin{aligned} \|\Phi_t(x_1) - \Phi_t(x_2)\| &\leq \|x_1 - x_2\| + \int_0^t \|X(\Phi_s(x_1)) - X(\Phi_s(x_2))\| ds \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + k \int_0^t \|\Phi_s(x_1) - \Phi_s(x_2)\| ds. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 4.4, nous en déduisons

$$\|\Phi_t(x_1) - \Phi_t(x_2)\| \leq e^{kt} \|x_1 - x_2\|.$$

Pour t de signe quelconque, nous obtenons de même

$$\|\Phi_t(x_1) - \Phi_t(x_2)\| \leq e^{k|t|} \|x_1 - x_2\|.$$

□

4.6. Lemme. — Soit E un espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(E, E)$ une application linéaire continue de E dans lui-même et X un champ de vecteurs sur E tel que $X - A$ soit borné et lipschitzien de rapport $k > 0$. Soient Φ le flot réduit de X , et Ψ le flot réduit du champ de vecteurs linéaire A . Alors Φ et Ψ sont définis sur $\mathbb{R} \times E$ tout entier, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Theta_t = \Phi_t - \Psi_t$ est une application bornée de E dans lui-même, lipschitzienne de rapport $e^{(\|A\|+k)|t|} - e^{\|A\||t|}$.

Preuve : Rappelons que le flot réduit du champ de vecteurs linéaire A a pour expression

$$\Psi(t, x) = \Psi_t(x) = \exp(tA)(x).$$

Il est donc défini sur $\mathbb{R} \times E$. D'autre part, X est lipschitzien de rapport $\|A\| + k$; le lemme 4.5 montre que son flot réduit Φ est défini sur $\mathbb{R} \times E$.

Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$. Nous avons

$$\frac{d}{dt} \Phi_t(x) = X(\Phi_t(x)), \quad \frac{d}{dt} \Psi_t(x) = A(\Psi_t(x)),$$

d'où, par différence, compte tenu de la linéarité de A ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Theta_t(x) &= X(\Phi_t(x)) - A(\Psi_t(x)) \\ &= X(\Phi_t(x)) - A(\Phi_t(x)) + A(\Phi_t(x) - \Psi_t(x)). \end{aligned}$$

Compte tenu de $\Theta_0(x) = 0$, nous en déduisons

$$\Theta_t(x) = \int_0^t (X - A)(\Phi_s(x)) ds + \int_0^t A(\Theta_s(x)) ds. \quad (*)$$

Pour $t \geq 0$, nous en déduisons l'inégalité

$$\|\Theta_t(x)\| \leq Mt + \|A\| \int_0^t \|\Theta_s(x)\| ds,$$

où nous avons noté M un majorant de $\|X - A\|$ (qui, par hypothèse, est borné sur E). En appliquant le lemme 4.4, nous en déduisons

$$\|\Theta_t(x)\| \leq \frac{M}{\|A\|} (e^{\|A\|t} - 1).$$

Pour t de signe quelconque, nous obtenons de même

$$\|\Theta_t(x)\| \leq \frac{M}{\|A\|} (e^{\|A\||t|} - 1).$$

Nous avons ainsi prouvé que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, Θ_t est bornée.

Soient maintenant $t \in \mathbb{R}$, x_1 et $x_2 \in E$. En utilisant (*), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Theta_t(x_1) - \Theta_t(x_2) &= \int_0^t \left((X - A)(\Phi_s(x_1)) - (X - A)(\Phi_s(x_2)) \right) ds \\ &\quad + \int_0^t A(\Theta_s(x_1) - \Theta_s(x_2)) ds. \end{aligned}$$

Pour $t \geq 0$, nous en déduisons l'inégalité

$$\begin{aligned} \|\Theta_t(x_1) - \Theta_t(x_2)\| &\leq k \int_0^t \|\Phi_s(x_1) - \Phi_s(x_2)\| ds \\ &\quad + \|A\| \int_0^t \|\Theta_s(x_1) - \Theta_s(x_2)\| ds. \end{aligned}$$

Mais le champ de vecteurs X est lipschitzien de rapport $\|A\| + k$; son flot réduit Φ vérifie donc, d'après le lemme 4.5,

$$\|\Phi_s(x_1) - \Phi_s(x_2)\| \leq e^{(\|A\|+k)s} \|x_1 - x_2\|.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\Phi_s(x_1) - \Phi_s(x_2)\| &\leq \|x_1 - x_2\| \int_0^t e^{(\|A\|+k)s} ds \\ &\leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{\|A\| + k} (e^{(\|A\|+k)t} - 1), \end{aligned}$$

d'où en reportant dans l'inégalité précédente

$$\begin{aligned} \|\Theta_t(x_1) - \Theta_t(x_2)\| &\leq \|A\| \int_0^t \|\Theta_s(x_1) - \Theta_s(x_2)\| ds \\ &\quad + \frac{k\|x_1 - x_2\|}{\|A\| + k} (e^{(\|A\|+k)t} - 1). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.4, nous en déduisons, après simplification

$$\|\Theta_t(x_1) - \Theta_t(x_2)\| \leq (e^{(\|A\|+k)t} - e^{\|A\|t}) \|x_1 - x_2\|.$$

Pour t de signe quelconque, on établit de même l'inégalité qui se déduit de celle ci-dessus en remplaçant t par $|t|$ dans le membre de droite. \square

5. Cas d'un système dynamique à temps discret

Commençons par établir un théorème qui constitue, en fait, l'essentiel du théorème de Hartman et Grobman.

5.1. Théorème. — *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et $B \in GL(E)$ une application linéaire inversible de E dans lui-même dont toutes les valeurs propres sont de module $\neq 1$. Il existe un réel $K > 0$ ayant la propriété suivante : pour tout couple (η, ζ) d'applications de E dans lui-même, bornées et lipschitziennes de rapport $k < K$, il existe un homéomorphisme unique h de E sur lui-même tel que $h - \text{id}_E$ soit borné et que*

$$(B + \eta) \circ h = h \circ (B + \zeta).$$

Preuve : Nous allons d'abord choisir une norme particulière sur E adaptée à l'isomorphisme B . Pour ce choix particulier de la norme de E , nous prouverons le théorème, et nous pourrions même donner une expression explicite du réel K . Nous montrerons ensuite que le théorème reste vrai lorsque E est muni d'une norme quelconque (le réel K n'étant bien sûr plus nécessairement donné par la même expression).

Soient λ_i les valeurs propres distinctes de B , et n_i leurs multiplicités ($1 \leq i \leq p$). Les λ_i étant toutes de module $\neq 1$, $\inf_{1 \leq i \leq p} |1 - |\lambda_i||$ est strictement positif. Soit r un réel vérifiant $0 < r < \inf(1, \inf_{1 \leq i \leq p} |1 - |\lambda_i||)$. L'intervalle fermé $[1 - r, 1 + r]$ ne contient le module d'aucune valeur propre de B .

Le polynôme caractéristique de B est $\prod_{1 \leq i \leq p} (\lambda_i - \lambda)^{n_i}$. Soit I_c l'ensemble des éléments i de $\{1, 2, \dots, p\}$ tels que $|\lambda_i| < 1$, et I_d l'ensemble des éléments j de $\{1, 2, \dots, p\}$ tels que $|\lambda_j| > 1$. Les parties I_c et I_d de $\{1, 2, \dots, p\}$ sont disjointes et de réunion $\{1, 2, \dots, p\}$. Le polynôme caractéristique de B est donc produit de deux polynômes premiers entre eux, $\prod_{i \in I_c} (\lambda_i - \lambda)^{n_i}$ et $\prod_{j \in I_d} (\lambda_j - \lambda)^{n_j}$. Posons

$$E_c = \ker \prod_{i \in I_c} (\lambda_i \text{id}_E - B)^{n_i}, \quad E_d = \ker \prod_{j \in I_d} (\lambda_j \text{id}_E - B)^{n_j}.$$

D'après le théorème d'algèbre linéaire rappelé en VII.1.6, E_c et E_d sont deux sous-espaces vectoriels de E , invariants par B , vérifiant

$$E = E_c \oplus E_d,$$

tels que la restriction de B à E_c (resp., à E_d) ait pour polynôme caractéristique $\prod_{i \in I_c} (\lambda_i - \lambda)^{n_i}$ (resp., $\prod_{i \in I_d} (\lambda_i - \lambda)^{n_i}$). Nous noterons B_c et B_d les restrictions de B , respectivement à E_c et à E_d , considérées comme applications de E_c dans lui-même, et de E_d dans lui-même. Comme B est inversible, B_c et B_d sont inversibles.

Les valeurs propres de B_c sont toutes de module $< 1 - r$, et les valeurs propres de B_d toutes de module $> 1 + r$.

D'après le théorème VII.1.17, il existe sur l'espace vectoriel E_c une norme (euclidienne si le corps des scalaires est \mathbb{R} , hermitienne si ce corps est \mathbb{C}) telle que la norme associée de l'endomorphisme linéaire B_c de E_c vérifie

$$\|B_c\| \leq 1 - r.$$

D'autre part, B_d est une application linéaire inversible de E_d sur lui-même, dont toutes les valeurs propres sont de module $> 1 + r$. Les valeurs propres de B_d^{-1} sont les inverses des valeurs propres de B_d ; elles sont donc toutes de module $< (1 + r)^{-1}$. D'après le théorème VII.1.17, il existe sur l'espace vectoriel E_d une norme (euclidienne si le corps des scalaires est \mathbb{R} , hermitienne si ce corps est \mathbb{C}) telle que la norme associée de l'endomorphisme linéaire B_d^{-1} de E_d vérifie

$$\|B_d^{-1}\| \leq \frac{1}{1 + r}.$$

Ayant défini une norme sur chacun des sous-espaces E_c et E_d de E , nous définissons une norme sur E en posant, pour tout $x \in E$, se décomposant en $x = x_c + x_d$, avec $x_c \in E_c$ et $x_d \in E_d$,

$$\|x\| = \sup(\|x_c\|, \|x_d\|).$$

Nous allons prouver que le théorème est vrai, avec

$$K = \inf \left(\|B^{-1}\|^{-1}, \frac{r}{2} \right).$$

Soient donc η et ζ deux applications de E dans lui-même, bornées et lipschitziennes de rapport $k < K$. L'homéomorphisme h cherché devant être tel que $h - \text{id}_E$ soit borné, s'écrit sous la forme

$$h = \text{id}_E + g,$$

où g est une application continue et bornée de E dans lui-même. Nous devons avoir

$$(B + \eta) \circ (\text{id}_E + g) = (\text{id}_E + g) \circ (B + \zeta). \quad (*)$$

Puisque η et ζ sont lipschitziennes de rapport $k < \|B^{-1}\|^{-1}$, le lemme 4.1 montre que $B + \eta$ et $B + \zeta$ sont des homéomorphismes de E sur lui-même. L'égalité (*) ci-dessus est donc équivalente à

$$(B + \eta) \circ (\text{id}_E + g) \circ (B + \zeta)^{-1} = \text{id}_E + g,$$

ou, en remplaçant dans le membre de droite id_E par $(B + \zeta) \circ (B + \zeta)^{-1}$, et en développant le membre de gauche,

$$B \circ (\text{id}_E + g) \circ (B + \zeta)^{-1} + \eta \circ (\text{id}_E + g) \circ (B + \zeta)^{-1} = (B + \zeta) \circ (B + \zeta)^{-1} + g,$$

ou, après simplification,

$$B \circ g \circ (B + \zeta)^{-1} + \eta \circ (\text{id}_E + g) \circ (B + \zeta)^{-1} = \zeta \circ (B + \zeta)^{-1} + g.$$

Posons, pour toute application continue et bornée g de E dans lui-même,

$$\widehat{T}(g) = B \circ g \circ (B + \zeta)^{-1}, \quad (**)$$

$$\widehat{\eta}(g) = \eta \circ (\text{id}_E + g) \circ (B + \zeta)^{-1} - \zeta \circ (B + \zeta)^{-1}. \quad (***)$$

L'égalité (*) est équivalente à

$$(\widehat{T} + \widehat{\eta})(g) = g,$$

qui exprime que g est un point fixe de $\widehat{T} + \widehat{\eta}$.

Soit $\mathbb{E} = C_b(E, E)$ l'espace des applications continues et bornées de E dans lui-même.

Pour tout élément g de cet espace, posons

$$\|g\| = \sup_{x \in E} \|g(x)\|.$$

Nous savons que muni de cette norme, \mathbb{E} est un espace de Banach. Nous allons prouver que \widehat{T} et $\widehat{\eta}$ sont des applications de \mathbb{E} dans lui-même qui vérifient les hypothèses du lemme 4.2; ce lemme nous permettra alors d'affirmer l'existence dans \mathbb{E} d'un point fixe unique de $\widehat{T} + \widehat{\eta}$.

Pour toute application $g \in \mathbb{E}$, $\widehat{T}(g)$ est continue car composée d'applications continues, et pour tout $x \in E$,

$$\|\widehat{T}(g)(x)\| = \|B \circ g \circ (B + \zeta)^{-1}(x)\| \leq \|B\| \|g\|,$$

ce qui prouve que $\widehat{T}(g)$ est bornée, et que sa norme vérifie

$$\|\widehat{T}(g)\| \leq \|B\| \|g\|.$$

Ainsi, \widehat{T} applique \mathbb{E} dans lui-même; sa définition montre que c'est une application linéaire. L'inégalité ci-dessus montre alors que \widehat{T} est continue et que sa norme vérifie

$$\|\widehat{T}\| \leq \|B\|.$$

L'application linéaire $\widehat{T} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ est inversible, et a pour inverse l'application qui associe, à tout élément γ de \mathbb{E} ,

$$\widehat{T}^{-1}(\gamma) = B^{-1} \circ \gamma \circ (B + \zeta).$$

Comme ci-dessus, nous voyons que la norme de \widehat{T}^{-1} vérifie

$$\|\widehat{T}^{-1}\| \leq \|B^{-1}\|.$$

De même, l'expression (***) montre que pour tout $g \in \mathbb{E}$, $\widehat{\eta}(g)$ est une application continue de E dans E , car somme de composées d'applications continues. Les applications η et ζ étant bornées, l'application $\widehat{\eta}(g)$ est évidemment bornée. Donc $\widehat{\eta}$ est bien une application de \mathbb{E} dans lui-même. Montrons qu'elle est lipschitzienne. Soient g_1 et g_2 deux éléments de \mathbb{E} . Nous avons

$$\widehat{\eta}(g_1) - \widehat{\eta}(g_2) = \eta \circ (\text{id}_E + g_1) \circ (B + \zeta)^{-1} - \eta \circ (\text{id}_E + g_2) \circ (B + \zeta)^{-1},$$

donc, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|\widehat{\eta}(g_1)(x) - \widehat{\eta}(g_2)(x)\| &= \|\eta((\text{id}_E + g_1) \circ (B + \zeta)^{-1}(x)) \\ &\quad - \eta((\text{id}_E + g_2) \circ (B + \zeta)^{-1}(x))\| \\ &\leq k \|(\text{id}_E + g_1) \circ (B + \zeta)^{-1}(x) \\ &\quad - (\text{id}_E + g_2) \circ (B + \zeta)^{-1}(x)\| \\ &\leq k \|g_1 \circ (B + \zeta)^{-1}(x) - g_2 \circ (B + \zeta)^{-1}(x)\| \\ &\leq k \|g_1 - g_2\|. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\|\widehat{\eta}(g_1) - \widehat{\eta}(g_2)\| \leq k \|g_1 - g_2\|,$$

ce qui prouve que $\widehat{\eta}$ est lipschitzienne de rapport k .

Nous allons maintenant montrer que $\text{id}_{\mathbb{E}} - \widehat{T}$ est inversible, et majorer la norme de son inverse. C'est la partie la plus difficile de la démonstration.

Soit $\mathbb{E}_c = \mathcal{C}_b(E, E_c)$ l'espace des applications continues et bornées de E dans E_c , et \mathbb{E}_d l'espace des applications continues et bornées de E dans E_d . Ce sont des sous-espaces vectoriels fermés de l'espace de Banach \mathbb{E} , donc des espaces de Banach, et nous avons

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_c \oplus \mathbb{E}_d.$$

L'expression (**) montre que \widehat{T} applique \mathbb{E}_c dans lui-même et \mathbb{E}_d dans lui-même. Nous noterons \widehat{T}_c et \widehat{T}_d les restrictions de \widehat{T} , respectivement à \mathbb{E}_c et à \mathbb{E}_d , considérées comme applications de \mathbb{E}_c dans lui-même et de \mathbb{E}_d dans lui-même. Puisque \widehat{T} est inversible, \widehat{T}_c et \widehat{T}_d le sont aussi.

Nous avons prouvé ci-dessus que l'application linéaire \widehat{T} est continue et que sa norme vérifie

$$\|\widehat{T}\| \leq \|B\|.$$

De la même manière, on montre que \widehat{T}_c est continue, et que sa norme vérifie

$$\|\widehat{T}_c\| \leq \|B_c\| \leq 1 - r < 1.$$

Cette dernière inégalité prouve que $\text{id}_{\mathbb{E}_c} - \widehat{T}_c$ est inversible. Son inverse est donné par la somme de la série normalement convergente

$$(\text{id}_{\mathbb{E}_c} - \widehat{T}_c)^{-1} = \text{id}_{\mathbb{E}_c} + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{T}_c^k.$$

Nous en déduisons la majoration de la norme de $(\text{id}_{\mathbb{E}_c} - \widehat{T}_c)^{-1}$,

$$\|(\text{id}_{\mathbb{E}_c} - \widehat{T}_c)^{-1}\| \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \|\widehat{T}_c\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} (1-r)^k = \frac{1}{r}.$$

Nous avons prouvé ci-dessus que l'application linéaire \widehat{T}^{-1} est continue et que sa norme vérifie

$$\|\widehat{T}^{-1}\| \leq \|B^{-1}\|.$$

De la même manière, on montre que \widehat{T}_d^{-1} est continue, et que sa norme vérifie

$$\|\widehat{T}_d^{-1}\| \leq \|B_d^{-1}\| \leq \frac{1}{1+r} < 1.$$

Cette dernière inégalité prouve que $\text{id}_{\mathbb{E}_d} - \widehat{T}_d^{-1}$ est inversible. Son inverse est donné par la somme de la série normalement convergente

$$(\text{id}_{\mathbb{E}_d} - \widehat{T}_d^{-1})^{-1} = \text{id}_{\mathbb{E}_d} + \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{T}_d^{-1})^k.$$

Nous en déduisons la majoration de la norme de $(\text{id}_{\mathbb{E}_d} - \widehat{T}_d^{-1})^{-1}$,

$$\|(\text{id}_{\mathbb{E}_d} - \widehat{T}_d^{-1})^{-1}\| \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \|\widehat{T}_d^{-1}\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^k = \frac{1+r}{r}.$$

D'autre part, \widehat{T}_d et $\widehat{T}_d^{-1} - \text{id}_{\mathbb{E}_d}$ étant inversibles, la composée de ces applications, qui n'est autre que $\text{id}_{\mathbb{E}_d} - \widehat{T}_d$, est elle aussi inversible, et nous avons

$$(\text{id}_{\mathbb{E}_d} - \widehat{T}_d)^{-1} = \widehat{T}_d^{-1} \circ (\widehat{T}_d^{-1} - \text{id}_{\mathbb{E}_d})^{-1},$$

d'où, pour les normes, les inégalités

$$\|(\text{id}_{\mathbb{E}_d} - \widehat{T}_d)^{-1}\| \leq \|\widehat{T}_d^{-1}\| \|(\widehat{T}_d^{-1} - \text{id}_{\mathbb{E}_d})^{-1}\| \leq \frac{1}{1+r} \frac{1+r}{r} = \frac{1}{r}.$$

Nous avons ainsi prouvé que les restrictions de $\text{id}_{\mathbb{E}} - \widehat{T}$ à \mathbb{E}_c et à \mathbb{E}_d sont toutes deux inversibles, et que leurs inverses ont toutes deux une norme majorée par r^{-1} . Par suite, $\text{id}_{\mathbb{E}} - \widehat{T}$ est inversible; pour tout élément g de \mathbb{E} , se décomposant en $g = g_c + g_d$, avec $g_c \in \mathbb{E}_c$ et $g_d \in \mathbb{E}_d$, nous avons

$$(\text{id}_{\mathbb{E}} - \widehat{T})^{-1}(g) = (\text{id}_{\mathbb{E}} - \widehat{T})^{-1}(g_c) + (\text{id}_{\mathbb{E}} - \widehat{T})^{-1}(g_d),$$

donc

$$\begin{aligned} \|(\text{id}_{\mathbb{E}} - \widehat{T})^{-1}(g)\| &\leq \|(\text{id}_{\mathbb{E}} - \widehat{T})^{-1}(g_c)\| + \|(\text{id}_{\mathbb{E}} - \widehat{T})^{-1}(g_d)\| \\ &\leq \frac{1}{r} \|g_c\| + \frac{1}{r} \|g_d\| \\ &\leq \frac{2}{r} \|g\|, \end{aligned}$$

et par suite

$$\|(\text{id}_{\mathbb{E}} - \widehat{T})^{-1}\| \leq \frac{2}{r},$$

d'où nous déduisons

$$k < K \leq \frac{r}{2} \leq \|(\text{id}_{\mathbb{E}} - \widehat{T})^{-1}\|^{-1}.$$

Le lemme 4.2 est donc applicable au couple $(\widehat{T}, \widehat{\eta})$ et montre qu'il existe un unique élément g de $\mathbb{E} = \mathcal{C}_b(E, E)$ tel que

$$(\widehat{T} + \widehat{\eta})(g) = g,$$

ou, ce qui est équivalent, tel que

$$(B + \eta) \circ (\text{id}_E + g) = (\text{id}_E + g) \circ (B + \zeta).$$

Nous devons, pour finir, prouver que $\text{id}_E + g$ est un homéomorphisme de E sur lui-même. Remarquons que le résultat ci-dessus s'applique encore si nous échangeons les rôles de η et ζ . Il existe donc un unique élément g' de \mathbb{E} tel que

$$(B + \zeta) \circ (\text{id}_E + g') = (\text{id}_E + g') \circ (B + \eta).$$

Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} (B + \eta) \circ (\text{id}_E + g) \circ (\text{id}_E + g') & \\ &= (B + \eta) \circ (\text{id}_E + g) \circ (B + \zeta)^{-1} \circ (\text{id}_E + g') \circ (B + \eta) \\ &= (\text{id}_E + g) \circ (\text{id}_E + g') \circ (B + \eta). \end{aligned}$$

Mais nous pouvons écrire

$$(\text{id}_E + g) \circ (\text{id}_E + g') = \text{id}_E + g'', \quad \text{avec} \quad g'' = g' + g \circ (\text{id}_E + g').$$

D'après son expression, g'' est une application continue et bornée de E dans lui-même, donc un élément de \mathbb{E} , qui vérifie

$$(B + \eta) \circ (\text{id}_E + g'') = (\text{id}_E + g'') \circ (B + \eta).$$

Or le raisonnement qui précède s'applique encore lorsque $\zeta = \eta$, et montre que l'élément g'' de \mathbb{E} vérifiant la relation ci-dessus est unique. Mais nous voyons immédiatement que l'application nulle est élément de \mathbb{E} , et vérifie cette relation. Nous pouvons donc affirmer que $g'' = 0$, c'est-à-dire que

$$(\text{id}_E + g) \circ (\text{id}_E + g') = \text{id}_E.$$

Le même raisonnement permet de prouver que

$$(\text{id}_E + g') \circ (\text{id}_E + g) = \text{id}_E,$$

et nous permet de conclure que $h = \text{id}_E + g$ est un homéomorphisme de E sur lui-même, d'inverse $\text{id}_E + g'$.

Soit maintenant $x \mapsto \|x\|_n$ une norme quelconque sur E . Cet espace étant de dimension finie, cette norme est équivalente à la norme $x \mapsto \|x\|$ utilisée précédemment. Il existe donc deux réels strictement positifs m et M tels que, pour tout $x \in E$,

$$m\|x\| \leq \|x\|_n \leq M\|x\|.$$

Une application $\eta : E \rightarrow E$, lipschitzienne de rapport k lorsque E est muni de la norme $x \mapsto \|x\|$, devient lipschitzienne de rapport $k' = Mkm^{-1}$ lorsque cet espace est muni de la norme $x \mapsto \|x\|_n$. Le résultat que nous avons établi reste donc vrai lorsque E est muni d'une norme quelconque, moyennant un choix convenable du réel K . \square

5.2. Lemme. — Soit \mathcal{E} un espace affine dont l'espace vectoriel associé E est normé, $\varphi : U \rightarrow \mathcal{E}$ une application différentiable de classe C^1 , définie sur un ouvert U de \mathcal{E} et à valeurs dans \mathcal{E} , et a un point de U . Pour tout réel $k > 0$, il existe un réel $\rho > 0$ tel que la boule fermée de centre a et de rayon ρ soit contenue dans U et que la restriction à cette boule de l'application η , à valeurs dans l'espace vectoriel E , définie par

$$x \mapsto \eta(x) = \varphi(x) - \varphi(a) - D\varphi(a)(x - a),$$

soit lipschitzienne de rapport k .

Preuve : Soit $k > 0$. L'application φ étant de classe C^1 , sa différentielle $D\varphi$ est continue, en particulier au point a . Il existe donc $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in U$ vérifiant $\|x - a\| \leq \rho$, on ait

$$\|D\varphi(x) - D\varphi(a)\| \leq k.$$

En diminuant la valeur de ρ si nécessaire, on peut faire en sorte que la boule fermée de centre a et de rayon ρ soit contenue dans U . Soient x_1 et x_2 deux éléments de cette boule. Notons $[x_1, x_2] = \{x_1 + \lambda(x_2 - x_1) ; 0 \leq \lambda \leq 1\}$ le segment de droite ayant ces deux points pour extrémités. La boule fermée de centre a et de rayon ρ étant convexe, ce segment de droite est contenu dans cette boule. D'après l'inégalité des accroissements finis, nous avons

$$\|\eta(x_1) - \eta(x_2)\| \leq \sup_{z \in [x_1, x_2]} \|D\varphi(z) - D\varphi(a)\| \|x_1 - x_2\| \leq k\|x_1 - x_2\|,$$

ce qui établit le résultat annoncé. \square

5.3. Définition. — Soit $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$ un système dynamique à temps discret défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, dont le générateur φ_1 est un difféomorphisme de classe C^1 d'un ouvert U_1 de Ω sur un autre ouvert U_{-1} de Ω . Soit $a \in U_1$ un point d'équilibre, c'est-à-dire un point tel que $\varphi_1(a) = a$. On dit que ce point d'équilibre est hyperbolique si toutes les valeurs propres de $D\varphi_1(a)$ sont de module $\neq 1$.

5.4. Théorème de Hartman et Grobman pour un système discret. — Soit $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$ un système dynamique à temps discret défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, dont le générateur φ_1 est un difféomorphisme de classe C^1 d'un ouvert U_1 de Ω sur un autre ouvert U_{-1} de Ω . Soit $a \in U_1$ un point d'équilibre hyperbolique de ce système. Alors le système dynamique considéré, au voisinage du point d'équilibre a , et le système linéarisé en ce point (ayant pour générateur l'isomorphisme linéaire $D\varphi_1(a)$), au voisinage de l'origine de l'espace vectoriel E associé à \mathcal{E} , sont localement topologiquement conjugués.

Preuve : Posons $B = D\varphi_1(a)$. C'est un isomorphisme de E sur lui-même, car par hypothèse φ_1 est un difféomorphisme. De plus, nous avons supposé toutes ses valeurs propres de module $\neq 1$. D'après le théorème 5.1, il existe $K > 0$ tel que pour tout couple (η, ζ) d'applications de E dans E , bornées et lipschitziennes de rapport $k < K$, il existe un homéomorphisme unique $h : E \rightarrow E$, tel que $h - \text{id}_E$ soit borné et que

$$(B + \eta) \circ h = h \circ (B + \zeta).$$

Choisissons un réel k vérifiant $0 < k < K$. D'après le lemme 5.2, il existe $\rho > 0$ tel que la boule fermée de centre a et de rayon ρ soit contenue dans U_1 , et que la restriction à cette boule de l'application, à valeurs dans l'espace vectoriel E ,

$$x \mapsto \varphi_1(x) - \varphi_1(a) - B(x - a)$$

soit lipschitzienne de rapport $k/2$, donc bornée. Autrement dit, puisque $\varphi_1(a) = a$, nous pouvons écrire

$$\varphi_1(x) = a + (B + \eta)(x - a), \quad (*)$$

et l'application η , restreinte à la boule fermée de centre l'origine et de rayon ρ , est lipschitzienne de rapport $k/2$. D'après le lemme 4.3, il existe une application $\tilde{\eta} : E \rightarrow E$, dont la restriction à la boule fermée de centre l'origine et de rayon ρ coïncide avec la restriction de η à cette boule, et qui est bornée et lipschitzienne de rapport k .

Les applications B et $\tilde{\eta}$ vérifient les hypothèses du théorème 5.1 (nous remplaçons, dans l'énoncé de ce théorème, ζ par $\tilde{\eta}$ et η par 0). Il existe donc un homéomorphisme unique $h : E \rightarrow E$ tel que $h - \text{id}_E$ soit borné et que

$$B \circ h = h \circ (B + \tilde{\eta}).$$

Nous avons, d'après la définition de $\tilde{\eta}$,

$$\tilde{\eta}(0) = \eta(0) = \varphi_1(a) - \varphi_1(a) = 0,$$

donc nous devons avoir

$$B \circ h(0) = h \circ (B + \tilde{\eta})(0) = h(0).$$

Comme 1 n'est pas valeur propre de B , cela implique nécessairement $h(0) = 0$.

Posons alors, pour tout $x \in \mathcal{E}$,

$$\tilde{h}(x) = h(x - a).$$

L'application $\tilde{h} : \mathcal{E} \rightarrow E$ est un homéomorphisme qui applique a sur l'origine, et qui vérifie, pour tout $x \in \mathcal{E}$,

$$B \circ \tilde{h}(x) = \tilde{h}(a + (B + \tilde{\eta})(x - a)).$$

Mais pour $\|x - a\| \leq \rho$, nous avons $\tilde{\eta}(x - a) = \eta(x - a)$, donc, d'après (*), $a + (B + \eta)(x - a) = \varphi_1(x)$, et nous pouvons écrire

$$\text{sur la boule } B_F(a, \rho), \quad B \circ \tilde{h} = \tilde{h} \circ \varphi_1.$$

En utilisant la proposition 2.7, il est facile d'en déduire que la restriction du système dynamique $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$ à la boule de centre a et de rayon ρ , et le système linéarisé en a , formé par les itérées de la restriction de $B = D\varphi_1(a)$ à l'image par \tilde{h} de cette boule, sont topologiquement conjugués par l'homéomorphisme \tilde{h} . Autrement dit, le système dynamique considéré, au voisinage du point d'équilibre a , et son linéarisé en ce point, au voisinage de l'origine, sont localement topologiquement conjugués. \square

6. Cas d'un système dynamique à temps continu

Commençons par établir un théorème qui est l'analogue, pour un système dynamique à temps continu, du théorème 5.1, et qui constitue, en fait, une version globale du théorème de Hartman et Grobman.

6.1. Théorème. — Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et $A \in \mathcal{L}(E, E)$ une application linéaire de E dans lui-même dont toutes les valeurs propres ont une partie réelle $\neq 0$. Il existe un réel $K > 0$ ayant la propriété suivante : pour tout champ de vecteurs X sur E tel que l'application $X - A$ soit bornée et lipschitzienne de rapport $k < K$, les systèmes dynamiques formés par le flot réduit de X et par le flot réduit du champ de vecteurs linéaire A sont topologiquement conjugués.

Preuve : Soient λ_i ($1 \leq i \leq p$) les valeurs propres distinctes de A . Par hypothèse, nous avons $\Re \lambda_i \neq 0$. Posons $B = \exp(A)$. C'est une application linéaire inversible de E dans lui-même, dont les valeurs propres sont (proposition VII.1.18) $\mu_i = e^{\lambda_i}$, donc $|\mu_i| = e^{\Re \lambda_i} \neq 1$. Nous pouvons donc appliquer à B le théorème 5.1, dans lequel nous remplaçons η par 0. Nous voyons ainsi qu'il existe un réel $K_1 > 0$ ayant la propriété suivante : pour toute application $\zeta : E \rightarrow E$, bornée et lipschitzienne de rapport strictement inférieur à K_1 , il existe un homéomorphisme unique $h : E \rightarrow E$ tel que $h - \text{id}_E$ soit borné et que

$$B \circ h = h \circ (B + \zeta).$$

Pour $k > 0$, l'application $k \mapsto e^{\|A\|+k} - e^{\|A\|}$ est strictement croissante, tend vers 0 lorsque $k \rightarrow 0$ et vers $+\infty$ lorsque $k \rightarrow +\infty$. Il existe donc un unique $K > 0$ tel que $e^{\|A\|+K} - e^{\|A\|} = K_1$. Pour $0 < k < K$, nous avons alors $e^{\|A\|+k} - e^{\|A\|} < K_1$.

Soit X un champ de vecteurs sur E tel que $X - A$ soit borné et lipschitzien de rapport $k < K$. Le champ de vecteurs X est lipschitzien de rapport $\|A\| + k$; son flot réduit Φ est donc défini sur $\mathbb{R} \times E$ (lemme 4.5). Quant au flot réduit du champ de vecteurs linéaire A , il a pour expression

$$\Psi(t, x) = \Psi_t(x) = \exp(tA)(x).$$

Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$,

$$\Xi_t(x) = \Phi_t(x) - \Psi_t(x) = \Phi_t(x) - \exp(tA)(x).$$

Nous avons en particulier

$$\Xi_1(x) = \Phi_1(x) - \exp(A)(x) = (\Phi_1 - B)(x).$$

D'après le lemme 4.6, Ξ_1 est une application de E dans lui-même bornée et lipschitzienne de rapport $e^{\|A\|+k} - e^{\|A\|}$, strictement inférieur à K_1 , en raison de la définition même de K . Il existe donc un homéomorphisme $h : E \rightarrow E$, unique, tel que $h - \text{id}_E$ soit borné et que

$$B \circ h = h \circ (B + \Xi_1),$$

c'est-à-dire

$$\Psi_1 \circ h = h \circ \Phi_1. \quad (*)$$

Nous allons prouver que pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons aussi

$$\Psi_t \circ h = h \circ \Phi_t, \quad (**)$$

c'est-à-dire que l'homéomorphisme h conjugue les flots réduits de X et de A . Soit $t \in \mathbb{R}$ quelconque. Composons chacun des membres de l'égalité (*) avec Ψ_t à gauche et Φ_{-t} à droite. En remarquant que Ψ_t et Ψ_1 d'une part, Φ_{-t} et Φ_1 d'autre part, commutent, nous obtenons

$$\Psi_1 \circ (\Psi_t \circ h \circ \Phi_{-t}) = (\Psi_t \circ h \circ \Phi_{-t}) \circ \Phi_1,$$

ou encore, en posant $h' = \Psi_t \circ h \circ \Phi_{-t}$,

$$\Psi_1 \circ h' = h' \circ \Phi_1,$$

qui est identique à (*), h étant remplacé par h' . Étant composé de trois homéomorphismes, h' est un homéomorphisme de E sur lui-même. Nous allons prouver que $h' - \text{id}_E$ est borné; l'unicité de l'homéomorphisme h vérifiant (*) et tel que $h - \text{id}_E$ soit borné nous permettra alors d'affirmer que $h' = h$; compte tenu de $\Phi_{-t} = (\Phi_t)^{-1}$, cela est équivalent à l'égalité (**) que nous voulons prouver.

En définitive, nous n'avons plus qu'à prouver que $h' - \text{id}_E$ est bornée. Nous avons

$$\begin{aligned} h' - \text{id}_E &= \Psi_t \circ h \circ \Phi_{-t} - \text{id}_E \\ &= \Psi_t \circ h \circ \Phi_{-t} - \Phi_t \circ h \circ \Phi_{-t} + \Phi_t \circ h \circ \Phi_{-t} - \Phi_t \circ \Phi_{-t} \\ &= (\Psi_t - \Phi_t) \circ h \circ \Phi_{-t} + \Phi_t \circ h \circ \Phi_{-t} - \Phi_t \circ \Phi_{-t}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.6, $\Psi_t - \Phi_t$ est borné; par suite, $(\Psi_t - \Phi_t) \circ h \circ \Phi_{-t}$ est borné. D'autre part, pour tout $x \in E$, nous pouvons écrire

$$\Phi_t \circ h \circ \Phi_{-t}(x) - \Phi_t \circ \Phi_{-t}(x) = \Phi_t \left((h - \text{id}_E)(\Phi_{-t}(x)) \right).$$

Le champ de vecteurs X étant lipschitzien de rapport $\|A\| + k$, Φ_t est lipschitzien de rapport $e^{(\|A\| + k)|t|}$. Comme $h - \text{id}_E$ est borné, l'égalité ci-dessus montre que $\Phi_t \circ h \circ \Phi_{-t} - \Phi_t \circ \Phi_{-t}$ est borné. Par suite, $h' - \text{id}_E$ l'est aussi. \square

6.2. Définition. — Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^p ($p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie. Un point d'équilibre $a \in \Omega$ de ce champ de vecteurs est dit *hyperbolique* si toutes les valeurs propres de $DX(a)$ ont une partie réelle non nulle.

6.3. Théorème de Hartman et Grobman. — Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^p ($p \geq 1$) défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, et $a \in \Omega$ un point d'équilibre hyperbolique de ce champ de vecteurs. Le système dynamique formé par le flot réduit de X , au voisinage du point d'équilibre a , et son linéarisé en ce point, au voisinage de l'origine de l'espace vectoriel E associé à \mathcal{E} , sont localement topologiquement conjugués.

Preuve : Rappelons (proposition 1.4) que le système dynamique linéarisé au point a est formé par le flot réduit du champ de vecteurs linéaire $DX(a)$, et qu'il admet l'origine pour point d'équilibre. Puisque les valeurs propres de $DX(a)$ ont toutes une partie réelle non nulle, le théorème 6.1 montre qu'il existe $K > 0$ ayant la propriété suivante : pour tout champ de vecteurs Y défini sur E tel que $Y - DX(a)$ soit borné et lipschitzien de rapport $k < K$, les systèmes dynamiques formés par les flots réduits de Y et de $DX(a)$ sont topologiquement conjugués.

Soit k un réel vérifiant $0 < k < K$. D'après le lemme 5.2, il existe $\rho > 0$ tel que la boule fermée $B_F(a, \rho)$, de centre a et de rayon ρ , soit contenue dans Ω et que la restriction à cette boule de l'application (définie sur une boule de l'espace affine \mathcal{E} , et à valeurs dans l'espace vectoriel E),

$$x \mapsto X(x) - DX(a)(x - a)$$

soit bornée et lipschitzienne de rapport $k/2$. Posons, pour tout $y \in E$ vérifiant $\|y\| \leq \rho$,

$$\eta(y) = X(a + y) - DX(a)(y).$$

L'application η , qui est composée de l'application précédente et de l'isomorphisme affine de E sur \mathcal{E} qui applique l'origine sur le point a , est bornée et lipschitzienne de rapport

$k/2$. D'après le lemme 4.3, elle se prolonge en une application $\tilde{\eta} : E \rightarrow E$, bornée et lipschitzienne de rapport k . Posons, pour tout $y \in E$,

$$Y(y) = DX(a)(y) + \tilde{\eta}(y).$$

Le théorème 6.1 montre que les systèmes dynamiques formés par les flots réduits du champ de vecteurs Y et du champ de vecteurs $DX(a)$ sont topologiquement conjugués; notons $h : E \rightarrow E$ l'homéomorphisme qui les conjugue.

Puisque $\tilde{\eta}(0) = \eta(0) = 0$, le champ de vecteurs Y admet l'origine pour point d'équilibre; son flot réduit étant topologiquement conjugué à celui du champ de vecteurs linéaire $DX(a)$ (dont l'origine est l'unique point d'équilibre, puisque les valeurs propres de $DX(a)$ sont toutes non nulles), le champ Y n'a pas d'autre point d'équilibre que l'origine. Par suite, nous avons nécessairement $h(0) = 0$.

Pour tout $x \in \Omega$ vérifiant $\|x - a\| \leq \rho$, nous avons

$$X(x) = Y(x - a).$$

L'image directe, par l'isomorphisme affine $x \mapsto x - a$ de l'espace affine \mathcal{E} sur son espace vectoriel associé E , du champ de vecteurs X restreint à la boule fermée $B_F(a, \rho)$ de \mathcal{E} de centre a et de rayon ρ , est donc le champ de vecteurs Y restreint à la boule fermée $B_F(0, \rho)$ de E de centre l'origine et de rayon ρ . Par suite, l'application $\tilde{h} : x \mapsto h(x - a)$, composée de cet isomorphisme affine et de l'homéomorphisme h , réalise une conjugaison topologique du système dynamique constitué par le flot réduit du champ de vecteurs X restreint à $B_F(a, \rho)$ et du système dynamique constitué par le flot réduit du champ de vecteurs linéaire $DX(a)$ restreint à $h(B_F(0, \rho))$. Comme $\tilde{h}(a) = 0$, nous avons prouvé que le système dynamique formé par le flot réduit de X , au voisinage du point d'équilibre a , et le système dynamique formé par le flot réduit de $DX(a)$, au voisinage de l'origine, sont localement topologiquement conjugués. \square

7. Variétés stable et instable d'un point hyperbolique

Rappelons une définition déjà donnée au chapitre III (définition III.3.1), en introduisant une nouvelle terminologie mieux adaptée au cas des points d'équilibre hyperboliques.

7.1. Définition. — Soit $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ un système dynamique sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, dont l'ensemble des temps Θ peut être \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ , \mathbb{Z} ou \mathbb{N} . Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre.

On appelle *ensemble stable* (ou *bassin d'attraction*) du point a l'ensemble des éléments x de Ω tels que pour tout $t \in \Theta$, $t \geq 0$, $\varphi_t(x)$ soit défini, et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x) = a$.

Lorsque $\Theta = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} , on appelle *ensemble instable* (ou *bassin de répulsion*) du point a l'ensemble des éléments x de Ω tels que pour tout $t \in \Theta$, $t \leq 0$, $\varphi_t(x)$ soit défini, et que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) = a$.

7.2. Cas d'un système linéaire à temps discret. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $B \in GL(E)$ une application linéaire inversible de E dans lui-même dont toutes les valeurs propres sont de module $\neq 1$. On considère le système dynamique à temps discret $\{B^n ; n \in \mathbb{Z}\}$ ayant B pour générateur. Il admet l'origine pour point d'équilibre.

Ainsi que nous l'avons vu lors de la démonstration du théorème 5.1, l'espace E se décompose en une somme directe,

$$E = E_c \oplus E_d,$$

où les deux sous-espaces vectoriels E_c et E_d de E sont invariants par B et tels que la restriction de B à E_c ait toutes ses valeurs propres de module < 1 et la restriction de B à E_d toutes ses valeurs propres de module > 1 . Nous avons, pour tout $x_c \in E_c$ et tout $x_d \in E_d$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} B^n(x_c) = 0 \quad \text{et, si } x_c \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \|B^n(x_c)\| = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow -\infty} B^n(x_d) = 0 \quad \text{et, si } x_d \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|B^n(x_d)\| = +\infty. \end{aligned}$$

Tout élément x de E se décomposant, de manière unique, en $x = x_c + x_d$, avec $x_c \in E_c$ et $x_d \in E_d$, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} B^n(x) = 0 \quad \text{si et seulement si } x \in E_c, \\ \lim_{n \rightarrow -\infty} B^n(x) = 0 \quad \text{si et seulement si } x \in E_d. \end{aligned}$$

L'ensemble stable de l'origine est donc E_c , et l'ensemble instable E_d .

7.3. Cas d'un système linéaire à temps continu. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $A = \mathcal{L}(E, E)$ une application linéaire de E dans lui-même dont toutes les valeurs propres ont une partie réelle non nulle. On considère le système dynamique à temps continu $\{\exp(tA); t \in \mathbb{R}\}$ formé par le flot réduit du champ de vecteurs linéaire A . Il admet l'origine pour point d'équilibre.

Comme ci-dessus, l'espace E se décompose en une somme directe,

$$E = E_c \oplus E_d,$$

où E_c et E_d sont deux sous-espaces vectoriels de E invariants par A , tels que la restriction de A à E_c (resp., à E_d) ait toutes ses valeurs propres de partie réelle < 0 (resp., de partie réelle > 0).

On rappelle (proposition VII.1.18) que si les valeurs propres distinctes de A sont λ_i , $1 \leq i \leq p$, les valeurs propres de $\exp(tA)$ sont $\mu_i(t) = e^{\lambda_i t}$. De plus, E_c et E_d sont invariants par $\exp(tA)$, et les valeurs propres de la restriction de $\exp(tA)$ à E_c (resp., à E_d) sont de module < 1 pour $t > 0$ (resp., pour $t < 0$) et de module > 1 pour $t < 0$ (resp., pour $t > 0$). Par suite, pour $x \in E$, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(tA)(x) = 0 \quad \text{si et seulement si } x \in E_c, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \exp(tA)(x) = 0 \quad \text{si et seulement si } x \in E_d. \end{aligned}$$

Les ensembles stable et instable de l'origine sont donc, respectivement, E_c et E_d .

7.4. Généralisation. — Soit $\{\varphi_t; t \in \Theta\}$ un système dynamique sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, dont l'ensemble des temps Θ est \mathbb{R} ou \mathbb{Z} . Si le système est à temps discret, c'est-à-dire si $\Theta = \mathbb{Z}$, nous supposons que son générateur φ_1 est un difféomorphisme de classe C^p , $p \geq 2$, d'un ouvert U_1 de Ω sur un autre ouvert U_{-1} de Ω . Si le système est à temps continu, c'est-à-dire si $\Theta = \mathbb{R}$, nous supposons qu'il admet un générateur infinitésimal X , et que celui-ci est un champ de vecteurs différentiable de classe C^p sur Ω . Dans les deux cas, pour tout $t \in \Theta$, φ_t est un difféomorphisme de classe C^p d'un ouvert U_t de Ω sur un autre ouvert U_{-t} de Ω .

Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre hyperbolique du système (au sens des définitions 5.3 si le système est à temps discret, 6.2 s'il est à temps continu). Le système linéarisé au point a , $\{D\varphi_t(a); t \in \Theta\}$, admet l'origine pour point d'équilibre hyperbolique. Il est du type étudié dans les deux paragraphes précédents. L'espace vectoriel E associé à l'espace affine \mathcal{E} se décompose donc en somme directe

$$E = E_c \oplus E_d,$$

le sous-espace E_c étant l'ensemble stable et le sous-espace E_d l'ensemble instable de l'origine, pour le système linéarisé.

D'après le théorème de Hartman et Grobman (5.4 si le système est à temps discret, 6.3 s'il est à temps continu), le système considéré est, au voisinage du point d'équilibre a , localement topologiquement conjugué au système linéarisé au voisinage de l'origine. Soit h un homéomorphisme d'un voisinage W de l'origine dans E sur un voisinage $h(W)$ de a dans \mathcal{E} , appliquant l'origine sur a , qui réalise la conjugaison. Cet homéomorphisme applique $E_c \cap W$ et $E_d \cap W$, respectivement sur les parties $h(E_c \cap W)$ et $h(E_d \cap W)$ de Ω . Nous voyons ainsi que les parties $h(E_c \cap W)$ et $h(E_d \cap W)$ de Ω sont contenues, respectivement, dans l'ensembles stable et dans l'ensemble instable du point d'équilibre a , pour le système étudié.

On peut donc penser que localement, au voisinage du point a , les ensembles stable et instable de ce point sont qualitativement analogues (en un sens à préciser) aux intersections avec W des sous-espaces E_c et E_d , puisqu'ils en sont les images par un homéomorphisme. Cependant, un homéomorphisme ne conserve pas les propriétés liées à la différentiabilité, de sorte que les considérations qui précèdent ne nous renseignent pas sur l'éventuelle différentiabilité des ensembles stable et instable du point a .

Heureusement, ainsi que nous allons le voir, on peut établir directement, sans utiliser le théorème de Hartman et Grobman, un résultat beaucoup plus précis, prouvant que les ensembles stable et instable du point a sont des variétés différentiables de classe C^p . À ce titre, on peut parfaitement définir l'espace tangent au point a à l'ensemble stable (resp., à l'ensemble instable); nous prouverons que c'est le sous-espace affine de \mathcal{E} parallèle à l'espace vectoriel E_c (resp., parallèle à l'espace vectoriel E_d) passant par le point a .

7.5. Hypothèses et notations. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $B \in \mathcal{L}(E, E)$ une application linéaire inversible de E dans lui-même, dont toutes les valeurs propres sont de module $\neq 1$. Comme dans la démonstration du théorème 5.1, décomposons E en somme directe

$$E = E_c \oplus E_d$$

de deux sous-espaces vectoriels invariants par B , tels que la restriction B_c de B à E_c ait toutes ses valeurs propres de module < 1 , et la restriction B_d de B à E_d toutes ses valeurs propres de module > 1 . Soit r un réel vérifiant $0 < r < 1$ tel que l'intervalle fermé $[1 - r, 1 + r]$ ne contienne le module d'aucune valeur propre de B . Remarquons que les valeurs propres de B_c sont toutes de module $< 1 - r$, et les valeurs propres de B_d toutes de module $> 1 + r$; donc les valeurs propres de B_d^{-1} (inverses des valeurs propres de B_d) toutes de module $< \frac{1}{1 + r}$.

Nous savons (théorème VII.1.17) qu'il existe sur E_c une norme euclidienne $x_c \mapsto \|x_c\|$ telle que la norme associée de B_c vérifie $\|B_c\| \leq 1 - r$, et sur E_d une norme euclidienne $x_d \mapsto \|x_d\|$ telle que la norme associée de B_d^{-1} vérifie $\|B_d^{-1}\| \leq \frac{1}{1 + r}$.

Munissons E de la norme

$$\|x\| = \|x_c + x_d\| = \sup(\|x_c\|, \|x_d\|), \quad x_c \in E_c, \quad x_d \in E_d,$$

et convenons d'identifier $E = E_c \oplus E_d$ avec le produit $E_c \times E_d$, un élément $x_c + x_d$ de E (avec $x_c \in E_c, x_d \in E_d$) étant identifié au couple $(x_c, x_d) \in E_c \times E_d$.

Soit ρ un réel > 0 , W la boule ouverte de E de centre l'origine et de rayon ρ , \overline{W} son adhérence (c'est-à-dire la boule fermée de centre l'origine et de rayon ρ). D'après le choix de la norme sur E (identifié, comme nous l'avons indiqué ci-dessus, au produit $E_c \times E_d$), nous avons

$$W = W_c \times W_d, \quad \overline{W} = \overline{W}_c \times \overline{W}_d,$$

où W_c et W_d sont les boules ouvertes, respectivement de E_c et de E_d , de centre l'origine et de rayon ρ , \overline{W}_c et \overline{W}_d leurs adhérences, respectivement dans E_c et dans E_d .

Soit $\eta : \overline{W} \rightarrow E$ une application vérifiant $\eta(0) = 0$, lipschitzienne de rapport k , avec $0 < k < r$. Nous décomposons η en somme de deux applications

$$\eta = \eta_c + \eta_d,$$

avec $\eta_c : \overline{W} \rightarrow E_c$ et $\eta_d : \overline{W} \rightarrow E_d$. Ces deux applications vérifient $\eta_c(0) = \eta_d(0) = 0$, et elles sont lipschitziennes de rapport k .

Nous allons nous intéresser au système dynamique à temps discret ayant pour générateur l'application $B + \eta$, définie sur \overline{W} . Puisque $(B + \eta)(0) = 0$, ce système admet l'origine pour point d'équilibre. Nous allons nous intéresser en particulier aux ensembles stable et instable de l'origine, pour ce système.

Dans le cas particulier où η est différentiable, le système linéarisé au voisinage de l'origine est le système dynamique à temps discret ayant pour générateur l'application linéaire $B + D\eta(0)$, qui admet aussi l'origine pour point d'équilibre; l'ensemble stable de l'origine, pour ce système linéarisé, est un sous-espace vectoriel de E (le plus grand sous-espace vectoriel de E invariant par l'application linéaire $B + D\eta(0)$ et tel que les valeurs propres de la restriction de $B + D\eta(0)$ à ce sous-espace soient toutes de module < 1). Nous montrerons que l'ensemble stable de l'origine, pour le système de générateur $B + \eta$, admet un espace tangent à l'origine, et que cet espace tangent n'est autre que le sous-espace vectoriel de E qui est l'ensemble stable de l'origine pour le système linéarisé, de générateur $B + D\eta(0)$. L'ensemble instable de l'origine a des propriétés analogues.

En particulier, lorsque la différentielle de η à l'origine est nulle, les espaces tangents à l'origine aux ensembles stable et instable de ce point, pour le système de générateur $B + \eta$, sont les sous-espaces vectoriels E_c et E_d de E , respectivement.

7.6. Proposition. — *Les hypothèses et notations étant celles précisées ci-dessus, il existe une application lipschitzienne $g_c : \overline{W}_c \rightarrow E_d$ dont le graphe, c'est-à-dire l'ensemble*

$$\{ (x_c, x_d) \in E_c \times E_d ; x_c \in \overline{W}_c, x_d = g_c(x_c) \},$$

est l'ensemble stable de l'origine pour le système dynamique à temps discret de générateur $B + \eta$.

De même, le graphe de la restriction de g_c à l'ouvert W_c de E_c est l'ensemble stable de l'origine pour le système dynamique à temps discret engendré par la restriction de $B + \eta$ à l'ouvert W de E .

De plus, si l'application η est différentiable de classe C^p sur W (avec $p \geq 1$), l'application g_c est différentiable de classe C^p sur W_c .

Preuve : Soit \mathbb{E} l'ensemble des suites dans E qui convergent vers l'origine. Nous noterons $x = (x(n), n \in \mathbb{N})$ une suite élément de \mathbb{E} (nous évitons de placer n en indice car nous utiliserons c et d pour indices afin de repérer les points appartenant à E_c ou à E_d). Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous écrirons

$$x(n) = (x_c(n), x_d(n)),$$

avec $x_c(n) \in E_c, x_d(n) \in E_d$.

Rappelons que l'espace \mathbb{E} , muni de la norme

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x(n)\|,$$

est un espace de Banach.

Soit $\mathbb{E}_{\overline{W}}$ (resp., \mathbb{E}_W) l'ensemble des suites éléments de \mathbb{E} dont tous les termes sont dans \overline{W} (resp., dans W). L'ensemble $\mathbb{E}_{\overline{W}}$ est une partie fermée, donc complète, de \mathbb{E} , contenant \mathbb{E}_W , qui en est une partie ouverte.

Cherchons à quelle condition une suite $x = (x(n), n \in \mathbb{N})$, élément de $\mathbb{E}_{\overline{W}}$, est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x(n) = (B + \eta)^n(x(0)).$$

Nous obtenons aisément les conditions

$$\begin{cases} x_c(n) = B_c(x_c(n-1)) + \eta_c(x(n-1)) & \text{pour tout } n \geq 1, \\ x_d(n) = B_d^{-1}(x_d(n+1) - \eta_d(x(n))) & \text{pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$

Ces expressions nous suggèrent de définir une application $\chi : \overline{W}_c \times \mathbb{E}_{\overline{W}} \rightarrow \mathbb{E}$ qui associe, à chaque $(a_c, x) \in \overline{W}_c \times \mathbb{E}_{\overline{W}}$, l'élément y de \mathbb{E} défini par

$$\begin{cases} y_c(n) = \begin{cases} a_c & \text{si } n = 0, \\ B_c(x_c(n-1)) + \eta_c(x(n-1)) & \text{si } n \geq 1, \end{cases} \\ y_d(n) = B_d^{-1}(x_d(n+1) - \eta_d(x(n))). \end{cases}$$

Nous voyons alors qu'une suite $x \in \mathbb{E}_{\overline{W}}$ est telle que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad x(n) = (B + \eta)^n(x(0))$$

si et seulement si

$$x = \chi(x_c(0), x),$$

ou encore, si et seulement si la suite x est point fixe de l'application $x \mapsto \chi(x_c(0), x)$. D'autre part, un point $x(0)$ de \overline{W} appartient à l'ensemble stable de l'origine si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(B + \eta)^n(x(0))$ est défini et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (B + \eta)^n(x(0)) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si la suite $x = ((B + \eta)^n(x(0)), n \in \mathbb{N})$ a tous ses termes bien définis et appartient à $\mathbb{E}_{\overline{W}}$.

Nous allons montrer que pour chaque $a_c \in \overline{W}_c$ fixé, l'application de $\mathbb{E}_{\overline{W}}$ dans $\mathbb{E} : x \mapsto \chi(a_c, x)$, admet un point fixe unique; ce point fixe sera une suite $x = (x(n), n \in \mathbb{N})$ dont le premier terme $(x_c(0), x_d(0))$ vérifiera nécessairement $x_c(0) = a_c$; quant à la composante $x_d(0)$, elle ne dépendra que de a_c , et nous pourrons la noter $g_c(a_c)$, définissant ainsi une application $g_c : \overline{W}_c \rightarrow E_d$; et nous aurons prouvé que $x(0) = (a_c, g_c(a_c))$ est l'unique point de l'ensemble stable de l'origine dont la projection sur E_c est a_c .

Soient $a_c \in \overline{W}_c$, x et x' deux éléments de $\mathbb{E}_{\overline{W}}$. Posons $y = \chi(a_c, x)$, $y' = \chi(a_c, x')$.

Nous avons

$$\begin{cases} y_c(n) - y'_c(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ B_c(x_c(n-1) - x'_c(n-1)) \\ \quad + \eta_c(x(n-1)) - \eta_c(x'(n-1)) & \text{si } n \geq 1, \end{cases} \\ y_d(n) - y'_d(n) = B_d^{-1}(x_d(n+1) - x'_d(n+1) - \eta_d(x(n)) + \eta_d(x'(n))). \end{cases}$$

Nous en déduisons les majorations

$$\|y_c(n) - y'_c(n)\| \leq (\|B_c\| + k)\|x - x'\| < (1 - r + k)\|x - x'\|,$$

$$\|y_d(n) - y'_d(n)\| \leq \|B_d^{-1}\|(1 + k)\|x - x'\| < \frac{1 + k}{1 + r}\|x - x'\|,$$

ce qui prouve que l'application $x \mapsto \chi(a_c, x)$ est lipschitzienne de rapport

$$\sup \left(1 - r + k, \frac{1 + k}{1 + r} \right),$$

strictement inférieur à 1.

Nous remarquons aussi que $\|y_c(0)\| = \|a_c\| \leq \rho$ (cette dernière inégalité devenant stricte si $a_c \in W_c$), que pour tout $n \geq 1$

$$\|y_c(n)\| \leq (1 - r + k)\|x(n - 1)\| \leq \rho$$

et que pour tout $n \geq 0$

$$\|y_d(n)\| \leq \frac{1 + k}{1 + r} \sup(\|x_d(n + 1)\|, \|x(n)\|) \leq \rho.$$

De plus, dans chacune des deux suites d'inégalités ci-dessus, la dernière inégalité devient stricte si $a_c \in W_c$.

Ces inégalités montrent que pour tout $a_c \in \overline{W_c}$ et tout $x \in \mathbb{E}_{\overline{W}}$, $y = \chi(a_c, x)$ est une suite dans E qui tend vers 0 dont tous les termes sont éléments de \overline{W} , donc un élément de $\mathbb{E}_{\overline{W}}$.

Si de plus $a_c \in W_c$, $y = \chi(a_c, x)$ est élément de \mathbb{E}_W .

L'espace métrique $\mathbb{E}_{\overline{W}}$ étant complet, le classique théorème du point fixe (rappelé en VII.2.1) permet d'affirmer que pour chaque $a_c \in \overline{W_c}$, il existe une suite $x \in \mathbb{E}_{\overline{W}}$ unique telle que $\chi(a_c, x) = x$. Les inégalités discutées ci-dessus montrent de plus que si $a_c \in W_c$, la suite x telle que $\chi(a_c, x) = x$ est élément de \mathbb{E}_W . Ainsi que nous l'avons vu plus haut cela prouve qu'il existe une application $g_c : \overline{W_c} \rightarrow E_d$ telle que pour tout $a_c \in \overline{W_c}$, $(a_c, g_c(a_c))$ soit l'unique élément de l'ensemble stable de l'origine dont la projection sur E_c est a_c . Cela prouve aussi que pour tout $a_c \in W_c$, $(a_c, g_c(a_c))$ est l'unique élément de l'ensemble stable de l'origine pour le système dynamique engendré par la restriction de $B + \eta$ à W dont la projection sur E_c est a_c .

D'autre part, l'application χ est lipschitzienne de rapport 1 par rapport à sa première variable. Un complément classique du théorème du point fixe (rappelé en VII.2.2) permet alors de montrer que l'application g qui associe, à chaque $a_c \in \overline{W_c}$, le point fixe $g(a_c) \in \mathbb{E}_{\overline{W}}$ de l'application $x \mapsto \chi(a_c, x)$, est lipschitzienne de rapport $1/(1 - k)$. Or l'application g_c est la composée de g et de la projection de \mathbb{E} sur E_d qui, à une suite $(x(n), n \in \mathbb{N})$ fait correspondre $x_d(0)$. Cette projection étant linéaire de norme 1, l'application g_c est lipschitzienne, de rapport $1/(1 - k)$.

Supposons maintenant η différentiable de classe C^p sur W (avec $p \geq 1$). L'expression de χ et les inégalités établies ci-dessus montrent alors que cette application se prolonge en une application, encore notée χ , définie sur $W_c \times \mathbb{E}$, différentiable de classe C^p . Ainsi que nous l'avons vu ci-dessus, pour tout $a_c \in W_c$, l'application de \mathbb{E} dans lui-même : $x \mapsto \chi(a_c, x)$ est lipschitzienne de rapport $\sup(1 - r + k, (1 + k)/(1 + r))$. Par suite, la différentielle partielle de χ par rapport à sa seconde variable, en tout point (a_c, x) de $W_c \times \mathbb{E}$, vérifie

$$\|D_2\chi(a_c, x)\| \leq \sup \left(1 - r + k, \frac{1 + k}{1 + r} \right) < 1.$$

Un autre complément du théorème du point fixe (également rappelé en VII.2.2) montre alors que l'application g qui associe, à chaque $a_c \in W_c$, le point fixe $g(a_c)$ de l'application $x \mapsto \chi(a_c, x)$, est différentiable de classe C^p . Comme l'application g_c est composée de g et d'une projection (application linéaire continue, donc différentiable de classe C^∞), elle est, elle aussi, différentiable de classe C^p . \square

7.7. Remarque. — De la même manière, moyennant des hypothèses convenables (que le lecteur est invité à préciser lui-même) concernant le rapport de l'application lipschitzienne η , on montre que l'ensemble instable de l'origine, pour le système dynamique de générateur $B + \eta$, est le graphe d'une application g_d de \overline{W}_d dans E_c , et que si la restriction de η à l'ouvert W est différentiable de classe C^p , la restriction de g_d à W_d est différentiable de classe C^p .

7.8. Proposition. — *Les hypothèses et notations étant celles de la proposition précédente, on suppose de plus l'application η différentiable de classe C^p sur W , avec $p \geq 1$. La différentielle, à l'origine, de l'application $g_c : W_c \rightarrow E_d$, est l'application linéaire de E_c dans E_d dont le graphe est l'ensemble stable de l'origine pour le système dynamique linéarisé, de générateur $B + D\eta(0)$.*

Preuve : Notons $g : W_c \rightarrow \mathbb{E}$ l'application qui associe, à chaque $a_c \in W_c$, le point fixe de l'application $x \mapsto \chi(a_c, x)$. Nous avons, pour tout $a_c \in W_c$,

$$g(a_c) = \chi(a_c, g(a_c)).$$

Différentions cette expression au point $(0, 0)$. En remarquant que $g(0) = 0$ (suite identiquement nulle), nous obtenons pour tout $b_c \in E_c$,

$$Dg(0)(b_c) = D\chi(0, 0)(b_c, Dg(0)(b_c)).$$

En explicitant l'expression de $D\chi(0, 0)$, nous voyons que $Dg(0)(b_c)$ est la suite $z = (z(n), n \in \mathbb{N})$, élément de \mathbb{E} , qui vérifie

$$\begin{cases} z_c(n) = \begin{cases} b_c & \text{si } n = 0, \\ B_c(z_c(n-1)) + D\eta_c(0)(z(n-1)) & \text{si } n \geq 1, \end{cases} \\ z_d(n) = B_d^{-1}(z_d(n+1) - D\eta_d(0)(z(n))). \end{cases}$$

Ces formules sont exactement identiques à celles qui sont vérifiées par la suite $g(a_c)$, à condition de remplacer a_c par b_c et η par $D\eta(0)$. Nous voyons donc que pour tout $b_c \in E_c$, $Dg(0)(b_c)$ est l'unique suite z , convergeant vers 0, dont le premier terme $z(0) = (z_c(0), z_d(0))$ vérifie $z_c(0) = b_c$, qui satisfait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z(n) = (B + D\eta(0))^n(z(0))$.

Quant à la différentielle de g_c à l'origine, on voit aisément que $Dg_c(0)(b_c)$ n'est autre que la projection $z_d(0)$, sur le sous-espace E_d , du premier terme $z(0)$ de la suite $z = Dg(0)(b_c)$. Autrement dit, $Dg_c(0)$ est l'application $b_c \mapsto z_d(0)$. Son graphe est le sous-espace vectoriel de E qui est l'ensemble stable de l'origine, pour le système dynamique linéarisé de générateur $B + D\eta(0)$. \square

Avant d'établir le théorème principal de ce paragraphe, nous devons étudier les relations entre l'ensemble stable (resp., instable) d'un point d'équilibre d'un système dynamique, et l'ensemble stable (resp., instable) de ce même point pour le système dynamique restreint à un voisinage du point d'équilibre. C'est l'objet du lemme suivant.

7.9. Lemme. — *Soit $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ un système dynamique sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, dont l'ensemble des temps Θ peut être \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ , \mathbb{Z} ou \mathbb{N} . Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre de ce système, et W un voisinage de a , $W \subset \Omega$. Soit $\{\tilde{\varphi}_t ; t \in \Theta\}$ la restriction à W de ce système dynamique (proposition 2.6).*

Le point d'équilibre a du système dynamique initial est aussi point d'équilibre du système restreint.

Un point $x \in \Omega$ est élément de l'ensemble stable du point a pour le système dynamique initial $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ si et seulement s'il existe $\theta \in \Theta, \theta \geq 0$, tel que $\varphi_\theta(x)$ soit défini et élément de l'ensemble stable du point a pour le système restreint $\{\tilde{\varphi}_t ; t \in \Theta\}$.

De même, lorsque $\Theta = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} , un point $x \in \Omega$ est élément de l'ensemble instable du point a pour le système dynamique initial $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$ si et seulement s'il existe $\theta \in \Theta, \theta \leq 0$, tel que $\varphi_\theta(x)$ soit défini et élément de l'ensemble instable du point a pour le système restreint $\{\tilde{\varphi}_t ; t \in \Theta\}$.

Preuve : Le fait que a soit aussi point d'équilibre du système restreint est conséquence immédiate de la définition des points d'équilibre (I.2.2) et de celle de système restreint (2.6).

Nous traiterons le cas des ensembles stables, celui des ensembles instables étant analogue. Soit x un élément de l'ensemble stable du système initial $\{\varphi_t ; t \in \Theta\}$. On sait alors que $\varphi_t(x)$ est défini pour tout $t \geq 0, t \in \Theta$, et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x) = a$. Puisque W est un voisinage du point a , il existe $\theta \in \Theta, \theta \geq 0$, tel que pour tout $t \in \Theta, t \geq \theta, \varphi_t(x) \in W$. Pour tout $s \in \Theta, s \geq 0$, nous pouvons écrire

$$\varphi_s(\varphi_\theta(x)) = \varphi_{s+\theta}(x) \in W,$$

et par suite

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi_s(\varphi_\theta(x)) = a,$$

ce qui prouve que $\varphi_\theta(x)$ est élément de l'ensemble stable du point a pour le système dynamique restreint à W .

Réciproquement, soit $x \in \Omega$ et $\theta \in \Theta, \theta \geq 0$, tel que $\varphi_\theta(x)$ soit défini et élément de l'ensemble stable de a pour le système dynamique restreint à W . Nécessairement, $\varphi_t(x)$ est défini pour tout $t \in \Theta$ vérifiant $0 \leq t \leq \theta$. Mais pour $t \in \Theta, t > \theta$, nous pouvons écrire

$$\varphi_t(x) = \varphi_s(\varphi_\theta(x)), \quad \text{avec } s = t - \theta \in \Theta, \quad s \geq 0.$$

Comme $\varphi_\theta(x)$ est élément de l'ensemble stable de a pour le système dynamique restreint à W , cela prouve que $\varphi_t(x)$ est défini et élément de W pour tout $t > \theta, t \in \Theta$, et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x) = a$. Le point x est donc élément de l'ensemble stable du point a pour le système dynamique initial. \square

7.10. Remarque. — Dans les hypothèses du lemme précédent, soit S l'ensemble stable du point a pour le système dynamique initial et S_W l'ensemble stable du point a pour le système dynamique restreint à W . Nous avons évidemment

$$S_W \subset S \cap W.$$

Cette inclusion est en général stricte, car étant donné un point x de $S \cap W$, il peut arriver que $\varphi_t(x)$ ne soit pas élément de W pour certaines valeurs de $t \in \Theta, t \geq 0$, bien que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x)$ soit égal à a . Un tel point x ne saurait être élément de S_W , puisque $\tilde{\varphi}_t(x)$ n'est pas défini pour tout $t \geq 0, t \in \Theta$.

Il est facile maintenant d'établir le théorème suivant. Les notions de géométrie différentielle utilisées dans l'énoncé de ce théorème (variété différentiable, immersion, espace tangent) sont présentées dans le chapitre VII, auquel le lecteur pourra se reporter si nécessaire.

7.11. Théorème. — Soit $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$ un système dynamique à temps discret sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, dont le générateur φ_1 est un difféomorphisme de classe $C^p, p \geq 2$, d'un ouvert U_1 de Ω sur un autre

ouvert U_{-1} de Ω . Soit $a \in U_1$ un point d'équilibre hyperbolique de ce système. Les ensembles stable et instable du point a sont des variétés différentiables de classe C^p , immergées dans Ω ; on les appelle variété stable et variété instable du point a , respectivement. Les espaces tangents, au point a , à la variété stable et à la variété instable, sont les sous-espaces affines de \mathcal{E} passant par le point a et parallèles, respectivement, au sous-espace stable E_c et au sous-espace instable E_d du système dynamique linéarisé de générateur $D\varphi_1(a)$.

Preuve : Pour tout $x \in U_1$, nous pouvons écrire, puisque $\varphi_1(a) = a$,

$$\varphi_1(x) = a + D\varphi_1(a)(x - a) + \eta(x - a).$$

L'application η est différentiable de classe C^p ; à l'origine, nous avons $\eta(0) = 0$ et $D\eta(0) = 0$. En restreignant η à un voisinage assez petit de l'origine, nous pouvons faire en sorte qu'elle soit lipschitzienne, de rapport aussi petit qu'on veut. Nous voyons donc qu'en identifiant l'espace affine \mathcal{E} à l'espace vectoriel qui lui est associé E au moyen de l'isomorphisme affine qui applique le point a sur l'origine, et en restreignant le système dynamique considéré à un voisinage assez petit de l'origine, nous pouvons faire en sorte que le système ainsi restreint satisfasse les hypothèses du paragraphe 7.5 et des propositions 7.6 et 7.8. Comme au paragraphe 7.5 où nous avons identifié l'espace vectoriel E au produit $E_c \times E_d$, nous identifions l'espace affine \mathcal{E} à un produit $\mathcal{E}_c \times \mathcal{E}_d$, avec $\mathcal{E}_c = a + E_c$, $\mathcal{E}_d = a + E_d$. Le point a est alors identifié au couple (a, a) , que nous noterons (a_c, a_d) pour éviter les confusions (a_c désignant le point a lorsqu'il est considéré comme élément du sous-espace affine $\mathcal{E}_c = a + E_c$ de \mathcal{E} , et a_d désignant le point a lorsqu'il est considéré comme élément du sous-espace affine $\mathcal{E}_d = a + E_d$ de \mathcal{E}). Les propositions 7.6 et 7.8 nous permettent d'affirmer qu'il existe un voisinage ouvert W de a , ainsi identifié à (a_c, a_d) , d'adhérence compacte $\overline{W} \subset U_1$, de la forme $W = W_c \times W_d$, où W_c (resp., W_d) est une boule ouverte de \mathcal{E}_c de centre a_c (resp., une boule ouverte de \mathcal{E}_d de centre a_d) pour une norme euclidienne convenablement choisie, ayant les propriétés suivantes :

- l'ensemble stable (resp., instable) du point a pour le système dynamique engendré par la restriction de φ_1 à \overline{W} est le graphe d'une application $g_c : \overline{W}_c \rightarrow \mathcal{E}_d$ appliquant a_c sur a_d (resp., d'une application $g_d : \overline{W}_d \rightarrow \mathcal{E}_c$ appliquant a_d sur a_c); l'ensemble stable (resp., instable) du point a pour la restriction à W de ce système dynamique est le graphe de la restriction de g_c à W_c (resp., de la restriction de g_d à W_d);
- la restriction de g_c à W_c (resp., de g_d à W_d) est différentiable de classe C^p .

De plus, comme nous sommes dans le cas particulièrement simple où la différentielle de η au point d'équilibre est nulle, nous pouvons aussi affirmer que

- la différentielle de g_c au point a_c (resp., de g_d au point a_d) est l'application nulle de E_c dans E_d (resp., de E_d dans E_c).

Raisonnons par exemple sur les ensembles stables. Désignons par S l'ensemble stable du point a pour le système dynamique initialement donné (engendré par φ_1), et S_W l'ensemble stable du point a pour la restriction à W de ce système dynamique. D'après la proposition 2.7, la restriction à W du système dynamique engendré par φ_1 est d'ailleurs tout simplement le système dynamique engendré par la restriction de φ_1 à W . Nous utiliserons dans ce qui suit les ouverts W et W_c , respectivement de \mathcal{E} et de \mathcal{E}_c , et non plus leurs adhérences \overline{W} et \overline{W}_c . Désormais, g_c désignera l'application de W_c dans \mathcal{E}_d dont le graphe est S_W (et non plus, comme ci-dessus, le prolongement de cette application à \overline{W}_c).

Soit n_c la dimension de \mathcal{E}_c . Puisque S_W est le graphe d'une application de classe C^p définie sur un ouvert W_c de \mathcal{E}_c , S_W est une variété différentiable de classe C^p . Il suffit en effet de composer la restriction à S_W de la projection de \mathcal{E} sur \mathcal{E}_c avec l'isomorphisme de \mathcal{E}_c sur \mathbb{R}^{n_c} déterminé par le choix d'un repère affine de \mathcal{E}_c , pour obtenir une application bijective ψ de S_W sur un ouvert $\psi(W)$ de \mathbb{R}^{n_c} . Nous pouvons alors considérer (S_W, ψ) comme une carte de S_W , dont le domaine est S_W entier. L'injection canonique de S_W dans \mathcal{E} est, en tout point, de rang n_c , puisque S_W est le graphe d'une application différentiable g_c définie sur un ouvert de \mathcal{E}_c , dont la dimension est n_c .

Pour tout entier $k \geq 0$, soit $V_k = \varphi_k^{-1}(S_W)$. Le lemme 7.9 montre que V_k est une partie de S et que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k = S$. Soit $\psi_k = \psi \circ \varphi_k \big|_{V_k}$. En remarquant que φ_k est un difféomorphisme, nous voyons que ψ_k est une application bijective de V_k sur un ouvert de \mathbb{R}^{n_c} . Nous pouvons alors munir S d'une topologie, dont les ouverts sont les réunions quelconques de parties de la forme $\psi_k^{-1}(O)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout ouvert O de \mathbb{R}^{n_c} . Cette topologie est séparée, car pour tout couple (b_1, b_2) de points distincts de S , il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\varphi_k(b_1)$ et $\varphi_k(b_2)$ soient deux points (évidemment distincts) de S_W , ce qui permet de voir que b_1 et b_2 possèdent des voisinages disjoints. Nous pouvons aussi munir S d'une structure de variété différentiable en prenant les (V_k, ψ_k) comme cartes de S , et en vérifiant que les changements de carte sont des difféomorphismes de classe C^p . Nous obtenons ainsi un atlas de classe C^p , donc défini sur cet ensemble une structure de variété différentiable de classe C^p . Nous pouvons aisément vérifier que l'injection canonique de S dans E est différentiable de classe C^p et, en tout point, de même rang n_c que l'injection canonique de S_W dans E ; c'est donc une immersion.

Enfin, d'après 7.8 et VII.5.13, l'espace affine tangent en a à S est l'image de E_c par l'application affine $v \mapsto (a_c + v, a_d + Dg_c(a_c)(v))$. Comme $Dg_c(a_c) = 0$, cet espace affine tangent est l'espace affine \mathcal{E}_c parallèle à E_c , passant par le point $a = (a_c, a_d)$.

Bien entendu, les mêmes considérations s'appliquent à l'ensemble instable du point a . \square

Afin d'établir l'analogie du théorème précédent pour un système dynamique à temps continu, nous utiliserons le lemme suivant.

7.12. Lemme. — Soient X un champ de vecteurs localement lipschitzien sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} dont l'espace vectoriel associé est un espace de Banach, $a \in \Omega$ un point d'équilibre (c'est-à-dire un point tel que $X(a) = 0$), et Ψ le flot réduit de X . Un point $x \in \Omega$ appartient à l'ensemble stable du point a , c'est-à-dire est tel que $\Psi_t(x)$ soit défini pour tout $t \geq 0$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Psi_t(x) = a$, si et seulement si $\Psi_n(x)$ est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\lim_{n \in \mathbb{N}, n \rightarrow +\infty} \Psi_n(x) = a$.

Preuve : Puisque $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$, la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Supposons donc que $\Psi_n(x)$ soit défini pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $\lim_{n \in \mathbb{N}, n \rightarrow +\infty} \Psi_n(x) = a$. Pour tout réel $t \geq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq t < n + 1$. Comme $\Psi_{n+1}(x)$ est défini, $\Psi_t(x)$ l'est aussi. Il reste seulement à prouver que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Psi_t(x) = a$.

Le champ de vecteurs X étant localement lipschitzien, il existe un voisinage ouvert W du point a , $W \subset \Omega$, et un réel $k > 0$, tels que la restriction de X à W soit lipschitzienne de rapport k . Soit $\rho > 0$ tel que la boule fermée de centre a et de rayon ρ soit contenue dans W . Nous allons montrer qu'il existe $N \geq 0$ tel que pour tout réel t vérifiant $t \geq N$, $\|\Psi_t(x) - a\| \leq \rho$. Comme nous pouvons choisir ρ arbitrairement petit, nous aurons ainsi prouvé que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Psi_t(x) = a$.

Puisque $\lim_{n \in \mathbb{N}, n \rightarrow +\infty} \Psi_n(x) = a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|\Psi_n(x) - a\| < \rho e^{-k}$. Soit alors $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $t \geq N$. Soit $n \in \mathbb{N}$, vérifiant $N \leq n \leq t < n + 1$; nous avons $t = n + \theta$, avec $0 \leq \theta < 1$. Posons $\Psi_n(x) = y$.

Nous savons que $\|y - a\| < \rho e^{-k}$, et que $\Psi_t(x) = \Psi_\theta(y)$. Supposons que $\Psi_s(y)$ ne soit pas élément de W pour tout $s \in [0, \theta]$. *A fortiori*, $\Psi_s(y)$ n'est pas élément de la boule fermée de centre a et de rayon ρ pour tout $s \in [0, \theta]$. Le point y étant intérieur à cette boule, l'ensemble des $s \in [0, \theta]$ tels que $\Psi_s(y)$ appartienne à la frontière de cette boule, c'est-à-dire tels que $\|\Psi_s(y) - a\| = \rho$, est non vide. Soit s_m sa borne inférieure. Nous avons $0 < s_m \leq \theta$ et, pour tout $s \in [0, s_m[$, $\|\Psi_s(y) - a\| < \rho$; nous avons aussi, par continuité, $\|\Psi_{s_m}(y) - a\| = \rho$.

D'après le lemme 4.5, tant que les courbes intégrales considérées restent contenues dans l'ouvert W sur lequel X est lipschitzien de rapport k , pour tout $s \in \mathbb{R}$, Ψ_s est lipschitzien de rapport $e^{k|s|}$. Par suite, nous avons

$$\|\Psi_{s_m}(y) - \Psi_{s_m}(a)\| = \|\Psi_{s_m}(y) - a\| \leq e^{ks_m} \|y - a\| < e^{-k(1-s_m)} \rho \leq \rho.$$

Nous avons abouti à une contradiction puisque $\|\Psi_{s_m}(y) - a\|$ devrait être à la fois égal à ρ et strictement inférieur à ρ . Nous avons donc prouvé par l'absurde que $\Psi_s(y)$ est élément de W pour tout $s \in [0, \theta]$. Mais alors,

$$\|\Psi_t(x) - a\| = \|\Psi_\theta(y) - \Psi_\theta(a)\| \leq e^{k\theta} \|y - a\| < e^{-k(1-\theta)} \rho \leq \rho,$$

ce qui établit le résultat désiré. □

Il est facile maintenant d'établir le théorème suivant.

7.13. Théorème. — Soient X un champ de vecteurs différentiable de classe C^p ($p \geq 2$) sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, $a \in \Omega$ un point d'équilibre hyperbolique de ce champ de vecteurs (définition 6.2). Les ensembles stable et instable du point a , pour le système dynamique formé par le flot réduit de X , sont des variétés différentiables de classe C^p , immergées dans Ω ; on les appelle *variété stable* et *variété instable* du point a , respectivement. Les espaces tangents, au point a , à la variété stable et à la variété instable, sont les sous-espaces affines de \mathcal{E} passant par le point a et parallèles, respectivement, au sous-espace stable E_c et au sous-espace instable E_d de l'origine pour le système dynamique linéarisé, de générateur infinitésimal $DX(a)$.

Preuve : D'après le lemme 7.12, l'ensemble stable du point a , pour le système dynamique à temps continu formé par le flot réduit de X , coïncide avec l'ensemble stable du point a pour le système dynamique à temps discret obtenu en donnant au temps des valeurs entières. L'ensemble instable du point a possède bien sûr une propriété analogue. Les résultats annoncés découlent immédiatement du théorème 7.11. □

7.14. Remarques

a) Dans les hypothèses des théorèmes 7.11 ou 7.13, l'injection canonique de la variété stable (resp., instable) du point d'équilibre a dans l'espace E est une immersion, mais n'est en général pas un plongement. Pour s'en convaincre, le lecteur pourra considérer les courbes stable et instable de l'origine pour le champ de vecteurs étudié dans l'exemple 7.13 du chapitre III (figure III.19).

b) Dans les hypothèses du théorème 7.13, supposons de plus l'espace affine \mathcal{E} de dimension 2.

Si les valeurs propres de $DX(a)$ sont réelles et de signes contraires, le point d'équilibre hyperbolique a est un col, au sens de la proposition III.7.10. La variété stable (resp., instable) de ce point est la réunion du point a et des deux courbes intégrales admettant le point a comme point ω -limite (resp., comme point α -limite). Nous les avons déjà rencontrées au chapitre III (proposition III.7.10 et remarque III.7.11).

Si les valeurs propres de $DX(a)$ ont toutes deux une partie réelle négative (resp., positive), le point d'équilibre a est un nœud attractif ou un foyer attractif (resp., un nœud répulsif ou un foyer répulsif) au sens des propositions III.7.7 et III.7.10. La variété stable (resp., instable) de ce point est de dimension 2; c'est un voisinage ouvert connexe du point a . Sa variété instable (resp., stable), de dimension 0, est le singleton $\{a\}$. Le théorème 7.13 nous donne alors moins de renseignements, sur l'allure qualitative du flot du champ de vecteurs X au voisinage du point a , que l'étude directe faite au chapitre III, paragraphe 7.

Nous allons indiquer ci-dessous, sans démonstration, un résultat, concernant les points d'équilibre non hyperboliques, qui ressemble un peu aux théorèmes affirmant l'existence des variétés stable et instable d'un point d'équilibre hyperbolique. Nous l'énoncerons par exemple pour un système constitué par le flot réduit d'un champ de vecteurs; un énoncé analogue pourrait être formulé pour un système dynamique à temps discret.

7.15. Théorème de la variété centrale. — Soient X un champ de vecteurs différentiable de classe C^p ($p \geq 2$) sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, $a \in \Omega$ un point d'équilibre. Soit E_0 le plus grand sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E associé à \mathcal{E} , invariant par l'application linéaire $DX(a)$ et tel que la restriction de $DX(a)$ à ce sous-espace ait toutes ses valeurs propres de partie réelle nulle. Alors il existe une variété différentiable S , de classe C^p , connexe, immergée dans Ω , contenant le point a , invariante par le flot réduit du champ de vecteurs X , ayant pour espace tangent en a le sous-espace affine de \mathcal{E} passant par a parallèle à E_0 . On dit que S est une variété centrale du point d'équilibre a .

Attention : la variété centrale n'est en général pas unique, ainsi que le montre l'exemple suivant.

7.16. Exemple. — On considère l'équation différentielle dans \mathbb{R}^2 (coordonnées (x, y)),

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$$

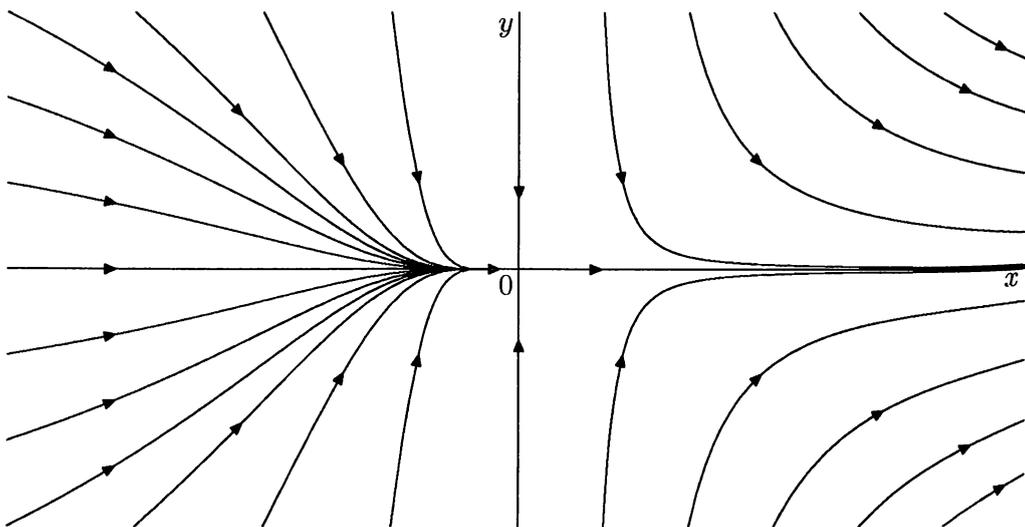


Figure V.1. Allure qualitative du portrait de phases

L'origine est un point d'équilibre et le système linéarisé en ce point s'écrit

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0, \\ \frac{dv}{dt} = -v. \end{cases}$$

On remarque que le générateur infinitésimal du système linéarisé a une valeur propre nulle; un vecteur propre associé à cette valeur propre est le premier vecteur e_1 de la base canonique de \mathbb{R}^2 . Soit (x_0, y_0) une donnée de Cauchy pour $t = 0$. Un calcul facile montre que la solution correspondante est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $1 - tx_0 > 0$, et qu'elle a pour expression

$$\begin{cases} x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}, \\ y(t) = y_0 e^{-t}. \end{cases}$$

L'allure qualitative du portrait de phases est représentée sur la figure V.1.

On voit que toute courbe formée par la réunion d'une courbe intégrale située dans le demi-plan $x < 0$ et du demi-axe $(x \geq 0, y = 0)$, est une variété centrale.

7.17. Définition. — Soit $\{\varphi_t; t \in \Theta\}$ un système dynamique défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, dont l'ensemble des temps Θ est \mathbb{Z} ou \mathbb{R} . Si $\Theta = \mathbb{Z}$, on suppose que le système est engendré par un difféomorphisme φ_1 de classe C^p , $p \geq 2$, d'un ouvert U_1 sur un autre ouvert U_{-1} de Ω . Si $\Theta = \mathbb{R}$ on suppose que le générateur infinitésimal du système est un champ de vecteurs X , de classe C^p (avec $p \geq 2$) défini sur Ω .

1. Un point $z \in \Omega$ est dit point *homocline* s'il appartient à la fois à la variété stable et à la variété instable d'un point d'équilibre hyperbolique a du système, $a \neq z$.
2. Un point $z \in \Omega$ est dit point *hétérocline* s'il appartient à la fois à la variété stable d'un point d'équilibre hyperbolique a du système, $a \neq z$, et à la variété instable d'un autre point d'équilibre hyperbolique b du système, $b \neq z$, $b \neq a$.

7.18. Quelques propriétés des points homoclines et hétéroclines

a) Orbite. — Soit z un point hétérocline (resp., homocline). Ce point est élément de $V_s(a) \cap V_i(b)$, où a et b sont deux points d'équilibre hyperboliques distincts (resp., confondus) et distincts de z , $V_s(a)$ la variété stable de a et $V_i(b)$ la variété instable de b . Il est facile de montrer que toute l'orbite du point z est contenue dans $V_s(a) \cap V_i(b)$, donc que tous les points de cette orbite sont des points hétéroclines (resp., des points homoclines) (voir exercices V.2 et V.3). C'est pourquoi on dit que cette orbite est *hétérocline* (resp., *homocline*).

Si le système est à temps continu, cette orbite est un arc de courbe paramétré $t \mapsto \psi(t)$, vérifiant $\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi(t) = b$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = a$. Nous avons rencontré des exemples d'orbites homoclines au chapitre I (mouvement du pendule plan I.4.6) et au chapitre III (exemple III.7.13). Dans ces exemples, l'espace des phases est de dimension 2 et le point d'équilibre considéré est un col; les variétés stable et instable de ce point sont des courbes qui ont un arc en commun (ou qui peuvent même être confondues).

Si le système est à temps discret, l'orbite du point z est une suite discrète de points deux à deux distincts $(\varphi_n(z), n \in \mathbb{Z})$, qui vérifie $\lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi_n(z) = b$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(z) = a$. Nous allons examiner plus attentivement cette situation, en supposant de plus que $V_s(a)$ et $V_i(b)$ se coupent transversalement au point z .

b) *Intersection transverse.* — Nous supposons désormais que le système dynamique considéré est à temps discret. On dit que $V_s(a)$ et $V_i(b)$ se coupent *transversalement* au point z si les espaces tangents $T_z V_s(a)$ et $T_z V_i(b)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de l'espace vectoriel E associé à l'espace affine \mathcal{E} . Lorsque c'est le cas, on montre aisément (exercice V.3) que $V_s(a)$ et $V_i(b)$ se coupent transversalement en tout point $\varphi_n(z)$ de l'orbite de z ($n \in \mathbb{Z}$). Comme de plus les variétés stable et instable d'un point hyperbolique sont connexes (exercice V.1), on voit que la variété instable $V_s(b)$ forme, au voisinage du point a , une infinité de "plis", pour couper transversalement la variété stable $V_s(a)$ en une suite de points deux à deux distincts ($\varphi_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$) qui converge vers le point a lorsque $n \rightarrow +\infty$. De même, la variété stable $V_s(a)$ forme, au voisinage du point b , une infinité de "plis" pour couper transversalement la variété instable $V_i(b)$ en une suite de points deux à deux distincts ($\varphi_{-n}(z)$, $n \in \mathbb{N}$) qui converge vers le point b lorsque $n \rightarrow +\infty$. En utilisant le fait que l'espace E se décompose en somme directe $E_c \oplus E_d$ de deux sous-espaces dont l'un, E_c , est contracté et l'autre, E_d , dilaté par $D\varphi_1(a)$, on montre qu'il existe un ouvert U de $V_i(a)$ contenant le point a et, pour tout entier $n \geq 0$, un ouvert U_n de $V_i(b)$ contenant $\varphi_n(z)$, tels que la suite $(U_n, n \in \mathbb{N})$ converge, lorsque $n \rightarrow +\infty$, vers U au sens de la convergence C^1 . Cela signifie que pour tout point $y \in U$, il existe une suite $(y_n, n \in \mathbb{N})$ de points, avec $y_n \in U_n$ et $y_n \notin U$, qui converge vers y , et qui de plus est telle que la suite des espaces affines tangents à $V_i(b)$ aux points y_n converge vers l'espace affine tangent en y à $V_i(a)$. Les mêmes considérations s'appliquent bien entendu à $V_s(b)$. La figure V.2, pour laquelle nous avons supposé $V_s(a)$ et $V_i(b)$ de dimension 1, illustre cette situation.

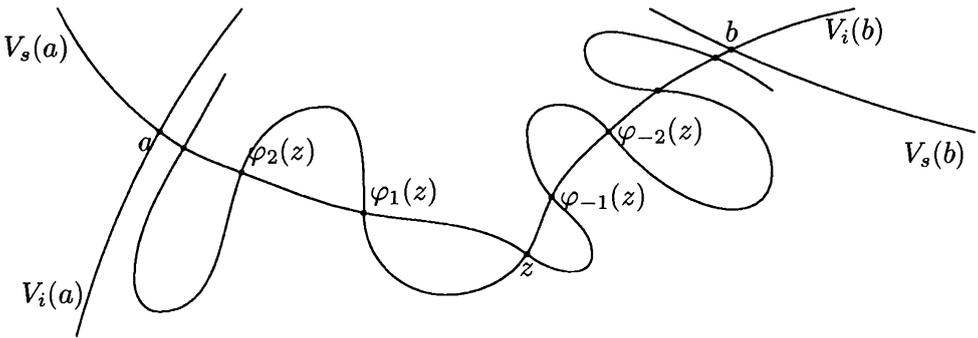


Figure V.2. Points hétéroclines avec intersections transverses

Pour tout point x de $V_i(a)$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi_n(x) = a$, donc pour n négatif assez grand en valeur absolue, $\varphi_n(x)$ est élément du voisinage ouvert U de a dans $V_i(a)$ considéré ci-dessus. Comme φ_n^{-1} est un difféomorphisme qui laisse $V_i(a)$ et $V_i(b)$ invariantes, ce que nous avons énoncé pour les points de U reste vrai pour tout point x de $V_i(a)$: il existe un voisinage ouvert $U(x)$ de x dans $V_i(a)$ et une suite de points x_n deux à deux disjoints de $V_i(b)$, n'appartenant pas à $U(x)$, qui converge vers x ; de plus, la suite des espaces affines tangents en ces points à $V_i(b)$ converge vers l'espace affine tangent à $V_i(a)$ au point x . La variété stable $V_s(b)$ a, bien entendu, des propriétés analogues.

Ces résultats restent applicables lorsque $a = b$, c'est-à-dire lorsque le point z est un point homocline, les variétés stable et instable du point a se coupant transversalement en ce point. Ils ont une importante conséquence sur la topologie de $V_i(a)$ (et de $V_s(a)$) : pour tout point x de cette variété, il existe un voisinage ouvert $U(x)$ de ce point dans $V_i(a)$ et une suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ de points de $V_i(a)$ n'appartenant pas à $U(x)$, qui converge vers x pour la topologie de Ω . Comme aucun point de cette suite n'appartient à $U(x)$, cette suite

ne converge pas vers x pour la topologie de $V_i(a)$. La topologie de $V_i(a)$ induit donc, sur chaque ouvert de $V_i(a)$, une topologie strictement plus fine que celle induite par la topologie de Ω . En d'autres termes, $V_i(a)$ n'est, au voisinage d'aucun de ses points, une sous-variété plongée dans Ω . Il en est de même de $V_s(a)$.

8. Conjugaison différentiable

Nous allons citer, sans démonstration, des théorèmes dûs à S. Sternberg, donnant des conditions suffisantes de conjugaison différentiable locale. Nous renvoyons aux publications [58] de cet auteur pour les démonstrations.

8.1. Théorème de Sternberg pour un difféomorphisme. — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n , et $B \in GL(E, E)$ une application linéaire inversible de E dans lui-même. Soient μ_1, \dots, μ_n les valeurs propres de B (figurant chacune un nombre de fois égal à sa multiplicité). On suppose que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et toute famille d'entiers m_1, m_2, \dots, m_n , tous ≥ 0 , vérifiant $\sum_{j=1}^n m_j \geq 2$, on a

$$\mu_i \neq \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2} \dots \mu_n^{m_n}.$$

Soit η une application de classe C^p (avec $p \geq 1$), définie sur un voisinage ouvert Ω de l'origine de E , et à valeurs dans E , vérifiant $\eta(0) = 0$ et $D\eta(0) = 0$. Alors les systèmes dynamiques discrets ayant pour générateurs, d'une part $B + \eta$, d'autre part B , sont localement C^q -différentiablement conjugués au voisinage de l'origine, q étant un entier ≥ 1 qui ne dépend que de B et de p et qui, lorsque B est fixé, tend vers $+\infty$ lorsque p tend vers $+\infty$.

8.2. Théorème de Sternberg pour un champ de vecteurs. — Soient X un champ de vecteurs de classe C^p , $p \geq 1$, défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie n , et $a \in \Omega$ un point d'équilibre. Soient $A = DX(a)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (figurant chacune un nombre de fois égal à sa multiplicité). On suppose que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et toute famille d'entiers m_1, m_2, \dots, m_n , tous ≥ 0 , vérifiant $\sum_{j=1}^n m_j \geq 2$, on a

$$\lambda_i \neq m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n.$$

Alors le système dynamique formé par le flot réduit de X au voisinage du point d'équilibre a , et le système linéarisé en ce point (formé par le flot réduit du champ de vecteurs linéaire $DX(a)$) au voisinage de l'origine, sont localement C^q -différentiablement conjugués, q étant un entier ≥ 1 qui ne dépend que de $DX(a)$ et de p et qui, lorsque $DX(a)$ reste fixé, tend vers $+\infty$ lorsque p tend vers $+\infty$.

8.3. Remarque. — Soit $B \in GL(E, E)$ une application linéaire inversible de E dans lui-même, et μ_1, \dots, μ_n ses valeurs propres (toutes non nulles puisque B est inversible). Si B satisfait les hypothèses du théorème de Sternberg 8.1, les modules des μ_j sont tous $\neq 1$. Supposons en effet qu'une de ces valeurs propres, par exemple μ_1 , soit de module 1. Si μ_1 n'est pas réelle, il existe nécessairement une autre valeur propre égale à sa complexe conjuguée; notons-la μ_2 ; nous avons alors

$$\mu_1 = (\mu_1)^2 \mu_2,$$

contrairement à l'hypothèse. Si μ_1 est réelle, elle est égale soit à 1, soit à -1 , et nous avons

$$\mu_1 = \mu_1^3,$$

ce qui est aussi contraire à l'hypothèse.

De même, soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^p sur un ouvert Ω de l'espace affine \mathcal{E} de dimension n , $a \in \Omega$ un point d'équilibre. Si $DX(a)$ satisfait les hypothèses du théorème de Sternberg 8.2, ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont toutes de partie réelle non nulle. La preuve de cette assertion, analogue à celle donnée ci-dessus, est laissée au lecteur.

Nous voyons donc que lorsque les hypothèses dans lesquelles les théorèmes de Sternberg peuvent être employés sont satisfaites, les théorèmes de Hartman et Grobman peuvent aussi être appliqués, ce qui n'a rien de surprenant puisque les théorèmes de Sternberg donnent des résultats plus précis que ceux de Hartman et Grobman.

9. Application aux orbites périodiques

Pour terminer ce chapitre nous allons, dans ce dernier paragraphe, donner quelques brèves indications montrant comment l'essentiel de ce qui a été fait précédemment à propos des points d'équilibre hyperboliques peut s'étendre aux orbites périodiques hyperboliques. Mais donnons-en d'abord la définition.

9.1. Définition. — Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^p (avec $p \geq 1$) sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie. On note Ψ le flot réduit de X . Soit $a \in \Omega$ un point tel que $X(a) \neq 0$, et dont l'orbite \mathcal{O} est périodique de période $T > 0$. Soit $D\Psi_T(a)$ la différentielle, au point a , du difféomorphisme Ψ_T . On dit que l'orbite périodique \mathcal{O} est hyperbolique si 1 est valeur propre simple de $D\Psi_T(a)$ et si toutes les autres valeurs propres de $D\Psi_T(a)$ sont de module $\neq 1$.

9.2. Commentaires

a) On sait (voir le lemme IV.2.2, ainsi que la démonstration du théorème IV.3.1) que 1 est toujours valeur propre de $D\Psi_T(a)$, de vecteur propre associé $X(a)$. Les valeurs propres de $D\Psi_T(a)$ sont appelées *multiplicateurs caractéristiques* de l'orbite périodique \mathcal{O} . Ils ne dépendent que de \mathcal{O} , non du choix du point a de cette orbite. Un de ces multiplicateurs caractéristiques est donc égal à 1. Un théorème dû à G. Floquet (voir par exemple [31] chapitre IV paragraphe 6) montre que $D\Psi_T(a)$ est de la forme $\exp(TB)$, où B est un endomorphisme de l'espace vectoriel E associé à l'espace affine \mathcal{E} . Les multiplicateurs caractéristiques μ_j sont donc de la forme $\mu_j = \exp(\lambda_j T)$, où les λ_j , appelés *exposants caractéristiques* de l'orbite \mathcal{O} , sont les valeurs propres de B . Un des exposants caractéristiques est donc nul.

b) Puisque les multiplicateurs caractéristiques de l'orbite périodique \mathcal{O} ne dépendent pas du choix du point a , l'hyperbolicité est une propriété de \mathcal{O} , non du point particulier a de cette orbite.

c) Supposons l'orbite périodique \mathcal{O} hyperbolique. En procédant comme dans la démonstration du théorème IV.3.1, on construit une application de retour de Poincaré g , associée à l'orbite \mathcal{O} , dont la différentielle $Dg(a)$ au point a admet pour valeurs propres les valeurs propres de $D\Psi_T(a)$ autres que 1. Le point a est donc un point d'équilibre hyperbolique pour le système dynamique à temps discret de générateur g . On peut alors appliquer à g le théorème de Hartman et Grobman, et aussi le théorème des variétés stable et instable. Cela permet d'établir pour l'orbite \mathcal{O} un théorème du type Hartman et Grobman. Les ensembles stable et instable de l'orbite périodique \mathcal{O} peuvent être définis de manière globale : par exemple, l'ensemble stable de \mathcal{O} est l'ensemble des points $x \in \Omega$ tels que $\Psi_t(x)$ soit défini pour tout $t \geq 0$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\Psi_t(x), \mathcal{O}) = 0$. On peut alors prouver que les ensembles stable et instable d'une orbite périodique hyperbolique

sont des variétés différentiables de classe C^p , immergées dans Ω , qui toutes deux contiennent l'orbite \mathcal{O} , et qui se coupent transversalement le long de cette orbite (cela signifie qu'en tout point x de l'orbite \mathcal{O} , la somme des espaces tangents en ce point aux variétés stable et instable est l'espace vectoriel E associé à l'espace affine \mathcal{E} , et que l'intersection de ces sous-espaces est la droite parallèle à la tangente au point x à l'orbite \mathcal{O}). On les appelle *variété stable* et *variété instable* de l'orbite périodique hyperbolique \mathcal{O} . La variété stable (resp., instable) de l'orbite périodique \mathcal{O} est formée par la réunion des courbes intégrales de X qui rencontrent la variétés stable (resp., instable) du point d'équilibre a , pour le système dynamique à temps discret ayant pour générateur l'application de retour de Poincaré.

d) La notion d'hyperbolicité, que nous avons définie pour les points d'équilibre et pour les orbites périodiques d'un système dynamique, garde un sens dans des situations plus générales, le point d'équilibre ou l'orbite périodique étant remplacés par un ensemble invariant pour le système dynamique considéré. Ainsi par exemple, l'ensemble que nous avons noté Λ lors de l'étude du fer à cheval de Smale (I.4.7) est un ensemble invariant hyperbolique. Voir par exemple [63] chapitre 4, [37] chapitre 6, [29] chapitre 5.

10. Exercices

Exercice V.1. Dans les hypothèses des théorèmes 7.11 et 7.13, montrer que les variétés stable et instable d'un point d'équilibre hyperbolique sont connexes.

Exercice V.2. Soit X un champ de vecteurs de classe C^∞ défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, a et b deux points d'équilibre hyperboliques de ce champ (pas nécessairement distincts). On suppose que la variété stable $V_s(a)$ du point a et la variété instable $V_i(b)$ du point b se coupent en un point z autre que a ou b . Montrer que l'orbite du point z est contenue dans $V_s(a) \cap V_i(b)$, et admet pour ensembles α -limite et ω -limite, respectivement, les singletons $\{b\}$ et $\{a\}$.

Exercice V.3. Soit $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$ un système dynamique à temps discret défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, d'espace vectoriel associé E , dont le générateur φ_1 est un difféomorphisme de classe C^∞ d'un ouvert U_1 de Ω sur un autre ouvert U_{-1} de Ω . Soient a et $b \in U_1$ deux points d'équilibre hyperboliques de ce système (pas nécessairement distincts). On suppose que les variétés stable $V_s(a)$ du point a et instable $V_i(b)$ du point b se coupent en un point z autre que a ou b .

1) Montrer que l'orbite $\{\varphi_n(z) ; n \in \mathbb{Z}\}$ du point z est contenue dans $V_s(a) \cap V_i(b)$ et que

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi_n(z) = b, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(z) = a.$$

2) On suppose que les variétés $V_s(a)$ et $V_i(b)$ se coupent transversalement au point z (c'est-à-dire que les espaces tangents à $V_s(a)$ et à $V_i(b)$ en ce point sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E). Montrer que ces variétés se coupent aussi transversalement en chacun des points $\varphi_n(z)$, $n \in \mathbb{Z}$.

11. Solutions

Solution V.1. Nous traiterons le cas d'un système dynamique à temps discret $\{\varphi_n ; n \in \mathbb{Z}\}$ défini sur un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, les hypothèses étant celles du théorème 7.11. Le cas d'un système dynamique à temps

continu est analogue. Soit a un point d'équilibre hyperbolique de ce système, $V_s(a)$ et $V_i(a)$ ses variétés stable et instable. Comme dans la démonstration du théorème 7.11, nous identifions \mathcal{E} à un produit $\mathcal{E}_c \times \mathcal{E}_d$, le point a s'identifiant au couple (a_c, a_d) . Nous avons vu qu'il existe un voisinage W de a dans Ω , de la forme $W = W_c \times W_d$, où W_c et W_d sont des boules ouvertes, respectivement de \mathcal{E}_c et de \mathcal{E}_d , de centres respectifs a_c et a_d , pour des normes convenablement choisies sur ces espaces, ayant les propriétés suivantes :

- (i) la variété stable du point a pour la restriction à W du système dynamique considéré, notée $V_{s\text{loc}}(a)$, est le graphe d'une application de W_c dans \mathcal{E}_d appliquant a_c sur a_d ,
- (ii) un point x de Ω est élément de $V_s(a)$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi_n(x)$ soit défini et élément de $V_{s\text{loc}}(a)$.

Soient x_1 et x_2 deux points de $V_s(a)$. Il existe n_1 et $n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $\varphi_{n_1}(x_1) \in V_{s\text{loc}}(a)$, $\varphi_{n_2}(x_2) \in V_{s\text{loc}}(a)$. Par suite, pour $n \geq \sup(n_1, n_2)$, $\varphi_n(x_1)$ et $\varphi_n(x_2)$ sont éléments de $V_{s\text{loc}}(a)$. Donc x_1 et x_2 sont tous deux éléments de $\varphi_n^{-1}(V_{s\text{loc}}(a))$. Mais $V_{s\text{loc}}(a)$ est connexe et contenu dans $V_s(a)$, et φ_n est un difféomorphisme. Nous avons donc prouvé que deux points quelconques x_1 et x_2 de $V_s(a)$ appartiennent à une même partie connexe $\varphi_n^{-1}(V_{s\text{loc}}(a))$ de $V_s(a)$, ce qui montre que $V_s(a)$ est connexe. On montre de même que $V_i(a)$ est connexe.

Solution V.2. Les variétés $V_s(a)$ et $V_i(b)$ sont invariantes par le flot du champ de vecteurs X . Le point z étant élément de ces variétés, toute l'orbite de ce point est contenue dans $V_s(a) \cap V_i(b)$. D'autre part, d'après la définition même de $V_s(a)$ et de $V_i(b)$, $L_\alpha(z) = \{b\}$, $L_\omega(z) = \{a\}$.

Solution V.3.

1) Le raisonnement est le même que celui fait dans la solution de l'exercice précédent, pour un système dynamique à temps continu.

2) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, φ_n est un difféomorphisme qui applique z sur $\varphi_n(z)$ et laisse invariantes les variétés $V_s(a)$ et $V_i(b)$. Le prolongement aux vecteurs de ce difféomorphisme applique donc les espaces tangents à $V_s(a)$ et à $V_i(b)$ au point z sur les espaces tangents à ces mêmes variétés au point $\varphi_n(z)$. Comme les espaces tangents à $V_s(a)$ et $V_i(b)$ au point z sont supplémentaires dans E , les espaces tangents à ces deux variétés au point $\varphi_n(z)$ le sont aussi.

Chapitre VI

La théorie de l'indice

Les champs de vecteurs considérés dans ce chapitre sont supposés définis sur un ouvert du plan (paragraphe 3 et 4) ou, plus généralement, sur une surface, orientable ou non (paragraphe 5). Dans un paragraphe préliminaire, nous définissons le degré d'une application du cercle S^1 dans lui-même. Nous établissons son invariance par homotopie et en déduisons le fameux théorème de Brouwer (1.10) et ses corollaires (1.11 et 1.12). Nous définissons ensuite la notion de courbe de Jordan et énonçons le théorème de Jordan (2.3), que nous avons d'ailleurs déjà utilisé dans le chapitre IV. La preuve de ce théorème, assez délicate, est reportée au chapitre VII, où nous avons regroupé divers compléments utiles pour la compréhension du présent livre. Nous définissons le degré d'une application continue d'une courbe de Jordan orientée dans une autre. Cela nous permet de définir, au paragraphe 3, l'indice d'une courbe de Jordan relativement à un champ de vecteurs et d'étudier ses propriétés. Au paragraphe 4, nous montrons que l'indice d'une courbe de Jordan entourant un point d'équilibre isolé unique ne dépend que des propriétés du champ de vecteurs au voisinage de ce point d'équilibre, non de la courbe de Jordan considérée; cela nous conduit à la définition de l'indice d'un point d'équilibre isolé d'un champ de vecteurs. Au paragraphe 5, nous établissons le célèbre théorème de Poincaré-Hopf, relatif à la somme des indices des points d'équilibre (supposés isolés) d'un champ de vecteurs sur une surface compacte. Nous donnons finalement quelques brèves indications sur les généralisations possibles de cette belle théorie en dimension quelconque.

1. Le degré d'une application du cercle dans lui-même

1.1. Le cercle trigonométrique S^1 . — Nous rappelons que le cercle trigonométrique S^1 est l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} ; |z| = 1 \}.$$

Nous munirons cet espace de sa topologie de sous-espace topologique de \mathbb{C} .

Il est souvent commode d'identifier \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 , en associant au nombre complexe $z = x + iy$ (avec x et $y \in \mathbb{R}$), le point (x, y) de \mathbb{R}^2 . C'est pourquoi l'ensemble \mathbb{C} est parfois appelé, par abus de langage, *plan complexe* alors qu'en fait on devrait dire *droite complexe* puisque c'est un espace vectoriel complexe de dimension 1. Le cercle trigonométrique S^1 s'identifie alors au cercle de \mathbb{R}^2 (pour la distance euclidienne), de centre l'origine et de rayon 1 :

$$S^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 1 \}.$$

Tout nombre complexe de module 1 s'exprime sous la forme $\exp(is)$, avec $s \in \mathbb{R}$. Cela permet de paramétrer S^1 au moyen de l'angle polaire s . Il importe toutefois de remarquer que l'application de \mathbb{R} dans S^1 , $s \mapsto \exp(is)$, n'est pas injective, puisque $\exp(is_1) = \exp(is_2)$ si (et seulement si) $s_2 - s_1 = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Le cercle trigonométrique S^1 est un espace topologique compact, puisque c'est une partie fermée et bornée de \mathbb{C} (ou de \mathbb{R}^2). On peut munir cet espace de la distance

euclidienne (restriction à S^1 de la distance euclidienne de \mathbb{R}^2); bien entendu, cette distance est compatible avec sa topologie. Cependant, nous utiliserons plutôt une autre distance, uniformément équivalente à la distance euclidienne (donc compatible elle aussi avec la topologie de S^1), constituée par la longueur d'arc : deux points z_1 et z_2 de S^1 étant donnés, nous définissons la distance de ces deux points, notée $d(z_1, z_2)$, comme la longueur du plus petit arc du cercle trigonométrique d'extrémités z_1 et z_2 . Plus explicitement, en identifiant S^1 à l'ensemble des nombres complexes de module 1, soit s_1 l'unique réel élément de $[0, 2\pi[$ tel que $\exp(is_1) = z_1$, et s_2 l'unique réel élément de $[0, 2\pi[$ tel que $\exp(is_2) = z_2$. Alors

$$d(z_1, z_2) = \begin{cases} |s_1 - s_2| & \text{si } |s_1 - s_2| \leq \pi, \\ 2\pi - |s_1 - s_2| & \text{si } |s_1 - s_2| \geq \pi. \end{cases}$$

Puisque nous avons muni S^1 d'une topologie, nous allons pouvoir parler d'applications continues de S^1 dans un autre espace topologique, ou d'un autre espace topologique dans S^1 . Mais nous aurons aussi à considérer des applications *différentiables* de S^1 dans lui-même, ou dans un ouvert Ω d'un espace vectoriel de dimension finie, et il convient de donner un sens précis à cette notion. Nous définirons plus loin la notion de variété différentiable, et nous verrons que le cercle trigonométrique S^1 est une variété différentiable; la notion d'application différentiable de S^1 dans lui-même ou dans un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie (ou, plus généralement, dans une autre variété différentiable) prendra alors un sens évident. Cependant, pour ne pas anticiper, nous pouvons procéder comme suit.

Soit $\varphi : S^1 \rightarrow \Omega$ une application du cercle trigonométrique S^1 dans un ouvert Ω d'un espace vectoriel de dimension finie. En identifiant S^1 à l'ensemble des nombres complexes de module 1, posons, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{\varphi}(s) = \varphi(\exp(is)).$$

L'application $\tilde{\varphi}$ est maintenant une application de \mathbb{R} dans Ω , périodique de période 2π . Nous dirons que φ est différentiable (resp., différentiable de classe C^p , avec p entier ≥ 1), si $\tilde{\varphi}$ est différentiable (resp., différentiable de classe C^p).

De même, soit maintenant $\chi : S^1 \rightarrow S^1$ une application continue du cercle trigonométrique dans lui-même. Soit z_0 un point particulier de S^1 , et soit $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que $z_0 = \exp(is_0)$. Choisissons une détermination de l'angle polaire de $Z_0 = \chi(z_0)$; en suivant cette détermination par continuité lorsque z varie sur S^1 à partir de sa valeur initiale z_0 , nous voyons qu'il existe une application continue $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\chi(z_0) = \exp(i\psi(s_0))$$

et que, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\chi(\exp(is)) = \exp(i\psi(s)).$$

L'application ψ vérifiant cette dernière propriété n'est pas unique : on peut lui ajouter une constante de la forme $2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Cela ne nous empêche nullement de définir comme suit la différentiabilité de χ : nous dirons que χ est différentiable (resp., différentiable de classe C^p , avec p entier ≥ 1) si ψ est différentiable (resp., différentiable de classe C^p).

Remarquons d'ailleurs qu'une application $\chi : S^1 \rightarrow S^1$ est différentiable (resp., différentiable de classe C^p) au sens défini ci-dessus, si et seulement si l'application composée de χ et de l'injection canonique de S^1 dans le plan complexe \mathbb{C} (identifié à \mathbb{R}^2) est différentiable (resp., différentiable de classe C^p), au sens de la différentiabilité d'une application de S^1 dans un espace vectoriel de dimension finie.

Rappelons également la notion d'*orientation* du cercle trigonométrique S^1 . Orienter S^1 , c'est choisir, sur la courbe S^1 , un sens de parcours, qui sera considéré comme positif

(le sens de parcours opposé étant considéré comme négatif). Il existe exactement deux orientations possibles de S^1 , puisqu'il existe exactement deux sens de parcours de la courbe S^1 : le sens dans lequel se déplace le point $\exp(is)$ lorsque le réel s croît, et le sens dans lequel se déplace le point $\exp(is)$ lorsque s décroît. Dans toute la suite, sauf mention contraire explicite, nous supposons le cercle S^1 muni de l'orientation pour laquelle le sens de parcours positif est celui dans lequel se déplace le point $\exp(is)$ lorsque s croît.

1.2. Définition. — Soit $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ une application continue du cercle trigonométrique dans lui-même. On appelle *degré* de φ , et on note $\text{degr}(\varphi)$, le nombre de tours (compté algébriquement) que fait le point $\varphi(z)$ sur S^1 lorsque le point z fait un tour sur S^1 .

1.3. Commentaires

a) Justification de la définition. — La définition ci-dessus peut sembler manquer quelque peu de rigueur, car elle utilise la notion intuitive de nombre de tours fait par un point sur le cercle S^1 , à laquelle nous devons donner un sens précis. Voici comment le faire.

Ainsi que nous l'avons vu dans le paragraphe 1.1, lorsque nous avons donné un sens précis à la notion d'application différentiable de S^1 dans lui-même, nous pouvons associer, à l'application continue $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$, une application continue $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\exp(is)) = \exp(i\psi(s)).$$

Soit $s_0 \in \mathbb{R}$. Le point $z = \exp(is)$ effectue sur S^1 un tour dans le sens positif lorsque s croît de s_0 à $s_0 + 2\pi$. Quant au point $\varphi(\exp(is))$, son angle polaire, dont nous avons choisi une détermination, que nous suivons par continuité, varie de $\psi(s_0)$ à $\psi(s_0 + 2\pi)$. Puisque nous avons

$$\exp(i\psi(s_0 + 2\pi)) = \exp(i\psi(s_0)),$$

nous avons

$$\psi(s_0 + 2\pi) - \psi(s_0) = 2\pi n, \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}.$$

L'entier $n \in \mathbb{Z}$ est le nombre de tours fait par le point $\varphi(\exp(is))$, sur le cercle S^1 , lorsque s croît de s_0 à $s_0 + 2\pi$, c'est-à-dire lorsque le point $z = \exp(is)$ fait un tour sur S^1 . Bien entendu, le point z est supposé faire un tour sur S^1 dans le sens positif, et le nombre de tours fait par $\varphi(\exp(is))$ doit être compté algébriquement, chaque tour fait dans le sens positif ayant la valeur 1 et chaque tour fait dans le sens négatif la valeur -1 . L'entier n ainsi défini est le degré de l'application $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$.

Nous devons vérifier que le degré ne dépend pas des choix arbitraires qui ont servi à le définir.

Si nous choisissons une autre détermination ψ' de l'application ψ , nécessairement de la forme

$$\psi'(s) = \psi(s) + 2\pi k, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z},$$

nous avons

$$\psi'(s_0 + 2\pi) - \psi'(s_0) = \psi(s_0 + 2\pi) - \psi(s_0).$$

La définition du degré n n'est donc pas modifiée.

Nous remarquons d'autre part que la fonction

$$s \mapsto \psi(s + 2\pi) - \psi(s)$$

est continue sur l'espace connexe \mathbb{R} et à valeurs entières. Cette fonction est donc nécessairement constante. Ainsi, si nous remplaçons s_0 par un autre élément s'_0 de \mathbb{R} , nous avons

$$\psi(s'_0 + 2\pi) - \psi(s'_0) = \psi(s_0 + 2\pi) - \psi(s_0),$$

ce qui montre que la définition du degré n n'est pas modifiée.

Remarquons enfin que si nous remplaçons l'orientation usuelle de S^1 par l'orientation opposée, la définition du degré n'est pas non plus modifiée, car ce changement affectera à la fois le sens dans lequel le point $z = \exp(is)$ parcourt S^1 et le sens considéré comme positif pour le décompte du nombre de tours fait sur S^1 par le point $\varphi(z)$.

b) Cas d'une application non surjective. — Supposons l'application continue $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ non surjective. Alors son degré est nul. Soit en effet $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\exp(is)) = \exp(i\psi(s)),$$

et soit s_0 un point de \mathbb{R} . Puisque ψ est continue et que l'intervalle $[s_0, s_0 + 2\pi]$ est compact et connexe, $\psi([s_0, s_0 + 2\pi])$ est une partie compacte et connexe de \mathbb{R} , c'est-à-dire un intervalle fermé et borné. Nous avons

$$\psi(s_0 + 2\pi) - \psi(s_0) = 2\pi n,$$

où l'entier n est le degré de φ . Si celui-ci était non nul, l'application $s \mapsto \psi(s)$ prendrait, lorsque s parcourt l'intervalle $[s_0, s_0 + 2\pi]$, toutes les valeurs comprises entre $\psi(s_0)$ et $\psi(s_0 + 2\pi n)$; par suite, φ serait surjective, contrairement à notre hypothèse.

1.4. Proposition. — Soient $\varphi_1 : S^1 \rightarrow S^1$ et $\varphi_2 : S^1 \rightarrow S^1$ deux applications continues. L'application composée $\varphi_2 \circ \varphi_1$ a pour degré le produit des degrés des applications φ_1 et φ_2 .

Preuve : Lorsque le point z fait un tour sur S^1 , $\varphi_1(z)$ fait sur S^1 un nombre de tours égal à $\text{degr}(\varphi_1)$; et lorsque $z' = \varphi_1(z)$ fait un tour sur S^1 , $\varphi_2(z')$ fait sur S^1 un nombre de tours égal à $\text{degr}(\varphi_2)$. Donc lorsque z fait un tour sur S^1 , $\varphi_2(\varphi_1(z))$ fait sur S^1 un nombre de tours égal à $\text{degr}(\varphi_1) \text{degr}(\varphi_2)$. \square

1.5. Corollaire. — Le degré d'un homéomorphisme $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ est égal soit à 1, soit à -1 , et vérifie $\text{degr}(\varphi) = \text{degr}(\varphi^{-1})$. L'ensemble des homéomorphismes de S^1 se partitionne en deux classes : la classe des homéomorphismes de degré 1, qui contient l'application identique, et la classe des homéomorphismes de degré -1 , qui contient l'application conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$.

Preuve : Remarquons d'abord que d'après la définition même du degré, l'application identique de S^1 a pour degré 1. De même, l'application conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$, restreinte à S^1 , a pour degré -1 .

Soit $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ un homéomorphisme de S^1 sur lui-même. D'après la proposition précédente

$$\text{degr}(\varphi^{-1}) \text{degr}(\varphi) = \text{degr}(\varphi^{-1} \circ \varphi) = \text{degr}(\text{id}_{S^1}) = 1.$$

Comme le degré est à valeurs dans \mathbb{Z} , ceci n'est possible que si $\text{degr}(\varphi)$ et $\text{degr}(\varphi^{-1})$ sont tous deux égaux à 1 ou tous deux égaux à -1 . \square

1.6. Remarque. — Il est facile de donner un exemple d'application du cercle S^1 dans lui-même ayant pour degré un entier $n \in \mathbb{Z}$ quelconque : l'application $z \mapsto z^n$, restreinte à S^1 .

1.7. Proposition. — Soient $\varphi_1 : S^1 \rightarrow S^1$ et $\varphi_2 : S^1 \rightarrow S^1$ deux applications continues du cercle dans lui-même, telles que, pour tout $z \in S^1$, les points $\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ ne soient pas diamétralement opposés sur S^1 . Alors φ_1 et φ_2 ont même degré.

Preuve : Puisque pour tout $z \in S^1$, les points $\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ ne sont pas diamétralement opposés, il existe un unique élément $\theta(z)$ de l'intervalle ouvert $] - \pi, \pi[$ tel que

$$\varphi_2(z) = \varphi_1(z) \exp(i\theta(z)).$$

Nous voyons de plus aisément que l'application $\theta : \mathbb{R} \rightarrow] - \pi, \pi[$ est continue. Soit $\psi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_1(\exp(is)) = \exp(i\psi_1(s)).$$

En posant, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\psi_2(s) = \psi_1(s) + \theta(\exp(is)),$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \varphi_2(\exp(is)) &= \varphi_1(\exp(is)) \exp(i\theta(\exp(is))) \\ &= \exp\left(i(\psi_1(s) + \theta(\exp(is)))\right) \\ &= \exp(i\psi_2(s)). \end{aligned}$$

Nous avons donc, en prenant un élément s_0 de \mathbb{R} quelconque,

$$\begin{aligned} \text{degr}(\varphi_2) &= \psi_2(s_0 + 2\pi) - \psi_2(s_0) \\ &= \psi_1(s_0 + 2\pi) + \theta(\exp(i(s_0 + 2\pi))) - \psi_1(s_0) - \theta(\exp(is_0)) \\ &= \psi_1(s_0 + 2\pi) - \psi_1(s_0) \\ &= \text{degr}(\varphi_1), \end{aligned}$$

comme annoncé. □

1.8. Définition. — Soient X et Y deux espaces topologiques séparés, $f_0 : X \rightarrow Y$ et $f_1 : X \rightarrow Y$ deux applications continues. On dit que f_0 et f_1 sont homotopes s'il existe une application continue $g : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que, pour tout $x \in X$, on ait

$$g(x, 0) = f_0(x) \quad \text{et} \quad g(x, 1) = f_1(x).$$

Toute application continue $g : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ vérifiant ces propriétés est appelée homotopie de f_0 à f_1 .

1.9. Proposition. — Si deux applications $\varphi_0 : S^1 \rightarrow S^1$ et $\varphi_1 : S^1 \rightarrow S^1$ sont homotopes, elles ont même degré.

Preuve : Soit $g : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ une homotopie de φ_0 à φ_1 . L'application g est continue, définie sur un espace métrique compact et à valeurs dans un espace métrique, donc uniformément continue (voir par exemple [17], chapitre VI, paragraphe 2.5, page 90). Soit un réel ε vérifiant $0 < \varepsilon < \pi$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tous (y, s) et $(z, t) \in S^1 \times [0, 1]$ vérifiant $d(y, z) < \eta$ et $|s - t| < \eta$, on ait

$$d(g(y, s), g(z, t)) < \varepsilon. \tag{*}$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, soit $\varphi_t : S^1 \rightarrow S^1$ l'application $z \mapsto \varphi_t(z) = g(z, t)$. En faisant $y = z$ dans l'inégalité (*), nous voyons que si deux éléments s et t de $[0, 1]$ vérifient $|s - t| < \eta$, alors quel que soit $z \in S^1$, les points $\varphi_s(z)$ et $\varphi_t(z)$ ne sont pas diamétralement opposés sur S^1 ; par suite (proposition 1.7), φ_s et φ_t ont même degré. L'application $t \mapsto \text{degr}(\varphi_t)$ est donc localement constante. Comme l'espace $[0, 1]$ sur lequel elle est définie est connexe, cette application est constante (voir [17], chapitre V, exercice V.10). □

1.10. Théorème de Brouwer. — L'application identique de S^1 dans lui-même n'est pas homotope à une application constante.

Preuve : Le degré de l'application identique de S^1 est 1 (proposition 1.5), tandis que le degré d'une application constante est 0. La proposition 1.9 montre que ces deux applications ne sont pas homotopes. \square

1.11. Corollaire. — Dans le plan complexe \mathbb{C} , soit $\overline{D^2}$ le disque fermé de centre l'origine et de rayon 1, dont la frontière est le cercle trigonométrique S^1 :

$$\overline{D^2} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1\}, \quad S^1 = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}.$$

Il n'existe pas d'application continue de $\overline{D^2}$ dans S^1 ayant pour restriction à S^1 l'application identique de S^1 .

Preuve : S'il existait une application continue $f : \overline{D^2} \rightarrow S^1$ telle que $f|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$, nous pourrions définir l'application $g : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$:

$$g(z, t) = f((1-t)z).$$

Cette application vérifierait, pour tout $z \in S^1$,

$$g(z, 0) = z, \quad g(z, 1) = f(z),$$

et serait une homotopie de l'application identique de S^1 à l'application constante $z \mapsto f(z)$. Ce résultat contredirait le théorème de Brouwer. \square

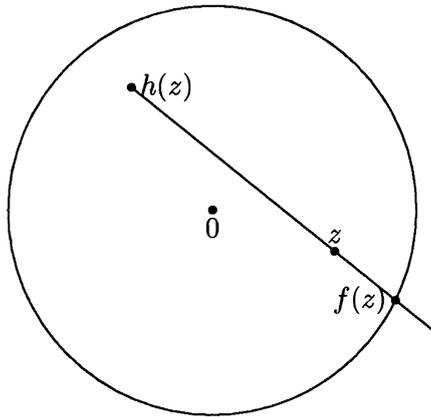


Figure VI.1. Illustration de la preuve du théorème du point fixe de Brouwer

1.12. Autre corollaire : le théorème du point fixe de Brouwer. — Toute application continue du disque fermé $\overline{D^2}$ (défini dans le corollaire précédent) dans lui-même admet un point fixe.

Preuve : S'il existait une application continue $h : \overline{D^2} \rightarrow \overline{D^2}$ sans point fixe, c'est-à-dire telle que pour tout $z \in \overline{D^2}$, $h(z) \neq z$, nous pourrions associer, à tout point $z \in \overline{D^2}$, le point $f(z) \in S^1$, distinct de $h(z)$, où la demi-droite d'origine $h(z)$ passant par le point z rencontre le cercle S^1 (voir figure VI.1). Nous aurions ainsi défini une application continue $f : \overline{D^2} \rightarrow S^1$ vérifiant, pour tout $z \in S^1$, $f(z) = z$. Ce résultat contredirait le corollaire 1.11. \square

1.13. Remarques

a) Les trois énoncés qui précèdent sont équivalents. Nous avons déduit le corollaire 1.11 du théorème de Brouwer 1.10, puis le corollaire 1.12 du corollaire 1.11. Inversement, il est facile de déduire le théorème de Brouwer 1.10 du corollaire 1.11 ou du corollaire 1.12. En

effet, supposons qu'il existe une homotopie $g : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ de id_{S^1} à une application constante. Posons, pour tout point $z \in \overline{D^2}$,

$$f(z) = \begin{cases} g\left(\frac{z}{\|z\|}, 1 - \|z\|\right) & \text{si } z \neq 0, \\ c & \text{si } z = 0, \end{cases}$$

où c est la valeur prise par l'application constante de S^1 dans lui-même $x \mapsto g(x, 1)$. L'application $f : \overline{D^2} \rightarrow S^1$ ainsi définie est continue (sa continuité à l'origine résulte du fait que pour tout $x \in S^1$, $g(x, 1) = c$). Sa restriction à S^1 est id_{S^1} . Ce résultat contredit le corollaire 1.11. Considérée comme application du disque fermé $\overline{D^2}$ dans lui-même, l'application $-f$ est sans point fixe, puisqu'elle applique $\overline{D^2}$ dans S^1 et que sa restriction à S^1 est l'application antipodale $x \mapsto -x$. Ce résultat contredit le corollaire 1.12.

b) La réciproque de la proposition 1.9 est vraie : deux applications continues de S^1 dans lui-même ayant même degré sont homotopes. Plus généralement, ainsi que nous le verrons plus loin (6.1), pour tout entier $n \geq 1$, on peut étendre la définition du degré aux applications continues de la sphère S^n dans elle-même; on montre que deux applications continues de S^n dans elle-même sont homotopes si et seulement si elles ont même degré. Nous n'aurons pas besoin de ce résultat dans le présent livre. Le lecteur intéressé en trouvera la preuve, par exemple, dans le livre de Dugundji [23].

2. Courbes de Jordan

À partir de ce paragraphe, nous appellerons *plan vectoriel* un espace vectoriel réel de dimension 2, et *plan affine*, ou simplement *plan*, un espace affine réel de dimension 2.

2.1. Définitions. — Soit \mathcal{E}^2 un plan. On appelle *courbe de Jordan* dans \mathcal{E}^2 l'image d'une application continue et injective du cercle trigonométrique S^1 dans \mathcal{E}^2 , c'est-à-dire l'ensemble

$$C = \{ \varphi(z) ; z \in S^1 \},$$

où $\varphi : S^1 \rightarrow \mathcal{E}^2$ est une application continue et injective. On dit alors que φ est une *paramétrisation* de la courbe de Jordan C , ou encore que φ est une *courbe de Jordan paramétrée* dans \mathcal{E}^2 .

2.2. Remarques

a) Le cercle trigonométrique S^1 est une courbe de Jordan dans le plan complexe \mathbb{C} (identifié à \mathbb{R}^2), avec pour paramétrisation l'injection canonique.

b) Soit C une courbe de Jordan dans le plan \mathcal{E}^2 . Une paramétrisation φ de C est une application continue et injective de S^1 dans \mathcal{E}^2 ; comme S^1 est compact, l'application φ est fermée. Considérée comme application du cercle S^1 sur la courbe C munie de la topologie induite par celle de \mathcal{E}^2 , φ est un homéomorphisme, car c'est une application continue, bijective et fermée. Dans la suite, une paramétrisation φ de la courbe de Jordan C sera considérée soit comme une application continue et injective de S^1 dans \mathcal{E}^2 ayant pour image C , soit comme un homéomorphisme de S^1 sur C , selon le point de vue qui sera le plus commode.

Nous aurons besoin dans la suite des théorèmes de Jordan et de Riemann-Carathéodory-Schoenflies, dont les énoncés sont rappelés ci-dessous. Les démonstrations de ces théorèmes sont assez délicates; le lecteur trouvera au chapitre VII, paragraphe 3, une démonstration complète du théorème de Jordan et des indications détaillées concernant celle du théorème de Riemann-Carathéodory-Schoenflies.

2.3. Théorème de Jordan. — Soit C une courbe de Jordan dans un plan \mathcal{E}^2 . Le complémentaire $\mathcal{E}^2 - C$ de C dans \mathcal{E}^2 a exactement deux composantes connexes, toutes deux ouvertes, dont une seule est non bornée. Chacune de ces composantes connexes a pour frontière la courbe C . La composante connexe non bornée de $\mathcal{E}^2 - C$, notée $\text{Ext}(C)$ est appelée *partie de \mathcal{E}^2 extérieure à la courbe C* , ou (avec un léger abus de langage) *extérieur de C* . La composante connexe bornée de $\mathcal{E}^2 - C$, notée $\text{Int}(C)$, est appelée *partie de \mathcal{E}^2 intérieure à la courbe C* , ou *intérieur de C* .

2.4. Théorème de Riemann-Carathéodory-Schoenflies. — Soit U un ouvert borné et simplement connexe (définition VII.3.14) du plan complexe \mathbb{C} . On note D^2 et $\overline{D^2}$, respectivement, le disque ouvert et le disque fermé de centre l'origine et de rayon 1 dans le plan complexe \mathbb{C} .

1. (Théorème de Riemann). Il existe un difféomorphisme holomorphe (c'est-à-dire analytique complexe, ainsi que son inverse), non unique, du disque ouvert D^2 sur l'ouvert U .

2. (Théorème de Carathéodory-Schoenflies). Soit C une courbe de Jordan dans un plan \mathcal{E}^2 . On munit \mathcal{E}^2 d'une structure d'espace affine complexe de dimension 1, en l'identifiant à \mathbb{C} au moyen d'un isomorphisme affine. L'intérieur $\text{Int}(C)$ de la courbe de Jordan C est un ouvert borné et simplement connexe de \mathcal{E}^2 . Le théorème de Riemann montre qu'il existe un difféomorphisme holomorphe (non unique) de D^2 sur $\text{Int}(C)$. De plus, tout difféomorphisme holomorphe de D^2 sur $\text{Int}(C)$ se prolonge, de manière unique, en un homéomorphisme du disque fermé $\overline{D^2}$ sur $C \cup \text{Int}(C)$. La restriction de cet homéomorphisme au bord S^1 du disque D^2 est un homéomorphisme de S^1 sur C , c'est-à-dire une paramétrisation de la courbe de Jordan C .

Nous avons vu (corollaire 1.5) qu'un homéomorphisme du cercle S^1 sur lui-même avait pour degré 1 ou -1 . Cela justifie les définitions suivantes.

2.5. Définitions. — Soit C une courbe de Jordan dans un plan \mathcal{E}^2 .

1. Deux paramétrisations $\varphi_1 : S^1 \rightarrow C$ et $\varphi_2 : S^1 \rightarrow C$ de cette courbe sont dites *de même orientation* si le degré de l'homéomorphisme $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : S^1 \rightarrow S^1$ est 1, et *d'orientations opposées* si le degré de cet homéomorphisme est -1 .

2. On dit que la courbe de Jordan C est *orientée* lorsqu'on a choisi une classe de paramétrisations de C , toutes de même orientation; une paramétrisation élément de cette classe sera dite *d'orientation positive*, et une paramétrisation d'orientation opposée sera dite *d'orientation négative*.

2.6. Quelques propriétés de l'orientation. — Nous allons examiner quelques propriétés, utiles pour la suite, de l'orientation des courbes de Jordan, notamment les relations existant entre l'orientation d'une courbe de Jordan et celle du plan qui la contient.

a) Orientation d'un espace vectoriel ou affine. — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$. Deux bases (e_1, \dots, e_n) et (e'_1, \dots, e'_n) de E sont dites *de même orientation* si le déterminant de la matrice de changement de base est positif. La propriété, pour deux bases de E , d'être de même orientation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E . Il y a exactement deux classes d'équivalence. Par définition, orienter l'espace E , c'est choisir une de ces deux classes d'équivalence; les bases appartenant à la classe d'équivalence choisie seront dites *d'orientation positive*, et celles appartenant à l'autre classe *d'orientation négative*.

Soit \mathcal{E} un espace affine réel de dimension finie n , et E l'espace vectoriel associé. Par définition, orienter \mathcal{E} , c'est orienter l'espace vectoriel associé E . Lorsque cet espace affine

est orienté, un repère affine (a, e_1, \dots, e_n) de \mathcal{E} (constitué par un point a de \mathcal{E} et une base (e_1, \dots, e_n) de E) est dit *d'orientation positive* si la base (e_1, \dots, e_n) de E est d'orientation positive, et *d'orientation négative* dans le cas contraire.

b) Orientation du plan associée à l'orientation d'une courbe de Jordan. — Soit \mathcal{E}^2 un plan affine, E^2 le plan vectoriel associé et C une courbe de Jordan dans \mathcal{E}^2 . À chaque orientation de la courbe de Jordan C (au sens de 2.5), on peut associer une orientation du plan vectoriel E^2 , donc aussi du plan affine \mathcal{E}^2 (au sens de 2.6 a), et réciproquement. Voici comment.

Munissons E^2 d'un produit scalaire euclidien, et supposons d'abord la courbe de Jordan C différentiable de classe C^1 , c'est-à-dire telle qu'il existe une paramétrisation $\varphi : S^1 \rightarrow \mathcal{E}^2$ de la courbe C , différentiable de classe C^1 , ayant la propriété suivante : pour tout $s \in \mathbb{R}$,

le vecteur tangent à la courbe C au point $x(s)$, $t(s) = \frac{d(\varphi(\exp(is)))}{ds}$, est non nul. La droite parallèle à ce vecteur passant par le point $x(s) = \varphi(\exp(is))$ est bien définie; c'est la tangente à la courbe C au point $x(s)$. Il existe exactement deux vecteurs unitaires, opposés l'un de l'autre, normaux en $x(s)$ à la courbe C . Le théorème de Jordan montre qu'un et un seul de ces deux vecteurs, que nous noterons $n(s)$, est dirigé vers l'intérieur de la courbe C , l'autre $-n(s)$ étant dirigé vers l'extérieur. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, le couple ordonné de vecteurs $(t(s), n(s))$ est une base de E^2 , qui dépend continûment de s ; comme s parcourt un espace connexe \mathbb{R} , les bases $(t(s), n(s))$ ont toutes la même orientation. L'orientation de E^2 associée à l'orientation de la courbe de Jordan C pour laquelle la paramétrisation φ est d'orientation positive est, par définition, celle pour laquelle les bases $(t(s), n(s))$ sont d'orientation positive. Inversement, si une orientation de E^2 est donnée, l'orientation de C qui lui est associée est, par définition,

- l'orientation pour laquelle la paramétrisation φ est d'orientation positive si pour tout $s \in \mathbb{R}$, $(t(s), n(s))$ est une base de E^2 d'orientation positive;
- l'orientation pour laquelle la paramétrisation φ est d'orientation négative si pour tout $s \in \mathbb{R}$, $(t(s), n(s))$ est une base de E^2 d'orientation négative.

On vérifie aisément que ces définitions ne dépendent pas des choix arbitraires qui ont été faits : choix de la paramétrisation différentiable φ dans une classe de paramétrisations toutes de même orientation, et choix du produit scalaire euclidien de E .

Lorsque la courbe de Jordan C n'est pas différentiable, le théorème de Riemann-Carathéodory-Schoenflies montre l'existence d'un homéomorphisme h du disque fermé $\overline{D^2}$ sur $C \cup \text{Int}(C)$, dont la restriction au disque ouvert D^2 est un difféomorphisme, et dont la restriction à la frontière S^1 de ce disque est une paramétrisation de C . Puisque S^1 est différentiable, nous pouvons associer à chaque orientation de S^1 une orientation du plan complexe \mathbb{C} , et réciproquement. L'homéomorphisme h met en correspondance une orientation de S^1 et une orientation de C ; sa restriction au disque ouvert D^2 , étant un difféomorphisme, met en correspondance une orientation du plan complexe \mathbb{C} et une orientation du plan \mathcal{E}^2 . Par suite, nous pouvons encore associer une orientation de C à une orientation du plan \mathcal{E}^2 , et réciproquement. Il est aisé de vérifier (en revenant au plan complexe et au cercle S^1) que la correspondance ainsi établie ne dépend pas du choix de l'homéomorphisme h , pourvu toutefois que la restriction de cet homéomorphisme au disque ouvert D^2 soit un difféomorphisme.

c) *Courbes de Jordan dans un plan orienté.* — Soit C une courbe de Jordan dans un plan \mathcal{E}^2 muni d'une orientation. Une orientation de C est dite *positive* si elle coïncide avec l'orientation associée à celle de \mathcal{E}^2 , et *négative* dans le cas contraire. Une paramétrisation de C est dite *positive* si l'orientation de C qu'elle détermine est positive, et *négative* si l'orientation de C qu'elle détermine est négative.

Il est toujours possible de munir une courbe de Jordan C , dans un plan orienté \mathcal{E}^2 , d'une paramétrisation positive. En effet, soit $\varphi : S^1 \rightarrow \mathcal{E}^2$ une paramétrisation quelconque de C . Si elle est négative, la paramétrisation $z \mapsto \varphi(\bar{z})$, où \bar{z} est le complexe conjugué de z , est une paramétrisation positive de C .

d) *Comparaison des orientations de deux courbes de Jordan.* — Soient C_1 et C_2 deux courbes de Jordan orientées dans un même plan \mathcal{E}^2 . On dit que ces deux courbes sont de *même orientation* si les orientations de \mathcal{E}^2 associées aux orientations de ces deux courbes sont les mêmes. Dans le cas contraire, on dit que ces deux courbes sont d'*orientations opposées*. Soient φ_1 une paramétrisation de C_1 et φ_2 une paramétrisation de C_2 . On dit que φ_1 et φ_2 sont de *même orientation* si les courbes C_1 et C_2 , munies des orientations déterminées respectivement par φ_1 et par φ_2 , sont de même orientation. On dit que φ_1 et φ_2 sont d'*orientations opposées* si les courbes C_1 et C_2 , munies des orientations déterminées respectivement par φ_1 et par φ_2 , sont d'orientations opposées. Lorsque C_1 et C_2 sont confondues, cette convention est en accord avec la définition 2.5.1.

La figure VI.2 illustre ces notions. On voit sur cette figure deux courbes de Jordan orientées, situées dans un même plan, d'orientations opposées.

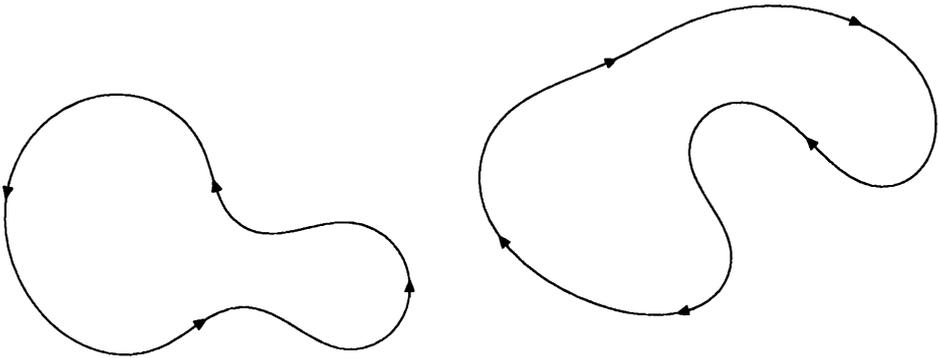


Figure VI.2. Courbes de Jordan orientées d'orientations opposées

Nous pouvons maintenant définir le degré d'une application continue d'une courbe de Jordan dans une autre, lorsque ces courbes sont soit toutes deux orientées, soit contenues dans un même plan, soit contenues l'une dans un plan affine et l'autre dans le plan vectoriel associé.

2.7. Proposition. — Soient C_1 et C_2 deux courbes de Jordan et $f : C_1 \rightarrow C_2$ une application continue.

1. On suppose C_1 et C_2 orientées. Soient $\varphi_1 : S^1 \rightarrow C_1$ et $\varphi_2 : S^1 \rightarrow C_2$ des paramétrisations d'orientation positive, respectivement de C_1 et de C_2 . Le degré de l'application $\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1 : S^1 \rightarrow S^1$ ne dépend pas du choix des paramétrisations d'orientation positive φ_1 de C_1 et φ_2 de C_2 . On l'appelle *degré* de l'application continue f de la courbe de Jordan orientée C_1 dans la courbe de Jordan orientée C_2 .

2. On suppose les courbes C_1 et C_2 , soit toutes deux contenues dans un même plan affine \mathcal{E}^2 , soit contenues l'une dans un plan affine \mathcal{E}^2 et l'autre dans le plan vectoriel associé E^2 . On munit le plan affine \mathcal{E}^2 (donc aussi le plan vectoriel associé E^2) d'une orientation, et les courbes de Jordan C_1 et C_2 des orientations associées (au sens de 2.6 c). Le degré de l'application f de la courbe orientée C_1 dans la courbe orientée C_2 ne dépend pas du choix de l'orientation de \mathcal{E}^2 . On l'appelle degré de l'application f de C_1 dans C_2 , sans préciser le choix des orientations de ces deux courbes.

Preuve : Supposons C_1 et C_2 orientées. Soient φ_1 et φ'_1 deux paramétrisations de C_1 de même orientation, φ_2 et φ'_2 deux paramétrisations de C_2 de même orientation. Nous pouvons écrire

$$\varphi'_2{}^{-1} \circ f \circ \varphi'_1 = (\varphi'_2{}^{-1} \circ \varphi_2) \circ (\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1) \circ (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_1),$$

donc (proposition 1.4)

$$\begin{aligned} \text{degr}(\varphi'_2{}^{-1} \circ f \circ \varphi'_1) &= \text{degr}(\varphi'_2{}^{-1} \circ \varphi_2) \text{degr}(\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1) \text{degr}(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_1) \\ &= \text{degr}(\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1), \end{aligned}$$

car $\text{degr}(\varphi'_2{}^{-1} \circ \varphi_2) = \text{degr}(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_1) = 1$, puisque les paramétrisations φ'_1 et φ_1 d'une part, φ'_2 et φ_2 d'une part, sont de même orientation. Le résultat annoncé en découle.

Lorsque C_1 et C_2 ne sont pas orientées mais sont contenues dans un même plan affine, ou contenues l'une dans un plan affine et l'autre dans le plan vectoriel associé, on peut choisir de manière cohérente leurs orientations, et définir alors le degré de f comme ci-dessus; on voit immédiatement que le degré ainsi défini ne dépend pas du choix des orientations de C_1 et de C_2 , pourvu que ces orientations soient choisies de manière coordonnée, car le remplacement de l'orientation de C_1 par l'orientation opposée entraîne le remplacement de l'orientation de C_2 par l'orientation opposée. \square

2.8. Remarque. — Dans les hypothèses de la proposition 2.7, le degré d'une application continue $f : C_1 \rightarrow C_2$ a une signification intuitive claire, analogue à celle que nous avons utilisée dans la définition 1.2. Lorsque C_1 et C_2 sont orientées, le degré de f est le nombre de tours, compté algébriquement, que fait le point $f(x)$ sur C_2 lorsque le point x fait, sur C_1 , un tour dans le sens positif. Lorsque C_1 et C_2 ne sont pas orientées, mais sont contenues dans un même plan affine \mathcal{E}^2 , ou sont contenues, l'une dans un plan affine \mathcal{E}^2 et l'autre dans le plan vectoriel associé, il n'est pas nécessaire, pour définir le degré de f , de spécifier les orientations choisies de ces deux courbes : ces orientations étant toutes deux associées à une même orientation de \mathcal{E}^2 , lorsqu'on en modifie le choix on change à la fois l'orientation servant à compter algébriquement le nombre de tours fait par $f(x)$ sur C_2 et le sens considéré comme positif dans lequel le point x doit parcourir C_1 .

La proposition suivante étend aux applications d'une courbe de Jordan dans une autre les résultats établis dans la proposition 1.4 et son corollaire 1.5.

2.9. Proposition. — Soient C_1 , C_2 et C_3 trois courbes de Jordan orientées, $f : C_1 \rightarrow C_2$ et $g : C_2 \rightarrow C_3$ deux applications continues.

1. Le degré de $g \circ f : C_1 \rightarrow C_3$ est le produit des degrés de f et de g .
2. Si $f : C_1 \rightarrow C_2$ est un homéomorphisme, son degré est égal à celui de l'homéomorphisme réciproque $f^{-1} : C_2 \rightarrow C_1$, et a pour valeur 1 ou -1 . Plus précisément, soit $\varphi : S^1 \rightarrow C_1$ une paramétrisation de C_1 , d'orientation positive; le degré de f est égal à 1 si la paramétrisation $f \circ \varphi$ de C_2 est d'orientation positive, à -1 si cette paramétrisation est d'orientation négative.

Preuve :

1. Soient φ_1, φ_2 et φ_3 des paramétrisations positives de C_1, C_2 et C_3 . Nous pouvons écrire

$$\varphi_3^{-1} \circ (g \circ f) \circ \varphi_1 = (\varphi_3^{-1} \circ g \circ \varphi_2) \circ (\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1).$$

Grâce à la proposition 1.4, nous en déduisons, comme dans la preuve de la proposition précédente,

$$\text{degr}(g \circ f) = \text{degr}(g) \text{degr}(f).$$

2. Soient φ_1 et φ_2 des paramétrisations positives de C_1 et de C_2 . Puisque $\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1$ est un homéomorphisme de S^1 , nous avons (corollaire 1.5)

$$\text{degr}(f) = \text{degr}(\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1) = \pm 1.$$

De plus, la définition 2.5 nous permet d'affirmer que $\text{degr } f = 1$ si $f \circ \varphi_1$ et φ_2 sont de même orientation, et que $\text{degr } f = -1$ dans le cas contraire. \square

3. Indice d'une courbe de Jordan relativement à un champ de vecteurs

3.1. Proposition. — Soit X un champ de vecteurs continu, défini sur un ouvert Ω d'un plan affine \mathcal{E}^2 . Soit C une courbe de Jordan dans Ω , telle qu'en tout point x de C , on ait $X(x) \neq 0$. On munit le plan vectoriel E^2 associé au plan affine \mathcal{E}^2 d'une norme. On pose

$$\Sigma = \{v \in E^2 ; \|v\| = 1\}.$$

Alors Σ est une courbe de Jordan contenue dans le plan vectoriel E^2 , et l'application de C dans Σ :

$$x \mapsto \frac{X(x)}{\|X(x)\|}$$

est continue. Son degré ne dépend pas du choix de la norme choisie sur E^2 ; on l'appelle *indice* de la courbe C relativement au champ de vecteurs X , et on le note $I_X(C)$.

Preuve : Munissons E^2 d'un produit scalaire euclidien, noté $(u, v) \mapsto (u|v)$. L'ensemble

$$S = \{u \in E^2 ; (u|u) = 1\}$$

est une courbe de Jordan, car en choisissant une base orthonormée de E^2 et en identifiant E^2 à \mathbb{R}^2 au moyen de cette base, nous pouvons identifier S au cercle trigonométrique S^1 .

L'application qui associe, à chaque élément $v \in \Sigma$, le point d'intersection du cercle S et de la demi-droite issue de l'origine parallèle à v , est une application continue et bijective de S sur Σ , donc (puisque S est compact) un homéomorphisme. Ceci prouve que Σ est bien une courbe de Jordan. L'application de C dans Σ : $x \mapsto \frac{X(x)}{\|X(x)\|}$ est continue, car

composée d'applications continues. Montrons que son degré ne dépend pas du choix de la norme de E^2 . Soient donc $u \mapsto \|u\|_1$ et $u \mapsto \|u\|_2$ deux normes sur E^2 . Posons

$$\Sigma_1 = \{v \in E^2 ; \|v\|_1 = 1\}, \quad \Sigma_2 = \{v \in E^2 ; \|v\|_2 = 1\}.$$

Soit $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ l'application qui associe, à chaque élément $v_1 \in \Sigma_1$, le point $v_2 = h(v_1)$ d'intersection de la demi-droite issue de l'origine parallèle à v_1 et de la courbe Σ_2 . L'application h est un homéomorphisme de degré 1.

Or l'application de C dans Σ_2 : $x \mapsto \frac{X(x)}{\|X(x)\|_2}$ est composée de l'application de C dans

Σ_1 : $x \mapsto \frac{X(x)}{\|X(x)\|_1}$, et de l'application $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$. La proposition 2.9 nous permet

d'affirmer que les applications $x \mapsto \frac{X(x)}{\|X(x)\|_1}$ et $x \mapsto \frac{X(x)}{\|X(x)\|_2}$ ont même degré. \square

3.2. Expression intégrale de l'indice. — Choisissons un repère affine $(0, e_1, e_2)$ de \mathcal{E}^2 , et munissons cet espace de l'orientation pour laquelle ce repère est d'orientation positive. Identifions \mathcal{E}^2 à \mathbb{R}^2 au moyen de ce repère et notons x et y les coordonnées correspondantes. Le champ de vecteurs X s'écrit alors

$$X(x, y) = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

où $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^2 , et où P et Q sont les composantes du champ de vecteurs X ; ce sont des fonctions continues des coordonnées x et y .

Choisissons une paramétrisation d'orientation positive φ de la courbe de Jordan C , et posons

$$\varphi(\exp(is)) = (x(s), y(s)).$$

Supposons la paramétrisation φ et le champ de vecteurs X différentiables de classe C^1 . Les applications $s \mapsto x(s)$, $s \mapsto y(s)$ et les fonctions P et Q sont alors différentiables de classe C^1 . Nous allons voir qu'on peut dans ce cas exprimer l'indice $I_X(C)$ au moyen d'une intégrale. Afin d'alléger l'écriture, nous noterons

$$P(s) = P(x(s), y(s)), \quad Q(s) = Q(x(s), y(s)).$$

Les applications $s \mapsto P(s)$ et $s \mapsto Q(s)$ sont différentiables de classe C^1 , puisque composées d'applications différentiables de classe C^1 . L'angle orienté $\theta(s)$ (défini modulo 2π) dont il faut faire tourner le vecteur de base e_1 pour le rendre parallèle au vecteur $X(\varphi(s))$ et de même sens a pour tangente

$$\operatorname{tg} \theta(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}.$$

Cet angle s'obtient en choisissant une détermination particulière de la fonction arc tangente de $\frac{Q(s)}{P(s)}$. Calculons sa dérivée par rapport à s . Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{Q(s)}{P(s)} \\ &= \frac{P^2(s)}{P^2(s) + Q^2(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{Q(s)}{P(s)} \right) \\ &= \frac{1}{P^2(s) + Q^2(s)} \left(P(s) \frac{dQ(s)}{ds} - Q(s) \frac{dP(s)}{ds} \right). \end{aligned}$$

Nous en déduisons la formule

$$I_X(C) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{P^2(s) + Q^2(s)} \left(P(s) \frac{dQ(s)}{ds} - Q(s) \frac{dP(s)}{ds} \right) ds.$$

3.3. Quelques exemples. — Dans les exemples ci-dessous, la courbe de Jordan C est le cercle de centre l'origine et de rayon 1 dans le plan \mathbb{R}^2 .

a) Prenons pour champ de vecteurs

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Pour ce champ de vecteurs, l'origine est un nœud répulsif (voir III.5.3 et figure III.7). Appliquons la formule du paragraphe précédent. Nous avons :

$$\varphi(s) = (\cos s, \sin s), \quad P(s) = \cos s, \quad Q(s) = \sin s,$$

donc

$$I_X(C) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2 s + \sin^2 s) ds = 1.$$

b) Prenons pour champs de vecteurs

$$Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} .$$

Pour ce champ de vecteurs, l'origine est un centre (voir III.5.4 et figure III.9). Nous avons cette fois

$$\varphi(s) = (\cos s, \sin s), \quad P(s) = -\sin s, \quad Q(s) = \cos s .$$

Nous obtenons donc

$$I_Y(C) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^2 s + \cos^2 s) ds = 1 .$$

c) Prenons pour champs de vecteurs

$$Z = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} .$$

Pour ce champ de vecteurs, l'origine est un col (voir III.5.2 et figure III.6). Nous avons cette fois

$$\varphi(s) = (\cos s, \sin s), \quad P(s) = \cos s, \quad Q(s) = -\sin s .$$

Nous obtenons donc

$$I_Z(C) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-\cos^2 s - \sin^2 s) ds = -1 .$$

La figure VI.3 illustre ces trois exemples. On peut d'ailleurs, par un examen un peu attentif de cette figure, trouver sans calcul les valeurs des indices $I_X(C)$, $I_Y(C)$ et $I_Z(C)$.

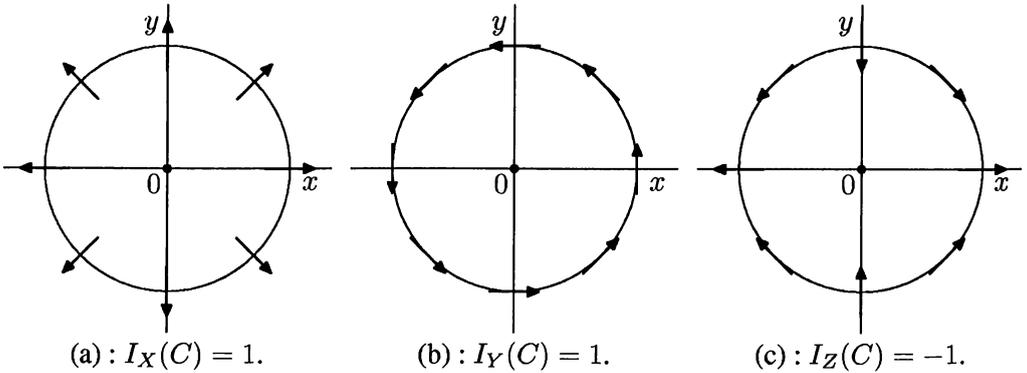


Figure VI.3. Indices de courbes entourant un nœud répulsif, un centre et un col

Le théorème ci-dessous indique que lorsqu'on fait varier, de manière continue en fonction d'un paramètre λ parcourant un espace topologique connexe, la courbe de Jordan C et le champ de vecteurs X , de manière telle que le champ X ne s'annule sur C en aucun point et pour aucune valeur du paramètre λ , l'indice $I_X(C)$ ne dépend pas de λ .

3.4. Théorème. — Soit Ω un ouvert d'un plan affine E^2 , E^2 le plan vectoriel associé, Λ un espace topologique connexe et $X : \Lambda \times \Omega \rightarrow E^2$ une application continue. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$ fixé, on note $X_\lambda : \Omega \rightarrow E^2$ le champ de vecteurs sur Ω , dépendant du paramètre λ , défini par

$$X_\lambda(x) = X(\lambda, x), \quad x \in \Omega .$$

Soit d'autre part $\varphi : \Lambda \times S^1 \rightarrow \Omega$ une application continue telle que, pour tout $\lambda \in \Lambda$ fixé, l'application $\varphi_\lambda : S^1 \rightarrow \Omega$, définie par

$$\varphi_\lambda(z) = \varphi(\lambda, z), \quad z \in S^1,$$

soit injective. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, φ_λ est une courbe de Jordan paramétrée dans Ω , dépendant du paramètre λ . Notons $C_\lambda = \varphi_\lambda(S^1)$ son image. Nous faisons l'hypothèse suivante :

pour tout $\lambda \in \Lambda$, le champ de vecteurs X_λ ne s'annule en aucun point de la courbe de Jordan C_λ .

L'indice $I_{X_\lambda}(C_\lambda)$ est alors défini, et ne dépend pas du paramètre λ , élément de Λ .

Preuve : Nous allons montrer que l'application de Λ dans \mathbb{Z} , $\lambda \mapsto I_{X_\lambda}(C_\lambda)$, est continue. Nous le ferons, pour simplifier, en supposant que pour chaque $\lambda \in \Lambda$ fixé, le champ de vecteurs X_λ et la paramétrisation φ_λ de la courbe de Jordan C_λ sont différentiables de classe C^1 (mais le résultat subsiste dans le cas général). Nous pouvons utiliser l'expression de l'indice au moyen d'une intégrale indiquée en 3.2; l'indice est donné par l'intégrale, par rapport à une variable s parcourant l'intervalle fermé et borné $[0, 2\pi]$, d'une fonction continue de s et du paramètre λ ; on sait que l'intégrale est alors une fonction continue de λ . L'indice ne peut prendre que des valeurs entières. Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble Λ_n des éléments λ de Λ tels que $I_{X_\lambda}(C_\lambda) = n$ est une partie de Λ à la fois ouverte et fermée. Comme Λ est connexe, chaque Λ_n est soit vide, soit égal à Λ tout entier. Nous avons ainsi prouvé que $I_{X_\lambda}(C_\lambda)$ ne dépend pas de λ . \square

3.5. Corollaire. — Soit Ω un ouvert d'un plan \mathcal{E}^2 , C une courbe de Jordan contenue dans Ω , X et Y deux champs de vecteurs continus, définis sur Ω , ne s'annulant en aucun point de C . On suppose de plus que pour tout point $x \in C$, $X(x)$ et $Y(x)$ ne sont pas de directions opposées. Alors

$$I_X(C) = I_Y(C).$$

Preuve : Nous pourrions déduire ce résultat de la proposition 1.7, mais nous préférons l'obtenir comme conséquence du théorème 3.4. Posons, pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et tout $x \in \Omega$,

$$X_\lambda(x) = (1 - \lambda)X(x) + \lambda Y(x).$$

Chaque X_λ est un champ de vecteurs continu sur Ω . Puisque pour tout point $x \in C$, $X(x)$ et $Y(x)$ ne sont pas de directions opposées, $X_\lambda(x)$ est non nul pour tout $\lambda \in [0, 1]$. La famille de champs de vecteurs $(X_\lambda, \lambda \in [0, 1])$ dépendant de manière continue de λ , le théorème précédent montre que l'indice $I_{X_\lambda}(C)$ ne dépend pas de λ . Le résultat annoncé en découle puisque $X = X_0, Y = X_1$. \square

Le lemme suivant établit une intéressante propriété d'additivité de l'indice.

3.6. Lemme. — Soit Ω un ouvert d'un plan \mathcal{E}^2 , C une courbe de Jordan dans Ω et X un champ de vecteurs continu défini sur Ω . Soient a et b deux points distincts de C . On note C_1 et C_2 les deux arcs de la courbe C ayant pour extrémités les points a et b . Soit D un arc de courbe continu dans l'ouvert Ω ayant pour extrémités les points a et b , dont tous les points autres que ses deux extrémités appartiennent à l'intérieur de C . On suppose que le champ de vecteurs X ne s'annule en aucun point de $C \cup D$. Alors $C_1 \cup D$ et $C_2 \cup D$ sont deux courbes de Jordan sur lesquelles le champ de vecteurs X ne s'annule pas, et leurs indices relativement au champ de vecteurs X vérifient

$$I_X(C_1 \cup D) + I_X(C_2 \cup D) = I_X(C).$$

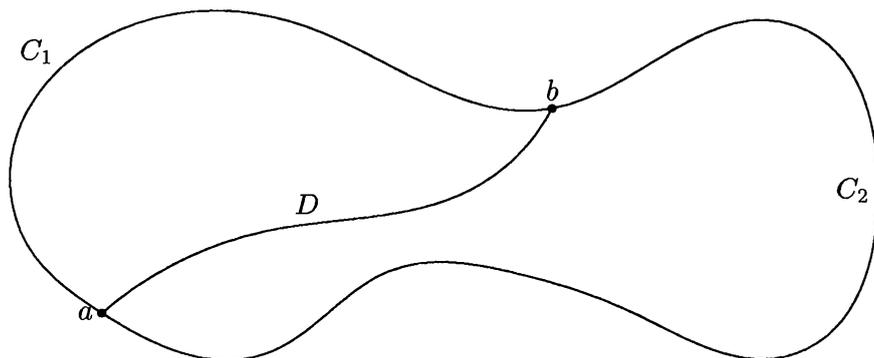


Figure VI.4. Illustration de la preuve du lemme 3.6

Preuve : Les arcs de courbe C_1 , C_2 et D ont pour extrémités les points a et b . Comme de plus tous les points de D autres que ses deux extrémités sont à l'intérieur de C , $C_1 \cup D$ et $C_2 \cup D$ sont bien des courbes de Jordan, représentées sur la figure VI.4. Munissons le plan \mathcal{E}^2 d'une orientation, et supposons par exemple que pour l'orientation associée de la courbe de Jordan $C_1 \cup D$, le sens de parcours positif soit celui pour lequel l'arc C_1 est parcouru de a vers b et l'arc D de b vers a . Le sens de parcours positif pour C est alors celui pour lequel C_1 est parcouru de a vers b et C_2 de b vers a . De même, le sens de parcours positif pour $C_2 \cup D$ est celui pour lequel C_2 est parcouru de b vers a et D de a vers b . Munissons le plan \mathcal{E}^2 d'une structure euclidienne afin de pouvoir mesurer les angles, et choisissons une direction de référence. Notons $\Delta\theta(C_1, a, b)$, $\Delta\theta(C_2, b, a)$ et $\Delta\theta(D, b, a)$ la variation de l'angle que fait le vecteur $X(x)$ avec la direction de référence lorsque le point x parcourt, respectivement,

- l'arc de courbe C_1 de a vers b ,
- l'arc de courbe C_2 de b vers a ,
- l'arc de courbe D de b vers a .

Nous avons alors (voir figure VI.4)

$$\begin{aligned} I_X(C_1 \cup D) &= \Delta\theta(C_1, a, b) + \Delta\theta(D, b, a), \\ I_X(C_2 \cup D) &= \Delta\theta(C_2, b, a) - \Delta\theta(D, b, a), \\ I_X(C) &= \Delta\theta(C_1, a, b) + \Delta\theta(C_2, b, a). \end{aligned}$$

Nous avons donc bien

$$I_X(C_1 \cup D) + I_X(C_2 \cup D) = I_X(C). \quad \square$$

3.7. Proposition. — Soit $X : \Omega \rightarrow E$ un champ de vecteurs continu sur un ouvert Ω d'un plan \mathcal{E}^2 et C une courbe de Jordan dans Ω . On suppose que l'intérieur de C est contenu dans Ω , et que le champ de vecteurs X ne s'annule en aucun point de l'intérieur de C et en aucun point de C . Alors $I_X(C) = 0$.

Preuve : D'après le théorème de Riemann-Carathéodory-Schoenflies, il existe un homéomorphisme h du disque fermé $\overline{D^2}$ du plan complexe \mathbb{C} , sur la réunion $C \cup \text{Int}(C)$ de la courbe de Jordan C et de son intérieur. Posons, pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et tout $z \in S^1$,

$$\varphi(\lambda, z) = h(\lambda z).$$

Pour tout $\lambda \in]0, 1]$, posons

$$C_\lambda = \{ \varphi(\lambda, z) ; z \in S^1 \}.$$

Nous observons que C_1 n'est autre que la courbe de Jordan C et que pour tout élément λ de l'intervalle ouvert $]0, 1[$, C_λ est une courbe de Jordan contenue dans $\text{Int}(C)$; le champ de vecteurs X ne s'annule donc en aucun point des courbes C_λ , pour $0 < \lambda \leq 1$. Le théorème 3.4 montre alors que $I_X(C_\lambda)$ ne dépend pas de λ , toujours pour $0 < \lambda \leq 1$. Mais en prenant λ assez proche de 0, nous pouvons faire en sorte que C_λ soit contenue dans un voisinage arbitrairement petit du point $h(0)$. Soit Y le champ de vecteurs, défini sur Ω , dont la valeur en chaque point est égale à $X(h(0))$. Comme le champ de vecteurs X est continu et ne s'annule pas au point $h(0)$, pour λ assez voisin de 0, ce champ de vecteurs n'est, en aucun point de C_λ , de direction opposée à celle du champ de vecteurs constant Y . Nous avons donc (corollaire 3.5) $I_X(C_\lambda) = I_Y(C_\lambda)$. Mais puisque Y est un champ de vecteurs constant, $I_Y(C_\lambda)$ est nul. Finalement, nous obtenons bien

$$I_X(C) = I_X(C_\lambda) = I_Y(C_\lambda) = 0. \quad \square$$

3.8. Proposition. — Soit $X : \Omega \rightarrow E$ un champ de vecteurs continu sur un ouvert Ω d'un espace vectoriel réel E de dimension 2, C_1 et C_2 deux courbes de Jordan dans Ω , telles que C_2 soit contenue dans l'intérieur de C_1 . On suppose que $\text{Int}(C_1) \cap \text{Ext}(C_2) \subset \Omega$ et que X ne s'annule en aucun point de cet ensemble. On suppose aussi que X ne s'annule en aucun point de C_1 et en aucun point de C_2 . Alors on a

$$I_X(C_1) = I_X(C_2).$$

Preuve : Traçons deux arcs de courbe très voisins, contenus dans $\text{Int}(C_1) \cap \text{Ext}(C_2)$. Le premier, noté (a, b) , joint un point a de C_1 à un point b de C_2 . Le second, noté (c, d) , joint un point c de C_2 , voisin du point b , à un point d de C_1 voisin du point a . La figure VI.5 illustre notre construction.

Considérons la courbe D , formée par la réunion des arcs suivants :

- l'arc (a, b) ,
- l'arc de courbe, noté C'_2 , complémentaire dans C_2 du petit arc de cette courbe allant de b à c ,
- l'arc (c, d) ,
- l'arc de courbe, noté C'_1 , complémentaire dans C_1 du petit arc de cette courbe allant de a à d .

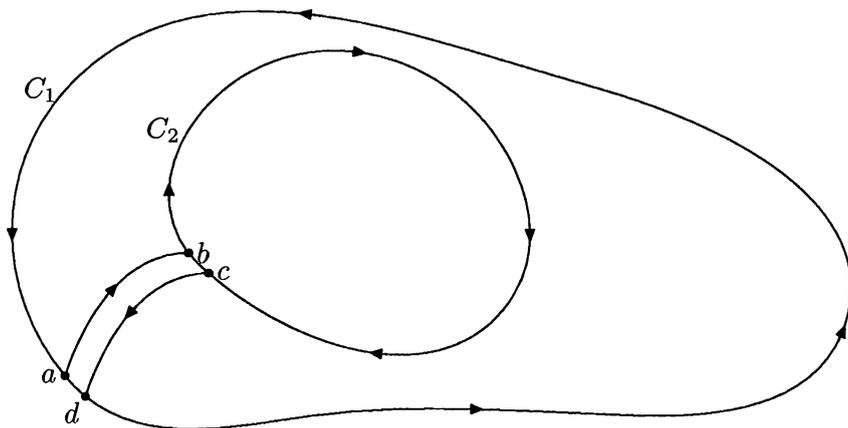
Nous voyons que D est une courbe de Jordan dont l'intérieur est contenu dans Ω . Nous voyons aussi que le champ de vecteurs X ne s'annule en aucun point de D , ni en aucun point de $\text{Int}(D)$. Nous avons donc $I_X(D) = 0$.

Nous allons évaluer $I_X(D)$ au moyen de $I_X(C_1)$ et de $I_X(C_2)$. Pour cela, choisissons une orientation de E et donnons à C_1 , à C_2 et à D une orientation positive. Nous voyons que lorsque D est parcourue dans le sens positif, l'arc C'_1 est parcouru dans le sens qui correspond à l'orientation positive de C_1 , tandis que l'arc C'_2 est parcouru dans le sens inverse du sens correspondant à l'orientation positive de C_2 .

Notons $\Delta\theta(a, b)$, $\Delta\theta(C'_2)$, $\Delta\theta(c, d)$ et $\Delta\theta(C'_1)$ les angles dont le vecteur $X(x)$ tourne lorsque le point x parcourt (a, b) , C'_2 , (c, d) et C'_1 , respectivement, dans le sens correspondant à l'orientation positive de D . D'après la définition de l'indice, nous avons

$$0 = I_X(D) = \Delta\theta(a, b) + \Delta\theta(C'_2) + \Delta\theta(c, d) + \Delta\theta(C'_1). \quad (*)$$

Faisons maintenant tendre vers 0 l'écart entre les arcs (a, b) et (c, d) , par exemple en maintenant le premier fixe et en faisant converger (c, d) vers (a, b) . Nous voyons que $\Delta\theta(c, d)$ converge vers $-\Delta\theta(a, b)$, car ces deux arcs tendent l'un vers l'autre mais sont parcourus dans des sens opposés. Nous voyons aussi que $\Delta\theta(C'_1)$ converge vers $I_X(C_1)$,

Figure VI.5. Construction de la courbe de Jordan D

tandis que $\Delta\theta(C'_2)$ converge vers $-I_X(C_2)$, car C'_2 est parcouru dans le sens inverse du sens qui correspond à l'orientation positive de C_2 . En passant à la limite dans l'égalité (*), nous obtenons

$$0 = \Delta\theta(a, b) - I_X(C_2) - \Delta\theta(a, b) + I_X(C_1),$$

d'où le résultat annoncé. \square

Dans un plan \mathcal{E}^2 , une orbite périodique C d'un champ de vecteurs X localement lipschitzien est une courbe de Jordan. Soit en effet T sa plus petite période positive. Cette courbe est l'image d'une solution $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}^2$ de l'équation différentielle associée à X , périodique et de plus petite période positive T . C'est donc aussi l'image d'une application continue et injective de l'espace quotient $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ (homéomorphe au cercle trigonométrique) dans \mathcal{E}^2 . Nous voyons de plus que le champ de vecteurs X ne s'annule en aucun point de l'orbite périodique C . Il est donc légitime de considérer l'indice $I_X(C)$ de cette courbe, relativement au champ de vecteurs X . Nous avons alors le résultat remarquable suivant.

3.9. Théorème. — *Soit X un champ de vecteurs localement lipschitzien sur un ouvert Ω d'un plan \mathcal{E}^2 , et C une orbite périodique de X . Son indice $I_X(C)$ est égal à 1.*

Preuve : Cette propriété peut paraître assez évidente intuitivement : le champ de vecteurs X étant tangent à C en chacun de ses points, le vecteur $X(x)$ fait un tour lorsque le point x fait un tour sur la courbe C . Cependant, il faut en faire une démonstration plus rigoureuse. Celle qui suit est due à Heinz Hopf. Le raisonnement est illustré par la figure VI.6.

Par le choix d'un repère affine, nous identifions \mathcal{E}^2 à \mathbb{R}^2 (coordonnées x et y). Soit a un point de C où la fonction ordonnée y atteint son minimum sur C (un tel point existe puisque C est compacte). En effectuant une translation, nous pouvons faire en sorte que a soit situé sur l'axe des abscisses. La courbe C est alors contenue dans le demi-plan $x \geq 0$. De plus, c'est une courbe différentiable, puisque c'est une orbite d'un champ de vecteurs localement lipschitzien. Elle admet donc une tangente en chacun de ses points, et sa tangente au point a est l'axe des abscisses.

Soit $T > 0$ la période primitive (c'est-à-dire la plus petite période positive) de l'orbite périodique C . Soit $t \mapsto \varphi(t)$ la courbe intégrale du champ de vecteurs X passant par le point a pour $t = 0$. Nous définissons une partie compacte K de \mathbb{R}^2 en posant

$$K = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq s \leq t \leq T\}.$$

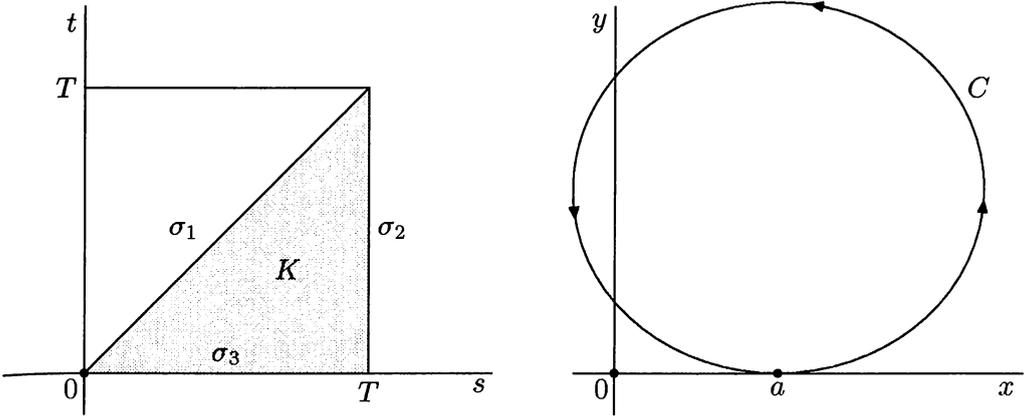


Figure VI.6. Illustration de la démonstration du théorème 3.9.

Nous définissons une application Z de K dans \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire un champ de vecteurs sur K , en posant

$$Z(s, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{\|\varphi(t) - \varphi(s)\|} & \text{si } s \neq t, \\ \frac{X(\varphi(s))}{\|X(\varphi(s))\|} & \text{si } s = t. \end{cases}$$

Compte tenu de $\frac{d\varphi(s)}{ds} = X(\varphi(s))$, nous voyons que Z est continu sur K . Nous pouvons même prolonger Z en un champ de vecteurs (encore noté Z) continu, défini sur un voisinage ouvert de K dans \mathbb{R}^2 . La frontière de K , notée ∂K , est une courbe de Jordan dans \mathbb{R}^2 , et le champ de vecteurs Z ne s'annule en aucun point de cette courbe, ni en aucun point de son intérieur, puisque le champ de vecteurs Z est de module 1 en tout point de K . Nous avons donc, d'après la proposition 2.8,

$$I_Z(\partial K) = 0.$$

Mais ∂K est la réunion de trois segments de droite :

- le segment σ_1 , ayant pour extrémités l'origine et le point $(s = T, t = T)$,
- le segment σ_2 , ayant pour extrémités les points $(s = T, t = T)$ et $(s = 0, t = T)$,
- le segment σ_3 , ayant pour extrémités le point $(s = 0, t = T)$ et l'origine.

Notons $\Delta\theta(\sigma_1)$, $\Delta\theta(\sigma_2)$ et $\Delta\theta(\sigma_3)$ les angles dont tourne le vecteur $Z(s, t)$ lorsque le point (s, t) parcourt les segments de droite σ_1 , σ_2 et σ_3 , respectivement, dans le sens correspondant à l'orientation positive de ∂K . Nous allons évaluer ces angles.

Sur σ_1 , nous avons $Z(s, s) = \frac{X(\varphi(s))}{\|X(\varphi(s))\|}$, donc $\Delta\theta(\sigma_1) = 2\pi I_X(C)$.

Sur σ_2 , nous avons, puisque $\varphi(T) = \varphi(0) = a$, $Z(s, T) = \frac{\varphi(0) - \varphi(s)}{\|\varphi(0) - \varphi(s)\|}$, et s décroît de T à 0. Donc $\Delta\theta(\sigma_2) = -\pi$.

Sur σ_3 , nous avons $Z(0, t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{\|\varphi(t) - \varphi(0)\|}$, et t décroît de T à 0. Donc $\Delta\theta(\sigma_3) = -\pi$.

Nous en déduisons

$$0 = I_X(C) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \quad \text{c'est-à-dire } I_X(C) = 1. \quad \square$$

3.10. Corollaire. — Soit X un champ de vecteurs localement lipschitzien sur un ouvert Ω d'un plan \mathcal{E}^2 , et C une orbite périodique de X dont l'intérieur $\text{Int}(C)$ est contenu dans Ω . Il existe dans $\text{Int}(C)$ au moins un point d'équilibre de X , c'est-à-dire au moins un point $a \in \text{Int}(C)$ tel que $X(a) = 0$.

Preuve : Supposons que X ne s'annule en aucun point de $\text{Int}(C)$. D'après la proposition 3.7, nous aurions alors $I_X(C) = 0$, en contradiction avec le théorème précédent. \square

4. Indice d'un point d'équilibre isolé

4.1. Proposition. — Soit X un champ de vecteurs continu sur un ouvert Ω d'un plan \mathcal{E}^2 , et $a \in \Omega$ un point d'équilibre isolé de X , c'est-à-dire un point de Ω vérifiant $X(a) = 0$ et possédant un voisinage $V \subset \Omega$ tel que pour tout $x \in V, x \neq a$, on ait $X(x) \neq 0$. Soit C une courbe de Jordan contenue dans Ω , telle que X ne s'annule pas sur C , dont l'intérieur $\text{Int}(C)$ est contenu dans Ω et contient un point d'équilibre unique de X , le point a . Alors l'indice $I_X(C)$ ne dépend pas du choix de la courbe de Jordan C , pourvu qu'elle ait les propriétés indiquées. On l'appelle *indice du point d'équilibre isolé a* , et on le note $I_X(a)$.

Preuve : Le raisonnement est illustré par la figure VI.7.

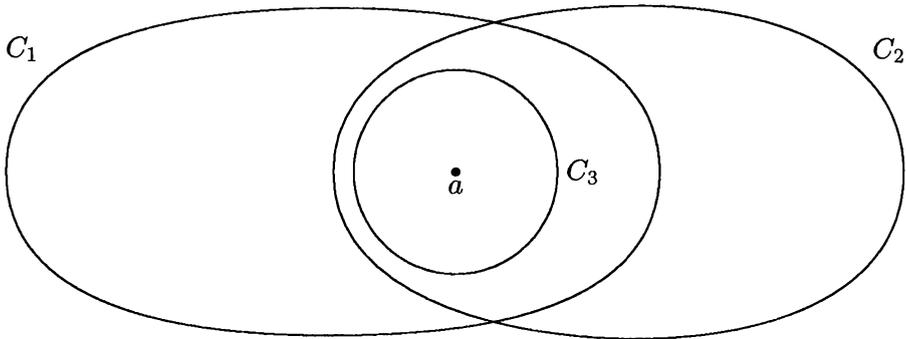


Figure VI.7. Indice d'un point d'équilibre isolé

Soient C_1 et C_2 deux courbes de Jordan contenues dans Ω , sur lesquelles le champ de vecteurs X ne s'annule pas et dont l'intérieur, contenu dans Ω , contient un unique point d'équilibre de X , le point a . Puisque $\text{Int}(C_1) \cap \text{Int}(C_2)$ est un voisinage ouvert de a , il contient une courbe de Jordan C_3 dont l'intérieur contient le point a . En appliquant la proposition 3.8 au couple de courbes de Jordan (C_1, C_3) , nous obtenons $I_X(C_1) = I_X(C_3)$. En appliquant cette même proposition au couple de courbes de Jordan (C_2, C_3) , nous obtenons $I_X(C_2) = I_X(C_3)$. Nous en déduisons $I_X(C_1) = I_X(C_2)$. \square

4.2. Proposition. — Soit X un champ de vecteurs continu sur un ouvert Ω d'un plan \mathcal{E}^2 , et C une courbe de Jordan contenue dans Ω , telle que X ne s'annule pas sur C , dont l'intérieur $\text{Int}(C)$ est contenu dans Ω . On suppose que tous les points d'équilibre de X contenus dans $\text{Int}(C)$ sont isolés (au sens précisé dans la proposition 4.1). Alors l'ensemble des points d'équilibre de X contenus dans $\text{Int}(C)$ est un ensemble fini $\{a_1, \dots, a_n\}$, et l'indice de la courbe de Jordan C est la somme des indices des points d'équilibre contenus dans son intérieur,

$$I_X(C) = \sum_{i=1}^n I_X(a_i).$$

Preuve : La démonstration est illustrée par la figure VI.8.

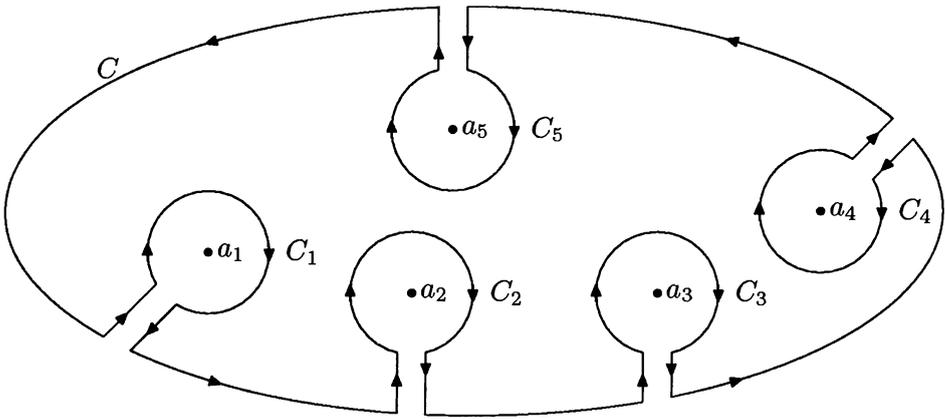


Figure VI.8. Indice d'une courbe de Jordan entourant des points d'équilibre isolés

Si l'ensemble des points d'équilibre de X contenus dans $\text{Int}(C)$ n'était pas fini, il aurait une valeur d'adhérence, puisque $\overline{\text{Int}(C)}$ est compact. Cette valeur d'adhérence serait, soit un point d'équilibre de X situé sur la courbe C (ce qui est impossible puisque X ne s'annule pas sur C), soit un point d'équilibre de X contenu dans $\text{Int}(C)$ et non isolé (ce qui est contraire à l'hypothèse). Donc l'ensemble des points d'équilibre de X contenus dans $\text{Int}(C)$ est bien un ensemble fini.

Traçons une petite courbe fermée C_i , contenue dans $\text{Int}(C)$, entourant chacun des points d'équilibre a_i de X contenus dans $\text{Int}(C)$ ($1 \leq i \leq n$). Puis, comme dans la démonstration de la proposition 3.8, traçons deux arcs de courbe très voisins l'un de l'autre, reliant chacune des courbes C_i à la courbe C . Nous obtenons ainsi une nouvelle courbe de Jordan D , sur laquelle le champ de vecteurs X ne s'annule pas, dont l'intérieur est contenu dans Ω et ne contient aucun point d'équilibre de X . Un raisonnement identique à celui fait lors de la démonstration de 2.9 conduit à

$$0 = I_X(D) = I_X(C) - \sum_{i=1}^n I_X(a_i). \quad \square$$

Jusqu'à présent nous n'avons pas eu besoin de supposer que le champ de vecteurs considéré X était différentiable. Dans la proposition suivante, nous supposons qu'il l'est, et nous comparons l'indice d'un point d'équilibre isolé a de ce champ de vecteurs à l'indice de l'origine relativement au champ de vecteurs linéaire $DX(a)$ (supposé inversible).

4.3. Proposition. — Soit X un champ de vecteurs différentiable sur un ouvert Ω d'un plan \mathcal{E}^2 , et $a \in \Omega$ un point d'équilibre isolé de ce champ de vecteurs. On suppose $A = DX(a)$ inversible. Alors l'origine 0 de l'espace vectoriel E^2 associé à l'espace affine \mathcal{E}^2 est un point d'équilibre isolé du champ de vecteurs linéaire A , et nous avons

$$I_X(a) = I_A(0).$$

Preuve : En prenant le point a pour origine, nous pouvons identifier le plan affine \mathcal{E}^2 à l'espace vectoriel associé E^2 , le point a s'identifiant à 0. Nous avons alors, puisque $X(0) = 0$ et que $A = DX(0)$, d'après la définition même de la différentielle,

$$X(x) = A(x) + \mathbf{o}(x),$$

où $\mathbf{o}(x)$ désigne une quantité qui tend vers 0 plus vite que x , lorsque $x \rightarrow 0$. D'autre part, nous avons pour tout $x \in E$, $x = A^{-1}(A(x))$, donc

$$\|x\| \leq \|A^{-1}\| \|A(x)\|.$$

En prenant $\rho > 0$ assez petit, nous pouvons donc faire en sorte que pour tout $x \in E$ vérifiant $\|x\| \leq \rho$, nous ayons $x \in \Omega$ et

$$\|X(x) - A(x)\| \leq \frac{\|A(x)\|}{2}.$$

Cela implique en particulier, pour $\|x\| \leq \rho$ et $x \neq 0$, $X(x) \neq 0$. Cela montre aussi qu'en tout point x du cercle S centré sur l'origine et de rayon ρ , $X(x)$ et $A(x)$ ne peuvent pas être de directions opposées. Le corollaire 3.5 montre alors que $I_X(S) = I_A(S)$. Mais comme l'intérieur de S ne contient pas d'autre point d'équilibre de X que l'origine, et pas d'autre point d'équilibre de A que l'origine, nous avons $I_X(S) = I_X(0)$, et $I_A(S) = I_A(0)$. D'où $I_X(0) = I_A(0)$. \square

4.4. Corollaire. — Soit X un champ de vecteurs différentiable sur un ouvert Ω d'un plan \mathcal{E}^2 , et $a \in \Omega$ un point d'équilibre isolé de ce champ de vecteurs. On suppose $A = DX(a)$ inversible. Alors $I_X(a)$ est égal soit à 1, soit à -1 . Plus précisément,

- si l'origine est un nœud, un foyer ou un centre (au sens de III.5.2 a, III.5.3, III.5.4) pour le champ de vecteurs linéaire A , alors $I_X(a) = 1$,
- si l'origine est un col (au sens de III.5.2 b) pour le champ de vecteurs linéaire A , alors $I_X(a) = -1$.

Preuve : Dans le paragraphe 3.3, nous avons calculé l'indice du cercle S^1 centré sur l'origine et de rayon 1, relativement à un champ de vecteurs linéaire, dans trois cas particuliers. Les autres cas peuvent être traités par la même méthode. On voit ainsi que l'indice de S^1 relativement à un champ de vecteurs linéaire est 1 si l'origine est un nœud, un foyer ou un centre, et -1 si l'origine est un col. Pour un champ de vecteurs différentiable X ayant un point d'équilibre isolé a tel que $DX(a)$ soit inversible, les résultats annoncés découlent donc directement de la proposition précédente. \square

4.5. Remarque. — Il ne faudrait pas croire que l'indice d'un point d'équilibre isolé d'un champ de vecteurs différentiable, en dimension 2, ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1 . Ce résultat a été établi en supposant que la différentielle $DX(a)$ du champ de vecteurs, en ce point d'équilibre, est un isomorphisme. Si l'on s'affranchit de cette hypothèse, l'indice peut prendre toute valeur élément de \mathbb{Z} .

Par exemple, dans le plan complexe \mathbb{C} , l'indice de l'origine relativement au champ de vecteurs $X(z) = z^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est n . L'indice de l'origine relativement au champ de vecteurs $Y(z) = |z|^{n+2} z^{-n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est $-n$.

5. Le théorème de Poincaré-Hopf

Dans tout ce paragraphe, nous convenons de dire *différentiable* pour *différentiable de classe C^∞* . Nous convenons d'appeler *surface* une variété différentiable connexe, sans bord, de dimension 2. Le lecteur pourra se reporter si nécessaire au chapitre VII, où les quelques notions de géométrie différentielle utilisées ici sont présentées.

La proposition suivante va nous permettre de définir l'indice d'un point d'équilibre isolé d'un champ de vecteurs différentiable sur une surface.

5.1. Proposition. — Soit M une surface, X un champ de vecteurs différentiable sur M , et a un point d'équilibre isolé de X . Soit (U, φ) une carte admissible de M dont le domaine contient le point a . Soit φ_*X le champ de vecteurs, défini sur l'ouvert $\varphi(U)$ de \mathbb{R}^2 , image directe de X par φ . Le point $\varphi(a)$ est un point d'équilibre isolé de φ_*X , dont l'indice $I_{\varphi_*X}(\varphi(a))$ ne dépend pas du choix de la carte admissible (U, φ) . Cet indice est appelé *indice du point d'équilibre a relativement au champ de vecteurs X* , et noté $I_X(a)$.

Preuve : Soient (U, φ) et (V, ψ) deux cartes admissibles telles que $a \in U \cap V$. L'image directe, par l'application de changement de cartes $\psi \circ \varphi^{-1}$, du champ de vecteurs φ_*X , est le champ de vecteurs ψ_*X . De plus, cette application est un difféomorphisme qui applique $\varphi(a)$ sur $\psi(a)$. Nous voyons ainsi que le calcul des indices $I_{\varphi_*X}(\varphi(a))$ et $I_{\psi_*X}(\psi(a))$, au moyen de la formule intégrale du paragraphe 3.2, donne le même résultat, car une de ces intégrales se déduit de l'autre simplement par un changement de variables. \square

5.2. Théorème de Poincaré-Hopf. — Soit M une surface compacte, et X un champ de vecteurs différentiable sur M dont tous les points d'équilibre sont isolés. Alors l'ensemble de ces points d'équilibre est fini et la somme des indices de ces points d'équilibre, relativement au champ de vecteurs X , dépend de la surface M mais non du champ de vecteurs X considéré. C'est un invariant topologique de M , appelé *caractéristique d'Euler de M* , et noté $\chi(M)$.

Preuve : Si l'ensemble des points d'équilibre de X était infini, il aurait une valeur d'adhérence (puisque la surface M est compacte); ce point serait un point d'équilibre non isolé de X , ce qui contredirait l'hypothèse. Cet ensemble est donc bien fini, et la somme des indices des points d'équilibre de X est bien définie.

La suite de la preuve utilise certains résultats concernant la classification des surfaces que nous allons brièvement indiquer.

On montre (voir par exemple [28, 41, 42, 60]) qu'une surface orientable compacte M est entièrement caractérisée, à un difféomorphisme près, par un nombre entier positif ou nul $g(M)$, appelé *genre* de cette surface. Une surface orientable compacte de genre 0 est difféomorphe à une sphère S^2 . Une surface orientable compacte de genre 1 est difféomorphe à un tore T^2 , c'est-à-dire au produit $S^1 \times S^1$ de deux cercles. Plus généralement, une surface orientable compacte de genre $g > 0$ est homéomorphe à un "tore" à g trous (penser à la surface d'une brioche de fantaisie, dans laquelle le boulanger aurait fait un nombre de trous égal à g). On peut construire une telle surface, à partir d'une sphère, en faisant dans cette sphère $2g$ trous circulaires disjoints (c'est-à-dire en enlevant à cette sphère $2g$ petites calottes sphériques disjointes, chacune de ces calottes ayant pour bord un petit cercle tracé sur la sphère). Puis on recolle, deux par deux les bords de ces trous, en veillant à identifier, dans chaque paire de trous, le bord d'un trou muni d'une certaine orientation avec le bord de l'autre trou muni de l'orientation opposée. La figure VI.9 représente schématiquement une surface de genre 2.

Quant aux surfaces compactes non orientables, on peut, pour les classifier, procéder comme suit. Soit M une surface compacte non orientable. On montre (voir théorème VII.6.5) qu'il existe une surface orientable \widetilde{M} et une application différentiable étale $r : \widetilde{M} \rightarrow M$, telle que pour chaque point y de M , $r^{-1}(y)$ soit formé de deux points de \widetilde{M} . La surface \widetilde{M} est unique, à un difféomorphisme près. On dit que c'est le *revêtement orientable* à deux feuillets de M . La surface non orientable M est caractérisée, à un difféomorphisme près, par le fait qu'elle est non orientable et par le genre de son revêtement orientable à deux feuillets. Ainsi par exemple, l'espace projectif réel $\mathbb{P}(2, \mathbb{R})$ (ensemble des droites

vectérielles de \mathbb{R}^3 , voir VII.6.4 a) a pour revêtement orientable à deux feuillets la sphère S^2 , de genre 0. La bouteille de Klein (obtenue, à partir d'une sphère, en faisant dans cette sphère deux trous circulaires disjoints et en recollant les bords de ces deux trous, ces bords étant munis de la même orientation et les orientations des deux bords identifiés étant mises en correspondance) a pour revêtement orientable à deux feuillets le tore T^2 , de genre 1. La construction du revêtement orientable à deux feuillets d'une surface non orientable connexe peut être faite aussi lorsque la surface considérée n'est pas compacte. Ainsi, par exemple, le revêtement orientable à deux feuillets d'une bande de Möbius est un cylindre (voir exercices VII.5, VII.6 et VII.7).

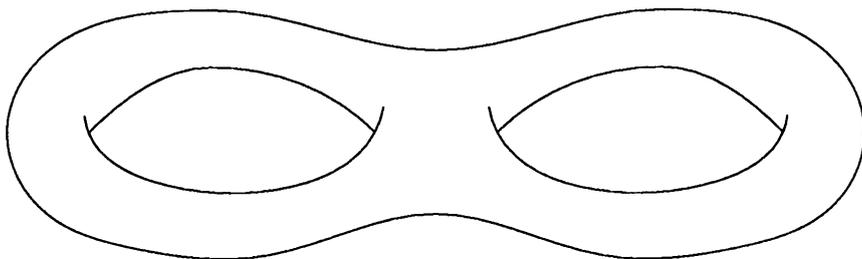


Figure VI.9. Surface orientable compacte de genre 2

La démonstration comporte ensuite trois étapes. La première consiste à démontrer le théorème pour une sphère; la seconde, à démontrer ce théorème pour une surface orientable; enfin la troisième, à le démontrer pour une surface non orientable.

a) Première étape : cas de la sphère. — Supposons que la surface M soit la sphère S^2 . Choisissons un point m de cette sphère tel que $X(m) \neq 0$. Traçons sur la sphère un petit cercle C de centre m , tel que la petite calotte sphérique K dont il est la frontière ne contienne aucun point d'équilibre. Raisonnons d'abord dans une carte (U, φ) de S^2 dont le domaine contient la calotte sphérique K , telle que $\varphi(C)$ soit un cercle de centre $\varphi(m)$ et que deux points diamétralement opposés du cercle C aient pour images deux points diamétralement opposés du cercle $\varphi(C)$. Ce sera le cas, par exemple, si cette carte est construite au moyen d'une projection stéréographique ayant pour pôle le point de la sphère M diamétralement opposé à m . Si le rayon de C est assez petit, l'image φ_*X du champ de vecteurs X est, sur un voisinage W du disque $\varphi(K)$, proche d'un champ de vecteurs constant non nul Y , dont la valeur est celle de φ_*X au point $\varphi(m)$. Plus précisément, en diminuant si nécessaire le diamètre du cercle C et en restreignant l'ouvert W , nous pouvons faire en sorte que l'on ait, sur W , $\|\varphi_*X - Y\| < (1/2)\|\varphi_*X\|$. Soit h une fonction différentiable, définie sur $\varphi(U)$, à valeurs dans $[0, 1]$, égale à 1 sur un voisinage ouvert de $\varphi(K)$ dans W et à support compact contenu dans W . Le champ de vecteurs $\varphi_*X + h(Y - \varphi_*X)$ est égal à Y (donc constant) sur le disque $\varphi(K)$, et égal à X en dehors d'un compact contenant ce disque et contenu dans W . Il est tangent au cercle $\varphi(C)$ en deux points diamétralement opposés $\varphi(p)$ et $\varphi(q)$, et dirigé vers l'intérieur de $\varphi(K)$ sur l'une des deux moitiés du cercle $\varphi(C)$ d'extrémités $\varphi(p)$ et $\varphi(q)$, et vers l'extérieur de $\varphi(K)$ sur l'autre moitié. Modifions le champ de vecteurs X en le remplaçant, dans l'ouvert U , par $\varphi^*(\varphi_*X + h(Y - \varphi_*X))$, et en le laissant inchangé sur le reste de la sphère M . Cela ne modifie pas ses points d'équilibre et n'en crée pas de nouveaux. Ainsi modifié, le champ X est tangent au cercle C en deux points p et q , diamétralement opposés sur ce cercle; sur un des demi-cercles d'extrémités p et q , il est dirigé vers l'intérieur de la

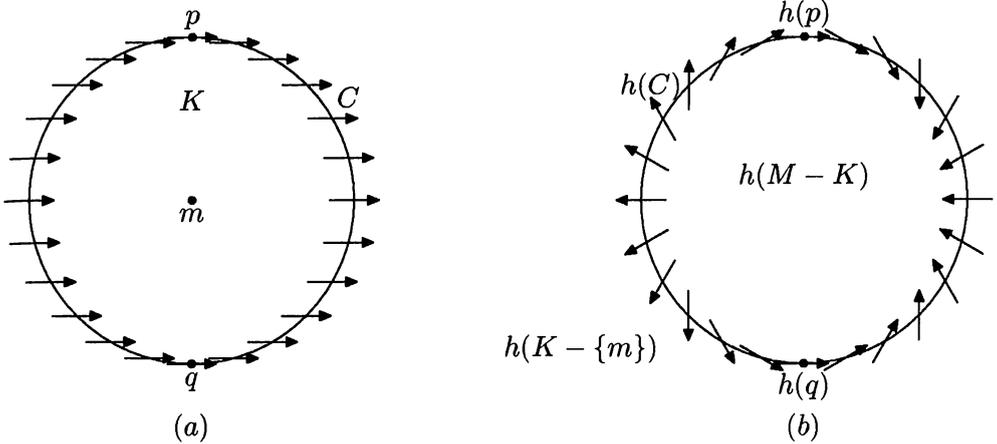


Figure VI.10. Illustration de la preuve du théorème de Poincaré-Hopf pour S^2

calotte sphérique K , et sur l'autre demi-cercle vers l'extérieur de cette calotte sphérique. La figure VI.10 (a) illustre cette situation.

Faisons une projection stéréographique h de la sphère S^2 , de sommet m . Rappelons que cela consiste à considérer la sphère S^2 comme plongée dans l'espace \mathbb{R}^3 (muni du produit scalaire euclidien usuel), à prendre un plan affine de \mathbb{R}^3 perpendiculaire à la droite joignant le point m au centre de la sphère S^2 , et à associer, à chaque point x de la sphère autre que le point m , le point $h(x)$ où la droite qui joint les points m et x rencontre ce plan. Cette projection stéréographique est un difféomorphisme de $S^2 - \{m\}$ sur le plan, qui applique le complémentaire dans S^2 de la petite calotte sphérique de frontière C , sur un disque dans le plan, de frontière $h(C)$. Ce disque est représenté sur la figure VI.10 (b), sur laquelle nous avons porté les images $h(C)$ du cercle C , $h(p)$ et $h(q)$ des points p et q . L'image $h(M - K)$ du complémentaire, dans la sphère M , de la calotte sphérique K est l'intérieur du cercle $h(C)$, et l'image $h(K - \{m\})$ de la calotte sphérique K privée du point m est la réunion du cercle $h(C)$ et de son extérieur. Nous avons aussi représenté schématiquement la direction et le sens du champ de vecteurs h_*X , en divers points du cercle $h(C)$. Nous voyons que le champ de vecteurs h_*X est dirigé dans le sens entrant sur une moitié du cercle $h(C)$, et dans le sens sortant sur l'autre moitié. Nous voyons aussi que lorsqu'on fait un tour sur le cercle $h(C)$, le champ de vecteurs h_*X fait deux tours. L'indice $I_{h_*X}(h(C))$ est donc égal à 2. La projection stéréographique pouvant être considérée comme une carte, la proposition 5.1 montre que l'indice de chaque point d'équilibre a de X , relativement au champ de vecteurs X , est égal à l'indice de sa projection $h(a)$, relativement au champ de vecteurs h_*X . Comme les images par la projection stéréographique h de tous les points d'équilibre de X sont contenues dans le disque de frontière $h(C)$, $I_{h_*X}(h(C))$ est égal à la somme des indices des points d'équilibre de X . Nous avons ainsi prouvé que la somme des indices des points d'équilibre du champ de vecteurs X , sur la sphère S^2 , est égale à 2. Elle ne dépend pas du champ de vecteurs X considéré.

b) Deuxième étape : cas d'une surface orientable compacte. — La démonstration du théorème de Poincaré-Hopf, pour une surface orientable compacte M de genre $g \geq 1$, utilise une technique dite "de chirurgie", qui consiste à enlever à la surface des petits morceaux cylindriques ne contenant pas de point d'équilibre du champ de vecteurs X , en nombre égal à g (voir figure VI. 11, illustrant l'application de cette technique à a surface de genre 2 représentée sur la figure VI.9).

On bouche alors les trous en recollant des demi-sphères, et on obtient $g + 1$ surfaces, chacune d'elles étant de genre 0, donc difféomorphe à la sphère S^2 . Une de ces surfaces,

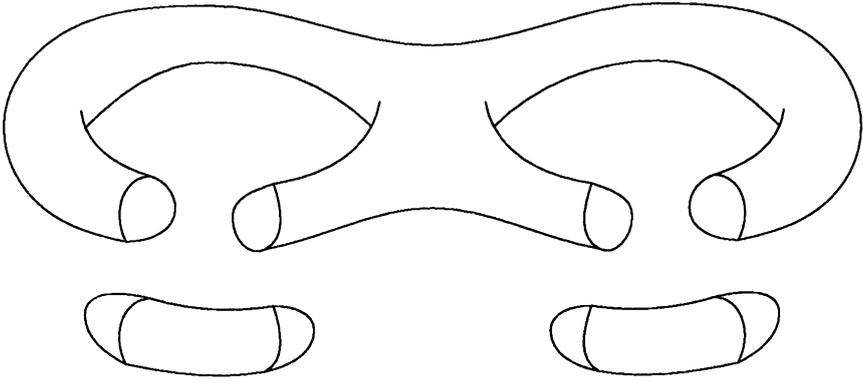


Figure VI.11. La technique de "chirurgie"

notée M' , provient de la partie principale de la surface M (c'est-à-dire du complémentaire, dans M , des g morceaux cylindriques qui ont été enlevés) après bouchage des trous par recollement de demi-sphères. Les g autres surfaces proviennent des g petits morceaux cylindriques qu'on a découpés et transformés en surfaces difféomorphes à des sphères en accolant à chacun d'eux deux demi-sphères.

On prolonge à M' entière le champ de vecteurs X . On peut le faire en ajoutant, sur chacune des demi-sphères qui ont servi à boucher les trous, un nombre fini de point d'équilibre (on peut en fait prolonger le champ de vecteurs X en ajoutant au plus un point d'équilibre par demi-sphère, mais le raisonnement qui suit n'utilise pas le nombre de ces points). On a donc maintenant, sur la sphère M' , un champ de vecteurs dont les points d'équilibre sont ceux du champ X et, en plus, un nombre fini d'autres points. Ces derniers se groupent en g classes, chacune de ces classes étant constituée par les points d'équilibre situés sur les deux demi-sphères qui ont servi à reboucher les deux trous laissés par l'enlèvement d'un même petit morceau cylindrique. La somme des indices des points d'une même classe est égale à 2. Remarquons en effet qu'avec les mêmes deux demi-sphères, sur lesquelles on a prolongé le champ de vecteurs X , on peut boucher les deux extrémités du petit morceau cylindrique qui avait été ôté pour en faire une sphère. Comme le champ de vecteurs X n'a aucun point d'équilibre sur ce petit morceau de surface cylindrique, la somme des indices de ces points d'équilibre doit être égale à la somme des indices des points d'équilibre d'un champ de vecteurs sur une sphère, c'est-à-dire à 2, d'après la première partie de la démonstration. La somme des indices des points d'équilibre supplémentaires (c'est-à-dire autres que les points d'équilibre du champ de vecteurs X initialement donné sur M) créés par chirurgie sur M' est donc $2g$.

En ajoutant $2g$ à la somme des indices des points d'équilibre de X sur M , on doit obtenir 2, puisque $2g$ est la somme des indices des points d'équilibres supplémentaires créés par chirurgie sur M' , et que M' est difféomorphe à une sphère.

On a donc prouvé que la somme des indices d'un champ de vecteurs X à points d'équilibre isolés, sur une surface orientable compacte M de genre g , est

$$\chi(M) = 2(1 - g).$$

c) *Troisième étape : cas d'une surface non orientable compacte.* — Soit M une surface non orientable, \widetilde{M} son revêtement orientable et $r : \widetilde{M} \rightarrow M$ l'application de revêtement.

Si M est compacte, son revêtement orientable \widetilde{M} l'est aussi.

On peut prendre l'image réciproque r^*X du champ de vecteurs X sur M par l'application de revêtement r . C'est un champ de vecteurs sur \widetilde{M} . À chaque point d'équilibre a de X ,

correspondent deux points d'équilibre de r^*X , les deux éléments de $r^{-1}(a)$. Comme r est un difféomorphisme local, les indices de chacun de ces deux points, relativement au champ de vecteurs r^*X , sont égaux à l'indice $I_X(a)$. La somme des indices des points d'équilibre de X est donc

$$\chi(M) = \frac{1}{2} \chi(\widetilde{M}) = 1 - g(\widetilde{M}),$$

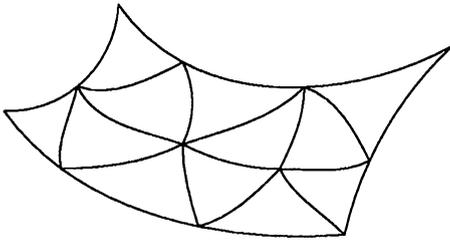
où $g(\widetilde{M})$ est le genre du revêtement orientable \widetilde{M} de M . □

5.3. Commentaires

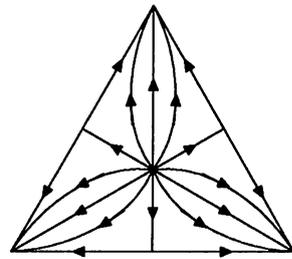
a) On a vu au cours de la démonstration que la caractéristique d'Euler $\chi(M)$ d'une surface orientable compacte M est paire, puisqu'elle s'exprime, au moyen du genre $g(M)$ de cette surface, par la formule

$$\chi(M) = 2(1 - g(M)).$$

b) La caractéristique d'Euler d'une surface orientable compacte a été définie pour la première fois par Euler grâce à une *triangulation* de cette surface. On appelle ainsi un découpage de la surface en petits morceaux triangulaires (voir figure VI.12 a), deux morceaux différents pouvant avoir en commun un côté et les deux sommets qui en sont les extrémités, ou un sommet. La connaissance d'une triangulation d'une surface orientable compacte M permet un calcul aisé de la caractéristique d'Euler $\chi(M)$.



(a) Triangulation d'une surface



(b) Champ de vecteurs adapté

Figure VI.12. Triangulation d'une surface et champ de vecteurs adapté

Notons s le nombre de sommets, f le nombre de triangles et a le nombre d'arêtes de la triangulation. La caractéristique d'Euler de la surface est

$$\chi(M) = s + f - a.$$

En effet, on peut imaginer un champ de vecteurs sur M ayant un nœud attractif en chaque sommet de la triangulation, un nœud répulsif au centre de chaque triangle et un col au milieu de chaque arête. La figure VI.12 b indique l'allure qualitative du portrait de phases de ce champ de vecteurs, restreint à un des triangles. Le résultat annoncé en découle puisque l'indice d'un nœud est 1 et celui d'un col -1 .

Remarquons d'ailleurs que la même formule est applicable à une décomposition de la surface M en polygones quelconques, ces polygones pouvant ne pas avoir tous le même nombre de sommets. Le lecteur pourra vérifier que la formule

$$s + f - a = 2$$

est bien vérifiée par le nombre de sommets s , le nombre de faces f et le nombre d'arêtes a de la décomposition habituelle en 20 hexagones et 12 pentagones de la surface d'un ballon de football, comportant 60 sommets (chacun étant commun à 2 hexagones et 1 pentagone) et 90 arêtes (dont 30 sont communes à deux hexagones et 60 à un hexagone et un pentagone).

c) La caractéristique d'Euler $\chi(M)$ d'une surface orientable compacte M peut aussi être calculée en utilisant une fonction de Morse sur cette surface, c'est-à-dire une fonction différentiable $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ dont la différentielle première s'annule en des points isolés (ces points sont appelés *points critiques* de F) et dont la différentielle seconde (exprimée dans une carte), en chacun des points critiques, est une forme quadratique non dégénérée. On montre (voir par exemple [34, 45, 46]) que sur toute surface différentiable compacte, il existe une fonction de Morse (et même, en général, une infinité de fonctions de Morse). Soit F une fonction de Morse sur M , s le nombre de points critiques où la différentielle seconde de F est définie négative (ce sont les points où F admet un maximum local), f le nombre de points critiques où elle est définie positive (ce sont les points où F admet un minimum local), et a le nombre de points où cette différentielle seconde est de type mixte $u^2 - v^2$ (ces points sont parfois appelés *points-selles* de la fonction F). La caractéristique d'Euler de M est

$$\chi(M) = s + f - a.$$

Pour le prouver, il suffit de munir la surface M d'une structure riemannienne et de considérer le champ de vecteurs gradient de la fonction F , relativement à cette structure. Pour ce champ de vecteurs, les points où F présente un maximum relatif sont des nœuds attractifs, ceux où F présente un minimum relatif des nœuds répulsifs, et les points-selles de F sont des cols, d'indices respectifs 1, 1 et -1 .

Cette remarque a une application géographique intéressante, du moins sur le plan théorique. Soit M la surface de la Terre (ou d'une autre planète), et F la fonction "altitude" (par rapport à un niveau de référence, par exemple le niveau de la mer). Moyennant une idéalisation raisonnable, on peut supposer que F est une fonction de Morse. Nous voyons ainsi que la somme du nombre de sommets de montagnes et du nombre de fonds de cuvettes, diminué du nombre de cols, est égal à 2. Bien entendu, ce résultat est valable pour les planètes dont la surface est homéomorphe à une sphère. Pour une planète dont la surface serait un tore T^2 (s'il en existe), ce nombre serait 0.

6. Variantes et extensions de la théorie de l'indice

6.1. La théorie de l'indice en dimension quelconque. — L'essentiel de la théorie de l'indice s'étend à un champ de vecteurs X sur une variété différentiable M de dimension finie quelconque. Voici comment.

Nous avons défini (2.7) le degré d'une application continue d'une courbe de Jordan orientée dans une autre courbe de Jordan orientée. Plus généralement, on peut définir le *degré* d'une application continue f d'une variété orientable compacte P , de dimension finie, dans une autre variété orientable Q , de même dimension. La définition de cette notion est un peu plus simple lorsque les variétés P et Q , ainsi que l'application f , sont différentiables de classe suffisamment élevée (par exemple de classe C^∞). Un point $y \in N$ est appelé *valeur régulière* de l'application f si pour tout élément x de $f^{-1}(y)$, l'application linéaire $T_x f : T_x P \rightarrow T_y Q$, tangente en x à l'application f , est un isomorphisme. Un point de Q qui n'est pas valeur régulière de f est dit *valeur singulière*. Selon un important théorème, appelé *théorème de Sard*, l'ensemble des valeurs singulières de l'application f est de mesure nulle (voir par exemple [59]); l'ensemble des valeurs régulières est donc de mesure pleine, et *a fortiori* non vide. Soit alors y une valeur régulière de f . En raison de la compacité de P , l'image inverse $f^{-1}(y)$ de ce point est un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_k\}$. On munit d'orientations les variétés P et Q et on appelle *degré* de f (pour ce choix

d'orientations) et on note $\text{degr}(f)$, l'élément de \mathbb{Z}

$$\text{degr}(f) = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i,$$

avec $\varepsilon_i = 1$ si l'isomorphisme $T_{x_i}f$ est d'orientation positive et -1 s'il est d'orientation négative. On montre que $\text{degr}(f)$ ne dépend pas du choix de la valeur régulière y . Le lecteur pourra vérifier que lorsque M et N sont deux courbes de Jordan différentiables orientées, le degr ainsi défini coïncide avec celui défini en 2.7.

Soit maintenant X un champ de vecteurs différentiable défini sur une variété différentiable M , de dimension n , et a un point d'équilibre isolé de ce champ. Au lieu d'une courbe de Jordan entourant le point a , on considère maintenant une sphère Σ^{n-1} , de dimension $n - 1$, plongée dans la variété M , ayant le point a dans son intérieur (on peut en effet établir, pour les sphères, l'analogue du théorème de Jordan pour les courbes fermées planes sans point double, donc définir l'intérieur d'une sphère plongée dans M). Le point d'équilibre a étant isolé, on peut choisir Σ^{n-1} de manière telle que le champ de vecteurs X ne s'annule en aucun point de cette sphère, ni en aucun point intérieur à cette sphère autre que le point a . Lorsque Σ^{n-1} et son intérieur appartiennent au domaine d'une carte, on peut définir une application de Σ^{n-1} dans une autre sphère de même dimension, et orienter ces deux sphères de manière coordonnée; il suffit, pour cela, de munir \mathbb{R}^n d'une structure euclidienne et d'une orientation et d'associer, à chaque point x de Σ^{n-1} , le vecteur unitaire $\frac{X(x)}{\|X(x)\|}$. Le degré de cette application d'une sphère de dimension $n - 1$ dans une autre de même dimension ne dépend pas des choix ayant servi à le définir : choix de la sphère Σ^{n-1} plongée dans M ayant le point a dans son intérieur, choix de la carte dont le domaine contient cette sphère et son intérieur, de la structure euclidienne et de l'orientation de \mathbb{R}^n . Il ne dépend que du champ de vecteurs X au voisinage du point d'équilibre a . On l'appelle *indice* du point d'équilibre a .

Le théorème de Poincaré-Hopf 5.2 s'étend aux champs de vecteurs définis sur une variété différentiable compacte M , de dimension finie quelconque : étant donné, sur la variété M , un champ de vecteurs X dont les points d'équilibre sont isolés, la somme des indices de ces points d'équilibre est un invariant topologique de la variété M , qui ne dépend pas du champ de vecteurs X . Cet invariant est la *caractéristique d'Euler* de la variété M . Le lecteur intéressé pourra se reporter aux ouvrages [34, 44, 46].

La notion de caractéristique d'Euler, et le théorème de Poincaré-Hopf, s'étendent aux variétés à bord; on doit dans ce cas imposer aux champs de vecteurs considérés d'être transverses au bord de la variété.

6.2. Le nombre d'intersection. — Le degré d'une application $f : P \rightarrow Q$ est un cas particulier d'un concept plus général : celui de *nombre d'intersection* de deux sous-variétés orientées P et Q d'une variété orientée W telles que $\dim P + \dim Q = \dim W$, l'une au moins des deux sous-variétés P et Q étant compacte. Lorsque les deux sous-variétés se coupent transversalement (c'est-à-dire lorsqu'en tout point x de $P \cap Q$, l'espace tangent $T_x W$ est somme directe de $T_x P$ et de $T_x Q$), l'ensemble $P \cap Q$ est fini; on peut affecter à chacun de ses points un indice, égal à ± 1 , selon que la base de $T_x W$ formée par juxtaposition d'une base d'orientation positive de $T_x P$ et d'une base d'orientation positive de $T_x Q$, est d'orientation positive ou négative (relativement à l'orientation choisie de W). La somme algébrique de ces indices est le nombre d'intersection de P et Q . Il est invariant par homotopie, ce qui permet de le définir même lorsque les sous-variétés P et Q ne se coupent pas transversalement. Le degré d'une application $f : P \rightarrow Q$ est le nombre d'intersection du graphe de f (application de P dans $P \times Q$) avec le graphe d'une

application constante, dont la valeur est une valeur régulière de f .

6.3. Le nombre de Lefschetz. — Un point d'équilibre isolé d'un champ de vecteurs est un point d'équilibre du système dynamique à temps continu ayant ce champ pour générateur infinitésimal. Nous avons pu définir l'indice d'un tel point. Lorsque le système dynamique considéré est, non plus à temps continu, mais à temps discret, que ce système a pour générateur une application différentiable $g : M \rightarrow M$ d'une variété différentiable compacte M , de dimension n , dans elle-même, et qu'un point a de M est point d'équilibre isolé de ce système (c'est-à-dire vérifie $g(a) = a$, et possède un voisinage ouvert V tel que, pour tout $x \in V$, autre que a , $g(x) \neq x$), il existe un analogue de l'indice, appelé *indice de Lefschetz* du point d'équilibre a . Pour le définir, nous pouvons nous ramener, au moyen d'une carte, au cas où le voisinage V du point a est un ouvert d'un espace affine euclidien. Considérons alors une sphère Σ^{n-1} de centre a , assez petite pour être contenue, ainsi que son intérieur, dans l'ouvert V , et pour que son image par l'application g soit elle aussi contenue dans V . Nous pouvons alors définir une application de cette sphère dans une autre sphère de même dimension en associant, à tout point x de Σ^{n-1} , le vecteur $\frac{g(x) - x}{\|g(x) - x\|}$. Le degré de cette application est l'indice de Lefschetz du point a .

Lorsque l'application g n'a que des points fixes isolés (donc en nombre fini, puisque M est compacte), la somme des indices de Lefschetz de ces points est appelée *nombre de Lefschetz* de l'application g . Ce nombre n'est autre que le nombre d'intersection (dans $M \times M$) du graphe de g et de la diagonale. Il reste invariant lorsqu'on déforme l'application g par homotopie. Lorsque g est homotope à l'application identique de M , le nombre de Lefschetz de g est égal à la caractéristique d'Euler de M . Voir [34].

7. Exercices

Exercice VI.1. On identifie le plan \mathbb{R}^2 (coordonnées x et y) à \mathbb{C} , en associant à chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ le complexe $z = x + iy$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Étudier les équations différentielles

$$(1) \quad \frac{dz}{dt} = z^k, \quad (2) \quad \frac{dz}{dt} = \bar{z}^k,$$

où $\bar{z} = x - iy$ est le complexe conjugué de z , et où $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$. Montrer qu'elles ont pour seul point d'équilibre l'origine, et calculer l'indice de ce point relativement aux champs de vecteurs associés à ces équations.

Exercice VI.2. Indiquer s'il existe, sur chacune des surfaces suivantes, un champ de vecteurs ne s'annulant en aucun point, et dans l'affirmative, donner un exemple d'un tel champ de vecteurs :

- (i) la sphère S^2 ,
- (ii) l'espace projectif $\mathbb{P}(2, \mathbb{R})$,
- (iii) le tore \mathbb{T}^2 ,
- (iv) la bouteille de Klein.

8. Solutions

Solution VI.1. Pour l'équation différentielle (1) comme pour l'équation différentielle (2), nous avons $\frac{dz}{dt} = 0$ si et seulement si $z = 0$. Ces deux équations ont donc l'origine

pour unique point d'équilibre. Pour calculer l'indice de ce point, considérons le cercle trigonométrique S^1 , ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ de module 1, c'est-à-dire de la forme $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. La valeur du champ de vecteurs associé à l'équation différentielle (1) (resp., (2)) au point $e^{i\theta}$ est $e^{ik\theta}$ (resp., $e^{-ik\theta}$), et l'angle que fait ce vecteur avec l'axe des abscisses est $k\theta$ (resp., $-k\theta$). Lorsque θ varie de 0 à 2π , cet angle varie de $2k\pi$ (resp., de $-2k\pi$). Par suite, l'indice du cercle S^1 relativement au champ de vecteurs associé à l'équation différentielle (1) (resp., (2)), c'est-à-dire l'indice de l'origine comme point d'équilibre de (1) (resp., de (2)), est k (resp., $-k$).

Solution VI.2. D'après le théorème de Poincaré-Hopf, une surface compacte sur laquelle il existe un champ de vecteurs ne s'annulant en aucun point a nécessairement une caractéristique d'Euler nulle. Cette surface (si elle est orientable) ou son revêtement orientable (si elle n'est pas orientable) est donc nécessairement de genre 1. C'est pourquoi il n'existe pas, sur la sphère S^2 (de genre 0), ni sur l'espace projectif $\mathbb{P}(2, \mathbb{R})$ (dont le revêtement orientable est la sphère S^2) de champ de vecteurs continu ne s'annulant en aucun point. Le théorème de Poincaré-Hopf ne s'oppose pas à l'existence d'un tel champ de vecteurs sur le tore \mathbb{T}^2 ou sur la bouteille de Klein. Nous allons donner des exemples explicites de tels champs de vecteurs.

Le tore \mathbb{T}^2 est le produit $S^1 \times S^1$ de deux cercles. Notons θ_1 et θ_2 les coordonnées angulaires (définies modulo 2π) sur ces cercles; nous appellerons ces angles, respectivement, la *longitude* et la *latitude* sur le tore. Le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial \theta_1}$, dont les courbes intégrales sont les parallèles du tore (cercles de latitude constante) est un champ de vecteurs continu ne s'annulant en aucun point sur \mathbb{T}^2 . Il en est de même du champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial \theta_2}$, dont les courbes intégrales sont les méridiens du tore, ou de toute combinaison linéaire à coefficients fonctions continues non toutes deux simultanément nulles de ces champs de vecteurs.

La bouteille de Klein K est (voir exercice VII.8) le quotient du tore \mathbb{T}^2 par la relation d'équivalence selon laquelle deux points du tore, de coordonnées angulaires (θ_1, θ_2) et (θ'_1, θ'_2) sont équivalents si

$$\theta'_1 = \theta_1 + k\pi \quad \text{et} \quad \theta'_2 = (-1)^k \theta_2 + 2l\pi,$$

avec k et $l \in \mathbb{Z}$. La projection canonique $\pi : \mathbb{T}^2 \rightarrow K$ est telle que tout point de la bouteille de Klein K ait deux antécédents dans \mathbb{T}^2 , dont les coordonnées angulaires sont de la forme (θ_1, θ_2) et $(\theta_1 + \pi, -\theta_2)$. Le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial \theta_1}$, sur le tore \mathbb{T}^2 , est projetable par la projection canonique π sur la bouteille de Klein, car les images des valeurs prises par ce champ aux points (θ_1, θ_2) et $(\theta_1 + \pi, -\theta_2)$ coïncident. Sa projection est un champ de vecteurs continu ne s'annulant en aucun point sur la bouteille de Klein K . Par contre, le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial \theta_2}$ sur le tore \mathbb{T}^2 n'est pas projetable par π sur la bouteille de Klein, car les images des valeurs prises par ce champ aux points (θ_1, θ_2) et $(\theta_1 + \pi, -\theta_2)$ sont deux vecteurs opposés, tangents à la bouteille de Klein K en un même point.

Chapitre VII

Compléments

Certains résultats se rattachant à diverses branches des mathématiques, utilisés dans les chapitres qui précèdent, ne sont peut-être pas toujours enseignés dans les premières années d'université. Pour la commodité du lecteur, nous en donnons ici les énoncés précis accompagnés, soit de démonstrations détaillées, soit des références aux ouvrages où ces démonstrations peuvent être trouvées.

1. Compléments d'algèbre linéaire

1.1. Complexification. — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. On appelle *complexifié* de E l'ensemble

$$E_{\mathbb{C}} = E + iE = \{x + iy; x \text{ et } y \in E\},$$

muni de la structure d'espace vectoriel complexe ayant pour loi d'addition

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y'), \quad x, x', y \text{ et } y' \in E,$$

et pour loi de multiplication par un scalaire complexe

$$(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay), \quad a \text{ et } b \in \mathbb{R}, x \text{ et } y \in E.$$

On remarquera que \mathbb{C} n'est autre que le complexifié de \mathbb{R} et que, pour tout espace vectoriel réel E de dimension finie, le complexifié $E_{\mathbb{C}}$ de E peut, de manière naturelle, être identifié au produit tensoriel $\mathbb{C} \otimes E$.

Un endomorphisme $A \in \mathcal{L}(E, E)$ de l'espace vectoriel réel E se prolonge, de manière naturelle, en un endomorphisme $A_{\mathbb{C}}$ de l'espace vectoriel complexe $E_{\mathbb{C}}$. Il suffit en effet de poser, pour tout $x + iy \in E_{\mathbb{C}}$, avec x et $y \in E$,

$$A_{\mathbb{C}}(x + iy) = A(x) + iA(y).$$

1.2. Polynômes en un endomorphisme. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $A \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme de E . On pose

$$A^0 = \text{id}_E, \quad A^1 = A \quad \text{et, pour tout entier } n > 1, \quad A^n = A \circ A^{n-1}.$$

Plus généralement, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ en une indéterminée X , à coefficients dans \mathbb{K} ,

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n, \quad \text{avec } a_k \in \mathbb{K}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

on note $P(A)$ l'endomorphisme de E :

$$P(A) = a_0 \text{id}_E + a_1A + \cdots + a_nA^n.$$

1.3. Définition. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $A \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme de E . Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ en une indéterminée X , à coefficients dans \mathbb{K} , est dit *polynôme annulateur* de A si $P(A) = 0$.

1.4. Polynôme caractéristique, valeurs propres et vecteurs propres. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $A \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme de E . Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est dit *valeur propre* de A s'il existe $v \in E$, $v \neq 0$, vérifiant

$$A(v) = \lambda v.$$

Un vecteur $v \in E$, $v \neq 0$, vérifiant cette égalité est appelé *vecteur propre* de A associé à la valeur propre λ .

En d'autres termes, un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si l'une des conditions équivalentes ci-dessous est satisfaite (les autres étant alors bien entendu satisfaites aussi) :

- on a $\ker(A - \lambda \text{id}_E) \neq 0$,
- l'endomorphisme $A - \lambda \text{id}_E$ n'est pas inversible,
- on a $\det(A - \lambda \text{id}_E) = 0$.

Rappelons que le polynôme en une indéterminée X :

$$\Pi_A(X) = \det(A - X \text{id}_E)$$

est appelé *polynôme caractéristique* de l'endomorphisme A . Pour la notion de déterminant d'un endomorphisme, le lecteur pourra se reporter, par exemple, au livre de F. Bories-Longuet [10]. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est donc valeur propre de A si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique de A .

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, certaines racines du polynôme caractéristique Π_A peuvent être complexes, donc ne pas être éléments du corps des scalaires \mathbb{R} . Par abus de langage, on les appelle tout de même *valeurs propres* de A (en précisant éventuellement valeurs propres complexes de A). Ce sont en fait des valeurs propres non de A , mais de l'endomorphisme $A_{\mathbb{C}}$ de de l'espace vectoriel complexe $E_{\mathbb{C}}$, complexifié de E , qui prolonge de manière naturelle l'endomorphisme A (voir 1.1). Remarquons au passage que A et $A_{\mathbb{C}}$ ont même polynôme caractéristique.

1.5. Théorème de Cayley-Hamilton. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $A \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme de E . Le polynôme caractéristique Π_A de l'endomorphisme A est un polynôme annulateur de A au sens de la définition 1.3, c'est-à-dire vérifie identiquement

$$\Pi_A(A) = 0.$$

Preuve : Voir par exemple [10] théorème VI.3.6 page 130. □

1.6. Théorème. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $A \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme de E et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A .

1. Chaque valeur propre (réelle ou complexe) de A est racine du polynôme annulateur P .

2. On suppose que P s'exprime comme un produit de deux polynômes P_1 et P_2 premiers entre eux :

$$P = P_1 P_2.$$

Posons

$$E_1 = \ker P_1(A), \quad E_2 = \ker P_2(A).$$

On a alors

$$A(E_1) \subset E_1, \quad A(E_2) \subset E_2, \quad E = E_1 \oplus E_2.$$

De plus, P_1 (resp., P_2) est un polynôme annulateur de la restriction de A à E_1 (resp., à E_2). Si de plus P est le polynôme caractéristique de A , le polynôme caractéristique de la restriction de A à E_1 (resp., à E_2) est P_1 (resp., P_2), à une multiplication par un scalaire non nul près.

Preuve :

1. Soit λ une valeur propre, réelle ou complexe, de A . Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe un vecteur propre $x \in E$, $x \neq 0$, associé à la valeur propre λ . Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, il existe encore un vecteur propre $x \in E_{\mathbb{C}}$, $x \neq 0$, du prolongement de A au complexifié de E . En convenant de noter encore A le prolongement de l'endomorphisme A au complexifié de E , nous pouvons écrire, dans tous les cas,

$$A(x) = \lambda x.$$

En effectuant le quotient du polynôme $P(X)$ par $X - \lambda$, X désignant l'indéterminée, nous pouvons écrire

$$P(X) = (X - \lambda)Q(X) + P(\lambda)$$

car le reste de ce quotient, de degré strictement inférieur à 1, est la constante $P(\lambda)$. Nous avons, puisque P est polynôme annulateur de A ,

$$0 = P(A) = (A - \lambda \text{id}_E) \circ Q(A) + P(\lambda) \text{id}_E.$$

Appliquons au vecteur propre x les deux membres de cette égalité. Nous obtenons

$$P(\lambda)x = 0,$$

car, puisque $A - \lambda \text{id}_E$ et $Q(A)$ commutent,

$$(A - \lambda \text{id}_E) \circ Q(A)(x) = Q(A) \circ (A - \lambda \text{id}_E)(x) = 0.$$

Comme $x \neq 0$, l'égalité $P(\lambda)x = 0$ implique $P(\lambda) = 0$.

2. Soit $i = 1$ ou 2 , et $x \in E_i$. Puisque $P_i(A)$ et A commutent, nous avons

$$P_i(A)(A(x)) = A(P_i(A)(x)) = 0,$$

ce qui prouve que $A(x) \in E_i$. Nous avons donc bien $A(E_i) \subset E_i$.

Pour tout $x \in E$ nous avons, puisque P est un polynôme annulateur de A ,

$$0 = P(A)(x) = P_1(A)(P_2(A)(x)) = P_2(A)(P_1(A)(x)),$$

ce qui prouve que

$$P_1(A)(E) \subset E_2, \quad P_2(A)(E) \subset E_1.$$

Puisque les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux, le théorème de Bézout (voir par exemple [10] paragraphe VI.1.7 page 120, [2] lemme 2.1.8 page 34, [56] proposition III.14 page 46) montre qu'il existe des polynômes Q_1 et Q_2 tels que

$$P_1Q_1 + P_2Q_2 = 1.$$

Par suite,

$$P_1(A)Q_1(A) + P_2(A)Q_2(A) = \text{id}_E.$$

Tout élément x de E s'écrit donc sous la forme

$$x = x_1 + x_2,$$

avec

$$x_1 = P_2(A)(Q_2(A)(x)) \in E_1, \quad x_2 = P_1(A)(Q_1(A)(x)) \in E_2.$$

Nous avons ainsi prouvé que $E = E_1 + E_2$.

Soit $x \in E_1 \cap E_2$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} x_1 &= P_2(A)(Q_2(A)(x)) = Q_2(A)(P_2(A)(x)) = 0 \quad \text{car } x \in E_2, \\ x_2 &= P_1(A)(Q_1(A)(x)) = Q_1(A)(P_1(A)(x)) = 0 \quad \text{car } x \in E_1, \end{aligned}$$

et par suite $x = x_1 + x_2 = 0$. Nous avons prouvé que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$; comme d'autre part $E = E_1 + E_2$, nous avons bien $E = E_1 \oplus E_2$. D'autre part, puisque $E_1 = \ker P_1(A)$

et que $E_2 = \ker P_2(A)$, P_1 (resp., P_2) est un polynôme annulateur de la restriction de A à E_1 (resp., à E_2).

Dans une base de E réunion d'une base de E_1 et d'une base de E_2 , la matrice de A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A s'exprime donc comme un produit

$$\Pi_A = \Pi_1 \Pi_2,$$

où Π_1 (resp., Π_2) est le polynôme caractéristique de A_1 , restriction de A à E_1 (resp., de A_2 , restriction de A à E_2).

D'après la partie 1, appliquée à la restriction de A à E_1 (resp., à E_2), chaque racine, réelle ou complexe, du polynôme Π_1 (resp., du polynôme Π_2) est racine de P_1 (resp., de P_2). Comme les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux, ils n'ont pas de racine commune. Si de plus P est le polynôme caractéristique Π_A de A , nous avons $\Pi_1 \Pi_2 = P_1 P_2 = \Pi_A$. Nous voyons ainsi que les racines de Π_1 (resp., de Π_2) sont les mêmes que celles de P_1 (resp., de P_2), avec les mêmes multiplicités. Nous avons donc

$$P_1 = \alpha \Pi_1, \quad P_2 = \alpha^{-1} \Pi_2,$$

avec $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$. □

1.7. Théorème. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $A \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme de E et Π_A son polynôme caractéristique. On suppose soit que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, soit que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que toutes les racines de Π_A sont réelles. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les racines distinctes de Π_A , n_1, \dots, n_p leurs multiplicités respectives, et on pose, pour chaque k ($1 \leq k \leq p$),

$$E_k = \ker(A - \lambda_k \text{id}_E)^{n_k}.$$

Nous avons alors, pour chaque k ($1 \leq k \leq p$),

$$A(E_k) \subset E_k, \quad \text{et} \quad E = \bigoplus_{k=1}^p E_k.$$

De plus, le polynôme caractéristique de la restriction de A à chaque E_k est $(\lambda_k - X)^{n_k}$; par suite, E_k est de dimension n_k .

Preuve : Le polynôme caractéristique Π_A de A a pour expression :

$$\Pi_A(X) = (\lambda_1 - X)^{n_1} (\lambda_2 - X)^{n_2} \cdots (\lambda_p - X)^{n_p}.$$

Les polynômes $(\lambda_k - X)^{n_k}$ (avec $1 \leq k \leq p$) étant deux à deux premiers entre eux, une application répétée du théorème précédent conduit au résultat annoncé. □

Afin de traiter le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et où certaines racines du polynôme caractéristique Π_A de A sont complexes, nous remarquons que pour chaque racine complexe $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$ de Π_A (avec α_k et $\beta_k \in \mathbb{R}$, et $\beta_k \neq 0$), le complexe conjugué $\overline{\mu_k} = \alpha_k - i\beta_k$ est aussi racine de Π_A , de même multiplicité que μ_k . Cette remarque nous conduit au théorème suivant.

1.8. Théorème. — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, $A \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme de E et Π_A son polynôme caractéristique. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les racines réelles distinctes de Π_A , n_1, \dots, n_p leurs multiplicités respectives. On note $\mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $\overline{\mu_1} = \alpha_1 - i\beta_1, \dots, \mu_q = \alpha_q + i\beta_q$, $\overline{\mu_q} = \alpha_q - i\beta_q$ les racines complexes distinctes de Π_A . Pour chaque l ($1 \leq l \leq q$), on désigne par m_l la multiplicité commune aux deux racines complexes μ_l et $\overline{\mu_l}$, conjuguées l'une de l'autre. On pose, pour chaque k ($1 \leq k \leq p$) et chaque l ($1 \leq l \leq q$),

$$E_k = \ker(A - \lambda_k \text{id}_E)^{n_k}, \quad F_l = \ker((A - \alpha_l \text{id}_E)^2 + \beta_l^2 \text{id}_E)^{m_l}.$$

Nous avons alors, pour chaque k ($1 \leq k \leq p$) et chaque l ($1 \leq l \leq q$),

$$A(E_k) \subset E_k, \quad A(F_l) \subset F_l, \quad \text{et} \quad E = \left(\bigoplus_{k=1}^p E_k\right) \oplus \left(\bigoplus_{l=1}^q F_l\right).$$

De plus, le polynôme caractéristique de la restriction de A à chaque E_k est $(\lambda_k - X)^{n_k}$, et celui de la restriction de A à chaque F_l est $((\alpha_l - X)^2 + \beta_l^2)^{m_l}$; par suite, E_k est de dimension n_k et F_l de dimension $2m_l$.

Preuve : Le polynôme caractéristique Π_A de A a pour expression :

$$\Pi_A(X) = \prod_{k=1}^p (\lambda_k - X)^{n_k} \prod_{l=1}^q ((\alpha_l - X)^2 + \beta_l^2)^{m_l}.$$

Les polynômes $(\lambda_k - X)^{n_k}$ (avec $1 \leq k \leq p$) et $((\alpha_l - X)^2 + \beta_l^2)^{m_l}$ (avec $1 \leq l \leq q$) étant deux à deux premiers entre eux, une application répétée du théorème 1.5 conduit au résultat annoncé. \square

Nous allons maintenant étudier la restriction de A à chacun des sous-espaces vectoriels E_k et F_l de E . Dans les énoncés qui suivent, nous remplacerons E_k et F_l par E et F , respectivement.

1.9. Proposition. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $A \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique Π_A a pour expression

$$\Pi_A(X) = (\lambda - X)^n,$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Posons

$$S = \lambda \text{id}_E, \quad N = A - S.$$

Les endomorphismes S et N commutent, c'est-à-dire vérifient $S \circ N = N \circ S$ et ont pour somme $S + N = A$. L'endomorphisme N est nilpotent : il vérifie $N^n = 0$.

Preuve : Étant un multiple de id_E , l'endomorphisme S commute avec tout autre endomorphisme, en particulier avec N . D'après la définition même de S et de N , nous avons bien $S + N = A$. Enfin le polynôme caractéristique de N est

$$\Pi_N(X) = \det(A - \lambda \text{id}_E - X \text{id}_E) = \Pi_A(X + \lambda) = (-1)^n X^n.$$

Le théorème de Cayley-Hamilton montre alors que $N^n = (-1)^n \Pi_N(N) = 0$. \square

1.10. Proposition. — Soit F un espace vectoriel réel de dimension finie et paire $2m$, $A \in \mathcal{L}(F, F)$ un endomorphisme de F dont le polynôme caractéristique Π_A a pour expression

$$\Pi_A(X) = ((\alpha - X)^2 + \beta^2)^m,$$

avec α et $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Il existe une base $(f_1, g_1, f_2, g_2, \dots, f_m, g_m)$ de F ayant les propriétés suivantes. Soit $S \in \mathcal{L}(F, F)$ l'endomorphisme défini par

$$S(f_l) = \alpha f_l - \beta g_l, \quad S(g_l) = \beta f_l + \alpha g_l, \quad 1 \leq l \leq m.$$

Alors les endomorphismes S et $N = A - S$ commutent, c'est-à-dire vérifient $S \circ N = N \circ S$, ont pour somme $S + N = A$; de plus l'endomorphisme N est nilpotent : il vérifie $N^m = 0$.

Preuve : Soit $F_{\mathbb{C}}$ le complexifié de F et $A_{\mathbb{C}}$ le prolongement de A à $F_{\mathbb{C}}$. Le polynôme caractéristique de $A_{\mathbb{C}}$ peut s'écrire

$$\Pi_{A_{\mathbb{C}}}(X) = (\alpha + i\beta - X)^m (\alpha - i\beta - X)^m.$$

Les polynômes $(\alpha + i\beta - X)^m$ et $(\alpha - i\beta - X)^m$ étant premiers entre eux, le théorème 1.5 montre que

$$F_{\mathbb{C}} = F_{\mathbb{C}1} \oplus F_{\mathbb{C}2}, \quad \text{avec} \quad F_{\mathbb{C}1} = \ker(\alpha + i\beta - A_{\mathbb{C}})^m, \quad F_{\mathbb{C}2} = \ker(\alpha - i\beta - A_{\mathbb{C}})^m.$$

De plus, $A_{\mathbb{C}}(F_{\mathbb{C}1}) \subset F_{\mathbb{C}1}$, $A_{\mathbb{C}}(F_{\mathbb{C}2}) \subset F_{\mathbb{C}2}$, et les polynômes caractéristiques des restrictions de $A_{\mathbb{C}}$ à $F_{\mathbb{C}1}$ et à $F_{\mathbb{C}2}$ sont, respectivement, $(\alpha + i\beta - X)^m$ et $(\alpha - i\beta - X)^m$. Soit $\sigma : F_{\mathbb{C}} \rightarrow F_{\mathbb{C}}$ la conjugaison complexe, définie par

$$\sigma(u + iv) = u - iv, \quad u \text{ et } v \in F.$$

Il est facile de vérifier que $\sigma(F_{\mathbb{C}1}) \subset F_{\mathbb{C}2}$. Comme de plus σ est un automorphisme de $F_{\mathbb{C}}$ (pour sa structure d'espace vectoriel réel), et comme $F_{\mathbb{C}1}$ et $F_{\mathbb{C}2}$ sont tous deux de même dimension complexe m , nous avons $\sigma(F_{\mathbb{C}1}) = F_{\mathbb{C}2}$. Soit alors (e_1, \dots, e_m) une base de $F_{\mathbb{C}1}$. Son image par σ , $(\sigma(e_1), \dots, \sigma(e_m))$ est une base de $F_{\mathbb{C}2}$. Posons, pour tout l ($1 \leq l \leq m$),

$$f_l = \frac{1}{2}(e_l + \sigma(e_l)), \quad g_l = \frac{1}{2i}(e_l - \sigma(e_l)).$$

Nous vérifions immédiatement que $\sigma(f_l) = f_l$, $\sigma(g_l) = g_l$. Les vecteurs $f_1, g_1, f_2, g_2, \dots, f_m, g_m$ sont donc réels, c'est-à-dire éléments de F , et forment une famille libre, c'est-à-dire une base de F . Définissons $S \in \mathcal{L}(F, F)$ en posant, comme l'indique l'énoncé,

$$S(f_l) = \alpha f_l - \beta g_l, \quad f(g_l) = \beta f_l + \alpha g_l.$$

Soit $S_{\mathbb{C}}$ le prolongement de S à $F_{\mathbb{C}}$. Un calcul facile montre que

$$S_{\mathbb{C}}(F_{\mathbb{C}1}) \subset F_{\mathbb{C}1}, \quad S_{\mathbb{C}}(F_{\mathbb{C}2}) \subset F_{\mathbb{C}2}$$

et que les restrictions de $S_{\mathbb{C}}$ à $F_{\mathbb{C}1}$ et à $F_{\mathbb{C}2}$ sont, respectivement, $(\alpha + i\beta) \text{id}_{F_{\mathbb{C}1}}$ et $(\alpha - i\beta) \text{id}_{F_{\mathbb{C}2}}$. Posons alors

$$N_{\mathbb{C}} = A_{\mathbb{C}} - S_{\mathbb{C}}.$$

Nous avons $N_{\mathbb{C}}(F_{\mathbb{C}1}) \subset F_{\mathbb{C}1}$, $N_{\mathbb{C}}(F_{\mathbb{C}2}) \subset F_{\mathbb{C}2}$. La proposition 1.8 montre que les restrictions de $N_{\mathbb{C}}$ et de $S_{\mathbb{C}}$ à $F_{\mathbb{C}1}$ (resp., à $F_{\mathbb{C}2}$) commutent, ont pour somme la restriction de $A_{\mathbb{C}}$ à $F_{\mathbb{C}1}$ (resp., à $F_{\mathbb{C}2}$), et que la restriction de $N_{\mathbb{C}}$ à $F_{\mathbb{C}1}$ (resp., à $F_{\mathbb{C}2}$), élevée à la puissance m , est nulle. Par suite, nous avons

$$N_{\mathbb{C}} \circ S_{\mathbb{C}} = S_{\mathbb{C}} \circ N_{\mathbb{C}}, \quad S_{\mathbb{C}} + N_{\mathbb{C}} = A_{\mathbb{C}}, \quad N_{\mathbb{C}}^m = 0.$$

Comme $S_{\mathbb{C}}$ et $A_{\mathbb{C}}$ sont les prolongements à $F_{\mathbb{C}}$ des endomorphismes S et A de F , la différence $N_{\mathbb{C}} = A_{\mathbb{C}} - S_{\mathbb{C}}$ est le prolongement à $F_{\mathbb{C}}$ de l'endomorphisme $N = A - S$ de F . Par suite, nous avons

$$N \circ S = S \circ N, \quad S + N = A, \quad N^m = 0. \quad \square$$

1.11. Définitions. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1. Un endomorphisme $S \in \mathcal{L}(E, E)$ est dit *semi-simple* s'il est diagonalisable (c'est-à-dire s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de S), ou bien, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et où le polynôme caractéristique de S n'a pas que des racines réelles, si le prolongement $S_{\mathbb{C}}$ de S au complexifié $E_{\mathbb{C}}$ de E est diagonalisable.

2. Un endomorphisme $N \in \mathcal{L}(E, E)$ est dit *nilpotent* s'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $N^m = 0$.

1.12. Proposition. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Un endomorphisme $A \in \mathcal{L}(E, E)$ est semi-simple si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de A , non identiquement nul, dont toutes les racines (réelles ou complexes) sont simples.

Preuve : En remplaçant éventuellement A par son prolongement au complexifié de E , nous pouvons supposer que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Supposons A semi-simple, donc diagonalisable (puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), et soient λ_i ($1 \leq i \leq p$) ses valeurs propres. En utilisant une base de E dans laquelle la matrice de A est diagonale, nous voyons que

$$P(X) = \prod_{i=1}^p (\lambda_i - X) \quad (*)$$

est un polynôme annulateur de A .

Supposons qu'il existe un polynôme annulateur de A dont les racines λ_i ($1 \leq i \leq p$) sont toutes simples. Une application répétée du théorème 1.6 montre que l'espace E se décompose en somme directe

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_i, \quad \text{avec } E_i = \ker(A - \lambda_i \text{id}_E),$$

les sous-espaces E_i étant invariants par A , et la restriction de A à chaque E_i admettant $\lambda_i - X$ comme polynôme annulateur. Nous voyons alors que dans une base de E formée par juxtaposition de bases des espaces E_i , la matrice de A est diagonale. \square

1.13. Théorème. — *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $A \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme de E . Il existe un couple unique (S, N) d'endomorphismes de E ayant les propriétés suivantes : S est semi-simple, N est nilpotent, S et N commutent, c'est-à-dire vérifient $S \circ N = N \circ S$, et ont pour somme $S + N = A$. On dit que S est la partie semi-simple et N la partie nilpotente de l'endomorphisme A . De plus, l'endomorphisme A et sa partie semi-simple S ont les mêmes valeurs propres, avec les mêmes multiplicités.*

Preuve : Afin de prouver l'existence du couple d'endomorphismes (S, N) , appliquons le théorème 1.7 (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que toutes les racines du polynôme caractéristique de A sont réelles) ou le théorème 1.8 (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que le polynôme caractéristique de A n'a pas que des racines réelles). Nous pouvons ainsi décomposer E en une somme directe $\bigoplus_{k=1}^p E_k$, ou $(\bigoplus_{k=1}^p E_k) \oplus (\bigoplus_{l=1}^q F_l)$, de sous-espaces invariants par A . Les propositions 1.9 et 1.10 montrent que la restriction de A à chacun de ces sous-espaces E_k (resp., F_l) se décompose en une somme $S_{E_k} + N_{E_k}$ (resp., $S_{F_l} + N_{F_l}$) d'un endomorphisme semi-simple S_{E_k} (resp., S_{F_l}) et d'un endomorphisme nilpotent N_{E_k} (resp., N_{F_l}) qui commutent. Soit S l'endomorphisme de E dont la restriction à chaque sous-espace E_k est S_{E_k} et dont la restriction à chaque sous-espace F_l est S_{F_l} . De même, soit N l'endomorphisme de E dont la restriction à chaque sous-espace E_k est N_{E_k} et dont la restriction à chaque sous-espace F_l est N_{F_l} . L'endomorphisme S est semi-simple, et l'endomorphisme N nilpotent. Ces deux endomorphismes commutent et on pour somme A . De plus, en raison de la définition de S , A et S ont bien les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

Soit maintenant (S', N') un autre couple d'endomorphismes de E ayant les mêmes propriétés que le couple (S, N) : S' est semi-simple, N' est nilpotent, S' et N' commutent et $S' + N' = A$. Puisque S' commute avec N' et avec lui-même, S' commute avec $S' + N'$, c'est-à-dire avec A , donc aussi avec tout polynôme en A . De même, N' commute avec tout polynôme en A . Les sous-espaces E_k et F_l , étant les noyaux de polynômes en A , vérifient donc

$$S'(E_k) \subset E_k, \quad S'(F_l) \subset F_l, \quad N'(E_k) \subset E_k, \quad N'(F_l) \subset F_l.$$

La restriction de S à E_k est multiple de id_{E_k} , donc commute avec tout autre élément de $\mathcal{L}(E_k, E_k)$, et en particulier avec la restriction de S' à E_k . Comme $N = A - S$, la

restriction de N à E_k commute aussi avec la restriction de S' à E_k , donc aussi (puisque $N' = A - S'$) avec la restriction de N' à E_k . Pour tout entier r , nous pouvons donc développer la restriction de $(N' - N)^r$ à E_k en utilisant la formule du binôme. Nous voyons ainsi que la restriction de $N' - N$ à E_k est un endomorphisme nilpotent. Comme $S - S' = N' - N$, la restriction de $S - S'$ à E_k est un endomorphisme à la fois nilpotent et semi-simple, car somme de la restriction de S' à E_k , qui est semi-simple, et de la restriction de S à E_k , qui est multiple de id_{E_k} . En diagonalisant la restriction de $S - S'$ à E_k (ou, éventuellement, son prolongement au complexifié de E_k), nous voyons que la restriction de $S - S'$ à E_k est identiquement nulle. Comme $N' - N = S - S'$, la restriction de $N' - N$ à E_k est nulle aussi.

Le complexifié de chaque sous-espace F_l est somme directe de deux sous-espaces (notés F_{C1} et F_{C2} dans la preuve de la proposition 1.9) auxquels les raisonnements faits ci-dessus à propos de E_k s'appliquent. Nous voyons ainsi que les restrictions à chaque F_l de $S - S'$ et de $N' - N$ sont nulles. En définitive, nous avons $S' = S$ et $N' = N$. \square

1.14. Remarque. — Lors de la démonstration du théorème 1.13, nous avons obtenu l'expression de la partie semi-simple S de l'endomorphisme A en utilisant la décomposition de l'espace E en somme directe de sous-espaces invariants, calquée sur la décomposition du polynôme caractéristique de A en produit de facteurs, deux à deux premiers entre eux, dont chacun est une puissance d'un polynôme irréductible. On pourrait donc penser que la détermination effective des parties semi-simple S et nilpotente N de l'endomorphisme A nécessite le calcul des racines du polynôme caractéristique de A . Il n'en est rien, ainsi que l'a observé le grand mathématicien français Claude Chevalley (voir [13], chapitre I, théorème 7 page 71) : alors qu'il est, en général, impossible de déterminer de manière exacte les racines du polynôme caractéristique de A dès que son degré est supérieur à 4, la partie semi-simple S et la partie nilpotente N de A peuvent toujours être déterminées explicitement de manière exacte. Cela résulte en effet du lemme et de la proposition qui suivent.

1.15. Lemme. — Soit $P(X)$ un polynôme en une indéterminée X , à coefficients dans un corps $k \subset \mathbb{C}$, dont toutes les racines (dans \mathbb{C}) sont simples. Soit $P'(X)$ le polynôme dérivé de $P(X)$, $B(X)$ et $C(X)$ deux polynômes vérifiant l'identité de Bézout

$$B(X)P(X) + C(X)P'(X) = 1. \tag{*}$$

Pour chaque entier $n \geq 1$, on définit un polynôme $D_{P,n}(X)$ en posant

$$D_{P,1}(X) = X,$$

puis successivement, pour chaque entier $n \geq 1$,

$$D_{P,n+1}(X) = D_{P,n}(X) - C(X)P(D_{P,n}(X)). \tag{**}$$

Alors pour tout $n \geq 1$, le polynôme $P(D_{P,n}(X))$ est multiple de $(P(X))^n$ et, pour tout $n \geq 2$, $D_{P,n}(X) - X$ est multiple de $P(X)$. De plus, les polynômes $D_{P,n}(X)$ sont à coefficients dans le corps k , et ces coefficients s'expriment, au moyen de ceux de $P(X)$, par des formules explicites exactes.

Preuve : Puisque toutes les racines de $P(X)$ sont simples, le polynôme $P(X)$ et son polynôme dérivé $P'(X)$ sont premiers entre eux. Par suite, le théorème de Bézout assure l'existence des polynômes $B(X)$ et $C(X)$ vérifiant l'identité (*).

Pour tout entier $m \geq 1$, notons H_m la propriété : pour tout entier n vérifiant $1 \leq n \leq m$, $P(D_{P,n}(X))$ est multiple de $(P(X))^n$ et $D_{P,n+1}(X) - X$ est multiple de $P(X)$.

Nous avons $D_{P,1}(X) = X$, donc $P(D_{P,1}(X)) = P(X)$, qui est bien multiple de $(P(X))^1 = P(X)$. D'autre part,

$$D_{P,2}(X) = D_{P,1}(X) - C(X)P(D_{P,1}(X)) = X - C(X)P(X),$$

donc $D_{P,2}(X) - X = -C(X)P(X)$ est bien multiple de $P(X)$. Nous avons prouvé que la propriété H_1 est vraie.

Supposons la propriété H_m vraie. Puisque $D_{P,m+1}(X) - X$ est multiple de $P(X)$, il existe un polynôme $R(X)$ tel que

$$D_{P,m+1}(X) = X + R(X)P(X).$$

En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 1, nous obtenons

$$\begin{aligned} P(D_{P,m+1}(X)) &= P(X + R(X)P(X)) \\ &= P(X) + P'(X)R(X)P(X) + G(X)(P(X))^2, \end{aligned}$$

où $G(X)$ est un polynôme. Ce résultat prouve que $P(D_{P,m+1}(X))$ est multiple de $P(X)$. L'expression (**) montre alors que $D_{P,m+2}(X) - X$ est multiple de $P(X)$.

En remplaçant, dans $P(D_{P,m+1}(X))$, $D_{P,m+1}(X)$ par son expression tirée de (**), et en appliquant la formule de Taylor à l'ordre 1, nous obtenons

$$\begin{aligned} P(D_{P,m+1}(X)) &= P(D_{P,m}(X) - C(X)P(D_{P,m}(X))) \\ &= P(D_{P,m}(X)) - P'(D_{P,m}(X))C(X)P(D_{P,m}(X)) \\ &\quad + K(X)(P(D_{P,m}(X)))^2, \end{aligned}$$

où $K(X)$ est un polynôme. Mais d'après l'hypothèse de récurrence, $D_{P,m}(X) - X$ est multiple de $P(X)$, ce qui permet d'écrire, en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 0,

$$P'(D_{P,m}(X)) = P'(X + L(X)P(X)) = P'(X) + M(X)P(X),$$

où $L(X)$ et $M(X)$ sont des polynômes. En tenant compte de cette égalité dans l'expression de $P(D_{P,m+1}(X))$, nous obtenons

$$\begin{aligned} P(D_{P,m+1}(X)) &= P(D_{P,m}(X)) - (P'(X) + M(X)P(X))C(X)P(D_{P,m}(X)) \\ &\quad + K(X)(P(D_{P,m}(X)))^2 \\ &= P(D_{P,m}(X)) \left(1 - P'(X)C(X) - M(X)P(X)C(X) \right. \\ &\quad \left. + K(X)P(D_{P,m}(X)) \right). \end{aligned}$$

La formule (*) montre que $1 - P'(X)C(X)$ est multiple de $P(X)$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $P(D_{P,m}(X))$ est multiple de $(P(X))^m$. L'expression ci-dessus montre alors que $P(D_{P,m+1}(X))$ est multiple de $(P(X))^{m+1}$. Nous avons prouvé que si la propriété H_m est vraie, la propriété H_{m+1} l'est aussi. Comme par ailleurs nous avons prouvé que H_1 est vraie, nous pouvons conclure que pour tout entier $m \geq 1$, H_m est vraie.

On sait de plus que $B(X)$ et $C(X)$ peuvent être explicitement déterminés, de manière exacte, grâce à l'algorithme d'Euclide de division des polynômes suivant les puissances décroissantes de l'indéterminée. Si le polynôme P est à coefficients dans un corps $k \subset \mathbb{C}$, il en est de même de son polynôme dérivé $P'(X)$, et aussi des polynômes $B(X)$ et $C(X)$. Les expressions des polynômes $D_{P,m}(X)$ montrent alors que les coefficients de ces polynômes sont éléments du corps k et donnés par des formules explicites exactes. \square

1.16. Proposition. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $A \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme de E et λ_i ($1 \leq i \leq p$) les valeurs propres deux à deux distinctes (réelles ou complexes) de A . Soit $P(X)$ le polynôme en une indéterminée X

$$P(X) = \prod_{i=1}^p (\lambda_i - X).$$

Pour tout entier $n \geq 1$, soit $D_{P,n}(X)$ le polynôme déduit du polynôme $P(X)$ par application du lemme 1.15. Alors il existe un entier $m \geq 1$ tel que $(P(A))^m = 0$, et les endomorphisme

$$S = D_{P,m}(A), \quad N = A - D_{P,m}(A)$$

sont, respectivement, la partie semi-simple et la partie nilpotente de l'endomorphisme A . De plus, si les coefficients de la matrice de A , dans une certaine base de E , sont éléments d'un corps $k \subset \mathbb{K}$, les coefficients des matrices de S et de N , dans cette même base, sont éléments du corps k et s'expriment, en fonction des coefficients de la matrice de A , par des formules explicites exactes.

Preuve : Soit m un entier supérieur ou égal à la plus grande des multiplicités des valeurs propres de A . Le polynôme $(P(X))^m$ est multiple du polynôme caractéristique de A , donc est un polynôme annulateur de A . D'autre part, la définition de $P(X)$ montre que toutes les racines de ce polynôme sont simples; le lemme 1.15 peut donc lui être appliqué, et les polynômes $D_{P,m}(X)$ sont bien définis. Puisque $P(D_{P,m}(X))$ est multiple de $(P(X))^m$, qui est un polynôme annulateur de A , nous avons

$$P(S) = P(D_{P,m}(A)) = 0.$$

Le polynôme P , dont toutes les racines sont simples, est un polynôme annulateur de l'endomorphisme S . La proposition 1.12 montre que S est semi-simple. D'autre part, puisque $D_{P,m}(X) - X$ est multiple de $P(X)$, $(D_{P,m}(X) - X)^m$ est multiple de $(P(X))^m$, donc $(D_{P,m}(A) - A)^m = 0$. L'endomorphisme $N = A - D_{P,m}(A)$ est donc nilpotent. D'autre part, l'endomorphisme S commute avec A (puisque c'est un polynôme en A) et avec lui-même, donc aussi avec $N = A - S$. Nous avons ainsi prouvé que S est la partie semi-simple et N la partie nilpotente de A .

Remarquons enfin qu'il n'est pas nécessaire de calculer les valeurs propres de A pour déterminer le polynôme P . Soit en effet $\Pi_A(X)$ le polynôme caractéristique de A , $\Pi'_A(X)$ le polynôme dérivé et $Q(X)$ leur plus grand commun diviseur (pgcd). Le polynôme $P(X)$ n'est autre que le quotient de $\Pi_A(X)$ par $Q(X)$. Supposons que dans une certaine base de l'espace E , la matrice de A soit à coefficients dans un corps $k \subset \mathbb{K}$. Les coefficients de $\Pi_A(X)$ et de $\Pi'_A(X)$ sont des polynômes à coefficients entiers en les coefficients de la matrice de A , donc sont éléments du corps k . Les polynômes $Q(X)$ et $P(X)$ sont obtenus grâce à l'algorithme d'Euclide de division des polynômes selon les puissances décroissantes de l'indéterminée, qui conduit à des formules explicites, et leurs coefficients sont éléments du corps k . Enfin S et N peuvent aussi être déterminés explicitement et leurs matrices, dans la base de E considérée, sont elles aussi à coefficients dans k . \square

Nous pouvons maintenant établir le théorème que nous avons employé au chapitre III.

1.17. Théorème. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et $A \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme de E . Soient λ_j , $1 \leq j \leq r$, les valeurs propres (réelles ou complexes) de A . Soit K un réel strictement positif tel que l'on ait, pour tout j ($1 \leq j \leq r$),

$$|\lambda_j| < K.$$

Si, de plus, A est inversible, soit k un autre réel strictement positif tel que l'on ait, pour tout j ($1 \leq j \leq r$),

$$k < |\lambda_j| < K.$$

On note $\Re\lambda_j$ la partie réelle de λ_j . Soient m et M deux réels (non nécessairement positifs) tels que l'on ait, pour tout j ($1 \leq j \leq r$),

$$m < \Re\lambda_j < M.$$

Alors il existe sur l'espace vectoriel E un produit scalaire, euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, noté $(x, y) \mapsto (x|y)$, ayant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $x \in E$,

$$\|A(x)\| \leq K\|x\|,$$

où nous avons noté $x \mapsto \|x\| = (x|x)^{1/2}$ la norme sur E associée à ce produit scalaire ;

(ii) si, de plus, A est inversible, pour tout $x \in E$,

$$k\|x\| \leq \|A(x)\| \leq K\|x\| ;$$

(iii) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pour tout $x \in E$,

$$m(x|x) \leq (A(x) | x) \leq M(x|x).$$

Preuve : Rappelons que \mathbb{R} et \mathbb{C} sont munis, respectivement, d'un produit scalaire euclidien usuel $(x_1, x_2) \mapsto (x_1|x_2) = x_1x_2$, et d'un produit scalaire hermitien usuel $(z_1, z_2) \mapsto (z_1|z_2) = z_1\bar{z}_2$. Considérons d'abord le cas où $\dim E = 1$. Nous définissons sur E un produit scalaire (euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) en l'identifiant au corps \mathbb{K} muni de son produit scalaire usuel ; il suffit pour cela de prendre un élément non nul quelconque de E pour vecteur de base. Il est facile de vérifier que ce produit scalaire a bien les propriétés 1, 2 et 3.

Considérons maintenant le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\dim E = 2$, et où les valeurs propres de A sont complexes conjuguées l'une de l'autre, de la forme $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, avec α et β réels et $\beta \neq 0$. Il existe une base (e_1, e_2) de E telle que

$$A(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad A(e_2) = -\beta e_1 + \alpha e_2.$$

Munissons E du produit scalaire euclidien pour lequel la base (e_1, e_2) est orthonormée. Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2$ un élément quelconque de E . Nous avons

$$(A(x) | x) = (x_1^2 + x_2^2)\alpha, \quad \|A(x)\|^2 = (A(x) | A(x)) = (x_1^2 + x_2^2)(\alpha^2 + \beta^2).$$

En d'autres termes,

$$(A(x) | x) = \Re\lambda(x|x), \quad \|A(x)\|^2 = \|\lambda\|^2\|x\|^2,$$

ce qui prouve que ce produit scalaire euclidien a bien les propriétés 1, 2 et 3.

Revenons au cas général. Faisons l'hypothèse de récurrence suivante : si A est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à n , il existe sur cet espace un produit scalaire vérifiant les propriétés 1, 2 et 3. Soit maintenant A un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n + 1$. Deux cas sont possibles, qui doivent donner lieu à des définitions adaptées à chaque cas, mais que nous traiterons ensuite ensemble.

Premier cas : il existe une valeur propre λ_1 de A qui est élément du corps \mathbb{K} . Cela se produit si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et aussi si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si une au moins des valeurs propres de A est réelle. Soit $v_1 \in E$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 , E_1 le sous-espace vectoriel de E , de dimension 1, engendré par v_1 . Nous munissons E_1 du produit scalaire

(euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), noté $(x, y) \mapsto (x|y)_1$, pour lequel le vecteur v_1 est de norme 1, c'est-à-dire vérifie $(v_1|v_1)_1 = 1$.

Deuxième cas : il n'existe pas de valeur propre de A qui soit élément du corps \mathbb{K} . En d'autres termes, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et aucune valeur propre de A n'est réelle. Soit alors $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, avec α et $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, une valeur propre complexe de A . Le nombre complexe conjugué $\overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$ est aussi valeur propre de A . Soient $v_1 - iw_1$ et $v_1 + iw_1$ deux vecteurs non nuls éléments du complexifié $E_{\mathbb{C}}$ de E (avec v_1 et $w_1 \in E$), vecteurs propres du prolongement de A à $E_{\mathbb{C}}$ associés, respectivement, aux valeurs propres λ_1 et $\overline{\lambda_1}$. Nous avons

$$\begin{aligned} A(v_1 - iw_1) &= (\alpha + i\beta)(v_1 - iw_1) = (\alpha v_1 + \beta w_1) - i(\alpha w_1 - \beta v_1), \\ A(v_1 + iw_1) &= (\alpha - i\beta)(v_1 + iw_1) = (\alpha v_1 + \beta w_1) + i(\alpha w_1 - \beta v_1), \end{aligned}$$

d'où

$$A(v_1) = \alpha v_1 + \beta w_1, \quad A(w_1) = \alpha w_1 - \beta v_1.$$

Soit E_1 le sous-espace vectoriel de E , de dimension 2, engendré par le couple (v_1, w_1) . Ce sous-espace est invariant par A . Munissons-le du produit scalaire euclidien, noté $(x, y) \mapsto (x|y)_1$, pour lequel (v_1, w_1) est une base orthonormée.

Dans les deux cas, nous avons pu définir un sous-espace vectoriel E_1 de E , invariant par A , et le munir d'un produit scalaire $(x, y) \mapsto (x|y)_1$ tel que, pour la restriction de A à E_1 , les propriétés 1, 2 et 3 soient vérifiées.

Soit E_2 un sous-espace vectoriel de E supplémentaire de E_1 . Nous avons donc $E = E_1 \oplus E_2$. Notons $p_1 : E \rightarrow E_1$ et $p_2 : E \rightarrow E_2$ les deux projections, dont les noyaux sont, respectivement, E_2 et E_1 . Comme E_1 est invariant par A , nous pouvons noter A_1 l'endomorphisme de E_1 , restriction de A à E_1 . En général, E_2 n'est pas invariant par A , ce qui nous conduit à définir l'endomorphisme A_2 de E_2 en posant

$$A_2 = p_2 \circ A \circ i_{E_2},$$

où $i_{E_2} : E_2 \rightarrow E$ est l'injection canonique.

Soit λ une valeur propre de A_2 . Nous allons prouver λ est aussi valeur propre de A . Si $\lambda = \lambda_1$ ou si (dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) $\lambda = \overline{\lambda_1}$, λ est bien valeur propre de A . Il nous reste à traiter le cas où $\lambda \neq \lambda_1$, $\lambda \neq \overline{\lambda_1}$, c'est-à-dire où λ n'est pas valeur propre de la restriction de A à E_1 .

Soit u_2 un vecteur propre de A_2 (ou, éventuellement, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si λ n'est pas réel, un vecteur propre du prolongement de A_2 au complexifié de E_2) associé à la valeur propre λ . Nous avons donc

$$A_2(u_2) = \lambda u_2.$$

Nous avons :

$$A(u_2) = p_1 \circ A(u_2) + p_2 \circ A(u_2) = p_1 \circ A(u_2) + \lambda u_2.$$

Soit u_1 l'élément de E_1 (ou, éventuellement, du complexifié de E_1) tel que

$$(A - \lambda)(u_1) = -p_1 \circ A(u_2).$$

Il existe, et il est unique, puisque λ n'est pas valeur propre de la restriction de A à E_1 . Nous avons alors :

$$A(u_1 + u_2) = \lambda(u_1 + u_2),$$

ce qui prouve que λ est valeur propre de A .

Soit un réel $K > 0$ et, si A est inversible, un autre réel $k > 0$ tels que les valeurs propres λ_j de A vérifient, pour tout j ($1 \leq j \leq r$),

$$k < |\lambda_j| < K.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soient de même m et M deux réels (non nécessairement positifs) tels que les parties réelles $\Re \lambda_j$ des valeurs propres de A vérifient, pour tout j ($1 \leq j \leq r$),

$$m < \Re \lambda_j < M.$$

Puisque ces inégalités sont strictes, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K - \varepsilon > 0$, $M - \varepsilon > 0$ et que ces inégalités soient encore vérifiées lorsqu'on remplace K par $K - \varepsilon$, M par $M - \varepsilon$, k par $k + \varepsilon$ et m par $m + \varepsilon$. De plus, ces inégalités sont vérifiées aussi par les valeurs propres de A_2 (et leurs parties réelles), puisque ce sont aussi des valeurs propres de A . D'après l'hypothèse de récurrence, il existe, sur E_2 , un produit scalaire (euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), noté $(x, y) \mapsto (x|y)_2$, ayant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $x_2 \in E_2$,

$$\|A_2(x_2)\| \leq (K - \varepsilon)\|x_2\|_2,$$

où nous avons noté $x \mapsto \|x\|_2 = (x|x)_2^{1/2}$ la norme sur E_2 associée à ce produit scalaire;

(ii) si, de plus, A est inversible, ce qui implique que A_2 est lui aussi inversible, pour tout $x_2 \in E_2$,

$$(k + \varepsilon)\|x_2\|_2 \leq \|A_2(x_2)\|_2 \leq (K - \varepsilon)\|x_2\|_2.$$

(iii) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pour tout $x_2 \in E_2$,

$$(m + \varepsilon)(x_2|x_2)_2 \leq (A_2(x_2) | x_2) \leq (M - \varepsilon)(x_2|x_2)_2.$$

Munissons l'espace $E = E_1 \oplus E_2$ d'un produit scalaire, noté $(x, y) \mapsto (x|y)$, défini par la formule

$$(x|y) = \eta(p_1(x) | p_1(y))_1 + (p_2(x) | p_2(y))_2,$$

où η est une constante strictement positive que nous allons déterminer.

Soit $x = x_1 + x_2$ un élément quelconque de E , avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Nous avons

$$A(x) = y_1 + y_2, \quad \text{avec } y_1 = A(x_1) + p_1 \circ A(x_2) \in E_1, \quad y_2 = A_2(x_2) \in E_2.$$

Nous en déduisons

$$(y_1|x_1)_1 = (A(x_1) | x_1)_1 + (p_1 \circ A(x_2) | x_1)_1, \quad (y_2|x_2)_2 = (A_2(x_2) | x_2)_2,$$

et de même

$$(y_1|y_1)_1 = \|A(x_1)\|_1^2 + (A(x_1) | p_1 \circ A(x_2))_1 + (p_1 \circ A(x_2) | A(x_1))_1 \\ + \|p_1 \circ A(x_2)\|_1^2,$$

$$(y_2|y_2)_2 = \|A_2(x_2)\|_2^2.$$

En utilisant la définition de la norme d'une application linéaire et l'inégalité de Schwarz, nous obtenons les inégalités

$$|(p_1 \circ A(x_2) | A(x_1))_1| \leq \|p_1 \circ A \circ i_{E_2}\| \|A_1\| \|x_1\|_1 \|x_2\|_2,$$

$$|(A(x_1) | p_1 \circ A(x_2))_1| \leq \|p_1 \circ A \circ i_{E_2}\| \|A_1\| \|x_1\|_1 \|x_2\|_2,$$

$$\|p_1 \circ A(x_2)\|_1^2 \leq \|p_1 \circ A \circ i_{E_2}\|^2 \|x_2\|_2^2.$$

Nous utiliserons aussi l'inégalité élémentaire, conséquence de $(a + b)^2 \geq 0$,

$$2\eta \|x_1\|_1 \|x_2\|_2 \leq \eta^{3/2} \|x_1\|_1^2 + \eta^{1/2} \|x_2\|_2^2.$$

En utilisant ces inégalités et l'hypothèse de récurrence, nous obtenons la majoration de $\|y\|^2$:

$$\|y\|^2 \leq ((K - \varepsilon)^2 + \|p_1 \circ A \circ i_{E_2}\| \|A_1\| \eta^{1/2}) \eta \|x_1\|_1^2 \\ + ((K - \varepsilon)^2 + \|p_1 \circ A \circ i_{E_2}\| \|A_1\| \eta^{1/2} + \|p_1 \circ A \circ i_{E_2}\|^2 \eta) \|x_2\|_2^2.$$

En prenant $\eta > 0$ assez petit, nous pouvons faire en sorte que

$$\begin{aligned} ((K - \varepsilon)^2 + \|p_1 \circ A \circ i_{E_2}\| \|A_1\| \eta^{1/2}) &\leq K^2, \\ ((K - \varepsilon)^2 + \|p_1 \circ A \circ i_{E_2}\| \|A_1\| \eta^{1/2} + \|p_1 \circ A \circ i_{E_2}\|^2 \eta) &\leq K^2. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors

$$\|y\|^2 \leq K^2 (\eta \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2) = K^2 \|x\|^2.$$

Ce résultat exprime que la propriété (i) est satisfaite.

Des calculs analogues montrent qu'en prenant $\eta > 0$ assez petit on peut, si A est inversible, faire en sorte que la propriété (ii) soit satisfaite et, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, que la propriété (iii) le soit aussi. \square

1.18. Proposition. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1. Soit $B \in GL(E)$ une application linéaire inversible de E dans lui-même. Soient λ_i les valeurs propres distinctes (réelles ou complexes) de B , n_i leurs multiplicités ($1 \leq i \leq p$). Les valeurs propres de B^{-1} sont $\mu_i = \lambda_i^{-1}$, et leurs multiplicités sont n_i .

2. Soit $A \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme de E , et λ_i ($1 \leq i \leq p$) ses valeurs propres distinctes (réelles ou complexes). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les valeurs propres de $\exp(tA)$ sont $e^{t\lambda_i}$.

Preuve :

1. Soit n la dimension de E , et $\mu \in \mathbb{K}$, $\mu \neq 0$. Nous avons

$$B \circ (B^{-1} - \mu \text{id}_E) = -\mu(B - \mu^{-1} \text{id}_E).$$

Prenons le déterminant des deux membres. Nous obtenons

$$\det(B) \det(B^{-1} - \mu \text{id}_E) = (-\mu)^n \det(B - \mu^{-1} \text{id}_E).$$

Mais $\det(B^{-1} - \mu \text{id}_E) = \Pi_{B^{-1}}(\mu)$ et $\det(B - \mu^{-1} \text{id}_E) = \Pi_B(\mu^{-1})$, où $\Pi_{B^{-1}}$ et Π_B désignent les polynômes caractéristiques de B^{-1} et de B . D'autre part

$$\Pi_B(\lambda) = \prod_{1 \leq i \leq p} (\lambda_i - \lambda)^{n_i},$$

d'où, compte tenu de $\det(B) = \prod_{1 \leq i \leq p} \lambda_i^{n_i}$,

$$\Pi_{B^{-1}}(\mu) = \prod_{1 \leq i \leq p} (\lambda_i^{-1} - \mu)^{n_i}.$$

Le résultat annoncé en découle immédiatement.

2. Si A est semi-simple, on peut choisir une base de E (ou éventuellement, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, du complexifié $E_{\mathbb{C}}$ de E) dans laquelle la matrice de A est diagonale; les coefficients diagonaux sont les valeurs propres λ_i de A , chacune apparaissant un nombre de fois égal à sa multiplicité. La matrice de $\exp(tA)$, dans la même base, est diagonale et a pour coefficients diagonaux $e^{t\lambda_i}$, ce qui établit le résultat.

Si A n'est pas semi-simple, elle se décompose, de manière unique, en une somme $A = S + N$ de deux application linéaires, avec S semi-simple et N nilpotente, qui commutent : $S \circ N = N \circ S$. Nous avons, puisque S et N commutent,

$$\exp(tA) = \exp(t(S + N)) = \exp(tS) \exp(tN).$$

Mais puisque N est nilpotente,

$$\exp(tN) = \text{id}_E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} N^n = \text{id}_E + NP(N),$$

où $P(N)$ est un polynôme en N , car $N^n = 0$ pour n assez grand. Nous en déduisons

$$\exp(tA) = \exp(tS) + N \exp(tS)P(N).$$

On vérifie aisément que $\exp(tS)$ est semi-simple, $N \exp(tS)P(N)$ nilpotente, et que ces deux applications linéaires commutent. Par suite, $\exp(tS)$ est la partie semi-simple de $\exp(tA)$; les valeurs propres de $\exp(tA)$ sont les mêmes que celles de $\exp(tS)$, avec les mêmes multiplicités. Nous sommes ainsi ramenés au cas déjà traité où l'application linéaire considérée est semi-simple. \square

2. Compléments au théorème du point fixe

Rappelons l'énoncé de ce théorème classique, dont on trouvera la démonstration, par exemple, dans l'ouvrage [17] de la même collection.

2.1. Théorème du point fixe. — Une application contractante (c'est-à-dire lipschitzienne de rapport strictement inférieur à 1) d'un espace métrique complet dans lui-même possède un point fixe unique.

Lors de la démonstration de la proposition 7.6 du chapitre V, nous avons utilisé les compléments à ce théorème énoncés et démontrés ci-dessous.

2.2. Théorème du point fixe avec paramètre. — Soit Λ un ensemble, (X, d) un espace métrique complet et $f : \Lambda \times X \rightarrow X$ une application. On suppose qu'il existe un réel $k < 1$ tel que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application partielle

$$f_\lambda : X \rightarrow X, \quad f_\lambda(x) = f(\lambda, x),$$

soit lipschitzienne de rapport k ; on sait alors (théorème 2.1) que cette application admet un point fixe unique $g(\lambda)$. On a ainsi défini une application $g : \Lambda \rightarrow X$.

1. On suppose que Λ est un espace topologique et que, pour chaque $x \in X$ fixé, l'application de Λ dans $X : \lambda \mapsto f(\lambda, x)$ est continue. Alors l'application $g : \Lambda \rightarrow X$ est continue.

2. On suppose que Λ est un espace métrique et que, pour chaque $x \in X$ fixé, l'application de Λ dans $X : \lambda \mapsto f(\lambda, x)$ est continue. Soit U un ouvert non vide de Λ , V un ouvert non vide de X vérifiant $g(U) \subset V$; on suppose qu'il existe un réel $k_1 > 0$ tel que pour tout $x \in V$, l'application de U dans X

$$\lambda \mapsto f(\lambda, x)$$

soit lipschitzienne de rapport k_1 . Alors la restriction de g à U est lipschitzienne de rapport $k_1/(1 - k)$.

3. On suppose maintenant que Λ est un ouvert d'un espace de Banach E , X un fermé d'un espace de Banach F , et que l'application $f : \Lambda \times X \rightarrow X$ se prolonge en une application différentiable de classe C^p ($p \geq 1$), encore notée f , définie sur un ouvert W de $E \times F$ contenant $\Lambda \times X$, à valeurs dans F . On suppose également que pour tout $\lambda \in \Lambda$, la différentielle partielle de f par rapport à sa seconde variable, au point $(\lambda, g(\lambda))$ vérifie

$$\|D_2 f(\lambda, g(\lambda))\| < 1.$$

Alors l'application $g : \Lambda \rightarrow F$ est différentiable de classe C^p .

Preuve :

1. Soient λ et μ deux éléments de Λ , x et y deux éléments de X . Nous avons

$$d(f_\mu(x), f_\mu(y)) \leq k d(x, y).$$

Faisons $x = g(\lambda)$ et $y = g(\mu)$. Nous obtenons

$$d(f(\mu, g(\lambda)), f(\mu, g(\mu))) \leq k d(g(\lambda), g(\mu)). \quad (*)$$

Mais d'autre part, d'après la définition de g ,

$$f(\lambda, g(\lambda)) = g(\lambda), \quad f(\mu, g(\mu)) = g(\mu),$$

donc

$$\begin{aligned} d(g(\lambda), g(\mu)) &= d(f(\lambda, g(\lambda)), f(\mu, g(\mu))) \\ &\leq d(f(\lambda, g(\lambda)), f(\mu, g(\lambda))) + d(f(\mu, g(\lambda)), f(\mu, g(\mu))) \end{aligned}$$

d'où, compte tenu de (*),

$$d(g(\lambda), g(\mu)) \leq d(f(\lambda, g(\lambda)), f(\mu, g(\lambda))) + k d(g(\lambda), g(\mu)),$$

ou encore, puisque $k < 1$,

$$d(g(\lambda), g(\mu)) \leq \frac{1}{1-k} d(f(\lambda, g(\lambda)), f(\mu, g(\lambda))). \quad (**)$$

Mais par hypothèse, $\lambda \in \Lambda$ étant considéré comme fixé, l'application de Λ dans X : $\mu \mapsto f(\mu, g(\lambda))$ est continue, en particulier au point λ . Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U_ε de λ dans Λ tel que, pour tout $\mu \in U_\varepsilon$,

$$d(f(\mu, g(\lambda)), f(\lambda, g(\lambda))) \leq (1-k)\varepsilon.$$

Donc, pour tout $\mu \in U_\varepsilon$,

$$d(g(\lambda), g(\mu)) \leq \frac{1}{1-k} (1-k)\varepsilon = \varepsilon,$$

ce qui exprime que g est continue au point λ .

2. Les hypothèses de 1 étant satisfaites, l'application g est continue. Soient λ et μ deux éléments de U . Puisque $g(\lambda) \in V$, nous avons, en notant δ la distance dont est muni Λ ,

$$d(f(\lambda, g(\lambda)), f(\mu, g(\lambda))) \leq k_1 \delta(\lambda, \mu).$$

En utilisant l'inégalité (**) prouvée ci-dessus, nous en déduisons

$$d(g(\lambda), g(\mu)) \leq \frac{k_1}{1-k} \delta(\lambda, \mu),$$

ce qui exprime que la restriction de g à U est lipschitzienne de rapport $k_1/(1-k)$.

3. Étant différentiable de classe C^p , l'application f est *a fortiori* continue; les hypothèses de 1 sont donc satisfaites; par suite, l'application g est continue. Soit $\lambda \in \Lambda$. Supposons momentanément g différentiable au point λ . Pour obtenir l'expression de sa différentielle en ce point, considérons l'égalité, valable en tout point $\mu \in \Lambda$,

$$f(\mu, g(\mu)) = g(\mu),$$

et différencions ses deux membres au point $\mu = \lambda$. Nous obtenons ainsi l'égalité

$$D_1 f(\lambda, g(\lambda)) + D_2 f(\lambda, g(\lambda)) \circ Dg(\lambda) = Dg(\lambda),$$

où D_1f et D_2f sont les différentielles partielles de f par rapport à sa première et à sa seconde variable, respectivement. Cela s'écrit aussi

$$\left(\text{id}_F - D_2f(\lambda, g(\lambda))\right) \circ Dg(\lambda) = D_1f(\lambda, g(\lambda)).$$

Comme par hypothèse $\|D_2f(\lambda, g(\lambda))\| < 1$, l'endomorphisme $\text{id}_F - D_2f(\lambda, g(\lambda))$ est inversible (voir par exemple [17], chapitre IX, exemple 4.3 a). Nous pouvons donc écrire

$$Dg(\lambda) = \left(\text{id}_F - D_2f(\lambda, g(\lambda))\right)^{-1} \circ D_1f(\lambda, g(\lambda)).$$

Ainsi, en supposant g différentiable au point λ , nous avons pu déterminer l'expression de sa différentielle en ce point. Nous devons maintenant prouver que g est bien différentiable au point λ . D'après la définition même de la différentielle, il suffit pour cela de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de λ dans E , $U \subset \Lambda$, tel que, pour tout $\mu \in U$,

$$\left\|g(\mu) - g(\lambda) - \left(\text{id}_F - D_2f(\lambda, g(\lambda))\right)^{-1} \circ D_1f(\lambda, g(\lambda))(\mu - \lambda)\right\| \leq \varepsilon \|\mu - \lambda\|.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ et posons, pour alléger l'écriture,

$$K(\mu) = g(\mu) - g(\lambda) - \left(\text{id}_F - D_2f(\lambda, g(\lambda))\right)^{-1} \circ D_1f(\lambda, g(\lambda))(\mu - \lambda),$$

que nous considérons comme fonction de $\mu \in \Lambda$ (l'élément $\lambda \in \Lambda$, figurant au membre de droite de l'égalité définissant $K(\mu)$, étant momentanément considéré comme fixé). Nous devons prouver qu'il existe un voisinage U de λ dans E , $U \subset \Lambda$, tel que, si $\mu \in U$, alors

$$\|K(\mu)\| \leq \varepsilon \|\mu - \lambda\|.$$

Or nous avons, pour tout $\mu \in \Lambda$,

$$\begin{aligned} g(\mu) - g(\lambda) &= \left(\text{id}_F - D_2f(\lambda, g(\lambda))\right)^{-1} \circ \left(\text{id}_F - D_2f(\lambda, g(\lambda))\right)(g(\mu) - g(\lambda)) \\ &= \left(\text{id}_F - D_2f(\lambda, g(\lambda))\right)^{-1} \left(g(\mu) - g(\lambda) \right. \\ &\quad \left. - D_2f(\lambda, g(\lambda))(g(\mu) - g(\lambda))\right). \end{aligned}$$

En retranchant $\left(\text{id}_F - D_2f(\lambda, g(\lambda))\right)^{-1} \circ D_1f(\lambda, g(\lambda))(\mu - \lambda)$ du premier et du dernier membre de cette suite d'égalités, nous obtenons

$$\begin{aligned} K(\mu) &= \left(\text{id}_F - D_2f(\lambda, g(\lambda))\right)^{-1} \left(g(\mu) - g(\lambda) \right. \\ &\quad \left. - D_2f(\lambda, g(\lambda))(g(\mu) - g(\lambda)) \right. \\ &\quad \left. - D_1f(\lambda, g(\lambda))(\mu - \lambda)\right) \\ &= \left(\text{id}_F - D_2f(\lambda, g(\lambda))\right)^{-1} \left(f(\mu, g(\mu)) - f(\lambda, g(\lambda)) \right. \\ &\quad \left. - Df(\lambda, g(\lambda))(\mu - \lambda, g(\mu) - g(\lambda))\right). \end{aligned}$$

Posons :

$$M = \left\| \left(\text{id}_F - D_2f(\lambda, g(\lambda))\right)^{-1} \right\|.$$

Nous pouvons écrire, pour tout $\mu \in \Lambda$,

$$\|K(\mu)\| \leq M \left\| f(\mu, g(\mu)) - f(\lambda, g(\lambda)) - Df(\lambda, g(\lambda))(\mu - \lambda, g(\mu) - g(\lambda)) \right\|. \quad (***)$$

Soit k_1 un réel vérifiant

$$\|D_1f(\lambda, g(\lambda))\| < k_1.$$

Puisque f est de classe C^p (avec $p \geq 1$), D_1f , D_2f et Df sont continues. De plus, W est un ouvert de $E \times F$ contenant $(\lambda, g(\lambda))$, et Λ est un ouvert de E contenant λ ; il existe donc un voisinage ouvert convexe U de λ dans E et un voisinage ouvert convexe V de $g(\lambda)$ dans F tels que $U \times V \subset W$, $U \subset \Lambda$, et que pour tout $(\mu, x) \in U \times V$, on ait

$$\|D_1f(\mu, x)\| < k_1.$$

De plus, g étant continue, on peut, en restreignant éventuellement U , faire en sorte que $g(U) \subset V$. L'inégalité des accroissements finis montre alors que pour tous μ_1 et $\mu_2 \in U$, $x \in V$,

$$\|f(\mu_1, x) - f(\mu_2, x)\| \leq k_1 \|\mu_1 - \mu_2\|.$$

Les hypothèses de 2 étant satisfaites, nous voyons que la restriction de g à U est lipschitzienne de rapport $k_1/(1 - k)$.

Munissons l'espace produit $E \times F$ de la norme $\|(\mu, x)\| = \sup(\|\mu\|, \|x\|)$. Soit un réel $\varepsilon_1 > 0$ dont nous spécifierons plus loin la valeur. Puisque Df est continue nous pouvons, en restreignant éventuellement U et V , faire en sorte que

$$\sup_{(\mu, x) \in U \times V} \|Df(\mu, x) - Df(\lambda, g(\lambda))\| \leq \varepsilon_1.$$

En utilisant l'inégalité (***) ci-dessus et l'inégalité des accroissements finis, nous voyons que, pour $\mu \in U$,

$$\|K(\mu)\| \leq M\varepsilon_1 \sup(\|\mu - \lambda\|, \|g(\mu) - g(\lambda)\|),$$

ou encore, compte tenu du fait que la restriction de g à U est lipschitzienne de rapport $k_1/(1 - k)$,

$$\|K(\mu)\| \leq M\varepsilon_1 \sup\left(1, \frac{k_1}{1 - k}\right) \|\mu - \lambda\|.$$

En choisissant ε_1 de manière telle que

$$M\varepsilon_1 \sup\left(1, \frac{k_1}{1 - k}\right) \leq \varepsilon,$$

nous voyons que $\mu \in U$ implique

$$\|K(\mu)\| \leq \varepsilon \|\mu - \lambda\|.$$

Nous avons donc prouvé que g est bien différentiable au point λ . Comme λ est un point quelconque de Λ , g est différentiable sur Λ . Sa différentielle

$$Dg(\lambda) = \left(\text{id}_F - D_2f(\lambda, g(\lambda))\right)^{-1} \circ D_1f(\lambda, g(\lambda))$$

s'exprime au moyen de D_1f , D_2f et g , qui sont continues; elle est donc continue; autrement dit g est de classe C^1 . Si $p > 1$, D_1f et D_2f sont de classe C^{p-1} , donc *a fortiori* de classe C^1 , et l'expression de Dg montre que Dg est de classe C^1 donc que g est de classe C^2 ; de proche en proche, cette même expression montre que pour tout entier q vérifiant $1 \leq q \leq p - 1$, Dg est de classe C^q , donc g de classe C^{q+1} . En définitive, nous avons prouvé que g est de classe C^p . \square

3. Le théorème de Jordan

Nous allons dans ce paragraphe donner une preuve du théorème de Jordan. Nous suivrons de près la preuve figurant dans le livre de Dugundji [23], avec quelques emprunts à celle figurant dans le livre de Dieudonné [21]. Le lecteur pourra trouver une preuve assez voisine dans le livre de Queffélec [52] et une autre preuve dans le livre de Lefschetz [41]. Nous allons également esquisser la preuve du théorème de Riemann-Carathéodory-Schoenflies, en admettant certains résultats d'Analyse complexe (le théorème de représentation conforme de Riemann et un complément à ce théorème dû à Carathéodory). Le lecteur pourra trouver la preuve de ces résultats dans les ouvrages de Michel Hervé [33], Pierre Dolbeault [22], Walter Rudin [55], Tristan Needham [48] ou Alain Yger [64].

Dans tout ce paragraphe, nous appellerons *plan* un espace affine réel de dimension 2.

2.1. Lemme. — *Soit K une partie compacte non vide d'un plan \mathcal{E}^2 . Alors $\mathcal{E}^2 - K$ a une et une seule composante connexe non bornée.*

Preuve : Comme K est compacte, il existe une boule fermée B de \mathcal{E}^2 qui contient K . Son complémentaire $\mathcal{E}^2 - B$ est un ouvert non borné et connexe de \mathcal{E}^2 , contenu dans $\mathcal{E}^2 - K$, qui rencontre toute partie non bornée de \mathcal{E}^2 . Il existe donc au moins une composante connexe non bornée de $\mathcal{E}^2 - K$, celle qui contient l'ouvert connexe $\mathcal{E}^2 - B$. S'il existait deux composantes connexes non bornées distinctes de $\mathcal{E}^2 - K$, toutes deux rencontreraient $\mathcal{E}^2 - B$, donc (puisque $\mathcal{E}^2 - B$ est connexe) toutes deux contiendraient $\mathcal{E}^2 - B$. Leur réunion serait connexe (voir [17], chapitre V, exercice V.1 page 83), ce qui contredirait la définition même de composante connexe. C'est pourquoi il existe au plus une composante connexe non bornée de $\mathcal{E}^2 - K$, donc exactement une. \square

Rappelons (voir par exemple [17], chapitre III, paragraphe 2.9) qu'un espace topologique X est dit *normal* s'il est séparé et si pour tout couple (F_0, F_1) de parties fermées non vides disjointes de X , il existe un voisinage U_0 de F_0 et un voisinage U_1 de F_1 disjoints.

2.2. Théorème d'Urysohn. — *Un espace topologique séparé X est normal si et seulement si pour tout couple (F_0, F_1) de parties fermées non vides disjointes de X , il existe une fonction continue f , définie sur X et à valeurs dans $[0, 1]$, qui prend en tout point de F_0 la valeur 0 et en tout point de F_1 la valeur 1.*

Preuve : Si, pour tout couple (F_0, F_1) de parties fermées non vides disjointes de X , il existe une fonction continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ telle que $F_0 \subset f^{-1}(0)$ et $F_1 \subset f^{-1}(1)$, l'espace topologique X est normal car $U_0 = f^{-1}([0, 1/2[)$ et $U_1 = f^{-1}(]1/2, 1])$ sont des voisinages ouverts disjoints, respectivement, de F_0 et de F_1 .

Inversement, supposons X normal et soit (F_0, F_1) un couple de parties fermées non vides disjointes de X . Soit D l'ensemble des nombres dyadiques (c'est-à-dire de la forme $k2^{-n}$, avec k et $n \in \mathbb{N}$) appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. Nous allons montrer qu'on peut associer à chaque élément d de D un ouvert $V(d)$ de X vérifiant

$$F_0 \subset V(d) \subset \overline{V(d)} \subset X - F_1,$$

de manière telle que si $d < d'$, alors $\overline{V(d)} \subset V(d')$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n = \left\{ \frac{k}{2^n}; k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n \right\}.$$

Les D_n sont des ensembles finis dont la réunion est D . Nous avons $D_0 = \{0, 1\}$. Puisque X est normal, il existe un ouvert $V(0)$ vérifiant

$$F_0 \subset V(0) \subset \overline{V(0)} \subset X - F_1.$$

Prenons d'autre part $V(1) = X - F_1$. Ainsi définis, $V(0)$ et $V(1)$ ont bien les propriétés voulues. Nous avons donc pu définir les $V(d)$ pour tout $d \in D_0$.

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on ait pu définir les $V(d)$ pour tout $d \in \bigcup_{m=0}^n D_m$. Montrons qu'on peut définir les $V(d)$ pour $d \in D_{n+1}$. Nous avons $D_n \subset D_{n+1}$, et $D_{n+1} - D_n$ est l'ensemble des nombres dyadiques de la forme $k2^{-(n+1)}$, avec k impair, $1 \leq k \leq 2^{n+1} - 1$. Soit donc $d = (2p + 1)2^{-(n+1)}$, avec $p \in \mathbb{N}$, $p \leq 2^n - 1$, un élément de D_{n+1} . Les éléments de D_n qui l'encadrent sont $d_1 = p2^{-n}$ et $d_2 = (p + 1)2^{-n}$. Pour prouver l'existence de $V(d)$, nous procédons comme pour prouver l'existence de $V(0)$, mais en remplaçant F_0 par $\overline{V(d_1)}$ et F_1 par $X - V(d_2)$: l'espace X étant normal, il existe un ouvert $V(d)$ vérifiant

$$\overline{V(d_1)} \subset V(d) \subset \overline{V(d)} \subset V(d_2).$$

Nous avons bien prouvé, par récurrence, l'existence des $V(d)$ pour tout $d \in D$.

Posons, pour tout $x \in X$,

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{d \in D; x \in V(d)\} & \text{si } x \in X - F_1, \\ 1 & \text{si } x \in F_1. \end{cases}$$

La fonction f est définie sur X entier et à valeurs dans $[0, 1]$. Elle prend la valeur 0 en tout point de F_0 et la valeur 1 en tout point de F_1 . Pour prouver qu'elle est continue, il suffit de remarquer que pour tout $x \in X$ et tout voisinage W de $y = f(x)$ dans $[0, 1]$, il existe deux nombres dyadiques d et $d' \in D$ tels que $d < d'$ et $]d, d'[\subset W$. Nous voyons alors que $V(d') - \overline{V(d)}$ est un voisinage de x contenu dans $f^{-1}(W)$. \square

3.3. Théorème de prolongement de Tietze. — Soit X un espace topologique normal et A une partie fermée non vide de X .

1. Toute fonction continue $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se prolonge en une fonction continue $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur l'espace X entier; si de plus f est bornée en module sur A , et si M est un réel strictement positif tel que pour tout $a \in A$, on ait l'inégalité stricte $|f(a)| < M$, on peut imposer à F d'être bornée en module sur X et de vérifier, pour tout $x \in X$, l'inégalité stricte $|F(x)| < M$.

2. Soit un entier $n \geq 1$. Toute application continue $\varphi : A \rightarrow S^n$, à valeurs dans la sphère S^n , se prolonge en une application continue $\Phi : U \rightarrow S^n$, définie sur un ouvert U de X contenant A .

Preuve :

1. Supposons d'abord f bornée en module sur A , et soit M un réel strictement positif tel que pour tout $a \in A$, $|f(a)| < M$. Les ensembles :

$$A_+ = \{a \in A; f(a) \geq M/3\} \quad \text{et} \quad A_- = \{a \in A; f(a) \leq -M/3\}$$

sont disjoints et fermés dans A , donc aussi dans X . Le théorème d'Urysohn montre qu'il existe une fonction continue, définie sur X et à valeurs dans $[0, 1]$, prenant la valeur 0 sur A_- et la valeur 1 sur A_+ ; en retranchant à cette fonction la constante $1/2$, puis en multipliant la nouvelle fonction ainsi obtenue par $2M/3$, on obtient une fonction continue h_0 , définie sur X et à valeurs dans l'intervalle $[-M/3, M/3]$, prenant la valeur $-M/3$ sur A_- et la valeur $M/3$ sur A_+ . Cette fonction vérifie

$$\sup_{a \in A} |f(a) - h_0(a)| \leq \frac{2}{3} M, \quad \sup_{x \in X} |h_0(x)| \leq \frac{1}{3} M.$$

En appliquant à la fonction $f - h_0$ le même raisonnement que celui appliqué ci-dessus à f , nous voyons qu'il existe une fonction continue h_1 , définie sur X et à valeurs dans $[-2M/9, 2M/9]$, vérifiant

$$\sup_{a \in A} |f(a) - h_0(a) - h_1(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 M, \quad \sup_{x \in X} |h_1(x)| \leq \frac{2}{9} M.$$

De proche en proche, nous voyons ainsi qu'il existe une suite $(h_n, n \in \mathbb{N})$ de fonctions continues définies sur X , vérifiant, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{a \in A} \left| f(a) - \sum_{n=0}^N h_n(a) \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{N+1} M, \quad \sup_{x \in X} |h_N(x)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^{N+1} M.$$

La seconde inégalité montre que la série de fonctions de terme général h_n est normalement convergente sur X . La somme de cette série est donc une fonction continue G , qui vérifie

$$\sup_{x \in X} |G(x)| \leq \frac{M}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} = M.$$

Quant à la première inégalité, elle prouve que G est égale à f sur le fermé A . La fonction G est un prolongement continu de f à l'espace X entier, qui vérifie $\sup_{x \in X} |G(x)| \leq M$. L'ensemble

$$A_0 = \{ x \in X ; |G(x)| = M \}.$$

est une partie fermée de X , disjointe de A puisque sur A , G est égale à f donc prend des valeurs strictement inférieures à M en module. Si A_0 est vide, nous pouvons poser $F = G$, car la fonction G prend, en tout point de X , une valeur strictement inférieure à M en module. Si A_0 est non vide, le théorème d'Urysohn montre qu'il existe une fonction continue ψ , définie sur X et à valeurs dans $[0, 1]$, qui prend la valeur 0 sur A_0 et la valeur 1 sur A . La fonction $F = G\psi$ est égale à f sur A et vérifie, pour tout $x \in X$, $|F(x)| < M$, donc a toutes les propriétés désirées.

Si la fonction f n'est pas bornée sur A , nous pouvons la composer avec un homéomorphisme de \mathbb{R} sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$, par exemple l'homéomorphisme

$$x \mapsto g(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

La fonction $g \circ f : A \rightarrow] -1, 1[$ est continue et bornée. En lui appliquant le résultat de la première partie de la preuve, nous voyons qu'elle se prolonge en une fonction continue H , définie sur X et à valeurs dans $]0, 1[$. Il suffit alors de poser $F = g^{-1} \circ H$ pour obtenir une fonction continue F , définie sur X entier, dont la restriction à A est f .

2. Soit un entier $n \geq 1$ et $\varphi : A \rightarrow S^n$ une application continue. La sphère S^n étant identifiée à l'ensemble des éléments $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ de \mathbb{R}^{n+1} qui vérifient $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$, nous pouvons considérer les composantes $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ de l'application φ . Ce sont des fonctions continues définies sur A et à valeurs dans $[-1, 1]$, vérifiant, pour tout point $a \in A$, $\sum_{i=1}^{n+1} (\varphi_i(a))^2 = 1$. D'après 1, chacune de ces fonctions se prolonge en une fonction continue $\phi_i : X \rightarrow [-1, 1]$. L'ensemble

$$U = \left\{ x \in X ; \sum_{i=1}^{n+1} (\phi_i(x))^2 \neq 0 \right\}$$

est un ouvert de X contenant A , sur lequel nous pouvons définir les fonctions

$$x \mapsto \Phi_i(x) = \frac{\phi_i(x)}{\left(\sum_{j=1}^{n+1} (\phi_j(x))^2 \right)^{1/2}}.$$

Nous voyons alors que l'application $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{n+1})$ de U dans \mathbb{R}^{n+1} est en fait à valeurs dans la sphère S^n , et peut donc être considérée comme une application continue de U dans S^n . Visiblement, la restriction de Φ à A n'est autre que φ . \square

3.4. Théorème de prolongement de Borsuk. — Soient X un espace topologique normal tel que l'espace produit $X \times [0, 1]$ soit lui aussi normal, A une partie fermée non vide de X , n un entier ≥ 1 , f_0 et f_1 deux applications continues définies sur A et à valeurs dans la sphère S^n . On suppose que f_0 et f_1 sont homotopes et que f_0 se prolonge en une application continue $F_0 : X \rightarrow S^n$. Alors f_1 se prolonge elle aussi en une application continue $F_1 : X \rightarrow S^n$, qu'on peut choisir homotope à F_0 .

Preuve : Soit $\varphi : A \times [0, 1] \rightarrow S^n$ une homotopie de f_0 à f_1 . Nous définissons une application $\Phi : (X \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1]) \rightarrow S^n$ en posant

$$\begin{aligned}\Phi(x, 0) &= F_0(x), \quad \text{avec } x \in X, \\ \Phi(a, t) &= \varphi(a, t), \quad \text{avec } a \in A, t \in [0, 1].\end{aligned}$$

L'application Φ est définie et continue sur une partie fermée de $X \times [0, 1]$. Le théorème de prolongement de Tietze montre qu'elle se prolonge en une application continue, encore notée Φ , définie sur un ouvert W de $X \times [0, 1]$ contenant $(X \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1])$, à valeurs dans S^n . Posons

$$V = \{x \in X ; \{x\} \times [0, 1] \subset W\}.$$

En utilisant la compacité de $[0, 1]$ et le fait que W est ouvert, nous voyons que V est un ouvert de X qui contient A et qui est tel que $V \times [0, 1] \subset W$.

Le théorème d'Urysohn (appliqué au couple $(A, X - V)$ de parties fermées disjointes de X) montre qu'il existe une fonction continue $\chi : X \rightarrow [0, 1]$ prenant en tout point de A la valeur 1 et en tout point de $X - V$ la valeur 0. Posons alors, pour tous $x \in X$ et $t \in [0, 1]$,

$$\Psi(x, t) = \Phi(x, \chi(x)t).$$

Ceci définit bien l'application Ψ sur $X \times [0, 1]$, car pour tout $(x, t) \in X \times [0, 1]$, $(x, \chi(x)t)$ est élément de W , puisque si $x \in V$, pour tout $s \in [0, 1]$ nous avons $(x, s) \in W$, donc en particulier $(x, \varphi(x)t) \in W$; et si $x \notin V$, alors $\varphi(x) = 0$, de sorte que $(x, \varphi(x)t) = (x, 0) \in X \times \{0\} \subset W$. L'application Ψ est continue et à valeurs dans S^n ; c'est une homotopie de F_0 à l'application $F_1 : X \rightarrow S^n$, $F_1(x) = \Psi(x, 1)$, dont la restriction à A est f_1 . Nous avons prouvé que f_1 se prolonge en une application continue $F_1 : X \rightarrow S^n$ homotope à F_0 . \square

3.5. Corollaire. — Soit A une partie fermée non vide d'un espace affine réel \mathcal{E} de dimension finie quelconque. Étant donné un entier $n \geq 1$, une application continue de A dans la sphère S^n se prolonge en une application continue de \mathcal{E} dans S^n si et seulement si elle est homotope à une application constante.

Preuve : Soit $f : A \rightarrow S^n$ une application continue homotope à une application constante de A dans la sphère S^n . Les espaces \mathcal{E} et $\mathcal{E} \times [0, 1]$ étant normaux, nous pouvons appliquer le théorème de prolongement de Borsuk. L'application constante de A dans S^n se prolonge évidemment en une application constante définie sur \mathcal{E} entier; ce théorème montre alors que l'application f se prolonge elle aussi en une application continue de \mathcal{E} dans S^n .

Réciproquement, soit $f : A \rightarrow S^n$ une application continue qui se prolonge en une application continue $F : \mathcal{E} \rightarrow S^n$. Soit p un point particulier de \mathcal{E} . Posons, pour tout $x \in A$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$\varphi(x, t) = F(x + t(p - x)).$$

Ainsi, φ est une homotopie de f à l'application constante $x \mapsto F(p)$. \square

3.6. Définitions. — Soit A une partie non vide d'un plan \mathcal{E}^2 .

1. On dit que A sépare deux points x et y de $\mathcal{E}^2 - A$ si ces points appartiennent à deux composantes connexes distinctes de $\mathcal{E}^2 - A$.
2. On dit que A sépare \mathcal{E}^2 si $\mathcal{E}^2 - A$ n'est pas connexe.

3.7. Lemme (Eilenberg). — Soit X un espace métrique compact. Une application continue $f : X \rightarrow S^1$ est homotope à une application constante si et seulement si il existe une application continue $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in X$,

$$f(x) = \exp(i\varphi(x)).$$

Preuve : Remarquons que l'égalité $f(x) = \exp(i\varphi(x))$ a une signification géométrique très simple : $f(x)$ est un point du cercle trigonométrique S^1 , dont $\varphi(x)$ est l'angle polaire. Ce dernier peut toujours être défini modulo 2π . Le lemme d'Eilenberg équivaut à dire qu'on peut, de manière continue lorsque x parcourt le compact X , choisir une détermination de l'angle polaire de $f(x)$ (cette détermination étant alors considérée comme un élément de \mathbb{R}) si et seulement si f est homotope à une application constante.

Supposons qu'il existe $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in X$, $f(x) = \exp(i\varphi(x))$. Posons, pour tout $x \in X$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$g(x, t) = \exp(i(1-t)\varphi(x)).$$

Nous voyons que g est une homotopie de f à une application constante $x \mapsto \exp(0) = 1$.

La preuve de la partie réciproque utilise la remarque suivante. Soient $f_k : X \rightarrow S^1$ et $f_l : X \rightarrow S^1$ deux applications continues, telles que les points $f_k(x)$ et $f_l(x)$ ne soient jamais diamétralement opposés sur S^1 . Si l'une de ces applications (par exemple f_k) peut s'écrire sous la forme

$$f_k(x) = \exp(i\varphi_k(x)),$$

où $\varphi_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, l'autre application φ_l peut s'écrire elle aussi sous la même forme. En effet, puisque pour tout $x \in X$, les points $f_k(x)$ et $f_l(x)$ ne sont pas diamétralement opposés, il existe un élément unique $\psi(x)$ de l'intervalle ouvert $] -\pi, \pi[$ tel que

$$f_l(x) = \exp(i\psi(x))f_k(x).$$

L'application $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie est continue, de sorte que nous avons bien, pour tout $x \in X$,

$$f_l(x) = \exp(i\varphi_l(x)),$$

où $\varphi_l = \varphi_k + \psi$ est une application continue de X dans \mathbb{R} .

Supposons f homotope à une application constante, et soit $g : X \times [0, 1]$ une homotopie de f à une application constante. L'application g est continue et définie sur l'espace compact $X \times [0, 1]$; elle est donc uniformément continue. C'est pourquoi il existe un réel $\eta > 0$ tel que si t_k et t_l sont deux éléments de $[0, 1]$ vérifiant $|t_k - t_l| < \eta$, alors quel que soit $x \in X$, $g(x, t_k)$ et $g(x, t_l)$ ne sont pas diamétralement opposés sur S^1 .

Découpons l'intervalle $[0, 1]$ en petits morceaux de longueur inférieure à η , grâce à une suite finie de points

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1, \quad t_{i+1} - t_i < \eta \text{ pour } 1 \leq i \leq m-1.$$

L'application $x \mapsto f_m(x) = g(x, t_m) = g(x, 1)$ est constante, donc s'exprime sous la forme $f(x) = \exp(i\varphi_1(x))$, où $\varphi_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue (puisque constante). De proche en proche, nous voyons que pour tout $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, l'application $x \mapsto f_i(x) = g(x, t_i)$ peut s'exprimer sous la forme $f_i(x) = \exp(i\varphi_i(x))$, où $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue. \square

3.8. Critère d'Eilenberg. — Soient K une partie compacte non vide d'un plan \mathcal{E}^2 , x et y deux points distincts de $\mathcal{E}^2 - K$. Munissons \mathcal{E}^2 d'une structure euclidienne et posons, pour tout $z \in K$,

$$\beta_x(z) = \frac{z - x}{\|z - x\|}, \quad \beta_y(z) = \frac{z - y}{\|z - y\|}.$$

La partie K de \mathcal{E}^2 sépare les points x et y si et seulement si les applications β_x et β_y , définies sur K et à valeurs dans S^1 (identifié à l'ensemble des éléments de norme 1 du plan vectoriel euclidien E^2 associé à \mathcal{E}^2) ne sont pas homotopes.

Preuve : Supposons que K ne sépare pas x et y . Ces deux points appartiennent à une même composante connexe U de $\mathcal{E}^2 - K$. Comme $\mathcal{E}^2 - K$ est un ouvert de \mathcal{E}^2 , c'est un espace topologique localement connexe; chacune de ses composantes connexes est un ouvert de $\mathcal{E}^2 - K$ (voir [17], chapitre V, proposition 5.3), donc aussi de \mathcal{E}^2 , et par suite est connexe par arcs (voir [17], chapitre V, exercice V.3). C'est pourquoi il existe un arc paramétré continu $\chi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{E}^2 - K$ tel que $\chi(0) = x$ et $\chi(1) = y$. Posons, pour tous $z \in K$ et $t \in [0, 1]$,

$$g(z, t) = \frac{z - \chi(t)}{\|z - \chi(t)\|}.$$

L'application g est une homotopie de β_x à β_y .

Réciproquement, supposons que K sépare x et y . Le lemme 3.1 montre que $\mathcal{E}^2 - K$ a une et une seule composante connexe non bornée. Un au moins des deux points x et y appartient donc à une composante connexe bornée U de $\mathcal{E}^2 - K$. En échangeant si nécessaire x et y , nous pouvons supposer que $x \in U$, composante connexe bornée de $\mathcal{E}^2 - K$. La frontière de U ne rencontre pas U , car U est ouvert; elle ne rencontre pas non plus une autre composante connexe de $\mathcal{E}^2 - K$, car chacune de celles-ci est ouverte. Par suite, la frontière de U est contenue dans K , et nous voyons que

$$X = K \cup U = K \cup \bar{U}$$

est une partie fermée et bornée, donc compacte, de \mathcal{E}^2 .

Puisque y n'est élément ni de K , ni de U , nous pouvons poser, pour tout $z \in X$,

$$\beta_y(z) = \frac{z - y}{\|z - y\|}.$$

Nous avons ainsi prolongé à X l'application β_y , initialement définie sur la partie fermée K de X . Supposons les applications β_x et β_y homotopes. Puisque X et $X \times [0, 1]$ sont normaux et que β_y se prolonge en une application continue de X dans S^1 , le théorème de prolongement de Borsuk (3.4) montre que l'application β_x se prolonge elle aussi en une application continue de X dans S^1 , notée $\hat{\beta}_x$. Prolongeons encore $\hat{\beta}_x$ à \mathcal{E}^2 entier en posant

$$\hat{\beta}_x(z) = \begin{cases} \frac{z - x}{\|z - x\|} & \text{si } z \in \mathcal{E}^2 - U, \\ \hat{\beta}_x(z) & \text{si } z \in \bar{U}. \end{cases}$$

Ainsi définie sur \mathcal{E}^2 entier, $\hat{\beta}_x$ est continue, car sur la frontière de U , partie commune aux deux fermés \bar{U} et $\mathcal{E}^2 - U$, les deux définitions de $\hat{\beta}_x$ coïncident, la frontière de U étant contenue dans K . Soit alors R un réel strictement positif assez grand pour que le compact X de \mathcal{E}^2 soit contenu dans le disque fermé de \mathcal{E}^2 de centre x et de rayon R . Posons, pour tout élément z de ce disque,

$$h(z) = x + R\hat{\beta}_x(z).$$

L'application h applique le disque fermé de centre x et de rayon R dans sa frontière, et sa restriction à cette frontière est l'application identique. L'existence de cette application

contredit le corollaire VI.1.11 du théorème de Brouwer. En supposant β_x et β_y homotopes, nous arrivons à une contradiction. Nous avons ainsi prouvé que β_x et β_y ne sont pas homotopes. \square

3.9. Théorème (S. Janiszewski). — Soient A et B deux parties compactes non vides d'un plan \mathcal{E}^2 , x et y deux points distincts de $\mathcal{E}^2 - (A \cup B)$. On suppose que A ne sépare pas x et y , que B ne sépare pas x et y et que $A \cap B$ est connexe. Alors $A \cup B$ ne sépare pas x et y .

Preuve : Munissons le plan \mathcal{E}^2 d'une structure euclidienne et d'une orientation, ce qui nous permet d'identifier le cercle de rayon 1 centré sur l'origine dans le plan vectoriel E^2 associé au plan affine \mathcal{E}^2 au cercle trigonométrique. Pour tout $z \in A \cup B$, posons

$$\beta_x(z) = \frac{z - x}{\|z - x\|}, \quad \beta_y(z) = \frac{z - y}{\|z - y\|}.$$

Puisque $\beta_x(z)$ et $\beta_y(z)$ sont des complexes de module 1, nous pouvons poser

$$f(z) = \beta_x(z)(\beta_y(z))^{-1}.$$

Nous avons ainsi défini une application continue de $A \cup B$ dans S^1 . Notons f_A et f_B les restrictions de f , respectivement, à A et à B .

Puisque A ne sépare pas x et y , le critère d'Eilenberg (3.8) montre que les restrictions à A de β_x et de β_y sont homotopes. Soit $g : A \times [0, 1] \rightarrow S^1$ une homotopie de $\beta_x|_A$ à $\beta_y|_A$. Posons, pour tous $z \in A$, $t \in [0, 1]$,

$$h_A(z, t) = g(z, t)(\beta_y(z))^{-1}.$$

L'application h_A est une homotopie de f_A à une application constante. Le lemme 3.7 montre qu'il existe une application continue $\varphi_A : A \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $z \in A$,

$$f_A(z) = \exp(i\varphi_A(z)).$$

En remplaçant A par B , nous voyons qu'il existe aussi une application continue $\varphi_B : B \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $z \in B$,

$$f_B(z) = \exp(i\varphi_B(z)).$$

Mais f_A et f_B sont les restrictions, respectivement à A et à B , d'une même application continue $f : A \cup B \rightarrow S^1$. Par suite, pour tout $z \in A \cap B$, nous devons avoir

$$\varphi_A(z) - \varphi_B(z) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Comme $\varphi_A - \varphi_B$ est continue et que $A \cap B$ est connexe, $\varphi_A - \varphi_B$ est constant sur $A \cap B$. Soit $2\pi k$ sa valeur. Posons alors, pour tout $z \in A \cup B$,

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_A(z) & \text{si } z \in A, \\ \varphi_B(z) + 2\pi k & \text{si } z \in B. \end{cases}$$

Comme les deux définitions de φ coïncident sur $A \cap B$, nous avons bien défini ainsi une application continue φ de $A \cup B$ dans \mathbb{R} , qui vérifie, pour tout $z \in A \cup B$,

$$f(z) = \exp(i\varphi(z)).$$

Le lemme 3.7 montre alors que f est homotope à une application constante. Soit $h : A \cup B \times [0, 1] \rightarrow S^1$ une homotopie de f à l'application prenant la valeur constante $\exp(i\theta)$. Posons, pour tout $z \in A \cup B$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$g(z, t) = h(z, t) \exp(-it\theta)\beta_y(z).$$

L'application $g : A \cup B \times [0, 1] \rightarrow S^1$ est une homotopie de β_x à β_y . Le critère d'Eilenberg (3.8) montre alors que $A \cup B$ ne sépare pas x et y . \square

3.10. Lemme. — Soit C une courbe de Jordan dans un plan \mathcal{E}^2 . Tout point de C est adhérent à $\mathcal{E}^2 - C$.

Preuve : Munissons \mathcal{E}^2 d'une structure euclidienne. Soit $z \in C$. Soit un réel $r > 0$ assez petit pour que le disque ouvert D , de centre z et de rayon r , ne contienne pas C . Supposons que le disque D ne rencontre pas $\mathcal{E}^2 - C$; ce disque est alors contenu dans C (donc strictement contenu dans C puisque nous avons choisi son rayon assez petit pour qu'il ne recouvre pas C). Soit alors $\varphi : S^1 \rightarrow C$ une paramétrisation de C , et posons $s = \varphi^{-1}(z)$. Alors $\varphi^{-1}(D)$ est un voisinage ouvert connexe de s dans S^1 , non égal à S^1 entier. Puisque φ est un homéomorphisme de S sur C , nous avons

$$\varphi^{-1}(D - \{z\}) = \varphi^{-1}(D) - \{s\},$$

ce qui prouve que $\varphi^{-1}(D - \{z\})$ n'est pas connexe. Comme φ est un homéomorphisme, $D - \{z\}$ n'est pas connexe. Ceci est impossible (dans un plan, un disque privé de son centre est connexe). Nous avons prouvé par l'absurde que D rencontre $\mathcal{E}^2 - C$. Comme tout voisinage de z contient un disque tel que D , tout voisinage de z rencontre $\mathcal{E}^2 - C$. \square

3.11. Proposition. — Soit C une courbe de Jordan dans un plan \mathcal{E}^2 , et K une partie compacte de C non égale à C . Alors K ne sépare pas \mathcal{E}^2 .

Preuve : Soit $\varphi : S^1 \rightarrow C$ une paramétrisation de la courbe de Jordan C . Soit z_0 un point de $C - K$ et $s_0 \in S^1$ tel que $\varphi(s_0) = z_0$. En changeant si nécessaire l'origine des arcs sur le cercle trigonométrique S^1 , nous pouvons faire en sorte que s_0 soit le point de S^1 d'angle polaire π . Nous pouvons alors considérer la paramétrisation φ comme une application continue de $[-\pi, \pi]$ sur C , vérifiant $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = z_0$, et $\varphi(s) \neq \varphi(s')$ pour tous s et s' distincts éléments de $[-\pi, \pi]$ dont l'un au moins est distinct de π et de $-\pi$. Puisque $C - K$ est un ouvert de C , il existe un réel η vérifiant $0 < \eta < \pi$ tel que

$$K_1 = \varphi([-\eta, \eta]) \supset K.$$

Nous voyons que K_1 est une partie fermée et connexe de C contenant K , et que la restriction de φ à $[-\eta, \eta]$ est un homéomorphisme de cet intervalle fermé sur K_1 . Notons $\varphi^{-1} : K_1 \rightarrow [-\eta, \eta]$ son inverse.

Nous allons commencer par prouver que K_1 ne sépare pas \mathcal{E}^2 . Soient x et y deux points distincts de $\mathcal{E}^2 - K_1$. Avec les mêmes conventions et notations que dans l'énoncé du critère d'Eilenberg (3.8), posons, pour tout $z \in K_1$,

$$\beta_x(z) = \frac{z - x}{\|z - x\|}, \quad \beta_y(z) = \frac{z - y}{\|z - y\|}.$$

Pour tout $z \in K_1$ et tout $t \in [0, 1]$, posons

$$g_x(z, t) = \beta_x\left(\varphi\left((1 - t)\varphi^{-1}(z)\right)\right).$$

Nous voyons que g_x est une homotopie de β_x à une application constante. De même, nous montrons que β_y est homotope à une application constante. Il est alors facile de vérifier que les applications β_x et β_y , toutes deux homotopes à des applications constantes, sont homotopes entre elles. Le critère d'Eilenberg (3.8) montre que K_1 ne sépare pas x et y , donc ne sépare pas \mathcal{E}^2 , puisque x et y sont deux points quelconques de $\mathcal{E}^2 - K_1$.

Montrons maintenant que K ne sépare pas \mathcal{E}^2 . Puisque $K \subset K_1$, $\mathcal{E}^2 - K \supset \mathcal{E}^2 - K_1$ qui, comme nous venons de le voir, est connexe. Nous avons même

$$\mathcal{E}^2 - K = (\mathcal{E}^2 - K_1) \cup (K_1 - K).$$

D'après le lemme 3.10, tout point de C (donc tout point de $K_1 - K$) est adhérent à $\mathcal{E}^2 - C$, donc aussi à $\mathcal{E}^2 - K_1$. Ainsi, l'adhérence de $\mathcal{E}^2 - K_1$ contient $\mathcal{E}^2 - K$. Un résultat classique de topologie (voir [17], chapitre V, paragraphe 2.1) permet alors d'affirmer que $\mathcal{E}^2 - K$ est connexe. \square

3.12. Corollaire. — Une courbe de Jordan C dans un plan \mathcal{E}^2 est la frontière de chaque composante connexe de $\mathcal{E}^2 - C$.

Preuve : Soit U une composante connexe de $\mathcal{E}^2 - C$. En raisonnant comme dans la preuve du critère d'Eilenberg 3.8, nous voyons que U est ouvert et que sa frontière, notée $\text{Fr}(U)$, est contenue dans C . Il reste à prouver qu'inversement, tout point de C est point frontière de U , c'est-à-dire (puisque ce point n'est pas élément de U) est adhérent à U . Supposons donc qu'il existe un point $z \in C$ non adhérent à U . Le lemme 3.10 montre que z est adhérent à $\mathcal{E}^2 - C$; comme il n'est pas adhérent à U , il est adhérent à $V = (\mathcal{E}^2 - C) - U$. Nous remarquons que V est un ouvert (c'est la réunion des composantes connexes de $\mathcal{E}^2 - C$ autres que U), non vide (puisque le point z lui est adhérent) vérifiant $V \cap \bar{U} = \emptyset$ (car la frontière de U est contenue dans C). Nous pouvons écrire

$$\mathcal{E}^2 - \text{Fr}(U) = U \cup (\mathcal{E}^2 - \bar{U}).$$

Les deux termes de la réunion figurant au second membre de cette égalité, U et $\mathcal{E}^2 - \bar{U}$, sont des ouverts disjoints non vides (le premier, U , est non vide par hypothèse; le second, $\mathcal{E}^2 - \bar{U}$, est non vide car il contient V , qui est non vide). Cette égalité prouve que $\mathcal{E}^2 - \text{Fr}(U)$ est un ouvert non connexe de \mathcal{E}^2 , c'est-à-dire que $\text{Fr}(U)$ sépare \mathcal{E}^2 . Comme $\text{Fr}(U)$ est une partie fermée (donc compacte) de C non égale à C , ce résultat est en contradiction avec la proposition 3.11. Ainsi, en supposant que $\text{Fr}(U)$ n'était pas égal à C , nous sommes arrivés à une contradiction. Nous concluons que $\text{Fr}(U) = C$. \square

3.13. Théorème de Jordan. — Soit C une courbe de Jordan dans un plan \mathcal{E}^2 . Le complémentaire $\mathcal{E}^2 - C$ de C dans \mathcal{E}^2 a exactement deux composantes connexes, toutes deux ouvertes, dont une seule est non bornée. Chacune de ces composantes connexes a pour frontière la courbe C . La composante connexe non bornée de $\mathcal{E}^2 - C$, notée $\text{Ext}(C)$ est appelée partie de \mathcal{E}^2 extérieure à la courbe C , ou (avec un léger abus de langage) extérieur de C . La composante connexe bornée de $\mathcal{E}^2 - C$, notée $\text{Int}(C)$, est appelée partie de \mathcal{E}^2 intérieure à la courbe C , ou intérieur de C .

Preuve : Le lemme 3.1 nous a montré que $\mathcal{E}^2 - C$ a une et une seule composante connexe non bornée. D'autre part, $\mathcal{E}^2 - C$, qui est un ouvert de \mathcal{E}^2 , est localement connexe; chacune de ses composantes connexes est ouverte dans $\mathcal{E}^2 - C$, donc aussi dans \mathcal{E}^2 (voir [17], chapitre V, proposition 5.3). Le corollaire 3.12 nous a montré que la frontière de chaque composante connexe de $\mathcal{E}^2 - C$ est C . Il nous reste à prouver que $\mathcal{E}^2 - C$ a une et une seule composante connexe bornée ou, ce qui revient au même, à montrer que $\mathcal{E}^2 - C$ n'est pas connexe et n'a pas plus de deux composantes connexes.

Nous allons d'abord traiter le cas où C contient un segment de droite. Grâce à un isomorphisme affine, nous identifions \mathcal{E}^2 au plan euclidien \mathbb{R}^2 , de manière telle que ce segment de droite s'identifie à un intervalle fermé $[a, b]$ de l'axe des abscisses, ayant pour milieu l'origine 0. Nous notons $]a, b[$ ce même segment de droite privé de ses deux extrémités. Le complémentaire de $]a, b[$ dans C est un fermé qui ne contient pas l'origine 0. La distance de 0 à ce fermé est donc strictement positive, et il existe un réel r vérifiant

$$0 < r < d(m, C -]a, b[).$$

Dans le plan \mathbb{R}^2 , désormais identifié à \mathcal{E}^2 , soient D le disque ouvert de centre 0 et de rayon r , S son bord, c'est-à-dire le cercle de centre 0 et de rayon r , c et d les points d'intersection de S avec le segment de droite $[a, b]$ (voir figure VII.1 (a)).

Posons

$$D^+ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 < r^2, y > 0 \},$$

$$D^- = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 < r^2, y < 0 \}.$$

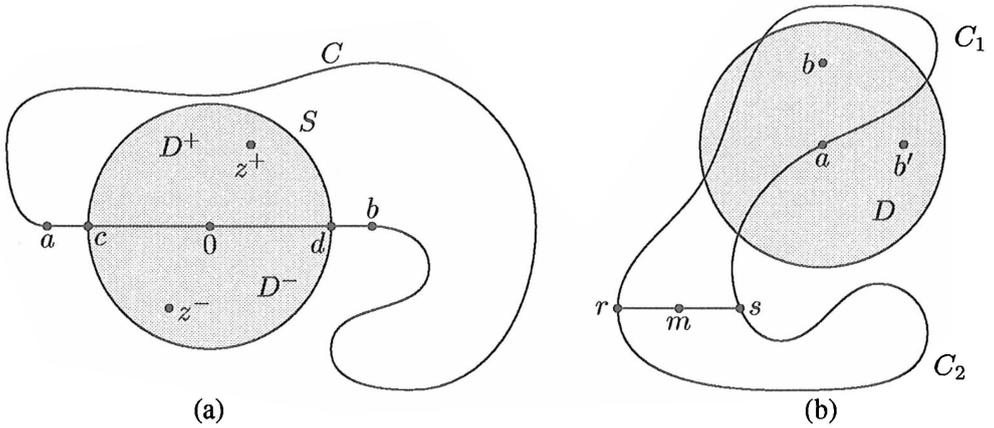


Figure VII.1. Illustration de la preuve du théorème de Jordan

Le corollaire 3.12 montre que le disque D rencontre chaque composante connexe de $\mathbb{R}^2 - C$. Mais $D = D^+ \cup D^- \cup]c, d[$, et le segment de droite $]c, d[$, étant contenu dans C , ne rencontre aucune de ces composantes connexes. Donc chaque composante connexe de $\mathbb{R}^2 - C$ rencontre soit D^+ , soit D^- . Si deux composantes connexes de $\mathbb{R}^2 - C$ rencontrent D^+ , toutes deux contiennent D^+ , car D^+ est connexe et ne rencontre pas C ; leur réunion est connexe (voir [17], chapitre V, exercice V.1), ce qui prouve que ces deux composantes connexes sont confondues. Le même raisonnement s'appliquant à D^- , nous voyons que $\mathbb{R}^2 - C$ a au plus deux composantes connexes, une contenant D^+ et l'autre contenant D^- .

D'autre part, le complémentaire de $S \cup]c, d[$ dans \mathbb{R}^2 est réunion des trois ouverts connexes disjoints D^+ , D^- et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > r^2\}$. Par suite, si z^+ est un point de D^+ et z^- un point de D^- , $S \cup]c, d[$ sépare ces deux points. Comme $S \cup C$ contient $S \cup]c, d[$ et ne contient ni z^+ , ni z^- , $S \cup C$ sépare z^+ et z^- . La réunion $S \cup (C -]c, d[)$ du cercle S et du complémentaire dans C de l'intervalle ouvert $]c, d[$ est compacte, et ne sépare pas z^+ et z^- , car le disque D est convexe, donc connexe, contient z^+ et z^- , et ne rencontre pas $S \cup (C -]c, d[)$. L'intersection de C et de $S \cup (C -]c, d[)$ est l'arc de courbe connexe $C -]c, d[$. Si C ne séparait pas z^+ et z^- , le théorème de Janiszewski (3.9) prouverait que $S \cup (C -]c, d[) \cup C = S \cup C$ ne sépare pas z^+ et z^- . Or nous venons de prouver le contraire; nous avons donc montré que C sépare z^+ et z^- . Par suite, $\mathbb{R}^2 - C$ a au moins deux composantes connexes distinctes. Comme nous avons prouvé que le nombre de ses composantes connexes était au plus 2, nous voyons que ce nombre est exactement 2.

Supposons maintenant que C ne contient aucun segment de droite. Soient p et q deux points distincts de C et $[p, q]$ le segment de droite qui les joint. Par hypothèse, $[p, q]$ n'est pas contenu dans C , donc il existe un point m de $[p, q]$ appartenant à $\mathcal{E}^2 - C$. La composante connexe de $(\mathcal{E}^2 - C) \cap [p, q]$ qui contient m est un segment de droite ouvert (c'est-à-dire ne contenant pas ses extrémités), que nous notons $]r, s[$. Ses extrémités r et s sont deux points distincts de C . Nous avons ainsi prouvé qu'il existe deux points distincts r et s de C , tels que le segment de droite qui les joint ne rencontre la courbe C en aucun point autre que r et s . Le complémentaire dans C de l'ensemble à deux éléments $\{r, s\}$ a deux composantes connexes, les deux arcs de courbe ouverts (c'est-à-dire ne contenant pas leurs extrémités) portés par la courbe C , ayant pour extrémités r et s . Notons C_1 et C_2 ces deux arcs (voir la figure VII.1 (b), sur laquelle nous avons représenté C_1, C_2 , le segment de droite $]r, s[$ et le point m , mais pas les points p et q , dont nous n'avons plus besoin, afin de ne pas embrouiller le dessin).

Soit a un point de C_1 . Munissons \mathcal{E}^2 d'une structure euclidienne. Le point a n'étant pas

élément du fermé $C_2 \cup [r, s]$, sa distance à ce fermé est strictement positive, et il existe un réel r vérifiant

$$0 < r < d(a, C_2 \cup [r, s]).$$

Soit D le disque de centre a et de rayon r . Nous remarquons que $C_1 \cup [r, s]$ et $C_2 \cup [r, s]$ sont deux courbes de Jordan, qui toutes deux contiennent le segment de droite $[r, s]$. Nous avons prouvé ci-dessus que le complémentaire de chacune d'elles dans le plan \mathcal{E}^2 a exactement deux composantes connexes. Soient U et U' les deux composantes connexes de $\mathcal{E}^2 - (C_1 \cup [r, s])$. Puisque D ne rencontre pas $C_2 \cup [r, s]$, nous avons $D - C = (D \cap U) \cup (D \cap U')$, les deux termes $D \cap U$ de $D \cap U'$ de cette réunion étant disjoints et, d'après le corollaire 3.12, tous deux non vides. Deux points distincts de $D \cap U$ ne sont pas séparés par $C_1 \cup [r, s]$, puisqu'ils appartiennent tous deux à une même composante connexe U de $\mathcal{E}^2 - (C_1 \cup [r, s])$. Ils ne sont pas non plus séparés par $C_2 \cup [r, s]$, puisqu'ils sont tous deux contenus dans le connexe D , qui ne rencontre pas $C_2 \cup [r, s]$. Comme $(C_1 \cup [r, s]) \cap (C_2 \cup [r, s]) = [r, s]$ est connexe, le théorème de Janiszewski montre que ces deux points ne sont pas séparés par $(C_1 \cup [r, s]) \cup (C_2 \cup [r, s])$, donc pas non plus par C , puisque $C \subset (C_1 \cup [r, s]) \cup (C_2 \cup [r, s])$. Nous avons donc prouvé que $D \cap U$ est contenu dans une composante connexe de $\mathcal{E}^2 - C$. De même, $D \cap U'$ est contenu dans une composante connexe de $\mathcal{E}^2 - C$. Mais le corollaire 3.12 montre que chaque composante connexe de $\mathcal{E}^2 - C$ rencontre D , en un point qui appartient soit à $D \cap U$, soit à $D \cap U'$. Nous voyons ainsi que $\mathcal{E}^2 - C$ a au plus deux composantes connexes, une qui contient $D \cap U$, l'autre qui contient $D \cap U'$.

D'autre part, nous venons de voir que $D \cap U$ et $D \cap U'$ sont tous deux non vides. Soit $b \in D \cap U$, $b' \in D \cap U'$. Le compact $C_2 \cup [r, s]$ ne sépare pas b et b' , car ces deux points sont contenus dans le disque connexe D qui ne rencontre pas $C_2 \cup [r, s]$. L'intersection de C et de $C_2 \cup [r, s]$ est l'arc de courbe fermé $C_2 \cup \{r, s\}$, réunion de l'arc C_2 et de ses deux extrémités, les points r et s , qui est connexe. La courbe C sépare b et b' . En effet, si ce n'était pas le cas, le théorème de Janiszewski (3.9) montrerait que $C \cup (C_2 \cup [r, s])$ ne sépare pas non plus b et b' . Comme $C_1 \cup [r, s] \subset C \cup (C_2 \cup [r, s])$, $C_1 \cup [r, s]$ ne séparerait pas b et b' , ce qui contredirait le fait que $b \in U$, $b' \in U'$. Nous avons ainsi prouvé que le nombre de composantes connexes de $\mathcal{E}^2 - C$ est au moins 2, donc (puisque nous avons vu aussi que ce nombre est au plus 2) est exactement 2. \square

3.14. Définitions. — Soit U un ouvert d'un plan \mathcal{E}^2 .

1. On dit que U est *simplement connexe* si toute application continue de S^1 dans U est homotope à une application constante.

2. On munit \mathcal{E}^2 d'une structure euclidienne. On dit que la frontière $\text{Fr}(U)$ de U vérifie la *propriété de Schoenflies* si, pour tout point z de cette frontière et tout réel $R > 0$, il existe un réel $r > 0$ ayant la propriété suivante : soient z_1 et z_2 deux points de l'intersection de U et du disque ouvert de centre z et de rayon r ; alors il existe un arc de courbe continu qui joint les points z_1 et z_2 , et qui est contenu dans l'intersection de U et du disque ouvert de centre z et de rayon R .

3.15. Exemple. — Afin de permettre au lecteur de mieux comprendre la signification de la propriété de Schoenflies, nous donnons un exemple d'ouvert simplement connexe et borné du plan complexe dont la frontière ne vérifie pas cette propriété. Posons

$$U = \{ z \in \mathbb{C} ; |z| < 1 \text{ et } z \notin [0, 1] \}.$$

Nous avons noté $[0, 1]$ le segment de droite fermé, porté par l'axe réel, d'extrémités 0 et 1. La frontière de U est la réunion de ce segment de droite et du cercle trigonométrique

S^1 . Prenons pour point z le point 1 et pour R un réel strictement compris entre 0 et 1, par exemple $1/2$. Pour tout réel $r > 0$, si petit soit-il, il existe des points z_1 et z_2 appartenant à l'intersection de U et du disque ouvert de centre 1 et de rayon r . Nous pouvons même imposer à z_1 d'avoir une partie imaginaire positive et à z_2 d'avoir une partie imaginaire négative. Alors tout arc de courbe continu contenu dans U joignant z_1 à z_2 contourne le segment de droite $[0, 1]$ en passant à gauche de l'origine 0, donc ne peut être contenu dans le disque de centre 1 et de rayon $1/2$.

3.16. Proposition. — Soit C une courbe de Jordan dans un plan \mathcal{E}^2 . L'intérieur $\text{Int}(C)$ de C est un ouvert borné et connexe de \mathcal{E}^2 dont la frontière C vérifie la propriété de Schoenflies.

Preuve : Nous savons déjà (théorème de Jordan 3.13) que $\text{Int}(C)$ est un ouvert borné et connexe de \mathcal{E}^2 dont la frontière est C . Munissons \mathcal{E}^2 d'une structure euclidienne. Soit z un point de C et R un réel strictement positif. Nous pouvons, en diminuant si nécessaire la valeur de R , faire en sorte que la courbe C ne soit pas entièrement contenue dans le disque fermé de centre z et de rayon R . Soit $\varphi : S^1 \rightarrow C$ une paramétrisation de C . En modifiant si nécessaire l'origine des arcs nous pouvons faire en sorte que $\varphi(1) = z$. Posons

$$s_1 = \inf \{ s \in]-\infty, 0[; \forall t \in [s, 0], \|\varphi(\exp(it)) - z\| < R \},$$

$$s_2 = \sup \{ s \in]0, +\infty[; \forall t \in [0, s], \|\varphi(\exp(it)) - z\| < R \}.$$

Les points $p = \varphi(\exp(is_1))$ et $q = \varphi(\exp(is_2))$ appartiennent à l'intersection de la courbe C et du cercle de centre z et de rayon R . Posons

$$C_1 = \{ \varphi(\exp(is)) ; s_1 < s < s_2 \}, \quad C_2 = C - \overline{C_1}.$$

Nous voyons que C_1 et C_2 sont les deux arcs ouverts (c'est-à-dire ne contenant pas leurs extrémités) de la courbe C ayant pour extrémités les points p et q , C_1 étant celui de ces deux arcs qui contient le point z . L'adhérence de C_2 est $\overline{C_2} = C_2 \cup \{p, q\}$. C'est un fermé qui ne contient pas z . Il existe donc un réel r vérifiant

$$0 < r < d(z, \overline{C_2}).$$

L'arc C_1 est contenu dans le disque ouvert de centre z et de rayon R , et l'arc C_2 est extérieur au disque de centre z et de rayon r (voir figure VII.2).

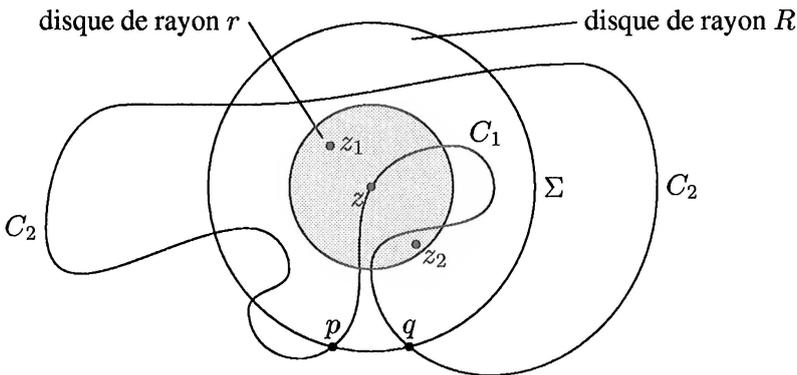


Figure VII.2. Illustration de la preuve de la proposition 3.16

Soient z_1 et z_2 deux points distincts de l'intersection de $\text{Int}(C)$ avec le disque ouvert de centre z et de rayon r . Soit Σ le cercle de centre z et de rayon R . Nous allons d'abord

montrer que z_1 et z_2 appartiennent à la même composante connexe bornée de $\mathcal{E}^2 - (\Sigma \cup C)$. Le compact $\Sigma \cup C_2$ ne sépare pas z_1 et z_2 , car ce compact ne rencontre pas le disque de centre z et de rayon r , qui est connexe et contient les points z_1 et z_2 . Par hypothèse, la courbe C , qui est compacte, ne sépare pas z_1 et z_2 . L'intersection $(\Sigma \cup C_2) \cap C$ est l'adhérence $\overline{C_2}$ de C_2 , qui est connexe. Le théorème de Janiszewski (3.9) montre alors que $(\Sigma \cup C_2) \cup C$ ne sépare pas z_1 et z_2 . Puisque C_2 est contenu dans C , $(\Sigma \cup C_2) \cup C = \Sigma \cup C$. Nous avons prouvé que $\Sigma \cup C$ ne sépare pas z_1 et z_2 .

Puisque $\Sigma \cup C \supset \Sigma$, la composante connexe de $\mathcal{E}^2 - (\Sigma \cup C)$ qui contient les points z_1 et z_2 est contenue dans la composante connexe de $\mathcal{E}^2 - \Sigma$ qui contient ces deux points, c'est-à-dire dans le disque ouvert de centre z et de rayon R .

La composante connexe de $\mathcal{E}^2 - (\Sigma \cup C)$ qui contient z_1 et z_2 est un ouvert connexe de \mathcal{E}^2 , donc est connexe par arcs (voir [17], chapitre V, exercice V.3) et contenue dans le disque ouvert de centre z et de rayon R . C'est pourquoi il existe un arc de courbe continu joignant z_1 à z_2 contenu dans l'intersection de $\text{Int } C$ et du disque ouvert de centre z et de rayon R . \square

Les définitions et lemmes qui suivent vont nous permettre de prouver que l'intérieur $\text{Int}(C)$ d'une courbe de Jordan C est simplement connexe.

3.17. Définitions. — Soient F , F_1 et F_2 des parties fermées non vides d'un plan \mathcal{E}^2 .

1. On suppose $F_1 \supset F_2$. On dit que F_2 est un rétracte par déformation de F_1 s'il existe une application continue $g : F_1 \times [0, 1] \rightarrow F_1$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) pour tout $x \in F_1$, $g(x, 0) = x$;
- (ii) pour tout $y \in F_2$ et tout $t \in [0, 1]$, $g(y, t) = y$;
- (iii) pour tout $x \in F_1$, $g(x, 1) \in F_2$.

Une application g ayant ces propriétés est appelée rétraction par déformation de F_1 sur F_2 .

2. On dit que F est contractible s'il existe un point a de F tel que le singleton $\{a\}$ soit un rétracte par déformation de F .

3.18. Lemme. — Soient F_1 , F_2 et F_3 trois parties fermées non vides d'un plan \mathcal{E}^2 telles que $F_1 \supset F_2 \supset F_3$. On suppose que F_2 est un rétracte par déformation de F_1 et que F_3 est un rétracte par déformation de F_2 . Alors F_3 est un rétracte par déformation de F_1 .

Preuve : Soient $g : F_1 \times [0, 1] \rightarrow F_1$ une rétraction par déformation de F_1 sur F_2 et $h : F_2 \times [0, 1] \rightarrow F_2$ une rétraction par déformation de F_2 sur F_3 . Posons, pour tout $x \in F_1$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$k(x, t) = \begin{cases} g(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ h(g(x, 1), 2t - 1) & \text{si } 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

L'application $k : F_1 \times [0, 1] \rightarrow F_1$ ainsi définie est continue. Il est facile de vérifier que c'est une rétraction par déformation de F_1 sur F_3 . \square

3.19. Lemme. — Soit X un espace topologique, U un ouvert d'un plan \mathcal{E}^2 et $f : X \rightarrow U$ une application continue. Si $f(X)$ est contenu dans une partie F , fermée et contractible, de l'ouvert U , l'application f est homotope (dans U) à une application constante.

Preuve : Soit $g : F \times [0, 1] \rightarrow F$ une rétraction par déformation de F sur un singleton $\{a\}$, dont l'unique élément est un point a de F . Posons, pour tout $x \in X$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$h(x, t) = g(f(x), t).$$

L'application $h : X \times [0, 1] \rightarrow U$ ainsi définie est une homotopie de f à l'application constante $x \mapsto a$. \square

3.20. Lemme. — Dans le plan \mathbb{R}^2 , soit F le carré

$$F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \}.$$

Chacune des parties fermées suivantes du carré F est un rétracte par déformation de F :

(i) un de ses côtés, par exemple

$$F_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq 1, \quad y = 0 \} ;$$

(ii) la réunion de deux de ses côtés adjacents, par exemple

$$F_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq 1, \quad y = 0 \} \\ \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \} ;$$

(iii) la réunion de trois de ses côtés, par exemple

$$F_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq 1, \quad y = 0 \} \\ \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \} \\ \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \} ;$$

(iv) le singleton formé par un de ses points, par exemple son centre :

$$F_4 = \{ (1/2, 1/2) \}.$$

Preuve : Pour construire une rétraction par déformation du carré F sur une de ses parties fermées F_i (avec $1 \leq i \leq 4$), on utilise une application continue et surjective $f_i : F \rightarrow F_i$, dont la restriction à F_i est l'application identique, puis on pose, pour tout point $z \in F$ et tout $t \in [0, 1]$:

$$g_i(z, t) = (1 - t)z + t f_i(z).$$

Pour application $f_1 : F \rightarrow F_1$, on peut utiliser la projection parallèlement à l'axe des ordonnées, $(x, y) \mapsto (x, 0)$. Pour application $f_4 : F \rightarrow F_4$, on prend l'application constante $(x, y) \mapsto (1/2, 1/2)$. Pour application $f_2 : F \rightarrow F_2$, on peut prendre, par exemple, la projection parallèlement à la première bissectrice, et pour application $f_3 : F \rightarrow F_3$, la projection de centre $(1/2, 2)$. \square

3.21. Lemme. — Dans le plan \mathbb{R}^2 , soit D une courbe de Jordan formée d'un nombre fini de segments de droite parallèles soit à l'axe des abscisses, soit à l'axe des ordonnées, tous de longueur 1, mis bout à bout. L'adhérence F de l'intérieur de cette courbe est une partie fermée contractible de \mathbb{R}^2 .

Preuve : En effectuant si nécessaire une translation, nous pouvons supposer que les segments de droite dont la courbe D est la réunion sont définis par les équations et inéquations :

- $k \leq x \leq k + 1$ et $y = l$, avec k et $l \in \mathbb{Z}$, si le segment considéré est parallèle à l'axe des abscisses,
- $x = k$ et $l \leq y \leq l + 1$, avec k et $l \in \mathbb{Z}$, si le segment considéré est parallèle à l'axe des ordonnées.

L'adhérence $F = D \cup \text{Int}(D)$ de l'intérieur de la courbe de Jordan D est réunion d'une famille finie, notée \mathcal{C} , de carrés de la forme

$$\Delta_{k,l} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; k \leq x \leq k + 1, \quad l \leq y \leq l + 1 \}$$

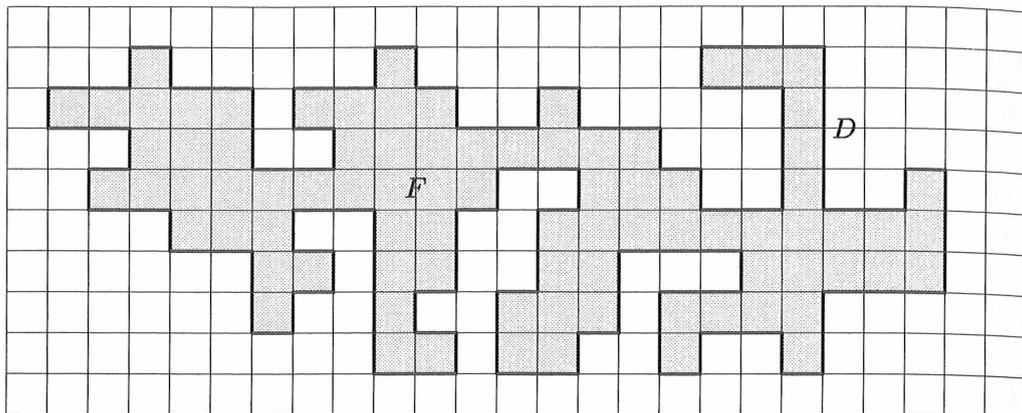


Figure VII.3. Un exemple de compact F , en gris, et de sa frontière D , en traits forts

avec k et $l \in \mathbb{Z}$. La figure VII.3 indique schématiquement, sur un exemple, l'allure de F et de sa frontière D .

Si la famille \mathcal{C} a un seul élément, F est un carré de la forme $\Delta_{k,l}$. Le lemme 3.20 montre alors que F est contractible, et la démonstration est terminée.

Nous supposons dans la suite que \mathcal{C} a plus d'un élément. Nous allons prouver qu'il existe un élément Δ_1 de \mathcal{C} tel que la réunion de la famille \mathcal{C} privée de cet élément soit un fermé F_1 ayant les propriétés suivantes :

- la frontière D_1 de F_1 est une courbe de Jordan formée par des segments de droite de longueur 1 mis bout à bout, parallèles à un des axes de coordonnées, dont les extrémités sont des points de coordonnées entières;
- le fermé F_1 est la réunion de la courbe de Jordan D_1 et de son intérieur;
- le fermé F_1 est contenu dans F et est un rétracte par déformation de F .

Une fois ce résultat acquis, la fin de la preuve du lemme 3.21 est facile. En effet, si F_1 se réduit à un seul carré de la forme $\Delta_{k,l}$, le lemme 3.20 montre qu'il est contractible, et le lemme 3.18 montre que F est contractible. Dans le cas contraire, il suffit de recommencer toute la construction effectuée précédemment en remplaçant F par F_1 afin de construire F_2 , puis par F_2 afin de construire F_3 , et ainsi de suite. Après un nombre fini d'étapes (égal au nombre n d'éléments de \mathcal{C} diminué d'une unité) nous aurons construit une famille de fermés

$$F = F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_{n-1},$$

chacun des F_i (avec $1 \leq i \leq n-1$) étant un rétracte par déformation de F_{i-1} , et F_{n-1} étant un carré de la forme $\Delta_{k,l}$, contractible sur son centre d'après le lemme 3.20. Une application répétée du lemme 3.18 montre que F est contractible.

Il nous reste donc seulement à prouver l'existence d'un élément particulier Δ_1 de \mathcal{C} ayant les propriétés indiquées. Cette preuve se décompose en trois parties.

a) Première partie : existence de Δ_1 . — Soit n le nombre d'éléments de \mathcal{C} . Nous avons déjà réglé le cas où $n = 1$; nous supposons donc $n \geq 2$. Soit $\Delta_n = \Delta_{k_n, l_n}$ un élément particulier de \mathcal{C} . Nous allons affecter à chaque élément $\Delta_{k,l}$ de \mathcal{C} un nombre entier $p(\Delta_{k,l}) \geq 0$. Pour cela, nous remarquons que les centres des carrés Δ_n et $\Delta_{k,l}$ peuvent être joints, en général de plusieurs façons, par un chemin continu contenu dans F , formé par des segments de droite de longueur 1 mis bout à bout, ces segments ayant pour extrémités les centres de deux carrés adjacents (c'est-à-dire ayant un côté commun). Nous noterons $\mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_{k,l})$ l'ensemble de ces chemins. La figure VII.4 présente un exemple de

chemin de ce type. Remarquons que la longueur d'un chemin élément de $\mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_{k,l})$ est un entier de même parité que $k_n - k + l_n - l$. Le nombre $p(\Delta_{k,l})$ est le plus petit entier q tel qu'il existe un chemin élément de $\mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_{k,l})$, de longueur q . Ce nombre est donc, lui aussi, de même parité que $k_n - k + l_n - l$.

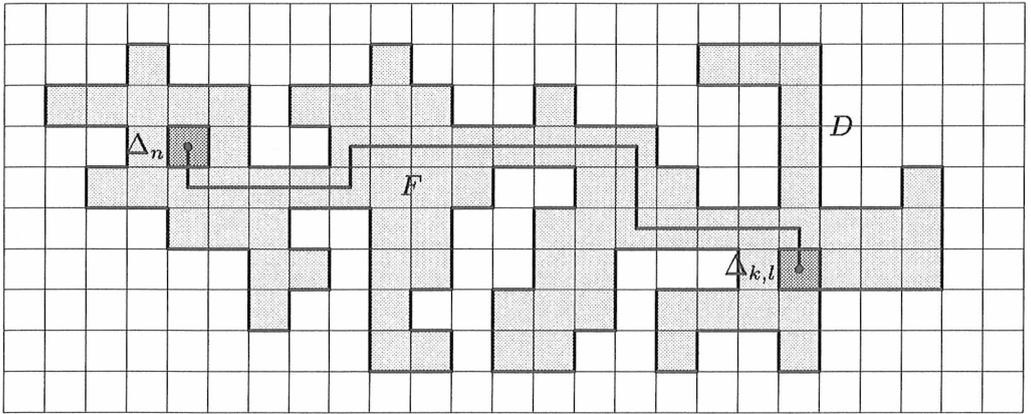


Figure VII.4. Un exemple de chemin élément de $\mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_{k,l})$

Il existe un élément $\Delta_1 = \Delta_{k_1,l_1}$ de \mathcal{C} (pas nécessairement unique) tel que $p(\Delta_1)$ soit le plus grand possible. Nous avons donc

$$p(\Delta_{k_1,l_1}) = \sup \{ p(\Delta_{k,l}) ; \Delta_{k,l} \in \mathcal{C} \}. \quad (*)$$

b) Deuxième partie : Δ_1 a deux côtés adjacents éléments de D . — Nous notons s_1, s_2, s_3 et s_4 les sommets du carré Δ_1 , $[s_1, s_2], [s_2, s_3], [s_3, s_4]$ et $[s_4, s_1]$ ses côtés. Parmi les carrés de la forme $\Delta_{k,l}$, il en existe exactement quatre qui ont un côté en commun avec Δ_1 ; nous les notons $\Delta_g, \Delta_h, \Delta_d$ et Δ_b (les indices g, h, d et b signifiant gauche, haut, droit et bas, respectivement, voir figure VII.5).

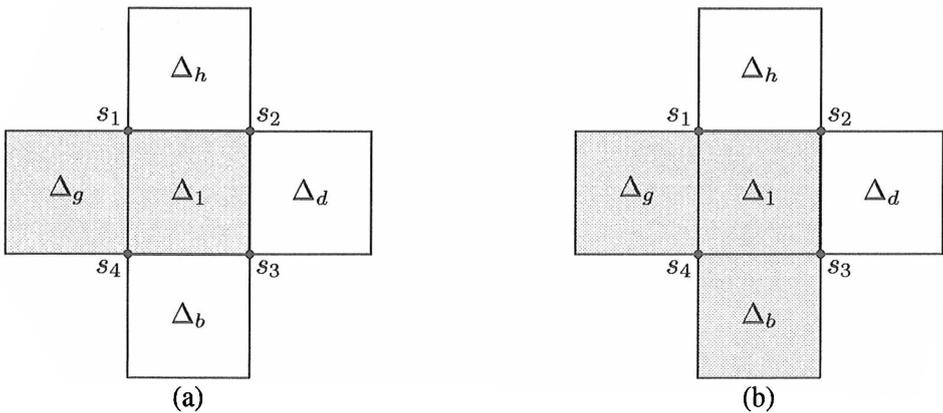


Figure VII.5. Le carré Δ_1 et ses voisins

Supposons qu'aucun des deux côtés opposés $[s_2, s_3]$ et $[s_4, s_1]$ du carré Δ_1 ne soit contenu dans la courbe D . Nous allons montrer que cette hypothèse conduit à une contradiction. Nous aurons ainsi prouvé qu'un au moins des côtés $[s_2, s_3]$ et $[s_4, s_1]$ est contenu dans la

courbe D . Le même résultat s'appliquant au couple de côtés opposés $[s_1, s_2]$ et $[s_3, s_4]$, nous aurons prouvé que deux côtés adjacents (c'est-à-dire ayant un sommet en commun) au moins du carré Δ_1 sont contenus dans D .

Puisque $[s_2, s_3]$ et $[s_4, s_1]$ ne sont pas contenus dans la frontière D de F , les carrés Δ_d et Δ_g sont contenus dans F , c'est-à-dire sont éléments de \mathcal{C} . Il est alors facile de voir que

$$p(\Delta_g) = p(\Delta_d) = p(\Delta_1) - 1. \quad (**)$$

En effet, l'inégalité (*) montre que $p(\Delta_g)$ et $p(\Delta_d)$ sont inférieurs ou égaux à $p(\Delta_1)$. Comme d'autre part les entiers $p(\Delta_g)$ et $p(\Delta_d)$ sont de parité opposée à celle de $p(\Delta_1)$, ils sont nécessairement inférieurs ou égaux à $p(\Delta_1) - 1$. Si l'un d'eux était strictement inférieur à $p(\Delta_1) - 1$, il existerait un chemin, élément de $\mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_1)$, de longueur strictement inférieure à $p(\Delta_1)$, ce qui contredirait la définition de $p(\Delta_1)$. La double égalité (**) ci-dessus est donc prouvée. Par suite, il existe un chemin Γ_g , élément de $\mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_g)$, et un chemin Γ_d , élément de $\mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_d)$, tous deux de longueur $p(\Delta_1) - 1$, joignant le centre de Δ_n , respectivement, au centre de Δ_g et au centre de Δ_d . Ces deux chemins ne rencontrent le segment de droite qui joint les centres de Δ_g et de Δ_d qu'en leur extrémité, car le cas contraire serait en contradiction avec l'inégalité (*). Les deux chemins Γ_g et Γ_d peuvent se rencontrer en d'autres points que le centre de Δ_n ; si c'est le cas, la longueur entre deux points de rencontre consécutifs de ces deux chemins est nécessairement la même sur ces deux chemins, puisque tous deux sont, parmi les chemins éléments de $\mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_g)$ et $\mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_d)$, les plus courts possibles. Soit c le dernier point de rencontre de ces deux chemins, en partant du centre de Δ_n . Soit Γ'_g et Γ'_d les chemins obtenus en ne gardant de Γ_g que la partie qui va de c au centre de Δ_g , et de Γ_d que la partie qui va de c au centre de Δ_d . Ces deux chemins n'ont en commun que le point c , et ils ne rencontrent le segment joignant les centres de Δ_g et de Δ_d qu'en leur extrémité autre que c . La réunion D' de ces deux chemins et du segment de droite joignant les centres de Δ_g et de Δ_d est donc une courbe de Jordan, contenue dans l'intérieur de D . La droite passant par le centre du carré Δ_1 parallèle à l'axe des ordonnées coupe transversalement cette courbe au centre de Δ_1 , donc entre, par ce point, à l'intérieur de D' . Comme l'intérieur de D' est borné, cette droite ressort nécessairement de l'intérieur de D' par un autre point, que nous notons d , situé sur D' , et tel que le segment de droite ouvert (c'est-à-dire ne contenant pas ses extrémités) joignant d au centre de Δ_1 soit contenu dans l'intérieur de D' , donc *a fortiori* dans l'intérieur de D . Le chemin formé par la réunion de la partie de Γ_d allant du centre de Δ_n au point d et du segment de droite fermé joignant le point d au centre de Δ_1 est élément de $\mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_1)$. Sa longueur est strictement inférieure à $p(\Delta_n)$ (et même à $p(\Delta_n) - 1$). Ceci étant en contradiction avec la définition de $p(\Delta_1)$, nous avons prouvé qu'un des côtés $[s_2, s_3]$ et $[s_4, s_1]$ au moins est contenu dans D .

c) *Troisième partie* : D_1 est une courbe de Jordan. — Posons

$$C_1 = C - \{ \Delta_1 \}, \quad F_1 = \bigcup_{\Delta_{k,l} \in C_1} \Delta_{k,l},$$

et notons D_1 la frontière de F_1 . Nous voyons aisément que F_1 est un fermé contenu dans F , dont la frontière D_1 est une réunion de segments de droite de longueur 1 parallèles à un des axes de coordonnées, les extrémités de ces segments étant des points de coordonnées entières. Nous devons prouver que D_1 est une courbe de Jordan et que F_1 est un rétracte par déformation de F .

Nous venons de voir que deux côtés adjacents du carré Δ_1 , au moins, sont contenus dans D . Trois de ces côtés au plus peuvent être contenus dans D , car si les quatre côtés de ce carré l'étaient, F se réduirait à Δ_1 , contrairement à notre hypothèse. Deux cas sont

donc possibles : celui où trois des côtés de Δ_1 sont contenus dans D , le quatrième côté ne l'étant pas, et celui où deux côtés adjacents de ce carré sont contenus dans D , les deux autres côtés ne l'étant pas. Nous allons considérer successivement ces deux cas.

Supposons que trois des côtés du carré Δ_1 soient contenus dans D , par exemple les côtés $[s_1, s_2]$, $[s_2, s_3]$ et $[s_3, s_4]$, le quatrième côté $[s_4, s_1]$ ne l'étant pas (figure VII.6 a). Nous voyons alors que D_1 s'obtient à partir de D en remplaçant la ligne brisée formée par la réunion des côtés $[s_1, s_2]$, $[s_2, s_3]$ et $[s_3, s_4]$ par le côté $[s_4, s_1]$. Par suite, D_1 est bien une courbe de Jordan et F_1 est bien la réunion de D_1 et de son intérieur. Par ailleurs, le lemme 3.20 montre qu'il existe une rétraction par déformation $g : \Delta_1 \times [0, 1] \rightarrow \Delta_1$ de Δ_1 sur son côté $[s_4, s_1]$. Posons alors, pour tout $z \in F$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$\tilde{g}(z, t) = \begin{cases} g(z, t) & \text{si } z \in \Delta_1, \\ z & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi définie, l'application \tilde{g} est une rétraction par déformation de F sur F_1 .

Supposons maintenant que deux côtés adjacents de Δ_1 soient contenus dans D , par exemple les côtés $[s_1, s_2]$ et $[s_2, s_3]$, les deux autres côtés ne l'étant pas (figure VII.6 b). Nous voyons alors que D_1 s'obtient à partir de D en remplaçant la ligne brisée formée par la réunion des côtés $[s_1, s_2]$ et $[s_2, s_3]$ par la ligne brisée formée par la réunion des côtés $[s_3, s_4]$ et $[s_4, s_1]$. Si le sommet s_4 est élément de D , ce point est un point double de la courbe D_1 , qui n'est plus une courbe de Jordan. Dans le cas contraire, D_1 est bien une courbe de Jordan, F_1 est bien réunion de cette courbe et de son intérieur et, en procédant comme ci-dessus, nous pouvons montrer qu'il existe une rétraction par déformation de F sur F_1 . Il nous reste donc à prouver que le sommet s_4 n'est pas élément de D . Supposons le contraire. Les carrés Δ_g et Δ_b sont éléments de \mathcal{C} , car leurs côtés $[s_4, s_1]$ et $[s_3, s_4]$ ne sont pas contenus dans D . Un raisonnement analogue à celui fait pour prouver la double égalité (***) permet de prouver que

$$p(\Delta_g) = p(\Delta_b) = p(\Delta_1) - 1. \quad (***)$$

Il existe donc un chemin $\Gamma_g \in \mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_g)$ et un chemin $\Gamma_b \in \mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_b)$, tous deux de longueur $p(\Delta_1) - 1$. En procédant comme lors de la construction de la courbe de Jordan D' , on montre qu'en réunissant une partie de ces chemins, le segment de droite joignant les centres de Δ_g et de Δ_1 , et le segment de droite joignant les centres de Δ_b et de Δ_1 , on forme une courbe de Jordan D'' contenue dans l'intérieur de D . La diagonale du carré Δ_1 qui joint les sommets s_2 et s_4 traverse la courbe de Jordan D'' au centre du carré Δ_1 donc passe, en ce point, de l'extérieur à l'intérieur de D'' (ou inversement). Les sommets s_2 et s_4 ne peuvent donc pas être tous les deux éléments de l'extérieur de D'' . Comme le sommet s_2 est élément de D , il est aussi élément de l'extérieur de D'' . Par suite, le point s_4 est élément de l'intérieur de D'' , donc *a fortiori* élément de l'intérieur de D . Nous avons bien prouvé que s_4 n'est pas élément de D . \square

3.22. Proposition. — Soit C une courbe de Jordan dans un plan \mathcal{E}^2 . L'intérieur $\text{Int}(C)$ de cette courbe est un ouvert simplement connexe.

Preuve : Soit $\gamma : S^1 \rightarrow \text{Int}(C)$ une application continue du cercle S^1 dans l'intérieur de la courbe C . Nous allons prouver que $\gamma(S^1)$ est contenu dans une partie fermée contractible de $\text{Int}(C)$, de la forme considérée dans le lemme 3.21. Le lemme 3.19 montrera alors que γ est homotope à une application constante. La démonstration comporte plusieurs étapes.

a) Construction d'un fermé F contenant $\gamma(S^1)$. — L'image $\gamma(S^1)$ de l'application γ et la courbe C sont deux parties compactes disjointes de \mathcal{E}^2 , dont la distance (pour toute structure euclidienne sur \mathcal{E}^2) est strictement positive. Nous pouvons donc identifier \mathcal{E}^2 avec le plan \mathbb{R}^2 muni de sa structure euclidienne usuelle, au moyen d'un isomorphisme

affine, de manière telle que la distance de $\gamma(S^1)$ à C soit supérieure à 2. Nous raisonnerons désormais en considérant C et $\gamma(S^1)$ comme des parties de \mathbb{R}^2 . Considérons alors le quadrillage du plan \mathbb{R}^2 formé par les droites, parallèles aux axes de coordonnées, d'abscisses ou d'ordonnées entières. Pour tout couple $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, posons

$$\Delta_{k,l} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; k \leq x \leq k+1, l \leq y \leq l+1 \}.$$

Puisque $d(\gamma(S^1), C) \geq 2$, un carré $\Delta_{k,l}$ qui rencontre $\gamma(S^1)$ ne rencontre pas C , donc est contenu dans $\text{Int}(C)$. Soit G la réunion de tous les carrés de la forme $\Delta_{k,l}$ (avec $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$) qui rencontrent $\gamma(S^1)$. Le nombre de ces carrés étant fini (puisque $\gamma(S^1)$ est compact), G est une partie compacte de \mathbb{R}^2 , qui contient $\gamma(S^1)$ et qui est contenue dans $\text{Int}(C)$. Comme chacun des carrés $\Delta_{k,l}$ dont G est la réunion est connexe et rencontre $\gamma(S^1)$, qui est aussi connexe et contenu dans G , G est connexe (voir [17], chapitre V). Son complémentaire $\mathbb{R}^2 - G$ est un ouvert non borné de \mathbb{R}^2 qui contient $C \cup \text{Ext}(C)$ et qui, d'après le lemme 3.1, a une et une seule composante connexe non bornée, que nous notons H . Comme $C \cup \text{Ext}(C)$ est connexe et non borné, il est contenu dans la composante connexe non bornée H de $\mathbb{R}^2 - G$. Posons $F = \mathbb{R}^2 - H$. Puisque H est ouvert, contient $C \cup \text{Ext}(C)$ et ne rencontre pas G , F est fermé, contenu dans $\text{Int}(C)$, et contient G , donc aussi $\gamma(S^1)$. De plus, F est réunion d'une famille finie de carrés de la forme $\Delta_{k,l}$, avec $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$.

b) Preuve de la connexité de F . — Nous remarquons que F est la réunion de G et des composantes connexes bornées de $\mathbb{R}^2 - G$. Ces composantes connexes sont des ouverts dont l'adhérence est contenue dans F , car F est fermé. Nous pouvons donc dire aussi que F est réunion de G et des adhérences des composantes connexes bornées de $\mathbb{R}^2 - G$. Chaque composante connexe bornée de $\mathbb{R}^2 - G$ est adhérente à G . Par suite F , qui est réunion de G qui est connexe et des adhérences des composantes connexes bornées de $\mathbb{R}^2 - G$, qui sont connexes et rencontrent G , est connexe (voir [17], chapitre V, exercice V.1).

c) Étude de la frontière de F . — La frontière $\text{Fr}(F)$ est réunion d'une famille finie, notée \mathcal{S} , de segments de droite de longueur 1, parallèles à un des axes de coordonnées, dont les extrémités sont des points de coordonnées entières. Ils sont de la forme

$$L_{k, k+1, l} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; k \leq x \leq k+1, y = l \}$$

ou de la forme

$$L_{k, l, l+1} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x = k, l \leq y \leq l+1 \}.$$

Nous allons prouver que cette frontière est une courbe de Jordan et que F n'est autre que la réunion de cette courbe de Jordan et de son intérieur.

Considérons un segment de droite de longueur 1 élément de \mathcal{S} . Nous supposons qu'il est parallèle à l'axe des abscisses (le raisonnement qui suit pouvant être adapté immédiatement au cas où ce segment de droite est parallèle à l'axe des ordonnées). Soit $L_{k, k+1, l}$ ce segment. Nous allons montrer que chaque extrémité de ce segment appartient à un et un seul autre segment de droite élément de \mathcal{S} , distinct de $L_{k, k+1, l}$. Nous ferons le raisonnement pour l'extrémité (k, l) , le même raisonnement s'appliquant aussi à l'autre extrémité $(k+1, l)$.

Puisque $L_{k, k+1, l}$ est contenu dans $\text{Fr}(F)$, un et un seul des deux carrés $\Delta_{k,l}$ ou $\Delta_{k,l-1}$ qui ont en commun ce côté, est contenu dans F . Supposons, par exemple, que $\Delta_{k,l}$ soit contenu dans F et que $\Delta_{k,l-1}$ ne le soit pas (le raisonnement étant le même dans le cas contraire).

S'il n'existait aucun segment de droite élément de \mathcal{S} autre que $L_{k, k+1, l}$ ayant pour extrémité le point (k, l) , il existerait un chemin continu, ne rencontrant pas $\text{Fr}(F)$, formé par les segments de droite joignant successivement les centres des carrés $\Delta_{k, l}$, $\Delta_{k-1, l}$, $\Delta_{k-1, l-1}$ et $\Delta_{k, l-1}$. Le carré $\Delta_{k, l-1}$ serait contenu dans F , ce qui contredirait le fait que $L_{k, k+1, l}$ est une partie de la frontière de F . Voir figure VII.6 (a).

Supposons qu'il existe deux segments de droite éléments de \mathcal{S} , autres que $L_{k, k+1, l}$, ayant pour extrémité le point (k, l) , par exemple les segments de droite $L_{k, l, l+1}$ et $L_{k-1, k, l}$. Voir figure VII.6 (b). Le chemin continu formé par les segments de droite joignant successivement les centres des carrés $\Delta_{k, l}$, $\Delta_{k-1, l}$, $\Delta_{k-1, l-1}$ et $\Delta_{k, l-1}$ traverserait alors deux fois la frontière de F ; lors de la première traversée, il passerait de F à son complémentaire, et lors de la seconde, de ce complémentaire à F . Le carré $\Delta_{k, l-1}$ serait contenu dans F , ce qui, comme nous l'avons vu ci-dessus, contredirait le fait que $L_{k, k+1, l}$ est une partie de la frontière de F .

Supposons qu'il existe trois segments de droite éléments de \mathcal{S} , autres que $L_{k, k+1, l}$, ayant le point (k, l) pour extrémité. Dans ce cas, les quatre segments de droite $L_{k, k+1, l}$, $L_{k-1, k, l}$, $L_{k, l, l+1}$ et $L_{k, l-1, l}$ qui ont le point (k, l) pour extrémité sont tous éléments de \mathcal{S} . Voir figure VII.6 (c). Par suite, les carrés $\Delta_{k, l}$ et $\Delta_{k-1, l-1}$ sont contenus dans F , tandis que les carrés $\Delta_{k-1, l}$ et $\Delta_{k, l-1}$ ne le sont pas. Le point (k, l) n'est pas élément de $\gamma(S^1)$, car s'il l'était, $\gamma(S^1)$ rencontrerait les carrés $\Delta_{k-1, l}$ et $\Delta_{k, l-1}$; ceux-ci seraient alors contenus dans G , donc aussi dans F , ce qui contredirait le fait que les quatre segments de droite $L_{k, k+1, l}$, $L_{k-1, k, l}$, $L_{k, l, l+1}$ et $L_{k, l-1, l}$ font partie de la frontière de F . La distance du point (k, l) au compact $\gamma(S^1)$ étant strictement positive, il existe un réel $r > 0$ tel que le disque ouvert, noté D , de centre (k, l) et de rayon r ne rencontre pas $\gamma(S^1)$. De plus, nous pouvons imposer à r d'être strictement inférieur à 1; le disque D est alors contenu dans l'intérieur de la réunion des quatre carrés $\Delta_{k, l}$, $\Delta_{k-1, l}$, $\Delta_{k-1, l-1}$ et $\Delta_{k, l-1}$. La figure VII.6 (c) illustre la situation.

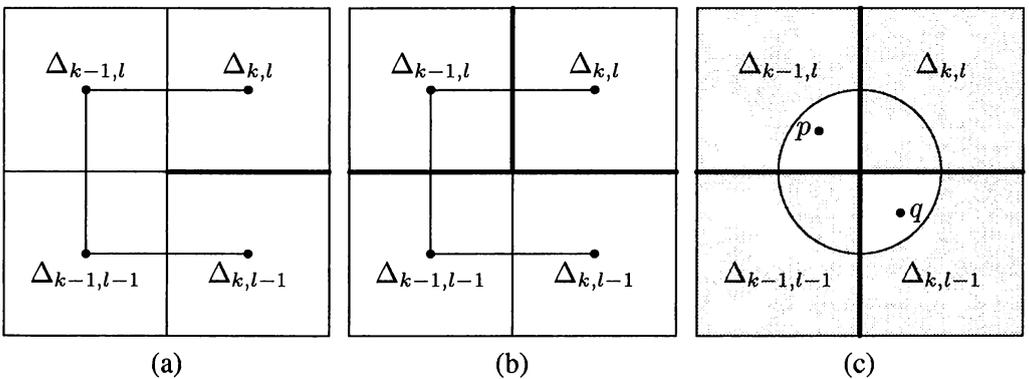


Figure VII.6. Illustration de la preuve de la proposition 3.22

Soient p et q deux points appartenant à l'intersection du disque D avec l'intérieur, respectivement, du carré $\Delta_{k-1, l}$ et du carré $\Delta_{k, l-1}$. Soit $A = (\mathbb{R}^2 - D) \cap (C \cup \text{Int}(C))$. Les parties A et F de \mathbb{R}^2 sont compactes. Leur réunion $A \cup F$ ne contient pas les points p et q . La partie F ne sépare pas p et q , car ces points appartiennent au complémentaire H de F , qui est connexe. La partie A ne sépare pas non plus ces deux points, car ils sont tous deux contenus dans le disque ouvert D , qui est connexe et disjoint de A . Nous allons montrer que $A \cap F$ est connexe. Puisque F est contenu dans $\text{Int}(C)$, $A \cap F = (\mathbb{R}^2 - D) \cap F$.

Le disque D ne rencontrant pas $\gamma(S^1)$, $(\mathbb{R}^2 - D) \cap G$ est connexe, car réunion de $\gamma(S^1)$, qui est connexe, et de parties connexes (qui sont soit des carrés $\Delta_{i,j}$ entiers, soit éventuellement l'intersection du carré $\Delta_{k,l}$ ou du carré $\Delta_{k-1,l-1}$ avec $\mathbb{R}^2 - D$) qui toutes rencontrent $\gamma(S^1)$. Enfin, $(\mathbb{R}^2 - D) \cap F$ est connexe car réunion de $(\mathbb{R}^2 - D) \cap G$, qui est connexe, et de parties connexes (qui, comme ci-dessus, sont soit des carrés $\Delta_{i,j}$ entiers, soit éventuellement l'intersection du carré $\Delta_{k,l}$ ou du carré $\Delta_{k-1,l-1}$ avec $\mathbb{R}^2 - D$) qui toutes rencontrent $(\mathbb{R}^2 - D) \cap G$.

Le théorème de Janiszewski montre alors que $A \cup F$ ne sépare pas p et q , ce qui est manifestement faux, puisque le compact $\Delta_{k,l} \cup \Delta_{k-1,l-1} \cup (\Delta_{k-1,l} - D) \cup (\Delta_{k,l-1} - D)$, représenté en gris sur la figure VII.6 (c), est contenu dans $A \cup F$ et sépare les points p et q . Nous avons ainsi prouvé par l'absurde que les segments de droite $L_{k-1, k, l}$, $L_{k, l-1, l}$ et $L_{k, l, l+1}$ ne peuvent pas être tous les trois contenus dans $\text{Fr}(F)$.

Comme S est une famille finie, et comme chacune des deux extrémités de chaque segment de droite élément de S appartient aussi à un autre segment de droite élément de S , la frontière de F , qui n'est autre que la réunion des segments de droite éléments de S , est réunion d'une famille finie de courbes de Jordan deux à deux disjointes. Montrons que $\text{Fr}(F)$ est en fait une seule courbe de Jordan. Pour cela supposons que $\text{Fr}(F)$ contienne deux courbes de Jordan disjointes. Le cas où l'une de ces courbes est contenue à l'intérieur de l'autre est exclu, car la frontière de F est aussi frontière de $\mathbb{R}^2 - F = H$; la courbe intérieure ne pourrait pas faire partie de la frontière de H , qui est un ouvert non borné. Le cas où chacune de ces courbes est contenue dans l'extérieur de l'autre est lui aussi exclu, car il est incompatible avec la connexité de F .

d) Fin de la preuve. — Nous avons prouvé que la frontière de F est une courbe de Jordan. Il est alors facile de voir que H n'est autre que l'extérieur de cette courbe de Jordan. En effet, H est un ouvert connexe non borné, donc est contenu dans $\text{Ext}(\text{Fr}(F))$. Tout point z de $\text{Ext}(\text{Fr}(F))$ est l'origine d'un arc de courbe continu, contenu dans $\text{Ext}(\text{Fr}(F))$, s'éloignant à l'infini. Cet arc de courbe rencontre nécessairement H . Par suite le point z , qui peut être joint à un point de H par un chemin continu ne traversant pas la frontière de F (qui est aussi la frontière de H) est un point de H . Le complémentaire F de H est alors nécessairement réunion de la courbe de Jordan $\text{Fr}(F)$ et de son intérieur. Le lemme 3.21 montre que F est contractible. Le lemme 3.19 montre enfin que $\gamma : S^1 \rightarrow \text{Int}(C)$ est homotope à une application constante. Comme γ est une application continue quelconque de S^1 dans $\text{Int}(C)$, nous pouvons conclure que $\text{Int}(C)$ est simplement connexe. \square

3.23. Théorème de Riemann-Carathéodory-Schoenflies. — Soit C une courbe de Jordan dans un plan \mathcal{E}^2 , et $\text{Int}(C)$ l'intérieur de C . Dans le plan complexe \mathbb{C} , soit S^1 le cercle trigonométrique, D le disque ouvert centré sur l'origine et de rayon 1, et $\overline{D} = D \cup S^1$ le disque fermé de même centre et de même rayon. Il existe un homéomorphisme de \overline{D} sur $\text{Int}(C) \cup C$ appliquant D sur $\text{Int}(C)$ et S^1 sur C , dont la restriction à D est un difféomorphisme analytique.

Preuve : Soit U un ouvert non vide, simplement connexe et borné du plan complexe \mathbb{C} . Le théorème de représentation conforme de Riemann (voir [33]) montre qu'il existe un difféomorphisme analytique du disque ouvert D sur U . Un complément à ce théorème dû à Carathéodory (voir encore [33]) montre que ce difféomorphisme se prolonge en un homéomorphisme de \overline{D} sur \overline{U} , appliquant la frontière S^1 de D sur la frontière $\text{Fr}(U)$ de U , si et seulement si cette frontière vérifie la propriété de Schoenflies. Le plan \mathcal{E}^2 peut être identifié, grâce à un isomorphisme affine, au plan complexe \mathbb{C} . Les propositions 3.16 et 3.22 montrent que l'intérieur de C s'identifie à un ouvert connexe, borné et simplement

connexe de \mathbb{C} , dont la frontière C vérifie la propriété de Schoenflies. Le résultat annoncé en découle immédiatement. \square

4. Notions de géométrie différentielle

4.1. Motivations. — Dès le premier chapitre de ce livre nous avons rencontré, lors de l'étude du mouvement d'un pendule plan, un système dynamique dont l'espace des phases n'est pas un ouvert d'un espace affine de dimension finie. En fait, les objets mathématiques les mieux adaptés pour être les espaces des phases de systèmes dynamiques différentiables sont les *variétés différentiables*. Les études à caractère local, comme celle des points d'équilibre d'un système dynamique présentée dans le chapitre III, peuvent, sans perte de généralité, être faites pour des systèmes définis sur un ouvert d'un espace vectoriel ou affine de dimension finie. Même dans ce cadre, l'étude d'objets définis globalement, tels que les ensembles stable et instable d'un point d'équilibre (chapitre V) utilise inévitablement la notion de variété différentiable et nécessite certaines connaissances de géométrie différentielle. La théorie de l'indice et le théorème de Poincaré-Hopf (chapitre VI) auraient présenté moins d'intérêt si nous nous étions restreints aux champs de vecteurs définis sur un ouvert du plan (ce qui, du reste, aurait présenté quelques difficultés techniques et nécessité des hypothèses supplémentaires, car les ouverts non vides d'un plan ne sont pas compacts).

Dans ce paragraphe et le suivant, nous présentons les quelques notions de géométrie différentielle utiles pour la compréhension des questions traitées dans ce livre. Nous espérons aussi que ce bref exposé donnera au lecteur l'envie d'en apprendre davantage et facilitera son accès aux ouvrages plus complets, tels que [14, 15, 16, 26, 39, 40, 59, 62].

4.2. Définitions

1. Une *variété topologique* de dimension n (n entier positif) est un espace topologique M dont tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n .

2. Une *carte* de la variété topologique M , de dimension n , est un couple (U, φ) , où U est un ouvert de M , et φ un homéomorphisme de U sur un ouvert $V = \varphi(U)$ de \mathbb{R}^n . Un *atlas* de M est une famille de cartes (U_i, φ_i) , $i \in I$, ensemble d'indices, dont les domaines U_i recouvrent M , c'est-à-dire telle que $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.

La notion de variété topologique est un peu trop générale pour les besoins les plus courants, où l'on souhaite pouvoir utiliser le calcul différentiel. On introduit donc la notion de variété différentiable, définie ci-dessous.

4.3. Définitions

1. Un atlas (U_i, φ_i) , $i \in I$, d'une variété topologique M de dimension n est dit *différentiable de classe C^p* (p entier ≥ 1 , ou $p = \infty$) si pour tout couple $(i, j) \in I^2$ tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'application (dite *changement de carte*) $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est différentiable de classe C^p . Cet atlas est dit *analytique* ou *de classe C^ω* si les applications de changement de carte sont analytiques.

2. Deux atlas (U_i, φ_i) , $i \in I$, et (U'_j, φ'_j) , $j \in J$, de classe C^p , de la même variété topologique M , sont dits *C^p -équivalents* si leur réunion est encore un atlas de classe C^p , c'est-à-dire si pour tout couple $(i, j) \in I \times J$ tel que $U_i \cap U'_j \neq \emptyset$, les applications $\varphi'_j \circ \varphi_i^{-1}$ et $\varphi_i \circ \varphi'_j^{-1}$ sont différentiables de classe C^p .

3. Une *variété différentiable* de dimension n et de classe C^p (avec p entier ≥ 1 , $p = \infty$ ou $p = \omega$) est une variété topologique de dimension n munie d'une classe

d'équivalence (au sens de la C^p -équivalence définie ci-dessus) d'atlas de classe C^p . Une variété différentiable de classe C^ω est aussi appelée *variété analytique*.

4. Une variété différentiable étant donnée, les cartes appartenant à un atlas faisant partie de la classe d'équivalence qui définit sa structure différentiable sont dites *admissibles* (pour cette structure).

4.4. Commentaires et exemples

a) On impose souvent aux variétés différentiables d'être des espaces topologiques séparés (c'est-à-dire tels que pour tout couple (x, y) de points distincts de cet espace, il existe un voisinage de x et un voisinage de y disjoints). Cette propriété ne résulte pas des définitions ci-dessus (bien que celles-ci montrent que tout point d'une variété topologique, ou différentiable, possède un voisinage séparé). Sauf mention explicite contraire, nous supposons dans ce qui suit que les variétés considérées sont séparées.

b) Les variétés que nous considérerons seront toujours supposées avoir un atlas fini ou dénombrable. Ces variétés sont alors des espaces topologiques à base dénombrable d'ouverts.

c) Soit M une variété différentiable de dimension n , et (U, φ) une carte admissible. L'application φ , à valeurs dans \mathbb{R}^n , a n composantes; on la notera donc $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. Les n fonctions x^i (définies sur l'ouvert U de M et à valeurs réelles) sont appelées *coordonnées locales* associées à la carte (U, φ) . Soit (V, ψ) une autre carte admissible de M , telle que $U \cap V \neq \emptyset$, et (y^1, \dots, y^n) les coordonnées locales associées. L'application changement de carte $\psi \circ \varphi^{-1}$ n'est autre que l'application $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1, \dots, y^n)$ exprimant les coordonnées locales associées à la carte (V, ψ) en fonction des coordonnées locales associées à la carte (U, φ) .

d) Un ouvert de \mathbb{R}^n est une variété analytique de dimension n : il suffit en effet de l'équiper de l'atlas comportant une carte unique, l'application identique. De même, un ouvert d'un espace vectoriel (ou affine) de dimension n est une variété analytique de dimension n : le choix d'un repère nous ramène en effet immédiatement au cas précédent.

e) Un ouvert V d'une variété différentiable M de dimension n et de classe C^p est une variété différentiable de même dimension et de même classe. Pour toute carte admissible (U, φ) de M telle que $U \cap V$ soit non vide, $(U \cap V, \varphi|_{U \cap V})$ est une carte admissible de V .

f) Pour définir une structure de variété différentiable de classe C^p et de dimension n sur un ensemble M , sans nécessairement avoir préalablement défini une structure topologique sur M , on peut utiliser une famille de parties U_i ($i \in I$, ensemble d'indices) de M dont la réunion est M , et, pour chaque i , une application bijective φ_i de U_i sur un ouvert $V_i = \varphi_i(U_i)$ de \mathbb{R}^n . On doit alors vérifier que les applications de changement de carte $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sont des difféomorphismes de classe C^p . On montre que lorsque c'est le cas, il existe sur M une unique structure de variété différentiable de classe C^p admettant les (U_i, φ_i) pour cartes admissibles. C'est la méthode employée dans les exemples (g) et (i) ci-dessous.

g) Considérons le cercle trigonométrique S^1 , c'est-à-dire l'ensemble des points (x, y) du plan \mathbb{R}^2 tels que $x^2 + y^2 = 1$. Soit (x_0, y_0) un point de ce cercle. Choisissons un réel θ_0 tel que $x_0 = \cos \theta_0$, $y_0 = \sin \theta_0$. Ce réel est une détermination particulière de l'angle polaire du point (x_0, y_0) ; il n'est pas unique, puisqu'on peut lui ajouter un multiple quelconque de 2π ; on choisit arbitrairement une de ses valeurs possibles. Considérons alors l'application de l'intervalle ouvert $]\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[$ dans le cercle, qui au réel θ associe le point $(\cos \theta, \sin \theta)$. Elle est injective, et a pour image le cercle S^1 privé d'un

seul point, le point diamétralement opposé à (x_0, y_0) . On notera $U_{(x_0, y_0)}$ cette image, et $\varphi_{(x_0, y_0)}$ l'application inverse de celle définie ci-dessus. L'application $\varphi_{(x_0, y_0)}$ associe à chaque point (x, y) de $U_{(x_0, y_0)}$ une détermination particulière θ de l'angle polaire de ce point, cette détermination étant continue sur $U_{(x_0, y_0)}$ et prenant la valeur θ_0 au point (x_0, y_0) . On définit la structure de variété différentiable de S^1 en prenant pour cartes les $(U_{(x_0, y_0)}, \varphi_{(x_0, y_0)})$, pour plusieurs choix distincts du point (x_0, y_0) (au moins deux, afin que les domaines de ces cartes recouvrent S^1). Les applications de changement de carte sont simplement des changements de détermination de l'angle polaire; elles sont de la forme $\theta' = \theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, entier fixé. Ce sont des applications analytiques. Le cercle S^1 est donc une variété analytique de dimension 1.

h) Si M et M' sont des variétés différentiables de classe C^p , de dimensions respectives n et n' , le produit $M \times M'$ est une variété de classe C^p , de dimension $n + n'$. En effet, si les (U_i, φ_i) , $i \in I$ forment un atlas de M et les (V_j, ψ_j) , $j \in J$, un atlas de M' , les $(U_i \times V_j, (\varphi_i, \psi_j))$, $(i, j) \in I \times J$, forment un atlas de $M \times M'$. Par exemple, le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ est une variété différentiable de dimension 2.

i) La sphère S^2 est l'ensemble des points (x, y, z) de \mathbb{R}^3 qui vérifient $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. On note U_+ , V_+ et W_+ (resp., U_- , V_- , W_-) l'ensemble des points (x, y, z) de S^2 tels que, respectivement, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ (resp., $x < 0$, $y < 0$, $z < 0$). On note φ_+ , χ_+ et ψ_+ les applications, respectivement de U_+ , V_+ et W_+ dans \mathbb{R}^2 qui, au point (x, y, z) associent, respectivement, (y, z) , (x, z) et (x, y) . On définit, de la même manière, φ_- , χ_- et ψ_- , définies, respectivement, sur U_- , V_- et W_- . La structure différentiable de S^2 est définie par l'atlas formé par les cartes (U_+, φ_+) , (V_+, χ_+) , (W_+, ψ_+) , (U_-, φ_-) , (V_-, χ_-) , (W_-, ψ_-) . Les applications de changement de carte sont analytiques : en effet, $\psi_+ \circ \varphi_-^{-1}$, par exemple, a pour expression

$$(y, z) \mapsto (-\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y).$$

La sphère S^2 est donc une variété analytique de dimension 2.

Dans la suite de ce paragraphe nous considérerons, pour simplifier, seulement des variétés différentiables de classe C^∞ . Mais les concepts que nous introduirons gardent leur sens pour les variétés différentiables de classe C^p . Nous laissons au lecteur le soin d'adapter les énoncés pour ce cas.

4.5. Définitions. — Soient M et N deux variétés différentiables de classe C^∞ , de dimensions m et n , respectivement, et f une application continue de M dans N .

1. On dit que f est différentiable de classe C^∞ au voisinage d'un point a de M si, pour une carte admissible (U, φ) de M telle que $a \in U$ et une carte admissible (V, ψ) de N telle que $f(a) \in V$, l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ (définie sur l'ouvert $\varphi(U)$ de \mathbb{R}^m et à valeurs dans \mathbb{R}^n) est différentiable de classe C^∞ au voisinage du point $\varphi(a)$.

2. On dit que f est différentiable de classe C^∞ si elle l'est au voisinage de tout point de M .

3. On dit que f est un difféomorphisme de classe C^∞ si elle est différentiable de classe C^∞ , bijective, et d'inverse $f^{-1} : N \rightarrow M$ différentiable de classe C^∞ (ce qui implique $m = n$).

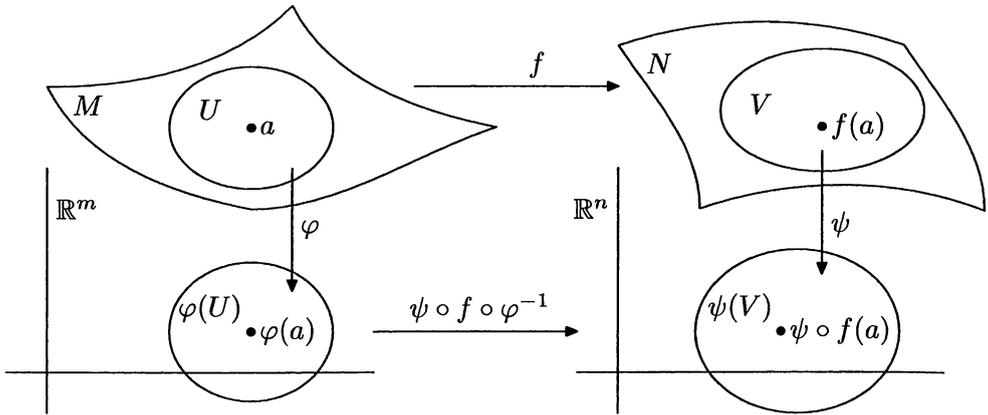


Figure VII.7. Application différentiable d'une variété M dans une autre variété N

4.6. Commentaire. — La notion d'application différentiable est illustrée sur la figure VII.7.

L'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est appelée *expression* de l'application f dans les cartes (U, φ) et (V, ψ) . Il importe de remarquer que la notion d'application différentiable ne dépend pas du choix des cartes admissibles (U, φ) et (V, ψ) . Soient en effet (U', φ') et (V', ψ') des cartes admissibles, respectivement de M et de N , avec $a \in U'$, $f(a) \in V'$. On peut écrire

$$\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi'^{-1}).$$

Les applications de changement de carte $\psi' \circ \psi^{-1}$ et $\varphi \circ \varphi'^{-1}$ sont différentiables de classe C^∞ . Donc si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable de classe C^∞ au voisinage du point $\varphi(a)$, $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ est différentiable de classe C^∞ au voisinage du point $\varphi' \circ \varphi'^{-1}(\varphi(a)) = \varphi'(a)$, comme composée d'applications de classe C^∞ .

Dans ce qui suit, nous sous-entendons souvent le qualificatif "de classe C^∞ " pour parler des variétés et applications différentiables. Nous dirons donc "différentiable" pour dire "différentiable de classe C^∞ ".

4.7. Théorème. — Soient M, N et P trois variétés différentiables, f une application différentiable de M dans N et g une application différentiable de N dans P . L'application composée $g \circ f$, de M dans P , est différentiable.

La démonstration, qui ne présente pas de difficulté, est laissée à la bonne volonté du lecteur.

4.8. Définitions. — Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions respectives m et n , et f une application différentiable de M dans N .

1. Soit a un point de M , (U, φ) une carte admissible de M et (V, ψ) une carte admissible de N telles que $a \in U$, $f(a) \in V$. On appelle *rang* de l'application différentiable f au point a le rang de la différentielle de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ au point $\varphi(a)$. On vérifie aisément qu'il ne dépend pas du choix des cartes (U, φ) et (V, ψ) . Il est évidemment inférieur ou égal à $\inf(m, n)$.

2. On dit que f est une *immersion* (resp., une *submersion*) au point a si son rang en ce point est égal à m (resp., à n). On dit que f est une *immersion* (resp., une *submersion*) si c'est une immersion (resp., une submersion) en tout point de M .

3. Une application qui est à la fois une immersion et une submersion est dite *étale*; on dit aussi que c'est un *difféomorphisme local*; on a bien entendu dans ce cas $m = n$.

4.9. Propriétés et exemples

a) Si l'application différentiable $f : M \rightarrow N$ est de rang constant k sur M , pour tout point a de M , il existe une carte admissible (U, φ) de M avec $a \in U$ et une carte admissible (V, ψ) de N avec $f(a) \in V$, telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ soit l'application

$$(x^1, \dots, x^m) \mapsto (y^1 = x^1, \dots, y^k = x^k, y^{k+1} = 0, \dots, y^n = 0).$$

En particulier, si f est une immersion, c'est-à-dire si $k = m \leq n$, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de la forme

$$(x^1, \dots, x^m) \mapsto (y^1 = x^1, \dots, y^m = x^m, y^{m+1} = 0, \dots, y^n = 0).$$

Si f est une submersion, c'est-à-dire si $k = n \leq m$, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de la forme

$$(x^1, \dots, x^m) \mapsto (y^1 = x^1, \dots, y^n = x^n).$$

b) Une application différentiable étale bijective est un difféomorphisme.

c) Soient M_1 et M_2 deux variétés différentiables. Les projections $p_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1$ et $p_2 : (x_1, x_2) \mapsto x_2$ du produit $M_1 \times M_2$, respectivement, sur M_1 et sur M_2 , sont des submersions.

La notion de surface, dans l'espace euclidien usuel de dimension 3, est sans doute familière au lecteur. Ainsi que nous allons le voir, c'est un cas particulier de la notion de *sous-variété* d'une variété différentiable.

4.10. Définition. — Soit M une variété différentiable de dimension m . Un sous-ensemble N de M est une *sous-variété* de M , de dimension n (avec $n \leq m$) s'il existe un atlas admissible (U_i, φ_i) ($i \in I$) de M ayant la propriété suivante : pour tout $i \in I$ tel que $U_i \cap N \neq \emptyset$, $U_i \cap N$ est l'ensemble des points $p \in M$ dont les $m - n$ dernières coordonnées locales $x^k(p)$ ($n + 1 \leq k \leq m$), pour le système de coordonnées locales associé à la carte (U_i, φ_i) sont nulles. Un atlas de M ayant cette propriété, et une carte de cet atlas, sont dits *adaptés* à la sous-variété N .

4.11. Commentaire et exemples

a) Soient n et m deux entiers tels que $1 \leq n \leq m$. L'ensemble des points de \mathbb{R}^m dont les $m - n$ dernières coordonnées sont nulles est une sous-variété de \mathbb{R}^m , de dimension n , qui s'identifie à \mathbb{R}^n .

b) Une sous-variété N d'une variété différentiable M est une variété différentiable, car d'un atlas (U_i, φ_i) de M adapté à N , on déduit un atlas $(U_i \cap N, \varphi_i|_{U_i \cap N})$ de N . Pour cette structure de variété différentiable sur N , l'injection canonique de N dans M est une application différentiable, et plus précisément une immersion.

c) Soit S^2 la sphère unité de \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Nous savons déjà (4.4.i) que c'est une variété différentiable. Il est facile de vérifier que c'est une sous-variété de \mathbb{R}^3 . Soient en effet \tilde{U}_+ , \tilde{V}_+ , \tilde{W}_+ les demi-espaces ouverts de \mathbb{R}^3 sur lesquels on a, respectivement, $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$. De même, soient \tilde{U}_- , \tilde{V}_- , \tilde{W}_- les demi-espaces ouverts sur lesquels on a, respectivement, $x < 0$, $y < 0$ et $z < 0$. On définit sur \tilde{U}_+ l'application $\tilde{\varphi}_+ : (x, y, z) \mapsto (u, v, w)$, en posant

$$u = y, \quad v = z, \quad w = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Il est facile de voir que $(\tilde{U}_+, \tilde{\varphi}_+)$ est une carte admissible de \mathbb{R}^3 et que $U_+ = \tilde{U}_+ \cap S^2$ est l'ensemble des points de \tilde{U}_+ dont la troisième coordonnée w , dans cette carte, est nulle. De plus, la restriction de $\tilde{\varphi}_+$ à $\tilde{U}_+ \cap S^2$ n'est autre (si l'on omet la troisième coordonnée locale w , qui prend la valeur 0) que l'application φ_+ définie en 4.4.i. En procédant de même avec les cinq autres demi-espaces, on obtient un atlas de \mathbb{R}^3 adapté à la sous-variété S^2 .

4.12. Définition. — On appelle *plongement* d'une variété différentiable N , de dimension n , dans une variété différentiable M de dimension $m \geq n$ une immersion (notion définie en 4.8) injective f de N dans M qui est aussi un homéomorphisme (c'est-à-dire une bijection continue d'inverse continue) de N sur $f(N)$ muni de la topologie induite par celle de M .

4.13. Propriétés et exemples

a) L'injection canonique d'une sous-variété N de M dans M est un plongement. Réciproquement, si $f : N \rightarrow M$ est un plongement, $f(N)$ est une sous-variété de M et f , considérée comme application de N sur $f(N)$, est un difféomorphisme.

b) Toute immersion injective d'une variété différentiable compacte dans une autre variété différentiable est un plongement.

c) D'après un célèbre théorème de Whitney, toute variété différentiable de dimension n peut être plongée dans un espace numérique \mathbb{R}^N , pour N assez grand ($N \geq 2n + 1$).

d) Il existe des immersions injectives qui ne sont pas des plongements. C'est le cas par exemple de l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 :

$$t \mapsto (\cos(2\text{Arctg } t), \sin(2\text{Arctg } t)),$$

car l'image de cette application est le cercle de centre 0 et de rayon 1 privé du point $(-1, 0)$, qui n'est pas une partie fermée de \mathbb{R}^2 . C'est également le cas de l'application $t \mapsto (x, y, z)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^3 , définie par

$$x = (2 + \cos t) \cos(\sqrt{2}t), \quad y = (2 + \cos t) \sin(\sqrt{2}t), \quad z = \sin t.$$

L'image de cette application n'est en effet pas fermée dans \mathbb{R}^3 ; son adhérence est le tore de dimension 2, ensemble des points (x, y, z) de la forme

$$x = (2 + \cos \theta) \cos \varphi, \quad y = (2 + \cos \theta) \sin \varphi, \quad z = \sin \theta, \quad 0 \leq \theta, \varphi \leq 2\pi,$$

qu'on obtient en faisant tourner le cercle d'équations $x = 2 + \cos \theta, y = 0, z = \sin \theta$ autour de l'axe Oz .

Soit $f : M \rightarrow N$ une immersion injective d'une variété différentiable M dans une autre variété différentiable N . Nous supposons que f n'est pas un plongement. Le sous-ensemble $f(M)$ de la variété N , muni de la topologie et de la structure de variété différentiable pour lesquelles f est un difféomorphisme de M sur $f(M)$, est parfois appelé *sous-variété immergée* de la variété N . Ce n'est pas une sous-variété au sens de la définition 4.10, car la topologie de $f(M)$ (pour laquelle f est un difféomorphisme, donc *a fortiori* un homéomorphisme, de M sur $f(M)$), est plus fine que la topologie induite par celle de N . Les variétés stable et instable d'un point fixe hyperbolique d'un système dynamique (théorèmes V.7.11 et V.7.13) sont en général des sous-variétés immergées de l'espace des phases du système, non des sous-variétés au sens de la définition 4.10.

e) Soit M une variété différentiable de dimension m . D'après 4.4.h, le produit $M \times M$ est une variété différentiable de dimension $2m$. L'application $x \mapsto (x, x)$ est un plongement de M dans $M \times M$, dont l'image est la diagonale Δ de $M \times M$, c'est-à-dire l'ensemble des points (x, y) de $M \times M$ tels que $x = y$. Celle-ci est une sous-variété de dimension m de $M \times M$.

Nous indiquons ci-dessous, sans démonstration, deux résultats très souvent employés pour reconnaître une sous-variété.

4.14. Théorème. — Soient M et P deux variétés différentiables, de dimensions respectives m et p ($m \geq p$), et $f : M \rightarrow P$ une application différentiable.

1. Soit b un point de P tel que $M_b = f^{-1}(b)$ soit non vide. Si, en tout point de M_b , le rang de f est égal à p , M_b est une sous-variété de M de dimension $m - p$.
2. Plus généralement, soit Q une sous-variété de dimension q de P ($q \leq p$) telle que $M_Q = f^{-1}(Q)$ soit non vide. Si, en tout point de M_Q , le rang de f est égal à p , M_Q est une sous-variété de M de dimension $m - p + q$.

4.15. Commentaires et exemples

a) La partie 1 du théorème précédent est un cas particulier de la partie 2, car un point b de P peut être considéré comme une sous-variété de dimension 0 de P .

b) Pour tout entier $n \geq 1$, la sphère de dimension n , définie par

$$S^n = \{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1 \}$$

est une sous-variété de dimension n de \mathbb{R}^{n+1} . Cela résulte en effet du théorème précédent, en prenant pour f l'application de \mathbb{R}^{n+1} dans $\mathbb{R} : f(x^1, \dots, x^{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2$.

c) Soient $f_1 : E_1 \rightarrow M$ et $f_2 : E_2 \rightarrow M$ deux submersions, respectivement des variétés différentiables E_1 de dimension k_1 et E_2 de dimension k_2 , sur une variété M de dimension n . On appelle *produit fibré de E_1 et E_2 au dessus de M* , et on note $E_1 \times_M E_2$, le sous-ensemble du produit $E_1 \times E_2$

$$E_1 \times_M E_2 = \{ (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mid f_1(x_1) = f_2(x_2) \}.$$

Le théorème 4.14 permet de montrer que $E_1 \times_M E_2$ est une sous-variété de $E_1 \times E_2$, de dimension $k_1 + k_2 - n$. En effet, c'est l'image réciproque, par la submersion (f_1, f_2) de $E_1 \times E_2$ sur $M \times M$, de la diagonale Δ de $M \times M$ (qui, d'après 4.13 e, est une sous-variété de dimension n de $M \times M$). Pour tout $m \in M$, $f_1^{-1}(m) \times f_2^{-1}(m)$ est une sous-variété de $E_1 \times_M E_2$; le produit fibré $E_1 \times_M E_2$ n'est autre que la réunion de toutes ces sous-variétés, deux à deux disjointes, m parcourant M . Les deux composantes de l'application (f_1, f_2) sont égales sur $E_1 \times_M E_2$ de $E_1 \times E_2$, et déterminent une application $f : E_1 \times_M E_2 \rightarrow M$, qui est une submersion, et on a, pour tout $m \in M$, $f^{-1}(m) = f_1^{-1}(m) \times f_2^{-1}(m)$.

5. Les fibrés tangent et cotangent

5.1. Préliminaires. — La notion de *vecteur* en un point m de l'espace physique est sans doute familière au lecteur : on l'imagine comme un segment de droite orienté $\vec{v} = \overline{mn}$ ayant pour origine le point m et pour extrémité un autre point n de l'espace physique. Cette représentation des vecteurs est légitime dans l'espace physique habituel, qui a une structure d'espace affine. Rappelons en effet qu'un espace affine \mathcal{E} , d'espace vectoriel associé E , est un ensemble sur lequel l'espace vectoriel E considéré comme groupe abélien (la loi de composition étant l'addition) opère de manière simplement transitive. On a donc une application de $E \times \mathcal{E}$ dans \mathcal{E} , notée $(\vec{v}, m) \mapsto m + \vec{v}$, qui au couple formé d'un *vecteur* $\vec{v} \in E$ et d'un *point* $m \in \mathcal{E}$ associe un autre point $m + \vec{v} \in \mathcal{E}$, déduit de m en le translatant par le vecteur \vec{v} . Cette application est telle que pour tout point $m \in \mathcal{E}$ fixé, l'application $\vec{v} \mapsto m + \vec{v}$ est une bijection de E sur \mathcal{E} (revenant à identifier l'espace affine \mathcal{E} à l'espace vectoriel E qui lui est associé en choisissant une origine, le point m). C'est cette propriété qu'on exprime en disant que l'action de E sur

\mathcal{E} est *simplement transitive*. Par conséquent, si (m, n) est un couple ordonné de points de \mathcal{E} , il existe un vecteur unique $\vec{v} \in E$ tel que $m + \vec{v} = n$. On dit parfois qu'un élément \vec{v} de E est un *vecteur libre*, et qu'un couple (m, \vec{v}) formé d'un point $m \in \mathcal{E}$ et d'un vecteur $\vec{v} \in E$ est un *vecteur lié* attaché au point m (ou d'origine m). Si $n = m + \vec{v}$, le vecteur lié (m, \vec{v}) est souvent noté $\overline{m\vec{n}}$.

Au lieu de l'espace physique (ou d'un espace affine) \mathcal{E} , considérons maintenant une variété différentiable M . Il est très souhaitable de pouvoir définir la notion de vecteur attaché à un point m de la variété M (on dira *vecteur tangent* à M au point m). Cela permettra, par exemple, de considérer des équations différentielles sur la variété M . Pour définir cette notion, nous ne pouvons plus procéder comme ci-dessus, car nous ne disposons plus de la notion d'espace vectoriel associé à M , cette variété n'étant pas, en général, une partie d'un espace affine. En d'autres termes, nous ne disposons plus de la notion de vecteur libre. Nous allons voir qu'en procédant d'une autre manière, au fond très naturelle, nous pouvons définir directement la notion de *vecteur tangent* à la variété M en un de ses points m , qui correspond, très exactement, à la notion de vecteur lié d'origine m . Nous définirons aussi, par la même méthode, la notion duale de *covecteur* attaché à un point d'une variété. Cette méthode consiste à définir les vecteurs et covecteurs comme *classes d'équivalence* d'applications, pour des relations d'équivalence convenablement choisies. Un vecteur, attaché à un point m d'une variété M , apparaîtra comme la *vitesse* d'un point mobile sur M à l'instant où il passe en m ; un covecteur attaché au point m , comme le *gradient* en ce point d'une fonction à valeurs réelles.

5.2. Définition. — Soient M_1 et M_2 deux variétés différentiables de dimensions respectives n_1 et n_2 , a un point de M_1 et b un point de M_2 . Soient f et g deux applications différentiables définies sur des voisinages ouverts du point a dans M_1 (pas nécessairement le même voisinage pour les deux), à valeurs dans M_2 , appliquant toutes deux le point a sur le point b ($f(a) = g(a) = b$). On dit que f et g sont *tangentes en a à l'ordre 1* si, pour une carte admissible (U_1, φ_1) de M_1 et une carte admissible (U_2, φ_2) de M_2 telles que $a \in U_1$, $b \in U_2$, les applications $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ et $\varphi_2 \circ g \circ \varphi_1^{-1}$ (définies sur un voisinage ouvert de $\varphi_1(a)$ dans \mathbb{R}^{n_1} et à valeurs dans \mathbb{R}^{n_2}) ont même différentielle au point $\varphi_1(a)$.

5.3. Commentaires

a) La propriété définie ci-dessus ne dépend pas du choix des cartes admissibles (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) . Remplaçons en effet celles-ci par d'autres cartes admissibles (U'_1, φ'_1) et (U'_2, φ'_2) . Nous pouvons écrire

$$\varphi'_2 \circ f \circ \varphi'_1{}^{-1} = (\varphi'_2 \circ \varphi_2^{-1}) \circ (\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi'_1{}^{-1}),$$

$$\varphi'_2 \circ g \circ \varphi'_1{}^{-1} = (\varphi'_2 \circ \varphi_2^{-1}) \circ (\varphi_2 \circ g \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi'_1{}^{-1}).$$

En appliquant la formule de différentiation d'une application composée, on voit aisément que si les applications $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ et $\varphi_2 \circ g \circ \varphi_1^{-1}$ ont même différentielle au point $\varphi_1(a)$, les applications $\varphi'_2 \circ f \circ \varphi'_1{}^{-1}$ et $\varphi'_2 \circ g \circ \varphi'_1{}^{-1}$ ont même différentielle au point $\varphi'_1(a)$.

b) On vérifie aisément que le fait d'être tangentes en a à l'ordre 1 est une *relation d'équivalence* sur l'ensemble des applications différentiables définies sur un voisinage ouvert de a dans M_1 et à valeurs dans M_2 qui appliquent a sur b .

c) On définit de même, pour tout entier $p \geq 1$, la notion d'applications tangentes en a à l'ordre p ; il suffit de remplacer les différentielles des applications $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ et $\varphi_2 \circ g \circ \varphi_1^{-1}$ au point $\varphi_1(a)$ par leurs développements de Taylor à l'ordre p en ce point. Le fait d'être tangentes en a à l'ordre p est aussi une relation d'équivalence.

5.4. Définitions. — Soit M une variété différentiable de dimension n , et p un point de M .

1. On appelle *vecteur tangent* à M au point p une classe d'équivalence (pour la relation d'équivalence d'être tangentes en 0 à l'ordre 1) d'applications différentiables d'un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant l'origine 0 dans M qui appliquent 0 sur p .
2. On appelle *espace tangent* à la variété M au point p et on note $T_p M$ l'ensemble des vecteurs tangents en p à M .
3. On appelle *fibré tangent* à la variété M , et on note TM , la réunion $\bigcup_{p \in M} T_p M$ des espaces tangents à M en tous ses points, considérés comme deux à deux disjoints.
4. On appelle *covecteur attaché au point p* de la variété M une classe d'équivalence (pour la relation d'équivalence d'être tangentes en p à l'ordre 1) d'applications différentiables, définies sur un voisinage ouvert de p dans M et à valeurs dans \mathbb{R} , qui appliquent p sur l'origine 0.
5. On appelle *espace cotangent* à la variété M au point p et on note $T_p^* M$ l'ensemble des covecteurs attachés au point p de M .
6. On appelle *fibré cotangent* à la variété M , et on note $T^* M$, la réunion $\bigcup_{p \in M} T_p^* M$ des espaces cotangents à M en tous ses points, considérés comme deux à deux disjoints.

5.5. Commentaires

a) Soit χ une application différentiable d'un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant l'origine dans la variété M , appliquant 0 sur le point p . Le vecteur tangent à M au point p , classe d'équivalence de l'application χ , est souvent noté $\left. \frac{d\chi(s)}{ds} \right|_{s=0}$, ou aussi $\chi'(s)|_{s=0}$.

Plus généralement, soit $\xi : I \rightarrow M$ une application différentiable d'un intervalle ouvert I de \mathbb{R} dans M . Pour tout $t \in I$, on note $\left. \frac{d\xi(t)}{dt} \right|_{t=t}$, ou $\xi'(t)$, le vecteur tangent à M au point $\xi(t)$, classe d'équivalence de l'application $s \mapsto \xi(t + s)$. En composant l'application ξ avec la translation $s \mapsto t + s$ (t étant considéré comme fixé), nous obtenons une application qui applique l'origine 0 de \mathbb{R} sur le point $\xi(t)$, et cela nous a permis d'utiliser la définition 5.4 d'un vecteur tangent.

De même, soit f une application différentiable d'un voisinage ouvert du point p de la variété M dans \mathbb{R} . Le covecteur en p , classe d'équivalence de l'application $x \mapsto f(x) - f(p)$, est noté $df(p)$. La justification de cette notation apparaîtra plus loin.

b) Nous allons voir comment sont déterminés un vecteur v tangent à la variété M au point p , et un covecteur η attaché au point p , lorsqu'on a choisi une carte (U, φ) de M , telle que $p \in U$. Notons (x^1, \dots, x^n) les coordonnées locales associées à cette carte, c'est-à-dire les n composantes de l'application φ .

Le vecteur v est une classe d'équivalence d'applications différentiables d'intervalles de \mathbb{R} contenant l'origine dans M qui appliquent 0 sur p . Soit f un *représentant* (c'est-à-dire un élément particulier) de cette classe. L'application $\varphi \circ f$ a n composantes, qui sont les applications $x^i \circ f$. Sa dérivée à l'origine a donc n composantes, les $v^i = \left. \frac{d(x^i(f(s)))}{ds} \right|_{s=0}$, $1 \leq i \leq n$. Le vecteur v est déterminé par ces n nombres réels. Ceux-ci ne dépendent pas du choix du représentant f de v , en raison de la définition même de la propriété, pour deux applications, d'être tangentes en 0 à l'ordre 1. On verra plus loin que l'espace $T_p M$ tangent en p à la variété M est un espace vectoriel de dimension n , et que le choix d'une carte (U, φ) de M , telle que $p \in U$, détermine une base de cet espace. Les n réels v^i sont les composantes du vecteur v dans cette base.

De même, le covecteur η est une classe d'équivalence d'applications différentiables, définies sur un voisinage ouvert de p dans M et à valeurs dans \mathbb{R} , qui appliquent p sur l'origine 0. Soit h un représentant de cette classe. L'application $h \circ \varphi^{-1}$ est une fonction, à valeurs réelles, de n variables réelles, les coordonnées usuelles sur \mathbb{R}^n . Celles-ci, par un léger abus de notations, seront désignées par x^1, \dots, x^n , comme les coordonnées locales attachées à la carte (U, φ) .

Remarquons au passage que pour éviter cet abus de notations, il nous faudrait utiliser des notations différentes pour les coordonnées locales sur U et pour les coordonnées usuelles sur \mathbb{R}^n . Nous pourrions par exemple noter φ^i les coordonnées locales sur U et x^i les coordonnées usuelles sur \mathbb{R}^n ($1 \leq i \leq n$). Nous aurions alors, bien entendu, $\varphi^i = x^i \circ \varphi$. La différentielle de $h \circ \varphi^{-1}$ au point $\varphi(p)$ est la suite, comportant n termes, de ses

dérivées partielles au point $\varphi(p)$, $\eta_i = \frac{\partial((h \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n))}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)}$. Le covecteur η est déterminé par les n nombres réels η_i . Ceux-ci ne dépendent pas du choix du représentant h de η . On verra plus loin que l'espace T_p^*M cotangent en p à la variété M est un espace vectoriel de dimension n , et que le choix d'une carte (U, φ) de M , telle que $p \in U$, détermine une base de cet espace. Les n réels η_i sont les composantes du covecteur η dans cette base.

c) Voyons comment changent les n nombre v^i et les n nombre η_i qui représentent, respectivement, le vecteur v et le covecteur η dans la carte (U, φ) , lorsqu'on remplace celle-ci par une autre carte admissible (U', φ') telle que $p \in U'$. On note y^1, \dots, y^n les coordonnées locales associées.

L'application changement de carte $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ est l'application $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1, \dots, y^n)$ qui exprime les coordonnées locales y^i associées à la carte (U', φ') en fonction des coordonnées locales x^j associées à la carte (U, φ) . Les composantes w^i du vecteur v dans la base de T_pM associée à la carte (U', φ') ont pour expression

$$w^i = \frac{d(y^i(f(s)))}{ds} \Big|_{s=0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Big|_{\varphi(m)} \frac{d(x^j(f(s)))}{ds} \Big|_{s=0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Big|_{\varphi(m)} v^j.$$

Cette formule montre que les composantes w^i de v dans la base de T_pM associée à la carte (U', φ') s'expriment linéairement au moyen des composantes v^j de ce vecteur dans la base associée à la carte (U, φ) . La matrice ayant pour coefficients les $\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Big|_{\varphi(m)}$ (l'indice i indexant les lignes et l'indice j les colonnes), qui apparaît dans cette formule, n'est autre que la matrice exprimant la différentielle, au point $\varphi(p)$, de l'application changement de carte $\varphi' \circ \varphi^{-1}$.

De même, l'application changement de carte $\varphi \circ \varphi'^{-1}$, inverse de $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ est l'application $(y^1, \dots, y^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$ qui exprime les coordonnées locales x^i associées à la carte (U, φ) en fonction des coordonnées locales y^j associées à la carte (U', φ') . Les composantes ζ_i du covecteur η dans la base de T_p^*M associée à la carte (U', φ') ont pour expression

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \frac{\partial(h \circ \varphi'^{-1}(y^1, \dots, y^n))}{\partial y^i} = \frac{\partial((h \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi'^{-1})(y^1, \dots, y^n))}{\partial y^i} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(h \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n))}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \Big|_{\varphi'(m)} \\ &= \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \Big|_{\varphi'(m)}. \end{aligned}$$

Cette formule montre que les composantes ζ_i de η dans la base de T_p^*M associée à la carte (U', φ') s'expriment linéairement au moyen des composantes η_j de ce covecteur dans la base associée à la carte (U, φ) . La matrice ayant pour coefficients les $\left. \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \right|_{\varphi'(m)}$ (i indexant les lignes et j les colonnes), qui apparaît dans cette formule, est la transposée de la matrice exprimant la différentielle, au point $\varphi'(m)$, de l'application changement de carte $\varphi \circ \varphi'^{-1}$. On sait que cette matrice est l'inverse de la matrice des $\left. \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right|_{\varphi(m)}$.

d) Il est maintenant facile de voir pourquoi l'espace T_pM tangent en p à la variété M est un espace vectoriel de dimension n . En utilisant la carte (U, φ) , on a pu identifier cet espace à \mathbb{R}^n , puisqu'on a pu associer à tout vecteur $v \in T_pM$ la suite de ses composantes (v^1, \dots, v^n) dans la base de T_pM associée à cette carte. On peut donc transporter sur T_pM la structure d'espace vectoriel de \mathbb{R}^n . La structure ainsi obtenue ne dépend pas du choix de la carte (U, φ) , puisque lorsqu'on remplace cette carte par une autre carte admissible (U', φ') , les composantes (w^1, \dots, w^n) du vecteur v dans la base associée à cette nouvelle carte se déduisent des composantes (v^1, \dots, v^n) de ce vecteur dans la base associée à l'ancienne carte (U, φ) par une transformation linéaire inversible.

Le même raisonnement montre que l'espace T_p^*M , cotangent en p à la variété M , est aussi un espace vectoriel de dimension n . De plus, les formules exprimant les effets d'un changement de carte sur les composantes d'un vecteur et d'un covecteur, permettent de penser que les espaces T_pM et T_p^*M sont en dualité, chacun s'identifiant au dual de l'autre. Nous mettons ci-dessous en évidence ce couplage par dualité de manière directe.

e) En composant f , représentant du vecteur v , et h , représentant du covecteur η , on obtient une fonction différentiable $h \circ f$, définie sur un voisinage de l'origine 0 de \mathbb{R} , et à valeurs réelles. Posons

$$\langle \eta, v \rangle = \left. \frac{d(h \circ f)}{ds} \right|_{s=0}.$$

On note, comme ci-dessus, v^1, \dots, v^n et η_1, \dots, η_n les composantes, respectivement, du vecteur v et du covecteur η dans les bases de T_pM et de T_p^*M associées à la carte (U, φ) de M . Un calcul simple montre que

$$\langle \eta, v \rangle = \sum_{i=1}^n \eta_i v^i.$$

Par suite, $\langle \eta, v \rangle$ ne dépend pas du choix des représentants f de v et h de η , ni du choix de la carte (U, φ) (qui d'ailleurs n'intervient pas dans sa définition), mais seulement de v et de η , et définit un couplage entre les deux espaces T_pM et T_p^*M , qui permet d'identifier chacun de ces espaces au dual de l'autre. On voit de plus que les bases de T_pM et de T_p^*M associées à une même carte (U, φ) de M sont duales l'une de l'autre. On les note, respectivement, $(\left. \frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p) \right)$ et $(dx^1(p), \dots, dx^n(p))$.

f) Les raisonnements qui précèdent montrent aussi que les fibrés TM et T^*M , respectivement tangent et cotangent à la variété différentiable M , sont des variétés différentiables de dimension $2n$ (double de la dimension de M). Traitons par exemple le cas de TM . A toute carte (U, φ) de M est naturellement associée une carte, notée $(TU, T\varphi)$, de TM dont le domaine est TU (ensemble des vecteurs tangents à M en un point appartenant à l'ouvert U). Dans cette carte, les coordonnées locales d'un élément v de TU sont les n coordonnées locales x^1, \dots, x^n du point p auquel v est attaché et les n composantes v^1, \dots, v^n de v dans la base de T_pM associée à la carte (U, φ) .

On voit qu'il existe une application différentiable τ_M de TM dans M et une application différentiable π_M de T^*M dans M , qui associent à chaque vecteur $v \in TM$ (resp., à

chaque covecteur $\eta \in T^*M$ le point p de M auquel ce vecteur (resp., ce covecteur) est attaché. Pour tout point $p \in M$, $\tau_M^{-1}(p) = T_pM$ est l'espace tangent et $\pi_M^{-1}(p) = T_p^*M$ l'espace cotangent en p à M . Ce sont des espaces vectoriels de dimension n , dont chacun s'identifie au dual de l'autre. De plus, tout point $p \in M$ possède un voisinage U (le domaine d'une carte admissible contenant p) tel que $\tau_M^{-1}(U)$ et $\pi_M^{-1}(U)$ soient difféomorphes au produit $U \times \mathbb{R}^n$. Ces propriétés sont celles d'un *fibré vectoriel*. Nous définissons cette notion ci-dessous.

5.6. Définition. — Soit F un espace vectoriel de dimension finie. On appelle *espace fibré vectoriel* (ou, plus simplement, *fibré vectoriel*) *localement trivial de fibre-type* F un triplet (E, π, M) , où E et M sont des variétés différentiables et π une application différentiable de E sur M , vérifiant les propriétés suivantes.

1. Pour tout point $p \in M$, $\pi^{-1}(p)$ est muni d'une structure d'espace vectoriel de même dimension que F .
2. Pour tout point $p_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert U de p_0 dans M et un difféomorphisme χ de $\pi^{-1}(U)$ sur $U \times F$, tels que, pour tout $p \in U$, la restriction de χ à $\pi^{-1}(p)$ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels, de $\pi^{-1}(p)$ muni de sa structure d'espace vectoriel définie en 1, sur $\{p\} \times F$.

Les variétés E et M , l'application π et la dimension k de la fibre-type F sont appelées, respectivement, *espace total*, *base*, *projection canonique* et *rang* du fibré vectoriel (E, π, M) . Pour tout $p \in M$, $\pi^{-1}(p)$ est appelé *fibre* au point p (ou *fibre au dessus de* p). Un couple (U, χ) tel que celui intervenant dans 2 ci-dessus est appelé *trivialisations locale* de (E, π, M) au voisinage du point p_0 .

Les trivialisations locales jouent, pour les fibrés vectoriels, un rôle semblable à celui que jouent les cartes pour les variétés.

5.7. Opérations sur les fibrés vectoriels. — On peut effectuer sur les fibrés vectoriels ayant pour base une variété donnée M les mêmes opérations que sur les espaces vectoriels. On peut notamment définir la *somme directe*, le *produit tensoriel* de deux ou plusieurs fibrés vectoriels de même base, ainsi que le *dual* d'un fibré vectoriel donné. Pour un exposé plus approfondi de ces notions, le lecteur pourra se reporter par exemple au livre de Claude Godbillon [26]. Nous nous bornerons ici à indiquer, sans démonstration, un critère permettant de reconnaître que deux fibrés vectoriels sont en dualité, afin de pouvoir l'appliquer aux fibrés tangent et cotangent.

5.8. Proposition. — Soient (E, π, M) et (F, ϖ, M) deux fibrés vectoriels de même base M . Soit $E \times_M F$ le produit fibré de E et de F au dessus de M , muni de la structure de sous-variété de $E \times F$ définie en 4.15 c. On suppose qu'il existe une fonction différentiable, notée $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$, définie sur $E \times_M F$, à valeurs réelles, telle que, pour tout $p \in M$, la restriction de cette fonction à $E_p \times F_p$ soit un couplage par dualité entre ces deux espaces vectoriels, permettant d'identifier chacun d'eux au dual de l'autre (c'est-à-dire une application bilinéaire de $E_p \times F_p$ dans \mathbb{R} telle que, pour tout $x \in E_p$ non nul, il existe $y \in F_p$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$, et que pour tout $y \in F_p$ non nul, il existe $x \in E_p$ tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$). On a posé $E_p = \pi^{-1}(p)$, $F_p = \varpi^{-1}(p)$. On dit alors que l'application $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est un *couplage par dualité* entre les fibrés vectoriels (E, π, M) et (F, ϖ, M) , et chacun de ces deux fibrés s'identifie au dual de l'autre.

Nous pouvons donc énoncer :

5.9. Théorème. — Soit M une variété différentiable de dimension n .

1. Pour tout point $p \in M$, les espaces $T_p M$ et $T_p^* M$, respectivement tangent et cotangent à M en p , sont des espaces vectoriels de dimension n en dualité (chacun d'eux s'identifie au dual de l'autre).

2. Le fibré tangent TM est l'espace total d'un fibré vectoriel localement trivial de fibre-type \mathbb{R}^n , de base M et de projection canonique τ_M (application associant à chaque vecteur le point de M auquel il est attaché). Le fibré cotangent T^*M est l'espace total d'un fibré vectoriel, dual du précédent, dont la projection canonique est notée π_M (application associant à chaque covecteur le point de M auquel il est attaché).

3. La donnée d'une carte admissible (U, φ) de M détermine automatiquement une carte admissible $(TU, T\varphi)$ et une carte admissible $(T^*U, \hat{\varphi})$, respectivement de TM et de T^*M , dont les domaines sont l'ensemble TU des vecteurs tangents à M en un point de U et l'ensemble T^*U des covecteurs attachés à un point de U .

5.10. Remarque. — Par abus de langage, on désigne souvent un fibré vectoriel par son espace total. C'est pourquoi on dit que TM est le *fibré tangent* et T^*M le *fibré cotangent* à la variété M , alors qu'en toute rigueur ces termes désignent les triplets (TM, τ_M, M) et (T^*M, π_M, M) .

5.11. Exemple : fibré tangent à un ouvert d'un espace affine. — Soit Ω un ouvert d'un espace affine \mathcal{E} , de dimension finie, d'espace vectoriel associé E . Comme nous l'avons vu en 4.4 d, Ω est une variété différentiable. Pour tout point x de Ω , l'espace $T_x \Omega$, tangent à Ω au point x , s'identifie, de manière naturelle, à l'espace vectoriel $\{x\} \times E$, isomorphe à l'espace vectoriel E associé à \mathcal{E} . Le lecteur remarquera que nous avons évité d'identifier $T_x \Omega$ à E car si x et y sont deux points distincts de Ω , les espaces tangents $T_x \Omega$ et $T_y \Omega$ doivent être disjoints. Un vecteur tangent en x à Ω s'identifie donc à un couple (x, v) , où $v \in E$, c'est-à-dire à un vecteur lié attaché au point x .

Quant au fibré tangent $T\Omega$, il s'identifie, de manière naturelle au produit $\Omega \times E$, de base Ω , de projection canonique la projection sur le premier facteur $\tau_\Omega : \Omega \times E \rightarrow \Omega$.

5.12. Prolongement d'une application différentiable aux vecteurs. — Soient M et N deux variétés différentiables, et $f : M \rightarrow N$ une application différentiable de classe C^p , avec $p \geq 1$. Soit x un point de M et $v \in T_x M$ un vecteur tangent à M en ce point. Soit $\chi : I \rightarrow M$ un représentant du vecteur v . D'après 5.4, I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant l'origine, et $\chi(0) = x$. L'application composée $f \circ \chi : I \rightarrow N$ est différentiable et vérifie $f \circ \chi(0) = f(x)$. Sa classe d'équivalence, pour la relation d'équivalence définie en 5.2, entre applications différentiables définies sur un intervalle ouvert contenant l'origine, à valeurs dans N , et appliquant l'origine sur le point $f(x)$, est un vecteur tangent à la variété N au point $f(x)$. On vérifie aisément que ce vecteur ne dépend pas du choix du représentant χ choisi pour le vecteur v , mais dépend du vecteur v et de l'application f . On le note $T_x f(v)$.

Ainsi pour tout point $x \in M$, nous avons défini une application $v \mapsto T_x f(v)$, définie sur l'espace vectoriel $T_x M$, tangent en x à la variété M , à valeurs dans l'espace vectoriel $T_{f(x)} N$, tangent en $f(x)$ à la variété N . On montre aisément que cette application est linéaire et a pour rang le rang de f au point x (défini en 4.8). Par suite, $T_x f$ est injective si et seulement si f est une immersion au point s , surjective si et seulement si f est une submersion au point x . On l'appelle *application linéaire tangente* à l'application f au point x .

Lorsque le point x parcourt la variété M , les applications linéaires tangentes à l'application f en chacun des points de M se regroupent pour former une application, notée Tf , du

fibré tangent TM , dans le fibré tangent TN . Cette application est appelée *prolongement aux vecteurs* de l'application f . Pour tout point x de M , la restriction de Tf à la fibre $T_x M$ est l'application linéaire tangente $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$. Nous avons donc

$$\tau_N \circ Tf = f \circ \tau_M,$$

où $\tau_M : TM \rightarrow M$ et $\tau_N : TN \rightarrow N$ sont les projections canoniques des fibrés tangents aux variétés M et N .

En étudiant l'expression de l'application Tf dans des cartes de TM et de TN associées à des cartes de M et de N (au sens de 5.9.3), on montre aisément que si f est différentiable de classe C^p , avec $p > 1$, Tf est différentiable de classe C^{p-1} ; si f est de classe C^1 , Tf est continue (mais pas nécessairement différentiable).

Si $f : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme (de classe C^∞), $Tf : TM \rightarrow TN$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels, et nous avons

$$(Tf)^{-1} = T(f^{-1}).$$

5.13. Espace et fibré tangents à une sous-variété. — Soit M une variété différentiable et N une sous-variété de M . L'injection canonique $i_N : N \rightarrow M$ est un plongement (donc *a fortiori* une immersion). Par suite, pour tout point $x \in N$, $T_x i_N : T_x N \rightarrow T_x M$ est une application linéaire injective, grâce à laquelle l'espace tangent à la sous-variété N au point x peut être identifié à un sous-espace vectoriel de l'espace tangent à la variété M en ce point. Le fibré tangent TN s'identifie donc à un sous-ensemble du fibré tangent TM .

Remarquons d'ailleurs que ces propriétés subsistent, sans changement, lorsque N est une sous-variété immergée de M , au sens indiqué en 4.13 d.

Supposons de plus que M soit un ouvert Ω d'un espace affine \mathcal{E} de dimension finie, d'espace vectoriel associé E . Comme nous l'avons vu en 5.11, pour tout $x \in \Omega$, $T_x \Omega$ s'identifie à l'espace vectoriel $\{x\} \times E$, et $T\Omega$ s'identifie au produit $\Omega \times E$. Lorsque $x \in N$, $T_x N$ s'identifie donc à un sous-espace vectoriel $\{x\} \times F_x$ de $\{x\} \times E$, où F_x est un sous-espace vectoriel de E dépendant du point x considéré. On identifie souvent cet espace au sous-espace affine $x + F_x$ de \mathcal{E} , muni de la structure d'espace vectoriel pour laquelle le point x est l'origine. C'est dans ce sens que l'espace tangent en un point x à une surface (plongée dans un espace affine \mathcal{E} de dimension 3) peut être identifié à un plan affine de \mathcal{E} passant par le point x , muni de la structure de plan vectoriel d'origine x ; on l'appelle alors *plan tangent* en x à cette surface. C'est aussi dans ce sens que l'espace tangent en un point x à une courbe (plongée dans un espace affine \mathcal{E} de dimension finie quelconque) peut être identifié à une droite affine de \mathcal{E} passant par le point x , munie de la structure de droite vectorielle d'origine x ; cette droite est appelée *tangente* en x à la courbe considérée. Ces identifications doivent cependant être employées avec prudence : dans le cas d'une surface plongée dans un espace affine \mathcal{E} de dimension 3, l'intersection de deux plans affines de \mathcal{E} , identifiés aux espaces tangents à la surface considérée en deux points distincts, n'a pas de signification intrinsèque (c'est-à-dire ne dépendant que de la surface et des deux points considérés) : elle dépend, de manière essentielle, du plongement de la surface considérée dans \mathcal{E} .

5.14. Définitions. — Soit M une variété différentiable (de classe C^∞), TM son fibré tangent, et $\tau_M : TM \rightarrow M$ la projection canonique.

1. On appelle *champ de vecteurs* sur la variété M une section de la projection canonique τ_M , c'est-à-dire une application $X : M \rightarrow TM$ telle que $\tau_M \circ X = \text{id}_M$.
2. Soit X un champ de vecteurs sur la variété différentiable M . On appelle *équation différentielle associée à X* , l'équation

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)). \quad (*)$$

Cette équation différentielle est dite *autonome*. Une solution de cette équation est une application différentiable $\varphi : I \rightarrow M$ d'un intervalle ouvert I de \mathbb{R} dans M , telle que pour tout $t \in I$, le couple $(\varphi(t), \varphi'(t))$ (notation définie en 5.5.a) vérifie l'équation (*).

3. On appelle *champ de vecteurs dépendant du temps* sur la variété M une application $Y : \Omega \rightarrow TM$ définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times M$ et à valeurs dans TM , telle que pour tout $(t, x) \in \Omega$, $Y(t, x)$ soit élément de l'espace vectoriel $T_x M$, tangent en x à la variété M .

4. Soit $Y : \Omega \rightarrow TM$ un champ de vecteurs dépendant du temps sur la variété M , défini sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times M$. On appelle *équation différentielle associée à Y* , l'équation

$$\psi'(t) = Y(t, \psi(t)). \quad (**)$$

Cette équation différentielle est dite *non autonome*. Une solution de cette équation est une application différentiable $\psi : I \rightarrow M$ d'un intervalle ouvert I de \mathbb{R} dans M , telle que pour tout $t \in I$, le triplet $(t, \psi(t), \psi'(t))$ (notation définie en 5.5.a) vérifie l'équation (**).

5.15. Flot d'un champ de vecteurs sur une variété. — Soit M une variété différentiable. On montre aisément que le théorème de Cauchy-Lipschitz est applicable à l'équation différentielle autonome associée à un champ de vecteurs différentiable de classe C^p (avec $p \geq 1$) sur une M . Il est applicable aussi à l'équation différentielle non autonome associée à un champ de vecteurs dépendant du temps Y , de classe C^p (avec $p \geq 1$) sur M . On peut définir le *flot* et le *flot réduit* du champ de vecteurs dépendant du temps Y , ou du champ de vecteurs X , exactement comme on l'avait fait dans le chapitre II, lorsque la variété considérée était un ouvert d'un espace affine de dimension finie. Les propriétés du flot et du flot réduit établies au chapitre II subsistent sans changement.

5.16. Images directe et réciproque d'un champ de vecteurs par un difféomorphisme
Soient M et N deux variétés différentiables de même dimension et $f : M \rightarrow N$ un difféomorphisme. Nous supposons pour simplifier, que M , N et f sont de classe C^∞ . Soit $X : M \rightarrow TM$ un champ de vecteurs de classe C^p sur M , avec $p \geq 1$. Posons, pour tout point y de N ,

$$f_* X(y) = Tf(X(f^{-1}(y))).$$

L'application $f_* X : N \rightarrow TN$ est un champ de vecteurs de classe C^p sur N , appelé *image directe* du champ de vecteurs X par le difféomorphisme f . On vérifie aisément que pour toute solution φ de l'équation différentielle associée au champ de vecteurs X , $f \circ \varphi$ est solution de l'équation différentielle associée à $f_* X$.

Inversement, soit $Y : N \rightarrow TN$ un champ de vecteurs de classe C^p sur N , avec $p \geq 1$. Posons, pour tout point x de M ,

$$f^* Y(x) = (Tf)^{-1}(Y(f(x))).$$

L'application $f^* Y : M \rightarrow TM$ est un champ de vecteurs de classe C^p sur M , appelé *image réciproque* du champ de vecteurs Y par le difféomorphisme f . L'image réciproque de Y par le difféomorphisme f n'est autre que l'image directe de Y par le difféomorphisme $f^{-1} : N \rightarrow M$. Nous pouvons écrire :

$$f^* Y = (f^{-1})_* X.$$

6. Orientation

6.1. Préliminaires. — Nous avons rappelé (paragraphe VI.2.6 a) la notion d'orientation d'un espace vectoriel ou affine de dimension finie. Nous allons étendre cette notion aux variétés différentiables en procédant comme suit : nous dirons qu'une variété différentiable M est orientée lorsque pour tout point x de M , une orientation de l'espace vectoriel tangent $T_x M$ a été choisie, ce choix étant fait de manière continue en fonction du point x considéré. Nous devons cependant préciser ce que signifie la continuité du choix de l'orientation de $T_x M$ en fonction du point x . D'autre part, alors qu'un espace vectoriel ou affine de dimension finie peut toujours être orienté, il n'en est pas de même des variétés différentiables : une variété différentiable sera dite *orientable* lorsqu'il est possible de l'orienter. Les définitions qui suivent vont nous permettre de préciser ces notions.

6.2. Définitions. — Soit M une variété différentiable de dimension n .

1. On dit qu'on a choisi une *orientation des fibres* du fibré tangent TM lorsque pour tout point x de M , on a choisi une orientation de l'espace vectoriel tangent $T_x M$.

2. Une orientation des fibres de TM est dite *continue* lorsque tout point x de M possède un voisinage ouvert U sur lequel existent n champs de vecteurs continus X_1, \dots, X_n , tels que pour tout point y de U , la base $(X_1(y), \dots, X_n(y))$ de $T_y M$ soit d'orientation positive.

2. On dit que la variété différentiable M est *orientable* lorsqu'il existe une orientation continue des fibres de TM . Lorsque c'est le cas, chaque orientation continue des fibres de TM est appelée *orientation de la variété M* , et on dit qu'on a *orienté* la variété M lorsqu'on a choisi une de ces orientations.

6.3. Quelques propriétés

a) Orientations possibles d'une variété orientable. — Tout comme un espace vectoriel ou affine de dimension finie, une variété orientable connexe possède exactement deux orientations distinctes. Une variété orientable non connexe, possédant p composantes connexes distinctes, possède 2^p orientations distinctes, car chacune de ses composantes connexes est une variété orientable connexe qui possède deux orientations distinctes.

b) Un critère d'orientabilité. — Soient M une variété différentiable de dimension n , (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) deux cartes admissibles de M telles que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. On dit que ces deux cartes sont de *même orientation* si pour tout point $x \in U_1 \cap U_2$, la matrice jacobienne du changement de carte $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$, au point $\varphi_1(x)$, a un déterminant positif. Un atlas admissible (U_i, φ_i) , $i \in I$, de la variété M tel que, pour tout couple $(i, j) \in I^2$ vérifiant $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, les cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) soient de même orientation, est dit *atlas orienté*. La variété différentiable M est orientable si et seulement si elle possède un atlas admissible orienté. En effet, supposons que M possède un atlas admissible orienté (U_i, φ_i) , $i \in I$. Pour tout point x de M , nous pouvons choisir une carte (U_i, φ_i) telle que $x \in U_i$ et munir l'espace tangent $T_x M$ de l'orientation pour laquelle la base de $T_x M$ déterminée par cette carte (voir 5.5 d) est d'orientation positive. Cette orientation ne dépend pas du choix de la carte (U_i, φ_i) , et varie avec le point x de manière continue, au sens de la définition 6.2 1. Par suite, l'atlas considéré détermine une orientation de la variété M . Réciproquement, si M est orientable, on peut, à partir d'un atlas admissible quelconque (U_i, φ_i) , $i \in I$, de M , construire un atlas orienté. Nous pouvons en effet nous ramener d'abord au cas où les U_i sont tous connexes, en réindexant si nécessaire l'ensemble des cartes. Nous choisissons ensuite une orientation de M . Pour chaque $i \in I$,

l'ouvert U_i étant connexe, deux cas sont possibles, qui s'excluent mutuellement : ou bien pour tout $x \in U_i$, la base de $T_x M$ associée à la carte (U_i, φ_i) est d'orientation positive, ou bien, pour tout $x \in U_i$, cette base est d'orientation négative. Dans ce second cas, il suffit de remplacer φ_i par sa composée avec une symétrie de \mathbb{R}^n par rapport à un hyperplan pour être ramené au premier cas. L'atlas ainsi modifié est orienté.

c) Un critère de non orientabilité. — Soit M une variété différentiable de dimension n et $\chi : [0, 1] \rightarrow M$ une courbe paramétrée continue dans M . Supposons qu'on ait choisi, pour tout $s \in [0, 1]$, une orientation de l'espace tangent $T_{\chi(s)} M$. Adaptant la définition 6.2 2, nous dirons que l'orientation ainsi choisie dépend continûment de s si pour tout point $s \in [0, 1]$, il existe un voisinage W de s dans $[0, 1]$, et n champs de vecteurs continus X_1, \dots, X_n définis sur un voisinage ouvert de $\chi(s)$ dans M , tels que pour tout $t \in W$, la base $(X_1(\chi(t)), \dots, X_n(\chi(t)))$ soit de même orientation que l'orientation choisie de $T_{\chi(t)} M$.

Posons $\chi(0) = a, \chi(1) = b$. En utilisant la compacité de $[0, 1]$, il est facile de prouver que lorsqu'on a privilégié une des deux orientations possibles de $T_a M$ on peut, de manière unique, choisir pour tout $s \in [0, 1]$ une orientation de $T_{\chi(s)} M$ de manière telle que cette orientation dépende continûment de s et soit, pour $s = 0$, celle que l'on a privilégiée. En faisant $s = 1$, nous déterminons ainsi une orientation de $T_b M$, et nous dirons que cette orientation est déduite de celle spécifiée de $T_a M$ par *transport continu* le long de la courbe paramétrée χ .

Supposons maintenant que la courbe paramétrée $\chi : [0, 1] \rightarrow M$ soit un *lacet*, c'est-à-dire qu'elle vérifie $a = \chi(0) = \chi(1) = b$. Spécifions une orientation de $T_a M$, et transportons-la le long du lacet χ par transport continu. Nous obtenons ainsi une autre orientation de $T_a M$. Si la variété M est orientable, il est facile de voir que ces deux orientations de $T_a M$ coïncident, quels que soient le point a et le lacet χ considérés. Inversement, en utilisant le fait que chaque composante connexe d'une variété différentiable est connexe par arcs, on montre aisément que si variété M est non orientable, il existe un point $a \in M$ et un lacet continu $\chi : [0, 1] \rightarrow M$, vérifiant $\chi(0) = \chi(1) = a$, tels qu'en transportant une orientation de $T_a M$ par transport continu le long de ce lacet, on obtienne l'orientation de $T_a M$ opposée à celle initialement choisie.

6.4. Exemples

a) Les espaces projectifs réels et complexes. — Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On note $\mathbb{P}(n, \mathbb{K})$ l'espace projectif de dimension n sur le corps \mathbb{K} , c'est-à-dire le quotient de $\mathbb{K}^{n+1} - \{0\}$ par la relation d'équivalence : $x = (x^1, \dots, x^{n+1})$ équivalent à $y = (y^1, \dots, y^{n+1})$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$, tel que $y = \lambda x$.

On montre aisément (exercice VII.5) que l'espace projectif réel $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$ est une variété différentiable de dimension n , orientable si n est impair et non orientable si n est pair.

Nous n'avons défini dans cet ouvrage que les variétés différentiables réelles. Mais il est facile d'adapter les définitions 4.3 afin de définir la notion de variété analytique complexe de dimension (complexe) n : les cartes d'une telle variété sont à valeurs dans \mathbb{C}^n , et les changements de cartes sont des difféomorphismes analytiques. Toute variété analytique complexe de dimension n possède une structure sous-jacente de variété analytique réelle de dimension $2n$, qu'on obtient en identifiant \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 , donc \mathbb{C}^n à \mathbb{R}^{2n} . On montre aisément que pour cette structure de variété réelle sous-jacente, toute variété analytique complexe est orientable. On montre aisément (exercice VII.5) que l'espace projectif complexe $\mathbb{P}(n, \mathbb{C})$ est une variété analytique complexe de dimension n donc aussi, pour sa structure de variété réelle sous-jacente, une variété analytique réelle orientable de dimension $2n$.

b) *La bande de Möbius.* — Sur le rectangle $\mathbb{R} \times]-1, 1[$, considérons la relation d'équivalence

$$(x_1, y_1) \text{ équivalent à } (x_2, y_2) \text{ si } x_2 - x_1 = k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}, \text{ et } y_2 = (-1)^k y_1.$$

Le quotient de $\mathbb{R} \times]-1, 1[$ par cette relation d'équivalence est appelé *bande de Möbius*. On montre (exercice VII.6) que c'est une variété différentiable non orientable de dimension 2.

c) *La bouteille de Klein.* — Dans le plan \mathbb{R}^2 , considérons la relation d'équivalence

$$(x_1, y_1) \text{ équivalent à } (x_2, y_2) \text{ si } \begin{cases} x_2 - x_1 = k\pi, & \text{avec } k \in \mathbb{Z}, \text{ et} \\ y_2 - (-1)^k y_1 = 2l\pi, & \text{avec } l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La bouteille de Klein est une variété différentiable compacte, non orientable, de dimension 2 (exercice VII.7).

Le théorème suivant montre qu'à toute variété différentiable non orientable M , on peut associer de manière naturelle une variété différentiable orientable \widehat{M} appelée *revêtement orientable à deux feuillet* de cette variété.

6.5. Théorème. — Soit M une variété différentiable connexe non orientable. Il existe une variété différentiable connexe \widehat{M} et une application différentiable $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$ ayant les propriétés suivantes :

- (i) la variété \widehat{M} est orientable ;
- (ii) tout point x de M possède un voisinage connexe V tel que $\pi^{-1}(V)$ ait exactement deux composantes connexes \widehat{V}_1 et \widehat{V}_2 et que la restriction de π à chacun des \widehat{V}_i soit un difféomorphisme de \widehat{V}_i sur V (avec $i = 1$ ou 2).

De plus, le couple (\widehat{M}, π) est unique à un difféomorphisme près, ce qui signifie que si \widehat{M}' est une variété différentiable connexe et $\pi' : \widehat{M}' \rightarrow M$ une application différentiable vérifiant, comme \widehat{M} et π , les propriétés (i) et (ii), il existe un difféomorphisme $h : \widehat{M}' \rightarrow \widehat{M}$ tel que $\pi' = \pi \circ h$.

Preuve : Nous nous bornerons à indiquer les grandes lignes de la construction d'un couple (\widehat{M}, π) vérifiant les propriétés (i) et (ii). Pour plus de détails et pour la preuve de l'unicité de (\widehat{M}, π) à un difféomorphisme près, le lecteur pourra consulter, par exemple, l'ouvrage de Claude Godbillon [27], chapitre VII paragraphe 5 et chapitre X paragraphe 4. Soit n la dimension de M , et (U_i, φ_i) , $i \in I$, un atlas admissible de cette variété. Soit d'autre part $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une symétrie de \mathbb{R}^n par rapport à un hyperplan (nous pouvons, par exemple, prendre pour s l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$). Pour chaque $i \in I$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, posons

$$\varphi_{(i,\varepsilon)} = \begin{cases} \varphi_i & \text{si } \varepsilon = 1, \\ s \circ \varphi_i & \text{si } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Considérons la somme topologique

$$Z = \sum_{(i,\varepsilon) \in I \times \{-1, 1\}} U_i \times \{(i, \varepsilon)\}.$$

C'est, de manière naturelle, une variété différentiable dont les cartes (à domaines deux à deux disjoints) sont les $(U_i \times \{(i, \varepsilon)\}, \varphi_{(i,\varepsilon)})$. Nous définissons sur Z une relation d'équivalence en convenant que deux points $(x, (i, \varepsilon))$ et $(y, (j, \varepsilon'))$ de Z sont équivalents si $x = y$ et si de plus la matrice jacobienne de $\varphi_{(j,\varepsilon')} \circ \varphi_{(i,\varepsilon)}^{-1}$ a, en tout point, un déterminant positif. Le quotient de Z par cette relation d'équivalence peut ne pas être connexe. Soit \widehat{M} une de ses composantes connexes. On vérifie alors que \widehat{M} est une variété

différentiable connexe et orientable, de même dimension n que M . Soit \hat{x} un point de \widehat{M} , et $(x, (i, \varepsilon)) \in Z$ un représentant de \hat{x} . Le point x de M dépend de \hat{x} , mais non du représentant choisi; nous pouvons donc poser $\pi(\hat{x}) = x$. On vérifie alors que $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$ est une application différentiable qui vérifie la propriété (ii). \square

6.6. Exemples. — Les revêtements orientables de l'espace projectif réel $\mathbb{P}(2p, \mathbb{R})$ de dimension paire $2p$, de la bande de Möbius et de la bouteille de Klein sont déterminés dans les exercices VII.5, VII.6 et VII.7. Ce sont, respectivement, la sphère de dimension paire S^{2p} , le cylindre $S^1 \times]-1, 1[$ et le tore $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

7. Exercices

Exercice VII.1. Déterminer les parties semi-simples et nilpotentes des endomorphismes de \mathbb{R}^2 dont les matrices sont données ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice VII.2. Que peut-on dire de l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 ayant pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} ?$$

Exercice VII.3. Pour quelles valeurs des paramètres a , b et c les endomorphismes de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^3 ayant pour matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

sont-ils semi-simples? ou nilpotents?

Exercice VII.4. [Exemples de variétés orientables].

- 1) Montrer que pour sa structure de variété réelle sous-jacente, une variété analytique complexe est toujours orientable.
- 2) Montrer que l'espace total du fibré tangent à une variété différentiable est toujours une variété orientable.

Exercice VII.5. [Les espaces projectifs]. Ils ont été définis en 6.4 a.

- 1) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , montrer qu'il existe sur $\mathbb{P}(n, \mathbb{K})$ une structure de variété différentiable telle que la projection de $\mathbb{K}^{n+1} - \{0\}$ sur $\mathbb{P}(n, \mathbb{K})$ soit un difféomorphisme local. On définira un atlas de $\mathbb{P}(n, \mathbb{K})$ et on donnera l'expression explicite des changements de carte.
- 2) Montrer que l'espace projectif réel $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$ est orientable si n est impair et non orientable si n est pair.
- 3) Montrer que le revêtement orientable à deux feuillettes de l'espace projectif réel $\mathbb{P}(2p, \mathbb{R})$, de dimension paire $2p$, est la sphère S^{2p} .

Exercice VII.6. [La bande de Möbius]. Elle a été définie en 6.4 b.

- 1) Montrer que la bande de Möbius est une variété différentiable non orientable de dimension 2. Pour cela, on pourra en construire un atlas et donner l'expression explicite des changements de carte, puis utiliser le critère 6.3 c.

2) Montrer que le revêtement orientable à deux feuilletts de la bande de Möbius est le cylindre $S^1 \times]-1, 1[$.

3) Montrer que l'ensemble des droites non orientées du plan peut, de manière naturelle, être muni d'une structure de variété différentiable qui en fait une bande de Möbius. [Indication : on pourra préalablement définir une structure différentiable sur l'ensemble des droites orientées du plan.]

Exercice VII.7. [La bouteille de Klein]. Elle a été définie en 6.4 c.

1) Montrer que la bouteille de Klein est une variété différentiable non orientable de dimension 2. Pour cela, on pourra en construire un atlas et donner l'expression explicite des changements de carte, puis utiliser le critère 6.3 c.

2) Montrer que le revêtement orientable à deux feuilletts de la bouteille de Klein est le tore $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

3) Construire un plongement de la bouteille de Klein dans \mathbb{R}^4 .

8. Solutions

Solution VII.1. Le polynôme caractéristique de A est $\Pi_A(X) = (1 - X)^2$. La seule valeur propre est 1, avec la multiplicité 2. Les parties semi-simple et nilpotente de A sont, respectivement,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de B est $\Pi_B(X) = -(1 + X)(1 - X)$. Les deux valeurs propres, 1 et -1 , sont simples. L'endomorphisme B est donc semi-simple, et même diagonalisable sur le corps \mathbb{R} . Soient e_1 et e_2 les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^2 . Alors e_1 et $e_1 - 2e_2$ sont vecteurs propres de B associés, respectivement, aux valeurs propres 1 et -1 .

Le polynôme caractéristique de C est $\Pi_C(X) = -(1 + X)(1 - X)$. Les deux valeurs propres, 1 et -1 , sont simples. L'endomorphisme C est donc semi-simple, et même diagonalisable sur le corps \mathbb{R} . Les vecteurs $e_1 + e_2$ et $e_1 - e_2$ sont vecteurs propres de C associés, respectivement, aux valeurs propres 1 et -1 .

Solution VII.2. Notons e_1, e_2, e_3 et e_4 les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^4 . L'image de A est le sous-espace de dimension 1 engendré par $e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$, et son noyau est le sous-espace de dimension 3 engendré par $e_1 - e_2, e_2 - e_3$ et $e_3 - e_4$, qui sont vecteurs propres associés à la valeur propre 0, de multiplicité 3. La seule autre valeur propre est 10, de multiplicité 1, dont $e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$ est un vecteur propre associé. Comme il y a une base de vecteurs propres, A est semi-simple, et même diagonalisable sur le corps \mathbb{R} .

Solution VII.3. Lorsque $a \neq 1$, l'endomorphisme de matrice A a des valeurs propres simples, donc est semi-simple. Lorsque $a = 1$, cet endomorphisme admet 1 pour valeur propre double. Sa décomposition en partie semi-simple et partie nilpotente est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc lorsque $a = 1$, A n'est ni semi-simple ni nilpotent.

Lorsque b n'est égal ni à -1 , ni à 3, les valeurs propres de B sont simples, B est donc semi-simple. Lorsque $b = -1$, B est nilpotent. Lorsque $b = 3$, la décomposition de B en partie semi-simple et partie nilpotente est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc lorsque $b = 3$, B n'est ni semi-simple ni nilpotent.

Le polynôme caractéristique de C est $\Pi_C(X) = (1 - X)^2(c - X)$. Comme 1 est toujours valeur propre, C n'est jamais nilpotent.

Lorsque $c = 1$, C admet 1 pour valeur propre triple et a pour décomposition en partie semi-simple et partie nilpotente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc lorsque $c = 1$, C n'est ni semi-simple ni nilpotent.

Lorsque $c \neq 1$, C admet 1 pour valeur propre double, et le sous-espace propre correspondant est de dimension 1 : il est engendré par le second vecteur e_2 de la base canonique de \mathbb{R}^3 . L'endomorphisme C n'est donc, dans ce cas, ni semi-simple, ni nilpotent. L'algorithme de la proposition 1.16 permet de déterminer ses parties semi-simple et nilpotente. Ce sont, respectivement,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution VII.4. [Exemples de variétés orientables].

1) Soit (U_k, φ_k) , $k \in I$, un atlas d'une variété analytique complexe M . Soient k et l deux éléments de I . Le changement de cartes $\varphi_l \circ \varphi_k^{-1}$ s'exprime par des formules de la forme $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (Z_1, \dots, Z_n)$, où chaque Z_i est une fonction holomorphe, à valeurs complexes, des n variables complexes z_1, \dots, z_n . Posons, pour chaque j ($1 \leq j \leq n$),

$$z_j = x_j + iy_j, \quad Z_j = X_j + iY_j.$$

Les X_j et Y_j sont maintenant $2n$ fonctions différentiables des $2n$ variables réelles $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. La matrice jacobienne du changement de cartes, pour la structure de variété réelle sous-jacente, a pour expression

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} & \frac{\partial X_1}{\partial y_1} & \frac{\partial X_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} & \frac{\partial X_n}{\partial y_1} & \frac{\partial X_n}{\partial y_n} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial Y_n}{\partial x_n} & \frac{\partial Y_n}{\partial y_1} & \frac{\partial Y_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Mais d'après les relations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_j}$, $\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial X_i}{\partial y_j}$, la matrice

jacobienne de changement de cartes est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$, où A et B sont des

matrices $n \times n$. Son déterminant $(\det A)^2 + (\det B)^2$ est donc positif. Le critère 6.3 b montre que la variété M , pour sa structure réelle sous-jacente, est orientable.

2) Soit (U_k, φ_k) , $k \in I$, un atlas d'une variété différentiable M . Soient k et l deux éléments de I . Le changement de cartes $\varphi_l \circ \varphi_k^{-1}$ s'exprime par des formules de la forme $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n)$, où chaque y_i est une fonction différentiable, à

valeurs réelles, des n variables réelles x_1, \dots, x_n . Pour les cartes associées de TM , le changement de cartes s'écrit $(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_n)$, avec

$$w_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_k} v_k.$$

La matrice jacobienne du champ de cartes, pour le fibré tangent, a donc pour expression

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} & 0 & 0 \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_k} v_k & \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_n \partial x_k} v_k & \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_1 \partial x_k} v_k & \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_n \partial x_k} v_k & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Elle est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \end{pmatrix}$, où A et B sont des matrices $n \times n$. Son déterminant $(\det A)^2$ est donc positif. Le critère 6.3 b montre que l'espace total TM du fibré tangent est une variété orientable.

Solution VII.5. [Les espaces projectifs].

1) Notons $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(n, \mathbb{R})$ la projection canonique. Pour chaque i ($1 \leq i \leq n+1$), soit V_i l'ensemble des éléments $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ tels que $x_i \neq 0$, et $U_i = \pi(V_i)$. Les V_i sont des ouverts de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, dont la réunion est $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. Soit $\psi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application

$$\psi_i : (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto z = \left(z_i^k = \frac{x_k}{x_i}, 1 \leq k \leq n+1, k \neq i \right).$$

Deux éléments x et y de V_i sont équivalents si et seulement si $\psi_i(x) = \psi_i(y)$. Il existe donc une application bijective $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que pour tout $x \in V_i$, $\psi_i(x) = \varphi_i \circ \pi(x)$.

Munissons $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$ de la topologie pour laquelle chaque U_i est un ouvert et chaque φ_i un homéomorphisme de U_i sur \mathbb{R}^n . On vérifie d'ailleurs que cette topologie n'est autre que la topologie quotient de celle de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ par la relation d'équivalence servant à définir $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$. Les (U_i, φ_i) , $1 \leq i \leq n+1$, forment un atlas de $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$, qui définit sur cet espace une structure de variété topologique de dimension n . Nous allons prouver que cet atlas est différentiable.

Soient i et j deux éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$. L'ensemble $U_i \cap U_j$ est non vide, car $\pi^{-1}(U_i \cap U_j) = V_i \cap V_j$ est l'ensemble des éléments $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ tels que $x_i \neq 0$ et $x_j \neq 0$. Soit \dot{x} un élément de $U_i \cap U_j$. Notons $\varphi_i(\dot{x}) = (y_k; 1 \leq k \leq n+1, k \neq i)$, et $\varphi_j(\dot{x}) = (z_l; 1 \leq l \leq n+1, l \neq j)$. L'élément $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, défini par

$$x_k = \begin{cases} y_k & \text{si } 1 \leq k \leq n+1, k \neq i, \\ 1 & \text{si } k = i, \end{cases}$$

est un représentant de \dot{x} . Nous avons donc $x_j = y_j \neq 0$, et les composantes z_l de $\varphi_j(\dot{x})$ ont pour expression

$$z_l = \begin{cases} \frac{y_l}{y_j} & \text{si } 1 \leq l \leq n+1, l \neq i, l \neq j, \\ \frac{1}{y_j} & \text{si } l = i. \end{cases}$$

L'application de changement de cartes $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est analytique (et même, plus précisément, algébrique puisqu'elle s'exprime au moyen de fractions rationnelles). L'atlas de $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$ que nous avons construit est donc analytique.

Les mêmes raisonnements s'appliquent à $\mathbb{P}(n, \mathbb{C})$.

2) Nous avons vu (4.15 b) que la sphère S^n est une sous-variété de \mathbb{R}^{n+1} , contenue dans l'ouvert $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. Chaque point \hat{x} de $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$ a deux représentants éléments de S^n , qui sont deux points diamétralement opposés (x_1, \dots, x_{n+1}) , et $(-x_1, \dots, -x_{n+1})$, avec $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$. Nous voyons ainsi qu'on peut définir l'espace projectif $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$ comme quotient de la sphère S^n par la relation d'équivalence dont les classes sont les couples de points diamétralement opposés. On vérifie aisément que la topologie et la structure différentiable ainsi obtenues sur $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$ coïncident avec celles construites dans la question précédente.

Pour tout point $x \in S^n$, munissons l'espace tangent $T_x S^n$ de l'orientation telle qu'en prenant une base d'orientation positive de cet espace et en lui ajoutant, comme $n+1$ -ième vecteur, un vecteur dirigé vers l'extérieur de la sphère, on obtienne une base d'orientation positive de \mathbb{R}^{n+1} . Nous avons ainsi défini une orientation de S^n , donc prouvé que S^n est une variété orientable.

L'application antipodale $x \mapsto -x$ transforme chaque vecteur de \mathbb{R}^{n+1} en son opposé, donc transforme une base de \mathbb{R}^{n+1} en une base de même orientation si $n+1$ est pair, d'orientation opposée si $n+1$ est impair. Cette application transforme un vecteur, attaché au point x de S^n et dirigé vers l'extérieur de la sphère, en un vecteur attaché au point $-x$ de la sphère et dirigé aussi vers l'extérieur. Par suite, le prolongement aux vecteurs de l'application antipodale $x \mapsto -x$ transforme une base de $T_x S^n$ d'orientation positive (pour l'orientation de S^n définie ci-dessus) en une base de $T_{-x} S^n$

- d'orientation positive si n est impair,
- d'orientation négative si n est pair.

Nous en déduisons que si n est impair, $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$ est orientable car on peut orienter l'espace tangent en chacun de ses points d'une orientation telle que la projection canonique de S^n sur $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$ préserve l'orientation. Nous en déduisons aussi que si n est pair, $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$ n'est pas orientable. Considérons en effet un demi-grand cercle de la sphère S^n , joignant deux points diamétralement opposés x et $-x$. Sa projection sur $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$ est un lacet ayant pour origine et pour extrémité le point \hat{x} (classe d'équivalence commune à x et $-x$). Choisissons une orientation de l'espace tangent $T_{\hat{x}} \mathbb{P}(n, \mathbb{R})$, et transportons cette orientation par transport continu le long de ce lacet, comme indiqué en 6.3 c. En relevant sur la sphère ce transport continu, nous obtenons sur la sphère S^n une orientation de l'espace tangent à la sphère en chaque point du demi-grand cercle joignant les points x et $-x$, dépendant continûment du point considéré. Comme la sphère S^n est orientable, les orientations de $T_x S^n$ et de $T_{-x} S^n$ ainsi construites sont soit toutes deux positives, soit toutes deux négatives. Par suite l'orientation initialement choisie de $T_{\hat{x}} \mathbb{P}(n, \mathbb{R})$ et celle obtenue par transport continu le long du lacet considéré, sont opposées. Le critère 6.3 c permet de conclure.

3) Nous avons vu dans la question précédente que pour tout entier $n > 0$, il existe un revêtement de $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$ par la sphère S^n , chaque point de $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$ ayant dans S^n deux antécédents diamétralement opposés.

Supposons n pair. La sphère S^n étant orientable et l'espace projectif $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$ ne l'étant pas, l'unicité du revêtement orientable à deux feuillettes (à un difféomorphisme près) nous permet d'affirmer que S^n est bien le revêtement orientable à deux feuillettes de $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$.

Pour n impair, S^n et $\mathbb{P}(n, \mathbb{R})$ sont deux variétés orientables. Pour $n = 1$, S^1 et $\mathbb{P}(1, \mathbb{R})$ sont difféomorphes. Mais pour $n > 1$, ce n'est en général pas le cas : par exemple, pour $n = 3$, la sphère S^3 s'identifie au groupe $SU(2)$ et $\mathbb{P}(3, \mathbb{R})$ s'identifie au groupe $SO(3)$.

Solution VII.6. [La bande de Möbius]. Notons \mathcal{M} la bande de Möbius et $\varpi : \mathbb{R} \times]-1, 1[\rightarrow \mathcal{M}$ la projection canonique. Les restrictions de ϖ à $]-\pi/2, \pi/2[\times]-1, 1[$ et à $]0, \pi[\times]-1, 1[$ sont injectives. Posons $U_1 = \varpi(]-\pi/2, \pi/2[\times]-1, 1[$, $U_2 = \varpi(]0, \pi[\times]-1, 1[$, et notons φ_1 et φ_2 les inverses des restrictions de ϖ , respectivement, à $]-\pi/2, \pi/2[\times]-1, 1[$ et à $]0, \pi[\times]-1, 1[$. Munissons \mathcal{M} de la topologie pour laquelle U_1 et U_2 sont des ouverts, φ_1 et φ_2 des homéomorphismes. Nous obtenons ainsi un atlas $((U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2))$ de \mathcal{M} , qui fait de \mathcal{M} une variété topologique. Afin de déterminer l'expression des changements de carte, nous remarquons que $U_1 \cap U_2$ a deux composantes connexes, que nous noterons W et W' , qui sont respectivement

$$W = \varpi(]0, \pi/2[\times]-1, 1[), \quad W' = \varpi(]-\pi/2, 0[\times]-1, 1[) = \varpi(] \pi/2, \pi[\times]-1, 1[).$$

L'application changement de carte $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ a pour expression

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } 0 < x < \pi/2, \\ (x - \pi, -y) & \text{si } \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

L'application de changement de carte est différentiable. La bande de Möbius \mathcal{M} est donc une variété différentiable, de dimension 2.

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que la construction décrite ci-dessus est l'équivalent mathématique exact de la construction physique d'une bande de Möbius au moyen de deux rectangles de papier, de longueur π et de largeur 2 : on commence par coller ces deux rectangles ensemble de façon telle qu'un des côtés de longueur 2 de l'un des rectangles soit exactement au milieu de l'autre rectangle, parallèle aux deux côtés de longueur 2. On obtient ainsi un seul rectangle, de longueur $3\pi/2$ et de largeur 2, dont la partie centrale est en double épaisseur. Puis on colle ensemble les deux parties en simple épaisseur du ruban ainsi obtenu, après l'avoir vrillé.

Le critère 6.3 c, avec pour lacet la projection de $[0, \pi] \times \{0\}$, montre immédiatement que la bande de Möbius n'est pas orientable.

2) Le quotient de \mathbb{R} par la relation d'équivalence

$$x_1 \text{ équivalent à } x_2 \text{ si } x_2 - x_1 = 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z},$$

est le cercle trigonométrique S^1 . Le quotient de $\mathbb{R} \times]-1, 1[$ par la relation d'équivalence

$$(x_1, y_1) \text{ équivalent à } (x_2, y_2) \text{ si } x_2 - x_1 = 2k\pi \text{ et } y_2 = y_1, \text{ avec } k \in \mathbb{Z},$$

est donc le cylindre $S^1 \times]-1, 1[$. Il est facile de voir que le quotient de ce cylindre par la relation d'équivalence

$$(\theta_1, y_1) \text{ équivalent à } (\theta_2, y_2) \text{ si } \theta_2 - \theta_1 = k\pi \text{ et } y_2 = (-1)^k y_1, \text{ avec } k \in \mathbb{Z},$$

n'est autre que la bande de Möbius. Le cylindre est connexe et orientable, et sa projection sur la bande de Möbius \mathcal{M} satisfait les conditions (i) et (ii) du théorème 6.5. Le cylindre $S^1 \times]-1, 1[$ est donc bien le revêtement orientable à deux feuillets de la bande de Möbius \mathcal{M} .

3) Soit \mathcal{E}^2 un plan affine. En choisissant pour origine, de manière quelconque, un point O de ce plan, nous l'identifions à l'espace vectoriel associé E^2 . Nous munissons E^2 d'une structure euclidienne et d'une orientation. Soit Δ une droite affine orientée du plan \mathcal{E}^2 , et P la projection orthogonale du point O sur cette droite. Nous pouvons associer à la droite orientée Δ un couple (θ, y) , où $\theta \in S^1$ et $y \in \mathbb{R}$, de la manière suivante : θ est l'angle

polaire d'un vecteur directeur de la droite orientée Δ , et y est la longueur du segment de droite OP , c'est-à-dire la distance de l'origine O à la droite Δ , affectée du signe $+$ si la base de E^2 formée par le vecteur OP (d'origine O et d'extrémité P) et par le vecteur directeur de Δ , rangés dans cet ordre, est d'orientation positive, et du signe $-$ dans le cas contraire. La correspondance $\Delta \mapsto (\theta, y)$ ainsi construite est une bijection de l'ensemble des droites affines du plan \mathcal{E}^2 sur le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$, qu'on peut employer pour définir, sur l'ensemble des droites orientées de \mathcal{E}^2 , une structure de variété différentiable.

Supposons maintenant que Δ soit une droite affine non orientée du plan \mathcal{E}^2 . Nous pouvons l'orienter de deux manières différentes. Nous obtenons ainsi deux droites orientées Δ^+ et Δ^- , auxquelles correspondent deux points (θ, y) et $(\theta + \pi, -y)$ du cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$. Nous voyons donc que l'ensemble des droites affines non orientées du plan \mathcal{E}^2 s'identifie au quotient du cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ par une relation d'équivalence, qui n'est autre que celle rencontrée dans la question précédente. La seule différence notable est la suivante : dans la question précédente, le cylindre considéré était $S^1 \times]-1, 1[$, tandis que dans la question présente c'est $S^1 \times \mathbb{R}$. Mais comme \mathbb{R} et $]-1, 1[$ sont difféomorphes, nous pouvons quand même conclure que l'ensemble des droites affines non orientées du plan possède une structure de variété différentiable naturelle pour laquelle il s'identifie à une bande de Möbius.

Le lecteur est invité à construire, de manière analogue, une structure de variété différentiable sur l'ensemble des droites affines non orientées de \mathbb{R}^3 .

Solution VII.7. [La bouteille de Klein].

1) Notons \mathcal{K} la bouteille de Klein et $\varpi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{K}$ la projection canonique. La restriction de ϖ à tout rectangle ouvert de la forme $]a, b[\times]c, d[$, avec $0 < b - a \leq \pi$, $0 < d - c \leq 2\pi$, est injective et a pour image une partie $U_{(a,b,c,d)}$ de \mathcal{K} . On note $\varphi_{(a,b,c,d)}$ l'inverse de la restriction de ϖ à $]a, b[\times]c, d[$. On munit \mathcal{K} de la topologie pour laquelle les $U_{(a,b,c,d)}$ sont des ouverts et les $\varphi_{(a,b,c,d)}$ des homéomorphismes. On vérifie d'ailleurs que cette topologie n'est autre que la topologie quotient de celle de \mathbb{R}^2 par la relation d'équivalence qui définit \mathcal{K} . L'ensemble des $(U_{(a,b,c,d)}, \varphi_{(a,b,c,d)})$ constitue un atlas de \mathcal{K} , qui en fait une variété topologique connexe de dimension 2.

Afin de donner une forme relativement simple aux formules de changement de carte, nous imposerons aux réels a, b, c, d de vérifier $0 < b - a \leq \pi/2$, $0 < d - c \leq \pi$. En raison de ces inégalités, l'intersection du domaine de définition de deux cartes, s'il est non vide, est connexe. Soient alors $(U_{(a,b,c,d)}, \varphi_{(a,b,c,d)})$ et $(U_{(a',b',c',d')}, \varphi_{(a',b',c',d')})$ deux cartes vérifiant ces conditions. Nous avons $U_{(a,b,c,d)} \cap U_{(a',b',c',d')} \neq \emptyset$ si et seulement si il existe deux entiers k et l tels que l'on ait, à la fois,

$$]a + k\pi, b + k\pi[\cap]a', b'[\neq \emptyset$$

et

$$\begin{cases}]c + 2\pi l, d + 2\pi l[\cap]c', d'[\neq \emptyset & \text{si } k \text{ est pair,} \\]-d + 2\pi l, -c + 2\pi l[\cap]c', d'[\neq \emptyset & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Lorsque c'est le cas, chacun des entiers k et l est unique (en raison des inégalités imposées). L'application de changement de carte $\varphi_{(a',b',c',d')} \circ \varphi_{(a,b,c,d)}^{-1}$ a pour expression

$$(x, y) \mapsto (x' = x + k\pi, y' = (-1)^k y + 2l\pi).$$

Les applications de changement de carte étant différentiables, la bouteille de Klein \mathcal{K} est une variété différentiable.

En appliquant le critère 6.3 c au lacet $\varpi([0, \pi] \times \{0\})$, on montre aisément que \mathcal{K} est non orientable.

2) Le quotient de \mathbb{R}^2 par la relation d'équivalence

(x_1, y_1) équivalent à (x_2, y_2) si $x_2 - x_1 = 2k\pi$, $y_2 - y_1 = 2l\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$, est le tore $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$. La bouteille de Klein \mathcal{K} est le quotient de ce tore par la relation d'équivalence

$$(\alpha_1, \beta_1) \text{ équivalent à } (\alpha_2, \beta_2) \text{ si } \begin{cases} \alpha_2 - \alpha_1 = k\pi, & \text{avec } k \in \mathbb{Z}, \text{ et} \\ \beta_2 - (-1)^k \beta_1 = 2l\pi, & \text{avec } l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

On vérifie aisément que la projection canonique de \mathbb{T}^2 sur \mathcal{K} est un revêtement à deux feuillettes. Comme \mathbb{T}^2 est connexe et orientable, ce revêtement est le revêtement orientable à deux feuillettes de \mathcal{K} .

3) Rappelons d'abord les formules permettant de plonger le tore $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ dans \mathbb{R}^3 . Soient R et r deux réels vérifiant $0 < r < R$. L'application $f : (\varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$, ayant pour expression

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \theta) \cos \varphi, \\ y = (R + r \cos \theta) \sin \varphi, \\ z = r \sin \theta, \end{cases}$$

est un plongement du tore \mathbb{T}^2 dans \mathbb{R}^3 . On peut modifier légèrement ces formules afin d'obtenir un plongement de la bouteille de Klein \mathcal{K} dans \mathbb{R}^4 . Soit en effet $g : (\varphi, \theta) \mapsto (x, y, z, t)$ l'application de \mathbb{T}^2 dans \mathbb{R}^4 définie par

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \theta) \cos(2\varphi), \\ y = (R + r \cos \theta) \sin(2\varphi), \\ z = r \sin \theta \cos \varphi, \\ t = r \sin \theta \sin \varphi. \end{cases}$$

On vérifie que deux points du tore de coordonnées angulaires (φ, θ) et (φ', θ') ont même image si et seulement si l'on a, soit $\varphi = \varphi'$ et $\theta = \theta'$ (modulo 2π), soit $\varphi' = \varphi + \pi$ et $\theta + \theta' = 0$ (modulo 2π). L'image de \mathbb{T}^2 par l'application g s'identifie donc au quotient du tore par la relation d'équivalence rencontrée dans la question précédente lors de la construction du revêtement à deux feuillettes de la bouteille de Klein par le tore.

Afin de s'assurer qu'on a bien construit ainsi un plongement, il suffit de vérifier que la matrice jacobienne de l'application g est partout de rang 2, ce qui ne présente pas de difficulté.

Bibliographie

1. Conseils de lecture

Les sujets traités dans le présent livre sont présentés aussi dans la plupart des ouvrages récents sur les systèmes dynamiques, tels que [3, 4, 5, 19, 20, 25, 29, 35, 36, 37, 50, 51, 61, 63]. Pour la plupart, ces ouvrages sont plus complets et d'un niveau plus élevé que le présent livre. Quelques uns cependant sont accessibles à des étudiants de deuxième cycle : c'est le cas, notamment, de l'ouvrage de M. Demazure [19] (issu d'un cours enseigné à l'école Polytechnique), de l'ouvrage de M. Hirsch et S. Smale [35] (où le lecteur trouvera d'intéressantes applications des systèmes dynamiques à l'écologie) et de l'ouvrage de R. Devaney [20]. Ce dernier est particulièrement recommandé, car il expose, de manière remarquablement claire, les idées essentielles de la théorie des systèmes dynamiques d'abord dans le cas simple où l'espace des phases est de dimension 1; de plus il traite certains aspects importants (tels que la stabilité structurelle, les systèmes chaotiques, la dynamique symbolique, l'itération d'applications analytiques dans le plan complexe ou la sphère de Riemann) qui n'ont été qu'effleurés, ou n'ont pas été abordés dans le présent livre.

L'ouvrage de M.C. Irwin [37], relativement concis, offre une excellente présentation du théorème de Hartman et Grobman et du théorème des variétés stable et instable, avec des démonstrations complètes et élégantes.

Les très riches ouvrages de J.H. Hubbard et B.H. West [36], L. Perko [51] et F. Verhulst [61] présentent à peu près tous les sujets traités dans ce livre, plus quelques autres tels que la méthode de moyennisation, la stabilité structurelle, les bifurcations. Ils contiennent de nombreux exemples. Il en est de même des ouvrages de J. Guckenheimer et P. Holmes [29] et de S. Wiggins [63], plus orientés vers l'étude des dynamiques chaotiques.

Les ouvrages de R. Abraham et J. Robbin [1], D.V. Anosov, V.I. Arnol'd et S.P. Novikov [3, 4, 5], G.D. Birkhoff [9], M. Chaperon [12], J.-P. Francoise [25], J. Moser [47], J. Palis et W. de Melo [50], sont, à notre avis, d'un niveau plus élevé. Les sujets qui y sont traités (transversalité, généricité, formes normales, stabilité structurelle, bifurcations, . . .) n'ont pas été abordés dans le présent livre. L'ouvrage de J. Palis et W. de Melo [50] est cependant partiellement abordable pour un étudiant de second cycle. Celui de M. Chaperon [12] comporte une étude approfondie des théorèmes de conjugaison différentiable du type du théorème de Sternberg.

Le petit livre d'Edward Nelson [49], très original, intéressera les lecteurs qui souhaitent rapprocher les mécaniques classique et quantique. Il contient une étude approfondie des propriétés du flot d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point d'équilibre (il présente, notamment, le théorème de Sternberg que nous avons cité sans démonstration), et compare ces propriétés à celles des groupes à un paramètres d'opérateurs unitaires dans un espace de Hilbert.

L'ouvrage de P. Hartman [31] est un grand classique sur la théorie des équations différentielles, extrêmement riche. Le lecteur y trouvera, notamment, une étude des points d'équilibre des champs de vecteurs sous des hypothèses plus générales que celles faites dans le présent livre, des équations différentielles non autonomes à coefficients

périodiques, des équations du second ordre. Le livre de M. Roseau [53], celui de M. Rouché et J. Mawhin [54], présentent une étude très approfondie de la stabilité, y compris pour les équations non autonomes. Les très riches ouvrages de V.I. Arnol'd [6, 7, 8], abordent une foule de questions intéressantes.

Pour les quelques notions de Topologie algébrique et de Topologie différentielle abordées dans ce livre, le lecteur pourra consulter les ouvrages de C. Godbillon [27], W.S. Massey [44] et S. Lefschetz [41], de V. Guillemin et A. Pollack [30], M.W. Hirsch [34] et J.W. Milnor [45, 46]. Les notions concernant les surfaces que nous avons utilisées figurent dans les livres d'A. Gramain [28], D. Lehmann et C. Sacré [42] et J. Stillwell [60].

Les ouvrages d'Y. Choquet-Bruhat [14], C. Godbillon [26], J. Lafontaine [39], S. Lang [40], S. Sternberg [59], F.W. Warner [62] permettront au lecteur d'approfondir les notions de Géométrie différentielle brièvement présentées au chapitre VII. Le lecteur trouvera aussi ces notions dans les livres d'Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette et M. Dillard-Bleik [15, 16], avec de nombreuses applications à des problèmes de Physique mathématique.

Les quelques notions d'Algèbre linéaire que nous avons utilisées seront trouvées dans les ouvrages de G. Allaire et M. Sidi Kaber [2], F. Bories-Longuet [10], C. Chevalley [13] et P. Saux Picart [56]; celles d'Analyse complexe dans les ouvrages de H. Cartan [11], P. Dolbeault [22], M. Hervé [33], T. Needham [48] et W. Rudin [55].

2. Références

- [1] Abraham, Ralph, Robbin, Joel, *Transversal mappings and flows*. W.A. Benjamin, Inc., New York, 1967.
- [2] Allaire, Grégoire, Sidi Kaber, Mahmoud, *Algèbre linéaire numérique*. Ellipses / éditions marketing S.A., Paris, 2002.
- [3] Anosov, D.V., Arnol'd, V.I. (Eds), *Dynamical systems I*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. Réédité en 1997, pratiquement sans changement, sous le titre *Ordinary differential equations and smooth dynamical systems*.
- [4] Arnol'd, V.I. (Ed.), *Dynamical systems III*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [5] Arnol'd, V.I., Novikov, S.P. (Eds), *Dynamical systems IV*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [6] Arnol'd, Vladimir, *Équations différentielles ordinaires*. Éditions Mir, Moscou, 1974.
- [7] Arnol'd, Vladimir, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. Éditions Mir, Moscou, 1980 (édition en russe : 1978).
- [8] Arnol'd, V.I. (Ed.), *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [9] Birkhoff, George D., *Dynamical systems*. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. IX, New York, 1927.
- [10] Bories-Longuet, Francette, *Algèbre linéaire*. Ellipses / éditions marketing S.A., Paris, 2000.
- [11] Cartan, Henri, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, Paris, 1961.
- [12] Chaperon, Marc, *Géométrie différentielle et singularités de systèmes dynamiques*. Astérisque 138-139, Société mathématique de France, Paris, 1986.
- [13] Chevalley, Claude, *Théorie des groupes de Lie; groupes algébriques, théorèmes généraux sur les algèbres de Lie*. Hermann, Paris, 1968.
- [14] Choquet-Bruhat, Yvonne, *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*. Dunod,

- Paris, 1968.
- [15] Choquet-Bruhat, Yvonne, DeWitt-Morette, Cécile, and Dillard-Bleik, Margaret, *Analysis, manifolds and physics*. North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [16] Choquet-Bruhat, Yvonne, DeWitt-Morette, Cécile, *Analysis, manifolds and physics, Part II : 92 applications*. North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [17] Christol, Gilles, Cot, Anne, et Marle, Charles-Michel, *Topologie*. Ellipses / éditions marketing S.A., Paris, 1997.
- [18] Christol, Gilles, Cot, Anne, et Marle, Charles-Michel, *Calcul différentiel*. Ellipses / éditions marketing S.A., Paris, 1997.
- [19] Demazure, Michel, *Catastrophes et bifurcations*. Ellipses / éditions marketing S.A., Paris, 1989.
- [20] Devaney, Robert L., *An introduction to chaotic dynamical systems*, second edition. Addison Wesley, Redwood City, 1989.
- [21] Dieudonné, Jean, *Éléments d'analyse, tome I (fondements de l'analyse moderne)*. Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [22] Dolbeault, Pierre, *Analyse complexe*. Masson, Paris, 1990.
- [23] Dugundji, James, *Topology*. Allyn and Bacon, inc., Boston, 1966.
- [24] Feigenbaum, Mitchell J., "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations", *J. Stat. Phys.* 19 (1978), 25–52. "The universal metric properties of nonlinear transformations", *J. Stat. Phys.* 21 (1979), 669–706.
- [25] François, Jean-Pierre, *Géométrie analytique et systèmes dynamiques*. Presses universitaires de France, Paris, 1995.
- [26] Godbillon, Claude, *Géométrie différentielle et Mécanique analytique*. Hermann, Paris, 1969.
- [27] Godbillon, Claude, *Éléments de topologie algébrique*. Hermann, Paris, 1971.
- [28] Gramain, André, *Topologie des surfaces*. Presses universitaires de France, Paris, 1971.
- [29] Guckenheimer, J., and Holmes, P., *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [30] Guillemin, Victor, and Pollack, Alan, *Differential topology*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.
- [31] Hartman, Philip, *Ordinary differential equations*, second edition. Birkhäuser, Boston, 1982 (first edition 1973).
- [32] Hénon, M., "A two-dimensional mapping with a strange attractor", *Commun. math. Phys.* 50 (1976), 69–77.
- [33] Hervé, Michel, *Les fonctions analytiques*. Presses universitaires de France, Paris, 1982.
- [34] Hirsch, Morris W., *Differential topology*. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [35] Hirsch, Morris W., and Smale, Stephen, *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Academic Press, New York, 1974.
- [36] Hubbard, John H., West, Beverly H., *Differential equations : a dynamical system approach, higher-dimensional systems*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [37] Irwin, M.C., *Smooth dynamical systems*. Academic Press, London, 1980.
- [38] Krée, Paul, *Intégration et théorie de la mesure, une approche géométrique*. Ellipses / éditions marketing S.A., Paris, 1997.
- [39] Lafontaine, Jacques, *Introduction aux variétés différentielles*. Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
- [40] Lang, Serge, *Differential manifolds*. Addison-Wesley, Reading, 1972.

- [41] Lefschetz, Solomon, *Introduction to Topology*. Princeton University Press, Princeton, 1949.
- [42] Lehmann, Daniel, et Sacré, Carlos, *Géométrie et topologie des surfaces*. Presses universitaires de France, Paris, 1982.
- [43] Lorenz, Edward N., “Deterministic nonperiodic flow”, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, 2 (1963), 130–141.
- [44] Massey, W.S., *Algebraic topology : an introduction*. Springer-Verlag, New York, 1967.
- [45] Milnor, John W., *Morse theory*. Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [46] Milnor, John W., *Topology from the differentiable viewpoint*. The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
- [47] Moser, Jürgen, *Stable and random motions in dynamical systems*. Princeton University Press, Princeton, 1973.
- [48] Needham, Tristan, *Visual complex analysis*. Oxford University Press, Oxford, 1997.
- [49] Nelson, Edward, *Topics in Dynamics I : Flows*. Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [50] Palis, Jacob Jr., de Melo, Welington, *Geometric theory of dynamical systems*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [51] Perko, Lawrence, *Differential equations and dynamical systems*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [52] Queffélec, Hervé, *Topologie*. Masson, Paris, 1998.
- [53] Roseau, Maurice, *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*. Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [54] Rouché, M., Mawhin, J., *Équations différentielles ordinaires*, tomes 1 et 2. Masson et Cie, Paris, 1973.
- [55] Rudin, Walter, *Real and complex analysis*, second edition. McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
- [56] Saux Picart, Philippe, *Cours de calcul formel : algorithmes fondamentaux*. Ellipses / éditions marketing S.A., Paris, 1999.
- [57] Smale, Stephen, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73, 1967, 747–817.
- [58] Sternberg, Shlomo, “Local contractions and a theorem of Poincaré”, *Amer. J. of Math.*, 79, 1957, 809–824. “On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n -space, II”, *Amer. J. of Math.*, 80, 1958, 623–631. “The structure of local homeomorphisms, III”, *Amer. J. of Math.*, 81, 1959, 578–604.
- [59] Sternberg, Shlomo, *Lectures on differential geometry*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.
- [60] Stillwell, John, *Geometry of surfaces*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [61] Verhulst, Ferdinand, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [62] Warner, F.W., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Scott, Foresman and Co., Glenview, 1971.
- [63] Wiggins, S., *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [64] Yger, Alain, *Analyse complexe et Distributions*. Ellipses / éditions marketing S.A., Paris, 2001.

Index

- A**
- Adapté (atlas – à une sous-variété), 251
 - Admissibles (cartes –), 248
 - Analytique (atlas –), 247
 - (système dynamique –), 4
 - Annulateur (polynôme – d'un endomorphisme), 208
 - Application de Poincaré, 98
 - de retour de Poincaré, 100
 - linéaire tangente, 259
 - temps de retour, 100
 - temps de transit, 96, 100
 - Associée (équation différentielle – à un champ de vecteurs), 260
 - Asymptotiquement stable (point d'équilibre –), 42, 43
 - Atlas, 247
 - orienté, 262
 - Attractif (point d'équilibre –), 42
 - Attractive (orbite périodique –), 94
 - Autonome (équation différentielle –), 19, 261
- B**
- Base (d'un fibré vectoriel), 258
 - Bassin d'attraction (d'un point d'équilibre), 50
 - (d'une orbite périodique), 95
 - Bassin de répulsion (d'un point d'équilibre), 50
 - (d'une orbite périodique), 95
 - Bendixson (théorème de Poincaré –), 125
 - Bernoulli (shift de –), 16
 - Bézout (théorème de –), 210
 - Borsuk (théorème de prolongement de –), 229
 - Bout (droit ou gauche), 22
 - Brouwer (théorème de –), 181
- C**
- Capacité, 109
 - Caractéristique (direction –), 67
 - d'Euler, 199, 205
 - (polynôme – d'un endomorphisme), 209
 - Carathéodory (théorème de Riemann- --Schoenflies), 246
 - Carte, 247
 - (changement de –), 247
 - Cauchy (problème de –, donnée de –, 19
 - Centre, 57
 - Champ de vecteurs, 260
 - dépendant du temps, 261
 - Col, 55, 85
 - Complète (orbite –), 50
 - Complexifié (d'un espace vectoriel réel), 208
- Conjugués (systèmes dynamiques –), 139
 - Conservatif (système mécanique –), 12
 - Continu (système dynamique –), 4
 - Continue (orientation –), 262
 - Contractible (partie –), 238
 - Coordonnées locales, 248
 - Covecteur, 254, 255
 - Coulée (d'une équation différentielle), 25
 - Couplage par dualité, 258
 - Courbe de Jordan, 183
 - Courbe intégrale, 19, 31
 - Cycle limite, 129
- D**
- Degré (d'une application), 179, 186, 187, 204
 - Demi-droite tangente, 62
 - Dérivée de Lie, 46
 - Description polaire, 70
 - Difféomorphisme (de variétés), 249
 - local (de variétés), 250
 - Différentiable (variété –), 247, 249
 - (système dynamique –), 4
 - Direction caractéristique, 66
 - Donnée de Cauchy, 19
 - Droite complexe, 177
 - Dual (d'un fibré vectoriel), 258
- E**
- Eilenberg (lemme d'–), 230
 - (critère d'–), 231
 - Énergie totale, 12
 - Ensemble α -limite ou ω -limite, 6, 23, 31
 - Ensemble instable ou stable (d'un point d'équilibre), 159
 - Équation de Liénard, 110
 - de Van der Pol, 110
 - différentielle, 19
 - différentielle associée à un champ de vecteurs, 260, 261
 - Équivalents (atlas C^p –), 247
 - Espace cotangent, 255
 - Espace fibré vectoriel, 258
 - Espace tangent, 255
 - Espace total (d'un fibré vectoriel), 258
 - Espace de Cantor, 16
 - Espace des phases, 3
 - Étale (application –), 250
 - Exposants caractéristiques, 174
 - Expression (d'une application), 250
 - Extérieur (d'une courbe de Jordan), 184, 234
- F**
- Feigenbaum (bifurcation de –), 9
 - Fer à cheval de Smale, 14

- Fibre (d'un fibré vectoriel), 258
 Fibré cotangent, 255, 259
 Fibré tangent, 255, 259
 — vectoriel, 258
 Floquet (théorème de –), 174
 Flot (d'une équation différentielle), 25, 261
 — réduit (d'une équation différentielle), 28, 29, 261
 Foyer (attractif, répulsif), 57, 76
- G**
- Gauss (transformation de –), 9
 Générateur (d'un système dynamique), 7
 — infinitésimal (d'un système dynamique), 8
 Genre, 199
 Gradient, 254
 Grobman (théorème de Hartman et –), 155, 158
 Groupe local, 26
- H**
- Hartman et Grobman (théorème de –), 155, 158
 Hétérocline, 171
 Hodographe, 65
 Homocline, 13, 171
 Homotopes (applications –), 181
 Homotopie, 181
 Hyperbolique (point d'équilibre –), 155, 158
 — (orbite périodique –), 174
 — (ensemble invariant –), 175
- I**
- Image directe ou réciproque (d'un champ de vecteurs), 31, 261
 Immergée (sous-variété –), 252
 Immersion, 250
 Indice de Lefschetz, 206
 — d'une courbe de Jordan, 188
 — d'un point d'équilibre, 196, 199, 205
 Inductance, 109
 Intérieur (d'une courbe de Jordan), 184, 234
 Intersection (nombre d'–), 205
- J**
- Janiszewski (théorème de –), 232
 Jordan (courbe de –), 183
 — (théorème de –), 226, 234
- L**
- Lacet, 263
 Lefschetz (nombre de –), 206
 Liapounov (théorème de –), 43, 44
 Liénard (équation de –), 110
 Limite (ensemble –), 6, 23, 31
 Linéarisée (d'une équation différentielle), 27, 59
 Lipschitzienne (application – ou localement –), 21
- Localement conjugués (systèmes dynamiques –), 142
 Localement trivial (fibré –), 258
 Loi d'Ohm, 109
 — de Faraday, 109
 — de la capacité, 109
- M**
- Marquée (suite bilatère –), 16
 Maximale (solution –), 19
 Même orientation (courbes de Jordan de –), 186
 — (cartes de –), 262
 Mesurable (partie –), 4
 Méthode de linéarisation, 59
 — de Newton, 10
 Möbius (bande de –), 264
 Multiplicateurs caractéristiques, 174
- N**
- Négative (orientation ou paramétrisation –), 186
 Nilpotent (endomorphisme –), 213
 Nœud attractif, 55, 56, 57, 85
 — impropre, 57
 — répulsif, 55, 56, 57, 85
 Nombre d'intersection, 205
 — de Lefschetz, 206
 Non autonome (équation différentielle –), 19, 261
 Non dégénéré (point d'équilibre –), 58
 Non errant (point –), 16
 Normal (espace topologique –), 226
- O**
- Orbite, 5, 31
 Orientable (variété –), 262
 Orientation (des fibres), 262
 — (du cercle trigonométrique), 178
 — (d'une variété), 262
 — négative, positive, 184
 — (de même –), 184
 Orientations opposées, 184, 186
 Orienté (atlas –), 262
 Orientée (courbe de Jordan –), 184
 — (variété –), 262
- P**
- Paramétrisation (d'une courbe de Jordan), 183
 Partie mesurable, 4
 Parties nilpotente et semi-simple (d'un endomorphisme), 214
 Période, 5
 — primitive, 93
 Périodique, 5
 Plan complexe, 177
 Plan tangent (à une surface), 260
 Plongement, 252
 Plus petite période positive, 93
 Poincaré (application de –), 98
 — (application de retour de –), 100
 Poincaré-Bendixson (théorème de –), 125
 Poincaré-Hopf (théorème de –), 199
 Point d'équilibre, 5, 31, 39

- Point critique (d'une fonction différentiable), 204
- Point fixe (théorème du -), 222
- Point-selle (d'une fonction différentiable), 204
- Polaire (description -), 70
- Pôle (d'une description polaire), 70
- Polynôme annulateur (d'un endomorphisme), 208
- Polynôme caractéristique (d'un endomorphisme), 209
- Portrait de phases, 5, 31
- Positive (paramétrisation ou orientation -), 186
- Primitive (période -), 93
- Problème de Cauchy, 19
- Produit fibré, 253
- tensoriel (de fibrés vectoriels), 258
- Projection canonique (d'un fibré vectoriel), 258
- Prolongement aux vecteurs (d'une application), 260
- Propriété de Schoenflies, 236
- Puits, 55, 56, 57
- R**
- Rang (d'une application), 250
- (d'un fibré vectoriel), 258
- Rapport (d'une application lipschitzienne), 21
- Réduit (flot - d'une équation différentielle), 28, 29, 261
- Répulsif (point d'équilibre -), 43
- Répulsive (orbite périodique -), 94
- Restriction (d'un système dynamique), 140
- Retour (application de - de Poincaré), 100
- (système dynamique de - de Poincaré), 101
- Rétracte par déformation, 238
- Rétraction par déformation, 238
- Revêtement orientable à deux feuillets, 199, 264
- universel, 11
- Riemann (théorème de - -Carathéodory-Schoenflies), 246
- S**
- Schoenflies (théorème de Riemann-Carathéodory -), 246
- (propriété de -), 236
- Section locale (du flot d'un champ de vecteurs), 122
- Semi-simple (endomorphisme), 213
- Shift de Bernoulli, 16
- Simplement connexe (ouvert -), 236
- Simplement transitive (action -), 254
- Smale (fer à cheval de -), 14
- Solution (d'une équation différentielle), 19, 261
- Somme directe (de fibrés vectoriels), 258
- Source, 55, 56, 57
- Sous-variété, 251
- immergée, 252
- Stable (point d'équilibre - au sens de Liapounov), 42
- Stable (point d'équilibre asymptotiquement -), 42, 43
- (orbite périodique - au sens de Liapounov), 94
- Sternberg (théorème de -), 173
- Submersion, 250
- Surface, 198
- Système dynamique, 3, 4
- déterminé par un champ de vecteurs, 29
- linéarisé, 137
- Sépare (partie qui - deux points), 230
- T**
- Tangente (à une courbe), 260
- Tangentes (applications -), 254
- Temps de retour (application -), 100
- Temps de transit (application -), 96, 100
- Théorème de Brouwer, 181
- de Floquet, 174
- de Hartman et Grobman, 155, 158
- de Janiszewski, 232
- de Liapounov, 43, 44
- de Poincaré-Bendixson, 125
- de Poincaré-Hopf, 199
- de Riemann-Carathéodory-Schoenflies, 246
- de Sard, 204
- de Sternberg, 173
- de Tietze, 227
- d'Urysohn, 226
- du point fixe, 222
- Tonneau de sécurité, 20
- Topologiquement conjugués, 139
- Trajectoire, 1, 5
- Transformation de Gauss, 9
- Transport continu, 263
- Transverse (intersection -), 172
- Triangulation (d'une surface), 203
- Trivialisation locale (d'un fibré vectoriel), 258
- U**
- Urysohn (théorème d'-), 226
- V**
- Valeur propre, 209
- régulière, 204
- singulière, 204
- Van der Pol (équation de -), 110
- Variété analytique, 248
- centrale, 170
- différentiable, 247
- instable ou stable, 87, 167, 169, 175
- topologique, 247
- Vecteur, 253, 254, 255
- directeur, 62
- propre, 209
- libre, 254
- lié, 254
- tangent, 254, 255
- Venant (en - de la direction), 63
- Vitesse, 254

Achévé d'imprimer en juin 2003
dans les ateliers de Normandie Roto Impression s.a.s.
61250 Lonrai
N° d'impression : 031376
Dépôt légal : juin 2003

Imprimé en France

La collection *Mathématiques 2^e cycle* se propose de mettre à la disposition des étudiants de licence et de maîtrise de mathématiques des ouvrages couvrant l'essentiel des programmes actuels des universités françaises. Certains de ces ouvrages pourront être utiles aussi aux étudiants qui préparent le CAPES ou l'agrégation, ainsi qu'aux élèves des grandes écoles.

Nous avons voulu rendre ces livres accessibles à tous : les sujets traités sont présentés de manière simple et progressive, tout en respectant scrupuleusement la rigueur mathématique. Chaque volume comporte un exposé du cours avec des démonstrations détaillées de tous les résultats essentiels et de nombreux exercices. Les auteurs de ces ouvrages ont tous une grande expérience de l'enseignement des mathématiques au niveau supérieur.

Ce livre est issu d'un cours professé pendant plusieurs années à l'Université Pierre et Marie Curie, en maîtrise de mathématiques. Sa lecture ne nécessite pas de connaissances préalables autres que celles habituellement enseignées dans un cours de Calcul différentiel en licence de mathématiques. Le lecteur pourra trouver ces connaissances, par exemple, dans l'ouvrage *Calcul différentiel* de la même collection, par Anne Cot, Gilles Christol et l'auteur du présent livre.

L'étude des systèmes dynamiques offre une occasion d'illustrer l'utilisation des grands théorèmes enseignés en Calcul différentiel (inversion locale, fonctions implicites,...) pour des applications précises. De plus, elle permet d'accéder rapidement à des sujets de recherche actuels.

Afin de rendre cet ouvrage facilement accessible, nous avons choisi de présenter la théorie dans le cadre des espaces affines de dimension finie, plutôt que dans celui des variétés différentiables. Cela suffit pour l'introduction et l'étude de la plupart des notions ayant un caractère local. Cependant, les variétés différentiables apparaissent inévitablement, même lorsque les systèmes dynamiques considérés sont définis sur un ouvert d'un espace affine (ne serait-ce que sous forme de variétés stable et instable d'un point d'équilibre hyperbolique). Nous avons donc présenté les quelques notions de géométrie différentielle nécessaires pour la compréhension de ce livre dans un dernier chapitre, avec d'autres compléments. Le lecteur n'en aura pas besoin avant le chapitre V ; aguerri par l'étude des quatre premiers chapitres il pourra, lorsqu'il en éprouvera le besoin, se reporter au chapitre VII où il trouvera un exposé bref, mais rigoureux et complet, de toutes ces notions.



9 782729 815301