Cours et exercices corrigés

Licence 3 • CAPES

ANALYSE COMPLEXE POUR LA LICENCE 3

Patrice Tauvel

DUNOD

ANALYSE COMPLEXE POUR LA LICENCE 3

Consultez nos catalogues sur le Web

www.dunod.com

ANALYSE COMPLEXE POUR LA LICENCE 3

Cours et exercices corrigés

Patrice Tauvel
Professeur à l'université de Poitiers

DUNOD

Illustration de couverture : digitalvision®

Conseiller scientifique : Sinnou David

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE
TUE LE LIVRE

© Dunod, Paris, 2006
ISBN 2 10 050074 0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos

Les résultats concernant la théorie des fonctions holomorphes d'une ou plusieurs variables complexes sont très nombreux, car c'est une théorie relativement ancienne (et la recherche dans ce domaine des mathématiques est toujours très active). Pour aborder cette théorie, l'étudiant aura intérêt à procéder par étapes. Ce livre peut être vu comme la première de ces étapes. Donnons quelques explications à ce sujet.

Les connaisances pour aborder la lecture de l'ouvrage sont plutôt modestes. En ce qui concerne la topologie, on ne demande de connaître que les propriétés élémentaires des compacts et des connexes de $\mathbb{C}$. Pour l'intégration, à l'exception d'un complément donné au chapitre 7 (et qui n'est pas utilisé dans la suite de l'ouvrage), on n'a utilisé que les propriétés élémentaires de l'intégrale au sens de Riemann. En ce qui concerne le calcul différentiel, il n'est quasiment utilisé que la notion d'application différentiable. Il en résulte qu'un étudiant de troisième année de Licence dispose de toute la matière nécessaire pour aborder la lecture du livre. Donnons quelques détails quant à son contenu.

Les chapitres 1 à 3 constituent des révisions concernant un programme usuel de Licence. On y traite de séries numériques, de séries de fonctions, et de séries entières. Il nous semble en effet opportun de rappeler les points essentiels concernant ces notions (par exemple la définition du rayon de convergence d'une série entière).

Le chapitre 4 traite des fonctions analytiques. Bien que ne présentant aucune difficulté, on obtient déjà des résultats importants (principe du prolongement analytique, principe des zéros isolés).

Au chapitre 5, on généralise la notion de dérivabilité au cas des fonctions d'une variable complexe. Il est aussi question des déterminations continues de l'argument, un point qui sera essentiel dans d'autres chapitres.

Le chapitre 6 est fondamental. On y montre qu'une fonction est dérivable (on dit aussi holomorphe) si et seulement si elle est localement développable en série entière. C'est là une énorme différence avec le cas réel déjà vu par l'étudiant.

Dans les chapitres 7 et 8, on utilise la théorie de Cauchy locale pour obtenir les principales propriétés des fonctions holomorphes ou méromorphes. On y démontre, par exemple, la fameuse formule des résidus (dans des cas particuliers) qui permettra, et c'est parfois ce qui impressionne l'étudiant, de calculer des intégrales.

Les chapitres 9 et 11 sont consacrés à l'étude des produits infinis. C'est une notion très intéressante, mais aussi plus délicate que celle de série. Au chapitre 11, on montre en particulier l'existence de fonctions holomorphes ayant des zéros imposés.

Au chapitre 10, on traite, dans un cadre plus général, des questions vues dans les chapitres 7 et 8. On introduit en particulier la notion d'homotopie (on essaie de déformer des courbes de manière continue).

Le chapitre 12 est consacré d'une part à des questions topologiques (théorème de Montel) et d'autre part à la représentation conforme (théorème de Riemann). On y démontre en particulier à quelle condition deux ouverts de $\mathbb{C}$ sont analytiquement isomorphes.

Au chapitre 13, on démontre trois résultats fameux : deux théorèmes de Picard et le théorème de Runge. Les deux premiers sont spectaculaires, le troisième est fondamental en ce qui concerne l'approximation des fonctions.

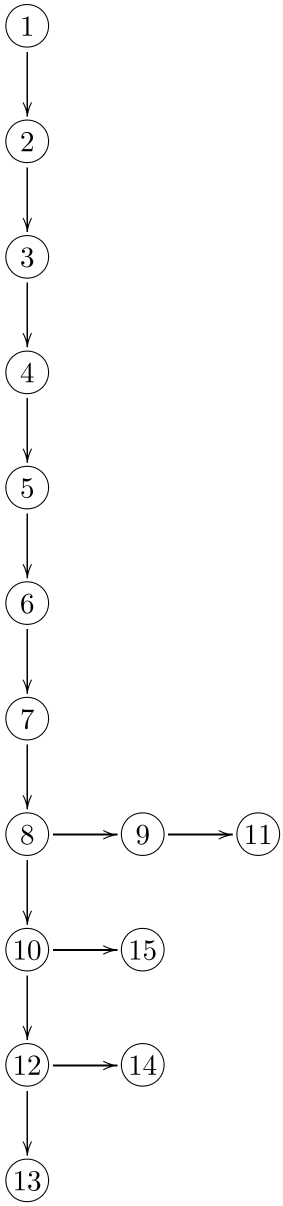
Au chapitre 14, on aborde l'étude des fonctions harmoniques de deux variables réelles. Ces fonctions sont très utilisées dans de nombreux domaines scientifiques. On prouve en particulier qu'une telle fonction est indéfiniment différentiable.

Le chapitre 15 donne quelques méthodes (en nombre très limité) de calculs d'intégrales en utilisant la formule des résidus. Nous renvoyons cependant le lecteur à des livres d'exercices (ou à des séances de travaux dirigés) pour ce qui concerne ce point.

Comme nous l'avons déjà précisé, ce livre, qui se veut d'un niveau relativement élémentaire, n'aborde que quelques aspects de la théorie des fonctions holomorphes. Nous n'avons en particulier traité que le cas des fonctions holomorphes d'une variable. Pour l'étudiant qui veut se spécialiser dans ce domaine, il peut être une introduction à des ouvrages de niveau plus élevé. Nous conseillons en particulier les livres [4], [6], [8], [9], [10] de la bibliographie.

Signalons aussi que le contenu de cet ouvrage couvre entièrement la partie du programme de l'agrégation de mathématiques qui concerne les fonctions holomorphes.

Diagramme d'implication des différents chapitres :



Chapitre 1

Séries numériques

Dans ce chapitre, on fait quelques rappels concernant les séries numériques.

1.1 NOTATIONS ET RAPPELS

1.1.1. Soient E, F des ensembles et A une partie de E.

On note $\mathfrak{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et id_E l'application identité de E.

On désigne par $E \backslash F$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F, et par $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F. On écrira souvent $f\colon E \rightarrow F$ pour signifier que $f \in \mathcal{F}(E, F)$, et on note $f|A$ la restriction de f à A.

Si E est fini, $\operatorname{card}(E)$ est le cardinal de E.

1.1.2. Les symboles

$$\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{N}^*\ ,\ \mathbb{Z}\ ,\ \mathbb{R}\ ,\ \mathbb{R}^*\ ,\ \mathbb{R}_+\ ,\ \mathbb{R}_-\ ,\ \mathbb{R}_+^*\ ,\ \mathbb{R}_-^*\ ,\ \mathbb{C}\ ,\ \mathbb{C}^*$$

ont la signification usuelle bien connue de tous. Si z est un nombre complexe, on note $\overline{z}$ son conjugué et $\operatorname{Re}(z)$ (respectivement $\operatorname{Im}(z)$) sa partie réelle (respectivement partie imaginaire).

Dans la suite de ce chapitre $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

1.1.3. Soit X un espace métrique dont la distance est notée d. Rappelons qu'une suite $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de X est appelée une *suite de Cauchy* si elle vérifie la condition suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ dès que $m \geqslant N$ et $n \geqslant N$.

Définition. *Un espace métrique X est dit* complet *si toute suite de Cauchy d'éléments de X a une limite dans X. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et complet est appelé un* espace de Banach.

Théorème 1.1.4. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach. En particulier, le corps $\mathbb{K}$ est complet.*

1.2 LIMITE SUPÉRIEURE ET LIMITE INFÉRIEURE

1.2.1. On adjoint à $\mathbb{R}$ les symboles usuels $-\infty$ et $+\infty$, et on pose :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

On prolonge la relation d'ordre naturelle de $\mathbb{R}$ en convenant que, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$-\infty < a < +\infty.$$

1.2.2. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles et $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$ constitué des suites convergentes.

Définition. *Soit $x = (x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{S}$. On dit que x* converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ *si elle vérifie l'une ou l'autre des conditions suivantes :*

(i) $x \in \mathcal{C}$

(ii) x_n *tend vers* $+\infty$ *quand* n *tend vers* $+\infty$.

(iii) x_n *tend vers* $-\infty$ *quand* n *tend vers* $+\infty$.

On désigne par $\mathcal{R}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}$ qui convergent dans $\overline{\mathbb{R}}$.

> ***Remarques.*** 1) Si $x_n = (-1)^n$, on a $x \notin \mathcal{R}$.
>
> 2) Si $x_n = n$, alors $x \in \mathcal{R}\backslash\mathcal{C}$. Par suite $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{R} \subsetneq \mathcal{S}$.
>
> 3) L'ensemble $\mathcal{R}$ n'est *pas* un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$. Si $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$ vérifient $x_n = n + (-1)^n$ et $y_n = -n$, on a $x, y \in \mathcal{R}$ et $x + y \notin \mathcal{R}$.

1.2.3. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si A est majorée (respectivement minorée), on note $\sup A$ (respectivement $\inf A$) la borne supérieure (respectivement inférieure) de A. Si A est non majorée (respectivement non minorée), on pose $\sup A = +\infty$ (respectivement $\inf A = -\infty$).

Lemme 1.2.4. *Soit $x = (x_n) \in \mathcal{S}$. Si $p \in \mathbb{N}$, on pose $X_p = \{x_n\ ;\ n \geqslant p\}$.*

(i) *S'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que* $\sup X_q = +\infty$, *alors* $\sup X_p = +\infty$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$.

(ii) *S'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que* $\inf X_q = -\infty$, *alors* $\inf X_p = -\infty$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Prouvons (i), la démonstration de (ii) étant analogue.

Si $p \leqslant q$, on a $X_q \subset X_p$ donc $\sup X_p = +\infty$. Supposons $p > q$ et $\sup X_p = M \in \mathbb{R}$. De $X_q = X_p \cup \{x_q, x_{q+1}, \ldots, x_{p-1}\}$, on déduit :

$$\sup X_q \leqslant \max\{M, x_q, x_{q+1}, \ldots, x_{p-1}\} < +\infty.$$

Contradiction. $\square$

1.2.5. Soit $x = (x_n)_n \in S$. On va définir des éléments $\limsup x$ et $\liminf x$ de $\overline{\mathbb{R}}$, appelés respectivement *limite supérieure* et *limite inférieure* de x. Notons, si $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \{x_p\,;\, p \geqslant n\}\ ,\ M_n = \sup X_n\ ,\ m_n = \inf X_n.$$

• S'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $M_q = +\infty$, alors $M_n = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (1.2.4). On pose :

$$\limsup x = +\infty.$$

• Supposons $M_n < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $X_{n+1} \subset X_n$, la suite $(M_n)_n$ est décroissante. Elle a donc une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, et on pose :

$$\limsup x = \lim_n M_n.$$

• S'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $m_q = -\infty$, alors $m_n = -\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (1.2.4). On pose :

$$\liminf x = -\infty.$$

• Si $m_n > -\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(m_n)_n$ étant croissante, elle a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. On pose :

$$\liminf x = \lim_n m_n.$$

D'après les définitions, il est clair que $\liminf x \leqslant \limsup x$.

On notera parfois $\limsup\limits_n x_n$ pour $\limsup x$ et $\liminf\limits_n x_n$ pour $\liminf x$.

Théorème 1.2.6. *Soit $x = (x_n)_n \in \mathcal{S}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La suite x converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

(ii) *On a $\liminf x = \limsup x$.*

Si ces conditions sont vérifiées, alors :

$$\lim x = \liminf x = \limsup x.$$

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons (i) vérifié.

• Envisageons le cas où x converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Si $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - \ell| < \varepsilon$ dès que $n \geqslant N$. Alors, pour $n \geqslant N$, il vient $|M_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ et $|m_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ceci prouve que les suites $(M_n)_n$ et $(m_n)_n$ convergent vers ℓ.

• Supposons $\lim x = +\infty$. Si $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \geqslant A$ dès que $n \geqslant N$. On obtient $M_n \geqslant A$ et $m_n \geqslant A$ si $n \geqslant N$. La condition (ii) est à nouveau vérifiée. La preuve est analogue si $\lim x = -\infty$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons (ii) vérifié.

• Si $\liminf x = \limsup x = \ell \in \mathbb{R}$, pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant N \Rightarrow \ell - \varepsilon \leqslant m_n \leqslant M_n \leqslant \ell + \varepsilon.$$

D'où :

$$n \geqslant N \Rightarrow \ell - \varepsilon \leqslant m_n \leqslant x_n \leqslant M_n \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite x converge vers ℓ.

• Supposons $\liminf x = \limsup x = +\infty$. Si $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant N \Rightarrow A \leqslant m_n \leqslant M_n.$$

Ainsi :

$$n \geqslant N \Rightarrow A \leqslant m_n \leqslant x_n \leqslant M_n.$$

D'où $\lim x = +\infty$. La preuve est analogue si $\liminf x = \limsup x = -\infty$. □

1.3 GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES NUMÉRIQUES

Définition 1.3.1. *Soit* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{K}$*. On appelle* série de terme général u_n*, ou série* $\sum u_n$*, la suite de* $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ *définie par :*

$$\left(u_n, \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant 0}.$$

La série $\sum u_n$ *est dite* réelle *(respectivement* complexe*) si la suite* $(u_n)_n$ *est à termes réels (respectivement complexes).*

1.3.2. Étant donnée une série $\sum u_n$, on dit que

$$U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

est la *somme partielle de rang* n de la série. La série est dite *convergente* (respectivement *divergente*) si la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ converge dans $\mathbb{K}$ (respectivement diverge). Si la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ converge, sa limite U est appelée la *somme de la série*, et on écrit :

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Il est clair qu'une série complexe $\sum u_n$ est convergente si et seulement si les séries réelles $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ le sont. S'il en est ainsi, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}(u_n).$$

Le résultat suivant est immédiat :

Proposition. *L'ensemble $S(\mathbb{K})$ des séries convergentes est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des séries à éléments dans $\mathbb{K}$, et l'application*

$$S(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}\ ,\ \sum u_n \to \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

est $\mathbb{K}$-linéaire.

1.3.3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Nous aurons parfois à considérer des suites $(u_n)_{n \geqslant p}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. En posant $v_n = 0$ si $n < p$ et $v_n = u_n$ si $n \geqslant p$, on obtient une série $\sum v_n$ qui sera notée $\sum_{n \geqslant p} u_n$, ou même encore $\sum u_n$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Inversement, à une série $\sum u_n$, on peut associer une série $\sum_{n \geqslant p} u_n$ qui est dite *déduite de $\sum u_n$ par troncature.*

Une série $\sum u_n$ et une série $\sum_{n \geqslant p} u_n$ s'en déduisant par troncature sont de même nature. En cas de convergence, la somme de la seconde série est

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{p-1} u_n \ \text{ notée } \ \sum_{n=p}^{\infty} u_n .$$

Convention 1.3.4. *Dans les preuves qui suivent, si l'on considère une série de terme général u_n (lettre minuscule), la somme de rang n de cette série sera notée U_n (lettre majuscule). En cas de convergence, la somme de la série sera notée U (lettre majuscule). En outre, le mot « série » signifiera « série à éléments dans $\mathbb{K}$ ».*

1.3.5. Soit $\sum u_n$ une série. Pour $p < q$, on a

$$U_q - U_p = u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_q .$$

Le corps $\mathbb{K}$ étant complet, il résulte de 1.1.4 que l'on a le résultat suivant :

Théorème. (Critère de Cauchy). *Soit $\sum u_n$ une série. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La série $\sum u_n$ est convergente.*

(ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$N \leqslant p \leqslant q \Rightarrow |u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q| \leqslant \varepsilon .$$

Corollaire 1.3.6. *Si la série $\sum u_n$ converge, la suite $(u_n)_n$ admet 0 pour limite.*

Démonstration. Il suffit de prendre $q = p + 1$ dans le critère de Cauchy. □

Définition 1.3.7. *Une série $\sum u_n$ est dite* absolument convergente *si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Théorème 1.3.8. *Toute série $\sum u_n$ absolument convergente est convergente et :*

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Démonstration. Résulte de $|u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q| \leqslant |u_p| + |u_{p+1}| + \cdots + |u_q|$ et du critère de Cauchy. □

1.3.9. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}^*$, et $u_n = a\lambda^n$. On dit que $\sum u_n$ est la *série géométrique* de premier terme a et de raison λ.

• Si $|\lambda| \geqslant 1$, la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0. D'après 1.3.6, la série $\sum u_n$ diverge.

• Supposons $|\lambda| < 1$. De

$$U_n = a\frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$$

on déduit que la série $\sum u_n$ converge et que sa somme est :

$$U = \frac{a}{1-\lambda}\cdot$$

1.3.10. On appelle *série de Riemann* toute série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$, avec $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si $\alpha \leqslant 0$ la série $\sum u_n$ diverge d'après 1.3.6. Supposons $\alpha > 0$. Si $n \geqslant 2$, on a :

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha}\cdot$$

Pour $n \geqslant 1$, il vient alors :

$$\ln(n+1) \leqslant U_n = u_1 + \cdots + u_n \leqslant 1 + \ln n \ \text{ si } \ \alpha = 1,$$
$$\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1\right] \leqslant U_n \leqslant 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right] \ \text{ si } \ \alpha \neq 1.$$

La suite $(U_n)_n$ étant croissante, on voit donc que la série de Riemann précédente converge si et seulement si $\alpha > 1$.

1.4 SÉRIES À TERMES POSITIFS

1.4.1. Rappelons tout d'abord quelques points concernant des notions classiques. Soient $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$ des suites à éléments dans $\mathbb{K}$.

• On dit que v domine u, et on écrit alors $u_n = O(v_n)$, s'il existe $A > 0$ tel que $|u_n| \leqslant A|v_n|$ dès que n est assez grand.

• On dit que u est négligeable devant v, et on écrit alors $u_n = o(v_n)$, si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|u_n| \leqslant \varepsilon|v_n|$ dès que n est assez grand.

• On dit que u et v sont équivalentes, et on écrit alors $u_n \sim v_n$, si $u_n - v_n = o(u_n)$. Si cette condition est réalisée, on a aussi $v_n - u_n = o(v_n)$. S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \neq 0$ pour $n \geqslant N$, ceci équivaut à dire que la suite $(u_n/v_n)_n$ converge vers 1.

1.4.2. Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs ou nuls. La suite $(U_n)_n$ est donc croissante. Il en résulte que le résultat suivant et celui de 1.4.3 sont immédiats.

Théorème. *Soit $\sum u_n$ une série à termes réels* positifs ou nuls. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La série $\sum u_n$ est convergente.*

(ii) *La suite $(U_n)_n$ est majorée.*

Si ces conditions sont vérifiées, on a $U = \sup\{U_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Si elles ne le sont pas, alors U_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Théorème 1.4.3. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes réels* positifs ou nuls. *On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant v_n$ si $n \geqslant N$. Alors :*

(i) *Si la série $\sum v_n$ converge, il en est de même de la série $\sum u_n$ et :*

$$\sum_{n=N}^{\infty} u_n \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} v_n.$$

(ii) *Si la série $\sum u_n$ est divergente, il en est de même de la série $\sum v_n$.*

Corollaire 1.4.4. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes réels* positifs ou nuls *telles que $u_n = O(v_n)$. Alors :*

(i) *Si la série $\sum v_n$ converge, il en est de même de la série $\sum u_n$.*

(ii) *Si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge aussi.*

Démonstration. D'après les hypothèses, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $A > 0$ tels que $u_n \leqslant Av_n$ si $n \geqslant N$. Il suffit donc d'appliquer 1.4.3. □

Corollaire 1.4.5. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes réels* positifs ou nuls *vérifiant l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :*

(i) *Il existe $A, B \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $Av_n \leqslant u_n \leqslant Bv_n$ pour n assez grand.*

(ii) $u_n \sim v_n$.

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration. Les deux conditions impliquent en effet que $u_n = O(v_n)$ et que $v_n = O(u_n)$. □

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Proposition 1.4.6. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes réels* positifs ou nuls. *On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant N$:*

$$u_n > 0\ ,\ v_n > 0\ ,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

(i) *Si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge aussi.*

(ii) *Si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge aussi.*

Démonstration. Posons $A = u_N/v_N$. Si $n \geqslant N$, il vient :

$$\frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{u_{N+1}}{v_{N+1}} \leqslant \frac{u_N}{v_N} \leqslant A.$$

D'où les assertions d'après 1.4.4. □

1.5 CONVERGENCE ABSOLUE

Proposition 1.5.1. *Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La série $\sum u_n$ est absolument convergente.*

(ii) *Les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ sont absolument convergentes.*

Démonstration. On a :

$$|\,\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n|\ ,\ |\,\mathrm{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|\ ,\ |u_n| \leqslant |\,\mathrm{Re}(u_n)| + |\,\mathrm{Im}(u_n)|.$$

Les deux premières inégalités établissent (i) ⇒ (ii) ; la troisième (ii) ⇒ (i). □

1.5.2. D'après 1.5.1, l'étude de la convergence absolue dans le cas complexe se ramène à celle du cas réel. On va s'intéresser à cette situation. Si $a \in \mathbb{R}$, on pose :

$$a^+ = \max\{a, 0\}\ ,\ a^- = \max\{-a, 0\}.$$

Proposition. *Soit $\sum u_n$ une série à termes réels. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La série $\sum u_n$ est absolument convergente.*

(ii) *Les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes.*

Démonstration. Si $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|\ ,\ 0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|\ ,\ |u_n| = u_n^+ + u_n^-.$$

D'où le résultat. □

Proposition 1.5.3. *Soient $\sum u_n$ une série et $\sum v_n$ une série à termes réels* positifs ou nuls *vérifiant $u_n = O(v_n)$. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.*

Démonstration. Résulte de 1.4.4, car $u_n = O(v_n)$ équivaut à $|u_n| = O(v_n)$. □

Théorème 1.5.4. *Soient* $\sum u_n$ *une série et* $\sum v_n$ *une série à termes réels* positifs ou nuls. *On suppose qu'il existe un nombre complexe non nul* λ *tel que* $u_n \sim \lambda v_n$.

(i) *Si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge absolument.*

(ii) *Si* $\sum v_n$ *diverge,* $\sum u_n$ *diverge aussi.*

(iii) *Les deux séries sont simultanément convergentes ou divergentes.*

Démonstration. Il suffit de prouver (i) et (ii). D'après l'hypothèse, on a $u_n = O(v_n)$. D'où (i) (1.5.3).

Supposons $\sum v_n$ divergente. On a $u_n - \lambda v_n = o(\lambda v_n)$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - v_n| \leqslant \frac{|\lambda|}{2} v_n.$$

Si $N \leqslant p \leqslant q$, on obtient alors :

$$|\lambda| \sum_{n=p}^{q} v_n - \Big| \sum_{n=p}^{q} u_n \Big| \leqslant \Big| \sum_{n=p}^{q} (u_n - \lambda v_n) \Big| \leqslant \frac{|\lambda|}{2} \sum_{n=p}^{q} v_n.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=p}^{q} v_n \leqslant \frac{2}{|\lambda|} \Big| \sum_{n=p}^{q} u_n \Big|.$$

Si $\sum u_n$ converge, elle vérifie le critère de Cauchy. L'inégalité précédente montre que $\sum v_n$ vérifie aussi ce critère, donc converge. Contradiction. □

Corollaire 1.5.5. *Soit* $\sum u_n$ *une série. On suppose qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *tels que* $u_n \sim \lambda n^{-\alpha}$*. Alors :*

(i) *Si* $\alpha > 1$*, la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente.*

(ii) *Si* $\alpha \leqslant 1$*, la série* $\sum u_n$ *diverge.*

Démonstration. C'est clair d'après 1.3.10 et 1.5.4. □

Proposition 1.5.6. *Soit* $\sum u_n$ *une série.*

(i) *S'il existe* $\alpha > 1$ *tel que la suite* $(n^\alpha u_n)_n$ *soit bornée, la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente.*

(ii) *Supposons les* u_n *réels de même signe et l'existence de* $\alpha \leqslant 1$ *tel que* $n^\alpha |u_n|$ *tende vers* $+\infty$ *quand* n *tend vers* $+\infty$*. Alors, la série* $\sum u_n$ *diverge.*

Démonstration.

(i) On a $u_n = O(n^{-\alpha})$. On conclut d'après 1.3.10 et 1.5.3.

(ii) D'après les hypothèses, il vient $n^{-\alpha} = O(|u_n|)$. On termine alors comme en (i). □

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

1.6 RÈGLES DE CAUCHY ET DE D'ALEMBERT

Théorème 1.6.1. (Règle de Cauchy). *Soient* $\sum u_n$ *une série et* $\ell = \limsup \sqrt[n]{|u_n|}$.

(i) *Si* $\ell < 1$, *la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente.*

(ii) *Si* $\ell > 1$, *la série* $\sum u_n$ *est divergente.*

Démonstration. (i) Supposons $\ell < 1$, et fixons λ tel que $\ell < \lambda < 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n|^{1/n} \leqslant \lambda$ si $n \geqslant N$. Pour un tel entier n, on a $|u_n| \leqslant \lambda^n$. On conclut alors d'après 1.3.9 et 1.4.3.

(ii) Supposons $\ell > 1$, et fixons λ vérifiant $\ell > \lambda > 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que $|u_n|^{1/n} \geqslant \lambda$, soit $|u_n| \geqslant \lambda^n$. La suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, donc $\sum u_n$ diverge (1.3.6). □

> ***Remarque.*** Le cas des séries de Riemann montre que l'on ne peut conclure si $\ell = 1$.

Corollaire 1.6.2. *On suppose que la suite* $\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right)_n$ *a une limite* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) *Si* $\ell < 1$, *la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente.*

(ii) *Si* $\ell > 1$, *la série* $\sum u_n$ *est divergente.*

Théorème 1.6.3. (Règle de d'Alembert). *Soit* $\sum u_n$ *une série. On suppose* $u_n \neq 0$ *pour* n *assez grand, et on pose :*

$$L = \limsup \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\ ,\ \ell = \liminf \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}.$$

(i) *Si* $L < 1$, *la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente.*

(ii) *Si* $\ell > 1$, *la série* $\sum u_n$ *est divergente.*

Démonstration. (i) Supposons $L < 1$, et fixons λ tel que $L < \lambda < 1$. Posons $v_n = \lambda^n$. Si n est assez grand, on a :

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant \lambda = \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

D'où l'assertion (1.3.9 et 1.4.6).

(ii) Si $\ell > 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n \neq 0 \ \text{ et } \ \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geqslant 1.$$

Si $n \geqslant N$, il vient $|u_n| \geqslant |u_N| > 0$. On conclut d'après 1.3.6. □

Corollaire 1.6.4. *On suppose que* u_n *est non nul pour* n *assez grand et que la suite* $\left(|u_{n+1}|/|u_n|\right)_n$ *a une limite* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) *Si* $\ell < 1$, *la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente.*

(ii) *Si* $\ell > 1$, *la série* $\sum u_n$ *est divergente.*

1.6.5. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, posons $u_n(z) = \dfrac{z^n}{n!}\cdot$

• Si $n \geqslant 1$, on a $u_n(0) = 0$, et la série $\sum u_n(0)$ est convergente, de somme égale à 1.

• Supposons $z \neq 0$. Alors :

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|}{n+1} \to 0 \text{ si } n \to +\infty.$$

D'après 1.6.4, $\sum u_n(z)$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$. La somme de cette série est notée e^z :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\cdot$$

La série précédente est appelée la *série exponentielle*.

1.7 SÉRIES ALTERNÉES

Définition 1.7.1. *On appelle* série alternée *toute série à termes réels de la forme* $\sum(-1)^n a_n$ *ou* $\sum(-1)^{n+1} a_n$*, avec* $a_n \in \mathbb{R}_+$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.7.2. (Critère des séries alternées). *Soit* $(a_n)_n$ *une suite réelle décroissante de limite nulle. Si* $u_n = (-1)^n a_n$*, la série* $\sum u_n$ *est convergente. En outre, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a :*

$$U_{2n+1} \leqslant U \leqslant U_{2n} \ , \ |U - U_n| \leqslant a_{n+1}.$$

Démonstration. Si $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$U_{2n} - U_{2n+1} = a_{2n+1} \geqslant 0,$$
$$U_{2n+2} - U_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0 \ , \ U_{2n+3} - U_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geqslant 0.$$

Par conséquent, $\big((U_{2n+1})_n, (U_{2n})_n\big)$ est un couple de suites adjacentes. On en déduit que la suite $(U_n)_n$ converge, donc que la série $\sum u_n$ est convergente. On obtient alors :

$$U_{2n+1} \leqslant U \leqslant U_{2n} \Rightarrow |U - U_{2n+1}| \leqslant U_{2n+2} - U_{2n+1} = a_{2n+2},$$
$$U_{2n+1} \leqslant U \leqslant U_{2n} \Rightarrow |U - U_{2n}| \leqslant U_{2n} - U_{2n+1} = a_{2n+1}.$$

D'où le résultat. □

Exemple. En utilisant 1.7.2, on voit que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

1.8 SÉRIES SEMI-CONVERGENTES

Définition 1.8.1. *Une série est dite* semi-convergente *si elle est convergente sans être absolument convergente.*

1.8.2. L'exemple précédent nous montre que, pour $0 < \alpha \leqslant 1$, la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est semi-convergente. Précisons si $\alpha = 1$. On a

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + (1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t}$$

pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}$. En intégrant entre 0 et 1, on obtient alors :

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt.$$

Comme

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt \leqslant \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{1}{n+2},$$

on retrouve que la série converge si $\alpha = 1$, et que sa somme est $\ln 2$.

1.8.3. Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente.

• Supposons la série à termes réels. Avec les notations de 1.5.2, il vient :

$$u_n = u_n^+ - u_n^- \ , \ |u_n| = u_n^+ + u_n^-.$$

La première égalité montre que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont de même nature. La seconde prouve qu'elles sont divergentes.

• Supposons la série à termes complexes. Alors les séries $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ sont convergentes. Comme $|u_n| \leqslant |\operatorname{Re}(u_n)| + |\operatorname{Im}(u_n)|$, on voit que l'une au moins de ces deux séries n'est pas absolument convergente.

Théorème 1.8.4. *Soient $(v_n)_n$ une suite de nombres complexes et $(\alpha_n)_n$ une suite de nombres réels positifs vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *La suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante de limite nulle.*

(ii) *La suite $(V_n)_n$, avec $V_n = v_0 + \cdots + v_n$, est bornée.*

Alors la série $\sum \alpha_n v_n$ est convergente.

Démonstration. Notons $u_n = \alpha_n v_n$, et soit $M > 0$ vérifiant $|V_n| \leqslant M$ pour tout n. On va prouver que la série $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy.
Remarquons que $v_n = V_n - V_{n-1}$ si $n \geqslant 1$. D'où, si $1 \leqslant p \leqslant q$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{q} u_n &= \alpha_p(V_p - V_{p-1}) + \alpha_{p+1}(V_{p+1} - V_p) + \cdots + \alpha_q(V_q - V_{q-1}) \\ &= -V_{p-1}\alpha_p + V_p(\alpha_p - \alpha_{p+1}) + \cdots + V_{q-1}(\alpha_{q-1} - \alpha_q) + V_q\alpha_q.\end{aligned}$$

Compte tenu des hypothèses, on obtient :

$$\Big|\sum_{n=p}^{q} u_n\Big| \leqslant M\alpha_p + M(\alpha_p - \alpha_{p+1}) + \cdots + M(\alpha_{q-1} - \alpha_q) + M\alpha_q = 2M\alpha_p.$$

D'où le résultat puisque $\alpha_p \to 0$ si $p \to +\infty$. □

> ***Remarque.*** Le fait de remplacer v_n par $V_n - V_{n-1}$ dans $\sum \alpha_n v_n$ est appelé la *transformation d'Abel*.

1.8.5. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ non multiple entier de 2π, posons $v_n = e^{in\theta}$. Il vient :

$$|V_n| = \Big|\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}\Big| \leqslant \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|} = \Big|\sin\frac{\theta}{2}\Big|^{-1}.$$

D'après 1.8.4, si $(\alpha_n)_n$ est une suite décroissante de réels de limite nulle, la série $\sum \alpha_n v_n$ converge pour $\theta \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

1.9 SÉRIE PRODUIT

Définition 1.9.1. *La* série produit *de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Théorème 1.9.2. (Théorème de Mertens). *Soient $\sum u_n$ une série convergente, $\sum v_n$ une série absolument convergente, et $\sum w_n$ leur série produit. La série $\sum w_n$ est convergente et :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\Big).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le critère de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on ait :

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| \leqslant \varepsilon\ ,\ |v_n| + |v_{n+1}| + \cdots + |v_{n+p}| \leqslant \varepsilon.$$

D'autre part, il existe $M > 0$ tel que $|u_n| \leqslant M$, $|U_n| \leqslant M$, et $|v_0| + \cdots + |v_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $0 \leqslant k \leqslant n-1$, posons :

$$s_k = u_k(v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots + v_{2n-k})\ ,\ t_k = v_k(u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n-k}).$$

Pour $n \geqslant N$, il vient facilement $|t_0 + t_1 + \cdots + t_{n-1}| \leqslant M\varepsilon$. D'autre part :

$$s_0 + \cdots + s_{n-1} = v_{n+1}U_{n-1} + v_{n+2}U_{n-2} + \cdots + v_{2n}U_0.$$

Par conséquent, si $n \geqslant N$, on obtient aussi $|s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}| \leqslant M\varepsilon$. Or :

$$W_{2n} - U_nV_n = s_0 + \cdots + s_{n-1} + t_0 + \cdots + t_{n-1}.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

On en déduit que $W_{2n} \to UV$ si $n \to +\infty$. Pour obtenir le résultat, il suffit donc de prouver que $w_{2n} \to 0$ si $n \to +\infty$. Si $n \geqslant N$, on a

$$w_{2n} = u_0 v_{2n} + \cdots + u_N v_{2n-N} + u_{N+1} v_{2n-N-1} + \cdots + u_{2n} v_0.$$

D'où :

$$|w_{2n}| \leqslant M(|v_{2n}| + \cdots + |v_{2n-N}|) + \varepsilon(|v_0| + \cdots + |v_{2n-N-1}|) \leqslant 2\varepsilon M.$$

On a obtenu l'assertion. □

Remarque. La série produit de deux séries semi-convergentes peut être divergente.

1.10 CONVERGENCE ASSOCIATIVE OU COMMUTATIVE

Théorème 1.10.1. *Soient* $\sum u_n$ *une série et* $\nu \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une application strictement croissante. On note :*

$$v_0 = \sum_{k=0}^{\nu(0)} u_k \ , \ v_n = \sum_{k=1+\nu(n-1)}^{\nu(n)} u_k \ \text{ si } \ n \geqslant 1.$$

(i) *Si la série* $\sum u_n$ *converge, il en est de même de la série* $\sum v_n$*, et ces deux séries ont même somme.*

(ii) *On suppose que l'une ou l'autre des conditions suivantes est réalisée :*

a) $u_n \in \mathbb{R}_+$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

b) La suite $(u_n)_n$ *converge vers* 0 *et il existe* $M > 0$ *tel que* $\nu(n+1) - \nu(n) \leqslant M$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Alors, si la série $\sum v_n$ *converge, la série* $\sum u_n$ *converge aussi.*

Démonstration. Les hypothèses impliquent que $\nu(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) Comme $V_n = U_{\nu(n)}$, si la suite $(U_n)_n$ converge, la suite extraite $(V_n)_n$ converge vers la même limite.

(ii) Si $u_n \in \mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(U_n)_n$ est croissante. Elle converge si et seulement si la suite extraite $(V_n)_n$ converge.

Supposons désormais les hypothèses de b) vérifiées. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique entier $\theta(n)$ tel que :

$$\nu\big(\theta(n)\big) \leqslant n < \nu\big(1 + \theta(n)\big).$$

Une récurrence facile montre que $\nu(p+1) \leqslant \nu(1) + Mp$ si $p \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$n < \nu(1) + M\theta(n) \ , \ \lim_n \theta(n) = +\infty \ , \ \lim_n \nu\big(\theta(n)\big) = +\infty.$$

D'autre part, $n - \nu\big(\theta(n)\big) < \nu\big(1+\theta(n)\big) - \nu\big(\theta(n)\big) \leqslant M$. D'où :

$$\begin{aligned} |U_n - V| &\leqslant |U_n - U_{\nu(\theta(n))}| + |U_{\nu(\theta(n))} - V| = |U_n - U_{\nu(\theta(n))}| + |V_{\theta(n)} - V| \\ &\leqslant |V_{\theta(n)} - V| + \sum_{k=1+\nu(\theta(n))}^{n} |u_n| \leqslant |V_{\theta(n)} - V| + \delta_n, \end{aligned}$$

avec $\delta_n = \max\{|u_k| \,;\, \nu\big(\theta(n)\big) < k \leqslant n\}$. D'après les hypothèses et ce qui précède, on voit donc que U_n tend vers V quand n tend vers $+\infty$. □

> ***Remarque.*** Le théorème 1.10.1 est parfois appelé le théorème de *sommation par tranches*.

Définition 1.10.2. *On dit que deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne diffèrent que par l'ordre des termes s'il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $v_n = u_{\sigma(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

1.10.3. La série $\sum(-1)^{n+1}n^{-1/2}$ est convergente. La série suivante n'en diffère que par l'ordre des termes :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \cdots$$

D'après 1.10.1, cette dernière série est de même nature que $\sum v_n$, avec :

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \sim \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2n}}.$$

On voit donc que $\sum v_n$ diverge.

1.10.4. Prenons $u_n = (-1)^{n+1}n^{-1}$, $n \geqslant 1$. On a vu que $U = \ln 2$ (1.8.2). La série suivante ne diffère de $\sum u_n$ que par l'ordre des termes :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} + \cdots$$

D'après 1.10.1, cette série converge et a même somme que la série

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} + \cdots$$

c'est-à-dire $(\ln 2)/2$. Ainsi, les deux séries sont convergentes, mais n'ont pas la même somme.

Définition 1.10.5. *Une série $\sum u_n$ est dite* commutativement convergente *si la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$.*

Théorème 1.10.6. *Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente, elle est commutativement convergente et, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Démonstration. Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$. Notons $v_n = u_{\sigma(n)}$, $w_n = |v_n|$. Si l'on pose $\theta(n) = \max\{\sigma(k)\,;\, 0 \leqslant k \leqslant n\}$, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} |v_k| \leqslant \sum_{k=0}^{\theta(n)} |u_k| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|.$$

On en déduit que la série $\sum w_n$ est convergente et que $W \leqslant U'$, où U' est la somme de la série $\sum |u_n|$. Changeant alors σ en σ^{-1}, on obtient $W = U'$.
Soit $I(n) = \{0, 1, \ldots, \theta(n)\} \backslash \{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$. Il vient :

$$|U_{\theta(n)} - V_n| \leqslant \sum_{k \in I(n)} |u_k| = \sum_{k=0}^{\theta(n)} |u_k| - \sum_{k=0}^{n} |u_{\sigma(n)}|.$$

Or, d'après ce qui précède, le dernier terme de la ligne précédente tend vers $U' - W = 0$ quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que $U = V$. D'où le résultat. □

Lemme 1.10.7. *Soit $\sum u_n$ une série réelle semi-convergente. La série $\sum u_n$ n'est pas commutativement convergente.*

Démonstration. D'après 1.8.3, les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont divergentes. On en déduit que $I = \{n \in \mathbb{N}\,;\, u_n > 0\}$ et $J = \{n \in \mathbb{N}\,;\, u_n \leqslant 0\}$ sont des parties infinies de $\mathbb{N}$. On peut donc définir des applications strictement croissantes $\alpha\colon \mathbb{N} \to I$ et $\beta\colon \mathbb{N} \to J$ par $\alpha(0) = \min I$, $\beta(0) = \min J$ et, pour $n \geqslant 1$:

$$\alpha(n) = \min(I \backslash \{\alpha(0), \ldots, \alpha(n-1)\})\ ,\ \beta(n) = J \backslash \{\beta(0), \ldots, \beta(n-1)\}).$$

Posons $v_n = u_{\alpha(n)}$, $w_n = u_{\beta(n)}$. Ainsi, v_n (respectivement w_n) est le $(n+1)^{\text{ème}}$ élément strictement positif (respectivement négatif ou nul) de la suite $(u_n)_n$.
On va construire une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ diverge.
D'après les hypothèses, on a :

$$\lim_n V_n = +\infty\ ,\ \lim_n W_n = -\infty.$$

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $V_{n_0} \geqslant -w_0$. On pose :

$$\sigma(k) = \alpha(k) \text{ si } 0 \leqslant k \leqslant n_0\ ,\ \sigma(n_0 + 1) = \beta(0).$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons construits les $\sigma(k)$ pour $k \leqslant n_{p-1} + p$. Utilisant à nouveau le fait que V_n tend vers $+\infty$ si n tend vers $+\infty$, il existe n_p tel que $n_p > n_{p-1}$ et $V_{n_p} \geqslant -W_p + p$. On pose :

$$\sigma(k) = \alpha(k-p) \text{ si } n_{p-1} + p < k \leqslant n_p + p\ ,\ \sigma(n_p + p + 1) = \beta(p).$$

On détermine ainsi σ sur $\{0, 1, \ldots, n_p + p + 1\}$.
Comme $I \cup J = \mathbb{N}$ et $I \cap J = \emptyset$, on voit que l'application σ construite précédemment est une permutation de $\mathbb{N}$. En outre, par construction de σ, on a

$$\sum_{k=0}^{n_p+p+1} u_{\sigma(k)} \geqslant p$$

pour $p \in \mathbb{N}^*$. Par suite, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ diverge. □

Remarque. Soient $\sum u_n$ une série réelle semi-convergente et $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. On peut montrer qu'il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que :

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} = \lambda.$$

Théorème 1.10.8. *Une série est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente.*

Démonstration. C'est immédiat d'après 1.8.3, 1.10.6 et 1.10.7. □

1.11 INTÉGRALES ET SÉRIES

Théorème 1.11.1. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ à valeurs* positives ou nulles *et décroissante. La série $\sum f(a+n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.*

Démonstration. Comme f est à valeurs positives ou nulles, l'intégrale en question converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_a^{a+n} f(t)\,dt\right)_n$ converge. Pour $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_{a+n}^{a+n+1} f(t)\,dt \leqslant f(a+n) \leqslant \int_{a+n-1}^{n} f(t)\,dt.$$

Alors :

$$\int_{a+1}^{a+n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(a+k) \leqslant \int_{a}^{a+n} f(t)\,dt.$$

D'où immédiatement l'assertion. □

Théorème 1.11.2. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f\colon [a, +\infty[\to \mathbb{C}$ localement intégrable. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ est convergente.*

(ii) *Pour toute suite $(x_n)_n$ de points de $[a, +\infty[$ de limite $+\infty$, la série de terme général $\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ est convergente.*

Démonstration. Pour $x \geqslant a$, posons $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. On sait que $F(x)$ a une limite dans $\mathbb{C}$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de $[a, +\infty[$, de limite $+\infty$, la suite $\big(F(x_n)\big)_n$ est convergente. Or :

$$F(x_n) = \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)_{,dt.}$$

D'où le résultat. □

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Théorème 1.11.3. *Soient* $a \in \mathbb{R}$ *et* $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{C}$ *localement intégrable. On suppose qu'il existe une suite* $(x_n)_n$ *d'éléments de* $[a,+\infty[$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *La suite* $(x_n)_n$ *est croissante et tend vers* $+\infty$ *si* n *tend vers* $+\infty$.

(ii) *La série de terme général* $u_n = \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ *est convergente.*

(iii) $\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|\,dt$ *tend vers* 0 *si* n *tend vers* $+\infty$.

Alors l'intégrale de f *sur* $[a,+\infty[$ *converge.*

Démonstration. On peut supposer $(x_n)_n$ strictement croissante. Si $y \geqslant x_0$, il existe un unique entier $p(y)$ tel que $x_{p(y)} \leqslant y < x_{p(y)+1}$. Il est clair que $p(y)$ tend vers $+\infty$ si y tend vers $+\infty$. On a :

$$\int_a^y f(t)\,dt = \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \sum_{k=0}^{p(y)-1} u_k + \int_{x_{p(y)}}^y f(t)\,dt.$$

D'autre part :

$$\Big|\int_{x_{p(y)}}^y f(t)\,dt\Big| \leqslant \int_{x_{p(y)}}^y |f(t)|\,dt \leqslant \int_{x_{p(y)}}^{x_{p(y)+1}} |f(t)|\,dt.$$

D'après les hypothèses, l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ est donc convergente. □

Corollaire 1.11.4. *Soient* $a \in \mathbb{R}$ *et* $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *localement intégrable, à valeurs* positives ou nulles. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'intégrale de* f *sur* $[a,+\infty[$ *est convergente.*

(ii) *Il existe une suite croissante* $(x_n)_n$ *d'éléments de* $[a,+\infty[$*, de limite* $+\infty$*, telle que la série de terme général* $u_n = \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ *converge.*

Démonstration. On a ici

$$u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt = \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|\,dt,$$

et cette dernière intégrale tend vers 0 si n tend vers $+\infty$, car la série $\sum u_n$ est convergente. □

EXERCICES

Exercice 1.1. Soient a, b des réels tels que $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ une application continue, et M la borne supérieure de f sur $[a,b]$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \Big(\int_a^b [f(t)]^n \, dt \Big)^{1/n}.$$

Prouver que la suite $u = (u_n)_n$ converge vers M.

Exercice 1.2. Nature de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \sin[\pi(2+\sqrt{3})^n]$.

Exercice 1.3. Soit $\sum d_n$ une série divergente à termes réels strictement positifs. On pose $D_n = \sum_{n=0}^{n} d_k$, $u_n = d_n/D_n$, et $v_n = d_n/(D_n)^\alpha$, avec α réel strictement plus grand que 1. Etudier les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Exercice 1.4. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes réels strictement positifs. On pose $R_n = \sum_{n+1}^{+\infty} u_p$ et $v_n = u_n/(R_{n-1})^a$, où $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $a \leqslant 0$, prouver la convergence de $\sum v_n$.

2. En étudiant $x_n = -\ln(1 - v_n)$, montrer la divergence de $\sum v_n$ pour $a = 1$, puis pour $a > 1$.

3. En utilisant une intégrale, prouver la convergence de $\sum v_n$ si $0 < a < 1$.

Exercice 1.5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < 1 < b$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note α_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n. Comparer les règles de Cauchy et de d'Alembert en les appliquant à la série de terme général

$$u_n = a^{n-\alpha_n} b^{\alpha_n(1+\alpha_n)/2}.$$

Exercice 1.6. Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite réelle. On pose $\alpha_n = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$. On suppose que la série $\sum a_n^2$ est convergente. Prouver qu'il en est de même de la série $\sum \alpha_n^2$ et que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \leqslant 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Exercice 1.7. Soit p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier. Déterminer la nature de la série de terme général $1/p_n$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 1.1. Le résultat est clair si $M = 0$. Supposons ce cas exclu. Il est immédiat que $u_n \leqslant (b-a)^{1/n}M$ pour tout n. On en déduit que $\limsup u \leqslant M$.

Soit $\varepsilon \in]0, M[$. L'application f étant continue, par définition de M, il existe des réels c, d vérifiant $a \leqslant c < d \leqslant b$ et $f(t) \geqslant M - \varepsilon$ pour tout $t \in [c, d]$. Alors

$$u_n \geqslant \Big(\int_c^d [f(t)]^n \, dt\Big)^{1/n} \geqslant (d-c)^{1/n}(M-\varepsilon).$$

D'où $\liminf u \geqslant M - \varepsilon$. Ceci étant vrai pour $\varepsilon \in]0, M[$, on obtient $\liminf u \geqslant M$.

Comme $\liminf u \leqslant \limsup u$, il vient $\liminf u = \limsup u$, et on conclut d'après 1.2.6.

Exercice 1.2. Ecrivons $(2+\sqrt{3})^n = N + N'\sqrt{3}$, avec $N, N' \in \mathbb{N}$. On a alors $(2-\sqrt{3})^n = N - N'\sqrt{3}$. D'où $\pi(2+\sqrt{3})^n = 2\pi N - \pi(2-\sqrt{3})^n$. Par suite, si l'on pose $v_n = \sin[\pi(2-\sqrt{3})^n]$, il vient $u_n = -v_n$. Or, comme $0 < 2-\sqrt{3} < 1$, on a $0 < v_n < \pi(2-\sqrt{3})^n$. On en déduit la convergence de $\sum v_n$ puis de $\sum u_n$.

Exercice 1.3. Si u_n ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la série $\sum u_n$ est divergente. Supposons que $\lim u_n = 0$. Alors $u_n \sim -\ln(1-u_n)$, ce qui s'écrit $-u_n \sim \ln(D_{n-1}/D_n)$. Or

$$-\sum_{k=1}^{n} \ln(1-u_k) = -\ln D_0 + \ln D_n \to +\infty$$

si $n \to +\infty$. Par suite, la série $\sum u_n$ diverge.

Pour $n \geqslant 1$, on a :

$$v_n = \frac{D_n - D_{n-1}}{D_n^\alpha} \leqslant \int_{D_{n-1}}^{D_n} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Comme $\alpha > 1$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\sum_{n=1}^{N} v_n \leqslant \int_{d_0}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} < +\infty,$$

ce qui montre que la série $\sum v_n$ est convergente.

Exercice 1.4.

1. Si n est assez grand, $R_{n-1} < 1$. Si $a \leqslant 0$, on a donc $0 \leqslant v_n \leqslant u_n$ pour n assez grand. D'où la convergence de $\sum v_n$.

2. Supposons $a = 1$. Si v_n ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il y a divergence de la série $\sum v_n$. Supposons $\lim v_n = 0$. Dans ce cas, au voisinage de $+\infty$, on a :

$$v_n \sim -\ln(1 - v_n) = \ln \frac{R_{n-1}}{R_n}\cdot$$

Or :

$$\sum_{k=2}^{n} x_k = \ln R_1 - \ln R_n \to +\infty.$$

Il y a divergence de la série $\sum v_n$.

Si $a > 1$, dès que $R_{n-1} < 1$, on a

$$v_n > \frac{u_n}{R_{n-1}}\cdot$$

D'où à nouveau divergence de la série d'après ce qui précède.

3. Supposons $0 < a < 1$. On a :

$$v_n = \frac{R_{n-1} - R_n}{R_{n-1}^{\alpha}} \leqslant \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t^{\alpha}}.$$

On en déduit que, pour $N \geqslant 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} v_n \leqslant \int_0^{R_0} \frac{dt}{t^{\alpha}} < +\infty$$

d'après l'hypothèse sur α. La série $\sum v_n$ est convergente.

Exercice 1.5. On a ou $\alpha_n = \alpha_{n+1}$, ou $\alpha_{n+1} = 1 + \alpha_n$.

• Si $\alpha_n = \alpha_{n+1}$, on a $u_{n+1}/u_n = a$. Si $\alpha_{n+1} = 1 + \alpha_n$, il vient $u_{n+1}/u_n = b^{\alpha_n+1}$, et ce dernier terme peut être rendu arbitrairement grand avec n. On en déduit que le rapport u_{n+1}/u_n n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$, et on ne peut conclure quant à la convergence de la série.

• Si $10^p \leqslant n < 10^{p+1}$, on a $\alpha_n = p$. D'où :

$$\frac{p}{10^{p+1}} < \frac{\alpha_n}{n} \leqslant \frac{p}{10^p}\cdot$$

On en déduit facilement :

$$\lim \frac{\alpha_n}{n} = \lim \frac{\alpha_n(\alpha_n + 1)}{n} = 0.$$

Par suite

$$\sqrt[n]{u_n} = a^{1-(\alpha_n/n)} b^{\alpha_n(\alpha_n+1)/2n} \to a$$

si $n \to +\infty$. La série est donc convergente puisque $a < 1$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Exercice 1.6. Comme
$$|a_1 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + \cdots + |a_n|,$$
on peut supposer les a_i positifs ou nuls. En posant $\alpha_0 = 0$, on a :
$$\begin{aligned}\alpha_n^2 - 2a_n\alpha_n &= \alpha_n^2 - 2[n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1}]\alpha_n \\ &= \alpha_n^2[1-2n) + 2(n-1)\alpha_{n-1}\alpha_n \\ &\leqslant (1-2n)\alpha_n^2 + (n-1)[\alpha_n^2 + \alpha_{n-1}^2] = (n-1)\alpha_{n-1}^2 - n\alpha_n^2.\end{aligned}$$
On en déduit :
$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 - 2\sum_{n=1}^{N} a_n\alpha_n \leqslant -N\alpha_N^2 \leqslant 0.$$
D'où :
$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 \leqslant 2\sum_{n=1}^{N} a_n\alpha_n \leqslant 2\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2\Big)^{1/2}.$$
Si tous les a_n sont nuls, le résultat demandé est clair. Sinon, pour N assez grand, le membre de droite de l'inégalité précédente est non nul. Alors, si N est assez grand, il vient :
$$\Big(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2\Big)^{1/2} \leqslant 2\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\Big)^{1/2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{N} a_n^2.$$
D'où le résultat.

Exercice 1.7. On a $\lim p_n = +\infty$, donc $p_n^{-1} \sim -\ln(1-p_n^{-1})$. On va prouver que la série de terme général $x_n = -\ln(1-p_n^{-1})$ est divergente, ce qui montrera que la série donnée diverge.

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, on :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_i^n} = \frac{1}{1-p_i^{-1}} \geqslant 1 + \frac{1}{p_i} + \cdots + \frac{1}{p_i^{\alpha}}\cdot$$
Soient $N \in \mathbb{N}^*$ fixé et p_i le plus grand entier premier vérifiant $p_i \leqslant N$. Tous les entiers inférieurs ou égaux à N sont des produits de la forme $p_1^{\alpha_1}\cdots p_i^{\alpha_i}$ avec $\alpha_k \leqslant \beta$ pour $1 \leqslant k \leqslant i$. On a donc :
$$\begin{aligned}\Big[\Big(1-\frac{1}{p_1}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{p_i}\Big)\Big]^{-1} &\geqslant \Big(1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_1^{\beta}}\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{p_i}+\cdots+\frac{1}{p_i^{\beta}}\Big) \\ &\geqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}\cdot\end{aligned}$$
On en déduit que :
$$\lim_{n\to+\infty}\Big[\Big(1-\frac{1}{p_1}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{p_n}\Big)\Big]^{-1} = +\infty.$$
D'où :
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} -\ln\Big(1-\frac{1}{p_i}\Big) = +\infty.$$
On a prouvé la divergence de la série $\sum p_n^{-1}$.

Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

On désigne par X un ensemble et par $\mathbb{K}$ le corps des réels ou celui des complexes. Une application de X dans $\mathbb{K}$ sera aussi appelée une fonction sur X.

2.1 CONVERGENCE SIMPLE

Définition 2.1.1. *Soit* $\mathbf{f} = (f_n)_n$ *une suite de fonctions sur* X*. On dit que* $\mathbf{f}$ *converge* simplement *sur* X *si, pour tout* $x \in X$*, la suite* $\big(f_n(x)\big)_n$ *est convergente.*

2.1.2. Supposons que $\mathbf{f} = (f_n)_n$ converge simplement sur X. Pour tout $x \in X$, la suite $\big(f_n(x)\big)_n$ a une limite $f(x) \in \mathbb{K}$, ce qui définit une fonction f sur X. On dit que f est la *limite simple* de $\mathbf{f}$ (ou des f_n), ou que $\mathbf{f}$ *converge simplement* vers f sur X.

La convergence simple de $\mathbf{f}$ vers f sur X s'écrit : pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant N$. En général, l'entier N *dépend* de x.

2.1.3. Soit toujours $\mathbf{f} = (f_n)_n$ une suite de fonctions sur X. Si Y est une partie de X, notons $\mathbf{g} = (f_n|Y)_n$. Par abus de langage, on dit que $\mathbf{f}$ converge simplement sur Y si $\mathbf{g}$ converge simplement sur Y.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

2.1.4. Le corps $\mathbb{K}$ étant complet, on a le résultat suivant :

Théorème 2.1.5. *Soient X un ensemble et $\mathbf{f} = (f_n)_n$ une suite de fonctions sur X. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La suite $\mathbf{f}$ converge simplement sur X.*

(ii) *Pour tout $x \in X$, la suite $\big(f_n(x)\big)_n$ est une suite de Cauchy.*

2.2 CONVERGENCE UNIFORME

Définition 2.2.1. *On dit qu'une suite $\mathbf{f} = (f_n)_n$ de fonctions sur X* converge uniformément *s'il existe une fonction f sur X telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, on puisse déterminer $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$:*

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)|\,;\, x \in X\} \leqslant \varepsilon.$$

S'il en est ainsi, on dit que f est la limite uniforme *de $\mathbf{f}$ ou des f_n sur X.*

> ***Remarque.*** Si f est la limite uniforme de $\mathbf{f}$ sur X, c'est aussi la limite simple de $\mathbf{f}$ sur X. Par contre, il est bien connu qu'une suite de fonctions peut converger simplement sans converger uniformément.

Définition 2.2.2. *Soit $\mathbf{f} = (f_n)_n$ une suite de fonctions sur X. On dit que $\mathbf{f}$ vérifie le* critère de Cauchy uniforme *sur X si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$m \geqslant N, n \geqslant N \Rightarrow \sup\{|f_m(x) - f_n(x)|\,;\, x \in X\} \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 2.2.3. *Soient X un ensemble et $\mathbf{f} = (f_n)_n$ une suite de fonctions sur X. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La suite $\mathbf{f}$ converge uniformément sur X.*

(ii) *La suite $\mathbf{f}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur X.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons (i) vérifié, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant N \Rightarrow \sup\{|f(x) - f_n(x)|\,;\, x \in X\} \leqslant \varepsilon.$$

On obtient alors (ii) car, si $m \geqslant N$, $n \geqslant N$, il vient :

$$\sup\{|f_n(x) - f_m(x)|\,;\, x \in X\} \leqslant 2\varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si (ii) est vérifié, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy, donc a une limite $f(x) \in \mathbb{K}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in X$, on ait :

$$m \geqslant N, n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient

$$n \geqslant N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

pour tout $x \in X$. Par suite, $\mathbf{f}$ converge uniformément vers f sur X. □

2.3 CONTINUITÉ

2.3.1. On désigne par E un espace métrique.

Théorème 2.3.2. *Soient $a \in E$ et $\mathbf{f} = (f_n)_n$ une suite de fonctions sur E. On suppose que les f_n sont continues en a et que $\mathbf{f}$ converge uniformément vers une fonction f sur E. Alors f est continue en a.*

Démonstration. Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que l'on ait $\sup\{|f_N(x) - f(x)|\, ;\, x \in E\} \leqslant \varepsilon$. Comme f_N est continue en a, il existe un voisinage V de a dans E tel que $x \in V$ implique $|f_N(x) - f_N(a)| \leqslant \varepsilon$. Alors, si $x \in V$, il vient :

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \leqslant 3\varepsilon.$$

D'où l'assertion. □

Corollaire 2.3.3. *Si une suite de fonctions continues sur E converge uniformément sur E, sa limite est continue sur E.*

Corollaire 2.3.4. *Soit $\mathbf{f}$ une suite de fonctions continues sur E convergeant simplement vers une fonction f sur E. On suppose que, pour tout $a \in E$, il existe un voisinage de a sur lequel $\mathbf{f}$ converge uniformément. Alors f est continue sur E.*

Démonstration. Résulte de 2.3.2 et du caractère local de la continuité. □

2.4 DÉRIVABILITÉ

Lemme 2.4.1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I. On suppose qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f'(t)| \leqslant A$ pour tout $t \in I$. Alors, pour $a, b \in I$, on a $|f(b) - f(c)| \leqslant 2A|b - a|$.*

Démonstration. Notons g (respectivement h) la partie réelle (respectivement partie imaginaire) de f. D'après le théorème des accroissements finis, il existe c, d compris entre a et b tels que :

$$g(b) - g(a) = (b - a)g'(c)\ ,\ h(b) - h(a) = (b - a)h'(d).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\leqslant |g(b) - g(a)| + |h(b) - h(a)| = |b - a|(|g'(c)| + |h'(d)|) \\ &\leqslant 2A|b - a|. \end{aligned}$$

D'où le lemme. □

Théorème 2.4.2. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbf{f} = (f_n)_n$ une suite de fonctions sur I vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Toutes les fonctions f_n sont dérivables sur I.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

(ii) *La suite* $\mathbf{g} = (f'_n)_n$ *converge uniformément sur* I *vers une fonction* g.
(iii) *Il existe* $\alpha \in I$ *tel que la suite* $\big(f_n(\alpha)\big)_n$ *converge.*
Alors la suite $\mathbf{f}$ *converge simplement sur* I *vers une fonction* f, *et cette convergence est uniforme sur toute partie bornée de* I. *En outre,* f *est dérivable sur* I, *et* $f' = g$.

Démonstration. 1) Soit $\varepsilon > 0$. D'après 2.2.3, il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que :

$$m \geqslant P, n \geqslant P \Rightarrow \sup\{|f'_n(t) - f'_m(t)|\,;\, t \in I\} \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

D'autre part, la suite $\big(f_n(\alpha)\big)_n$ étant convergente, il existe $Q \in \mathbb{N}$ tel que :

$$m \geqslant Q, n \geqslant Q \Rightarrow |f_m(\alpha) - f_n(\alpha)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $N = \max\{P, Q\}$. D'après (1) et 2.4.1, si $t \in I$, $m \geqslant N$, et $n \geqslant N$, on a :

$$|\big(f_m(t) - f_n(t)\big) - \big(f_m(\alpha) - f_n(\alpha)\big)| \leqslant 2\varepsilon|t - \alpha|.$$

D'où, dans les mêmes conditions :

$$|f_m(t) - f_n(t)| \leqslant |f_m(\alpha) - f_n(\alpha)| + 2\varepsilon|t - \alpha| \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon|t - \alpha|.$$

Compte tenu de 2.2.3, on voit donc que $\mathbf{f}$ converge uniformément sur toute partie bornée de I. Notons f la limite des f_n.
2) Soit $a \in I$ définissons une suite $\mathbf{h} = (h_n)_n$ de fonctions sur I par :

$$h_n(a) = f'_n(a)\ ,\ h_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(a)}{t - a} \ \text{ si } \ t \neq a.$$

Par construction, les fonctions h_n sont continues sur I.
Soit $h\colon I \to \mathbb{C}$ définie par :

$$h(a) = g(a)\ ,\ h(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \ \text{ si } \ t \neq a.$$

La fonction h est limite simple des h_n.
Soient $\varepsilon > 0$ et $P \in \mathbb{N}$ comme dans le point 1. D'après 2.4.1, si $t \in I$, $m \geqslant P$, et $n \geqslant P$, on a :

$$|\big(f_m(t) - f_n(t)\big) - \big(f_m(a) - f_n(a)\big)| \leqslant 2\varepsilon|t - a|.$$

On en déduit, si $t \neq a$:

$$|h_m(t) - h_n(a)| \leqslant 2\varepsilon.$$

D'après (1), c'est encore vrai si $t = a$. Ainsi, $\mathbf{h}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur I. Comme $\mathbf{h}$ converge simplement vers h sur I, on en déduit que $\mathbf{h}$ converge uniformément vers h sur I. Alors, d'après 2.3.2, h est continue sur I. En particulier, h est continue au point a, donc :

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = g(a).$$

On a prouvé que f est dérivable en a, et que $f'(a) = g(a)$. □

Remarque. On sait que, sur $[-1, 1]$, la fonction $x \to |x|$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. Ceci montre qu'une limite uniforme de fonctions dérivables peut ne pas être dérivable.

2.5 INTÉGRABILITÉ

2.5.1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une application bornée.

Soit $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ une subdivision de $[a,b]$. Notons M_i et m_i les bornes supérieure et inférieure de f sur $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Les sommes de Darboux relatives à f et σ sont définies par :

$$S(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{p}(x_i - x_{i-1})M_i\ ,\ s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{p}(x_i - x_{i-1})m_i.$$

Rappelons que f est intégrale sur $[a,b]$ (au sens de Riemann) si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que :

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 2.5.2. *Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbf{f} = (f_n)_n$ une suite d'applications intégrables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $\mathbf{f}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une application f. Alors f est intégrable sur $[a,b]$, et :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_n \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Démonstration. Si $n \in \mathbb{N}$, posons $\mu_n = \sup\{|f_n(t) - f(t)|\,;\, t \in [a,b]\}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mu_N \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}\cdot$ On voit en particulier que f est bornée sur $[a,b]$. Soit $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ une subdivision de $[a,b]$ telle que

$$S(f_N,\sigma) - s(f_N,\sigma) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Notons M_i et m_i (respectivement M_i' et m_i') les bornes supérieure et inférieure de f_N (respectivement f) sur $[x_{i-1}, x_i]$. Il vient :

$$M_i' \leqslant M_i + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}\ ,\ m_i' \geqslant m_i - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}\cdot$$

Par suite :

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \leqslant S(f_N,\sigma) - s(f_N,\sigma) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{p}(x_i - x_{i-1}) \leqslant \varepsilon.$$

On a prouvé que f est intégrable sur $[a,b]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\Big|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f_n(t)\,dt\Big| \leqslant \int_a^b |f(t) - f_n(t)|\,dt \leqslant (b-a)\mu_n.$$

D'où la dernière assertion. $\square$

Remarque. Le théorème 2.5.2 ne s'étend *pas* aux intégrales impropres.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

2.6 SÉRIES DE FONCTIONS

Définition 2.6.1. *Soit* $\mathbf{f} = (f_n)_n$ *une suite de fonctions sur* X. *On appelle* série de fonctions de terme général f_n, *et on note* $\sum f_n$, *la suite de fonctions*

$$\Big(f_n, \sum_{k=0}^{n} f_k\Big)_n .$$

L'élément $f_0 + \cdots + f_n$ *est noté* F_n, *et on dit que* $\mathbf{F} = (F_n)_n$ *est la* suite de fonctions associée *à la série* $\sum f_n$.

On dit que la série $\sum f_n$ converge simplement *(respectivement* uniformément*) sur* X *si la suite* $\mathbf{F}$ *converge simplement (respectivement uniformément) sur* X.

On dit que la série $\sum f_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme *si la suite* $\mathbf{F}$ *vérifie ce critère.*

2.6.2. Conservons les notations précédentes.

• Dire que $\sum f_n$ converge simplement sur X signifie que, pour tout $x \in X$, la série $\sum f_n(x)$ converge. Si c'est le cas, on dispose de la fonction

$$F \colon X \to \mathbb{C}\ ,\ x \to \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),$$

qui est la limite simple de $\mathbf{F}$. Cette application est appelée la *somme* de la série $\sum f_n$. On peut aussi considérer la suite de fonctions $\mathbf{r} = (r_n)_n$ donnée par :

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

• D'après les définitions $\sum f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si la suite $\mathbf{r}$ converge uniformément sur X vers la fonction nulle.

• Dire que $\sum f_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme signifie : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant N, p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sup\left\{\Big|\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(x)\Big| \,;\, x \in X\right\} \leqslant \varepsilon.$$

2.6.3. Le résultat suivant ainsi que ceux de 2.6.4, 2.6.5, 2.6.6, sont des traductions, en termes de séries de fonctions, de résultats vus pour les suites de fonctions.

Théorème. *Une série de fonctions sur* X *converge uniformément sur* X *si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme sur* X.

Théorème 2.6.4. *Soient* X *une partie de* $\mathbb{K}$, $\sum f_n$ *une série de fonctions sur* X *convergeant uniformément sur* X, *et* F *la somme de cette série.*

(i) *Soit* $a \in X$. *Si les* f_n *sont continues au point* a, F *est continue en* a.

(ii) *Si les* f_n *sont continues sur* X, F *est continue sur* X.

Théorème 2.6.5. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions sur I vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Les fonctions f_n sont dérivables sur I.*

(ii) *La série $\sum f'_n$ est uniformément convergente sur I.*

(iii) *Il existe $\alpha \in I$ tel que la série $\sum f_n(\alpha)$ converge.*

Alors la série $\sum f_n$ converge simplement sur I, cette convergence étant uniforme sur toute partie bornée de I. La fonction somme de cette série est dérivable sur I et, si $x \in I$, on a :

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\Big)'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x).$$

Théorème 2.6.6. *Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions intégrables sur $[a,b]$. On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$. Alors la somme de cette série est intégrable sur $[a,b]$ et :*

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\Big)(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Proposition 2.6.7. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions sur X. Si la série $\sum |f_n|$ converge uniformément sur X, il en est de même de la série $\sum f_n$.*

Démonstration. Si $n, p \in \mathbb{N}$ et $x \in X$, on a :

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leqslant |f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)|.$$

Il suffit donc d'appliquer le critère de Cauchy uniforme. □

2.7 CONVERGENCE NORMALE

Définition 2.7.1. *Une série de fonctions $\sum f_n$ sur X est dite* normalement convergente *sur X s'il existe une série $\sum \mu_n$ à termes réels positifs ou nuls vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *La série $\sum \mu_n$ est convergente.*

(ii) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sup\{|f_n(x)|\,;\, x \in X\} \leqslant \mu_n$.*

Théorème 2.7.2. *Si une série de fonctions sur une partie X de $\mathbb{K}$ est normalement convergente sur X, elle est uniformément convergente sur X.*

Démonstration. C'est immédiat d'après le critère de Cauchy uniforme. □

Théorème 2.7.3. *Soient $\mathbf{g} = (g_n)_n$ et $\mathbf{h} = (h_n)_n$ des suites de fonctions sur X vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Pour tout $x \in X$, la suite $\big(g_n(x)\big)_n$ est à termes réels et décroissante.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

(ii) *La suite* g *converge uniformément sur* X *vers la fonction nulle.*
(iii) *Il existe* $M \in R_+$ *tel que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on ait :*

$$\sup \left\{ \Big| \sum_{k=0}^{n} h_k(x) \Big| \,; x \in X \right\} \leqslant M.$$

Alors la série de fonctions $\sum g_n h_n$ *converge uniformément sur* X.

Démonstration. Posons $f_n = g_n h_n$ et $H_n = h_0 + h_1 + \cdots + h_n$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r} f_{n+k} &= \sum_{k=1}^{r} g_{n+k}(H_{n+k} - H_{n+k-1}) \\ &= -H_n g_{n+1} + g_{n+r} H_{n+r} + \sum_{k=1}^{r-1} (g_{n+k} - g_{n+k+1}) H_{n+k}.\end{aligned}$$

D'après (i) et (iii), si $x \in X$, on a donc :

$$\Big| \sum_{k=1}^{r} f_{n+k}(x) \Big| \leqslant 2M g_{r+1}(x).$$

D'où le résultat d'après (ii) et le critère de Cauchy. □

EXERCICES

Exercice 2.1. Soient a, b des nombres réels vérifiant $a < b$ et $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue. On pose $f_0 = f$ et on définit, par récurrence, une application $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ en posant, si $x \in [a,b]$:

$$f_n(x) = \int_a^x f_{n-1}(t)\,dt.$$

Prouver la convergence de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, et calculer la somme S de cette série.

Exercice 2.2. Soit $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une application f. Prouver que f est une fonction polynôme.

Exercice 2.3. Si $t \in [0,1]$ et $n \geqslant 1$, on pose $f_n(t) = nt(1-t)^n$ et $g_n(t) = nf_n(t)$.

1. Etudier la convergence de la suite $(f_n)_n$.

2. Soit $g = \lim_n g_n$. Comparer

$$\int_0^1 g(t)\,dt \;\text{ et }\; \lim_n \int_0^1 g_n(t)\,dt.$$

Exercice 2.4. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite d'applications sur I, à valeurs réelles, et convergeant uniformément sur I. On pose $g_n = f_n(1+f_n^2)^{-1}$. Montrer que la suite $(g_n)_n$ converge uniformément sur I.

Exercice 2.5. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue. Etablir :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^{n-1}}{n!} \int_0^1 e^{(nx(1-t)} f(t)\,dt\Big].$$

Exercice 2.6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f_n(x,y) = \frac{1}{n^2} e^{-n(x^2+y^2)}.$$

Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ et la différentiabilité de la somme F de cette série.

Exercice 2.7. Existence et calcul pour $x > 0$ de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x (\ln t)^n\,dt.$$

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 2.1. Fixons un réel $A \geqslant 0$ vérifiant $|f(x)| \leqslant A$ pour tout $x \in [a,b]$. On a $|f_1(x)| \leqslant A(x-a)$. Si l'on suppose que $|f_{n-1}(x)| \leqslant A(x-a)^{n-1}[(n-1)!]^{-1}$, il est immédiat de vérifier que $|f_n(x)| \leqslant A(x-a)^n[n!]^{-1}$.

On a donc $|f_n(x)| \leqslant A(b-a)^n[n!]^{-1}$ pour $x \in [a,b]$ et $n \geqslant 0$. Ceci prouve que la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur $[a,b]$.

Pour $n \geqslant 1$, f_n est dérivable, et $f_n' = f_{n-1}$. Les calculs précédents prouvent que la série $\sum f_n'$ est uniformément convergente sur $[a,b]$. Par suite, S est dérivable sur $[a,b]$ et, si $x \in [a,b]$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f(x) + S(x).$$

D'où :

$$\begin{aligned} S(x) - S'(x) = f(x) &\Rightarrow [S(x)e^{-x}]' = f(x)e^{-x} \\ &\Rightarrow S(x)e^{-x} - S(a)e^{-a} = \int_a^x f(t)e^{-t}\,dt. \end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Comme $S(a) = 0$, on obtient donc :

$$S(x) = e^x \int_a^x f(t)e^{-t}\,dt.$$

Exercice 2.2. Pour toute application $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, posons $\|g\| = \sup\{|g(x)|\,;\, x \in \mathbb{R}\}$.

D'après les hypothèses, il existe un entier N tel que $\|P_n - P_N\| \leqslant 1$ dès que $n \geqslant N$. Si $n \geqslant N$, le polynôme $P_n - P_N$ est donc constant. Ainsi, il existe $\alpha_n \in \mathbb{C}$ tel que $P_n = P_N + \alpha_n$ pour $n \geqslant N$. Il est alors immédiat que f est une fonction polynôme.

Exercice 2.3.

1. Si $0 \leqslant a < 1$, on a $\lim_n na^n = 0$. On en déduit que $(f_n)_n$ converge simplement vers l'application nulle sur $[0,1]$. D'autre part :

$$f_n\Big(\frac{1}{n}\Big) = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^n \to \frac{1}{e}\cdot$$

La convergence vers 0 de la suite $(f_n)_n$ n'est donc pas uniforme sur $[0,1]$.

Soit $a \in]0,1]$. Si $a \leqslant t \leqslant 1$, on a $|f_n(t)| \leqslant n(1-a)^n$. Par conséquent, la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $[a,1]$.

2. On voit comme en 1 que g est l'application nulle. L'intégrale de g sur $[0,1]$ est donc égale à 0. Il vient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_n(t)\,dt &= \frac{n^2}{n+1}\big[-t(1-t)^{n+1}\big]_0^1 + \frac{n^2}{n+1}\int_0^1 (1-t)^{n+1}\,dt \\ &= \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \to 1 \ \text{ si } \ n \to +\infty.\end{aligned}$$

On déduit en particulier de ceci que la convergence de g_n vers 0 n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 2.4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $A = a(1+a^2)^{-1}$, et $B = b(1+b^2)^{-1}$. Il vient :

$$|A - B| = \frac{|a-b||1-ab|}{(1+a^2)(1+b^2)} \leqslant |a-b|,$$

car $(1+a^2)(1+b^2) \geqslant 1 + a^2 + b^2 \geqslant 1 + |ab| \geqslant |1-ab|$.

On a ainsi $\sup\{|g_n(t) - g_p(t)|\,;\, t \in I\} \leqslant \sup\{|f_n(t) - f_p(t)|\,;\, t \in I\}$. Le résultat est donc une conséquence du critère de Cauchy uniforme.

Exercice 2.5. Le réel $x > 0$ étant fixé, définissons

$$g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}\ ,\ t \to \frac{(-1)^{n-1}}{n!} f(t)e^{nx(1-t)}.$$

Si $A = \sup\{|f(t)|\,;\, t \in [0,1]\}$, on a donc, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$$|g_n(t)| \leqslant \frac{A}{n!} e^{nx} = A \frac{(e^x)^n}{n!}.$$

Ainsi, x étant fixé, la série $\sum g_n$ est normalement convergente sur $[0,1]$. On en déduit en particulier que

$$\int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \Big)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 g_n(t)\, dt,$$

soit encore :

$$\int_0^1 f(t)\, dt - \int_0^1 \exp[-e^{x(1-t)}] f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int_0^1 e^{nx(1-t)} f(t)\, dt.$$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On a :

$$\Big| \int_{1-\varepsilon}^1 \exp[-e^{x(1-t)}] f(t)\, dt \Big| \leqslant \int_{1-\varepsilon} |f(t)|\, dt \leqslant \varepsilon A,$$

$$\Big| \int_0^{1-\varepsilon} \exp[-e^{x(1-t)}] f(t)\, dt \Big| \leqslant A \int_0^1 \exp(-e^{x\varepsilon})\, dt = A \exp(-e^{x\varepsilon}).$$

Or, si x est assez grand, on a $\exp(-e^{x\varepsilon}) \leqslant \varepsilon$. D'où facilement le résultat.

Exercice 2.6. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $0 \leqslant f_n(x,y) \leqslant n^{-2}$. Par suite, la série $\sum f_n$ est normalement, donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}^2$. Les f_n étant continues, il en est de même de F.

Posons :

$$g_n(t) = -2 \frac{x}{n} \exp(-nx^2).$$

Il vient :

$$g_n'(t) = \Big(4x^2 - \frac{2}{n} \Big) \exp(-nx^2).$$

On en déduit que g_n est extrémale pour $t = \pm 1/\sqrt{2n}$, puis que :

$$|g_n(t)| \leqslant \sqrt{2}/ne\sqrt{n} = An^{-3/2}.$$

Il vient alors facilement :

$$\Big| \frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y) \Big| \leqslant An^{-3/2} \ , \ \Big| \frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y) \Big| \leqslant An^{-3/2}.$$

Ceci montre que les séries de fonctions de termes généraux $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f_n}{\partial y}$ sont normalement (donc uniformément) convergentes sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, F admet des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^2$. Il en résulte que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Exercice 2.7. Pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$u_n(t) = \frac{(\ln t)^n}{n!}\cdot$$

Si K est un compact de $]0, +\infty[$, il existe $A > 0$ tel que $|\ln t| \leqslant A$ pour tout $t \in K$. Il en résulte que la série $\sum u_n$ est normalement convergente sur K. Si $x > 0$, on aura donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_1^x u_n(t)\, dt = \int_1^x \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \Big)\, dt.$$

Or, si $t > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) = e^{\ln t} - 1 = t - 1.$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x (\ln t)^n\, dt = \frac{(x-1)^2}{2}\cdot$$

Chapitre 3

Séries entières

3.1 GÉNÉRALITÉS

3.1.1. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_0| < r\}\ ,\ D'(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_0| \leqslant r\},$$
$$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_0| = r\}.$$

On dit que $D(z_0, r)$ (respectivement $D'(z_0, r)$, $C(z_0, r)$) est le *disque ouvert* (respectivement *disque fermé*, *cercle*) de centre z_0 et de rayon r.

Définition 3.1.2. *On appelle* série entière de la variable complexe *toute série de fonctions* $\sum f_n$, *avec*

$$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ ,\ z \to a_n z^n,$$

où $a_n \in \mathbb{C}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On dit que* a_n *est le* coefficient d'indice n *de la série, et que* a_0 *en est le* terme constant.

3.1.3. La série entière précédente sera notée $\sum a_n z^n$.

On parlera de série entière de *variable réelle* lorsqu'il sera question d'une série de fonctions $\sum f_n$, avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \to a_n t^n$, où $a_n \in \mathbb{C}$.

Dans la suite, sauf mention expresse du contraire, l'expression « série entière » signifiera « série entière de la variable complexe ».

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

3.1.4. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières et $\lambda \in \mathbb{C}$. On définit :

(i) La série entière *somme* $\sum c_n z^n$ de ces séries par $c_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) La série entière $\sum d_n z$ produit de $\sum a_n z^n$ par λ en posant $d_n = \lambda a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iii) La *série entière produit* $\sum e_n z^n$ de ces deux séries par $e_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.2 RAYON DE CONVERGENCE

Théorème 3.2.1. (Lemme d'Abel). *Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée. Alors, la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans tout disque $D'(0, r)$, avec $r < |z_0|$.*

Démonstration. On peut supposer $z_0 \neq 0$. Soit M un majorant de la suite $(|a_n z_0^n|)_n$ et r un réel positif tel que $r < |z_0|$. Si $|z| \leqslant r$, on a :

$$|a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \right| \leqslant M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leqslant M \left| \frac{r}{z_0} \right|^n.$$

D'où le résultat d'après 1.3.9. □

Corollaire 3.2.2. *Si la série entière $\sum a_n z^n$ converge pour $z_0 \in \mathbb{C}$, elle converge normalement dans tout disque $D'(0, r)$ tel que $r < |z_0|$.*

Démonstration. Si la série $\sum a_n z_0^n$ converge, la suite $(a_n z_0^n)_n$ admet 0 pour limite, donc est bornée. □

Théorème 3.2.3. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Il existe un unique élément R de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ possédant les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*

(ii) *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ est divergente.*

On dit que R est le rayon de convergence *de la série, que $D(0, R)$ en est le* disque de convergence, *et que $C(0, R)$ en est le* cercle de convergence.

Démonstration. Soit B l'ensemble des réels positifs ou nuls tels que la suite $(a_n r^n)_n$ soit bornée. On a $0 \in B$. Soit $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ la borne supérieure de B.

• Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R$. Il existe $r \in B$ tel que $|z| < r < R$. La suite $(a_n r^n)_n$ étant bornée, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente d'après 3.2.1.

• Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$. Si la série $\sum a_n z^n$ était convergente, la suite $(a_n |z|^n)_n$ serait bornée (1.3.6). Cela contredit la définition de R.

• L'unicité de R est évidente. □

3.2.4. Précisons quelques points.

1) En un point z tel que $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée.

2) Si $|z| = R$, on ne peut rien dire *a priori* de la série $\sum a_n z^n$.

3) Les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum |a_n| z^n$, et $\sum \lambda a_n z^n$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, ont même rayon de convergence.

4) Dans le cas d'une série entière de la variable réelle, on parle de l'*intervalle de convergence* $]-R, R[$ au lieu de disque de convergence.

3.2.5. Soit $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Dans la suite, on conviendra que :

$$\frac{1}{R} = +\infty \ \text{ si } \ R = 0 \ , \ \frac{1}{R} = 0 \ \text{ si } \ R = +\infty.$$

Théorème 3.2.6. (Formule de Hadamard). *Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par :*

$$\frac{1}{R} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Démonstration. Si $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Il suffit donc d'appliquer 1.6.1. □

Théorème 3.2.7. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

(i) *Si la suite $(\sqrt[n]{|a_n|})_n$ a une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on a $R = \dfrac{1}{\ell}\cdot$*

(ii) *On suppose $a_n \neq 0$ pour n assez grand. Si la suite $(|a_{n+1}/a_n|)_n$ a une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors $R = \dfrac{1}{\ell}\cdot$*

Démonstration. Cela résulte de 1.6.2 et 1.6.4. □

Proposition 3.2.8. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2. On note respectivement ρ_1 et ρ_2 les rayons de convergence des séries entières somme et produit, notées $\sum c_n z^n$ et $\sum d_n z^n$.*

(i) *En tout point $z \in \mathbb{C}$ telles que les séries de termes généraux $a_n z^n$ et $b_n z^n$ convergent, la série de terme général $c_n z^n$ converge et :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

(ii) *En tout point $z \in \mathbb{C}$ tel que les séries de termes généraux $a_n z^n$ et $b_n z^n$ convergent absolument, la série de terme général $d_n z^n$ converge et :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\Big).$$

(iii) *Si $R_1 \neq R_2$, on a $\rho_1 = \min(R_1, R_2)$. Si $R_1 = R_2$, alors $\rho_1 \geqslant \min(R_1, R_2)$.*

(iv) *On a $\rho_2 \geqslant \min(R_1, R_2)$.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Démonstration. On obtient (i) et (ii) d'après 1.3.2 et 1.9.2, et alors $\rho_i \geqslant \min(R_1, R_2)$ si $i = 1, 2$.
Supposons $R_2 < R_1$. Comme $\sum b_n z^n$ est la série somme de $\sum(-a_n)z^n$ et de $\sum c_n z^n$, il vient $R_2 \geqslant \min(R_1, \rho_1)$, d'où $R_2 \geqslant \rho_1$ puisque $R_2 < R_1$. Ainsi, $\rho_1 = R_2$. □

3.3 CONTINUITÉ ET INTÉGRABILITÉ

Théorème 3.3.1. *La somme d'une série entière est une fonction continue en tout point de son disque de convergence.*

Démonstration. Les fonctions $z \to a_n z^n$ étant continues, le théorème est conséquence immédiate de 2.6.4 et 3.2.1. □

Corollaire 3.3.2. *Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. Alors*

$$S(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_p z^p + z^p \varepsilon(z),$$

où $\varepsilon(z)$ tend vers 0 quand z tend vers 0.

Démonstration. Les séries entières $\sum_{n \geqslant p+1} a_n z^n$ et $\sum_{n \geqslant p+1} a_n z^{n-p}$ ont pour rayon de convergence R. D'après 3.3.1, il vient :

$$\lim_{z \to 0} \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^{n-p} = 0.$$

D'où le résultat. □

Théorème 3.3.3. *Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$. Sa fonction somme est intégrable sur tout intervalle $[a, b]$ contenu dans $]-R, R[$, et on a :*

$$\int_a^b S(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b t^n\, dt.$$

Démonstration. Résulte de 2.6.6 et 3.2.1. □

Corollaire 3.3.4. *Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$. Sur l'intervalle $]-R, R[$, sa fonction somme admet pour ensemble de primitives les fonctions*

$$t \to k + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1},$$

avec $k \in \mathbb{C}$.

3.4 DÉRIVABILITÉ

Définition 3.4.1. *On appelle* série (entière) dérivée *d'une série entière* $\sum a_n z^n$ *la série entière* $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$.

Proposition 3.4.2. *Une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence.*

Démonstration. Notons R, ρ les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum(n+1)a_n z^n$.
• Si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée (3.2.4). Il en est donc de même de la suite $\big((n+1)a_n z^n\big)$. Ainsi, la série $\sum(n+1)a_n z^n$ diverge. D'où $\rho \leqslant R$.
• Supposons $|z| < R$, et soit $\alpha > 0$ tel que $|z| + \alpha < R$. La série de terme général $|a_n|(|z|+\alpha)^n$ est convergente (3.2.3). Or, d'après la formule du binôme :

$$|(n+1)a_{n+1}z^n| \leqslant \frac{1}{\alpha}|a_{n+1}|(|z|+\alpha)^{n+1}.$$

Par suite, la série de terme général $(n+1)a_{n+1}z^n$ est absolument convergente. D'où $\rho \geqslant R$. □

3.4.3. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, et f une fonction sur U. On dit que f est *dérivable* en z_0 si la fonction

$$U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}\ ,\ z \to \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

a une limite quand z tend vers z_0. S'il en est ainsi, cette limite est noté $f'(z_0)$, et est appelée la *dérivée* de f en z_0.

Les résultats usuels concernant la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, se prolongent immédiatement du cas d'une variable réelle au cas d'une variable complexe. De même, si f est dérivable en z_0, elle est continue en z_0.

On dit que f est dérivable sur U, ou *holomorphe* sur U, si elle est dérivable en tout point de U. On peut définir dans ce cas la fonction dérivée f' de f. On notera $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Théorème 3.4.4. *En tout point* z_0 *du disque de convergence, la fonction somme* S *de la série entière* $\sum a_n z^n$ *est dérivable, et* $S'(z_0)$ *est égal à la somme de la série de terme général* $(n+1)a_{n+1}z_0^n$.

Démonstration. Soient R le rayon de convergence commun à la série et à sa série dérivée (3.4.2), et $r \in \mathbb{R}$ vérifiant $|z_0| < r < R$. Pour $z \in D(0,r)\backslash\{z_0\}$, on a :

$$\frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2}z + z_0^{n-1}).$$

Considérons la série d'applications $\sum f_n$, où :

$$f_n\colon D(0,r) \to \mathbb{C}\ ,\ z \to a_n(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2}z + z_0^{n-1}).$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Chaque f_n est continue sur $D(0, r)$. En outre :

$$\sup\{|f_n(z)| \, ; \, |z| \leqslant r\} \leqslant n|a_n|r^{n-1}.$$

Comme $r < R$, la série de terme général $n|a_n|r^{n-1}$ est convergente. Par suite, la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur $D(0, r)$. Sa somme F est donc continue sur $D(0, r)$. Or :

$$F(z) = \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} \text{ si } z \neq 0 \, , \; F(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^n.$$

La continuité de F en z_0 fournit donc le résultat. □

Corollaire 3.4.5. *Dans le disque de convergence, la fonction somme d'une série entière est indéfiniment dérivable et ses dérivées successives sont les fonctions sommes des séries entières dérivées successives.*

3.4.6. Avec les notations de 3.4.4, si $p \in \mathbb{N}$ et $z \in D(0, R)$ on a :

$$S^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z^n.$$

En particulier, si $R > 0$, on obtient :

$$S^{(p)}(0) = p! a_p.$$

3.5 FONCTIONS DÉVELOPPABLES EN SÉRIE ENTIÈRE

Définition 3.5.1. *Soit f une fonction définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que f est* développable en série entière au point z_0 *s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence non nul, et un voisinage V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in V$:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Définition 3.5.2. *Soit f une fonction définie et indéfiniment dérivable dans un voisinage de 0. On appelle* série de Mac-Laurin *ou* série de Taylor *à l'origine de f la série entière*

$$\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) z^n.$$

Théorème 3.5.3. *Soit f une fonction définie dans un voisinage de 0 et admettant un développement en série entière à l'origine.*

(i) *Il existe un voisinage de 0 sur lequel f est indéfiniment dérivable.*

(ii) *Le développement en série entière de f à l'origine est son développement de Mac-Laurin.*

Démonstration. Il existe $R > 0$ et une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence au moins égal à R, tels que $D(0, R)$ soit contenu dans le domaine de définition de f, et
$$f(z) = S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
pour tout $z \in D(0, R)$. Comme S est indéfiniment dérivable dans $D(0, R)$ (3.4.5), f l'est aussi. En outre, d'après 3.4.6, on a $f^{(p)}(0) = S^{(p)}(0) = p!a_p$. □

Corollaire 3.5.4.

(i) *S'il existe, le développement en série entière à l'origine d'une fonction est unique.*

(ii) *Si f est développable en série entière à l'origine, ses dérivées successives le sont aussi, et leurs développements sont les séries entières dérivées successives du développement de f.*

(iii) *Soient f, g développables en série entière à l'origine et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $f + g$, λf, fg sont développables en série entière à l'origine.*

3.5.5. Dans le cas de fonctions de variable réelle, ce qui a été dit précédemment s'applique aussi. Signalons le résultat suivant dont la preuve est immédiate.

Théorème. *Une fonction f définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ est développable en série entière à l'origine si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que :*

(i) *f est indéfiniment dérivable sur $]-r, r[$.*

(ii) *Pour tout $t \in]-r, r[$, la suite*
$$n \to \rho_n(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) t^k$$
admet 0 pour limite.

Si ces conditions sont vérifiées, f coïncide avec la somme de sa série de Mac-Laurin sur $]-r, r[$.

> ***Remarque.*** Si les hypothèses de 3.5.5 sont vérifiées, il résulte de la formule de Taylor avec reste intégral que l'on a, pour $|t| < r$:
> $$\rho_n(t) = \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\, du.$$

Proposition 3.5.6. *Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $f\colon]-r, r[\to \mathbb{R}$ une application indéfiniment dérivable. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $|f^{(p)}(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in]-r, r[$ et tout $p \in \mathbb{N}$. Alors, f est développable en série entière à l'origine.*

Démonstration. Si $t \in]-r, r[$, il résulte de la formule de Taylor-Lagrange qu'il existe u compris entre 0 et t vérifiant :
$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) t^k \right| = \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(u)| \leqslant \frac{M|t|^{n+1}}{(n+1)!}.$$
Il suffit donc d'appliquer 3.5.5 pour obtenir le résultat. □

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

3.6 QUELQUES EXEMPLES

3.6.1. Soit $z \in D(0,1)$. Si $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \cdots + z^n + \frac{z^{n+1}}{1-z}.$$

On en déduit immédiatement que, si $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Ecrivant

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1}{a(1-a^{-1}z)},$$

On obtient, si $|z| < |a|$:

$$\frac{1}{a-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}.$$

En utilisant 3.4.4, on voit que, si $p \in \mathbb{N}^*$ et $|z| < |a|$:

$$\frac{1}{(a-z)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-p+1)!}{n!(p-1)!} \frac{z^n}{a^{n+p}}.$$

Proposition 3.6.2. *Soit f une fraction rationnelle dont les pôles $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont non nuls. Alors, f est développable en série entière à l'origine. Le rayon de convergence de ce développement est $R = \min\{|\alpha_1|, \ldots |\alpha_k|\}$. Si S est la somme de ce développement, on a $f(z) = S(z)$ pour $|z| < R$.*

Démonstration. Le premier point résulte de 3.6.1 en utilisant la décomposition en éléments simples de f. Notons $r = \min\{|\alpha_j|, 1 \leqslant j \leqslant k\}$, et supposons que le rayon de convergence R du développement vérifie $R > r$. Soit a un pôle de f de module r. La somme S est alors bornée au voisinage de a, ce qui contredit le fait que $S(z) = f(z)$ pour $|z| < |a|$. □

3.6.3. En utilisant 3.3.4 et 3.6.1, pour $t \in]-1,1[$, on a :

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n.$$

3.6.4. Soient $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$ et $f(t) = (1+t)^\alpha$.

Considérons l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1+t)y' - \alpha y = 0$$

On vérifie facilement que f est solution de (E) sur $I =]-1,1[$.

Cherchons s'il existe une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme S vérifie $S(0) = 1$ et, pour $|t| < R$:

$$(1+t)S'(t) - \alpha S(t) = 0.$$

En écrivant

$$(1+t)S'(t) - \alpha S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - (\alpha - n)a_n]t^n$$

on trouve facilement, d'après 3.5.4 (i), que l'unique solution est

$$\sum \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} t^n.$$

La règle de d'Alembert montre que le rayon de convergence de cette série entière est 1. D'où, pour $t \in]-1, 1[$:

$$(1+t)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} t^n.$$

3.7 FONCTION EXPONENTIELLE

3.7.1. On a défini la *fonction exponentielle (complexe)* en 1.6.4 par

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

D'après ce que l'on a déjà dit, cette série a un rayon de convergence infini. Compte tenu de 3.4.4, on a donc :

Proposition. *La fonction exponentielle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{C}$ et admet pour dérivée e^z en tout point $z \in \mathbb{C}$.*

Proposition 3.7.2. *Soient $z, \zeta \in \mathbb{C}$. Alors :*

$$e^{z+\zeta} = e^z e^\zeta \ , \ e^z \neq 0 \ , \ (e^z)^{-1} = e^{-z} \ , \ |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \ , \ |e^z| = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}.$$

Démonstration. La série produit $\sum d_n$ des séries représentant e^z et e^ζ vérifie :

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k \zeta^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}(z+\zeta)^n.$$

On en déduit immédiatement les trois premiers points. D'autre part, les nombres complexes

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \ , \ \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!}$$

étant conjugués, on obtient $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ par passage à la limite. D'où :

$$|\exp(z)|^2 = \exp(z).\exp(\overline{z}) = \exp(z + \overline{z}) = \exp(2\,\mathrm{Re}(z)).$$

On déduit facilement de ceci les deux derniers points. □

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

3.7.3. Posons $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$. D'après 3.7.2, dire que $e^z \in \mathbb{U}$ signifie que $z \in i\mathbb{R}$. Par suite :

$$e^{iz} \in \mathbb{U} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a donc $e^{it} \in \mathbb{U}$.

Théorème 3.7.4. *La fonction exponentielle complexe induit un homomorphisme de groupes* $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$. *Cet homomorphisme est continu, surjectif, mais non injectif.*

Démonstration. Le fait que l'exponentielle réalise un homomorphisme des groupes en question résulte de 3.7.2, et la continuité de 3.7.1. Montrons la surjectivité.

Soit tout d'abord $\zeta \in \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}_-$. L'application $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \to 1 - t + t\zeta$ est de classe C^∞, et ne s'annule pas. Définissons

$$g\colon [0,1] \to \mathbb{C}\ ,\ t \to \int_0^t \frac{f'(u)}{f(u)}\, du\ ,\ h\colon [0,1] \to \mathbb{C}\ ,\ t \to f(t)e^{-g(t)}.$$

Les applications g et h sont de classe C^1 et vérifient :

$$g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}\ ,\ h'(t) = 0.$$

Comme $h(0) = 1$, il vient $f(t) = e^{g(t)}$ pour tout $t \in [0,1]$. En particulier, $e^{g(1)} = \zeta$.

Appliquant ceci à $\zeta = i$, on voit qu'il existe $\xi \in \mathbb{C}^*$ tel que $e^\xi = i$. Alors $e^{2\xi} = -1$. Si $\theta \in \mathbb{R}_-$, il vient alors :

$$e^\zeta = \theta \Leftrightarrow e^{\zeta + 2\xi} = -\theta.$$

Ce qui précède montre que, l'équation $e^z = \zeta$ possède au moins une solution pour tout $\zeta \in \mathbb{C}^*$.

Avec les notations précédentes, on a $e^{4\xi} = 1 = e^0$. L'exponentielle n'est donc pas injective. □

3.7.5. Rappelons qu'un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est ou dense, ou de la forme $\theta\mathbb{Z}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Considérons l'application $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $t \to e^{it}$ (3.7.3). C'est un homomorphisme de groupes et une application continue.

Soit $\zeta \in \mathbb{U}$. D'après 3.7.4, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^{iz} = \zeta$, et on a $z \in \mathbb{R}$ (3.7.3). Il en résulte que ϕ est surjectif.

Avec les notations de la preuve de 3.7.4, on a $4\xi \in i\mathbb{R}$, donc ϕ est non injectif. Notons G son noyau. On a $G \neq \{0\}$. D'autre part, G est un fermé de $\mathbb{R}$ (car ϕ est continu) et distinct de $\mathbb{R}$ (car ϕ est surjectif). Il existe donc $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $G = a\mathbb{Z}$. On a donc obtenu :

Théorème. *L'application* $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{U}, \times)$, $t \to e^{it}$ *est un homomorphisme de groupes, surjectif et non injectif. Son noyau est de la forme* $a\mathbb{Z}$, *avec* $a \in \mathbb{R}_+^*$. *Le réel* a *qui est le plus petit réel positif* t *tel que* $e^{it} = 1$, *est noté* 2π.

Proposition 3.7.6.

(i) *Le noyau de l'homomorphisme* $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ *est* $2i\pi\mathbb{Z}$.

(ii) *La fonction exponentielle complexe est périodique, et l'ensemble de ses périodes est* $2\pi i\mathbb{Z}$.

Démonstration. (i) Si $e^z = 1$, on a $z = it$, avec $t \in \mathbb{R}$ (3.7.2), et alors $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$ (3.7.5). La réciproque est analogue.

(ii) Si $z, \zeta \in \mathbb{C}$, on a $e^{z+\zeta} = e^z$ si et seulement si $e^\zeta = 1$. Le point (ii) est donc conséquence de (i). □

3.8 FONCTIONS CIRCULAIRES ET HYPERBOLIQUES

Définition 3.8.1. *On appelle* cosinus *et* sinus *les applications de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définies respectivement par :*

$$\cos t = \mathrm{Re}(e^{it})\ ,\ \sin t = \mathrm{Im}(e^{it}).$$

3.8.2. Pour tout nombre réel t, on a :

$$e^{it} = \cos t + i \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!},$$

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}\ ,\ \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Il est alors clair que $\sin$ est une application impaire, que $\cos$ est une application paire, et que ces deux applications admettent 2π pour période commune (3.7.6). D'autre part, elles sont indéfiniment dérivables (3.4.4), et on a $(\sin)' = \cos$, $(\cos)' = -\sin$. En outre, comme $\overline{\exp(it)} = \exp(-it)$, on trouve :

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})\ ,\ \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}).$$

De même, de $|e^{it}| = 1$, on déduit :

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Enfin, comme $(e^{i\pi})^2 = e^{2i\pi} = 1$, il résulte de 3.7.5 que $e^{i\pi} = -1$. D'où :

$$\cos(t + \pi) = -\cos t\ , \sin(t + \pi) - \sin t.$$

3.8.3. On va étudier les variations des applications sinus et cosinus. D'après 3.8.2, on peut se restreindre à l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

• On a $(e^{i\pi/2})^2 = e^{i\pi} = -1$, donc $e^{i\pi/2} \in \{-i, i\}$, et $\cos(\pi/2) = 0$.

Réciproquement, si $u \in \mathbb{R}_+$ verifie $\cos u = 0$, il vient $\sin^2 u = 1$, et on trouve alors $u \in \{-i, i\}$, donc $e^{4iu} = 1$. Ainsi, $4u$ est un multiple de 2π (3.7.5). On a prouvé que $\pi/2$ est le plus petit réel positif t tel que $\cos t = 0$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

• Ce qui précède montre que $\cos t > 0$ si $0 \leqslant t < \pi/2$ (théorème des valeurs intermédiaires). Ainsi, $\sin$ est strictement croissante sur I. Comme $\sin 0 = 0$, on en déduit que $\cos$ est strictement décroissante sur I.

• L'étude précédente montre que, si α et β sont deux zéros consécutifs de $\sin$ ou de $\cos$, on a $|\alpha - \beta| = \pi$. Toute période de ces applications est donc multiple de π. Or, d'après 3.8.2, π n'est pas une période. Ainsi, l'ensemble des périodes de $\sin$ ou de $\cos$ est $2\pi\mathbb{Z}$.

3.8.4. On peut maintenant définir les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ certainement déjà rencontrées par le lecteur :

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\ ,\ \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\ ,\ \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On remarquera que, si $z \in \mathbb{C}$:

$$\operatorname{ch}(iz) = \cos z\ ,\ \operatorname{sh}(iz) = i \sin z.$$

Utilisant ce qui précède, le lecteur prouvera les résultats usuels concernant ces applications. Il montrera ainsi que l'ensemble des périodes de $\cos$ et $\sin$ (respectivement ch et sh) est $2\pi\mathbb{Z}$ (respectivement $2i\pi\mathbb{Z}$).

EXERCICES

Exercice 3.1. Soit $(a_n)_n$ une suite réelle bornée. On pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ ,\ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

1. Prouver que le rayon de convergence ρ de f vérifie $\rho \geqslant 1$.

2. Montrer que g a un rayon de convergence infini et que, si $x > \rho^{-1}$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t)\, dt = \frac{1}{x} f\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Exercice 3.2. Soient

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \ \text{ et } \ g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$$

ayant des rayons de convergence au moins égaux à 1.

1. Prouver, pour $|x| < 1$, la convergence des séries

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f(x^n) \ \text{ et } \ G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(x^n).$$

2. Montrer que $F(x) = G(x)$ si $|x| < 1$.

Exercice 3.3. Soient $\sum a_n$ une série convergente, $s_n = \sum_{p=0}^{n} a_p$ et $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

1. Que peut-on dire du rayon de convergence ρ de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n?$$

Si $|x| < 1$, calculer :

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

2. Ecrire

$$\frac{f(x) - s}{1-x}$$

sous-forme d'une série. En déduire que $f(x)$ tend vers s quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

3. Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$ des séries convergentes et $\sum c_n$ leur série produit. Si la série $\sum c_n$ est convergente, prouver que :

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 3.1.

1. Si A est un majorant des $|a_n|$, on a $|a_n x^n| \leqslant A|x|^n$. Il est donc clair que $\rho > 1$.

2. De même, comme $|a_n x^n/n!| \leqslant A|x|^n/n!$, on déduit que g a un rayon de convergence infini et que g est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Soient $x > \rho^{-1}$ et $X > 0$. Ce qui précède montre que :

$$\int_0^X e^{-xt} g(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} e^{-xt} t^n\, dt.$$

Si l'on pose

$$S_n(u) = \sum_{p=0}^{n} \frac{u^p}{p!},$$

on voit facilement par récurrence que :

$$\int_0^X e^{-xt} t^n\, dt = \frac{n!}{x^{n+1}} [1 - e^{-xX} S_n(Xx)].$$

La suite $\big(S_n(Xx)\big)_n$ est bornée. Comme $x > \rho^{-1}$ implique la convergence de la série $\sum |a_n|\,|x|^{-n}$, on voit que la série de terme général $|a_n| x^{-n} e^{-xX} S_n(xX)$ converge.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

On a alors :

$$\Big|\int_0^X e^{-xt}g(t)\,dt - \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|}{x^{n+1}}e^{-xX}S_n(xX).$$

On a $|e^{-xX}S_n(xX) \leqslant 1$. D'autre part, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{N+1}^{\infty}|a_n|x^{-n-1} \leqslant \varepsilon$ (car $x > \rho^{-1}$). On a donc :

$$\Big|\int_0^X e^{-xt}g(t)\,dt - \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}\Big| \leqslant \varepsilon + e^{-xX}\sum_{n=0}^{N}\frac{|a_n|}{x^{n+1}}S_n(xX).$$

Pour X assez grand, le dernier terme de la ligne précédente est majoré par ε. On en déduit que l'intégrale proposée est convergente et que :

$$\int_0^{\infty} e^{-xt}g(t)\,dt = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n} = \frac{1}{x}f\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Exercice 3.2.

1. Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| \leqslant r < 1$. Les séries $\sum|a_n|r^n$ et $\sum|b_n|r^n$ sont convergentes. On a :

$$|f(x)| = \Big|x\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}\Big| \leqslant |x|\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|r^n = A|x|.$$

Toujours pour $|x| \leqslant r$, si $s \in \mathbb{N}$, on a $|x|^s \leqslant |x| \leqslant r$. D'où $|f(x^n)| \leqslant A|x^n|$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On voit ainsi que la série F converge normalement dans le disque fermé de centre 0 et de rayon r. C'est analogue pour G.

2. Fixons r, r' tels que $|x| \leqslant r < r' < 1$. Soit

$$S_n(x) = \sum_{p,q=1}^{n} a_pb_qx^{pq}.$$

On va prouver que :

$$\lim_n S_n(x) = F(x) = G(x).$$

Par symétrie, il suffit de prouver la première égalité.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow \sum_{p=n+1}^{\infty}|b_p|r^p < \varepsilon\ ,\ \sum_{p=n+1}^{\infty}|a_p|r'^p < \varepsilon.$$

On a :

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{s=1}^{\infty}b_sf(x^s) - S_n(x)\Big| &\leqslant \sum_{s=n+1}^{\infty}|b_s|\,|f(x^s)| + \Big|\sum_{s=1}^{n}b_s\Big(f(x^s) - \sum_{q=1}^{n}a_qx^{sq}\Big)\Big| \\ &\leqslant A\sum_{s=n+1}^{\infty}|b_s|r^s + \sum_{s=1}^{n}|b_s|.\Big|\sum_{q=n+1}^{\infty}|a_q|r^{sq}\Big| \\ &\leqslant A\varepsilon + \sum_{s=1}^{n}|b_s|\sum_{q=n+1}^{\infty}r'^q|a_q|\Big(\frac{r^s}{r'}\Big)^q\end{aligned}$$

Comme $r^s \leqslant r < r' < 1$, on a donc :

$$\Big|\sum_{s=1}^{\infty} b_s f(x^s) - S_n(x)\Big| \leqslant A\varepsilon + \sum_{s=1}^{\infty} |b_s| \varepsilon \frac{r^s}{r'}$$

car

$$\sum_{q=n+1}^{\infty} r'^q |a_q| \Big(\frac{r^s}{r'}\Big)^q \leqslant \frac{r^s}{r'} \sum_{q=n+1}^{\infty} |a_q| r'^q \leqslant \varepsilon \frac{r^s}{r'}.$$

Il vient alors :

$$\Big|\sum_{s=1}^{\infty} b_s f(x^s) - S_n(x)\Big| \leqslant A\varepsilon + \frac{\varepsilon}{r'} \sum_{s=1}^{\infty} |b_s| r'^s \leqslant A\varepsilon + B\varepsilon.$$

D'où le résultat.

Exercice 3.3.

1. La série $\sum a_n$ étant convergente, il résulte du lemme d'Abel que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence ρ au moins égal à 1.

La suite $(s_n x^n)_n$ est bornée si $x = 1$, car la suite $(s_n)_n$ converge. Il résulte à nouveau du lemme d'Abel que la série $\sum s_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.

Comme $s_n - s_{n-1} = a_n$ pour $n \geqslant 1$, il est alors clair que, si $|x| < 1$:

$$(1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = f(x).$$

2. Si $|x| < 1$, on a :

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Par conséquent, toujours pour $|x| < 1$:

$$\frac{f(x) - s}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) x^n.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|s_n - s| \leqslant \varepsilon$ si $n \geqslant n$. Pour $0 < x < 1$, on a donc :

$$|f(x) - s| \leqslant (1 - x) \sum_{n=0}^{N} |s_n - s| x^n + x^{N+1} \varepsilon;$$

Il est alors immédiat que $f(x)$ tend vers s qaund x tend vers 1 par valeurs inférieures.

3. D'après 1, les séries de termes généraux $a_n x^n$, $b_n x^n$ et $c_n x^n$ convergent si $|x| < 1$. D'autre part, d'après la définition du produit de deux séries entières, il vient

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

si $|x| < 1$. En faisant tendre x vers 1 par valeurs inférieures, on obtient alors

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

d'après la question 2.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre **4**

Fonctions analytiques

4.1 DÉFINITION DES FONCTIONS ANALYTIQUES

4.1.1. Concernant la définition suivante, le lecteur se reportera à 3.5.1.

Définition. *On dit qu'une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est* analytique *dans U si elle est développable en série entière en tout point de U.*

Exemple. La fonction $z \to \dfrac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$ car, si $a \in \mathbb{C}^*$ et $|z-a| < |a|$, on a :

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)^n}{a^{n+1}}(z-a)^n.$$

4.1.2. Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{A}(U)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur U. Compte tenu, par exemple de 3.2.8, il est clair que $\mathcal{A}(U)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre contenant la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions polynômes sur $\mathbb{C}$. D'après ce que l'on a vu au chapitre 3, une fonction analytique sur U est indéfiniment dérivable sur U et ses dérivées sont analytiques. En particulier, toute fonction analytique sur U est holomorphe sur U (3.4.3).

Théorème 4.1.3. *Si une série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, sa somme f est analytique sur le disque ouvert $D(0,R)$.*

Démonstration. Soient $z_0 \in D(0, R)$ et $r_0 = |z_0|$. On va prouver que :

$$|z - z_0| < R - r_0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n.$$

Fixons z et r tels que $|z - z_0| < r - r_0 < R - r_0$. Soit, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k.$$

D'après 3.4.6, on a :

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z_0^{n-k}.$$

D'où :

$$S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \Big(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z_0^{n-k} \Big) (z - z_0)^k.$$

Ecrivons $S_p = S'_p + S''_p$, avec

$$S'_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \Big(\sum_{n=k}^{p} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z_0^{n-k} \Big) (z - z_0)^k,$$

$$S''_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \Big(\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z_0^{n-k} \Big) (z - z_0)^k.$$

Il vient :

$$S'_p = \sum_{n=0}^{p} a_n \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z_n^{n-k} (z - z_0) k \Big) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n.$$

Comme $|z| < R$, on a donc :

$$\lim_p S'_p = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z).$$

De même :

$$\begin{aligned} |S''_p| &\leqslant \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_n| \Big(\sum_{k=0}^{p} \frac{n!}{k!(n-k)!} r_0^{n-k} (r - r_0)^k \Big) \\ &\leqslant \sum_{n=p+1}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} r_0^{n-k} (r - r_0)^k \Big) = \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_n| r^n. \end{aligned}$$

A nouveau, comme $r < R$, on a :

$$\lim_p S''_p = 0.$$

On a obtenu le résultat. $\square$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

4.2 PRINCIPE DU PROLONGEMENT ANALYTIQUE

Théorème 4.2.1. **(Principe du prolongement analytique).** *Soient U un ouvert* connexe *de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et $f \in \mathcal{A}(U)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est identiquement nulle dans U.*

(ii) *f est identiquement nulle dans un voisinage de a.*

(iii) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(a) = 0$.*

Démonstration. Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont claires.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) C'est immédiat car, par définition de $\mathcal{A}(U)$, au voisinage de a, on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit V l'ensemble des $z \in U$ tels que f soit identiquement nulle dans un voisinage de z. Par construction, V est un ouvert de U. Il est non vide par hypothèse. Soit $(z_n)_n$ une suite de points de V convergeant vers $b \in U$. Pour $n, k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)}(z_n) = 0$. Par continuité des $f^{(k)}$, il vient $f^k(b) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La fonction f étant développable en série entière en b, on en déduit que f est nulle au voisinage de b, soit $b \in V$. On a prouvé que V est non vide, ouvert et fermé dans U. Comme U est connexe, il vient $U = V$. D'où (i). $\square$

Corollaire 4.2.2. *Soient U un ouvert* connexe *de $\mathbb{C}$ et $f, g \in \mathcal{A}(U)$. Si f et g coïncident au voisinage d'un point de U, on a $f = g$.*

4.3 PRINCIPE DES ZÉROS ISOLÉS

Définition 4.3.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et A une partie de U. On dit que A est une partie* discrète *de U si, tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $D(a, r) \cap A = \{a\}$.*

Proposition 4.3.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et A une partie de U. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Tout $z \in U$ possède un voisinage V tel que $V \cap A$ soit fini.*

(ii) *Pour tout compact K de U, l'ensemble $K \cap A$ est fini.*

(iii) *A est une partie discrète et fermée de U.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que A est une partie localement finie *de U.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit K un compact de U. Si $z \in K$, soit V_z un voisinage ouvert de z dans U tel que $A \cap V_z$ soit fini. Il existe $z_1, \ldots, z_n \in K$ tel que K soit contenu dans $V_{z_1} \cup \cdots V_{z_n}$. Alors $K \cap A \subset [A \cap V_{z_1}] \cup \cdots \cup [A \cap V_{z_n}]$, donc est fini.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Soit $z \in K$. Comme U est localement compact, z possède un voisinage compact V_z, et $V_z \cap A$ est fini. L'espace $\mathbb{C}$ étant séparé, z possède un voisinage W_z dans U tel que $W_z \cap A = \{z\}$. Ainsi, A est une partie discrète de U.

Soit z un point de l'adhérence $\overline{A}$ de A dans U. Supposons $z \notin A$. Si V est un voisinage compact de z dans U, $V \cap A$ est fini. Comme précédemment, il existe un voisinage W de z tel que $W \cap A = \emptyset$. Contradiction.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soit $z \in U$. Si $z \in A$, il a un voisinage V tel que $V \cap A = \{z\}$, car A est une partie discrète de U. Si $z \notin A$, il existe un voisinage V de z tel que $V \cap A = \emptyset$, car A est fermé dans U. □

Théorème 4.3.3. (Principe des zéros isolés). *Soient U un ouvert* connexe *de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{A}(U)$ non identiquement nulle. L'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est une partie localement finie de U.*

Démonstration. Puisque f est continue, $Z(f)$ est un fermé de U. Il suffit donc de prouver que $Z(f)$ est une partie discrète de U (4.3.2). Soit $u \in Z(f)$. D'après 4.2.1, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(p)}(u) \neq 0$. Notons k le plus petit de ces entiers. Au voisinage de u, on a donc

$$f(z) = a_k(z-u)^k + (z-u)^k g(z) \text{ avec } a_k \neq 0 \text{ et } g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}(z-u)^k.$$

On a ainsi $g(u) = 0$. Comme g est développable en série entière en u, g est continue en u. Il existe donc un voisinage V de u dans U tel que $|g(z)| < |a_k|$ si $z \in V$. Si $z \in V\backslash\{u\}$, on a alors $|f(z)| \geqslant |z-u|^k(|a_k| - |g(z)|) > 0$. D'où le résultat. □

Corollaire 4.3.4. *Si U est un ouvert* connexe *de $\mathbb{C}$, l'anneau $\mathcal{A}(U)$ est intègre.*

Proposition 4.3.5. *Soient U un ouvert* connexe *de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(U)$ non identiquement nulle, et $u \in U$ un zéro de f. Il existe un unique entier $k \in \mathbb{N}$ vérifiant les conditions équivalentes suivantes :*

(i) *On a $f^{(k)}(u) \neq 0$ et $f^{(p)}(u) = 0$ si $p \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.*

(ii) *Le premier terme non nul du développement de f en série entière au voisinage de u est de la forme $a_k(z-u)^k$, avec $a_k \neq 0$.*

(iii) *Il existe un voisinage V de u dans U et $h \in \mathcal{A}(V)$ telle que, au voisinage de u, on ait :*

$$f(z) = (z-u)^k h(z) \text{ et } h(u) \neq 0.$$

*On dit que k est l'*ordre *ou la* multiplicité *du zéro u de f.*

Démonstration. C'est immédiat d'après la preuve de 4.3.3. □

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

EXERCICES

Exercice 4.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0. Existe-t-il $f \in \mathcal{A}(U)$ vérifiant

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) = f\Big(-\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand ?

Exercice 4.2. Soit $U = D(0,1)$. Existe-t-il $f \in \mathcal{A}(U)$ vérifiant

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{\ln n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$?

Exercice 4.3. Existe-t-il $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ vérifiant $f(p) = \cos\sqrt{p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$?

Exercice 4.4. Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(U)$, et $V = \{\overline{z}\,;\ z \in U\}$.

1. Si $z \in V$, on pose $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Prouver que $g \in \mathcal{A}(V)$.

Dans toute la suite, on suppose que U est connexe et symétrique par rapport à l'axe réel (on a donc $V = U$).

2. Prouver que $U \cap \mathbb{R}$ est non vide.

3. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ pour tout $z \in U$.

(ii) Il existe une composante connexe C de $U \cap \mathbb{R}$ telle que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in C$.

4. Prouver que la fonction f s'écrit de manière unique sous la forme $f = u + iv$, avec $u, v \in \mathcal{A}(U)$ et u, v à valeurs réelles sur $U \cap \mathbb{R}$.

Exercice 4.5. Prouver que, pour $|z| < 1$, la série

$$f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(z+p)^2}$$

est convergente. Si $U = D(0,1)$, montrer que $f \in \mathcal{A}(U)$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 4.1. Si une telle fonction f existe, elle est continue, donc vérifie $f(0) = 0$. Notant $g(z) = f(z) - z$, on a $g(0) = 0$ et $g\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ pour n grand. Pour tout $N \geqslant 1$, l'ensemble $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\ ;\ n \geqslant N\right\}$ n'est pas localement fini. Il résulte donc du principe des zéros isolés que g est identiquement nulle dans un voisinage de 0. Comme $g\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n} \neq 0$, c'est absurde. Ainsi, il n'existe aucune fonction $f \in \mathcal{A}(U)$ vérifiant les conditions précédentes.

Remarque. Si l'on prend $f(z) = |z|$, on voit qu'il existe des fonctions continues sur $\mathbb{C}$ vérifiant les conditions de l'exercice.

Exercice 4.2. Supposons qu'une telle fonction f existe. Elle est continue au point 0, donc vérifie $f(0) = 0$, et n'est pas identiquement nulle. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ et $g \in \mathcal{A}(U)$ vérifiant :

$$g(0) \neq 0\ ,\ f(z) = z^p g(z).$$

Si $n \geqslant 2$, il vient :

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^p}{\ln n}\cdot$$

Ainsi, $g\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers $+\infty$ si n tend vers $+\infty$. C'est absurde, car g est continue au point 0. On en déduit qu'il n'existe aucune fonction $f \in \mathcal{A}(U)$ vérifiant la condition proposée.

Exercice 4.3. Si $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\cdot$$

D'autre part, en utilisant la règle de d'Alembert, on voit que la série de terme général $(-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}$ a un rayon de convergence infini. Par suite, si l'on pose

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!},$$

on a $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ d'après 4.1.3 et $f(p) = \cos\sqrt{p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On remarque que f n'est pas l'unique fonction de $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ vérifiant la propriété car, si $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $z \to f(z) + \lambda \sin(\pi z)$ la vérifie aussi.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Exercice 4.4.

1. Soit $a \in V$. Il existe $r > 0$ et une suite $(\alpha_n)_n$ de nombres complexes tels que $D(\overline{a}, r) \subset U$ et, pour $|\overline{z} - \overline{a}| < r$:

$$f(\overline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\overline{z} - \overline{a})^n.$$

Par suite, $D(a, r) \subset V$ et, si $|z - a| < r$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\alpha_n} (z - a)^n.$$

D'où $g \in \mathcal{A}(V)$.

2. Posons :

$$U_+ = \{z \in U \,;\, \mathrm{Im}(z) > 0\} \ , \ U_- = \{z \in U \,;\, \mathrm{Im}(z) < 0\}.$$

Les ensembles U_+, U_- sont des ouverts disjoints de $\mathbb{C}$. Comme $U_- = \{\overline{z} \,;\, z \in U_+\}$ et que $U \not\subset \mathbb{R}$ (car $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{C}$), U_+ et U_- sont non vides. Si $U \cap \mathbb{R}$ était vide, on aurait $U = U_+ \cup U_-$, ce qui est absurde puisque U est connexe.

3. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est claire. Supposons (ii) vérifié, et prouvons (i). Posons $h(z) = f(z) - \overline{f(\overline{z})}$ si $z \in U$.

D'après 1, on a $h \in \mathcal{A}(U)$. Comme $U \cap \mathbb{R}$ est ouvert de $\mathbb{R}$, on sait que C est aussi un ouvert de $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après 2, C contient un intervalle $]a, b[$, avec $a < b$. On a $h(x) = 0$ si $a < x < b$. D'après le principe des zéros isolés, il vient $h = 0$. D'où (i).

4. Pour $z \in U$, posons :

$$u(z) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(\overline{z})}) \ , \ v(z) = \frac{1}{2i}(f(z) - \overline{f(\overline{z})}).$$

On a $f = u + iv$, et u, v sont à valeurs réelles sur $U \cap \mathbb{R}$.

Si $f = u_1 + iv_1$ dans les mêmes conditions, il vient $u_1 - u = i(v - v_1)$, donc $u_1 - u$ et $v_1 - v$ sont nulles sur $U \cap \mathbb{R}$. Le principe des zéros isolés montre alors que $u = u_1$, $v = v_1$.

Exercice 4.5. Si $|z| < 1$ et $p \geqslant 1$, on a :

$$\left|\frac{1}{(z+p)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(p-1)^2}.$$

La série proposée converge donc pour $|z| < 1$.

Pour $|z| < 1$, $q \geqslant 1$, et $n \geqslant 2$, posons :

$$f_q(z) = \sum_{p=1}^{q} \frac{1}{(z+p)^2} \ , \ S_n = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} \ , \ S_n(q) = \sum_{p=1}^{q} \frac{1}{p^n}.$$

Si $|z| < 1$, on a donc :

$$\frac{1}{(p+z)^2} = \frac{1}{p^2}\frac{1}{\left(1+\dfrac{z}{p}\right)^2} = \frac{1}{p^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{z^n}{p^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(1)^n(n+1)\frac{z^n}{p^{n+2}}\cdot$$

On obtient ainsi :

$$f_q(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)S_{n+2}(q)z^n.$$

On va prouver que, si $|z| < 1$, on a

$$\lim_q f_q(z) = g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)S_{n+2}z^n.$$

On aura ainsi, $f(z) = g(z)$ puis, d'après 4.1.3, $f \in \mathcal{A}(U)$.

Si $p \geqslant 2$, on a :

$$\int_p^{p+1}\frac{dx}{x^n} \leqslant \frac{1}{p^n} \leqslant \int_{p-1}^{p}\frac{dx}{x^n}\cdot$$

On en déduit :

$$\frac{1}{n-1} \leqslant S_n \leqslant 1 + \frac{1}{n-1}\cdot$$

Le rayon de convergence de la série définissant g est donc égal à 1. D'autre part :

$$0 \leqslant S_n \leqslant S_n(q) = \sum_{p=q+1}^{\infty}\frac{1}{p^n} \leqslant \int_q^{\infty}\frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}\frac{1}{q^{n-1}} \leqslant \frac{1}{q}$$

si $n \geqslant 2$. On obtient ainsi, si $|z| < 1$:

$$|f_q(z) - g(z)| \leqslant \frac{1}{q}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|z|^n = \frac{1}{q}\frac{1}{(1-|z|)^2}\cdot$$

D'où le résultat.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 5

Fonctions holomorphes

5.1 RAPPELS

5.1.1. Dans tout le paragraphe 5.1, U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbb{C}$. On désigne par (x_0, y_0) un point de U. Si (h, k) appartient à $\mathbb{R}^2$, on pose $\|(h,k)\| = (h^2 + k^2)^{1/2}$.

On dit que f admet en (x_0, y_0) une *dérivée partielle* suivant la variable x (respectivement y) si l'application $x \to f(x, y_0)$ (respectivement $y \to f(x_0, y)$) est dérivable au point x_0 (respectivement y_0). S'il en est ainsi, on note respectivement $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ces dérivées partielles.

La fonction f est dite de classe C^1 sur U si elle admet en tout point de U des dérivées partielles suivant x et y, et si ces dérivées partielles sont continues sur U.

5.1.2. On dit que f est *différentiable* en (x_0, y_0) s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + \|(h,k)\|\varepsilon(h,k),$$

où $\varepsilon(h, k)$ tend vers 0 si $\|(h,k)\|$ tend vers 0. S'il en ainsi, l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(h, k) \to ah + bk$ est une application linéaire qui est appelée la *différentielle* de f en (x_0, y_0) ; on la note $\mathrm{d}\, f(x_0, y_0)$.

Supposons que f soit différentiable en (x_0, y_0), et conservons les notations précédentes. Alors, f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0), et on a :

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\ ,\ b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Par suite :

$$\mathrm{d}\, f(x_0, y_0)(h, k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Supposons f différentiable en tout point de U. On définit alors l'*application différentielle* de f, notée $\mathrm{d}\, f$, qui à $(x, y) \in U$ associe l'application linéaire $\mathrm{d}\, f(x, y)$ sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On rappelle que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est de classe C^1 sur U.

(ii) f est différentiable en tout point de U, et l'application $(x, y) \to \mathrm{d}\, f(x, y)$ est continue sur U.

5.1.3. Soit $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ une application linéaire. Il est immédiat que u est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ et que $\mathrm{d}\, u(x_0, y_0) = u$ pour tout (x_0, y_0). Compte tenu de ceci, on note encore $\mathrm{d}\, u$ pour $\mathrm{d}\, u(x_0, y_0)$.

En particulier, les applications $(x, y) \to x$ et $(x, y) \to y$ sont différentiables en tout point de $\mathbb{R}^2$, de même que l'application $(x, y) \to z = x + iy$. On notera donc $\mathrm{d}\, x$, $\mathrm{d}\, y$ et $\mathrm{d}\, z$ leurs différentielles. On a $\mathrm{d}\, z = \mathrm{d}\, x + i\, \mathrm{d}\, y$.

5.2 CONDITIONS DE CAUCHY-RIEMANN

5.2.1. On va étudier les relations entre holomorphie et différentiabilité. On rappelle que, si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathcal{H}(U)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. La bijection $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(x, y) \to z = x + iy$ permet d'identifier U à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Il en résulte qu'une fonction $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$ s'identifie à une fonction des deux variables réelles x et y. Par abus d'écriture, on note encore $f(x, y)$ pour $f(z)$.

Proposition 5.2.2. *Soit f une fonction définie au voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est dérivable en z_0.*

(ii) *f est différentiable en (x_0, y_0), et on a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

(iii) *f est différentiable en (x_0, y_0) et $\mathrm{d}\, f(x_0, y_0) \in \mathbb{C}dz$.*

Si ces conditions sont vérifiées, on a :

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Démonstration. Dire que f est dérivable en z_0 signifie qu'il existe $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ et une fonction ε_1 définie au voisinage de 0 tels que

$$f(z_0 + \zeta) = f(z_0) + f'(z_0)\zeta + \zeta\varepsilon_1(\zeta) \tag{1}$$

où $\varepsilon_1(\zeta)$ tend vers 0 si ζ tend vers 0.

Dire que f est différentiable en (x_0, y_0) signifie qu'il existe des nombres complexes $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ et une fonction ε_2 définie au voisinage de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + \|(h,k)\|\varepsilon_2(h,k) \tag{2}$$

où $\varepsilon_2(h,k)$ tend vers 0 si $\|(h,k)\|$ tend vers 0.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons (i) vérifié. En prenant $\zeta = h + ik$, avec $h, k \in \mathbb{R}$, dans (1), il est clair que l'on obtient (2) avec $a = f'(z_0)$, $b = -if'(z_0)$. D'où (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si (ii) est vrai, pour $h, k \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{d}\, f(x_0, y_0)(h,k) = ah + bk = a(h + ik).$$

Ainsi, $\mathrm{d}\, f(x_0, y_0) = a\,\mathrm{d}\, z$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{d}\, f(x_0, y_0) = a\,\mathrm{d}\, z$. Pour $h, k \in \mathbb{R}$, on a donc, en posant $\zeta = h + ik$:

$$f(z_0 + \zeta) = f(z_0) + a\zeta + \|(h,k)\|\varepsilon(h,k),$$

et $\varepsilon(h,k)$ tend vers 0 si $\|(h,k)\|$ tend vers 0. On en déduit immédiatement que f est dérivable en z_0, et que $f'(z_0) = a$. $\square$

5.2.3. Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que f est différentiable sur l'ouvert U de $\mathbb{C}$. D'après ce qui précède, dire que $f \in \mathcal{H}(U)$ équivaut a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Notons P et Q les parties réelle et imaginaire de f : $f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$ pour tout $x + iy \in U$, où P et Q sont à valeurs réelles. Il est immédiat que (3) s'écrit encore :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{4}$$

Les conditions (3) et (4) sont appelées les *conditions de Cauchy-Riemann*.

5.2.4. Les fonctions $(x,y) \to z = x + iy$ et $(x,y) \to \overline{z} = x - iy$ admettent les différentielles :

$$\mathrm{d}\, z = \mathrm{d}\, x + i\,\mathrm{d}\, y\ ,\ \mathrm{d}\,\overline{z} = \mathrm{d}\, x - i\,\mathrm{d}\, y.$$

On en déduit :

$$\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\, z + \mathrm{d}\,\overline{z})\ ,\ \mathrm{d}\, y = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\, z - \mathrm{d}\,\overline{z}).$$

Si f est différentiable sur U, on pose alors :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

On obtient :

$$\mathrm{d}\, f = \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}\, z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}\,\overline{z}.$$

On en déduit que les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent encore :

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

5.2.5. Compte tenu de ce qui précède, pour $f \in \mathcal{H}(U)$, on a :

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}\cdot$$

En utilisant les notations P et Q de 5.2.3, ceci s'écrit encore :

$$f' = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\cdot$$

Proposition 5.2.6. *Soient U un ouvert* connexe *de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Si f' est identiquement nulle sur U, alors f est constante.*

Démonstration. Soient $z_0 \in U$ et D un disque ouvert de centre z_0 contenu dans U. Si $z_1 \in D$, le point $z_2 = \mathrm{Re}(z_1) + i\,\mathrm{Im}(z_2)$ appartient à D. Les segments de droites compacts d'extrémités z_0, z_2 et z_1, z_2 étant connexes et contenus dans D, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow f(z_0) = f(z_2)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow f(z_2) = f(z_1).$$

Ainsi, $f(z_0) = f(z_1)$. On en déduit que f est localement constante. Comme U est connexe, f est constante. □

Proposition 5.2.7. *Soient U un ouvert* connexe *de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est constante sur U.*

(ii) $\mathrm{Re}(f)$ *est constante sur U.*

(iii) $\mathrm{Im}(f)$ *est constante sur U.*

(iv) $|f|$ *est constante sur U.*

(v) $\overline{f} \in \mathcal{H}(U)$.

Démonstration. Les équivalences (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) sont claires d'après 5.2.5 et 5.2.6, et la condition (i) implique (iv) et (v).

Si (v) est vrai, on a $2\,\mathrm{Re}(f) = f + \overline{f} \in \mathcal{H}(U)$. Comme $\mathrm{Re}(f)$ est de partie imaginaire nulle, $\mathrm{Re}(f)$ est constante d'après ce qui précède.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Supposons (iv) réalisé. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f\overline{f} = |f|^2 = c$. Si $c = 0$, le résultat est clair. Sinon, on a $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$, et $\overline{f} = c/f \in \mathcal{H}(U)$. On est ramené au cas précédent. □

5.3 DÉTERMINATIONS CONTINUES DU LOGARITHME

5.3.1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle *argument* de z tout nombre réel t tel que (voir 3.7.2 et 3.7.5) :

$$e^{it} = \frac{z}{|z|}\cdot$$

Définition 5.3.2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$. On appelle* détermination continue de l'argument *sur U toute application continue $\theta\colon U \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $z \in U$, $\theta(z)$ soit un argument de z.*

Proposition 5.3.3. *Soient U un ouvert* connexe *de $\mathbb{C}^*$ et θ_1, θ_2 deux déterminations continues de l'argument sur U. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_1(z) - \theta_2(z) = 2k\pi$ pour tout $z \in U$.*

Démonstration. D'après 3.7.5, pour tout $z \in U$, il existe un entier k_z tel que l'on ait $\theta_1(z) - \theta_2(z) = 2k_z\pi$ et, θ_1, θ_2 étant continues sur U, il en est de même de $z \to k_z$. Comme k_z est à valeurs entières, cette fonction est localement constante sur U. L'ouvert U étant connexe, elle est constante. □

5.3.4. Dans la suite, on notera Ω_0 l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ de $\mathbb{C}^*$. On appelle *détermination principale de l'argument* sur Ω_0, et on note $\operatorname{Arg} z$, pour $z \in \Omega_0$, l'unique argument de z tel que $\operatorname{Arg} z \in]-\pi, \pi[$.

Lemme. *La détermination principale de l'argument est une détermination continue de l'argument sur Ω_0.*

Démonstration. On a une description explicite de $\operatorname{Arg} z$:

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arc\,sin} \operatorname{Im} \frac{z}{|z|} \text{ si } \operatorname{Re} z > 0\ ,\ \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arc\,cos} \operatorname{Re} \frac{z}{|z|} \text{ si } \operatorname{Im} z > 0,$$

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arc\,cos} \operatorname{Re} \frac{z}{|z|} \text{ si } \operatorname{Im} z < 0.$$

On en déduit facilement le résultat. □

5.3.5. Nous verrons qu'il n'existe pas de détermination continue de l'argument sur $\mathbb{C}^*$. Cependant, au voisinage d'un point $a \in \mathbb{C}^*$, il existe une détermination continue de l'argument. En effet, soient ω un argument de a et $U = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \operatorname{Re}(ze^{-i\omega}) > 0\}$. Alors $z \to \omega + \operatorname{Arg}(ze^{-i\omega})$ est une détermination continue de l'argument sur U.

Définition 5.3.6.

(i) *Si $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle* logarithme *de z tout nombre complexe ζ tel que $e^\zeta = z$.*

(ii) *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$. Une* détermination continue du logarithme *sur U est une application continue $\ell : U \to \mathbb{C}$ telle que $e^{\ell(z)} = z$ pour tout $z \in U$.*

5.3.7. Soit $\zeta = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, un logarithme de $z \in \mathbb{C}^*$. On a $e^a = |z|$ et $e^{ib} = z/|z|$. Il en résulte que $\zeta = \ln|z| + i\theta$, où θ est un argument de z. Par suite :

Proposition. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$. Les déterminations continues du logarithme sur U sont les fonctions sur U de la forme*

$$z \to \ln|z| + i\theta(z)$$

où θ est une détermination continue de l'argument sur U. Si U est connexe, *et si ℓ_1 et ℓ_2 sont des déterminations continues du logarithme sur U, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\ell_1(z) - \ell_2(z) = 2ik\pi$ pour tout $z \in U$.*

5.3.8. Soit Ω_0 comme en 5.3.4. On appelle *détermination principale du logarithme* sur Ω_0 la fonction $z \to \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$. On la note $\operatorname{Log} z$.

Soient ℓ une détermination continue du logarithme sur un ouvert U de $\mathbb{C}^*$, et $z, \zeta \in U$ tels que $z\zeta \in U$. On prendra garde au fait que, si $\ell(z\zeta) - \ell(z) - \ell(\zeta) \in 2i\pi\mathbb{Z}$, on a en général $\ell(z\zeta) \neq \ell(z) + \ell(\zeta)$. Par exemple, si $j = e^{2i\pi/3}$, il vient :

$$\operatorname{Log} j = \frac{2i\pi}{3}\,,\ \operatorname{Log} j^2 = -\frac{2i\pi}{3} \neq 2 \operatorname{Log} j = \frac{4i\pi}{3}\cdot$$

De même, si $e^z \in U$, on a $\ell(e^z) - z \in 2i\pi\mathbb{Z}$ mais, en général, $\ell(e^z) \neq z$.

Définition 5.3.9. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction sur U. On appelle* primitive *de f sur U toute fonction $F \in \mathcal{H}(U)$ telle que $F' = f$.*

Théorème 5.3.10. *Soit U un ouvert* connexe *de $\mathbb{C}^*$.*

(i) *Toute détermination continue du logarithme sur U est une primitive de $\dfrac{1}{z}$ sur U.*

(ii) *Si $\dfrac{1}{z}$ admet une primitive sur U, il existe des déterminations continues du logarithme sur U.*

Démonstration. (i) Soient ℓ une détermination continue du logarithme sur U et $a \in U$. De $e^{\ell(z)} = z$ si $z \in U$, on déduit :

$$\frac{\ell(z) - \ell(a)}{z - a} = \frac{\ell(z) - \ell(a)}{\exp[\ell(z)] - \exp[\ell(a)]}.$$

Si z tend vers a, $\ell(z)$ tend vers $\ell(a)$ puisque ℓ est continue. D'autre part, la fonction $\exp$ est dérivable en $\ell(a)$, et sa dérivée en ce point est $\exp[\ell(a)]$. On en déduit que ℓ est dérivable en a et que :

$$\ell'(a) = \frac{1}{\exp[\ell(a)]} = \frac{1}{a}\cdot$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

(ii) Soit F une primitive de $\dfrac{1}{z}$ sur U. Il vient :

$$\big(z\exp[-F(z)]\big)' = \exp[-F(z)] - zF'(z)\exp[-F(z)] = 0.$$

D'après 5.2.6, il existe $c \in \mathbb{C}^*$ tel que $\exp[F(z)] = cz$ pour tout $z \in U$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $e^{\alpha} = c$ (3.7.4). Alors $\exp[F(z) - \alpha] = z$, donc $z \to F(z) - \alpha$ est une détermination continue du logarithme sur U. □

Proposition 5.3.11. *Si* $|z| < 1$, *on a :*

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

Démonstration. Si $|z| < 1$, on a $1 + z \in \Omega_0$. Il en résulte que $\operatorname{Log}(1+z)$ est bien défini.

Pour $|z| < 1$, notons $S(z)$ la somme de la série précédente. D'après 3.4.4, il vient :

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z} = \big(\operatorname{Log}(1+z)\big)'.$$

Compte tenu de 5.2.6, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Log}(1+z) - S(z) = c$ pour tout $z \in D(0,1)$. En faisant $z = 0$, on obtient $c = 0$. □

5.4 AUTRES DÉTERMINATIONS CONTINUES

5.4.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On appelle *détermination continue* de z^{α} sur U toute application continue $g\colon U \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout $z \in U$, il existe un logarithme ζ de z tel que $g(z) = e^{\alpha\zeta}$ (on a donc $z = e^{\zeta}$).

Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, on retrouve la définition usuelle.

5.4.2. Supposons U connexe et l'existence d'une détermination continue ℓ du logarithme sur U. Alors $z \to e^{\alpha\ell(z)}$ est une détermination continue de z^{α} sur U. D'après 5.3.10, g est holomorphe sur U et, si $z \in U$:

$$g'(z) = \frac{\alpha}{z} g(z).$$

Notons θ la détermination continue de l'argument associée à ℓ (5.3.7). Il vient :

$$z^{\alpha} = \exp[\alpha\ell(z)] = \exp[\alpha \ln|z| + i\alpha\theta(z)].$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on a donc $z^{\alpha} = |z|^{\alpha} e^{i\alpha\theta(z)}$. On voit donc que, pour α réel, $\alpha\theta(z)$ est une détermination continue de l'argument de z^{α}.

5.4.3. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $|z| < 1$, on peut définir $\operatorname{Log}(1+z)$. Alors $\exp[\alpha \operatorname{Log}(1+z)]$ est une détermination continue g de $z \to (1+z)^{\alpha}$ sur $D(0,1)$.

Proposition. *Pour* $|z| < 1$, *on a :*

$$g(z) = (1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n.$$

Démonstration. Si l'on note S la somme de la série précédente, on obtient (voir 3.6.4), pour $|z| < 1$:

$$(1+z)S'(z) - \alpha S(z) = 0.$$

Par suite, si $|z| < 1$:

$$\left(\frac{S}{g}\right)'(z) = \frac{S'(z)g(z) - g'(z)S(z)}{[g(z)]^2} = 0.$$

Comme $S(0) = g(z) = 1$, on conclut d'après 5.2.6. □

5.4.4. Soit q un entier supérieur ou égal à 2. On appelle *détermination principale* de la racine $q^{\text{ème}}$ sur Ω_0 la fonction

$$z \to \mathrm{DP} \sqrt[q]{z} = \exp\left(\frac{1}{q} \operatorname{Log} z\right).$$

Elle est holomorphe sur Ω_0 et vérifie :

$$\left(\mathrm{DP} \sqrt[q]{z}\right)^q = z\ ,\ q\left(\mathrm{DP} \sqrt[q]{z}\right)(\mathrm{DP} \sqrt[q]{z})' = 1.$$

EXERCICES

Exercice 5.1. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = x^2 + ixy^3$. Existe-t-il un ouvert non vide U de $\mathbb{C}$ tel que $f|U \in \mathcal{H}(U)$?

Exercice 5.2. Soit $U = \{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Si $z = x + iy \in U$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arc} \tan \frac{y}{x}\cdot$$

Prouver que $f \in \mathcal{H}(U)$.

Exercice 5.3. On désigne par U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et par $f, g, f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de classe C^2 sur U. On suppose que $f, g, f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}(U)$ et que $f', g', f'_1, \ldots, f'_n \in \mathcal{H}(U)$. On note respectivement ∂ et $\overline{\partial}$ pour $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\cdot$

1. Montrer que $\overline{\partial}\partial(f\overline{g}) = f'\overline{g'}$.

2. On suppose que $|f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2$ est constante sur U. Que peut-on dire des f_k ?

Exercice 5.4. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Déterminer toutes les applications $f \in \mathcal{H}(U)$ qui vérifient $\operatorname{Im} f(z) = [\operatorname{Re} f(z)]^2$ pour tout $z \in U$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 5.1. Notons $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$. Il vient :

$$u'_x(z) = 2x\ ,\ u'_y(z) = 0\ ,\ v'_x(z) = y^3\ ,\ v'_y(z) = 3xy^2.$$

Si $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert non vide tel que $f|U \in \mathcal{H}(U)$, on obtient en particulier $u'_y(z) = -v'_x(z)$ pour tout $z \in U$, donc $\mathrm{Im}(z) = 0$ pour tout $z \in U$. C'est absurde, puisque $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}(z) = 0\}$ est d'intérieur vide.

Exercice 5.2. Il est immédiat que f est de classe C^1 sur l'ouvert U. D'autre part, pour $z = x + iy \in U$, on trouve facilement :

$$u'_x(z) = \frac{x}{x^2+y^2}\ ,\ u'_y(z) = \frac{y}{x^2+y^2}\ ,\ v'_x(z) = \frac{-y}{x^2+y^2}\ ,\ v'_y(z) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Ainsi, f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann sur U. D'où $f \in \mathcal{H}(U)$.

Exercice 5.3.

1. Comme $f, g \in \mathcal{H}(U)$, il vient :

$$\partial(f\overline{g}) = (\partial f)\overline{g} + f(\partial\overline{g}) = f'\overline{g} + f(\overline{\overline{\partial}g}) = f'\overline{g}.$$

Utilisant le fait que $f' \in \mathcal{H}(U)$, on a alors :

$$\overline{\partial}\partial(f\overline{g}) = \overline{\partial}(f'\overline{g}) = (\overline{\partial}f')\overline{g} + f'(\overline{\partial}\overline{g}) = f'(\overline{\partial g}) = f'\overline{g'}.$$

2. Notons $h = |f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2$. D'après ce qui précède, on a :

$$0 = \overline{\partial}\partial h = \sum_{k=1}^{n} f'_k\overline{f'_k}.$$

Comme $f'_k(z)\overline{f'_k(z)} \in \mathbb{R}_+$ pour tout $z \in U$ et tout indice k, il vient $f'_k = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. L'ouvert U étant connexe, il résulte de 5.2.6 que f_k est constante pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

Exercice 5.4. Supposons qu'une telle application f existe, et notons $P = \mathrm{Re}\, f$, $Q = \mathrm{Im}\, f$. Si $z \in U$, il vient :

$$\begin{cases} P'_x(z) = 2Q(z)Q'_x(z) = -2Q(z)P'_y(z) \\ P'_y(z) = 2Q(z)Q'_y(z) = 2Q(z)P'_x(z) \end{cases}$$

Il en résulte que :

$$\big(1 + 4Q^2(z)\big)P'_x(z) = \big(1 + 4Q^2(z)\big)P'_y(z) = 0.$$

L'ouvert U étant connexe, on en déduit que P est constante sur U. D'après 5.2.7, il en est de même de Q. Il est alors immédiat que les fonctions cherchées sont celles de la forme

$$z \to \lambda^2 + i\lambda,$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Chapitre 6

Analyticité et holomorphie

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Il résulte de 3.3.4 et de 4.1.3 que $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{H}(U)$. L'un des objectifs de ce chapitre est de prouver que $\mathcal{A}(U) = \mathcal{H}(U)$.

6.1 ARCS ET CHEMINS

6.1.1. On appelle *arc* toute application *continue* γ d'un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. S'il en est ainsi, on le notera souvent $([a, b], \gamma)$. On dit que $\gamma(a)$ est l'*origine* et que $\gamma(b)$ est l'*extrémité*. On dit que γ est *fermé* si $\gamma(a) = \gamma(b)$. L'arc est dit *simple* si γ est une application injective. Il est dit *réduit à un point* si l'application γ est constante.

Si $([a, b], \gamma)$ est un arc, on note $\operatorname{im} \gamma$ pour $\gamma([a, b])$. Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, on dit que γ est un *arc dans U* si $\operatorname{im} \gamma \subset U$.

L'arc *opposé* à $([a, b], \gamma)$ est l'arc $([a, b], \delta)$ défini, pour $t \in [a, b]$, par :

$$\delta(t) = \gamma(a + b - t).$$

Intuitivement, c'est l'arc γ « parcouru dans l'autre sens ».

6.1.2. Soient $([a, b], \gamma)$ et $([c, d], \delta)$ deux arcs tels que $\gamma(b) = \delta(c)$. On appelle arc *composé* de γ et δ l'arc, noté $([a, b + d - c], \gamma \vee \delta)$, tel que si $t \in [a, b + d - c]$:

$$(\gamma \vee \delta)(t) = \gamma(t) \text{ si } a \leqslant t \leqslant b\ ,\ (\gamma \vee \delta)(t) = \delta(t + c - b) \text{ si } b \leqslant t \leqslant b + d - c.$$

Intuitivement, c'est l'arc obtenu en parcourant γ « puis » δ.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

6.1.3. Soient $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et γ une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$. Rappelons que γ est dite *de classe C^1 par morceaux* si elle est continue, et s'il existe une subdivision

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

de $[a,b]$ telle que $\gamma|[a_i, a_{i+1}]$ soit continûment dérivable pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

On appelle *chemin* dans un ouvert U tout arc $([a,b],\gamma)$ dans U tel que γ soit de classe C^1 par morceaux.

6.1.4. Deux chemins $([a,b],\gamma)$ et $([c,d],\delta)$ sont dits *équivalents* s'il existe une application $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) φ est bijective, croissante et de classe C^1 par morceaux.

(ii) La bijection réciproque de φ est de classe C^1 par morceaux.

(iii) On a $\gamma = \delta \circ \varphi$.

Si γ et δ sont équivalents, on a $\operatorname{im}\gamma = \operatorname{im}\delta$.

> ***Exemple.*** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Les chemins $[a,b] \to \mathbb{C}$, $x \to x$ et $[0,1] \to \mathbb{C}$, $t \to (1-t)a + tb$ sont équivalents.

6.1.5. Donnons quelques exemples importants de chemins.

1) Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Le chemin fermé

$$[0,2\pi] \to \mathbb{C}\ ,\ t \to z_0 + re^{it}$$

est appelé le cercle de centre z_0 et de rayon r, *parcouru dans le sens direct*.

2) Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Le chemin

$$[0,1] \to \mathbb{C}\ ,\ t \to (1-t)u + tv$$

est le segment *orienté* d'*origine* u et d'*extrémité* v ; on le note $[u,v]$. Le chemin opposé à ce chemin est le segment orienté $[v,u]$.

3) Soit (u,v,w) un élément de $\mathbb{C}^3$, avec u,v,w deux à deux distincts. Notons $\Delta = \Delta(u,v,w)$ le triangle de sommets u,v,w, c'est à dire :

$$\Delta = \{t_1 u + t_2 v + t_3 w\ ;\ t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}_+, t_1 + t_2 + t_3 = 1\}.$$

Le *bord orienté* $\partial\Delta$ de Δ est, par définition, le chemin fermé obtenu en composant les segments orientés $[u,v]$, $[v,w]$, $[w,u]$. C'est donc le chemin $([0,3],\gamma)$ défini par :

$$\gamma(t) = (1-t)u + tv \ \text{ si } \ 0 \leqslant t \leqslant 1\ ,\ \gamma(t) = (2-t)v + (1-t)w \ \text{ si } \ 1 \leqslant t \leqslant 2,$$
$$\gamma(t) = (3-t)w + (t-2)u \ \text{ si } \ 2 \leqslant t \leqslant 3.$$

6.1.6. Rappelons qu'une partie A de $\mathbb{C}$ est dite *connexe par arcs* si, pour tous points u, v de A, il existe un arc γ d'origine u, d'extrémité v, et vérifiant $\operatorname{im}\gamma \subset A$.

Lemme. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *U est connexe.*
(ii) *U est connexe par arcs.*
En outre, si elles sont vérifiées, pour tous $u, v \in U$, il existe un chemin dans U, d'origine u, d'extrémité v, et qui est composé d'un nombre fini de segments orientés.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Fixons $u \in U$. Notons S l'ensemble des $v \in U$ pour lesquels il existe un chemin d'origine u, d'extrémité v, et composé d'un nombre fini de segments orientés. On a $u \in S$.

Soient $v \in S$ et γ un chemin du type précédent, d'origine u et d'extrémité v. Il existe $r > 0$ tel que $D(v, r) \subset U$. Si $w \in D(a, r)$, le chemin δ défini par le segment orienté $[v, w]$ est contenu dans U. Alors $\gamma \vee \delta$ est composé de segments orientés, a pour origine u, et pour extrémité w. Ainsi, S est ouvert dans U.

Soient V l'adhérence de S dans U et $w \in V$. Il existe $r > 0$ tel que $D(w, r) \subset U$. Soient $v \in S \cap D(a, r)$ et γ un chemin du type précédent, d'origine u et d'extrémité v. Comme précédemment, $\gamma \vee [v, w]$ est contenu dans U, a pour origine u et pour extrémité w. D'où $w \in S$, ce qui prouve que S est fermé dans U.

L'ouvert U étant connexe, ce qui précède montre que l'on a obtenu (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons que U soit réunion de deux ouverts disjoints non vides V et W. Soient $v \in V$, $w \in W$, et $([a, b], \gamma)$ un arc dans U, d'origine u et d'extrémité w. Alors $\gamma^{-1}(V \cap \operatorname{im} \gamma)$ et $\gamma^{-1}(W \cap \operatorname{im} \gamma)$ sont des ouverts non vides et disjoints de $[a, b]$ dont la réunion est $[a, b]$. C'est absurde puisque $[a, b]$ est connexe. □

6.2 INTÉGRATION COMPLEXE

6.2.1. Soient $([a, b], \gamma)$ un chemin et f une fonction continue sur $\operatorname{im} \gamma$. L'*intégrale de f sur γ*, notée $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$, est définie par :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt.$$

Proposition 6.2.2. *Si $([a, b], \gamma)$ et $([c, d], \delta)$ sont deux chemins équivalents et si f est une fonction continue sur $\operatorname{im} \gamma$, on a :*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\delta f(z)\,dz.$$

Démonstration. Soit φ vérifiant les conditions de 6.1.4. La formule de changement de variable dans les intégrales fournit :

$$\int_\delta f(z)\,dz = \int_c^d f[\delta(t)]\delta'(t)\,dt = \int_a^b f \circ \delta \circ \varphi(s) \delta' \circ \varphi(s) \varphi'(s)\,ds$$
$$= \int_a^b f[\gamma(t)]\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

D'où le résultat. □

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

6.2.3. Soient $([a,b],\gamma)$ et $([c,d],\delta)$ des chemins, f une fonction continue sur $\operatorname{im}\gamma \cup \operatorname{im}\delta$.

• Supposons que δ soit le chemin opposé à γ. Alors :

$$\begin{aligned}\int_\delta f(z)\,dz &= \int_a^b (f\circ\delta)(t)\delta'(t)\,dt = -\int_a^b (f\circ\gamma)(a+b-t)\gamma'(a+b-t)\,dt\\ &= \int_b^a (f\circ\gamma)(t)\gamma'(t)\,dt = -\int_\gamma f(z)\,dz.\end{aligned}$$

• Supposons $\gamma(b)=\delta(c)$. On peut considérer $\gamma\vee\delta$. Il vient facilement :

$$\int_{\gamma\vee\delta} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\delta f(z)\,dz.$$

• Avec les notations de l'exemple 1 de 6.1.5, on a :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = ir\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{it}\,dt.$$

• Avec les notations de l'exemple 2 de 6.1.5, il vient :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = (b-a)\int_0^1 f([(1-t)a+tb]\,dt.$$

• Avec les notations de l'exemple 3 de 6.1.5, on a :

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{[a,b]} f(z)\,dz + \int_{[b,c]} f(z)\,dz + \int_{[c,a]} f(z)\,dz.$$

Pour calculer ces dernières intégrales, on utilise le cas précédent.

6.2.4. Conservons les notations de 6.2.3. On pose :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)|\,;\, z\in\operatorname{im}\gamma\}\ ,\ \operatorname{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

On dit que $\operatorname{long}(\gamma)$ est la *longueur* de γ. Il est immédiat que :

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \leqslant \|f\|_\infty \operatorname{long}(\gamma).$$

6.3 INDICE

6.3.1. Soit $([a, b], \gamma)$ un chemin. Alors $\operatorname{im} \gamma$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$, donc $U = \mathbb{C} \setminus \operatorname{im} \gamma$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Soit $r > 0$ tel que $\operatorname{im} \gamma \subset D'(0, r)$. L'ensemble $\mathbb{C} \setminus D'(a, r)$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ contenu dans U. Par suite, U a une unique composante connexe non bornée.

Théorème 6.3.2. *Soient $([a, b], \gamma)$ un chemin fermé et $U = \mathbb{C} \setminus \operatorname{im} \gamma$. Pour $z \in U$, on pose :*

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt.$$

*L'application $U \to \mathbb{C}$, $z \to \operatorname{ind}_\gamma(z)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de U, et nulle sur la composante connexe non bornée de U. On dit que $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ est l'*indice de z par rapport à γ.

Démonstration. Notons $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ les points d'une subdivision de $[a, b]$ telle que γ soit de classe C^1 sur $[a_i, a_{i+1}]$, $0 \leqslant i \leqslant n - 1$. Pour $t \in [a, b]$, posons :

$$\varphi(t) = \exp\Big(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \Big).$$

Sur chaque segment $[a_i, a_{i+1}]$, on a, en dérivant φ :

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \Rightarrow \varphi'(t)[\gamma(t) - z] - \varphi(t)\gamma'(t) = 0.$$

On en déduit que l'application $t \to \dfrac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z}$ a une dérivée nulle sur $[a_i, a_{i+1}]$, donc est constante sur cet intervalle, puis constante sur $[a, b]$. Comme $\gamma(a) = \gamma(b)$, on a alors :

$$\frac{\varphi(a)}{\gamma(a) - z} = \frac{\gamma(b)}{\gamma(b) - z} \Rightarrow 1 = \varphi(a) = \varphi(b).$$

On sait que $e^\zeta = 1$ si et seulement si $\zeta \in 2i\pi\mathbb{Z}$ (3.7.6). On a donc montré que $\operatorname{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

Soient $z, u \in U$. Comme $\operatorname{im} \gamma$ est compact, il existe $d > 0$ tel que $|\zeta - z| \geqslant d$ et $|\zeta - u| \geqslant d$ pour tout $\zeta \in \operatorname{im} \gamma$. On a immédiatement :

$$|\operatorname{ind}_\gamma(z) - \operatorname{ind}_\gamma(u)| \leqslant \frac{1}{2\pi d^2} |z - u| \operatorname{long}(\gamma).$$

Ceci nous montre que l'application $z \to \operatorname{ind}_\gamma(z)$ est continue sur U. Comme elle est à valeurs entières, elle est localement constante, donc constante sur chaque composante connexe de U.

Enfin, prenons z tel que $|z| > \sup\{|\gamma(t)|\,;\, t \in [a, b]\}$. il vient :

$$|\operatorname{ind}_\gamma(z)| \leqslant \frac{\operatorname{long}(\gamma)}{2\pi \inf\{|z - \gamma(t)|\,;\, t \in [a, b]\}}.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Comme $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ est entier, on obtient $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$ si $|z|$ est assez grand. D'où le dernier point. □

> ***Remarque.*** Intuitivement, $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ est le « nombre de tours » (avec un signe) décrit par $\gamma(t)$ autour de z quand t décrit $[a, b]$.

Proposition 6.3.3. *Soit γ un cercle $C(a, r)$ orienté dans le sens direct. On a $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$ si $|z - a| > r$ et $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 1$ si $|z - a| < r$.*

Démonstration. Si $|z - a| > r$, z appartient à la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{im} \gamma$, donc $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$ (6.3.2). Si $|z - a| < r$, alors $\operatorname{ind}_\gamma(z) = \operatorname{ind}_\gamma(a)$, toujours d'après 6.3.2. Or :

$$\operatorname{ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\, dt = 1.$$

D'où le résultat. □

6.4 EXISTENCE DES PRIMITIVES

Théorème 6.4.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur U. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f possède une primitive dans U.*

(ii) *Pour tout chemin fermé γ dans U, on a $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.*

Démonstration. (i) ⇒ (ii) Soient $([a, b], \gamma)$ un chemin fermé dans U et F une primitive de f dans U. On a :

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma F'(z)\, dz = \int_a^b F'[\gamma(t)]\gamma'(t)\, dt = \int_a^b [F \circ \gamma]'(t)\, dt \\ = F[\gamma(b)] - F[\gamma(a)] = 0,\end{aligned}$$

car $\gamma(a) = \gamma(b)$.

(ii) ⇒ (i) Supposons (ii) vérifié. Les composantes connexes de U étant ouvertes et deux à deux disjointes, il suffit de construire une primitive de f sur chacune de ces composantes pour obtenir le résultat. On peut donc supposer que U est connexe.

Fixons $z_0 \in U$. Comme U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, il est connexe par arcs. Ainsi, si $z \in U$, il existe un chemin d'origine z_0 et d'extrémité z. Soient $([a, b], \gamma_1)$ et $([c, d], \gamma_2)$ deux tels chemins. Le chemin γ, obtenu en composant γ_1 et le chemin opposé à γ_2 (c'est possible, car $\gamma_1(b) = \gamma_2(d) = z$) est un chemin fermé dans U. Compte tenu de l'hypothèse et de 6.2.3, il vient :

$$0 = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{\gamma_2} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Il résulte de ceci que l'on définit une fonction F sur U en posant

$$F(z) = \int_{\gamma(z_0,z)} f(\zeta)\, d\zeta,$$

où $\gamma(z_0, z)$ est un chemin quelconque dans U d'origine z_0 et d'extrémité z.
Soient $r > 0$ tel que $D(z,r) \subset U$ et $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| < r$. Désignons par $\gamma(z_0, z+w)$ un chemin d'origine z_0 et d'extrémité $z+w$. Enfin, notons γ le chemin composé de $\gamma(z_0, z)$, du segment orienté $[z, z+w]$, et du chemin opposé à $\gamma(z_0, z+w)$. On a :

$$0 = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma(z_0,z)} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z,z+w]} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{\gamma(z_0,z+w)} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Ceci s'écrit encore :

$$F(z+w) - F(z) = \int_{[z,z+w]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Comme $\displaystyle\int_{[z,z+w]} d\zeta = w$, on a donc, pour $w \neq 0$:

$$\frac{F(z+w) - F(z)}{w} - f(z) = \frac{1}{w} \int_{[z,z+w]} [f(\zeta) - f(z)]\, d\zeta.$$

La longueur du segment orienté $[z, z+w]$ étant $|w|$, il vient :

$$\left| \frac{F(z+w) - F(z)}{w} - f(z) \right| \leqslant \sup\{|f(\zeta) - f(z)|\,;\, \zeta \in [z, z+w]\}.$$

La fonction f étant continue en z, on en déduit que F est dérivable en ce point et que $F'(z) = f(z)$. On a prouvé que F est une primitive de f sur U. □

Corollaire 6.4.2. *Soient $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ et γ un chemin fermé. On a $\displaystyle\int_\gamma z^n\, dz = 0$ dans les deux cas suivants :*

(i) $n \geqslant 0$ *et* γ *quelconque.*

(ii) $n < -1$ *et* $0 \notin \operatorname{im} \gamma$.

Démonstration. Résulte de 6.4.1 et du fait que, pour $n \neq -1$, $z \to \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $z \to z^n$, dans $\mathbb{C}$ si $n \geqslant 0$, et dans $\mathbb{C}^*$ si $n < -1$. □

6.4.3. Rappelons quelques points de topologie. Soit A une partie de $\mathbb{C}$.

• On dit que A est *convexe* si $tu + (1-t)v \in A$ pour tous $u, v \in A$ et tout $t \in [0,1]$. Ceci signifie que, pour tous $u, v \in A$, le segment compact d'extrémités u et v est contenu dans A.

• Si $u \in A$, on dit que A est *étoilée* en u si le segment $[u, v]$ est contenu dans A pour tout $v \in A$. Dire que A est convexe signifie qu'elle est étoilée en tous ses points.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

• Si A est bornée, on pose

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{|u - v| \,;\, u, v \in A\},$$

et on dit que $\mathrm{diam}(A)$ est le *diamètre* de A.

• Soient $(K_n)_n$ une suite décroissante de compacts non vides de $\mathbb{C}$ et K leur intersection. Alors K est non vide. Si $\mathrm{diam}(K_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, K est réduite à un point.

Théorème 6.4.4. *Soient U un ouvert* convexe *de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur U telle que*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

pour tout triangle $\Delta \subset U$. Alors f possède une primitive dans U.

Démonstration. Soit $z_0 \in U$. Pour tout $z \in U$, le segment $[z_0, z]$ est contenu dans U. On peut donc définir une fonction F sur U par :

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Si $z, z + w$ sont des points de U et si $\Delta = \Delta(z_0, z, z + w)$ (notation de 6.1.5), l'intégrale de f sur $\partial\Delta$ est nulle. Ceci s'écrit :

$$F(z + w) - F(z) = \int_{[z,z+w]} f(\zeta)\,d\zeta.$$

On a alors

$$\frac{F(z + w) - F(z)}{w} - f(z) = \frac{1}{w}\int_{[z,z+w]} [f(\zeta) - f(z)]\,d\zeta,$$

et on montre comme en 6.4.1 que $F'(z) = f(z)$. □

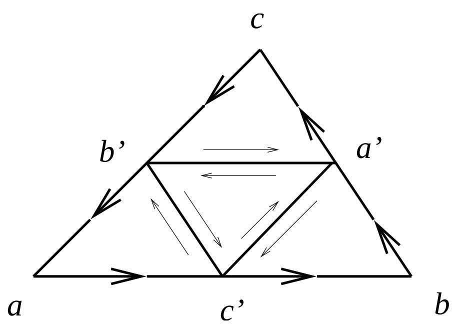
Théorème 6.4.5. (Théorème de Goursat). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $w \in U$, et f une fonction continue sur U et holomorphe dans $U\backslash\{w\}$. Pour tout triangle $\Delta \subset U$, on a :*

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Démonstration. Dans la preuve, si Δ est un triangle, on note $I(\Delta)$ l'intégrale de f sur $\partial\Delta$.

1) Supposons tout d'abord $w \notin \Delta$. Notons $\Delta = \Delta(a, b, c)$, et soient a', b', c' les milieux respectifs des segments $[b, c]$, $[c, a]$, $[a, b]$. Posons :

$$\Delta(1) = \Delta(a, c', b')\ ,\ \Delta(2) = \Delta(b, a', c'),$$
$$\Delta(3) = \Delta(c, b', a')\ ,\ \Delta(4) = \Delta(a', b', c').$$



On a immédiatement :

$$I(\Delta) = I\big(\Delta(1)\big) + I\big(\Delta(2)\big) + I\big(\Delta(3)\big) + I\big(\Delta(4)\big).$$

Il en résulte que l'un au moins des $I\big(\Delta(j)\big)$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, vérifie $|I\big(\Delta(j)\big)| \geqslant \dfrac{1}{4}|I(\Delta)|$ (sinon, on parvient à $|I(\Delta)| < |I(\Delta)|$). Notons Δ_1 un triangle vérifiant cette propriété. Echangeant les rôles de Δ et de Δ_1, on construit de même un triangle Δ_2, contenu dans Δ_1, et vérifiant $|I(\Delta_2)| \geqslant \dfrac{1}{4}|I(\Delta_1)|$. Posant $\Delta_0 = \Delta$, on obtient par récurrence une suite $(\Delta_n)_n$ de triangles vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Delta_{n+1} \subset \Delta_n \ , \ |I(\Delta_{n+1})| \geqslant \frac{1}{4}|I(\Delta_n)|,$$
$$\operatorname{diam}(\Delta_{n+1}) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(\Delta_n) \ , \ \operatorname{long}(\partial\Delta_{n+1}) = \frac{1}{2}\operatorname{long}(\partial\Delta_n).$$

Soit z_0 l'unique point d'intersection des Δ_n (6.4.3). Comme $z_0 \subset \Delta \subset U$ et $w \notin \Delta$, f est dérivable en z_0. Par suite, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $r > 0$ tel que :

$$D(z_0, r) \subset U \ \text{ et } \ z \in D(z_0, r) \Rightarrow |f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| < \varepsilon|z - z_0|.$$

Comme $\operatorname{diam}(\Delta_n) = 2^{-n}\operatorname{diam}(\Delta)$, il existe un entier N tel que $\Delta_n \subset D(z_0, r)$ dès que $n \geqslant N$. Pour $n \geqslant N$, il résulte de 6.4.2 que :

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_n} [f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)]\,dz.$$

Ce qui précède montre alors que, pour $n \geqslant N$, on a :

$$\Big|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\Big| \leqslant \varepsilon\operatorname{diam}(\Delta_n)\operatorname{long}(\partial\Delta_n) = \frac{\varepsilon}{4^n}\operatorname{diam}(\Delta)\operatorname{long}(\Delta).$$

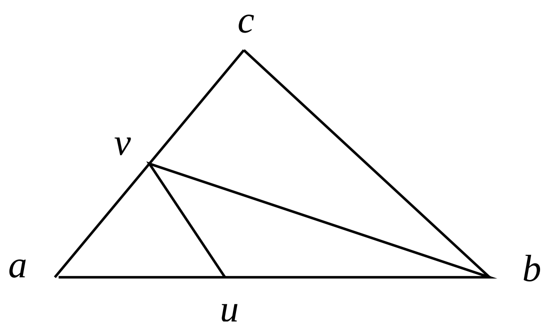
Par suite :

$$|I(\Delta)| \leqslant \varepsilon\operatorname{diam}(\Delta)\operatorname{long}(\Delta).$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il vient $I(\Delta) = 0$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

2) Supposons que w soit un sommet de Δ, par exemple, $w = a$.



Soient $u \in]a, b]$ et $v \in]a, c]$. Alors $I(\Delta)$ est somme des intégrales de f sur les triangles

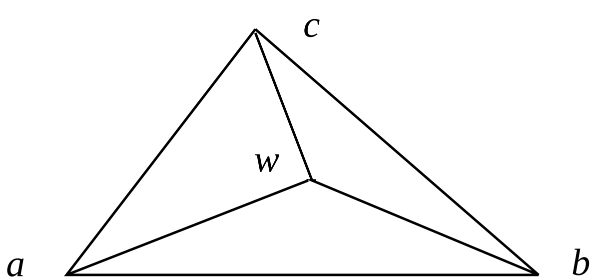
$$\Delta_1 = \Delta(a, u, v)\ ,\ \Delta_2 = \Delta(u, b, v)\ ,\ \Delta_3 = (b, c, v).$$

D'après le premier cas, on a $I(\Delta_2) = I(\Delta_3) = 0$, donc $I(\Delta) = I(\Delta_1)$. Comme f est continue, il existe $r, M \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $|f(z)| \leqslant M$ si $|z - a| \leqslant r$. Si u, v sont assez voisins de a, on a donc :

$$|I(\Delta)| = |I(\Delta_1)| \leqslant M \operatorname{long}(\Delta_1).$$

En faisant tendre u et v vers a, on obtient $I(\Delta) = 0$.

3) Supposons que w ne soit pas un sommet de Δ et que $w \in \Delta$. En considérant les triangles $\Delta(w, a, b)$, $\Delta(w, b, c)$ et $\Delta(w, c, a)$ (voir la figure), on se ramène au cas 2.



On a obtenu le résultat. □

Théorème 6.4.6. (Théorème de Cauchy pour un convexe). *Soient U un ouvert* convexe *de $\mathbb{C}$, $w \in U$, et f une fonction continue sur U et holomorphe dans $U \setminus \{w\}$. Alors f possède une primitive dans U et, pour tout chemin fermé γ dans U, on a :*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Démonstration. C'est clair d'après 6.4.1, 6.4.4, et 6.4.5. □

Théorème 6.4.7. (Formule de Cauchy pour un convexe). *Soit γ un chemin fermé dans un ouvert* convexe U *de* $\mathbb{C}$, $z \in U \setminus \operatorname{im} \gamma$, *et* $f \in \mathcal{H}(U)$. *Alors :*

$$f(z) \operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Démonstration. Définissons $g \colon U \to \mathbb{C}$ par

$$g(z) = f'(z)\ ,\ g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \ \text{ si } \ \zeta \neq z.$$

La fonction g est continue sur U et holomorphe dans $U \setminus \{z\}$. Compte tenu de 6.4.6, il vient :

$$0 = \int_\gamma g(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

D'où immédiatement le résultat par définition de l'indice. □

Corollaire 6.4.8. *Avec les hypothèses de* 6.4.7, *si γ est un cercle de rayon r parcouru dans le sens direct, et si $|z| < r$, on a :*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

6.5 ANALYTICITÉ DES FONCTIONS HOLOMORPHES

6.5.1. Soient $z \in \mathbb{C}$ et A une partie non vide de $\mathbb{C}$. On pose :

$$d(z, A) = \inf\{|z - a|\ ;\ a \in A\}.$$

On dit que $d(a, A)$ est la *distance* de z à A.

Théorème 6.5.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors :*

(i) *On a $f \in \mathcal{A}(U)$, et le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point a est au moins égal à $d(a, \mathbb{C} \setminus U)$.*

(ii) *Si U est convexe, et si γ est un chemin fermé dans U tel que $a \notin \operatorname{im} \gamma$, on a*

$$f^{(n)}(a) \operatorname{ind}_\gamma(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. 1) Supposons d'abord U convexe.

Soit $a \notin \operatorname{im} \gamma$. Comme $\operatorname{im} \gamma$ est compact, il existe $r > 0$ tel que $D'(a, r) \subset U$ et $D'(a, r) \cap \operatorname{im} \gamma = \emptyset$.

Pour $z \in D(a, r)$ et $\zeta \in \operatorname{im} \gamma$, on a $|z - a| < r < |\zeta - a|$. D'où :

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} f(\zeta)\cdot$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

D'autre part, si $M = \sup\{|f(\zeta)| \,;\, \zeta \in \operatorname{im}\gamma\}$, il vient :

$$\left|\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)n^{+1}}\right| \leqslant M\frac{|z-a|^n}{r^{n+1}}.$$

Compte tenu de la formule de Cauchy pour un convexe, de 2.7.2 et 2.6.6, on obtient :

$$f(z)\ \operatorname{ind}_\gamma(a) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta\right](z-a)^n. \tag{1}$$

Si l'on prend pour γ un cercle $C(a,R)$ parcouru dans le sens direct tel que l'on ait $D'(a,r) \subset D(a,R) \subset U$, on a $\operatorname{ind}_\gamma(a) = 1$. On en déduit que $f \in \mathcal{A}\big(D(a,R)\big)$. On a donc prouvé que $f \in \mathcal{A}(U)$, et on a obtenu (ii). L'assertion concernant le rayon de convergence résulte de (1) par unicité du développement en série entière et 3.5.3.

2) Supposons U non convexe. Alors $d(a,\mathbb{C}\backslash U)$ est le rayon du plus grand disque ouvert $D(a,R)$ contenu dans U. Comme $D(a,R)$ est convexe, il suffit d'appliquer l'alinéa 1 à ce disque. □

Corollaire 6.5.3. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors f est indéfiniment dérivable sur U.*

Démonstration. C'est clair d'après 3.4.4 et 6.5.2. □

> ***Remarque.*** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une primitive de $x \to |x|$. Alors f est dérivable, mais pas deux fois dérivable. Il y a donc des différences fondamentales entre fonctions de variable réelle et fonctions de variable complexe.

Théorème 6.5.4. (Théorème de Morera). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur U. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in \mathcal{H}(U)$.

(ii) $f \in \mathcal{A}(U)$.

(iii) *f possède localement une primitive dans U.*

(iv) *Pour tout triangle $\Delta \subset U$, on a* $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Démonstration. L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) résulte de 3.4.4 et 6.5.2. L'implication (i) $\Rightarrow$ (iv) de 6.4.5, et (iv) $\Rightarrow$ (iii) de 6.4.4 (car si Δ est un triangle contenu dans U, on voit facilement qu'il existe un ouvert convexe V vérifiant $\Delta \subset V \subset U$). Enfin, si f possède localement une primitive F, de $F' = f$, on déduit que F est holomorphe, donc f l'est aussi (6.5.3). □

Corollaire 6.5.5. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $w \in U$, et $f \in \mathcal{H}(U\backslash\{w\})$ continue sur U. Alors $f \in \mathcal{H}(U)$.*

Démonstration. C'est immédiat d'après 6.4.5 et 6.5.4. □

6.6 FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

Lemme 6.6.1. *Soient $W = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ et $U = \mathbb{C}\backslash\{ix\,;\, x \in \mathbb{R}, |x| \geqslant 1\}$. Alors W est l'image de U par l'application*

$$z \to g(z) = \frac{1+iz}{1-iz}\cdot$$

Démonstration. L'application g est bien définie sur U et on a $g(z) \neq 0$ si $z \in U$.

Si $w \in W$, $z = i(1-w)(1+w)^{-1}$ est bien défini. Supposons $z = iy$, avec $y \in \mathbb{R}$ et $|y| \geqslant 1$. On obtient $|y| \neq 1$ et $w = (1-y)(1+y)^{-1}$. Or, si $|y| > 1$, on a $(1-y)(1+y)^{-1} \in \mathbb{R}_-$. Contradiction. On a donc $z \in U$. Comme $g(z) = w$, on obtient $W \subset g(U)$. On prouve de même que $g(U) \subset W$. □

6.6.2. Compte tenu de 6.6.1, on peut définir $f \in \mathcal{H}(U)$ par

$$f(z) = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Log}\,\frac{1+iz}{1-iz},$$

où Log est la détermination principale du logarithme (5.3.8).

Proposition. (i) *La fonction f est le seul élément de $\mathcal{H}(U)$ vérifiant $\tan\big(f(z)\big) = z$ pour tout $z \in U$ et $f(x) = \mathrm{Arc}\tan x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

(ii) *On a*

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2} \ \textit{ si } \ z \in U \ , \ f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} z^{2k+1} \ , \ \textit{ si } \ |z| < 1.$$

(iii) *L'application $z \to \tan z$ induit une bijection de $V = \left\{z \in \mathbb{C}\,;\, |\operatorname{Re}(z)| < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ sur U dont la bijection réciproque est f.*

Démonstration. Soient $z \in U$ et $w = f(w)$. Alors :

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}\ ,\ iz(e^{iw} - e^{-iw}) = e^{iw} - e^{-iw}.$$

D'autre part, on a $2|\operatorname{Re}(w)| < \pi$ (5.3.4 et 5.3.8), on a donc $z = \tan w$, soit $z = \tan\big(f(z)\big)$.

Si $x \in \mathbb{R}$, on a $|g(x)| = 1$. Il existe donc $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = e^{i\varphi}$. De $g(x) \in W$, on déduit que l'on peut supposer $|\varphi| < \pi$. Par suite :

$$f(x) = \frac{\varphi}{2}\ ,\ -\frac{\pi}{2} < \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}\cdot$$

Il vient alors $f(x) = \mathrm{Arc}\tan x$ puisque $x = \tan\big(f(x)\big)$.

Si $h \in \mathcal{H}(U)$ vérifie les propriétés de (i), alors f et h ont même restriction à $\mathbb{R}$. On en déduit que $f = h$ d'après le principe des zéros isolés et le fait que $h \in \mathcal{A}(U)$ (6.5.2).

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

D'après ce qui précède, les identités de (ii) sont vérifiées si z est réel. Elles le sont encore pour $z \in U$ en utilisant à nouveau le principe des zéros isolés.
On a vu que $f(U) = V$ et que $\tan\big(f(z)\big) = z$ si $z \in U$. Il en résulte que $z \to \tan z$ induit une surjection de V sur U.
Soit $w = u + iv \in V$ avec $u, v \in \mathbb{R}$ et $2|u| < \pi$. Alors :

$$\tan w = \frac{1}{i}\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}\ ,\ e^{2iw} = \frac{1 + i\tan w}{1 - i\tan w}.$$

Comme $e^{2iw} = e^{-2v}(\cos 2u + i\sin 2u)$ et $2|u| < \pi$, il vient :

$$\operatorname{Log} e^{2iw} = \operatorname{Log} e^{-2v} + 2iu = -2v + 2iu.$$

On en déduit que $w = f(\tan w)$, et on a obtenu le résultat. $\square$

Remarque. La fonction f de 6.6.2 se note encore $z \to \operatorname{Arc}\tan z$.

6.6.3. On conserve la notation V de 6.6.2. On pose cette fois :

$$U = \mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R}\,;\ |x| \geqslant 1\}.$$

Soient $w \in U$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Si $1 - w^2 = -t$, il vient $w^2 = 1 + t$, donc $w \in \mathbb{R}$ et $|w| \geqslant 1$. Contradiction. Si $w \in U$, on a donc $1 - w^2 \in \Omega_0$ (notation de 5.3.4), et on peut définir DP $\sqrt{1 - w^2}$ (5.4.4).

Pour $w \in \mathbb{U}$ et $\varepsilon = \pm 1$, posons $z_\varepsilon = i\varepsilon w + \text{DP}\sqrt{1 - w^2}$. On a $z_1 z_{-1} = 1$, donc z_ε est non nul. D'autre part, si $z_1 = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$z_{-1} = \frac{a - ib}{|a + ib|^2}.$$

Par suite :

- Ou z_1 et z_{-1} ont des parties réelles strictement positives.
- Ou z_1 et z_{-1} ont des parties réelles strictement négatives.
- Ou z_1 et z_{-1} ont des parties réelles nulles.

Or, $\operatorname{Re}(z_1 + z_{-1}) = 2\operatorname{Re}(1 - w^2)$, et on a vu que $1 - w^2 \in \Omega_0$. On en déduit :

$$|\operatorname{Arg}(\text{DP}\sqrt{1 - w^2})| < \frac{\pi}{2}\ ,\ \operatorname{Re}(\text{DP}\sqrt{1 - w^2}) > 0,$$

$$\operatorname{Re}(iw + \text{DP}\sqrt{1 - w^2}) > 0.$$

On peut donc définir $f \in \mathcal{H}(U)$ par :

$$f(w) = \frac{1}{i}\operatorname{Log}(iw + \text{DP}\sqrt{1 - w^2}).$$

Proposition. (i) *La fonction f est le seul élément de $\mathcal{H}(U)$ vérifiant* $\sin\big(f(z)\big) = z$ *pour tout $z \in U$ et $f(x) = \operatorname{Arc}\sin x$ pour tout $x \in]-1,1[$.*

(ii) *On a*

$$f'(w) = \frac{1}{\mathrm{DP}\,\sqrt{1-w^2}} \ \textit{si } w \in U,$$
$$f(w) = w + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k}\,\frac{w^{2k+1}}{2k+1} \ \textit{ si } \ |w| < 1.$$

(iii) *L'application $z \to \sin z$ induit une bijection de U sur V dont la bijection réciproque est f.*

Démonstration. Soient $w \in U$ et $z = f(w)$. Il vient :

$$e^{iz} = iw + \mathrm{DP}\,\sqrt{1-w^2}\ ,\ e^{-iz} = -iw + \mathrm{DP}\,\sqrt{1-w^2}\ ,\ \sin z = w.$$

Soit $x \in]-1,1[$. Il existe un unique $\varphi \in \mathbb{R}$ vérifiant $2|\varphi| < \pi$ et $x = \sin\varphi$. Alors :

$$\varphi = \operatorname{Arc}\sin x\ ,\ \cos\varphi = \sqrt{1-x^2},$$
$$e^{i\varphi} = ix + \sqrt{1-x^2}\ ,\ f(x) = \frac{1}{i}\operatorname{Log}(i\varphi) = \varphi = \operatorname{Arc}\sin x.$$

Par suite, si $g \in \mathcal{H}(U)$ vérifie les conditions de (i), f et g coïncident sur $]-1,1[$, donc $f = g$ d'après le principe des zéros isolés.

La formule donnant f' est immédiate. Notons S la somme de la série définie en (ii). On a $S \in \mathcal{A}\big(D(0,1)\big)$, et on sait que $g(x) = \operatorname{Arc}\sin x$ si $x \in]-1,1[$. A nouveau, d'après le principe des zéros isolés, on obtient $f(w) = S(w)$ pour $|w| < 1$.

Soit $W = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. On a vu que $iw + \mathrm{DP}\,\sqrt{1-w^2} \in W$ pour $w \in U$. Par suite, si $w \in U$:

$$|\operatorname{Arg}(iw + \mathrm{DP}\,\sqrt{1-w^2})| < \frac{\pi}{2}\ ,\ f(w) \in V.$$

Prouvons que $f(U) = V$. Soit $z = u + iv \in V$, avec $u, v \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos u > 0\ ,\ \sin z = \sin u \operatorname{ch} v + i \operatorname{sh} v \cos u.$$

On a donc $\mathrm{Im}(\sin z) = 0$ si et seulement si $v = 0$. Alors, $\mathrm{Re}(\sin z) = \sin u \in]-1,1[$, d'où $\mathrm{Re}(\sin z) \in U$. On en déduit que $\sin(V) \subset U$.

Soient $z \in U$ comme précédemment et $w = \sin z \in U$. D'après ce que l'on a vu, on obtient :

$$\zeta = f(w) \in V\ ,\ \sin\zeta = w = \sin z\ ,\ \sin\frac{z-\zeta}{2}\cos\frac{z-\zeta}{2} = 0.$$

Or :

$$\frac{z-\zeta}{2} \in V \Rightarrow \cos\frac{z-\zeta}{2} \neq 0 \Rightarrow \sin\frac{z-\zeta}{2} = 0 \Rightarrow z - \zeta \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Comme $z, \zeta \in V$, on en déduit $z = \zeta$. Ainsi, $f(U) = V$ et, pour $z \in V$, il vient $f(\sin z) = z$. □

Remarque. On note encore $z \to \operatorname{Arc}\sin z$ la fonction f de 6.6.3.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

6.6.4. Soit U comme en 6.6.3. On laisse le soin au lecteur de démontrer les résultats suivants :

1) On peut définir $f \in \mathcal{H}(U)$ par :

$$f(w) = \frac{1}{i}\,\mathrm{Log}(w + i\,\mathrm{DP}\,\sqrt{1-w^2}).$$

2) L'application f est l'unique élément de $\mathcal{H}(U)$ qui vérifie les conditions suivantes :

(i) $\cos\big(f(w)\big) = w$ pour tout $w \in U$.

(ii) $f(x) = \mathrm{Arc}\cos x$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Le lecteur complètera enfin l'étude pour définir $z \to \mathrm{Arc}\cos z$.

EXERCICES

Exercice 6.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, D une droite (réelle affine) de $\mathbb{C}$, et f une fonction continue sur U et holomorphe dans $U \backslash D$. Prouver que f est holomorphe dans U.

Exercice 6.2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $([a_n, b_n], \gamma_n)$ un chemin fermé et

$$\rho_n = \inf\{|z|\,;\, z \in \mathrm{im}\,\gamma_n\}.$$

On suppose que ρ_n tend vers $+\infty$ si n tend vers $+\infty$, que $0 \notin \mathrm{im}\,\gamma_n$, et que $\mathrm{ind}_{\gamma_n}(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Prouver qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $z \notin \mathrm{im}\,\gamma_n$ si $n \geqslant N$.

(ii) $\mathrm{ind}_{\gamma_n}(z) = 1$ si $n \geqslant N$.

Exercice 6.3. Soient $m, n \in \mathbb{Z}^*$ et $([0,1], \gamma_1)$, $([0,1], \gamma_2)$ des chemins fermés tels que $0 \notin \mathrm{im}\,\gamma_1 \cup \mathrm{im}\,\gamma_2$. Si $t \in [0,1]$, on pose :

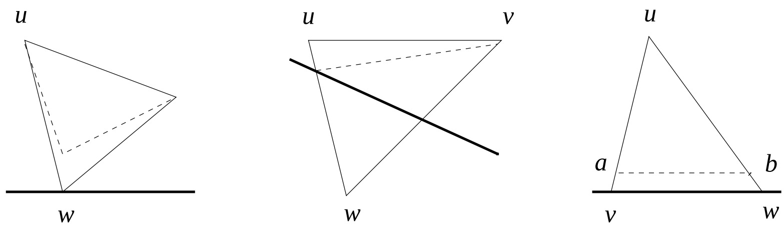
$$\gamma(t) = [\gamma_1(t)]^m [\gamma_2(t)]^n.$$

Vérifier que γ est un chemin fermé et que $0 \notin \mathrm{im}\,\gamma$.

Calculer $\mathrm{ind}_\gamma(0)$ en fonction de $\mathrm{ind}_{\gamma_1}(0)$ et $\mathrm{ind}_{\gamma_2}(0)$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 6.1. Compte tenu du théorème de Morera, il suffit de montrer que l'intégrale de f sur le bord orienté de tout triangle $\Delta = \Delta(u, v, w)$ contenu dans U est nulle. On est dans l'un des cas suivants :



Traitons, par exemple, le cas de droite. Notons $\Delta_1 = \Delta(u, a, b)$. La fonction f étant continue sur U est uniformément continue sur Δ. Par suite :

$$\lim_{(a,b)\to(u,v)} \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz.$$

Or, f est holomorphe dans un ouvert contenant Δ_1. D'après 6.5.4, on a donc :

$$\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz = 0.$$

D'où le résultat.

Exercice 6.2. D'après les hypothèses, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > |z|$ si $n \geqslant N$. Ainsi, $z \notin \operatorname{im}\gamma_n$ pour $n \geqslant N$.

Soit $\delta\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$, $t \to tz$. L'application δ est un chemin joignant 0 à z, et on a $|\delta(t)| \leqslant |z|$ si $t \in [0, 1]$. On en déduit que $\operatorname{im}\gamma_n \cap \operatorname{im}\delta = \emptyset$ si $n \geqslant N$. Pour de tels entiers n, z et 0 appartiennent à la même composante connexe de $\mathbb{C}\setminus \operatorname{im}\gamma_n$ (car $0, z \in \operatorname{im}\delta$). D'après 6.3.2, on a donc $\operatorname{ind}_{\gamma_n}(z) = \operatorname{ind}_{\gamma_n}(0) = 1$.

Exercice 6.3. Le premier point est immédiat. En les points t où γ_1 et γ_2 sont dérivables, il vient :

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = m\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)} + n\frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)}\cdot$$

Par suite :

$$\begin{aligned} 2i\pi\operatorname{ind}_\gamma(0) &= \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt = m\int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)}\,dt + n\int_0^1 \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)}\,dt \\ &= 2i\pi m\operatorname{ind}_{\gamma_1}(0) + 2i\pi n\operatorname{ind}_{\gamma_2}(0). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\operatorname{ind}_\gamma(0) = m\operatorname{ind}_{\gamma_1}(0) + n\operatorname{ind}_{\gamma_2}(0).$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 7

Propriétés des fonctions holomorphes

7.1 INÉGALITÉS DE CAUCHY ET CONSÉQUENCES

7.1.1. Soient $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{H}\big(D(0,R)\big)$. D'après 6.5.2, si $z \in D(0,R)$, on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

où $(a_n)_n$ est une suite de nombres complexes.

Si $r \in]0,R[$, notons γ_r le cercle $C(0,r)$ parcouru dans le sens direct (6.1.5). D'après 6.5.2, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) r^{-n} e^{-int}\, dt.$$

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

Théorème. (Inégalités de Cauchy). *Avec les notations précédentes, pour tout* $r \in]0,R[$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a :*

$$|a_n| = \frac{1}{n!} |f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{\sup\{|f(z)|\,;\, |z| = r\}}{r^n}.$$

7.1.2. On appelle *fonction entière* tout élément de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Corollaire. **(Théorème de Liouville).** *Toute fonction entière et bornée est constante.*

Démonstration. Si $M \geqslant |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tout $r > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|a_n| \leqslant Mr^{-n}$ (7.1.1). En faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient $a_n = 0$ si $n \geqslant 1$. □

Corollaire 7.1.3. **(Théorème de d'Alembert).** *Tout polynôme d'une variable à coefficients complexes et non constant a au moins une racine dans* $\mathbb{C}$.

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{C}[X] \backslash \mathbb{C}$. Il est clair que $|P(z)|$ tend vers $+\infty$ si $|z|$ tend vers $+\infty$. Par suite, si P n'a aucune racine dans $\mathbb{C}$, $z \to 1/P(z)$ est une fonction entière bornée. D'après 7.1.2, elle est constante, donc le polynôme P est constant. Contradiction. □

7.2 PRINCIPE DU MAXIMUM

Proposition 7.2.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur U. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout disque $D'(a, r)$ contenu dans U, on a :*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt.$$

(ii) *Pour tout disque $D'(a, r)$ contenu dans U, on a :*

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D'(a,r)} f(x + iy)\, dx\, dy.$$

Si elles sont vérifiées, on dit que f possède la propriété de moyenne *dans U.*

Démonstration. En utilisant les coordonnées polaires, il vient :

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{D'(a,r)} f(x + iy)\, dx\, dy = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \Big(\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it})\, dt \Big) \rho\, d\rho.$$

L'implication (i) ⇒ (ii) est alors immédiate. Supposons (ii) vérifié. Soit $R > 0$ tel que $D'(a, R) \subset U$. Pour $0 \leqslant r < R$, on a :

$$\frac{r^2}{2} f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \Big(\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it}\, dt \Big) \rho\, d\rho.$$

En prenant la dérivée des deux membres par rapport à r, on obtient (i). □

Proposition 7.2.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors f possède la propriété de moyenne dans U.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Démonstration. Si $D'(a,r) \subset U$, il existe $R > r$ tel que $D(a,R) \subset U$. Si γ est le cercle $C(a,r)$ parcouru dans le sens direct, en appliquant 6.5.2 (ii) à $D(a,R)$, il vient :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt.$$

D'où l'assertion. □

7.2.3. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction sur U. Par abus de langage, on dit que f a un *maximum relatif* en $a \in U$ s'il existe un voisinage V de a dans U tel que $|f(z)| \leqslant |f(a)|$ pour tout $z \in V$.

On dit que f vérifie le *principe du maximum* dans U si elle est constante au voisinage de tout point $a \in U$ en lequel elle a un maximum relatif.

Supposons que f vérifie le principe du maximum dans U, et que U soit *connexe*. Il est immédiat que l'ensemble des points de U en lesquels f a un maximum relatif est ouvert et fermé dans U. Par suite, si f a un maximum relatif en un point de U, alors f est constante.

Théorème 7.2.4. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur U vérifiant la propriété de moyenne dans U. Alors f vérifie le principe du maximum dans U.*

Démonstration. Soient $a \in U$ en lequel f a un maximum relatif et $R > 0$ vérifiant $D(a,R) \subset U$ et $|f(z)| \leqslant [f(a)|$ pour tout $z \in D(a,R)$. Le résultat étant évident si $f(a) = 0$, nous supposerons ce cas exclu. Quite à changer f en $(\overline{f(a)}/|f(a)|^2)f$, on peut supposer que $f(a) = |f(a)| > 0$. Puisque f vérifie la propriété de moyenne, si $0 < r < R$, on a :

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(a) - f(a + re^{it})]\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [|f(a)| - f(a + re^{it})]\, dt.$$

En particulier :

$$\int_0^{2\pi} [|f(a)| - \mathrm{Re}\left(f(a + re^{it})\right)]\, dt = 0.$$

La fonction $t \to |f(a)| - \mathrm{Re}\left(f(a + re^{it})\right)$ est continue, à valeurs réelles positives ou nulles sur $[0, 2\pi]$, et d'intégrale nulle sur cet intervalle. Elle est donc nulle. Ainsi, pour $r < R$ et $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, on obtient $|f(a)| = \mathrm{Re}\left(f(a + re^{it})\right)$. Comme $|f(z)| \leqslant |f(a)|$ si $z \in D(a,R)$, on a $\mathrm{Im}\left(f(z)\right) = 0$ si $z \in D(a,R)$. On a prouvé que f est constante sur $D(a,R)$. □

Proposition 7.2.5. *Soient U un ouvert* connexe *et* borné *de $\mathbb{C}$, et f une fonction continue sur l'adhérence $\overline{U}$ de U et vérifiant le principe du maximum dans U. Si M est le maximum de $|f|$ sur la frontière $\overline{U} \backslash U$ de U, on a*

$$|f(z)| \leqslant M$$

pour tout $z \in U$. En outre, s'il existe $a \in U$ tel que $|f(a)| = M$, alors f est constante sur U.

Démonstration. D'après les hypothèses, $\overline{U}$ est compact, et il existe $z_0 \in \overline{U}$ tel que $|f(z_0)| = N = \sup\{|f(z)|\,;\, z \in \overline{U}\}$.
S'il existe $a \in U$ tel que $|f(a)| = N$, f est constante sur U (7.2.3). Si ce n'est pas le cas, pour tout $z \in U$, on a $|f(z)| < N$, et nécessairement $z_0 \in \overline{U} \backslash U$. On en déduit que $M = N$ et que $|f(z)| < M$ pour tout $z \in U$. □

7.3 LEMME DE SCHWARZ ET APPLICATIONS

Théorème 7.3.1. (Lemme de Schwarz). *Soit* $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ *vérifiant* $f(0) = 0$ *et* $|f(z)| < 1$ *pour tout* $z \in D(0,1)$. *On a :*

(i) $|f(z)| \leqslant |z|$ *pour tout* $z \in D(0,1)$.

(ii) $|f'(0)| \leqslant 1$.

En outre, si $|f'(0)| = 1$, *ou s'il existe* $z \in D(0,1) \backslash \{0\}$ *tel que* $|f(z)| = |z|$, *alors il existe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $|\lambda| = 1$ *et* $f(z) = \lambda z$ *pour tout* $z \in D(0,1)$.

Démonstration. Notons $D = D(0,1)$, et définissons $g\colon D \to \mathbb{C}$ par

$$g(0) = f'(0)\ ,\ g(z) = \frac{f(z)}{z} \ \text{ si } \ z \neq 0.$$

L'application g est continue sur D et holomorphe dans $D\backslash\{0\}$. On a donc $g \in \mathcal{H}(D)$ d'après 6.5.5.

Notons $M_f(r) = \sup\{|f(z)|\,;\, |z| = r\}$, $M_g(r) = \sup\{|g(z)|\,;\, |z| = r\}$ pour $0 \leqslant r < 1$. D'après 7.2.5, si $|z| \leqslant r < 1$, on obtient :

$$|g(z)| \leqslant M_g(r)\ ,\ |g(z)| \leqslant \frac{1}{r} M_f(r) \leqslant \frac{1}{r}.$$

En faisant tendre r vers 1, on obtient $|g(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in D$.

S'il existe $z_0 \in D$ tel que $|g(z_0)| = 1$, alors g a un maximum relatif en z_0. Le principe du maximum montre que g est constante dans un voisinage de z_0, donc constante sur D d'après le théorème du prolongement analytique. Ainsi, $g(z) = \lambda$, avec $|\lambda| = 1$, pour tout $z \in D$, donc $f(z) = \lambda z$. □

7.3.2. Soient U, V des ouverts de $\mathbb{C}$. Un *isomorphisme analytique* de U sur V est une bijection f de U sur V telle que $f \in \mathcal{H}(U)$ et $g \in \mathcal{H}(V)$, où g est l'application réciproque de f. On note $\mathrm{Isom}(U, V)$ l'ensemble des isomorphismes analytiques de U sur V, et on dit que U et V sont *isomorphes* si $\mathrm{Isom}(U, V) \neq \emptyset$. On écrit $\mathrm{Aut}(U)$ pour $\mathrm{Isom}(U, U)$; un élément de $\mathrm{Aut}(U)$ est appelé un *automorphisme (analytique)* de U.

Il est clair que si U et V sont isomorphes, ils sont homéomorphes. La réciproque est inexacte comme le montre le résultat suivant :

Proposition. *Les ensembles* $\mathbb{C}$ *et* $D(0,1)$ *sont homéomorphes mais non isomorphes.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Démonstration. Si $f\colon \mathbb{C} \to D(0,1)$ est holomorphe, c'est une fonction entière bornée, donc constante (7.1.2). Ainsi, $\mathbb{C}$ et $D(0,1)$ ne sont pas isomorphes. Il est immédiat de vérifier que les applications

$$\mathbb{C} \to D\ ,\ z \to \frac{z}{1+|z|} \text{ et } D \to \mathbb{C}\ ,\ \zeta \to \frac{\zeta}{1-|\zeta|}$$

sont des bijections continues réciproques l'une de l'autre. Ainsi, D et $\mathbb{C}$ sont homéomorphes. □

7.3.3. Posons $D = D(0,1)$. Si $a \in D$, on définit $\varphi_a\colon D \to \mathbb{C}$ par :

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}\cdot$$

On remarque que $\varphi_a(z)$ est encore défini pour $|z| = 1$ et que, si $t \in \mathbb{R}$:

$$|\varphi_a(e^{it})| = \left|\frac{e^{it}-a}{e^{-it}-\overline{a}}\right| = 1.$$

Il résulte de 7.2.5 que $\varphi_a(D) \subset D$. D'autre part, on vérifie immédiatement que $\varphi_a \circ \varphi_{-a} = \mathrm{id}_D$. Par suite, $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(D)$.

Théorème. *L'ensemble* $\mathrm{Aut}(D)$ *est constitué des applications* $\lambda\varphi_a$, *avec* $|\lambda| = 1$ *et* $a \in D$.

Démonstration. Soient $f \in \mathrm{Aut}(D)$, $a = f(0)$, et $g = \varphi_a \circ f$. On a $g \in \mathrm{Aut}(D)$ et $g(0) = 0$. D'après 7.3.1, il vient $|g(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in D$. En utilisant l'application réciproque de g, on obtient de même $|z| \leqslant |g(z)|$ pour tout $z \in D$. Il résulte à nouveau de 7.3.1 qu'il existe $\lambda \in C(0,1)$ tel que $g(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D$. Alors :

$$f(z) = \varphi_{-a}(\lambda z) = \frac{\lambda z + a}{1+\overline{a}\lambda z} = \lambda \frac{z + a\overline{\lambda}}{1+\overline{a}\lambda z}\cdot$$

On a obtenu le résultat. □

7.3.4. Soit $P = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. On vérifie facilement que les applications

$$h\colon D \to P\ ,\ z \to i\frac{1+z}{1-z} \text{ et } \ell\colon P \to D\ ,\ \zeta \to \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Théorème 7.3.5. *L'ensemble* $\mathrm{Aut}(P)$ *est constitué des applications*

$$z \to \frac{az+b}{cz+d},$$

avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *et* $ad - bc > 0$.

Démonstration. Il est immédiat que les fonctions précédentes sont des éléments de $\mathrm{Aut}(P)$. Soit $f \in \mathrm{Aut}(P)$. D'après ce qui précède et 7.3.3, il existe $a \in D$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(z) = h\big[e^{it}\varphi_a\big(\ell(z)\big)\big]$$

pour tout $z \in P$. On trouve alors

$$f(z) = \frac{-z(\alpha+\overline{\alpha}) + i(\overline{\beta}-\beta)}{zi(\alpha-\overline{\alpha}) - (\beta+\overline{\beta})},$$

où $\alpha = e^{-it/2}(1-a)$ et $\beta = e^{-it/2}(1+\overline{a})$. On en déduit facilement l'assertion. □

7.4 SUITES ET SÉRIES

7.4.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathbf{f} = (f_n)_n$ une suite de fonctions sur U. On dit que $\mathbf{f}$ *converge uniformément sur tout compact* vers une fonction f sur U si, pour tout compact K de U, la suite $(f_n|K)_n$ converge uniformément vers $f|K$ (voir 2.2.1).

L'espace U étant localement compact, si les f_n sont continues sur U et convergent uniformément sur tout compact vers f, la fonction f est continue sur U (2.3.3).

Si $\sum f_n$ est une série de fonctions sur U, on définit de même la *convergence uniforme sur tout compact* ou la *convergence normale sur tout compact* de cette série.

Dans la suite, si K est un compact de $\mathbb{C}$ et si f est une fonction continue sur K, on posera :

$$\|f\|_K = \sup\{|f(z)|\,;\, z \in K\}.$$

Théorème 7.4.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathbf{f} = (f_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}(U)$ convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction f. Alors :*

(i) *On a $f \in \mathcal{H}(U)$.*

(ii) *Si $j \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n^{(j)})_n$ converge uniformément sur tout compact vers $f^{(j)}$.*

Démonstration. (i) La fonction f est continue sur U (7.4.1). Si Δ est un triangle de U, $\partial\Delta$ est compact, et il vient :

$$\Big|\int_{\partial\Delta}[f(z) - f_n(z)]\,dz\Big| \leqslant \mathrm{long}(\partial\Delta)\|f - f_n\|_{\partial\Delta}.$$

Il résulte alors du théorème de Morera (6.5.4) que $f \in \mathcal{H}(U)$.

(ii) Par récurrence sur l'entier j, il suffit de prouver le résultat pour $j = 1$. Soit K un compact de U. Définissons r par $r = 1$ si $U = \mathbb{C}$ et, si $U \neq \mathbb{C}$:

$$r = \frac{1}{2}d(K, \mathbb{C}\backslash U) = \frac{1}{2}\inf\{|z-\zeta|\,;\, z \in K, \zeta \in \mathbb{C}\backslash U\}.$$

Comme K est compact, il est bien connu que r est strictement positif. En outre, $D'(z,r) \subset U$ pour tout $z \in K$. Posons :

$$L = \bigcup_{z\in K} D'(z,r) = \{\zeta \in U\,;\, d(\zeta, K) \leqslant r\}.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Il est immédiat que L est un compact de U. D'autre part, les inégalités de Cauchy (7.1.1) appliquées au disque $D'(z,r)$ (au lieu de $D(0,r)$) et à $f - f_n$ montrent que, si $z \in K$, on a :

$$|f'(z) - f_n'(z)| \leqslant \frac{1}{r}\|f - f_n\|_{D'(z,r)}.$$

Par suite :

$$\|f' - f_n'\|_K \leqslant \frac{1}{r}\|f - f_n\|_L.$$

D'après les hypothèses, on a obtenu le résultat. □

Théorème 7.4.3. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions holomorphes sur U convergeant uniformément sur tout compact. Soit f la somme de cette série. Alors :*

(i) *On a $f \in \mathcal{H}(U)$. La série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout compact vers f'.*

(ii) *Si la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur tout compact, il en est de même de la série $\sum f_n'$.*

(iii) *Si la série $\sum |f_n|$ est uniformément convergente sur tout compact, il en est de même de la série $\sum |f_n'|$.*

Démonstration. (i) En utilisant les sommes partielles de la série, c'est un cas particulier de 7.4.2.

(ii) Soit K un compact de U. Si $U = \mathbb{C}$, on pose $L = \{\zeta \in \mathbb{C}\,;\, d(\zeta, K) \leqslant 1\}$ et, si $U \neq \mathbb{C}$:

$$L = \Big\{\zeta \in U\,;\, d(\zeta, K) \leqslant \frac{1}{2} d(K, \mathbb{C}\backslash U)\Big\}.$$

L'ensemble L est un compact de U. Si $z \in K$ et $n \in \mathbb{N}$, les inégalités de Cauchy montrent que

$$|f_n'(z)| \leqslant \frac{1}{r}\|f_n\|_L\,,$$

où $r = 1$ si $U = \mathbb{C}$, et $r = \dfrac{1}{2} d(K, \mathbb{C}\backslash U)$ si $U \neq \mathbb{C}$, car $D'(z,r) \subset L$. D'où :

$$\|f_n'\|_K \leqslant \frac{1}{r}\|f_n\|_L.$$

On a obtenu (ii).

(iii) Conservons les notations K et L précédentes. Si $D'(z,r) \subset U$, il résulte de 6.5.2 que

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f_n(z + re^{it})\,dt \Rightarrow |f_n'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} |f_n(z + re^{it})|\,dt.$$

Par suite, d'après les hypothèses et 2.6.6, si $k \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\sum_{n=k}^{\infty} |f_n'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi r} \sum_{n=k}^{\infty} \int_0^{2\pi} |f(z+re^{it})|\, dt = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=k}^{\infty} |f(z+re^{it})| \Big)\, dt.$$

D'où :

$$\Big\| \sum_{n=k}^{\infty} |f_n'| \Big\|_K \leqslant \frac{1}{r} \Big\| \sum_{n=k}^{\infty} |f_n| \Big\|_L.$$

Ceci prouve (iii). □

7.5 HOLOMORPHIE ET INTÉGRATION

7.5.1. On va donner une méthode de construction de fonctions holomorphes. Pour cela, nous utiliserons des propriétés de l'intégration au sens de Lebesgue.

Dans la suite, on désigne par X un espace topologique localement compact et par μ une mesure positive sur X. On fixe un ouvert U de $\mathbb{C}$.

On considère une fonction $f\colon U \times X \to \mathbb{C}$, $(z,x) \to f(z,x)$. On suppose vérifiées les conditions suivantes :

(i) Pour tout $x \in X$, l'application $f_x\colon U \to \mathbb{C}$, $z \to f(z,x)$ est holomorphe sur U. Si $n \in \mathbb{N}$ et $(z,x) \in U \times X$, on pose :

$$f_x^{(n)}(z) = \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x).$$

(ii) Pour tout $z \in U$, l'application $x \to f(z,x)$ est μ-intégrable, et l'on définit une fonction sur U par :

$$F(z) = \int_X f(z,x)\, d\mu(x).$$

Théorème. *On conserve les notations et hypothèses précédentes et on suppose que, pour tout compact K de U, il existe une application μ-intégrable $g_K\colon X \to \mathbb{R}_+$ telle que*

$$|f(z,x)| \leqslant g_K(x)$$

pour tout $(z,x) \in K \times X$. Alors $F \in \mathcal{H}(U)$ et, pour $z \in U$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x)\, d\mu(x).$$

Démonstration. 1) Si $(z,x) \in U \times X$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z,x) = \lim_{n \to +\infty} n\Big[f\Big(z + \frac{1}{n}, x\Big) - f(z,x) \Big].$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Il en résulte que $x \to \dfrac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ est une limite simple de fonctions μ-mesurables, donc est μ-mesurable. Par récurrence sur n, on voit que chaque fonction $x \to \dfrac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x)$ est μ-mesurable.

2) Soient K un compact de U et $L = \{\zeta \in U\,;\, d(\zeta, K) \leqslant r\}$, avec $r = 1$ si $U = \mathbb{C}$ et $r = \dfrac{1}{2}d(K, \mathbb{C}\backslash U)$ si $U \neq \mathbb{C}$.
L'élément $x \in X$ étant fixé, les inégalités de Cauchy fournissent :

$$\sup\left\{\left|\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x)\right|\,;\, z \in K\right\} \leqslant \frac{1}{r^n}\sup\{|f(z,x)|\,;\, z \in L\}.$$

On en déduit que, si $z \in K$ et $x \in X$, on a :

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,t)\right| \leqslant g_L(x). \tag{1}$$

D'après l'alinéa 1 et l'inégalité (1), chaque fonction $x \to \dfrac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x)$ est μ-intégrable. On peut donc définir les fonctions sur U :

$$z \to \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x)\,d\mu(x).$$

3) Soit $a \in U$. Fixons $r > 0$ tel que $D'(a,r) \subset U$, et définissons $h\colon U \times X \to \mathbb{C}$ par :

$$\begin{cases} h(z,x) = \dfrac{1}{(z-a)^2}\left[f(z,x) - f(a,x) - (z-a)\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,x)\right] \text{ si } z \neq a, \\ h(a,x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a,x). \end{cases} \tag{2}$$

Pour chaque $x \in X$, $z \to h(z,x)$ est holomorphe sur U. D'après le principe du maximum, si $z \in D(a,r)$, on a :

$$|h(z,x)| \leqslant \sup\{|h(\zeta,x)|\,;\, |\zeta - a| = r\}. \tag{3}$$

Notons K le compact $D'(a,r)$. Si $(z,x) \in K \times X$, alors :

$$|f(z,x)| \leqslant g_K(x). \tag{4}$$

D'autre part, d'après les inégalités de Cauchy :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}(a,x)\right| \leqslant \frac{1}{r}g_K(x). \tag{5}$$

Compte tenu de (2), (4) et (5), il résulte alors de (3) que :

$$|h(z,x)| \leqslant \frac{1}{r^2}[g_K(x) + g_K(x) + \frac{r}{r}g_K(x)].$$

On a donc, pour $(z,x) \in D'(a,r) \times X$:

$$|h(z,x)| \leqslant \frac{3}{r^2} g_K(x). \tag{6}$$

On en déduit :

$$\Big| \int_X h(z,x)\, d\mu(x) \leqslant \frac{3}{r^2} \int_X g_K(x)\, d\mu(x).$$

D'après (2), si $z \in D(a,r)$, il vient alors :

$$\Big| F(z) - F(a) - (z-a) \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(a,x)\, d\mu(x) \Big| \leqslant \frac{3|z-a|^2}{r^2} \int_X g_K(x)\, d\mu(x).$$

Ceci nous prouve que F est dérivable en a et que :

$$F'(a) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(a,x)\, d\mu(x).$$

On a obtenu le résultat. □

7.5.2. Notons $P = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. On laisse le soin au lecteur de vérifier que, si $z \in P$, l'intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

est convergente.

Tout compact de P est contenu dans un ensemble :

$$P_{r,R} = \{z \in P\,;\, 0 < r \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant R\}.$$

Définissons $g_{r,R}$ par

$$g_{r,R}(t) = t^{r-1} e^{-t} \ \text{ si } 0 < t \leqslant 1 \ \text{ et } \ g_{r,R}(t) = t^{R-1} e^{-t} \ \text{ si } \ t > 1.$$

La fonction $g_{r,R}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, et on a $|t^{z-1}e^{-t}| \leqslant g_{r,R}(t)$ si $t > 0$ et $z \in P_{r,R}$. Compte tenu de 7.5.1, on voit que $\Gamma \in \mathcal{H}(P)$ et que, pour $z \in P$, on a :

$$\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \ln t\, dt.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

EXERCICES

Exercice 7.1. Si $a \in D = D(0,1)$, on utilise la notation φ_a de 7.3.3. Soient $f \in \mathcal{H}(D)$ vérifiant $|f(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in D$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des zéros de f. Montrer que $|f(z)| \leqslant |\varphi_{\alpha_1}(z)| \cdots |\varphi_{\alpha_n}(z)|$ pour tout $z \in D$.

Exercice 7.2. Soient U un ouvert connexe, D un disque ouvert tel que $\overline{D} \subset U$ et $f \in \mathcal{H}(U)$, non constante. Montrer que, si $|f|$ est constante sur la frontière de D, alors f a au moins un zéro dans D.

Exercice 7.3. Soient $D = D(0,1)$ et $f \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in D$. Montrer que, si $u, v \in D$, on a :

$$\left|\frac{f(u) - f(v)}{1 - \overline{f(u)}f(v)}\right| \leqslant \left|\frac{u - v}{1 - \overline{u}v}\right|, \quad \frac{|f'(u)|}{1 - |f(u)|^2} \leqslant \frac{1}{1 - |u|^2}.$$

Exercice 7.4. Soient $U = \mathbb{C}\backslash[-1,1]$ et $g\colon\ ]-1,1[\to \mathbb{R}$ une application continue telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} |g(t)|\, dt$ soit convergente. Prouver que

$$z \to f(z) = \int_{-1}^{1} \frac{g(t)}{z - t}\, dt$$

est une fonction holomorphe sur U.

Exercice 7.5. Soient U un ouvert connexe borné non vide de $\mathbb{R}^2$ et $A_1, \ldots, A_n$ des points de $\mathbb{R}^2$. Si $M \in \mathbb{R}^2$, on note $f(M)$ le produit des distances de M aux A_i. Si M décrit $\overline{U}$, montrer que f atteint son maximum en un point de la frontière de U.

Exercice 7.6. Soient f, g deux fonctions entières vérifiant $|f(z)| \leqslant |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Prouver qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = \lambda g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 7.7. Soient $D = D(0,1)$ et $C = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| > 1\}$. On désigne par $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum a_n$ converge, et on pose :

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n}{1 - z^n}.$$

1. Montrer que la série S converge normalement sur tout compact de D.

2. Prouver que la série S converge uniformément sur tout compact de C.

3. On suppose que $a_n = (-1)^n n^{-1}$. La série S converge t-elle normalement sur tout compact de C ?

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 7.1. Posons $h = \varphi_{\alpha_1} \cdots \varphi_{\alpha_n}$. L'application $z \to f(z)/h(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe dans D.

Fixons $w \in D$, et notons $m = \max\{|w|, |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|\}$. Si $m < r < 1$, le principe du maximum implique que

$$|g(w)| \leqslant \frac{1}{\min\{|h(z)|\,;\ |z| = r\}}.$$

On sait (7.3.3) que $|h(z)| = 1$ si $|z| = 1$. D'où :

$$\lim_{r \to 1} \min\{|h(z)|\,;\ |z| = r\} = 1.$$

On en déduit que $|g(w)| \leqslant 1$, puis le résultat.

Exercice 7.2. Soient C la frontière de D et M la valeur commune des $|f(z)|$ pour $z \in C$. D'après le principe du maximum, si $z \in D$, on a $|f(z)| \leqslant M$.

Supposons f sans zéro dans D. Alors $1/f$ est holomorphe dans U et, le principe du maximum montre à nouveau que $1/|f(z)| \leqslant 1/M$ si $z \in D$. Ainsi, $|f|$ est constante sur D. Il résulte de 5.2.7 que f est constante sur D. Comme U est connexe, on déduit de 4.3.3 que f est constante. Contradiction. Par suite, f a au moins un zéro dans U.

Exercice 7.3. Si $a \in D$, φ_a a la même signification qu'en 7.3.3. On sait que φ_a est un automorphisme analytique de D dont la bijection réciproque est φ_{-a}.

Soient $u \in D$ et $g = \varphi_{f(u)} \circ f \circ \varphi_u$. On a $g(D) \subset D$ et $g(0) = 0$. Compte tenu du lemme de Schwarz, on obtient $|g(v)| \leqslant |v|$ pour tout $v \in U$. Par conséquent, $|\varphi_{f(u)} \circ f(v)| \leqslant |\varphi_u(v)|$, et ceci est la première inégalité à établir. En divisant les deux membres de cette égalité par $|u - v|$ et en faisant tendre v vers u, on a alors la seconde inégalité.

Exercice 7.4. Soient $a, b \in U$ et $p, q \in \mathbb{N}$. On va montrer que l'intégrale

$$I(a,b) = \int_{-1}^{1} \frac{g(t)}{(t-a)^p (t-b)^q}\, dt$$

est convergente. En effet, si $z \in U$, l'application $t \to |t - u|$ est continue et à valeurs non nulles sur le compact $[-1, 1]$. Il existe donc $A > 0$ tel que $|t - a| \geqslant A$ et $|t - b| \geqslant A$ pour tout $t \in [-1, 1]$. Si $-1 < t < 1$, on a donc :

$$\frac{g(t)}{(t-a)^p (t-b)^q} \leqslant \frac{|g(t)|}{A^{p+q}}.$$

On a obtenu la convergence de $I(a, b)$. En particulier, l'intégrale définissant f est convergente.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Soient $a \in U$ et $\alpha > 0$ tels que $|t-a| \geqslant 2\alpha$ pour tout $t \in [0,1]$. Si $z \in U$ vérifie $|a-z| \leqslant \alpha$, on a $|z-t| \geqslant |a-t| - |a-z| \geqslant \alpha$. Pour un tel $z \in U$, on obtient alors :

$$\left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a} - \int_{-1}^{1} \frac{g(t)}{(t-a)^2}\,dt\right| = \left|(z-a)\int_{-1}^{1} \frac{g(t)}{(t-z)(t-a)^2}\,dt\right|$$
$$\leqslant \frac{|z-a|}{4\alpha^3}\int_{-1}^{1} |g(t)|\,dt.$$

Par suite, $f \in \mathcal{H}(U)$ et, si $z \in U$:

$$f'(z) = \int_{-1}^{1} \frac{g(t)}{(t-z)^2}\,dt.$$

Exercice 7.5. Fixons une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$ de manière à identifier $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. Notons $a_1, \ldots, a_n$ les affixes de $A_1, \ldots, A_n$ et z celle de M. Il vient :

$$f(z) = |(z-a_1)\cdots(z-a_n)|.$$

Le résultat est donc une conséquence immédiate de 7.2.5.

Exercice 7.6. C'est clair si $g = 0$ ou si $f = 0$. Supposons ces cas exclus. Soit a un zéro de g. D'après 4.3.5, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et une fonction entière g_1 tels que $g(z) = (z-a)^p g_1(z)$ et $g_1(a) \neq 0$. D'après les hypothèses, a est un zéro de f, et il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et une fonction entière f_1 vérifiant $f(z) = (z-a)^q f_1(z)$ et $f_1(a) = 0$. Comme $|f(z)| \leqslant |g(z)|$, en faisant tendre z vers a, on voit que $q \geqslant p$. Il en résulte que la fonction $z \to f(z)/g(z)$ se prolonge en une fonction entière h. D'après les hypothèses, on a $|h(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Le théorème de Liouville montre que h est constante. Il existe donc bien $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = \lambda g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 7.7.

1. Soit K un compact de D. Il existe $r \in]0,1[$ tel que $K \subset D'(0,r)$. Si $z \in K$, on a alors :

$$\left|a_n \frac{z^n}{1-z^n}\right| \leqslant |a_n| \frac{r^n}{1-r^n}\cdot$$

Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $2(1-r^n) \geqslant 1$ si $n \geqslant n$. Si $n \geqslant N$ et $z \in K$, on obtient donc :

$$\left|a_n \frac{z^n}{1-z^n}\right| \leqslant 2|a_n| r^n.$$

La série $\sum a_n$ étant convergente, il résulte du lemme d'Abel que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1. Par suite, la série $\sum |a_n| r^n$ converge si $0 \leqslant r < 1$. D'où le résultat.

2. Si $u \neq 1$, on a :

$$\frac{u}{1-u} = -1 + \frac{1}{1-u}\cdot$$

On en déduit que, si $|z| \geqslant R > 1$ et $p, q \in \mathbb{N}^*$, avec $p \leqslant q$, alors :

$$\Big|\sum_{n=p}^{q} a_n \frac{z^n}{1-z^n}\Big| \leqslant \Big|\sum_{n=p}^{q} a_n\Big| + \sum_{n=p}^{q} \frac{|a_n|}{R^n - 1}\cdot$$

Dans les mêmes conditions et, si p est assez grand, il vient donc :

$$\Big|\sum_{n=p}^{q} a_n \frac{z^n}{1-z^n}\Big| \leqslant \Big|\sum_{n=p}^{q} a_n\Big| + 2\sum_{n=p}^{q} \frac{|a_n|}{R^n}\cdot$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le critère de Cauchy, si p est assez grand :

$$\Big|\sum_{n=p}^{q} a_n\Big| \leqslant \varepsilon.$$

D'autre part, le même raisonnement qu'en 1 montre que, si p est assez grand, on a :

$$2\sum_{n=p}^{q} \frac{|a_n|}{R^n} \leqslant \varepsilon.$$

On déduit alors du critère de Cauchy uniforme que la série converge uniformément sur tout ensemble $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \geqslant R\}$, avec $R > 1$.

3. Envisageons le cas où $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\cdot$ Soient $R > 1$ et $K = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = R\}$. Alors :

$$\sup\Big\{\Big|a_n \frac{z^n}{1-z^n}\Big|\,;\, z \in K\Big\} = \frac{R^n}{n(R^n-1)}\cdot$$

Le dernier terme est équivalent à $\dfrac{1}{n}$ quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la série ne peut converger normalement sur tout compact de C.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 8

Fonctions méromorphes

8.1 UN POINT DE TOPOLOGIE

8.1.1. Si A est une partie de $\mathbb{C}$ on note $\overset{\circ}{A}$ son intérieur, et on dit que A est *relativement compacte* si son adhérence est compacte.

Proposition. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Il existe une suite $(K_n)_n$ de compacts de $\mathbb{C}$ vérifiant les conditions suivantes :*
(i) *U est la réunion des K_n et $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
(ii) *Tout compact de U est contenu dans un K_n.*

Démonstration. Posons $K_0 = \emptyset$ et, si $n \geqslant 1$:

$$V_n = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| > n\} \cup \bigcup_{a \in \mathbb{C}\setminus U} D\Big(a, \frac{1}{n}\Big)\ ,\ K_n = \mathbb{C}\setminus V_n.$$

Alors K_n est une partie fermée et bornée de $\mathbb{C}$, donc compacte. Il est immédiat que U est la réunion des K_n. Si $z \in K_n$, $n \geqslant 1$, on vérifie aisément que $D\Big(z, \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\Big) \subset K_{n+1}$. D'où (i).

L'ouvert U est la réunion des $\overset{\circ}{K}_n$. Si K est un compact de U, il existe un entier p tel que $K \subset \overset{\circ}{K}_1 \cup \cdots \cup \overset{\circ}{K}_p$. On a donc $K \subset K_p$. □

Corollaire 8.1.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et A une partie localement finie de U. Alors A est au plus dénombrable.*

Démonstration. C'est immédiat d'après 4.3.2 et 8.1.1. □

8.2 SINGULARITÉS ISOLÉES

8.2.1. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. On note

$$D^*(a,r) = D(a,r)\backslash\{a\} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, 0 < [z-a| < r\},$$

et on dit que $D^*(a,r)$ est le *disque épointé* de centre a et de rayon r.

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et $f \in \mathcal{H}(U\backslash\{a\})$. On dit alors que f a une *singularité isolée* en a.

Si f se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de a (le prolongement est alors unique d'après le principe du prolongement analytique), on dit que la singularité de f en a est *illusoire*, ou *apparente*, ou que a est une *fausse singularité*, ou encore que a est un *point régulier* de f.

Proposition 8.2.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et $f \in \mathcal{H}(U\backslash\{a\})$. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que f soit bornée sur $U \cap D^*(a,r)$. Alors a est un point régulier de f.*

Démonstration. Définissons une fonction g sur U par :

$$g(a) = 0\ ,\ g(z) = (z-a)f(z) \text{ si } z \neq a.$$

Il est immédiat que g est continue sur U et holomorphe sur $U\backslash\{a\}$. D'après 6.5.5, on a $g \in \mathcal{H}(U)$. Si $r > 0$ est assez petit, on a $D(a,r) \subset U$ et g admet un développement

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n$$

pour $|z-a| < r$. On a $\alpha_0 = 0$ puisque $g(0) = 0$. Par suite

$$z \to \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^{n-1}$$

prolonge f au voisinage de a. □

Théorème 8.2.3. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et $f \in \mathcal{H}(U\backslash\{a\})$. Alors f vérifie une et une seule des propriétés suivantes :*

(i) *f a une singularité illusoire en a.*

(ii) *Il existe une unique suite finie de nombres complexes $(a_{-1}, a_{-2}, \ldots, a_{-m})$, avec $m \geqslant 1$ et $a_{-m} \neq 0$, telle que la fonction*

$$z \to f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$$

ait une singularité illusoire en a. On dit alors que a est un pôle d'ordre m, *ou de* multiplicité m, *de f et que le polynôme*

$$\sum_{k=1}^{m} a_{-k}(z-a)^{-k}$$

en $(z-a)^{-1}$ est la partie principale *de f en a.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

(iii) *Pour tout* $r > 0$ *tel que* $D(a, r) \subset U$*, l'ensemble* $f[D^*(a, r)]$ *est dense dans* $\mathbb{C}$. *On dit alors que* f *a une* singularité essentielle *en* a.

Démonstration. Supposons (iii) non réalisé. Il existe $b \in \mathbb{C}$ et $r, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tels que $D(a, r) \subset U$ et $f[D^*(a, r)] \cap D(b, \varepsilon) = \emptyset$, c'est-à-dire $|f(z) - b| \geqslant \varepsilon$ pour tout $z \in D^*(a, r)$.

La fonction $z \to \dfrac{1}{f(z) - b}$ est holomorphe dans $D^*(a, r)$ et est majorée en module par $1/\varepsilon$. D'après 8.2.2, elle se prolonge en $g \in \mathcal{H}\big(D(a, r)\big)$.

• Si $g(a) \neq 0$, $f(z) = b + \dfrac{1}{g(z)}$ a une fausse singularité en a, et (i) est vérifié.

• Supposons $g(a) = 0$, et notons m la multiplicité du zéro a de g. D'après 4.3.5, il existe $h \in \mathcal{H}\big(D(a, r)\big)$ vérifiant $h(a) \neq 0$ et

$$g(z) = (z - a)^m h(z) \tag{1}$$

si $z \in D(a, r)$. D'après (1), on peut supposer r assez petit pour que $h(z) \neq 0$ si $z \in D(a, r)$. Alors $\ell = \dfrac{1}{h} \in \mathcal{H}\big(D(a, r)\big)$. D'autre part, $\ell(a) \neq 0$ et, dans $D^*(a, r)$:

$$f(z) - b = \frac{\ell(z)}{(z - a)^m}.$$

Ecrivant

$$\ell(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - a)^n,$$

on obtient :

$$f(z) = b + \frac{\alpha_0}{(z - a)^m} + \cdots + \frac{\alpha_{m-1}}{z - a} + \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n (z - a)^{n-m}.$$

La condition (ii) est vérifiée avec $(a_1, \ldots, a_{-m}) = (\alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_0)$. L'unicité de la suite des a_i est immédiate en utilisant le principe du prolongement analytique. □

> ***Remarque.*** Avec les notations de 8.2.3, (ii), si $m = 1$ (respectivement $m = 2$), on dit que a est un pôle *simple* (respectivement *double*) de f.

8.2.4. On prouve sans difficulté le résultat suivant :

Proposition. *Avec les notations de* 8.2.3*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *a un pôle d'ordre* m *en* a.

(ii) *Il existe* $r > 0$ *tel que* $D(a, r) \subset U$ *et* $g \in \mathcal{H}\big(D(a, r)\big)$ *vérifiant* $g(a) \neq 0$ *et*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^m}$$

pour tout $z \in D^*(a, r)$.

8.2.5. Donnons un exemple de fonction vérifiant la condition (iii) de 8.2.3. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ définie par $f(z) = e^{1/z}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $z \to z^p f(z)$ n'est bornée dans aucun disque épointé $D^*(0,r)$, car

$$\lim_{n\to+\infty} n^p f\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty.$$

Les conditions (i) et (ii) de 8.2.3 n'étant pas vérifiées, la condition (iii) l'est.

8.3 FONCTIONS MÉROMORPHES

Définition 8.3.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction f sur U est dite* méromorphe *dans U s'il existe une partie localement finie A de U telle $f \in \mathcal{H}(U\backslash A)$ et telle que tout point de A soit un pôle de f. On note $\mathcal{M}(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes dans U.*

8.3.2. Soient U un ouvert *connexe* de $\mathbb{C}$ et $g, h \in \mathcal{H}(U)\backslash\{0\}$. D'après le principe des zéros isolés (4.3.3), l'ensemble A des zéros de h est une partie localement finie de U. Notons $f = \dfrac{g}{h} \in \mathcal{H}(U\backslash A)$. Soient $a \in A$ et m la multiplicité du zéro a de h. Au voisinage de a, on a

$$h(z) = (z-a)^m h_1(z),$$

avec $h_1 \in \mathcal{H}(U)$ et $h_1(a) \neq 0$ (4.3.5).

• Si $g(a) \neq 0$, a est un pôle d'ordre m de f.

• Supposons $g(a) = 0$ comme $g \neq 0$, on peut écrire $g(z) = (z-a)^p g_1(z)$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, $g \in \mathcal{H}(U)$, et $g_1(a) \neq 0$ (4.3.5). Ainsi,

$$f(z) = (z-a)^{p-m} f_1(z),$$

où $f_1 \in \mathcal{H}(U)$. Par suite :

▷ Si $p \geqslant m$, f a une singularité illusoire en a.

▷ Si $p < m$, a est un pôle d'ordre $m - p$ de f.

On a prouvé que $f \in \mathcal{M}(U)$.

> ***Remarque.*** Nous montrerons plus tard que, si U est un ouvert connexe, toute fonction $f \in \mathcal{M}(U)$ s'écrit $f = g/h$, avec $g, h \in \mathcal{H}(U)$ et $h \neq 0$.

8.3.3. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. La réunion de deux parties localement finies de U l'étant aussi, il est immédiat l'on peut définir la somme et le quotient de deux fonctions méromorphes dans U, et que $\mathcal{M}(U)$ a une structure naturelle de $\mathbb{C}$-algèbre associative unitaire.

Proposition 8.3.4. *Si l'ouvert U est* connexe*, l'ensemble $\mathcal{M}(U)$ est un corps.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{M}(U)\backslash\{0\}$ et A l'ensemble de ses pôles. Il est facile de vérifier que l'ensemble Z des zéros de f est une partie localement finie de U (car U est connexe). Par suite, $A \cup Z$ est une partie localement finie de U et $g = \dfrac{1}{f} \in \mathcal{H}(U\backslash(A \cup Z))$. Il est immédiat que, si a est zéro d'ordre m de f, alors a est pôle d'ordre m de g. De même, il résulte de 8.2.4 que, si a est pôle de f, alors a est une singularité illusoire de g. Ainsi, $g \in \mathcal{M}(U)$. □

Proposition 8.3.5. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{M}(U)$. Alors :*

(i) *On a $f' \in \mathcal{M}(U)$. En outre f et f' ont mêmes pôles. Si a est un pôle d'ordre m de f, c'est un pôle d'ordre $m+1$ de f'.*

(ii) *Supposons U connexe et $f \neq 0$. Si $g = f'/f$, on a $g \in \mathcal{M}(U)$, et tous les pôles de g sont simples.*

Démonstration. C'est immédiat en utilisant 8.2.4. □

8.4 THÉORÈME DES RÉSIDUS

8.4.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{M}(U)$, et $a \in U$ un pôle d'ordre m de f. La partie principale de f en a est :

$$P(z) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{-k}(z-a)^{-k}.$$

On dit que α_{-1} est le *résidu* de f en a, et on note $\alpha_{-1} = \mathrm{Res}(f, a)$.

Lemme. *Si γ est un chemin fermé dans U tel que $a \notin \mathrm{im}\,\gamma$, on a :*

$$\int_\gamma P(z)\,dz = \mathrm{ind}_\gamma(a)\,\mathrm{Res}(f, a).$$

Démonstration. D'après 6.4.2, il vient :

$$\int_\gamma P(z)\,dz = \int_\gamma a_{-1}\frac{dz}{z-a} = a_{-1}\,\mathrm{ind}_\gamma(a).$$

D'où l'assertion. □

8.4.2. Indiquons comment on calcule pratiquement des résidus. Soient $f \in \mathcal{M}(U)$ et a un pôle d'ordre m de f. Au voisinage de a on peut écrire

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

où g, h sont holomorphes et $h(z) = (z-a)^m h_1(z)$, avec $h_1(a) \neq 0$.

• Si $m = 1$ (pôle simple), il vient

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)h_1(z)} = \frac{\alpha_{-1}}{z-a} + \ell(z).$$

D'où :

$$\text{Res}(f,a) = \alpha_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\frac{g(z)}{h_1(z)} = \frac{g(a)}{h_1(a)}\cdot$$

De $h(z) = (z-a)h_1(a)$, on déduit $h_1(a) = h'(a)$. Ainsi :

$$\text{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}\cdot$$

• Si $m > 1$, le résidu se calcule en faisant un développement limité de $(z-a)^m f(z)$ à l'ordre $m-1$ au voisinage de a, ou en utilisant la formule de Taylor qui donne :

$$\text{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}\frac{1}{(m-1)!}[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

Théorème 8.4.3. (Théorème des résidus). *Soient U un ouvert* convexe *de $\mathbb{C}$, $a_1,\dots,a_n$ des points deux à deux distincts de U et $f \in \mathcal{H}(U\backslash\{a_1,\dots,a_n\})$. On suppose que chaque a_k est un pôle de f. Si γ est un chemin fermé dans U dont l'image ne contient aucun des a_k, on a :*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi\sum_{k=1}^n \text{ind}_\gamma(a_k)\,\text{Res}(f,a_k).$$

Démonstration. Notons P_k la partie principale de f en a_k, $1 \leqslant k \leqslant n$. La fonction $f - P_1 - \cdots - P_n$ a une fausse singularité en chaque a_k. Elle se prolonge donc en une fonction holomorphe dans U. D'après 6.4.6, il vient :

$$\int_\gamma [f(z) - P_1(z) - \cdots - P_n(z)]\,dz = 0.$$

On a alors le résultat d'après 8.4.1. □

8.4.4. Le théorème des résidus permet le calcul de certaines intégrales. Donnons un exemple. Considérons une intégrale du type

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,dt,$$

où $R(X,Y)$ est une fraction rationnelle sans pôle sur le cercle d'équation $x^2+y^2 = 1$. Si l'on note γ le cercle $C(0,1)$ parcouru dans le sens direct, et si l'on pose $z = e^{it}$, il vient :

$$I = \int_\gamma \frac{1}{iz}R\Big[\frac{1}{2i}\Big(z-\frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big)\Big]\,dz.$$

Par suite

$$I = 2\pi\sum\text{Res}\,\Big(R\Big[\frac{1}{2i}\Big(z-\frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big)\Big]\Big),$$

la somme portant sur les pôles appartenant à $D(0,1)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Soit a un réel vérifiant $a > 1$. En prenant $R(X,Y) = \dfrac{1}{a+Y}$, calculons

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t}\cdot$$

Il vient :

$$I = \frac{2}{i}\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}\cdot$$

Le seul pôle contenu dans $C(0,1)$ est $-a + \sqrt{a^2-1}$. C'est un pôle simple. Compte tenu de ce qui précède et de 8.4.2, on obtient :

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\cdot$$

8.5 THÉORÈME DE L'INDICE

Théorème 8.5.1. **(Théorème de l'indice).** *Soient U un ouvert* convexe *de $\mathbb{C}$, $g \in \mathcal{H}(U)$, et $f \in \mathcal{M}(U)$. On suppose que f n'a qu'un nombre fini de zéros $a_1, \ldots, a_m$ dans U (comptés avec leur multiplicité), et qu'un nombre fini de pôles $b_1, \ldots, b_n$ dans U (comptés aussi avec leur multiplicité). Soit γ un chemin dans U ne contenant aucun des a_k et aucun des b_j. Alors :*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^m g(a_k)\,\mathrm{ind}_\gamma(a_k) - \sum_{j=1}^n g(b_j)\,\mathrm{ind}_\gamma(b_j).$$

En particulier :

$$\mathrm{ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^m \mathrm{ind}_\gamma(a_k) - \sum_{j=1}^n \mathrm{ind}_\gamma(b_j).$$

Démonstration. Soit $a \in U$ un zéro d'ordre k de f. Il existe une fonction h holomorphe au voisinage de a telle que $f(z) = (z-a)^k h(z)$, avec $h(a) \neq 0$. Il vient

$$g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = g(z)\frac{k}{z-a} + g(z)\frac{h'(z)}{h(z)}\cdot$$

Comme $h(a) \neq 0$, $g\dfrac{f'}{f}$ est holomorphe au voisinage de a. Par suite :

• Si $g(a) = 0$, $\ell = g\dfrac{f'}{f}$ a une singularité illusoire en a.

• Si $g(a) \neq 0$, a est pôle simple de ℓ (8.3.4), la partie principale de ℓ en a est $\dfrac{k}{z-a}$, et $\mathrm{Res}(\ell, a) = kg(a)$.

De même, si a est un pôle d'ordre k de f, on a $f(z) = (z-a)^{-k}h(z)$ au voisinage de a, et on trouve que ℓ a un pôle simple en a, avec $\mathrm{Res}(\ell, a) = -kg(a)$.

Le théorème est donc conséquence de 8.4.3 puisque les zéros et les pôles de f ont été comptés avec leur multiplicité. □

Remarque. Dans 8.5.1, l'hypothèse de finitude de l'ensemble des zéros et de l'ensemble des pôles est peu importante. Si elle n'est pas vérifiée, on peut s'y ramener. En effet, il existe un ouvert relativement compact V tel que $\operatorname{im}\gamma \subset V \subset \overline{V} \subset U$. De plus, on a $\operatorname{ind}_\gamma(a) = 0$ si $a \notin V$, car $\operatorname{ind}_\gamma(a) = 0$ si a appartient à la composante non bornée de $\mathbb{C}\setminus \operatorname{im}\gamma$ (6.3.2), donc $\operatorname{ind}_\gamma(a) = 0$ si $a \notin V$. Dans les sommes de 8.5.1, on peut donc se limiter à sommer sur l'ensemble des zéros et des pôles contenus dans un convexe compact contenant $\operatorname{im}\gamma$.

Corollaire 8.5.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{M}(U)$. Soit γ un cercle $D(a,r)$ parcouru dans le sens direct tel que $D'(a,r) \subset U$. On suppose que les zéros et les pôles de f n'appartiennent pas à $\operatorname{im}\gamma$. Alors*

$$\operatorname{ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = n_Z - n_P,$$

où n_Z (respectivement n_P) est le nombre de zéros (respectivement de pôles) de f contenus dans $D(a,r)$, et comptés avec leur multiplicité.

Démonstration. D'après 6.2.2 et 6.3.2, $\operatorname{ind}_{f\circ\gamma}(0)$ est égal à :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(f\circ\gamma)'(t)}{f\circ\gamma(t)}\,dt = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f[\gamma(t)]\gamma'(t)}{f[\gamma(t)]}\,dt = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

D'où le résultat, compte tenu de 8.5.1. □

8.5.3. Le théorème de l'indice nous permet d'améliorer le résultat de 7.4.2.

Théorème. *Soient U un ouvert* connexe *de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}(U)$ convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction f.*

(i) *Si les f_n n'ont aucun zéro dans U et si f n'est pas nulle, alors f n'a aucun zéro dans U.*

(ii) *Si les f_n sont injectives et si f n'est pas constante, alors f est injective.*

Démonstration. D'après 7.4.2, on a $f \in \mathcal{H}(U)$.

(i) Supposons que $a \in U$ soit un zéro de f. D'après le principe des zéros isolés, il existe $r > 0$ tel que $D'(a,r) \subset U$ et $f(z) \neq 0$ si $|z-a| = r$. Soit γ le cercle $C(a,r)$ parcouru dans le sens direct. D'après le théorème de l'indice, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = k \quad\text{et}\quad \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,dz = 0$$

puisque f_n est sans zéro dans U.

Comme $f(z) \neq 0$ si $z \in \operatorname{im}\gamma$, il existe $A > 0$ tel que $A \leqslant |f(z)|$ pour tout $z \in \operatorname{im}\gamma$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

D'autre part, la suite $(f'_n)_n$ converge uniformément vers f' sur $\operatorname{im}\gamma$ (4.7.2). On voit alors facilement que la suite $(f'_n/f_n)_n$ converge uniformément vers f'/f sur $\operatorname{im}\gamma$. Par conséquent :

$$0 < k = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \lim_n \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'_n(z)}{f_n(z)}\,dz = 0.$$

Contradiction.

(ii) Supposons qu'il existe des points distincts a, b de U tels que $f(a) = f(b)$. Soit D_a et D_b des disques ouverts de centres respectifs a et b, contenus dans U, et disjoints. Comme $f - f(a)$ n'est pas nulle, il résulte de (i) qu'il existe une suite extraite $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ telle que $f_{n_k} - f(a)$ ait un zéro dans D_a pour tout k. Remplaçant la suite initiale par cette suite extraite, on peut supposer que $f_n - f(a)$ a un zéro dans D_a pour tout n.

On voit de même qu'il existe une suite extraite $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ telle que $f_{n_k} - f(a)$ ait un zéro dans D_b pour tout k. Comme $D_a \cap D_b = \emptyset$, les fonctions f_{nk} ne sont pas injectives. Contradiction. □

8.6 THÉORÈME DE ROUCHÉ

Lemme 8.6.1. *Soient* $([x,y],\gamma)$ *et* $([x,y],\delta)$ *deux chemins fermés dans un ouvert* U *de* $\mathbb{C}$ *vérifiant* $|\gamma(t) - \delta(t)| < |\gamma(t)|$ *pour tout* $t \in [x,y]$. *Alors :*

$$\operatorname{ind}_\gamma(0) = \operatorname{ind}_\delta(0).$$

Démonstration. Remarquons que la condition $|\gamma(t) - \delta(t)| < |\gamma(t)|$ pour tout $t \in [x,y]$ implique $0 \notin (\operatorname{im}\gamma) \cup (\operatorname{im}\delta)$. Les indices sont donc bien définis.

Posons $\varphi = \delta/\gamma$. Il vient :

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\delta'}{\delta} - \frac{\gamma'}{\gamma}. \tag{2}$$

L'hypothèse implique $|1 - \varphi(t)| < 1$ pour tout $t \in [x,y]$, donc $\operatorname{im}\varphi \subset D(1,1)$. Il en résulte que 0 appartient à la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\setminus \operatorname{im}\varphi$. D'après 6.3.2, $\operatorname{ind}_\varphi(0) = 0$. On déduit alors de (2) :

$$\begin{aligned} 0 = 2i\pi \operatorname{ind}_\varphi(0) &= \int_x^y \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \int_x^y \frac{\delta'(t)}{\delta(t)}\,dt - \int_x^y \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt \\ &= 2i\pi[\operatorname{ind}_\delta(0) - \operatorname{ind}_\gamma(0)]. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Théorème 8.6.2. (Théorème de Rouché). *Soient* U *un ouvert* convexe *de* $\mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{H}(U)$, *et* $([x,y],\gamma)$ *un chemin fermé dans* U. *On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

(i) *f (respectivement g) n'a qu'un nombre fini $a_1, \ldots, a_m$ (respectivement $b_1, \ldots, b_n$) de zéros dans U, comptés avec leur multiplicité.*

(ii) *Pour tout $z \in \operatorname{im}\gamma$, on a $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$.*

Alors :
$$\sum_{k=1}^{m} \mathrm{ind}_\gamma(a_k) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{ind}_\gamma(b_j).$$

Démonstration. D'après l'hypothèse, aucun point de $\mathrm{im}\,\gamma$ n'est zéro de f ou de g. Compte tenu de 8.5.1, on a :
$$\mathrm{ind}_{f\circ\gamma}(0) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{ind}_\gamma(a_k)\ ,\ \mathrm{ind}_{g\circ\gamma}(0) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{ind}_\gamma(b_j).$$
Si $t \in [x, y]$, on a $|f\circ\gamma(t) - g\circ(t)| < |f\circ\gamma(t)|$. D'où $\mathrm{ind}_{f\circ\gamma}(0) = \mathrm{ind}_{g\circ\gamma}(0)$ (8.6.1), et le résultat. □

Corollaire 8.6.3. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $r > 0$ tels que $D'(a, r) \subset U$. Soient $f, g \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ pour tout $z \in C(a, r)$. Alors f et g ont même nombre de zéros (comptés avec leur multiplicité) dans $D(a, r)$.*

Corollaire 8.6.4. *Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage de $D'(0, 1)$ et telle que $|f(z)| < 1$ si $|z| = 1$. Alors l'équation $f(z) = z^n$ a exactement n solutions (comptées avec leur multiplicité) dans $D(0, 1)$.*

Démonstration. Si $|z| = 1$, on a :
$$\left|z^n - \big(z^n - f(z)\big)\right| < |z|^n.$$
Comme l'équation $z^n = 0$ a n solutions dans $D(0, 1)$, on a le résultat (8.6.3). □

8.7 INVERSION LOCALE

Théorème 8.7.1. (Théorème de l'application ouverte). *Soit f une fonction holomorphe dans un disque $D(a, r)$ et non constante. On note k la multiplicité du zéro a de l'équation $f(z) - f(a) = 0$. Il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert $W = f(V)$ de $f(a)$ tels que, pour tout $\zeta \in W\backslash\{f(a)\}$, il existe k points distincts $z_1, \ldots, z_k \in V$ vérifiant $f(z_j) = \zeta$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$.*

Démonstration. Les zéros de f' et de $f - f(a)$ étant isolés, il existe $\rho \in]0, r[$ tel que $D'(a, \rho) \subset D(a, r)$ et $f'(z) \neq 0$, $f(z) \neq f(a)$ pour tout $z \in D'(a, \rho)\backslash\{a\}$. Notons γ le cercle $C(a, \rho)$ parcouru dans le sens direct. D'après 8.5.2, il vient :
$$k = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - f(a)}\, dz = \mathrm{ind}_{f\circ\gamma}\big(f(a)\big).$$
Soit W la composante connexe de $\mathbb{C}\backslash \mathrm{im}(f\circ\gamma)$ contenant $f(a)$. Elle est ouverte car $\mathrm{im}(f\circ\gamma)$ est un compact de $\mathbb{C}$, et que les composantes connexes d'un ouvert de $\mathbb{C}$ sont des ouverts. Posons $V = D(a, \rho) \cap f^{-1}(W)$. C'est un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $f(V) \subset W$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

L'application $\zeta \to \operatorname{ind}_{f\circ\gamma}(\zeta)$ est constante sur W (6.3.2). Par suite, $\operatorname{ind}_{f\circ\gamma}(\zeta) = k$ pour tout $\zeta \in W$. D'après 8.5.2, si $\zeta \in W$, l'équation $f(z) - \zeta = 0$ possède donc k solutions dans $D(a, \rho)$. Par conséquent, $f(V) = W$.

Soient $\zeta \in W \backslash \{f(a)\}$ et $b \in D^*(a, \rho)$ vérifiant $f(b) = \zeta$. Il existe un voisinage de b dans $D(a, \rho)$ tel que, dans ce voisinage, on ait un développement

$$f(z) - \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (z - b)^n.$$

On a $\alpha_1 = f'(b)$. Comme $f'(b) \neq 0$ d'après le choix de ρ, on voit que b est un zéro simple de $f - \zeta$. Ainsi, les k zéros de $f - \zeta$ dans $D(a, \rho)$ sont distincts. □

Corollaire 8.7.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$.*

(i) *Si U est connexe et f non constante, f est une application ouverte.*

(ii) *Si f est injective, on a $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$.*

Théorème 8.7.3. (Théorème d'inversion locale). *Soient U un ouvert* connexe *de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$, $a \in U$, et $w = f(a)$. Si $f'(a) \neq 0$, il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de w tels que f soit un isomorphisme analytique de V sur W.*

Démonstration. L'existence de V, W et le fait que f soit une bijection de V sur W résultent de 8.7.1. Notons $g\colon W \to V$ l'application réciproque de f. Comme f est ouverte, g est continue, et f' ne s'annule pas dans V (8.7.2).

Soit $w_0 \in W$. Si $\zeta \in W$, on a :

$$\frac{g(\zeta) - g(w_0)}{\zeta - w_0} = \frac{g(\zeta) - g(w_0)}{f[g(\zeta)] - f[g(w_0)]}.$$

La continuité de g au point w_0 montre alors que

$$\lim_{\zeta \to w_0} \frac{g(\zeta) - g(w_0)}{\zeta - w_0} = \frac{1}{f'[g(w_0)]}.$$

Par suite, g est dérivable en w_0. Ainsi, $g \in \mathcal{H}(W)$. □

Corollaire 8.7.4. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Si f est injective, c'est un isomorphisme analytique de U sur $f(U)$.*

Remarque. Le résultat de 8.7.4 permet d'affaiblir les conditions de 7.3.2

8.7.5. Avec les hypothèses et notations de 8.7.3, soient $r > 0$ tel que $D'(a, r) \subset V$ et γ le cercle $C(a, r)$ parcouru dans le sens direct. D'après 8.5.1, pour $\zeta \in W$, la solution $\xi = g(\zeta)$ dans V de l'équation $f(\xi) = \zeta$ est donnée par :

$$g(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{z f'(z)}{f(z) - \zeta}\, dz. \tag{3}$$

Plus généralement, toujours d'après 8.5.1, si $h \in \mathcal{H}(U)$, on a :

$$h\big(g(\zeta)\big) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{h(z)f'(z)}{f(z)-\zeta}\,dz.$$

La formule (3) est parfois appelée la *formule d'inversion locale*.

8.8 SÉRIES DE FONCTIONS MÉROMORPHES

8.8.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions méromorphes sur U. Notons P_n l'ensemble des pôles de f_n. C'est une partie localement finie de U. Soit P la réunion des P_n pour $n \in \mathbb{N}$. En général, P n'est *pas* une partie localement finie de U. Il convient donc de prendre quelques précautions si l'on veut définir une notion de série $\sum f_n$ et si l'on veut que la somme de cette série soit une fonction méromorphe sur U.

Définition 8.8.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, K une partie de U, et $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}(U)$. On dit que la série $\sum f_n$* converge uniformément *(respectivement* converge normalement*) sur K s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :*

(i) *Pour $n \geqslant N$, f_n n'a aucun pôle appartenant à K.*

(ii) *La série $\sum_{n \geqslant N} f_n$ converge uniformément (respectivement normalement) sur K.*

La série $\sum f_n$ est dite uniformément convergente sur tout compact *(respectivement* normalement convergente sur tout compact*) de U si, pour tout compact K de U, elle converge uniformément (respectivement normalement) sur K.*

8.8.3. Supposons que la série $\sum f_n$ converge uniformément (respectivement normalement) sur tout compact de U, et soit f la fonction somme de cette série.

Soit V un ouvert relativement compact tel que $\overline{V} \subset U$. Il existe un entier N tel que f_n n'ait aucun pôle dans V pour $n \geqslant N$. D'autre part :

$$f = \sum_{n=0}^{N} f_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n.$$

La fonction $\sum_{n \geqslant N} f_n$ est holomorphe dans V (7.4.2). Comme U est localement compact, on en déduit que $f \in \mathcal{M}(U)$.

Si P_n (respectivement P) est l'ensemble des pôles de f_n (respectivement f), il est immédiat que P est contenu dans la réunion Q des P_n, mais il peut en être distinct. Si les P_n sont deux à deux disjoints, on vérifie facilement que $P = Q$.

8.8.4. On déduit aisément de 7.4.3 le résultat suivant :

Théorème. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions méromorphes sur U convergeant uniformément (respectivement normalement) sur tout compact de U.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Alors la série $\sum f'_n$ de fonctions méromorphes sur U converge uniformément (respectivement normalement) sur U et :

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n.$$

8.8.5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes indexée par l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers. Par abus de langage, on dira que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n$ est convergente si les séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} a_{-n}$ sont convergentes. On pose alors :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}.$$

On prolonge à ce contexte, de manière évidente, les notions déjà rencontrées pour les séries usuelles (par exemple, la notion de série *absolument convergente*).

Le fait que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n$ converge signifie que

$$\sum_{n=-p}^{n=q} a_n$$

a une limite quand p et q tendent vers $+\infty$. On prendra garde au fait que ce n'est *pas* équivalent à dire que

$$\sum_{n=-p}^{n=p} a_n$$

a une limite quand p tend vers $+\infty$ (prendre par exemple $a_n = 1$ si $n \geqslant 0$ et $a_n = -1$ si $n < 0$).

On étend ce qui précède au cas de séries de fonctions $\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n$ sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Par exemple, on dit que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur tout compact de U si les séries $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} f_{-n}$ convergent uniformément sur tout compact de U. Les résultats obtenus précédemment sont encore vrais dans ce cadre.

8.8.6. Si $n \in \mathbb{Z}$ et $z \neq n$, on pose :

$$f_n(z) = \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Alors $f_n \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, et n est l'unique pôle de f_n.

Soient $r > 0$ et $B_r = \{z \in \mathbb{C}\,;\, -r \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant r\}$. Si $|n| > r$, f_n n'a pas de pôle dans B_r et, si $z = x + iy \in B_r$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, il vient :

$$|f_n(z)| = \frac{1}{(x-n)^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{(x-n)^2} \leqslant \frac{1}{(|n|-r)^2}.$$

On déduit de ceci que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n$ est normalement convergente dans B_r. En particulier, elle est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$. Il résulte de 8.8.4 que sa somme

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et que ses pôles sont les entiers. En outre, l'application $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \to n+1$ étant une bijection, on voit facilement que $f(z+1) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, posons :

$$g(z) = \Big(\frac{\pi}{\sin \pi z}\Big)^2.$$

On va prouver que $f = g$.

Remarquons que f et g ont pour partie principale $\dfrac{1}{z^2}$ en 0. Il en résulte que 0 est une singularité illusoire de $f - g$. Les fonctions f et g admettant 1 pour période, on voit que tout point de $\mathbb{Z}$ est une singularité illusoire de $f - g$. Par suite, $f - g$ se prolonge en une fonction entière. On va montrer que $f - g$ est bornée sur $\mathbb{C}$. On aura donc le résultat d'après le théorème de Liouville (7.1.2).

On va prouver que $f - g$ est bornée dans $B = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |\operatorname{Re}(z)| \leqslant 1\}$. Cela suffira puisque $f - g$ est périodique, de période 1.

Tout d'abord, $f - g$ étant continue est bornée dans tout rectangle de la forme $B_\rho = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |\operatorname{Re}(z)| \leqslant 1, |\operatorname{Im}(z)| \leqslant \rho\}$.

Ecrivons $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. De $|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \pi x + \operatorname{sh}^2 \pi y$, on déduit que, si $|y| \geqslant \rho > 0$:

$$|g(z)| \leqslant \frac{\pi^2}{\operatorname{sh}^2 \pi y} \leqslant \frac{\pi^2}{\operatorname{sh}^2 \pi \rho}.$$

D'autre part, si $z \in B\backslash B_\rho$, il vient :

$$|f_0(z)| \leqslant \frac{1}{y^2} \leqslant \frac{1}{\rho^2}\ ,\ |f_n(z)| \leqslant \frac{1}{(|n|-1)^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{(|n|-1)^2 + \rho^2} \ \text{ si } \ |n| \geqslant 1.$$

On a donc obtenu le résultat. Par suite :

Proposition. *Si $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, on a :*

$$\Big(\frac{\pi}{\sin \pi z}\Big)^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

8.8.7. Posons

$$f_0(z) = \frac{1}{z} \ \text{ si } \ z \neq 0 \text{ et } \ f_n(z) = \frac{1}{z-n} - \frac{1}{n} \ \text{ si } \ n \in \mathbb{Z}^* \ \text{ et } \ z \neq n.$$

On vérifie facilement que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n$ est normalement convergente dans toute bande $B_\rho = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |\operatorname{Re}(z)| \leqslant \rho\}$. Notons h la somme de cette série. D'après 8.8.4 et 8.8.6, si $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, il vient :

$$h'(z) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = -\Big(\frac{\pi}{\sin \pi z}\Big)^2 = (\pi \operatorname{cotan} \pi z)'.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

La connexité de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ implique alors qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $h(z) = \pi \operatorname{cotan} \pi z$ pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ (5.2.6).

Or, si $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$:

$$h(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Ainsi, h est impaire, et $c = 0$. On a obtenu :

Proposition. *Si $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, on a :*

$$\pi \operatorname{cotan} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

EXERCICES

Exercice 8.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et $f \in \mathcal{H}(U\backslash\{a\})$.

1. Prouver que a est pôle de f si et seulement si $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers a.

2. Montrer que f a une singularité essentielle en a si et seulement s'il existe une suite $(z_n)_n$ de points de U, de limite a et telle que $\big(f(z_n)\big)_n$ n'ait pas de limite (finie ou non).

Exercice 8.2. Soit f une fonction entière. On définit une fonction $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ en posant $g(z) = f(z^{-1})$. Prouver que f n'est pas un polynôme si et seulement si g a une singularité essentielle en 0.

Exercice 8.3. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, A une partie localement finie de U et $f \in \mathcal{H}(U\backslash A)$ une application injective.

1. Montrer que, si $a \in A$, f n'a pas de singularité essentielle en a.

2. Si $a \in A$ est pôle de f, son ordre est égal à 1.

3. Si tout point de A est une singularité illusoire de f, le prolongement holomorphe de f à U est une injection.

Exercice 8.4. Pour traiter cet exercice, on utilisera les résultats des exercices précédents.

Montrer que les applications holomorphes injectives de $\mathbb{C}$ dans lui-mêmes sont celles de la forme $z \to az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. En déduire $\operatorname{Aut}(\mathbb{C})$.

Exercice 8.5. Déterminer toutes les applications holomorphes injectives de $\mathbb{C}^*$ dans lui-même. En déduire $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*)$.

Exercice 8.6. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes non nuls deux à deux distincts telle que la série $\sum|a_n|$ converge. On pose :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z - a_n}.$$

Prouver que la série définissant f converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}^*$ et que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$. Déterminer les pôles de f et les résidus correspondants.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 8.1. C'est immédiat d'après les critères de 8.2.3.

Exercice 8.2. Il est clair que si f est un polynôme, g n'a pas de singularité essentielle en 0.

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ le développement en série entière de f à l'origine. Supposons que 0 ne soit pas une singularité essentielle de g. Pour tout $p \geqslant 0$ assez grand,

$$z^p g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{p-n}$$

se prolonge en une fonction entière. Si l'on note γ le cercle $C(0,1)$ parcouru dans le sens direct, pour de tels n, les formules de Cauchy fournissent :

$$0 = \int_\gamma z^n g(z)\,dz = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \int_\gamma z^{n-p}\,dz = 2\pi i a_{n+1}.$$

Ceci prouve que f est un polynôme de degré au plus n.

Exercice 8.3.

1. Soit $a \in A$. Il existe un disque ouvert D vérifiant :

$$D \subset U\ ,\ D \cap A = \{a\}\ ,\ V = D \backslash (A \cup \overline{D}) \neq \emptyset.$$

Comme f est injective, il résulte de 8.7.2 que $f(V)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Utilisant à nouveau l'injectivité de f, on a $f(D\backslash\{a\}) \cap f(V) = \emptyset$. Il en résulte que $f(D\backslash\{a\})$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$. D'après 8.2.3, f n'a pas de singularité essentielle en a.

2. Soit $a \in A$ un pôle de f d'ordre $m \geqslant 1$. Il existe une boule ouverte D de centre a, contenue dans U, vérifiant $D \cap A = \{a\}$, et telle que $g = (1/f)|D$ soit holomorphe

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

dans D, avec un zéro d'ordre m en a. Comme f est injective, il en est de même de g. Par suite, $g'(a) \neq 0$ (8.7.2). D'où $m = 1$.

3. Les hypothèses de 3 étant vérifiées, notons $g\colon U \to \mathbb{C}$ le prolongement holomorphe de f. Supposons qu'il existe $a, b \in A$ tels que $a \neq b$ et $c = g(a) = g(b)$. Fixons des boules ouvertes D_a et D_b de centres a et b, contenues dans U, et vérifiant $D_a \cap D_b = \emptyset$, $D_a \cap A = \{a\}$, $D_b \cap A = \{b\}$. D'après 8.7.2, (i), $g(D_a) \cap g(D_b)$ est un voisinage de c, donc est non réduit à $\{c\}$. Il existe donc $u \in D_a \backslash \{a\}$ et $v \in D_b \backslash \{b\}$ tels que $g(u) = g(v)$, soit $f(u) = f(v)$. Comme $u \neq v$ cela contredit l'injectivité de f. D'où le résultat.

Exercice 8.4. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe et injective. L'application $g\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \to f(z^{-1})$ est holomorphe et injective. En prenant $U = \mathbb{C}$ et $A = \{0\}$ dans l'exercice 8.3, on obtient que g n'a pas de singularité essentielle en 0 et, d'après l'exercice 8.2, f est un polynôme ; il en est de même de f'. Comme $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, f' est une constante non nulle. On en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = az + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. La réciproque est claire.

D'après ce qui précède, il est immédiat de vérifier que $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ est l'ensemble des fonctions $z \to az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Exercice 8.5. Soit $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ holomorphe et injective. D'après l'exercice 8.3, avec $U = \mathbb{C}$ et $A = \{0\}$, il y a deux possibilités.

a) 0 est une singularité illusoire de f. Si g est le prolongement holomorphe de f à $\mathbb{C}$, g est injective (exercice 8.3, 3). Compte tenu de l'exercice 8.4, f est de la forme $z \to az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Si $b \neq 0$, on a $f(-ba^{-1}) = 0 \notin \mathbb{C}^*$. C'est absurde. Ainsi, f est de la forme $z \to az$, avec $a \neq 0$. la réciproque est claire.

b) 0 est un pôle d'ordre 1 de f. Comme $z \to z^{-1}$ est un automorphisme de $\mathbb{C}^*$, l'application $z \to g(z) = [f(z)]^{-1}$ est une application holomorphe injective de $\mathbb{C}^*$ dans lui-même. Le premier cas nous montre qu'il existe $b \in \mathbb{C}^*$ tel que $g(z) = bz$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ainsi, f est de la forme $z \to bz^{-1}$, avec $b \in \mathbb{C}^*$. La réciproque est évidente.

D'après ce qui précède, il est immédiat que :

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*) = \{z \to az\,;\, a \in \mathbb{C}^*\} \cup \left\{z \to \frac{a}{z}\,;\, a \in \mathbb{C}^*\right\}.$$

Exercice 8.6. D'après les hypothèses, la suite $(a_n)_n$ converge vers 0. Si K est un compact de $\mathbb{C}^*$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \notin K$ si $n > N$. Soit $L = \{a_n\,;\, n \geqslant N\} \cup \{0\}$. C'est un compact de $\mathbb{C}$ vérifiant $K \cap H = \emptyset$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $|z - a| \geqslant \delta$ si $z \in K$ et $a \in H$. Par suite, si $n > N$:

$$\left|\frac{a_n}{z - a_n}\right| \leqslant \frac{|a_n|}{\delta}.$$

On en déduit que la série définissant f_n converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}^*$. D'après 8.8.3, on a $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$. Toujours d'après 8.8.3, l'ensemble des pôles de f est $\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, $(z - a_k)f(z)$ est holomorphe au voisinage de a_k. Il en résulte que les pôles de f sont simples. La série $\sum a_n$ étant convergente et les a_n non nuls, il existe $r_k > 0$ tel que a_k soit le seul a_n contenu dans $D'(a_k, r_k)$. Si γ_k est le cercle de centre a_k et de rayon r_k parcouru dans le sens direct, on a donc :

$$2\pi i \operatorname{Res}(f, a_k) = \int_{\gamma_k} f(z)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - a_n} = a_k \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - a_k} = 2\pi i a_k.$$

D'où $\operatorname{Res}(f, a_k) = a_k$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 9

Produits infinis

9.1 PRODUITS INFINIS DE NOMBRES COMPLEXES

Définition 9.1.1. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{C}$. *On appelle* produit infini de terme général u_n, *et on note* $\prod u_n$, *la suite de* $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ *définie par :*

$$\left(u_n, \prod_{k=0}^{n} u_k\right)_{n \geqslant 0}.$$

9.1.2. Soit $\prod u_n$ un produit infini. On dit que

$$P_n = u_0 u_1 \cdots u_n$$

est le *produit partiel de rang* n du produit. Le produit est dit *convergent* si la suite $(P_n)_n$ a une limite $P \in \mathbb{C}$. S'il en est ainsi, on note :

$$P = \lim_n P_n = \prod_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Si en outre $P \neq 0$, on dit que le produit infini est *strictement convergent*.

9.1.3. Donnons quelques exemples.

• Si $u_0 = 1$ et $u_n = e^{1/n^2}$ pour $n \geqslant 1$, il vient :

$$\lim_n P_n = \lim_n \exp\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = e^{\pi^2/6}.$$

Le produit infini est strictement convergent.

• Si $u_n = 2^n$, le produit infini est divergent (c'est-à-dire non convergent).

• Si $u_n = 2^{-n}$, il est immédiat que $\lim_n P_n = 0$. Le produit infini est convergent mais non strictement convergent.

> ***Remarque.*** Concernant les produits infinis, on adoptera des conventions analogues à celles de 1.3.3. D'autre part, sauf risque de confusion, on utilisera systématiquement les notations P_n et P de 9.1.2.

Proposition 9.1.4. *Si le produit infini $\prod u_n$ est strictement convergent, la suite $(u_n)_n$ admet 1 pour limite.*

Démonstration. Si $P \neq 0$ est la limite des P_n, on a :

$$\lim_n u_n = \lim_n \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1.$$

D'où l'assertion. □

Lemme 9.1.5. *Soient $u_0, \ldots, u_n \in \mathbb{C}$ et :*

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + u_k)\ ,\ Q_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + |u_k|).$$

Alors :

$$Q_n \leqslant \exp(|u_0| + \cdots + |u_n|)\ ,\ |P_n - 1| \leqslant Q_n - 1.$$

Démonstration. La première inégalité est évidente en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle. La seconde est claire si $n = 0$. Raisonnons par récurrence. Il vient

$$P_n - 1 = P_{n-1}(1 + u_n) - 1 = (P_{n-1} - 1)(1 + u_n) + u_n.$$

D'où $|P_n - 1| \leqslant (Q_n - 1)(1 + |u_n|) + |u_n| = Q_n - 1$. □

Proposition 9.1.6. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes. On suppose que la série $\sum u_n$ est absolument convergente. Alors :*

(i) *Le produit infini $\prod(1 + u_n)$ est convergent. Il n'est pas strictement convergent si et seulement si l'un des u_n est égal à -1.*

(ii) *Pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, on a :*

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_{\sigma(n)}).$$

Démonstration. Compte tenu des hypothèses et de 9.1.5, il existe un réel C tel que $|P_n| \leqslant C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, si $\varepsilon \in]0, 1/2[$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N_0}^{\infty} |u_n| \leqslant \varepsilon$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$. Notons T_n le produit partiel associé à $\prod(1+u_{\sigma(n)})$. Si $N \geqslant N_0$, pour M assez grand, on a $\{0,1,\ldots,N\} \subset \{\sigma(0),\sigma(1),\ldots,\sigma(M)\}$. Par suite,

$$T_M - P_N = P_N\Big(\prod_{k\in A}(1+u_k) - 1\Big),$$

avec $A = \{\sigma(0),\ldots,\sigma(M)\}\backslash\{0,1,\ldots,N\}$. Il résulte alors de 9.1.5 que :

$$|T_M - P_N| \leqslant |P_N|(e^{\varepsilon}-1) \leqslant 2|P_N|\varepsilon \leqslant 2C\varepsilon. \tag{1}$$

Prenant $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, on voit alors que la suite $(P_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy, donc est convergente. Ainsi, le produit $\prod(1+u_n)$ est convergent. On obtient en outre $|P_M - P_{N_0}| \leqslant 2|P_{N_0}|\varepsilon$, si $M > N_0$, donc $|P_M| \geqslant (1-2\varepsilon)|P_{N_0}|$, puis $|P| \geqslant (1-2\varepsilon)|P_{N_0}|$. Par suite, $P=0$ si et seulement si $P_{N_0}=0$. D'où (i). Enfin, (ii) résulte trivialement de (1). □

> ***Remarque.*** Le produit infini $\prod u_n$ est dit *commutativement convergent* si, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, le produit infini $\prod u_n$ est convergent.

Corollaire 9.1.7. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels vérifiant $0 \leqslant u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La série $\sum u_n$ est convergente.*

(ii) *Le produit infini $\prod(1-u_n)$ est strictement convergent.*

Démonstration. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte de 9.1.6. Supposons la condition (ii) réalisée. La suite $(P_n)_n$ est une suite décroissante de nombres réels strictement positifs ; elle a donc une limite $P \geqslant 0$. D'après 9.1.5, on a :

$$P \leqslant P_n \leqslant \exp(-u_0 - \cdots - u_n).$$

Si la série $\sum u_n$ est divergente, il vient $P=0$. Contradiction. □

9.1.8. Dans ce qui suit, on va utiliser la détermination principale Log du logarithme (5.3.4). Afin de ne pas alourdir les énoncés, nous ferons un abus de langage en parlant de série $\sum \operatorname{Log} u_n$ alors qu'en général, $\operatorname{Log} u_n$ ne sera défini que pour n assez grand.

Proposition 9.1.9. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes non nuls et de limite 1. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le produit infini $\prod u_n$ est strictement convergent.*

(ii) *La série $\sum \operatorname{Log} u_n$ est convergente.*

Démonstration. D'après les hypothèses, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Re}(u_n) > 0$ pour $n > N$. Dans ce cas, il vient :

$$P_n = u_0 \cdots u_N \exp(S_n) \ \text{ avec } \ S_n = \operatorname{Log} u_{N+1} + \cdots + \operatorname{Log} u_n.$$

Si S_n a une limite, alors P_n a une limite non nulle. Réciproquement, si P_n a une limite non nulle, alors $\exp(S_n)$ a une limite non nulle ℓ. D'après 3.7.4, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $e^{\lambda} = \ell$. Ainsi, $\exp(S_n - \lambda)$ tend vers 1 si n tend vers $+\infty$. On en déduit qu'il existe $N_1 \geqslant N$ tel que $\operatorname{Log}\big(\exp(S_n - \lambda)\big)$ soit défini si $n \geqslant N_1$. Pour un tel entier

n, on a $S_n - \lambda = \operatorname{Log}\big(\exp(S_n - \lambda)\big) + 2i\pi k_n$, avec $k_n \in \mathbb{Z}$. D'autre part, comme $\lim_n \exp(S_n - \lambda) = 1$, on voit que :

$$\lim_n (S_n - \lambda - 2i\pi k_n) = 0. \tag{2}$$

De $\operatorname{Log} u_n = S_{n+1} - S_n$ et (2), on déduit que la suite $(k_{n+1} - k_n)_n$ a pour limite 0. Cette suite étant à valeurs entières, on voit alors qu'il existe un entier k tel que $k_n = k$ pour n assez grand. D'où :

$$\lim_n S_n = \lambda + 2ik\pi.$$

On a obtenu le résultat. □

Corollaire 9.1.10. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes non nuls et de limite* 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le produit infini $\prod u_n$ est strictement convergent et commutativement convergent.*

(ii) *La série $\sum \operatorname{Log} u_n$ est absolument convergente.*

Si elles sont vérifiées, on dit que le produit infini est absolument convergent.

Démonstration. C'est immédiat d'après 1.10.8 et 9.1.9. □

9.1.11. Le résultat suivant est une amélioration de 9.1.6.

Proposition. *Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$ et de limite nulle. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le produit infini $\prod(1 + u_n)$ est absolument convergent.*

(ii) *La série $\sum u_n$ est absolument convergente.*

Démonstration. D'après 3.3.2 et 5.3.11, on a $\operatorname{Log}(1+z) = z + O(z)$ au voisinage de 0. Par conséquent, il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $C_1|u_n| \leqslant |\operatorname{Log}(1 + u_n)| \leqslant C_2|u_n|$ pour n assez grand. La proposition résulte alors de 9.1.10. □

9.2 PRODUITS INFINIS DE FONCTIONS HOLOMORPHES

9.2.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes dans U. On dit que le produit infini $\prod f_n$ est *convergent* dans U si la suite de fonctions holomorphes $P_n = \prod_{k=1}^n f_k$ est uniformément convergente sur tout compact de U. S'il en est ainsi, la limite f des P_n est holomorphe dans U (7.4.2). On va introduire d'autres notions de convergence qui nous permettrons d'obtenir des résultats intéressants.

Définition 9.2.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}(U)$.*

(i) *On dit que le produit infini $\prod f_n$ converge* absolument uniformément *(respectivement converge* normalement*) sur une partie K de U si les conditions suivantes sont réalisées :*

a) La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction constante 1 *sur K.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

b) La série $\sum |\operatorname{Log} f_n|$*, définie sur* K *pour* n *assez grand d'après* a)*, converge uniformément (respectivement normalement) sur* K.

(ii) *On dit que le produit infini* $\prod f_n$ *converge* absolument uniformément *(respectivement* normalement*) sur tout compact de* U *si, pour tout compact* K *de* U*, le produit infini* $\prod (f_n|K)$ *converge absolument uniformément (respectivement normalement).*

Proposition 9.2.3. *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$*,* K *une partie de* U*, et* $(u_n)_n$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{H}(U)$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le produit infini* $\prod(1+u_n)$ *converge absolument uniformément (respectivement normalement) sur* K.

(ii) *La série* $\sum |u_n|$ *converge uniformément (respectivement normalement) sur* K.

Démonstration. La fonction $z \to \dfrac{\operatorname{Log}(1+z)}{z}$ a une singularité illusoire en 0. Elle se prolonge en une fonction f holomorphe et sans zéro dans $D(0,1)$. Par suite, il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $C_1 \leqslant |f(z)| \leqslant C_2$ si $2|z| \leqslant 1$. Ainsi, si $2|z| \leqslant 1$:

$$C_1|z| \leqslant |\operatorname{Log}(1+z)| \leqslant C_2|z|.$$

Les deux conditions impliquent que la suite $(u_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur K. Ainsi, il existe un entier N tel que, pour $n \geqslant N$, on ait $2|u_n(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in K$. Par suite, si $p \geqslant N$ et $z \in K$ et, en utilisant la notation de 7.4.1 :

$$C_1\|u_p\|_K \leqslant \|\operatorname{Log}(1+u_p)\|_K \leqslant C_2\|u_p\|_K,$$

$$C_1 \sum_{n=p}^{\infty} |u_n(z)| \leqslant \sum_{n=p}^{\infty} |\operatorname{Log}(1+u_n(z))| \leqslant C_2 \sum_{n=p}^{\infty} |u_n(z)|.$$

On a obtenu le résultat. □

9.2.4. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes dans U telle que le produit infini $\prod f_n$ converge absolument uniformément (respectivement normalement) sur tout compact de U. Notons $P_n = f_0 f_1 \cdots f_n$.

Soit V un ouvert relativement compact de U tel que $\operatorname{Log} f_n$ soit défini sur $\overline{V}$ pour $n \geqslant N$. Si $n > N$, il vient :

$$P_n = f_0 f_1 \cdots f_N \exp(\operatorname{Log} f_{N+1} + \cdots + \operatorname{Log} f_n).$$

D'après l'hypothèse, la série $\sum_{n \geqslant N+1} \operatorname{Log} f_n$ converge uniformément sur $\overline{V}$. On en déduit que la suite $(P_n)_n$ converge uniformément sur $\overline{V}$. On note

$$f = \lim_n P_n = \prod_{n=0}^{\infty} f_n.$$

Sur $\overline{V}$, on a :

$$f(z) = f_0(z) \cdots f_N(z) \exp\Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log} f_n(z)\Big).$$

Théorème 9.2.5. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes dans U. On suppose que le produit infini $\prod f_n$ converge absolument uniformément sur tout compact de U. Alors :*

(i) *La fonction*

$$f = \prod_{n=0}^{\infty} f_n$$

est holomorphe sur U.

(ii) *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :*

$$f = f_0 f_1 \cdots f_p \prod_{n=p+1}^{\infty} f_n.$$

(iii) *Pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, on a :*

$$\prod_{n=0}^{\infty} f_n = \prod_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}.$$

(iv) *L'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est la réunion des ensembles $Z(f_n)$ des zéros de f_n. Si $a \in Z(f)$, son ordre comme zéro de f est la somme des ordres de a comme zéro de chaque f_n.*

Démonstration. Le point (i) est clair d'après 7.4.3 et 9.2.4, et (ii) résulte aussi de 9.2.4. Soit V un ouvert relativement compact de U. Il existe un entier N tel que, pour $n \geqslant N$, on ait pour $z \in V$:

$$f(z) = f_0(z) f_1(z) \cdots f_N(z) \exp\Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log} f_n(z)\Big).$$

Alors, les zéros de f dans U sont ceux de $f_0, \ldots, f_N$. D'où (iv).
De même, dans V, la série $\sum_{n \geqslant N+1} \operatorname{Log} f_n$ est absolument convergente, donc commutativement convergente (1.10.8). D'où facilement (iii). □

Théorème 9.2.6. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes dans U telle que le produit infini $\prod f_n$ converge absolument uniformément (respectivement normalement) sur tout compact de U. Soit $f = \prod_{n=0}^{\infty} f_n$. Alors la série de fonctions méromorphes $\sum \dfrac{f_n'}{f_n}$ converge uniformément (respectivement normalement) sur tout compact de U, et on a :*

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n'}{f_n}.$$

Démonstration. Soit V un ouvert relativement compact de U. La fonction

$$g_N = \exp\Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log} f_n\Big)$$

est définie et holomorphe dans V si N est assez grand, et vérifie $f = f_0 f_1 \ldots f_N g_N$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Par suite, dans V :

$$\frac{f'}{f} = \frac{f'_0}{f_0} + \cdots + \frac{f'_N}{f_N} + \frac{g'_N}{g_N}.$$

D'autre part, dans V, la série $\sum_{n \geqslant N+1} \operatorname{Log} f_n$ converge uniformément. On peut donc la dériver terme à terme, et la série des dérivées $\sum_{n \geqslant N+1}(f'_n/f_n)$ converge uniformément (respectivement normalement) sur tout compact de V (7.4.3). D'où, dans V :

$$\frac{g'_N}{g_N} = \Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log} f_n\Big)' = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f'_n}{f_n}.$$

On a obtenu le résultat d'après ce qui précède. □

9.2.7. Posons $f_0(z) = z$ et $f_n(z) = 1 - \dfrac{z^2}{n^2}$ si $n \geqslant 1$. Comme la série de terme général z^2/n^2 converge normalement sur tout compact, le produit infini $\prod f_n$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$. Posons :

$$f(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big) = \prod_{n=0}^{\infty} f_n(z).$$

D'après 8.8.7 et 9.2.6, il vient :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \operatorname{cotan} \pi z = \frac{(\sin \pi z)'}{\sin \pi z}.$$

La connexité de $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$ implique alors qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$\frac{\sin \pi z}{z} = c \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big)$$

pour $z \in \mathbb{C}^*$. En faisant tendre z vers 0, on obtient $c = \pi$, puisque le second membre de la ligne précédente est holomorphe, donc continu. On a obtenu :

Proposition. *Si $z \in \mathbb{C}$, on a :*

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big).$$

EXERCICES

Exercice 9.1. Prouver que le produit infini

$$f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + z^{2^n}\right)$$

converge normalement sur tout compact de $D(0,1)$ et que

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

pour tout $z \in D(0,1)$.

Exercice 9.2. On pose $D = D(0,1)$ et $C = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$.

On définit une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ par :

$$f_0(z) = z\ ,\ f(z) = f_1(z) = \frac{z(1-2z)}{2-z}\ ,\ f_{n+1} = f_1 \circ f_n.$$

a) Prouver que $f(C) \subset C$et que $f(D) \subset D$.

b) Montrer que, si $w \in D$, l'équation $f(z) = w$ a deux racines appartenant à D. Prouver que ces racines sont distinctes, sauf pour une valeur de w à préciser.

c) Si $z \in \overline{D}$, établir :

$$\left|2\frac{f(z)}{z} - 1\right| \leqslant 3|z|.$$

d) Pour $0 < r \leqslant 1$, calculer :

$$(*) \qquad \varphi(r) = \sup\left\{\left|\frac{f(z)}{z}\right|\,;\, |z| = r\right\}$$

En déduire que, si $z \in \overline{D}$, on a :

$$(**) \qquad |f_n(z)| \leqslant |z|\left(\frac{1+2|z|}{1+|z|}\right)^n.$$

e) En utilisant la question précédente montrer que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2f_n(z)}{f_{n-1}(z)}$$

est normalement convergent sur tout compact de D.

f) Montrer que la suite $(2^n f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de D. Si g est la limite de cette suite, prouver que $2g \circ f = g$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 9.1. Soit K un compact de $D(0,1)$. Il existe $r \in]0,1[$ tel que $|z| \leqslant r$ pour tout $z \in K$. Si $z \in K$, et $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\left|z^{2^n}\right| \leqslant r^{2^n}$, ce qui prouve que la série $\sum z^{2^n}$ est normalement convergente sur K. D'où le premier point d'après 9.2.3. On a alors $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$.

Pour $z \in D(0,1)$, posons :

$$g(z) = \frac{1}{1-z}\ ,\ h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}\cdot$$

On a $h \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$, donc h est continue sur $D(0,1)$.

On a facilement :

$$h(z) = h(z^2) = \cdots = h(z^{2^p})$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. La continuité de h implique alors que $h(z) = h(0) = 1$. On a donc $g = f$.

Exercice 9.2.

a) Si $z \in C$, on a $\overline{z} = z^{-1}$, d'où :

$$|f(z)| = \left|\frac{1-2z}{2-z}\right| = \left|\frac{\overline{z}-2}{2-z}\right| = 1.$$

Ainsi, $f(C) \subset C$. Comme f n'est pas constante, il résulte alors du principe du maximum que $f(D) \subset D$.

b) Si $f(z) = w$, alors $2z^2 - (w+1)z + 2w = 0$. Dire que cette solution possède une racine double signifie que $w^2 - 14w + 1 = 0$. Comme $w \in D$, il vient alors $w = 7 - 4\sqrt{3}$.

Si $w \in D$ et $z \in C$, on a $|w| < 1 = f(z)$ d'après la question précédente. Le théorème de Rouché montre que $f(z) = 0$ et $f(z) = w$ ont même nombre de solutions dans D. Le résultat démandé est alors immédiat.

c) Pour $z \in \overline{D}$, on a :

$$\left|\frac{2f(z)}{z} - 1\right| = \left|\frac{3z}{2-z}\right| \leqslant 3|z|.$$

d) Soit $z = re^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. Si l'on pose $x = r\cos\theta$, on obtient :

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|^2 = 1 - \frac{3(1-r^2)}{4+r^2-4x} = \psi(x).$$

Si x croît de $-r$ à r, $\psi(x)$ décroît de $\psi(-r)$ à $\psi(r)$. D'où :

$$\varphi(r) = \sqrt{\psi(r)} = \frac{2r+1}{r+2}\cdot$$

On voit ainsi que φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par suite :

$$(***) \qquad \frac{1}{2} \leqslant \varphi(0) \leqslant \varphi(r) \leqslant \varphi(1) = 1.$$

Supposons :

$$|f_{n-1}(z)| \leqslant |z|\Big(\frac{1+2|z|}{1+|z|}\Big)^{n-1}.$$

En particulier, $|f_{n-1}(z)| \leqslant |z|$. Alors, d'après $(***)$:

$$\frac{1+2|f_{n-1}(z)|}{2+|f_{n-1}(z)|} \leqslant \frac{1+2|z|}{2+|z|}.$$

On en déduit :

$$|f_n(z)| = |f\circ f_{n-1}(z)| \leqslant |f_{n-1}(z)|\frac{1+|f_{n-1}(z)|}{2+|f_{n-1}(z)|} \leqslant |z|\Big(\frac{1+2|z|}{2+|z|}\Big)^n.$$

e) Comme

$$f(D) \subset D \ \text{ et } \ \frac{f(z)}{z} = \frac{1-2z}{2-z},$$

on voit que $f_n/f_{n-1} \in \mathcal{H}(D)$. D'autre part, si $|z| \leqslant a < 1$, il résulte de $(*)$ et $(**)$ que :

$$\Big|\frac{2f_n(z)}{f_{n-1}(z)}\Big| \leqslant 3|f_{n-1}(z)| \leqslant 3a\Big(\frac{1+2a}{2+a}\Big)^{n-1}.$$

On en déduit que la série

$$\sum\Big(2\frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)} - 1\Big)$$

est normalement convergente sur tout compact de D. D'où le résultat.

f) Il vient :

$$2^n\frac{f_n(z)}{z} = \Big(2\frac{f_1(z)}{z}\Big)\Big(2\frac{f_2(z)}{f_1(z)}\Big)\cdots\Big(2\frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)}\Big).$$

D'après la question précédente, la suite $(2^n f_n)_n$ converge donc uniformément sur tout compact de D. Sa limite g est alors holomorphe dans D. Comme

$$2^{n+1}f_{n+1}(z) = 2.2^n f_n\circ f(z),$$

on obtient par continuité $g(z) = 2g\circ f(z)$.

De $f(0) = 0$, on déduit que $f(0) = 2g(0)$, donc $g(0) = 0$.

D'après 7.4.2, la suite $(2^n f_n')_n$ converge uniformément sur tout compact de D vers g'. Il en résulte que $g'(0)$ est la limite de la suite $(2^n f_n'(0))_n$. On a $f'(0) = \dfrac{1}{2}$ et, une récurrence facile montre que $f_n'(0) = \dfrac{1}{2^n}\cdot$ D'où $g'(0) = 1$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 10

Homotopie et holomorphie

L'un des objectifs de ce chapitre est de généraliser plusieurs des résultats obtenus prédemment : théorème des résidus, théorème de l'indice et théorème de Rouché.

10.1 HOMOTOPIE ET SIMPLE CONNEXITÉ

10.1.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Rappelons (6.1.1) qu'un arc dans U est une application continue γ d'un intervalle compact $[x, y]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans U. On a convenu de le noter $([x, y], \gamma)$. On dira que γ est un *lacet* si c'est un arc fermé, c'est-à-dire si $\gamma(x) = \gamma(y)$.

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Nous dirons qu'un *arc* $([x, y], \gamma)$ *va de* a *à* b si $\gamma(x) = a$ et $\gamma(y) = b$.

Soit $([x, y], \gamma)$ un arc. On définit un arc $([0, 1], \delta)$ par $\delta(t) = \gamma\big((1-t)x + ty\big)$pour $t \in [0, 1]$. Il est immédiat que $\operatorname{im}\gamma = \operatorname{im}\delta$, $\gamma(x) = \delta(0)$, et $\gamma(y) = \delta(1)$. On voit donc que pratiquement, il n'y a aucun inconvénient à supposer que l'intervalle de définition de tous les arcs considérés est $[0, 1]$. Cela sera systématiquement fait dans ce chapitre et, on modifie alors, de manière évidente, les définitions déjà données concernant les arcs. Par exemple, si γ_1 et γ_2 sont deux arcs tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, on définit l'arc composé $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ (voir 6.1.2) par :

$$\gamma(t) = \gamma_1(2t) \ \text{ si } \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \ \text{ et } \ \gamma(t) = \gamma_2(2t-1) \ \text{ si } \ \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1.$$

Définition 10.1.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et γ_1, γ_2 des arcs dans U. On appelle* déformation *de γ_1 à γ_2 toute application continue $\delta\colon [0,1]\times[0,1] \to U$, $(t,u) \to \delta(t,u)$ vérifiant*

$$\delta(t,0) = \gamma_1(t)\ ,\ \delta(t,1) = \gamma_2(t)$$

pour tout $t \in [0,1]$.

10.1.3. Soient γ_1, γ_2 des arcs dans U et δ une déformation de γ_1 à γ_2.

• Dans la suite, on notera δ_u l'arc $[0,1] \to U$, $t \to \delta(t,u)$.

• L'application $[0,1] \times [0,1] \to U$, $(t,u) \to \gamma_1(t)$ est une déformation de γ_1 à γ_1.

• Posons $\delta_1(t,u) = \delta(1-t,u)$. Alors δ_1 est une déformation de γ_2 à γ_1.

• Soient γ_3 un arc dans U et ε une déformation de γ_2 à γ_3. Définissons une application $\varphi\colon [0,1] \times [0,1] \to U$ par

$$\varphi(t,u) = \delta(t,2u) \text{ si } 0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2} \text{ et } \varphi(t,u) = \varepsilon(t,2u-1) \text{ si } \frac{1}{2} < u \leqslant 1.$$

On vérifie facilement que φ est une déformation de γ_1 à γ_3.

10.1.4. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et γ un arc dans U, allant de a à b.

• L'application $[0,1] \times [0,1] \to$, $(t,u) \to \gamma(u)$ est une déformation de l'arc constant a à l'arc constant b.

• L'application $[0,1] \times [0,1] \to U$, $(t,u) \to \gamma(tu)$ est une déformation de l'arc constant a à γ.

On déduit de ces deux exemples que, si U est connexe (donc connexe par arcs), deux arcs quelconques dans U se déduisent l'un de l'autre par une déformation. On va ainsi être amené à introduire des restrictions pour obtenir des résultats non triviaux.

Définition 10.1.5. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$.*

(i) *Deux arcs γ_1, γ_2 dans U, ayant même origine a et même extrémité b sont dits* homotopes *dans U s'il existe une déformation δ de γ_1 à γ_2 telle que $\delta(0,u) = a$ et $\delta(1,u) = b$ pour tout $u \in [0,1]$. S'il en est ainsi, on dit que δ est une* homotopie *de γ_1 à γ_2.*

(ii) *Deux lacets γ_1, γ_2 dans U sont dits* homotopes *dans U s'il existe une déformation δ de γ_1 à γ_2 vérifiant $\delta(0,u) = \delta(1,u)$ pour tout $u \in [0,1]$. S'il en est ainsi, on dit que δ est une* homotopie *de γ_1 à γ_2.*

> ***Remarque.*** L'homotopie entre les arcs est une déformation « à extrémités fixes ». Ce n'est pas le cas de l'homotopie entre les lacets.

10.1.6. Donnons deux exemples.

1) Soient $U = \mathbb{C}^*$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et γ_1, γ_2 les lacets dans U définis, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ par :

$$\gamma_1(t) = r_1 e^{2i\pi t}\ ,\ \gamma_2(t) = r_2 e^{2i\pi t}.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

L'application $[0,1]\times[0,1]\to U$, $(t,r)\to\big(ur_2+(1-u)r_1\big)e^{2i\pi t}$ est une homotopie du lacet γ_1 au lacet γ_2.

2) Soit γ un arc dans l'ouvert U de $\mathbb{C}$, d'origine a. Composons l'arc constant a avec γ. On obtient un arc γ_1. L'application δ définie par

$$\delta(t,u)=a \text{ si } 0\leqslant t\leqslant\frac{u}{2} \text{ et } \delta(t,u)=\gamma\Big(\frac{2t-u}{2-u}\Big) \text{ si } \frac{u}{2}\leqslant t\leqslant 1$$

est une homotopie de l'arc γ_1 à l'arc γ.

Proposition 10.1.7. *L'homotopie est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Envisageons, par exemple, le cas de l'homotopie entre arcs allant de a à b. La réflexivité et la symétrie sont évidentes. Prouvons la transitivité. Soient $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ des arcs allant de a à b, et δ (respectivement ε) une homotopie de γ_1 à γ_2 (respectivement de γ_2 à γ_3). Définissons $\varphi\colon [0,1]\times[0,1]\to U$ par :

$$\varphi(t,u)=\delta(t,2u) \text{ si } 0\leqslant u\leqslant\frac{1}{2} \text{ et } \varphi(t,u)=\varepsilon(t,2u-1) \text{ si } \frac{1}{2}\leqslant u\leqslant 1.$$

Alors φ est une homotopie de γ_1 à γ_3. □

Proposition 10.1.8. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et γ_0 un arc dans U allant de a à b (respectivement un lacet dans U). Soit $d>0$ la distance de* $\operatorname{im}\gamma_0$ *à $\mathbb{C}\backslash U$ si $U\neq\mathbb{C}$, et $d>0$ quelconque si $U=\mathbb{C}$.*

(i) *Tout arc (respectivement lacet) γ_1 dans U tel que* $\sup\{|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)|\,;\,t\in[0,1]\}<d$ *et allant de a à b, est homotope à γ_1 dans U.*

(ii) *Soit $p\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tous $t,t'\in[0,1]$ vérifiant $|t-t'|\leqslant\dfrac{1}{p}$ on ait $|\gamma_1(t)-\gamma_1(t')|<d$. L'application $\gamma_1\colon[0,1]\to U$ dont la restriction à chaque intervalle $\Big[\dfrac{k-1}{p},\dfrac{k}{p}\Big]$, $1\leqslant k\leqslant p$, est affine et qui prend la même valeur que γ_1 aux bornes de ces intervalles est un arc (polygonal) homotope à γ_1 dans U.*

Démonstration. (i) Posons $\delta(t,u)=(1-u)\gamma_1(t)+u\gamma_2(t)$ pour $0\leqslant t,u\leqslant 1$. D'après les hypothèses, on a $\delta(t,u)\in U$. Il est alors clair que δ est une homotopie de γ_1 à γ_2.
(ii) Compte tenu de (i), il suffit de vérifier que $\operatorname{im}\gamma_2\subset U$, ce qui est immédiat. □

Théorème 10.1.9. *Soient U un ouvert* connexe *de $\mathbb{C}$ et $a,b,c,d\in U$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Tous les arcs dans U allant de a à b sont homotopes dans U.*

(ii) *Tous les arcs dans U allant de c à d sont homotopes dans U.*

(iii) *Tous les lacets dans U sont homotopes dans U.*

Si ces conditions sont réalisées, on dit que l'ouvert U est simplement connexe.

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Soit γ_1 un arc dans U allant de a à d. Comme U est connexe par arcs (6.1.6), il existe un arc γ_2 dans U allant de b à d. Pour $0 \leqslant u \leqslant 1$, considérons les arcs δ_u définis par :

$$\delta_u(t) = \begin{cases} \gamma_1\Big(\dfrac{3t}{3-2u}\Big) \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant 1 - \dfrac{2u}{3}, \\ \gamma_2[2(2-u)-2t] \text{ si } 1 - \dfrac{2u}{3} \leqslant t \leqslant 1 - \dfrac{u}{3}, \\ \gamma_2(3t-2) \text{ si } 1 - \dfrac{u}{3} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Si (i) est vérifié, on voit facilement que γ_1 est homotope à δ_1. Ainsi, tous les arcs allant de a à d sont homotopes. On obtient (i) $\Rightarrow$ (ii) en procédant de manière analogue avec c. On a alors l'équivalence de (i) et (ii) vu l'arbitraire de a, b, c, d.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Soit γ un lacet. Alors $a = \gamma(0)$ est l'origine et l'extrémité de γ. Comme (i) et (ii) sont équivalents, en prenant $c = d = a$ dans (ii), on voit que, comme arc, γ est homotope à l'arc constant a. L'ouvert U étant connexe, tous les lacets dans U sont homotopes. D'où (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i) Compte tenu de (i) $\Leftrightarrow$ (ii), il suffit de prouver que tous les arcs fermés d'origine $a \in U$ sont homotopes avec extrémités fixes.

Soient γ un arc fermé d'origine a, et $b \in U$. Les lacets dans U étant homotopes, il existe une homotopie δ du lacet γ au lacet constant b.

Définissons $\delta_1 \colon [0,1] \times [0,1] \to U$ par :

$$\delta_1(t,u) = \begin{cases} \delta(0,3t) \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{u}{3}, \\ \delta\Big(\dfrac{3t-u}{3-2u}\Big) \text{ si } \dfrac{u}{3} \leqslant t \leqslant 1 - \dfrac{u}{3}, \\ \delta\big(0, 3(1-t)\big) \text{ si } 1 - \dfrac{u}{3} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Posons :

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \delta(0,3t) \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ b \text{ si } \dfrac{1}{3} \leqslant t \leqslant \dfrac{2}{3}, \\ \delta\big(0, 3(1-t)\big) \text{ si } \dfrac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Alors $t \to \gamma_1(t)$ est un arc dans U allant de a à a, et δ_1 est une homotopie de l'arc γ à l'arc γ_1.

Définissons alors $\delta_2 \colon [01] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ par :

$$\delta_2(t,u)\gamma_1(tu) \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\,,\ \delta_2(t,u) = \gamma_1\big((1-t)u\big) \text{ si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1.$$

Comme $\gamma_1(t) = \delta_2(t,1)$, on voit que δ_2 est une homotopie de l'arc γ_1 (allant de a à a) à l'arc constant. Par suite, l'arc γ et l'arc constant a sont homotopes. $\square$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Proposition 10.1.10. *Si U est étoilé en un de ses points, il est simplement connexe.*

Démonstration. Si U est étoilé en un de ses points a, il est connexe par arcs donc connexe. Soit γ un lacet dans U. L'application $(t, u) \to ua + (1 - u)\gamma(t)$ est une homotopie de γ au lacet constant a. $\square$

10.2 PRIMITIVE LE LONG D'UN ARC

Définition 10.2.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$, et γ un arc dans U. On appelle* primitive de f le long de γ *toute application continue $\psi\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout $t_0 \in [0,1]$, il existe un voisinage I_0 de t_0 dans $[0,1]$ et une primitive F_{t_0} de f définie dans un voisinage $W_0 \subset U$ de $\gamma(t_0)$, tels que $\gamma(I_0) \subset W_0$ et*

$$\psi(t) = F_{t_0}\big(\gamma(t)\big)$$

pour tout $t \in I_0$.

Théorème 10.2.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$, et γ un arc dans U.*

(i) *Il existe des primitives de f le long de γ. La différence de deux telles primitives est constante.*

(ii) *Si γ est un chemin dans U et si ψ est une primitive de f le long de U, on a :*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \psi(1) - \psi(0).$$

Démonstration. Si $U = \mathbb{C}$, ε est un réel strictement positif. Si $U \neq \mathbb{C}$, on pose :

$$\varepsilon = d(\operatorname{im}\gamma, \mathbb{C}\backslash U) = \inf\{|z - \gamma(t)|\,;\, z \in \mathbb{C}\backslash U, t \in [0,1]\} > 0.$$

Si $t \in [0,1]$, on pose $D_t = D\big(\gamma(t), \varepsilon\big)$. On a ainsi $D_t \subset U$ et, d'après 6.4.6, f possède une primitive F_t dans D_t.

L'application γ étant continue sur $[0,1]$ y est uniformément continue. Il existe donc $\eta > 0$ tel que $|\gamma(t) - \gamma(t')| < \varepsilon$ dès que $t, t' \in [0,1]$ vérifient $|t - t'| < \varepsilon$. Soit une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de $[0,1]$ telle que $|t_i - t_{i+1}| < \eta$ si $0 \leqslant i \leqslant n-1$. On a donc $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset D_{t_i} \cap D_{t_{i+1}}$ si $0 \leqslant i \leqslant n-1$. En particulier, $D_i \cap D_{i+1}$ est un ouvert convexe non vide. Notons F_i une primitive de f dans D_{t_i}.

Posons $G_0 = F_0$. Sur $D_{t_0} \cap D_{t_1}$, $F_0 - F_1$ est constante (4.2.1). Il existe donc $\ell_1 \in \mathbb{C}$ tel que $G_1 = F_1 - \ell_1$ vérifie $G_0|D_{t_0} \cap D_{t_1} = G_1|D_0 \cap D_1$.

Supposons construites des primitives G_k de f sur D_{t_k} pour $0 \leqslant k \leqslant i$, et telles que $G_{k-1}|D_{t_{k-1}} \cap D_{t_k} = G_k|D_{t_{k-1}} \cap D_{t_k}$ si $1 \leqslant k \leqslant i$.
Sur $D_{t_i} \cap D_{t_{i+1}}$, $F_i - F_{i+1}$ est constante, égale à ℓ_{i+1}. On pose $G_{i+1} = F_{i+1} - \ell_{i+1}$.

On a donc déterminé des primitives G_i sur D_{t_i} de la fonction f qui vérifient $G_i|D_{t_i} \cap D_{t_{i+1}} = G_{i+1}|D_{t_i} \cap D_{t_{i+1}}$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

D'après cette construction on peut définir $\psi\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ en convenant que $\psi(t) = G_i\big(\gamma(t)\big)$ si $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$, et on obtient ainsi une fonction continue. Il est alors clair que ψ est une primitive de f le long de γ.

Soient ψ et φ des primitives de f le long de γ. Alors, $\psi - \varphi$ est localement constante sur $[0,1]$, donc constante puisque $[0,1]$ est connexe. On a prouvé (i).

Supposons que γ soit un chemin, et soit ψ une primitive de f le long de γ. De $\psi(t) = G_i\big(\gamma(t)\big)$ sur $[t_i, t_{i+1}]$, on déduit que ψ est de classe C^1 par morceaux et que $\psi'(t) = \gamma'(t) f\big(\gamma(t)\big)$ si t est distinct des t_i. D'après 6.2.1, il vient :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 \psi'(t)\,dt = \psi(1) - \psi(0).$$

On a démontré le théorème. □

10.2.3. Le résultat de 10.2.2 légitime la définition suivante :

Définition. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$, et γ un arc dans U. On définit l'intégrale de f le long de γ par*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \psi(1) - \psi(0),$$

où ψ est une primitive de f le long de γ.

> ***Remarques.*** 1) D'après 6.2.2 et de 10.2.2, le symbole $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ est défini d'une part quand f est continue et que γ est un chemin, d'autre part quand f est holomorphe et que γ est un arc.
> 2) Si l'on considère un arc γ défini sur un intervalle $[x, y]$ la définition d'une primitive de f le long de γ est trivialement modifiée, et l'intégrale de f le long de γ est $\psi(y) - \psi(x)$.

Proposition 10.2.4. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$.*

(i) *Si f admet une primitive F dans U, pour tout arc γ dans U, on a :*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F\circ\gamma(1) - F\circ\gamma(0).$$

(ii) *Soient h un homéomorphisme croissant de $[0,1]$ sur lui-même et ψ une primitive de f le long de γ. Alors $\psi\circ h$ est une primitive de f le long de $\gamma\circ h$ et :*

$$\int_{\gamma\circ h} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

(iii) *Soient γ_1, γ_2 des arcs dans U vérifiant $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ et $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$. Alors :*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Démonstration. (i) Il est clair que $\psi = F\circ\gamma$ est une primitive de f le long de γ.

(ii) Si $t \in [0,1]$, il existe un voisinage I de t dans $[0,1]$, un voisinage W de $\gamma(t)$ dans U et une primitive F de f dans W tels que $\psi(t) = F\circ\gamma(t)$ pour tout $t \in I$. Par suite, si $t \in [0,1]$, il existe un voisinage I' de t dans $[0,1]$ tel que $\psi\circ h(t) = F[\gamma\circ h(t)]$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

pour $t \in I'$. On en déduit le premier point. Comme h est croissant, on a $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$. D'où le second point par définition de l'intégrale de f le long de γ.

(ii) Soient ψ et F relatifs à γ comme précédemment. On a $\psi(t) = F \circ \gamma(t)$ localement, donc $\psi(t) = F \circ \gamma_1(2t)$ si $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $\psi(t) = F \circ \gamma_2(2t-1)$ si $\dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$ (voir 10.1.1). Comme

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \left[\psi(1) - \psi\Big(\frac{1}{2}\Big)\right] + \left[\psi\Big(\frac{1}{2}\Big) - \psi(0\right],$$

et que $t \to 2t$ (respectivement $t \to 2t-1$) est un homéomorphisme croissant de $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ (respectivement $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$) sur $[0,1]$, on déduit (iii) de (ii) (où (ii) est trivialement modifié en tenant compte de la remarque 2 qui suit 10.2.3). □

Théorème 10.2.5. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f admet des primitives dans U.*

(ii) $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ *pour tout lacet γ dans U.*

(iii) $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ *pour tout chemin fermé γ dans U.*

Démonstration. L'implication (i) ⇒ (ii) résulte de 10.2.4, et (ii) ⇒ (iii) est claire. Supposons (iii) vérifié, et prouvons (i). Comme l'image d'un lacet est connexe, en raisonnant dans les composantes connexes de U, on peut supposer U connexe. Si γ est un arc dans U, on note $I(\gamma) = \displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$.

Soit $a \in U$. Si $w \in U$, il existe des chemins polygonaux allant de a à w (6.1.6). Soient γ_1 et γ_2 deux tels chemins. Si l'on note ε_2 le chemin opposé à γ_2, il résulte de l'hypothèse, de 6.2.3, et de 10.2.2 que $0 = I(\gamma_1 \vee \varepsilon_2) = I(\gamma_1) - I(\gamma_2)$.

On a donc $I(\gamma_1) = I(\gamma_2)$. On peut donc définir une application $F\colon U \to \mathbb{C}$ en posant $F(w) = I(\gamma)$, où est un chemin polygonal quelconque allant de a à w. La même preuve qu'en 6.4.1 montre alors que F est une primitive de f dans U. □

10.3 INDICE

10.3.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un lacet dans U, et $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{im}\gamma$.

La fonction $\ell\colon \mathbb{C}\setminus\{z\} \to \mathbb{C}$, $\zeta \to \dfrac{1}{\zeta - z}$ étant holomorphe, il résulte de 10.2.3 que l'on peut définir le symbole

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

On le note encore $\operatorname{ind}_\gamma(z)$, et on dit encore que c'est l'*indice de z par rapport à γ.*

Proposition. *Avec les hypothèses et notations précédentes, on a* $\operatorname{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit ψ une primitive de ℓ le long de γ. Localement en t, on a $\psi(t) = F\big(\gamma(t)\big)$, où F est une primitive locale de f. Il vient :

$$\big[\ell(\zeta)e^{F(\zeta)}\big]' = \big(-\ell^2(\zeta) + \ell^2(\zeta)\big)e^{F(\zeta)} = 0.$$

L'ouvert $\mathbb{C}\backslash\{z\}$ étant connexe, il existe $c \in \mathbb{C}^*$ tel que $e^{F(\zeta)} = c(\zeta - z)$. On en déduit que la fonction continue $t \to e^{\psi(t)}\ell\big(\psi(t) - z\big)$ est localement constante, donc constante puisque $[0,1]$ est connexe. On a ainsi, pour tout $t \in [0,1]$:

$$e^{\psi(t)} = c\big(\gamma(t) - z\big). \tag{1}$$

Comme γ est fermé, on a $e^{\psi(1)} = c\big(\gamma(1) - z\big) = c\big(\gamma(0) - z\big) = e^{\psi(0)}$. Il résulte alors de 3.7.6 que $\psi(1) - \psi(0) \in 2i\pi\mathbb{Z}$. D'autre part, par définition de l'indice et, d'après 10.2.3 :

$$2i\pi \operatorname{ind}_\gamma(z) = \psi(1) - \psi(0). \tag{2}$$

D'où $\operatorname{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$. $\square$

10.3.2. Conservons hypothèses et notations de 10.3.1 et de la preuve précédente. On appelle *détermination continue de l'argument de $\zeta - z$ le long de* γ toute application continue $\theta\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in [0,1]$, $\theta(t)$ soit un argument de $\gamma(t) - z$ (voir 5.3.1).

Soit $\mu \in \mathbb{C}$ vérifiant $e^\mu = c$. L'identité (1) s'écrit :

$$e^{\psi(t)-\mu} = \gamma(t) - z. \tag{3}$$

Si $\theta(t) = \operatorname{Im}\big(\gamma(t) - \mu\big)$, alors θ est continue sur $[0,1]$ et, il résulte de (3) que, si $t \in [0,1]$:

$$\psi(t) = \ln|\gamma(t) - z| + i\theta(t) + \mu. \tag{4}$$

Ainsi, $t \to \theta(t)$ est une détermination continue de l'argument de $\zeta - z$ le long de γ. D'après (2) et (4), on a alors :

$$2\pi \operatorname{ind}_\gamma(z) = \theta(1) - \theta(0). \tag{5}$$

Réciproquement, soit $t \to \theta(t)$ une détermination continue de l'argument de $\zeta - z$ le long de γ. Pour $t \in [0,1]$, posons :

$$\psi(t) = \ln|\gamma(t) - z| + i\theta(t).$$

On a $e^{\psi(t)} = \gamma(t) - z$ pour tout $t \in [0,1]$. Si l'on note (voir 5.3.5 et 5.37) $\log(\zeta - z)$ une détermination locale du logarithme (comme fonction de ζ), alors $\psi(t) - \log\big(\gamma(t) - z\big)$ est localement constante. Comme $\zeta \to \log(\zeta - z)$ est localement une primitive de ℓ, on voit que ψ est une primitive de ℓ le long de γ. Par conséquent, la formule (5) est vraie. On en déduit que le calcul de l'indice d'un lacet en un point est possible dès que l'on connait une détermination continue de l'argument de $\zeta - z$ le long de γ.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Proposition 10.3.3. *Soient U un ouvert* convexe *de $\mathbb{C}$ et γ un lacet dans U. Si $z \in \mathbb{C}\backslash U$, on a* $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$.

Démonstration. D'après 6.4.7, la fonction $\zeta \to \ell(\zeta) = \dfrac{1}{\zeta - z}$ possède une primitive F dans U. Alors $\psi = F \circ \gamma$ est une primitive de ℓ le long de γ. D'où

$$2i\pi \operatorname{ind}_\gamma(z) = \psi(1) - \psi(0) = F\circ\gamma(1) - F\circ\gamma(0) = 0$$

puisque $\gamma(1) = \gamma(0)$. □

10.3.4. Si γ_1 et γ_2 sont des arcs dans $\mathbb{C}$, on note $\gamma_1.\gamma_2$ et $\gamma_1 + \gamma_2$ les arcs définis, pour $t \in [0,1]$, par :

$$(\gamma_1.\gamma_2)(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)\ ,\ (\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t).$$

Il est clair que, si $0 \notin (\operatorname{im}\gamma_1) \cup (\operatorname{im}\gamma_2)$, alors $0 \notin \operatorname{im}(\gamma_1.\gamma_2)$. De même, si $|\gamma_1(t)| < |\gamma_2(t)|$ pour tout $t \in [0,1]$, on a $0 \notin (\operatorname{im}\gamma_2) \cup \operatorname{im}(\gamma_1 + \gamma_2)$.

Proposition. *Soient γ_1, γ_2 des lacets dans $\mathbb{C}$.*

(i) *Si $0 \notin (\operatorname{im}\gamma_1) \cup (\operatorname{im}\gamma_2)$, alors :*

$$\operatorname{ind}_{\gamma_1.\gamma_2}(0) = \operatorname{ind}_{\gamma_1}(0) + \operatorname{ind}_{\gamma_2}(0).$$

(ii) *Si $|\gamma_1(t)| < |\gamma_2(t)|$ pour tout $t \in [0,1]$, on a :*

$$\operatorname{ind}_{\gamma_1+\gamma_2}(0) = \operatorname{ind}_{\gamma_2}(0).$$

Démonstration. (i) Pour $j = 1, 2$, soit ψ_j une primitive de $\zeta \to \zeta^{-1}$ le long de γ_j. Si $t \in [0,1]$, on a $\exp\big(\psi_j(t)\big) = \gamma_j(t)$, donc $\exp\big(\psi_1(t) + \psi_2(t)\big) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$. Ainsi, $\psi_1 + \psi_2$ est une primitive de $\zeta \to \zeta^{-1}$ le long de $\gamma_1 + \gamma_2$. On conclut d'après (2).

(ii) Si $t \in [0,1]$, posons $\gamma(t) = 1 + \gamma_1(t)[\gamma_2(t)]^{-1}$. D'après les hypothèses, il vient $\operatorname{im}\gamma \subset D(1,1)$, qui est convexe, et ne contient pas 0. D'où $\operatorname{ind}_\gamma(0) = 0$ (10.3.3). Comme $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma.\gamma_2$, on a le résultat d'après (i). □

Proposition 10.3.5. *Soit γ un lacet dans $\mathbb{C}$. L'application $z \to \operatorname{ind}_\gamma(z)$ est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{C}\backslash \operatorname{im}\gamma$ et nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash \operatorname{im}\gamma$.*

Démonstration. Si $t \in [0,1]$ et $z \in \mathbb{C}\backslash \operatorname{im}\gamma$, posons $\gamma_z' t) = \gamma(t) - z$. On a ainsi $\operatorname{ind}_\gamma(z) = \operatorname{ind}_{\gamma_z}(0)$.

Fixons $z_0 \in U$, et soit $r = \inf\{|\gamma(t) - z_0|\,;\, t \in [0,1]\}$. Comme $\operatorname{im}\gamma$ est un compact, on a $r > 0$. Soit $z \in U$ tel que $|z - z_0| < r$. Alors, si $t \in [0,1]$:

$$|\gamma_z(t) - \gamma_{z_0}(t)| = |z - z_0| < r \leqslant |\gamma_{z_0}(t)|.$$

D'après 10.3.4, (ii), il vient $\operatorname{ind}_{\gamma_z}(0) = \operatorname{ind}_{\gamma_{z_0}}(0)$, soit $\operatorname{ind}_\gamma(z) = \operatorname{ind}_\gamma(z_0)$. La fonction $z \to \operatorname{ind}_\gamma(z)$ est localement constante, donc constante sur chaque composante connexe de U. Le dernier point résulte alors de 10.3.3 puisque $\operatorname{im}\gamma$ est contenu dans un ouvert connexe $D(0,R)$. □

10.4 FORMULE DE CAUCHY

Théorème 10.4.1. (Théorème de Cauchy). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et γ_1, γ_2 des arcs (respectivement des lacets) dans U homotopes dans U. Pour toute fonction f holomorphe dans U, on a :*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Démonstration. Si deux arcs (respectivement lacets) sont homotopes dans U, ils appartiennent à la même composante connexe de U. On peut donc supposer U connexe.

Soit γ_1 un arc dans U. Si $U = \mathbb{C}$, ε est un réel strictement positif. Si $U \neq \mathbb{C}$, on pose $\varepsilon = d(\operatorname{im}\gamma_1, \mathbb{C}\backslash U)$. Pour tout $t \in [0,1]$ le disque $D_t = D\big(\gamma_1(t), \varepsilon\big)$ est contenu dans U. Soit $\eta > 0$ tel que l'on ait $|\gamma_1(t) - \gamma_1(t')| < \varepsilon$ dès que $t, t' \in [0,1]$ vérifient $|t - t'| < \eta$. Soit enfin $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ une subdivision de $[0,1]$ telle que $|t_i - t_{i+1}| < \eta$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$. On sait (6.4.6) que f possède une primitive F_i dans D_{t_i} pour $0 \leqslant i \leqslant n$.

Soit γ_2 un arc tel que $|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]$. On a $\operatorname{im}\gamma_2 \subset U$. Pour $0 \leqslant i \leqslant n$, posons $a_i = \gamma_1(t_i)$ et $b_i = \gamma_2(t_i)$.

Compte tenu de 10.2.4, (i) et (iii), il vient :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz &= \sum_{i=1}^{n}[F(a_i) - F(a_{i-1})] - \sum_{i=1}^{n}[F(b_i) - F(b_{i-1})]\\ &= \sum_{i=1}^{n}[F(a_i) - F(b_i)] - \sum_{i=1}^{n}[F(a_{i-1}) - F(b_{i-1})].\end{aligned}$$

Or, le disque convexe D_{a_i} contenant $a_i, a_{i-1}, b_i, b_{i-1}$, il contient les segments orientés contenant ces points. D'où :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz &= \sum_{i=1}^{n}\int_{[b_i,a_i]} f(z)\,dz - \sum_{i=1}^{n}\int_{[b_{i-1},a_{i-1}]} f(z)\,dz\\ &= \int_{[b_n,a_n]} f(z)\,dz - \int_{[b_0,a_0]} f(z)\,dz.\end{aligned}$$

La différence précédente est donc nulle dans les deux cas suivants :

1) γ_1 et γ_2 ont même origine et même extrémité ($a_0 = b_0$ et $a_n = b_n$).

2) γ_1 et γ_2 sont des lacets ($a_0 = a_n$ et $b_0 = b_n$).

Terminons maintenant la preuve. Soient γ_1 et γ_2 des arcs (respectivement lacets) homotopes dans U et δ une homotopie dans U de γ_1 à γ_2. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\eta > 0$ tel que, $|\delta(t,u) - \delta(t,u')| < \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]$, dès que $|u - u'| < \eta$. Ce qui précède nous montre que l'application

$$u \to \int_{\delta_u} f(z)\,dz$$

est localement constante. Elle est donc constante puisque $[0,1]$ est connexe. □

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Corollaire 10.4.2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ dont les composantes connexes sont simplement connexes.*

(i) *Si $f \in \mathcal{H}(U)$ elle vérifie les propriétés de* 10.2.5. *En particulier, f possède des primitives dans U*

(ii) *Si γ est un lacet dans U, on a $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$ pour $z \notin U$.*

Démonstration. (i) C'est clair d'après 10.4.1.

(ii) Si $z \notin U$, la fonction $\zeta \to (\zeta - z)^{-1}$ est holomorphe dans U, donc y possède des primitives d'après (i). D'où le résultat (10.2.4). □

> ***Remarque.*** Compte tenu de 6.3.3 et 10.2.5, la fonction $z \to z^{-1}$ n'admet pas de primitive dans $\mathbb{C}^*$. Il en résulte que $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe.

Corollaire 10.4.3. *Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$.*

(i) *Si $f \in \mathcal{H}(U)$ est sans zéro dans U, il existe $g \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $f = e^g$.*

(ii) *Si $f \in \mathcal{H}(U)$ est sans zéro dans U, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe $h \in \mathcal{H}(U)$ telle que $f = h^n$.*

Démonstration. (i) Si $f \in \mathcal{H}(U)$ est sans zéro dans U, la fonction $\dfrac{f'}{f}$ est holomorphe dans U. D'après 10.4.2 (i), elle a une primitive ℓ dans U. On a $f' - \ell f = 0$, donc $(fe^{-\ell})' = 0$, puis $f = ce^{\ell}$, avec $c \in \mathbb{C}^*$, puisque U est connexe. Si $\mu \in \mathbb{C}$ vérifie $c = e^{\mu}$ (3.7.4), on obtient (i) en prenant $g = \ell + \mu$.

(ii) Soit g comme en (i). Si $h = \dfrac{1}{n}g$, il vient $f = h^n$. □

Théorème 10.4.4. (Formule de Cauchy). *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$, et γ un lacet dans U homotope à un point dans U. Pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus \operatorname{im}\gamma$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta.$$

Démonstration. Définissons $g \colon U \to \mathbb{C}$ par :

$$\begin{cases} g(z) = \dfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z), \\ g(\zeta) = \dfrac{1}{(\zeta - z)^{n+1}}\left[f(z) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(\zeta - z)^k f^{(k)}(z)\right] \text{ si } \zeta \neq z. \end{cases}$$

La fonction g est continue sur U et holomorphe dans $U\setminus\{z\}$, donc $g \in \mathcal{H}(U)$ (6.6.5). Ecrivant que l'intégrale de g le long de γ est nulle (10.4.1), on obtient :

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1-k}}.$$

Pour $0 \leqslant k < n$, $\zeta \to (\zeta - z)^{k-n-1}$ a une primitive dans $\mathbb{C}\setminus\{z\}$ (6.4.2), donc les intégrales correspondantes sont nulles (10.2.5). D'où le résultat. □

10.5 SÉRIES DE LAURENT

10.5.1. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r, R \in [0, +\infty[$ vérifiant $r < R$. On note

$$C(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C}\,;\; r < |z-a| < R\}\,,\; C'(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C}\,;\; r \leqslant |z-a| \leqslant R\}.$$

On dit que $C(a, r, R)$ (respectivement $C'(a, r, R)$) est la *couronne ouverte* (respectivement *couronne fermée*) associée à a, r et R.

10.5.2. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}(U)$ indexée par $\mathbb{Z}$. On a défini en 8.8.5 la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n$. On va envisager le cas où on a $f_n(z) = \alpha_n z^n$, avec $\alpha_n \in \mathbb{C}$ pour tout entier n.

La série entière $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_{-n} z^n$ converge absolument dans un disque de rayon $\dfrac{1}{r}$, avec $r \geqslant 0$. Il en résulte que la série $\sum_{n=-1}^{\infty} \alpha_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n} z^{-n}$ converge absolument pour $|z| > r$.

La série $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$ converge absolument dans un disque de rayon $R \geqslant 0$, avec $R \leqslant +\infty$.

Si $r < R$, la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n z^n$ converge absolument pour $r < |z| < R$. On dit que c'est la *série de Laurent* associée à la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Compte tenu de 3.2.1, cette série de Laurent converge normalement dans toute couronne fermée $C'(0, r_1, R_1)$, avec $r < r_1 < R_1 < R$. Il résulte alors de 7.4.2 que sa somme est holomorphe dans $C(0, r, R)$. On définit des notions analogues pour une couronne $C(a, r, R)$, avec $a \in \mathbb{C}$.

Théorème 10.5.3. (Formule de Cauchy pour une couronne). *Soient f une fonction holomorphe dans une couronne $C = C(a, r, R)$ et ρ_1, ρ_2 des réels vérifiant $r < \rho_1 < \rho_2 < R$. On note γ_1 (respectivement γ_2) le cercle $C(a, \rho_1)$ (respectivement $C(a, \rho_2)$) orienté dans le sens direct. Si $\rho_1 < |z| < \rho_2$, on a :*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Démonstration. Définissons $g\colon C \to \mathbb{C}$ par :

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi} f'(z)\;,\; g(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \;\text{ si }\; \zeta \neq z.$$

La fonction g est continue sur C et holomorphe dans $C\backslash\{z\}$. Par suite, elle est holomorphe dans C (6.5.5). Les lacets γ_1 et γ_2 sont homotopes dans C (10.1.6). Compte tenu de 10.4.1, il vient :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \operatorname{ind}_{\gamma_2}(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz - \operatorname{ind}_{\gamma_1}(z).$$

Or, $\operatorname{ind}_{\gamma_1}(z) = 0$ et $\operatorname{ind}_{\gamma_2}(z) = 1$ (6.3.3). D'où le résultat. □

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Théorème 10.5.4. *Soient $a \in \mathbb{C}$, $r, R \in [0, +\infty]$, et f une fonction holomorphe dans la couronne $C = C(a, r, R)$. Il existe une et une seule suite de nombres complexes $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que la série de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_n z^n$ converge dans $C(0, r, R)$ et vérifiant pour tout $z \in C$:*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z-a)^n. \tag{6}$$

On dit que (6) *est le* développement de Laurent *de f dans C. Si $r < \rho < R$ et si γ est le cercle $C(a, \rho)$ orienté dans le sens direct, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:*

$$\alpha_n = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{it})e^{-int}\,dt. \tag{7}$$

Démonstration. Fixons ρ_1, ρ_2 vérifiant $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, et utilisons les notations γ_1, γ_2 de 10.5.3. Si $\rho_1 < r_1 \leqslant |z-a| \leqslant r_2 < \rho_2$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Notons $M = \sup\{|f(\zeta)|\,;\, \zeta \in C'(a, \rho_1, \rho_2)\}$.
Si $|\zeta - a| = \rho_2$, il vient :

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} \text{ et } \left|\frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{Mr_2^n}{\rho_2^{n+1}}.$$

On peut donc intégrer la série terme à terme. D'où :

$$\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta\Big)(z-a)^n.$$

De même, si $|\zeta - a| = \rho_1$:

$$\frac{-f(\zeta)}{(\zeta - a)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{-\infty}^{n=-1}\frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\ ,\ \left|\frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{Mr_1^n}{\rho_1^{n+1}}.$$

On a alors :

$$\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{-\infty}^{n=-1}\Big(\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta\Big)(z-a)^n.$$

On a donc montré qu'il existe un développement de la forme (6). Prouvons l'unicité. Supposons que, si $r < \rho < R$, on ait

$$f(a+\rho e^{it}) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_n\rho^n e^{int},$$

La convergence étant normale pour $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, on peut intégrer terme à terme le développement de $f(a+\rho e^{it})e^{-ikt}$. Alors :

$$\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{it})e^{-ikt}\,dt = \sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_n\rho^n\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\,dt.$$

On en déduit immédiatement les formules (7). $\square$

Corollaire 10.5.5. (Inégalités de Cauchy). *Soit $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z-a)^n$ le développement de Laurent d'une fonction f holomorphe dans une couronne $C(a,r,R)$. Si $r < \rho < R$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$|\alpha_n| \leqslant \frac{\sup\{|f(z)| \, ; \, |z-a| = \rho\}}{\rho^n}.$$

Démonstration. C'est immédiat d'après (7). □

Proposition 10.5.6. *Soit f une fonction holomorphe dans une couronne $C(a,r,R)$. Il existe un couple unique (f_1, f_2), avec f_1 holomorphe dans $D(a,R)$, f_2 holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} \, ; \, |z-a| > r\}$, et vérifiant :*

$$f = f_1 + f_2 \ , \ \lim_{|z| \to +\infty} f_2(z) = 0.$$

Démonstration. Si le développement de Laurent dans $C(a,r,R)$ est

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z-a)^n,$$

il suffit de prendre

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n \ , \ f_2(z) = \sum_{n<0} \alpha_n (z-a)^n$$

pour obtenir un couple (f_1, f_2) répondant à la question. Soit (g_1, g_2) un autre couple solution. Si l'on définit h par

$$h(z) = f_1(z) - g_1(z) \ \text{ si } \ |z| < r \ , \ h(z) = f_2(z) - g_2(z) \ \text{ si } \ |z| > R,$$

h est une fonction entière qui tend vers 0 quand $|z|$ tend vers $+\infty$. D'après le théorème de Liouville, $g = 0$. D'où $(f_1, f_2) = (g_1, g_2)$. □

10.5.7. L'existence d'un développement de Laurent va nous permettre de donner une caractérisation autre que celle de 8.2.3 d'une singularité isolée.

Soient $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$, et $U = D^*(a,R)$ le disque épointé de centre a et de rayon R. Comme $D^*(a,R) = C(a,0,R)$, si $f \in \mathcal{H}(U)$, elle a un développement de Laurent dans U :

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z-a)^n.$$

• Si $\alpha_n = 0$ pour tout $n < 0$, il est clair que f a une singularité illusoire en a.

• Supposons qu'il existe $p > 0$ tel que $\alpha_{-p} \neq 0$ et $\alpha_{-n} = 0$ pour $n > p$. Il est immédiat que a est un pôle d'ordre p de f et que la partie principale de f est

$$\sum_{n=1}^{p} \alpha_{-n} (z-a)^{-n}.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

• S'il existe une infinité d'indices n tels que $\alpha_{-n} \neq 0$, nécessairement, d'après 8.2.3, f a une singularité essentielle en a.

Les trois cas précédents s'excluant mutuellement, on a bien obtenu une nouvelle caractérisation des singularités isolées en fonction du développement de Laurent.

Dans les cas où f n'a pas de singularité illusoire en a, on dit encore (voir 8.2.3) que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n}(z-a)^{-n}$$

est la *partie principale* de f en a, et que α_{-1} est le *résidu* de f en a (voir 8.4.1). On note encore $\alpha_{-1} = \mathrm{Res}(f, a)$, et on convient que $\mathrm{Res}(f, a) = 0$ si f a une singularité illusoire en a.

10.6 LES GÉNÉRALISATIONS

Proposition 10.6.1. *Soient $C = C(a, r, R)$ une couronne dans $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe dans C, et*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z-a)^n$$

son développement de Laurent dans C. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *f a des primitives dans C.*

(ii) $\mathrm{Res}(f, a) = \alpha_{-1} = 0$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit F une primitive de f dans $\mathbb{C}$. On a alors des développements de Laurent dans C :

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_n (z-a)^n \Rightarrow f(z) = F'(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n\beta_n (z-a)^{n-1}.$$

Ainsi, $\alpha_{n-1} = n\beta_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En particulier, $\alpha_{-1} = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit γ un chemin fermé dans C. L'ensemble $\mathrm{im}\,\gamma$ étant compact, la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n \big(\gamma(t) - a\big)^n \gamma'(t)$$

est normalement convergente en les points de $t \in [0, 1]$ où elle est définie. Ainsi :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n \int_\gamma (z-a)^n\,dz.$$

Si $n \neq -1$, $z \to \dfrac{1}{n+1}(z-a)^{n+1}$ est une primitive de $z \to (z-a)^n$. Par suite, l'intégrale de $(z-a)^n$ le long de γ est nulle (10.2.5). On en déduit que, si $\alpha_{-1} = 0$, l'intégrale de f le long de γ est nulle. On conclut à nouveau d'après 10.2.5. $\square$

Théorème 10.6.2. (Théorème des résidus). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a_1, \ldots, a_n$ des points distincts de U, et f une fonction holomorphe dans $U \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. Soit γ un lacet dans U, homotope à un point dans U, et tel que $\operatorname{im}\gamma$ ne contienne aucun des a_k. Alors :*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ind}_\gamma(a_k)\ \operatorname{Res}(f, a_k).$$

Démonstration. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, soit h_k la partie principale de f en a_k. Si l'on note $g = f - h_1 - \cdots - h_n$, alors g a une singularité illusoire en tout point a_k. Elle se prolonge en une fonction holomorphe dans U, donc (10.4.1) :

$$\int_\gamma g(z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_\gamma h_k(z)\,dz.$$

D'après 10.6.1 et 10.2.5, on a

$$\int_\gamma h_k(z)\,dz = \int_\gamma \frac{\operatorname{Res}(f, a_k)}{z - a}\,dz.$$

D'où le résultat. □

Lemme 10.6.3. *Soient U, V des ouverts de $\mathbb{C}$, γ un arc dans U, $f \in \mathcal{H}(U)$ à valeurs dans V, et $g \in \mathcal{H}(V)$. Alors :*

$$\int_\gamma g\big(f(z)\big) f'(z)\,dz = \int_{f\circ\gamma} g(z)\,dz.$$

Démonstration. Soit ψ une primitive de g le long de $f\circ\gamma$. Si $t_0 \in [0,1]$, il existe un voisinage I_0 de t_0 dans $[0,1]$ et une primitive G_0 de g, définie dans un voisinage W_0 de $f\circ\gamma(t_0)$, tels que $t \in I_0$ implique $f\circ\gamma(t) \in W_0$ et $\psi(t) = G_0\big(f\circ\gamma(t)\big)$.

Pour $z \in f^{-1}(W_0)$, on a $\big[G_0\big(f(z)\big)\big]' = g\circ f(z) f'(z)$. Ceci montre que $G_0\circ f$ est une primitive locale de $(g\circ f)f'$. Par suite, ψ est une primitive de $(g\circ f)f'$ le long de $f\circ\gamma$. D'où le résultat. □

Théorème 10.6.4. (Théorème de l'indice). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $g \in \mathcal{H}(U)$, et $f \in \mathcal{M}(U)$ n'ayant qu'un nombre fini de zéros $a_1, \ldots, a_m$ dans U (comptés avec leur multiplicité), et qu'un nombre fini de pôles $b_1, \ldots, b_n$ dans U (comptés avec leur multiplicité). Soit γ un lacet dans U, homotope à un point dans U, et dont l'image ne contient aucun des a_k et aucun des b_j. Alors :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma g(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{m} g(a_k)\ \operatorname{ind}_\gamma(a_k) - \sum_{j=1}^{n} g(a_j)\ \operatorname{ind}_\gamma(b_j).$$

En particulier :

$$\operatorname{ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{ind}_\gamma(a_k) - \sum_{j=1}^{k} \operatorname{ind}_\gamma(b_j).$$

Démonstration. Compte tenu de 10.6.3, on modifie facilement la preuve de 8.5.1 pour obtenir le résultat. □

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

10.6.5. D'après ce qui précède, on obtient, comme en 8.6.2, le résultat suivant :

Théorème 10.6.6. (Théorème de Rouché). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un lacet dans U, homotope à un point dans U, et $f, g \in \mathcal{H}(U)$. On suppose que f (respectivement g) n'a qu'un nombre fini de zéros $a_1, \ldots, a_m$ (respectivement $b_1, \ldots, b_n$) dans U, comptés avec leur multiplicié, et que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ pour tout $z \in \operatorname{im}\gamma$. Alors :*

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{ind}_\gamma(a_k) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ind}_\gamma(b_j).$$

EXERCICES

Exercice 10.1. Déterminer le développement de Laurent en puissances de z de

$$f(z) = \sin\left(\frac{z-1}{z}\right)$$

dans $\mathbb{C}^*$.

Exercice 10.2. Soient $D = D(0,1)$, $C_1 = C(0,1,2)$, $C_2 = \{z \in \mathbb{C}\,;\, 2 < |z|\}$.

Déterminer les développements de Laurent en puissances de z de

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{2-z}$$

dans D, C_1, C_2.

Exercice 10.3. Soient $C_1 = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| > 1\}$ et $C_2 = C(0,0,1)$. Déterminer les développements de Laurent en puissances de z de

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

dans C_1 et C_2.

Exercice 10.4. Soient $r, R \in [0, +\infty]$, U la couronne $C(0, r, R)$, et

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n \ ,\ g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n z^n$$

les développements de Laurent de deux fonctions holomorphes dans U.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on peut définir :

$$c_n = \sum_{-\infty}^{\infty} a_p b_{n-p}.$$

Prouver que, si $z \in U$, on a :

$$f(z)g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 10.1. Si $z \neq 0$, on a :
$$\sin\left(\frac{z-1}{z}\right) = (\sin 1)\cos\left(\frac{1}{z}\right) - (\cos 1)\sin\left(\frac{1}{z}\right).$$
Comme
$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}} \text{ et } \cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}},$$
on obtient facilement le résultat demandé.

Exercice 10.2. Si $z \in D$, on a :
$$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}\ ,\ \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$
Si, pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_{2k} = 1 + \dfrac{1}{2^{2k+1}}$,$a_{2k+1} = \dfrac{1}{2^{2k+2}}$, on a, pour $z \in D$:
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Si $z \in C_1$, il vient :
$$\frac{1}{1-z^2} = -\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+2}}\ ,\ \frac{1}{2-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$
Si l'on pose $b_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ pour $n \geqslant 0$, $b_n = -1$ si $n \in -2\mathbb{N}^*$, et $b_n = 0$ si $n \in -2\mathbb{N}^* + 1$, on obtient, pour $z \in C_1$:
$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n z^n.$$

Supposons $z \in C_2$. Il vient :
$$\frac{1}{1-z^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+2}}\ ,\ \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}.$$
Ainsi, si $z \in C_2$, on obtient
$$f(z) = \sum_{-\infty}^{-1} c_n z^n,$$
avec $c_{2n} = -1 - \dfrac{1}{2^{2n-1}}$ et $c_{2n+1} = -\dfrac{1}{2^{2n+2}}$ si $n \in -\mathbb{N}^*$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Exercice 10.3. Posons $u = \dfrac{1}{z}$, $f(z) = g(u) = \dfrac{u}{u-1}e^u$.

Supposons $z \in C_1$. On a alors $|u| < 1$ et :

$$g(u) = -u\Big(\sum_{n=0}^{\infty} u^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\Big).$$

On a alors facilement :

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\Big[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{n!}\Big]\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Supposons $z \in C_2$. Alors $u \in C_1$ et, dans C_1, g a un développement de Laurent dont on note a_n, $n \in \mathbb{Z}$, les coefficients. Si γ est le cercle $C(0,1)$ orienté dans le sens direct, on sait que

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{g(u)}{u^{n+1}}\,du = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{e^u}{u^n(u-1)}\,du.$$

Par suite, si $h_n(u) = \dfrac{e^u}{u^n(u-1)}$, on a $a_n = \mathrm{Res}(h_n, 0) + \mathrm{Res}(h_n, 1)$.

Comme 1 est pôle simple de h_n, on trouve $\mathrm{Res}(h_n, 1) = e$ (voir 8.4.2). Si $n \leqslant 0$, on a $\mathrm{Res}(h_n, 0) = 0$. Traitons le cas où $n > 1$. d'après l'étude du premier cas, au voisinage de 0, il vient :

$$h_n(u) = -\frac{1}{u^n}\sum_{p=0}^{\infty}\Big[1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{p!}\Big]u^p.$$

On a alors $\mathrm{Res}(h_n, 0) = -1 - \dfrac{1}{1!} - \cdots - \dfrac{1}{(n-1)!}$ si $n > 0$. On obtient alors

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e z^n - \sum_{-\infty}^{-1}\Big[1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{(-n-1)!}\Big]z^n$$

si $z \in C_2$.

Exercice 10.4. La fonction fg étant holomorphe dans U a un développement de Laurent dans U :

$$f(z)g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Si $r < \rho < R$ et si γ est le cercle $C(0,\rho)$ orienté dans le sens direct, on sait que

$$c_n = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)g(z)}{z^{n+1}}\,dz \quad \text{et} \quad b_{n-p} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{g(z)}{z^{n-p+1}}\,dz.$$

La série $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n g(z)$ est normalement convergente sur $C(0,\rho)$. On a donc :

$$c_n = \frac{1}{2i\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} a_p \int_\gamma z^{p-n-1} g(z)\,dz.$$

D'où immédiatement le résultat.

Chapitre 11

Holomorphie et parties localement finies

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. On a prouvé que l'ensemble des zéros de f est une partie localement finie de U. Dans ce chapitre, on va montrer que, si A est une partie localement finie de U, il existe une fonction holomorphe dans U dont l'ensemble des zéros est A. On étudie aussi quelques questions analogues.

11.1 PRODUIT CANONIQUE DE WEIERSTRASS

11.1.1. On pose

$$E_0(z) = 1 - z \ \text{ et } \ E_p(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right) \ \text{ si } \ p \geqslant 1.$$

On dit que E_p est le $p^{\text{ème}}$ *facteur élémentaire de Weierstrass*. Si $|z| < 1$, il vient :

$$E_p(z) = \exp\left(\operatorname{Log}(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right) = \exp\left(-\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right).$$

Lemme 11.1.2. *Si $p \in \mathbb{N}$ et $|z| \leqslant 1$, on a $|E_p(z) - 1| \leqslant |z|^{p+1}$.*

Démonstration. C'est évident si $p = 0$. Supposons $p \geqslant 1$. Il vient facilement :

$$-E_p'(z) = z^p \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right).$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

On en déduit que le développement en série de $-E_p$ est de la forme

$$-E_p(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n,$$

où les a_n sont des réels strictement positifs. Comme $E_p(0) = 1$, on obtient :

$$1 - E_p(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Par conséquent, puisque $E_p(1) = 0$, si $0 < |z| \leqslant 1$:

$$\left|\frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}}\right| \leqslant \sum_{n=p}^{\infty} a_n \frac{|z|^{n-p}}{n+1} \leqslant \sum_{n=p}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} = \frac{1 - E_p(1)}{1^{p+1}} = 1.$$

D'où le lemme. □

Théorème 11.1.3. *Soit $(z_n)_n$ une suite de nombres complexes non nuls vérifiant $\lim_n r_n = +\infty$, avec $r_n = |z_n|$. Soit $(p_n)_n$ une suite d'entiers positifs ou nuls telle que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < +\infty.$$

pour tout réel r strictement positif. Alors le produit infini

$$E(z) = \prod_{n=0}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$. L'ensemble des zéros de la fonction entière E est $\{z_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. La multiplicité du zéro a de E est le nombre d'entiers n tels que $a = z_n$. On dit que E est le produit canonique de Weierstrass *associé aux suites $(z_n)_n$ et $(p_n)_n$.*

Démonstration. Si $|z| \leqslant r \leqslant r_n$, il résulte de 11.1.2 que

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leqslant \left|\frac{z}{z_n}\right|^{1+p_n} \leqslant \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}.$$

Comme r_n tend vers $+\infty$ si n tend vers $+\infty$, la série de terme général $\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$ est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$. Le théorème est alors conséquence de 9.2.3 et 9.2.5. □

Remarque. Si la série $\sum r_n^{-1}$ est convergente on peut prendre $p_n = 0$ pour tout n. Le produit canonique est alors :

$$E(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right).$$

De même, si la série $\sum r_n^{-2}$ converge, on peut prendre $p_n = 1$ pour tout n, et le produit canonique est alors :

$$E(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

11.2 APPLICATIONS

11.2.1. Soit f une fonction holomorphe non nulle dans un ouvert connexe U. D'après 4.3.3 et 8.1.2, l'ensemble des zéros de f est dénombrable. On peut donc indexer les éléments de cet ensemble pour obtenir une suite de nombres complexes.

Théorème. (Théorème de factorisation de Weierstrass). *Soient f une fonction entière vérifiant $f(0) \neq 0$ et $(a_n)_n$ la suite des zéros de f comptés avec leur multiplicité. Il existe $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et une suite $(p_n)_n$ d'entiers positifs ou nuls tels que*

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=0}^{\infty} E_{p_n}\Big(\frac{z}{a_n}\Big).$$

Démonstration. Si $n \in \mathbb{N}$, notons p_n la multiplicité du zéro a_n de f. Soit E le produit canonique de Weierstrass associé aux suites $(a_n)_n$ et $(p_n)_n$. La fonction f/E se prolonge en une fonction entière h sans zéro. Comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe (10.1.10), il existe $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ vérifiant $h = e^g$ (10.4.3). D'où le résultat. □

> ***Remarque.*** La factorisation de f dans le théorème 11.2.1 n'est pas unique. D'autre part, si l'ensemble des zéros de f est fini, il est clair que l'on remplace le produit infini de 11.2.1 par un produit fini.

11.2.2. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$.

Si $f \in \mathcal{H}(U)$ et si A est une partie de U, on note $\|f\|_A = \sup\{|f(z)|\,;\, z \in A\}$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, posons $K_p = \{z \in U\,;\, |z| \leqslant p\}$ si $U = \mathbb{C}$, et

$$K_p = \Big\{z \in U\,;\, |z| \leqslant p, d(z, \mathbb{C}\backslash U) \geqslant \frac{1}{p}\Big\}$$

si $U \neq \mathbb{C}$. Les ensembles K_p sont ceux définis en 8.1.1.

On va utiliser ces notations dans la suite de ce paragraphe.

Proposition 11.2.3. *Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in U\backslash K_p$.*

(i) *Il existe $f \in \mathcal{H}(U)$ injective et vérifiant $f(a) = 1$, $\|f\|_{K_p} < 1$.*

(ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{H}(U)$ telle que $\|g - 1\|_{K_p} \leqslant \varepsilon$, admettant a comme unique zéro, l'ordre de ce zéro étant égal à 1.*

Démonstration. (i) Si $|a| < p$, la fonction $f(z) = \dfrac{z}{a}$ convient. Si $d(a, \mathbb{C}\backslash U) < p^{-1}$, il existe $b \in \mathbb{C}\backslash U$ tel que $|a - b| < p^{-1}$, et alors $f(z) = \dfrac{a-b}{z-b}$ convient.

(ii) Soit f comme en (i) et, pour $n \geqslant 1$, soit :

$$g_n = E_n(f).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a est l'unique zéro de g_n. D'autre part, comme f est injective, on a $f'(a) \neq 0$ (8.7.2), donc a est zéro d'ordre 1 de g_n.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Soit $r = \|f\|_{K_p} < 1$. D'après 11.1.2, si $z \in K_p$, on a :

$$|g_n(z) - 1| \leqslant |f(z)|^{n+1} \leqslant r^{n+1}.$$

On voit donc que la suite $(g_n - 1)_n$ converge uniformément vers 0 sur K_p. On a ainsi le résultat en prenant $g = g_n$ avec n assez grand. □

Théorème 11.2.4. (Théorème de Weierstrass). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, A une partie localement finie de U, et $m\colon A \to \mathbb{N}^*$ une application. Il existe $f \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Les seuls zéros de f sont les éléments de A.*

(ii) *Tout $a \in A$ est zéro d'ordre $m(a)$ de f.*

Démonstration. Posons $A_0 = A \cap K_1$ et $A_p = A \cap (K_{p+1} \backslash K_p)$ pour $p \geqslant 1$. On indexe les éléments de A en une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de sorte que, pour tout $a \in A$, on ait $\operatorname{card}\{n \in \mathbb{N}^* \,;\, a_n = a\} = m(a)$. On peut en outre supposer que si $a_s \in A_p$ et $a_t \in A_{p+1}$, alors $s < t$.
Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a :

$$|\alpha\beta - 1| \leqslant |\alpha - 1|\,|\beta - 1| + |\alpha - 1| + |\beta - 1|.$$

D'après ce qui précède et 11.2.3, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $g_p \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant les conditions suivantes :

1) Les seuls zéros de g_p sont les éléments de A_p.

2) Tout $a \in A_p$ est zéro d'ordre $m(a)$ de g_p.

3) On a $\|g_p - 1\|_{K_p} \leqslant \dfrac{1}{p^2}\cdot$

Comme tout compact K de U est contenu dans un K_p, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}(g_p - 1)$ est normalement convergente sur tout compact de U. Compte tenu de 9.2.3 et 9.2.5, on voit alors que la fonction définie sur U par

$$f(z) = \Big(\prod_{a\in A_0} (z-a)^{m(a)}\Big)\Big(\prod_{p=1}^{\infty} g_p(z)\Big)$$

vérifie les conditions de l'énoncé. □

Corollaire 11.2.5. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{M}(U)$. Alors f est de la forme g/h, avec $g, h \in \mathcal{H}(U)$, sans zéro commun.*

Démonstration. Quitte à raisonner dans chaque composante connexe de U, on peut supposer U connexe. Si $f \in \mathcal{H}(U)$, le résultat est clair. Sinon, l'ensemble A des pôles de f est localement fini dans U. Pour $a \in A$, soit $m(a)$ l'ordre de a en tant que pôle de f. Soit $g \in \mathcal{H}(U)$ associée à $\big(a, m(a)\big)_{a\in A}$ comme en 11.2.4. Alors $h = fg$ est holomorphe dans U et aucun point de A n'est zéro de h. □

Théorème 11.2.6. (Théorème de Mittag-Leffler). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, A une partie localement finie de U et, pour tout $a \in A$, P_a un polynôme sans terme constant, à coefficient dans $\mathbb{C}$. Il existe $f \in \mathcal{M}(U)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Les éléments de A sont les seuls pôles de f.*

(ii) *Pour tout $a \in A$, la partie principale de f en a est $P_a\big((z-a)^{-1}\big)$.*

Démonstration. Soit $a \in U$ un pôle de f d'ordre m. On a :

$$P_a\Big(\frac{1}{z-a}\Big) = \frac{\alpha_q}{(z-a)^q} + \frac{\alpha_{q-1}}{(z-a)^{q-1}} + \cdots + \frac{\alpha_1}{z-a}\cdot$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \notin K_p$. En élevant à une puissance convenable une fonction ayant la propriété de 11.2.3, (i), on obtient une fonction $f_1 \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant :

$$f_1(a) = 1\ ,\ \|f_1\|_{K_p} \leqslant \frac{\varepsilon}{q|\alpha_q|}[d(a,K_p)]^q.$$

L'application méromorphe h_1 donnée par

$$h_1(z) = \frac{\alpha_q f_1(z)}{(z-a)^q}$$

a les propritées suivantes :

1) $\|h_1\|_{K_p} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{q}\cdot$

2) a est le seul pôle de h_1 et la partie principale de de h_1 en a est de la forme :

$$P_a\Big(\frac{1}{z-a}\Big) - \frac{\beta_{q-1}}{(z-a)^{q-1}} - \cdots - \frac{\beta_1}{z-a}\cdot$$

Procédant par récurrence, on voit que l'on peut construire une fonction $h_a \in \mathcal{M}(U)$ ayant a pour unique pôle, pour partie principale $P_a\big((z-a)^{-1}\big)$ en a, et vérifiant $\|h_a\|_{K_p} \leqslant \varepsilon$. On a obtenu le résultat si A est un singleton.

Envisageons le cas général, et utilisons la notations a_p de la preuve de 11.2.4. Ce qui précède montre l'existence d'une fonction méromorphe g_p sur U, dont les seuls pôles sont les éléments de A_p, avec pour partie principale $P_a\big((z-a)^{-1}\big)$ si $a \in A_p$, et vérifiant $\|g_p\|_{K_p} \leqslant \dfrac{1}{p^2}\cdot$ Compte tenu de 8.8.4, on voit que la fonction méromorphe sur U définie par

$$f(z) = \sum_{a\in A_0} P_a\Big(\frac{1}{z-a}\Big) + \sum_{p=1}^{\infty} g_p(z)$$

est solution du problème. □

Théorème 11.2.7. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, A une partie localement finie de A, et $m\colon A \to \mathbb{N}$ une application. Si $a \in A$, soient $w_{n,a}$ des nombres complexes avec $0 \leqslant n \leqslant m(a)$. Il existe $f \in \mathcal{H}(U)$ telle que $f^{(n)}(a) = n!w_{n,a}$ pour tout $a \in A$ et $0 \leqslant n \leqslant m(a)$.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Démonstration. D'après 11.2.4, il existe $g \in \mathcal{H}(U)$ dont les seuls zéros sont les éléments de A, chaque $a \in A$ étant zéro d'ordre $1 + m(a)$ de g.

Pour tout $a \in A$, considérons une fraction rationnelle de la forme

$$F_a(z) = \sum_{j=1}^{1+m(a)} \frac{\alpha_{j,a}}{(z-a)^j}.$$

On veut montrer que l'on peut choisir les $c_{j,a}$ pour que, au voisinage de a, $g(z)F_a(z)$ soit de la forme :

$$w_{0,a} + w_{1,a}(z-a) + \cdots + w_{m(a),a}(z-a)^{m(a)} + \sum_{p=m(a)+1}^{\infty} \beta_p (z-a)^p. \quad (1)$$

Pour simplifier les notations, prenons $a = 0$, et posons $m = m(0)$, $w_{n,0} = w_n$, $\alpha_{j,0} = \alpha_j$. Ecrivons, au voisinage de 0 :

$$g(z) = \sum_{p+1}^{\infty} \gamma_p z^{p+m}.$$

On veut obtenir :

$$g(z)F_0(z) = w_0 + w_1 z + \cdots + w_m z^m + \sum_{p=m+1}^{\infty} \beta_p z^p. \quad (2)$$

On a d'autre part :

$$g(z)F_0(z) = \Big(\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j z^{m+1-j}\Big)\Big(\sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p z^p\Big). \quad (3)$$

Comparant les coefficients de $1, z, \ldots, z^m$ dans (2) et (3), on voit que, γ_1 étant non nul, on peut déterminer les α_j de proche en proche.

On obtient ainsi des fractions rationnelles F_a vérifiant (1) pour tout $a \in A$. D'après le théorème de Mittag-Leffler, il existe $h \in \mathcal{H}(U)$ tel que les pôles de h soient les éléments de A, la partie principale de h en $a \in A$ étant F_a. Alors, $f = gh$ est solution du problème. $\square$

11.3 IDÉAUX

11.3.1. Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un idéal $\mathfrak{a}$ de A est de *type fini* s'il existe s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in A$ tels que $\mathfrak{a} = Aa_1 + \cdots + Aa_n$. L'idéal $\mathfrak{a}$ est dit *principal* s'il existe $a \in A$ vérifiant $\mathfrak{a} = Aa$.

L'anneau A est dit *nœthérien* si tout idéal de A est de type fini. Il est dit *principal* s'il est intègre et si tout idéal de A est principal.

Lemme 11.3.2. *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Il existe une partie A de U vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *A est infinie.*
(ii) *A est localement finie dans U.*

Démonstration. C'est clair si $U = \mathbb{C}$ (prendre $A = \mathbb{Z}$). Supposons $U \neq \mathbb{C}$. Il existe $a \in \overline{U} \backslash U$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $z_n \in U$ vérifiant $|z_n - a| < 1/n$. Il est alors immédiat que la suite $(z_n)_n$ répond à la question. □

Proposition 11.3.3. *Si U est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, l'anneau $\mathcal{H}(U)$ n'est pas nœthérien.*

Démonstration. Si $f \in \mathcal{H}(U)$, on note $Z(f)$ l'ensemble des zéros de f. Soient A une partie de U vérifiant les conditions de 11.3.2 et $\mathfrak{a}$ l'ensemble des éléments $f \in \mathcal{H}(U)$ tels que $Z(f) \cap A$ soit infini. Il est clair que $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathcal{H}(U)$. Supposons qu'il existe $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{a}$ tels que :

$$\mathfrak{a} = \mathcal{H}(U)f_1 + \cdots + \mathcal{H}(U)f_n.$$

Si $f \in \mathfrak{a}$, $Z(f)$ contient l'ensemble infini $E = Z(f_1) \cap \cdots \cap Z(f_n)$. Soit $a \in E$. D'après 11.2.4, il existe $g \in \mathcal{H}(U)$ tel que $Z(g) = E \backslash \{a\}$. On a $g \in \mathfrak{a}$ et $E \not\subset Z(g)$. Contradiction. □

Proposition 11.3.4. *Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g \in \mathcal{H}(U)$ sans zéro commun. Il existe $h, \ell \in \mathcal{H}$ vérifiant :*

$$hf + \ell g = 1\ ,\ Z(h) = \emptyset.$$

Démonstration. Si $a \in U$ et si u est holomorphe dans un voisinage de a, on note $\omega_a(u)$ l'ordre du zéro a de u. On remarque que, si a est zéro d'une fonction holomorphe u, on a $\omega_a(u) = \omega_a(e^u - 1)$.

• Si $g = 0$, alors $Z(f) = \emptyset$. Il suffit de prendre $h = 1/f$ et $\ell = 0$.

• Supposons $g \neq 0$. Soit $a \in Z(g)$. Comme $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset$, il existe un disque ouvert $D_a = D(a, r_a) \subset U$ tel que $f(z) \neq 0$ pour $z \in D_a$. D'après 10.4.3, il existe $u_a \in \mathcal{H}(D_a)$ vérifiant $f|D_a = \exp(u_a)$. L'ensemble $Z(f)$ étant localement fini dans U (4.3.3), il résulte de 11.2.4 qu'il existe $v \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $\omega_a(v - u_a) > \omega_a(g)$ pour tout $a \in Z(g)$. Alors :

$$\omega_a(f - e^v) = \omega_a(e^{u_a} - e^v) = \omega_a(e^{u_a - v} - 1) = \omega_a(u_a - v).$$

On en déduit que $(f - e^v)/g$ se prolonge en une fonction holomorphe μ sur U. Comme

$$e^{-v}f - \mu e^{-v}g = 1,$$

on a obtenu le résultat. □

Théorème 11.3.5. *Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathcal{H}(U)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathfrak{a}$ *est principal.*

(ii) $\mathfrak{a}$ *est de type fini.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Démonstration. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est claire. Supposons (ii) vérifié, et prouvons (i). Ecrivons $\mathfrak{a} = \mathcal{H}(U)f_1 + \cdots + \mathcal{H}(U)f_n$. Par récurrence sur n, il suffit d'établir le résultat si $n = 2$.

Soient $E = Z(f_1) \cap Z(f_2)$. Si $E = \emptyset$, l'assertion résulte de 11.3.4. Supposons $E \neq \emptyset$. Pour $a \in E$, notons $\theta(a) = \min\{\omega_a(f_1), \omega_a(f_2)\}$. D'après 11.2.4, il existe $f \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $Z(f) = E$ et $\omega_a(f) = \theta(a)$ pour tout $a \in E$. Les fonctions f_1/f et f_2/f se prolongent en des éléments $g_1, g_2 \in \mathcal{H}(U)$. Comme $f_1 = g_1 f$ et $f_2 = g_2 f$, il vient $\mathfrak{a} \subset \mathcal{H}(U)f$. D'autre part, par construction, g_1 et g_2 sont sans zéro commun. D'après 11.3.4, il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $h_1 g_1 + h_2 g_2 = 1$. On en déduit que $f = h_1 f_1 + h_2 f_2$. D'où $\mathcal{H}(U)f \subset \mathfrak{a}$. □

EXERCICES

Exercice 11.1. Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathcal{H}(U)$.

a) On suppose qu'il existe $a \in U$ qui n'est pas zéro commun à tous les éléments de $\mathfrak{a}$. Soient $f, g \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $fg \in \mathfrak{a}$.

(ii) Si f a un zéro dans U, c'est a.

Prouver que $g \in \mathfrak{a}$.

b) On suppose que $\mathfrak{a}$ est fermé dans $\mathcal{H}(U)$ et qu'il n'existe aucun élément de Uqui soit zéro commun à tous les éléments de $\mathfrak{a}$. Montrer que $\mathfrak{a} = \mathcal{H}(U)$.

Exercice 11.2. Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, A une partie localement finie de U et $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathcal{H}(U)$.

a) Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}(U)$ convergeant uniformément sur tout compact de $U \backslash A$. Prouver que $(u_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de U.

b) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathfrak{a}$ est de type fini.

(ii) $\mathfrak{a}$ est principal.

(iii) $\mathfrak{a}$ est fermé dans $\mathcal{H}(U)$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 11.1. a) Si f n'a aucun zéro dans U, on a $1/f \in \mathcal{H}(U)$. En écrivant que $g = (1/f)(fg)$, on obtient le résultat. Supposons que a soit zéro d'ordre $n \geqslant 1$ de f. Il existe $h \in \mathfrak{a}$ vérifiant $h(a) \neq 0$. Si $z \in U$, posons :

$$\ell(z) = \frac{f(z)}{z-a}g(z) = \frac{1}{h(a)}\Big[\frac{h(z)-h(a)}{z-a}f(z)f(z) - \frac{f(z)g(z)}{z-a}h(z)\Big].$$

On a $\ell \in \mathfrak{a}$. Appliquant ceci n fois, on voit que l'application v définie par

$$v(z) = \frac{f(z)}{(z-z)^n}g(z)$$

appartient à $\mathfrak{a}$. Comme $z \to \dfrac{f(z)}{(z-a)^n}$ est inversible dans $\mathcal{H}(U)$, on obtient $g \in \mathfrak{a}$.

b) Soit $f \in \mathfrak{a}\backslash\{0\}$. D'après 11.2.1, on peut écrire $f = \prod_{n=0}^{\infty} f_n$, où $f_n \in \mathcal{H}(U)$ a un unique zéro $a_n \in U$. Posons

$$g_p = \prod_{n \geqslant p} f_n \in \mathcal{H}(U).$$

La suite $(g_p)_p$ converge uniformément sur tout compact vers 1, et $g_p = f_p g_{p+1}$.

Comme $g_0 = f \in \mathfrak{a}$ et que f_p n'a aucun zéro dans $U\backslash\{a_p\}$, il résulte de a) que $g_p \in \mathfrak{a}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. L'idéal $\mathfrak{a}$ étant fermé dans $\mathcal{H}(U)$, on obtient $1 \in \mathfrak{a}$. D'où $\mathfrak{a} = \mathcal{H}(U)$.

Exercice 11.2. a) Soit $a \in U$. Il existe $r > 0$ tel que l'on ait $D'(a,r) \subset U$ et $D'(a,r) \cap A = \emptyset$, ou $D'(a,r) \cap A = \{a\}$. D'après le principe du maximum, on a

$$\sup\{|u_n(z) - u_p(z)|\,;\, z \in D'(a,r)\} = \sup\{|u_n(z) - u_p(z)|\,;\, |z-a| = r\}.$$

Ainsi, $(u_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $D'(a,r)$, donc converge uniformément sur $D'(a,r)$. On obtient le résultat en recouvrant un compact de U par un nombre fini de disques du type précédent.

b) On sait déjà que (i) et (ii) sont équivalentes (11.3.5).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons $\mathfrak{a} = \mathcal{H}(U)f$, et soit $g \in \overline{\mathfrak{a}}$. Il existe $h_n \in \mathcal{H}(U)$ tel que, si $g_n = h_n f$, la suite $(g_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de U vers g. Si Z est l'ensemble des zéros de f, alors $h_n = g_n/f$ converge uniformément sur tout compact de $U\backslash Z$. D'après a), $(h_n)_n$ converge uniformément vers $h \in \mathcal{H}(U)$ sur tout compact de U. Ainsi, $g = hf \in \mathfrak{a}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Soit $Z \subset U$ l'ensemble des zéros communs à tous les éléments de $\mathfrak{a}$. Si $a \in Z$, posons $m(a) = \min\{\omega(f)\,;\, f \in \mathfrak{a}\backslash\{0\}\}$, où $\omega(f)$ est l'ordre de a en tant que zéro de f.

D'après 11.2.4, il existe $g \in \mathcal{H}(U)$ dont les seuls zéros sont les éléments de A et vérifiant $\omega(g) = m(a)$ pour tout $a \in A$. Si $\mathfrak{b} = g^{-1}\mathfrak{a}$, il résulte de l'exercice 11.1. b) que $\mathfrak{b} = \mathcal{H}(U)$. D'où $\mathfrak{a} = \mathcal{H}(U)g$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 12

Représentation conforme

12.1 TOPOLOGIE

12.1.1. Dans tout le paragraphe 12.1, U est un ouvert de $\mathbb{C}$. On note $\mathscr{C}(U)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications continues de U dans $\mathbb{C}$. Si K est un compact de U et si $f \in \mathscr{C}(U)$, on pose $\|f\|_K = \sup\{|f(z)|\,;\ z \in K\}$.

On fixe une suite $(K_n)_{n \geqslant 1}$ de compacts non vides de U (voir 8.1.1 et 11.2.2) vérifiant les conditions suivantes :

(i) U est réunion des K_n et $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

(ii) Pour tout compact K de U, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $K \subset K_n$.

Si $f, g \in \mathscr{C}(U)$, on pose :

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, \|f-g\|_{K_n}\}.$$

On vérifie facilement que $(f,g) \to d(f,g)$ est une distance sur $\mathscr{C}(U)$. Dans la suite, $\mathscr{C}(U)$ est muni de cette distance et de la topologie qui lui est associée. On munit aussi l'espace $\mathcal{H}(U)$ de cette topologie.

12.1.2. Si K est un compact de U et si $\varepsilon > 0$, on pose :

$$V(K,\varepsilon) = \{f \in \mathscr{C}(U)\,;\ \|f\|_K \leqslant \varepsilon\}.$$

Proposition. *Les ensembles $V(K,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ et K compact de U, forment un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathscr{C}(U)$.*

Démonstration. Soit V un voisinage de 0 dans $\mathscr{C}(U)$. Il contient un ensemble $\{f \in \mathscr{C}(U)\,;\, d(0,f) \leqslant \eta\}$, avec $0 < \eta < 1$. Soit K un compact de U. Il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $K \subset K_p$ et $2^{-p} \leqslant \eta/2$. Si $f \in V(K,\eta/2)$, on a

$$d(0,f) \leqslant \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{2^n}\frac{\eta}{2} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2^p} \leqslant \eta.$$

D'où $V(K,\eta/2) \subset V$.

Soient K un compact de U et $\varepsilon > 0$. Montrons que $V(K,\varepsilon)$ est un voisinage de 0 dans $\mathscr{C}(U)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset K_n$. Si $f \in \mathscr{C}(U)$ vérifie $d(0,f) \leqslant 2^{-n}\varepsilon$, on a nécessairement $\|f\|_K \leqslant \|f\|_{K_n} \leqslant \varepsilon$. D'où l'assertion. □

12.1.3. D'après 10.1.2, la topologie définie en 12.1.1 sur $\mathscr{C}(U)$ ne dépend pas de la suite $(K_n)_n$. D'autre part, on a aussi obtenu qu'une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{C}(U)$ converge vers $f \in \mathscr{C}(U)$ si et seulement si elle converge vers f uniformément sur tout compact de U. Pour cette raison, on dit que la topologie de 12.1.1 sur $\mathscr{C}(U)$ est la *topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathscr{C}(U)$.*

On sait que si une suite de fonctions continues converge uniformément sur tout compact, sa limite est continue. On peut aussi interpréter 7.4.2 dans le cadre de la topologie de $\mathscr{C}(U)$. On a donc obtenu :

Théorème.

(i) *L'espace $\mathscr{C}(U)$ est complet.*

(ii) *Le sous-espace $\mathcal{H}(U)$ de $\mathscr{C}(U)$ est fermé dans $\mathscr{C}(U)$ et, pour $j \in \mathbb{N}$, l'application $\mathcal{H}(U) \to \mathcal{H}(U)$, $f \to f^{(j)}$ est continue.*

12.1.4. Précisons quelques points de vocabulaire. Soit $\mathscr{P}$ une partie de $\mathscr{C}(U)$.

• On dit que $\mathscr{P}$ est *bornée* si, pour tout compact K de U, $\sup\{\|f\|_K\,;\, f \in \mathscr{P}\}$ est fini.

• On dit que que $\mathscr{P}$ est *équicontinue en un point* $z_0 \in U$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait, pour tout $f \in \mathscr{P}$, $|f(z) - f(z_0)| \leqslant \varepsilon$ dès que $z \in U$ vérifie $|z - z_0| \leqslant \eta$. La partie $\mathscr{P}$ est dite *équicontinue* si elle est équicontinue en tout point de U.

Proposition 12.1.5.

(i) *Soient K un compact de U, $\rho > 0$ tel que $D'(a,\rho) \subset U$ pour tout $a \in K$, et X la réunion des $D'(a,\rho)$ pour $a \in K$. On a*

$$\frac{1}{k!}\|f^{(k)}\|_K \leqslant \frac{1}{\rho^k}\|f\|_X$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $f \in \mathcal{H}(U)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

(ii) *Si $\mathscr{P}$ est une partie bornée de $\mathcal{H}(U)$, il en est de même de $\{f^{(j)}\,;\ f \in \mathscr{P}\}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Il est immédiat que X est un compact de U. Si $a \in K$, il résulte de 6.5.2 que :

$$\frac{1}{k!}|f^k(a)| \leqslant \frac{1}{\rho^k}\|f\|_{D'(a,\rho)}.$$

D'où (i). L'assertion (ii) s'en déduit aussitôt. □

Théorème 12.1.6. (Théorème de Montel). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathscr{P}$ une partie de $\mathcal{H}(U)$. Dire que $\mathscr{P}$ est relativement compacte signifie qu'elle est bornée.*

Démonstration. 1) Supposons $\mathscr{P}$ non bornée. Il existe un compact K de U possédant la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in \mathscr{P}$ tel que $\|f_n\|_K \geqslant n$. On ne peut donc extraire de $(f_n)_n$ aucune suite uniformément convergente sur K. Ainsi, $\mathscr{P}$ n'est pas relativement compacte.

2) Supposons $\mathscr{P}$ bornée. Soient D, Δ des disques fermés contenus dans U, de même centre, de rayons respectifs r et $r+\delta$, avec $\delta > 0$.

• D'après 12.1.5, (ii), on a $\delta\|f'\|_D \leqslant \|f\|_\Delta$ pour tout $f \in \mathcal{H}(U)$. Par conséquent, il existe $M(D) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|f'\|_D \leqslant M(D)$ pour tout $f \in \mathscr{P}$.

Soit $f \in \mathscr{C}(U)$. Si $t \in [0,1]$ et $z, z' \in D$, posons $\varphi(t) = f\big(tz + (1-t)z'\big)$. Comme $\varphi'(t) = (z - z')f'\big(tz + (1-t)z'\big)$, il résulte de 2.4.1 et de ce qui précède que

$$|f(z) - f(z')| \leqslant 2M(D)|z - z'| \tag{1}$$

pour tout $f \in \mathscr{P}$ et tous $z, z' \in D$. On a donc montré que $\{f|D\,;\ f \in \mathscr{P}\}$ est une partie équicontinue de $\mathscr{C}(D)$.

• Soit $\mathcal{S} = U \cap \{r + is\,;\ r, s \in \mathbb{Q}\}$. Alors $\mathcal{S}$ est une partie dénombrable dense de U. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathscr{P}$. Pour tout $\zeta \in S$, la suite $\big(f_n(\zeta)\big)_n$ est bornée. On sait alors (utiliser le procédé diagonal) qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ de cette suite telle que $\big(f_{n_k}(\zeta)\big)_k$ soit une suite convergente pour tout $\zeta \in S$.

• Soient $\varepsilon > 0$ et B un disque fermé de rayon $\dfrac{\varepsilon}{12M(D)}\cdot$ D'après (1), on a

$$|f(z) - f(z')| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

si $z, z' \in B \cap D$ et $f \in \mathscr{P}$. D'autre part, si le centre de B appartient à D, $B \cap D$ est d'intérieur non vide, donc contient un point ζ de $\mathcal{S}$. Pour ce point, il existe un entier N_B tel que :

$$k, k' \geqslant N_B \Rightarrow |f_{n_k}(\zeta) - f_{n_{k'}}(\zeta)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors, si $z \in B \cap D$ et $k, k' \geqslant N_B$:

$$|f_{n_k}(z) - f_{n_{k'}}(z)| \leqslant |f_{n_k}(z) - f_{n_k}(\zeta)| + |f_{n_k}(\zeta) - f_{n_{k'}}(\zeta)| + |f_{n_{k'}}(\zeta) - f_{n_{k'}}(z)| \leqslant \varepsilon.$$

On voit donc que la suite $(f_{n_k})_k$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $B \cap D$. Comme D peut être recouvert par un nombre fini de boules telles B (à centre dans D), on voit que la suite $(f_{n_k})_k$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur D. Enfin, toute partie compacte de U pouvant être recouverte par un nombre fini de disques fermés, on a prouvé que de la suite $(f_n)_n$, on a pu extraire une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact de U. Par conséquent, $\mathscr{P}$ est une partie relativement compacte de $\mathcal{H}(U)$. $\square$

12.2 UN RÉSULTAT D'ISOMORPHISME

12.2.1. Dans ce qui suit, on note D pour $D(0,1)$. Si $a \in D$, on définit $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(D)$ (voir 7.3.3) par :

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

On renvoie le lecteur à 7.3.2 pour la définition d'ouverts isomorphes.

Lemme 12.2.2. *Soit f une fonction holomorphe dans D, non injective et vérifiant $f(D) \subset D$. Alors $|f'(0)| < 1$.*

Démonstration. Soient $a = f(0)$ et $g = \varphi \circ f$. On a $g(D) \subset D$, $g(0) = 0$, et g n'est pas injective. D'après le lemme de Schwarz (7.3.1), on a $|g'(0)| < 1$, soit $|\varphi_a'(a) f'(0)| < 1$. Ceci s'écrit :

$$\frac{1}{1-|a|^2}|f'(0)| < 1.$$

Ainsi, $|f'(0)| < 1 - |a|^2 < 1$. $\square$

Théorème 12.2.3. *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$. On suppose que, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(U)$ ne s'annulant pas dans U, il existe $g \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $f = g^2$. Alors U est isomorphe à D.*

Démonstration. On désigne par $\mathscr{P}$ la partie de $\mathcal{H}(U)$ constituée des applications f qui sont injectives et qui vérifient $f(U) \subset D$.

1) Prouvons que $\mathscr{P}$ est non vide.

Soit $a \in \mathbb{C}\backslash U$. La fonction $z \to z-a$ ne s'annulant pas dans U, il existe $g \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $g(z)^2 = z - a$ pour tout $z \in U$. Si $g(z) = g(\zeta)$, on a $g(z)^2 = g(\zeta)^2$, donc $z = \zeta$, et g est injective. On voit de même que, si $g(z) = -g(\zeta)$, alors $z = \zeta$. Par suite, si $w \in g(U)$, on a $-w \notin g(U)$. L'application g étant ouverte (8.7.2), son image contient un disque $D'(b,r)$ avec $r > 0$. On a donc $g(U) \cap D'(-b,r) = \emptyset$. Ainsi, l'application définie sur U par

$$f(z) = \frac{r}{g(z)+r}$$

est un élément de $\mathscr{P}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

2) Soient $f \in \mathscr{P}$ non surjective et z_0 un point de U. On va prouver qu'il existe $f_1 \in \mathscr{P}$ vérifiant $|f_1'(z_0)| > |f'(z_0)|$.

Soit $a \in D \backslash f(U)$. On a $\varphi_a \circ f \in \mathscr{P}$, et $\varphi_a \circ f$ est sans zéro dans U. Il existe donc $g \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $\varphi_a \circ f(z) = g(z)^2$ pour tout $z \in U$. Si l'on note σ l'application $z \to z^2$, il vient donc :

$$\sigma \circ g = \varphi_a \circ f.$$

On a $g(U) \subset D$ et, comme $\varphi_a \circ f$ est injective, on voit que g l'est.

Posons $b = g(z_0)$ et $f_1 = \varphi_b \circ g$. On a $f_1 \in \mathscr{P}$ et $f_1(z_0) = 0$. Si l'on note $\psi = \varphi_{-a} \circ \sigma \circ \varphi_{-b}$, on obtient :

$$f = \varphi_{-a} \circ \sigma \circ g = \varphi_{-a} \circ \sigma \circ \varphi_{-b} \circ f_1 = \psi \circ f_1.$$

Par conséquent, $f'(z_0) = \psi'(0) f_1'(z_0)$.

L'application σ n'étant par injective, $\psi = \varphi_{-a} \circ \sigma \circ \varphi_{-b}$ ne l'est pas non plus. D'après 12.2.2, on a $|\psi'(0)| < 1$. D'où $|f'(z_0)| < |f_1'(z_0)|$, car $f'(z_0) \neq 0$ (8.7.2).

3) Soit z_0 un point de U. On va montrer qu'il existe un élément g de $\mathscr{P}$ tel que $|g'(z_0)| = \sup\{|f'(z_0)|\,;\ f \in \mathscr{P}\}$, et que g est un isomorphisme de U sur D.

Soit $M = \sup\{|f'(z_0)|\,;\ f \in \mathscr{P}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Comme $\mathscr{P}$ est une partie bornée de $\mathcal{H}(U)$, on a $M \in \mathbb{R}_+$ (12.1.5). D'autre part, $M > 0$ (8.7.2).

Il existe une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{P}$ telle que $|f_n'(z_0)|$ tende vers M quand n tend vers $+\infty$. La suite $(f_n)_n$ étant bornée, il résulte de 12.1.6 que l'on peut supposer qu'elle converge uniformément sur tout compact vers $f \in \mathcal{H}(U)$. On a donc $M = |f'(z_0)| > 0$, et f n'est pas constante. D'après 8.5.3, f est injective.

Comme $|f_n(z)| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in U$, on a $f(U) \subset D'(0,1)$. D'autre part, f étant non constante est ouverte (8.7.2). D'où $f(U) \subset D$. On a donc prouvé que $f \in \mathscr{P}$. Enfin, comme $M = |f'(z_0)|$, il résulte de l'alinéa 2 que f est une surjection de U sur D. Par suite, f est un isomorphisme analytique de U sur D. □

Théorème 12.2.4. (Théorème de Riemann). *Tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, distinct de $\mathbb{C}$, est isomorphe au disque unité ouvert $D(0,1)$.*

Démonstration. C'est clair d'après 10.4.3 et 12.2.3. □

Théorème 12.2.5. *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *U est simplement connexe.*

(ii) *Toute fonction $f \in \mathcal{H}(U)$ possède une primitive dans U.*

(iii) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(U)$ sans zéro dans U, il existe $g \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $e^g = f$.*

(iv) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(U)$ sans zéro dans U et tout $q \in \mathbb{N}^*$, il existe $g \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $g^q = f$.*

(v) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(U)$ sans zéro dans U, il existe $g \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $g^2 = f$.*

(vi) *U est égal à $\mathbb{C}$ ou isomorphe à $D(0,1)$.*

(vii) *U est homéomorphe à un ouvert convexe de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) ont été vues en 10.4.2 et 10.4.3. Les implications (iv) $\Rightarrow$ (v) et (vi) $\Rightarrow$ (vii) sont triviales, et (v) $\Rightarrow$ (vi) résulte de 12.2.4. Soient V un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ (donc simplement connexe d'après 10.1.10), φ un homéomorphisme de U sur V, et ψ l'application réciproque de φ.

Soient $a, b \in U$ et γ_1, γ_2 des arcs dans U allant de a à b. Alors $\varphi\circ\gamma_1, \varphi\circ\gamma_2$ sont des arcs dans V allant de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$. Soit $\delta\colon [0,1]\times[0,1] \to V$ une homotopie dans V de $\varphi\circ\gamma_1$ à $\varphi\circ\gamma_1$. Il est immédiat que l'application $\psi\circ\delta$ est une homotopie dans U de γ_1 à γ_2. Par suite, U est simplement connexe. □

12.2.6. Soient U, V des ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$, distincts de $\mathbb{C}$. D'après 12.2.5, il existe un isomorphisme analytique de U sur V. Donnons quelques exemples autres que ceux de 6.6.2 et 6.6.3. Les calculs sont laissés au lecteur.

1) Soient $P = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $a \in U$. Alors

$$z \to \frac{z-a}{z-\overline{a}}$$

est un isomorphisme de P sur $D(0,1)$.

2) La fonction $z \to \mathrm{Log}\, z$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ sur $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |\mathrm{Im}(z)| < \pi\}$.

3) L'application

$$z \to \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z} - z\Big)$$

est un isomorphisme de $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ sur P.

4) Soient $\alpha \in [1, +\infty[$ et $U = \Big\{re^{it}\,;\, r \in \mathbb{R}_+^*, -\dfrac{\pi}{2\alpha} < t < \dfrac{\pi}{2\alpha}\Big\}$. L'application $z \to z^\alpha = \exp(\alpha\,\mathrm{Log}\, z)$ est un isomorphisme de U sur P.

> ***Remarque.*** L'ouvrage [7] donne *explicitement* de très nombreux isomorphismes analytiques entre ouverts de $\mathbb{C}$.

12.3 CONSERVATION DES ANGLES

12.3.1. Dans ce paragraphe 12.3, une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ sera aussi considérée comme une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (voir 5.2.1).

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on pose :

$$\theta(z) = \frac{z}{|z|}.$$

La demi-droite (réelle) contenant 0 et z est entièrement déterminée par $\theta(z)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Définition. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et f une fonction sur U. On suppose qu'il existe $\rho > 0$ tel que $D(a, \rho) \subset U$ et $f(z) \neq f(a)$ pour tout $z \in D^*(a, \rho)$. On dit que f* conserve les angles en *a si*

$$\lim_{r \to 0} e^{-it}\theta\big(f(a + re^{it}) - f(a)\big)$$

existe et ne dépend pas de t.

Proposition 12.3.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et f une fonction sur U.*

(i) *Si f est dérivable en a et vérifie $f'(a) \neq 0$, alors f conserve les angles en a.*

(ii) *Supposons f différentiable en a, avec $\mathrm{d}\,f(a) \neq 0$. Si f conserve les angles en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$.*

Démonstration. (i) Puisque $f'(a) \neq 0$, il existe $\rho > 0$ tel que l'on ait $D(a, \rho) \subset U$ et $f(z) \neq f(a)$ pour tout $z \in D^*(a, \rho)$. Pour $0 < r < \rho$ et $t \in \mathbb{R}$, il vient :

$$e^{-it}\theta\big(f(a + re^{it}) - f(a)\big) = \frac{f(a + re^{it}) - f(a)}{re^{it}} \left| \frac{re^{it}}{f(a + re^{it}) - f(a)} \right|.$$

Par suite :

$$\lim_{r \to 0} e^{-it}\theta\big(f(a + re^{it}) - f(a)\big) = \frac{f'(a)}{|f'(a)|}.$$

(ii) Supposons les hypothèses de (ii) vérifiées. Soient $h, k \in \mathbb{R}$ et $\zeta = h + ik$. Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ tel que

$$f(a + \zeta) - f(a) = \alpha h + \beta k + \varepsilon(\zeta)|\zeta|,$$

où $\varepsilon(\zeta)$ tend vers 0 si ζ tend vers 0. Ceci s'écrit encore :

$$f(a + \zeta) - f(a) = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta)\zeta + \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)\overline{\zeta} + \varepsilon(\zeta)|\zeta|.$$

Ecrivant $\zeta = re^{it}$, avec $r > 0$ et $t \in \mathbb{R}^*$, il vient donc, pour t fixé :

$$\lim_{r \to 0} \theta\Big(f(a + re^{it}) - f(a)\Big) = \frac{(\alpha - i\beta) + (\alpha + i\beta)e^{-2it}}{|(\alpha - i\beta) + (\alpha + i\beta)e^{-2it}|}.$$

Cette limite étant indépendante de t, on voit facilement que $\alpha + i\beta = 0$. Compte tenu de 5.2.2, on en déduit que f est dérivable en a et que $f'(a) = \alpha = -i\beta$. On a alors bien $f'(a) \neq 0$ (sinon, $\alpha = \beta = 0$). □

12.3.3. Soient U, V des ouverts de $\mathbb{C}$ et f un isomorphisme analytique de U sur V. D'après 8.7.2, on a $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$. Compte tenu de ceci et de 12.3.2, on dit aussi que f est une *transformation conforme* de U sur V. Si $a \in U$, on a

$$f(z) - f(a) = f'(a)(z - a) + \varepsilon(z - a)|z - a|,$$

où $\varepsilon(z - a)$ tend vers 0 si z tend vers a. On voit donc que l'application linéaire tangente à f en a est une similitude.

EXERCICES

Exercice 12.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que l'application de $\mathcal{H}(U)$ dans lui-même, $f \to \exp(f)$ est continue.

Exercice 12.2. **a)** Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ et $h \in \mathcal{H}(U)$. Prouver que, si $a, b \in U$, on a :

$$|h(b) - h(a)| \leqslant |b - a| \sup\{|h'(z)|\,;\, z \in U\}.$$

b) Soit $g\colon D(0,1) \to D(0,1)$ une fonction holomorphe. Montrer que, si $z \in D(0,1)$, on a :

$$|g'(z)| \leqslant \frac{1}{(1-|z|)^2}.$$

En déduire que, si $r \in]0,1[$ et $|z| < 1 - r$, alors :

$$|g'(z)| \leqslant \frac{1}{r^2}.$$

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n\colon D(0,1) \to D(0,1)$ une fonction holomorphe. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f continue sur $D(0,1)$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $a \in D(0,1)$. Prouver qu'il existe $\eta_a > 0$ et $N_a \in \mathbb{N}$ tels que l'on ait $|f_n z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N_a$ et tout $z \in D(a, \eta_a) \cap D(0,1)$. En déduire que $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$.

Exercice 12.3. Soient $D = D(0,1)$ et C un carré ouvert de centre 0. On désigne par f une représentation conforme de D sur C vérifiant $f(0) = 0$, et on note

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

le développement de f en série entière au voisinage de 0.

a) Pourquoi $g(z) = f^{-1}\big(if(z)\big)$ est-il bien défini si $z \in D$? Prouver qu'il existe $\eta \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\eta| = 1$ et $g(z) = \eta z$ pour tout $z \in D$.

b) Montrer que $f(iz) = if(z)$ pour tout $z \in D$. En déduire que $a_n = 0$ si $n \notin 4\mathbb{N}+1$.

Exercice 12.4. Soient $U = \{z \in \mathbb{C}\,;\, e^{\operatorname{Re} z} < \operatorname{Im} z < 2\pi + e^{\operatorname{Re} z}\}$ et $V = \mathbb{C}\backslash S$, où S est l'ensemble $\{te^{it}\,;\, t \in \mathbb{R}_+\}$.

a) Montrer que la restriction de l'exponentielle à U est injective.

b) Prouver que $V = \{e^z\,;\, z \in U\}$.

c) Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{H}(V)$tel que $f(t) = 2i\pi + \ln t$ pour tout $t \in]0, 2\pi[$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 12.1. Soient K un compact de U et $(f_n)_n$ une suite dans $\mathcal{H}(U)$ convergeant uniformément sur tout compact de U vers $f \in \mathcal{H}(U)$. Si $z \in U$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\exp\big(f_n(z)\big) - \exp\big(f(z)\big) = \exp\big(f(z)\big) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\big(f_n(z) - f(z)\big)^p}{p!}.$$

On en déduit :

$$\| \exp f_n - \exp f\|_K \leqslant \| \exp f\|_K \big(\exp(\|f_n - f\|_K) - 1\big).$$

Par suite, $\exp f_n$ converge uniformément vers $\exp f$ sur K. Compte tenu de la définition de la topologie sur $\mathcal{H}(U)$, on a obtenu le résultat.

Exercice 12.2. a) Soient $a, b \in U$. Comme U est convexe, on a $a + t(b - a) \in U$ pour tout $t \in [0, 1]$. On peut alors appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\ell \colon [0, 1] \to \mathbb{C}$, $t \to g[a + t(b - a)]$. On a alors :

$$|\ell(1) - \ell(0)| \leqslant \sup\{|\ell'(t)| \,;\, t \in [0, 1]\}.$$

Comme $\ell'(t) = (b - a)g'[a + t(b - a)]$, on en déduit aussitôt le résultat demandé.

b) Soient $\rho \in]|z|, 1[$ et γ le cercle $C(0, \rho)$ parcouru dans le sens direct. On a :

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Par suite :

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} 2\pi\rho \sup\left\{ \frac{f(\zeta)}{|\zeta - z|^2} \,;\, |\zeta| = \rho \right\} \leqslant \frac{\rho}{(\rho - |z|)^2}.$$

On obtient donc le premier point en faisant tendre ρ vers 1. Le second s'en déduit immédiatement.

c) Soient $\varepsilon > 0$ et $a \in D(0, 1)$. Il existe $N_a \in \mathbb{N}$ tel que $|f_n(a) - f(a)| \leqslant \varepsilon/3$ si $n \geqslant N_a$. D'autre part, f étant continue au point a, il existe $\rho > 0$ tel que $D'(a, \rho) \subset D(0, 1)$ et $|f(a) - f(z)| \leqslant \varepsilon/3$ si $|z - a| < \rho$.

Il résulte aussi de a) que, si $z \in D(a, \rho)$, on a :

$$|f_n(z) - f_n(a)| \leqslant |z - a| \sup\{|f'(\zeta)| \,;\, |\zeta - a| < \rho\}.$$

Soit $r \in]0, 1[$ tel que $D(a, \rho) \subset D(0, 1 - r)$. Compte tenu de b), pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\zeta \in D(a, \rho)$, on a $|f'(\zeta)| \leqslant r^{-2}$. On en déduit :

$$|z - a| < \rho \Rightarrow |f_n(z) - f_n(a)| \leqslant \frac{|z - a|}{r^2}.$$

Par suite, il existe $\eta_a < \rho$ tel que l'on ait $|f_n(a) - f_n(a)| \leqslant \varepsilon/3$ si $|z - a| < \eta$. On obtient donc :

$$n \geqslant N_a, |z - a| < \eta \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon.$$

Soient K un compact de $D(0,1)$ et $\varepsilon > 0$. Les disques $D(a, \eta_a)$ précédents recouvrent K lorsque a décrit K. De ce recouvrement, on peut extraire un sous-recouvrement fini $K \subset D(a_1, \eta_{a_1}) \cup \cdots \cup D(a_s, \eta_{a_s})$.

Posons $N = \max\{N_{a_1}, \ldots, N_{a_s}\}$. Si $z \in K$, il existe un indice k tel que l'on ait $|z - a_k| < \eta_{a_k}$. Si $n > N$, on a donc $|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$. On vient ainsi de prouver que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur K. Compte tenu de 7.4.2, on a $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$.

Exercice 12.3. **a)** Comme C est stable par l'application $z \to iz$, il est clair que g est bien défini, et g est alors un automorphisme analytique de D. Compte tenu de 7.3.3, il existe $a \in D$ et η de module 1 tels que

$$g(z) = \eta \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

pour tout $z \in D$. Comme $g(0) = 0$, il vient $a = 0$ et $g(z) = \eta z$.

b) D'après la question précédente, on a $if(z) = f(\eta z)$ pour tout $z \in D$. On en déduit $if'(z) = \eta f'(\eta z)$ et, en particulier, $if'(0) = \eta f'(0)$. Comme f est une bijection analytique de D sur C, on a $f'(0) \neq 0$ (8.7.2). D'où $\eta = i$ et $if(z) = f(iz)$. Ceci s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n i^n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} i a_n z^n$$

pour tout $z \in D$. D'après l'unicité du développement en série de f au voisinage de 0, on a $a_n(1 - i^{n-1}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $a_n = 0$ si $n \notin 4\mathbb{N} + 1$.

Exercice 12.4. **a)** Pour $k = 1, 2$, soient $z_k \in U$, $x_k = \operatorname{Re} z_k$, et $y_k = \operatorname{Im} z_k$. Si $\exp(z_1) = \exp(z_2)$, on obtient $x_1 = x_2$, car $\exp(x_k) = |\exp(z_k)|$. D'autre part, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y_1 - y_2 = 2\pi n$. Comme $z_1, z_2 \in U$, il vient $n = 0$. On a obtenu le résultat.

b) On remarque que $S = \{\rho e^{i\theta}\,;\ \rho \in \mathbb{R}_+, \rho - \theta \in \pi\mathbb{Z}\}$.

Soit $w \in V$. Ecrivons $w = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a $\rho - \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Par suite, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\rho < \theta + 2n\pi < \rho + 2\pi$.

Posons $y = \theta + 2n\pi$, et soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\rho = e^x$. Si $z = x + iy$, on a $z \in U$ et $e^z = w$. D'où $w \in \exp(U)$.

c) Soit g la restriction de l'exponentielle à U ; c'est une bijection de U sur V d'après les questions précédentes. De $(z^z)' = e^z \neq 0$, on déduit que l'application réciproque $f : V \to U$ de g est holomorphe dans V.

Soit $t \in]0, 2\pi[$ et $z = \ln t + 2i\pi$. On a $z \in U$ et $e^z = t$, donc $t \in V$. D'autre part, $t = g(z)$, donc $z = f(t)$. Comme $f \in \mathcal{H}(V)$, on a obtenu le résultat.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 13

Quelques grands classiques

13.1 THÉORÈMES DE PICARD

Lemme 13.1.1. *Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $D'(0,R)$, avec $R > 0$, et vérifiant $|f'(0)| = a > 0$. Notons $M = \sup\{|f'(z)|\,;\ |z| \leqslant R\}$. Alors :*

$$D\Big(f(0), \frac{Ra^2}{8M}\Big) \subset f\big(D(0,1)\big).$$

Démonstration. Quitte à changer f en $f - f(0)$, on peut supposer $f(0) = 0$. Le développement de f en série entière dans $D'(0,R)$ est de la forme

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n,$$

avec $|\alpha_1| = a$.

D'après les inégalités de Cauchy (7.1.1), on a $|\alpha_n| \leqslant n|\alpha_n| \leqslant MR^{1-n}$ si $n \geqslant 1$. En particulier $a \leqslant M$.

Pour $|z| = r < R$, il vient :

$$\begin{aligned}|f(z)| = |f(z) - \alpha_1 z + \alpha_1 z| \geqslant ar - |f(z) - \alpha_1 z| = ar - \Big|\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n z^n\Big| \\ \geqslant ar - \sum_{n=2}^{\infty} M\frac{r^n}{R^{n-1}} = ar - \frac{Mr^2}{R-r}\cdot\end{aligned}$$

Si $|z| = \dfrac{Ra}{4M} \leqslant \dfrac{R}{4} < R$, on obtient donc :

$$|f(z)| \geqslant \frac{Ra^2(3M-a)}{4M(4M-a)} \geqslant \frac{2Ra^2M}{4M(4M-a)} = \frac{Ra^2}{2(4M-a)} \geqslant \frac{Ra^2}{8M}\cdot$$

Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $|\zeta| < \dfrac{Ra^2}{8M}\cdot$ Si $|z| = \dfrac{Ra}{4M}$, il vient alors :

$$|\big(f(z)-\zeta\big) - f(z)| = |\zeta| < |f(z)|.$$

D'après le théorème de Rouché (8.6.3), les fonctions $z \to f(z)$ et $z \to f(z) - \zeta$ ont même nombre de zéros (comptés avec leut multiplicité) dans le disque $D\left(0, \dfrac{Ra}{4M}\right)$. Comme $f(0) = 0$, il existe z_0 appartenant à ce disque tel que $f(z_0) = \zeta$. On a prouvé que :

$$D\Big(0, \frac{Ra^2}{8M}\Big) \subset f\Big[D\Big(0, \frac{Ra}{4M}\Big)\Big].$$

D'où le résultat. □

Lemme 13.1.2. *Soit $D(0,R)$ un disque de rayon non nul. Il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant la condition suivante : pour toute fonction f holomorphe dans $D(0,R)$ et tout nombre réel ρ tel que $0 < \rho < \sup\{(R-|z|)|f'(z)|\,;\, |z| \leqslant R\}$, il existe un disque ouvert de rayon $\mu\rho$ contenu dans l'image de f.*

Démonstration. Soit $\zeta \in D(0,R)$ tel que $\rho < (R-|\zeta|)|f'(\zeta)|$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a donc $\rho < (R-\varepsilon-|\zeta|)|f'(\zeta)|$. Il en résulte qu'il existe $r \in]0,R[$ tel que l'on ait encore $\rho < \sup\{(r-|z|)|f'(z)|\,;\, |z| \leqslant r\}$. La dernière borne supérieure est atteinte en un point z_0 tel que $r - |z_0| = \delta > 0$. Par suite, si $|z - z_0| < \dfrac{\delta}{2}$, on a $z \in D(0,r)$ et

$$\Big|\frac{f'(z)}{f'(z_0)}\Big| \leqslant \frac{\delta}{r-|z|} \leqslant 2.$$

D'après 13.1.1, il existe un disque ouvert de rayon $\dfrac{r|f'(z_0)|^2}{16|f'(z_0)|} = \dfrac{r|f'(z_0)|}{16}$ contenu dans l'image de f. Or :

$$\frac{r|f'(z_0)|}{16} > \frac{r\rho}{16(r-|z_0|)} \geqslant \frac{\rho}{16}.$$

On a obtenu le résultat avec $\mu = \dfrac{1}{16}\cdot$ □

13.1.3. On renvoie à 12.1.4 pour la définition d'une partie bornée de $\mathcal{H}(U)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Théorème. *Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et $M \geqslant 1$ un réel. On note $\mathscr{P}$ la partie de $\mathcal{H}(U)$ formée des fonctions f vérifiant :*

$$0 \notin f(U)\ ,\ 1 \notin f(U)\ ,\ \frac{1}{M} \leqslant |f(a)| \leqslant M.$$

Alors $\mathscr{P}$ est une partie bornée de $\mathcal{H}(U)$.

Démonstration. 1) Supposons tout d'abord que U soit un disque $D(0,R)$, avec $R > 0$, et que $a = 0$. En particulier, U est simplement connexe.

a) Si $f \in \mathscr{P}$, f ne s'annule pas dans U. Il existe $f_1 \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $f = \exp(2i\pi f_1)$ (12.2.5). Quitte à ajouter un entier à f_1, on peut supposer que $|\operatorname{Re} f_1(0)| \leqslant \dfrac{1}{2}\cdot$ D'autre part, comme $-2\pi \operatorname{Im} f_1(0) = \ln|f(0)| \in [-\ln M, \ln M]$, on obtient :

$$|f_1(0)| \leqslant M_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\ln M. \tag{1}$$

Enfin, de $1 \notin f(U)$, on déduit $f_1(U) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

b) Comme f_1 et $f_1 - 1$ n'ont aucun zéro dans U, il résulte de 12.2.5 que ces fonctions sont les carrés d'éléments, notés respectivement $\sqrt{f_1}$ et $\sqrt{f_1 - 1}$, de $\mathcal{H}(U)$.

Si $f_2 = \sqrt{f_1} + \sqrt{f_1 - 1}$, on a $\sqrt{f}_1 - \sqrt{f_1 - 1} = \dfrac{1}{f_2}$. Donc, si $M_2 = M_1 + \sqrt{1 + M_1}$, il vient :

$$\frac{1}{M_2} \leqslant |f_2(0)| \leqslant M_2 \tag{2}$$

Soient $\omega \in \mathbb{C}$ vérifiant $\omega^4 = 1$ et $\lambda_{n,\omega,\varepsilon} = \omega(\sqrt{n+1} + \varepsilon\sqrt{n})$, où $\varepsilon = \pm 1$ et $n \in \mathbb{N}$. S'il existe $z \in U$ tel que $f_2(z) = \lambda_{n,\omega,\varepsilon}$, un calcul facile montre que

$$f_1(z) = \frac{1}{4}(\lambda_{n,\omega,\varepsilon} + \lambda_{n,\omega,\varepsilon}^{-1})^2 = \omega^2 n + \frac{\omega^2 + 1}{2}\cdot$$

De $\omega^2 = \pm 1$, on déduit $f_1(z) \in \mathbb{Z}$. C'est absurde d'après l'alinéa précédent. Ainsi, $\lambda_{n,\omega,\varepsilon} \notin f_2(U)$. On a de même $\lambda_{n,\omega,\varepsilon}^{-1} \notin f_2(U)$.

c) Comme $0 \notin f_2(U)$, il résulte de 12.2.5 qu'il existe $g \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $e^g = f_2$. Quitte à ajouter à g un multiple entier de $2i\pi$, on peut supposer que $|\operatorname{Im} g(0)| \leqslant \pi$. D'autre part, $\operatorname{Re} g(0) = \ln|f_2(0)|$. D'après (2), il vient :

$$|g(0)| \leqslant M_3 = \pi + \ln M_2. \tag{3}$$

D'autre part, si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$\exp\left[\left(\pm\ln(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) + ip\frac{\pi}{2}\right)\right] \in \{\lambda_{n,\omega,1}, \lambda_{n,\omega,1}^{-1}\},$$

avec $\omega^4 = 1$. D'après l'alinéa b), on obtient

$$\zeta_{\varepsilon,n,p} = \varepsilon\ln(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) + ip\frac{\pi}{2} \notin g(U)$$

pour $\varepsilon = \pm 1$, $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

d) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, soit $\ell(x) = \ln(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) - \ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$. Un calcul facile prouve que ℓ est une fonction strictement décroissante. On en déduit (faire un dessin pour bien comprendre la situation) que, pour $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, et $\varepsilon = \pm 1$, on a :

$$|\zeta_{\varepsilon,n,p} - \zeta_{\varepsilon,n\pm 1,p\pm 1}| \leqslant \delta = \sqrt{[\ln(\sqrt{2}+1)]^2 + \frac{\pi^2}{4}}.$$

e) D'après les alinéas c) et d), si Δ est un disque ouvert contenu dans $g(U)$, son diamètre est au plus égal à δ.

Soient ρ tel que $0 < \rho < \sup\{(R - |z|)|g'(z)|\,;\, z \in U\}$ et μ comme en 13.1.2. D'après ce qui précède, on a $2\mu\rho \leqslant \delta$. Par suite, si $z \in U$:

$$|g'(z)| \leqslant \frac{\delta}{2\mu(R - |z|)}.$$

Supposons $|z| \leqslant r < R$. D'après le principe du maximum et ce qui précède, il vient :

$$|g'(z)| \leqslant \sup\{|g'(\zeta)|\,;\, |\zeta| = r\} \leqslant \frac{\delta}{2\mu(R-r)}.$$

Il résulte alors de 2.4.1 et de (3) que :

$$|g(z)| \leqslant |g(z) - g(0)| + |g(0)| \leqslant M_3 + \frac{\delta r}{\mu(R-r)} = M_3(r).$$

Si $M_2(r) = \exp[M_3(r)]$, il vient alors :

$$\frac{1}{M_2(r)} \leqslant |f_2(z)| \leqslant M_2(r).$$

D'où :

$$|f_1(z)| = \frac{1}{4}\left|f_2(z) + \frac{1}{f_2(z)}\right|^2 \leqslant M_2(r)^2 = M_1(r).$$

Enfin, de $f = e^{2i\pi f_1}$, on déduit que, si $M(r) = \exp\big(2\pi M_1(r)\big)$, alors

$$\frac{1}{M(r)} \leqslant |f(z)| \leqslant M(r)$$

pour $|z| \leqslant r$. On a obtenu le résultat lorsque $U = D(0,R)$ et $a = 0$.

2) Envisageons le cas général. Pour $b \in U$ et $M \geqslant 1$, notons $\mathscr{P}(b,M)$ l'ensemble des $f \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant :

$$f(U) \subset \mathbb{C}\backslash\{0,1\}\ ,\ \frac{1}{M} \leqslant |f(b)| \leqslant M.$$

Soit enfin $V(b,M)$ l'ensemble des $z \in U$ pour lesquels il existe $M(z) \geqslant 1$ vérifiant, pour tout $f \in \mathscr{P}(b,M)$:

$$\frac{1}{M(z)} \leqslant |f(z)| \leqslant M(z).$$

D'après l'étude du cas particulier, $V(b,M)$ est un ouvert de U. Plus précisément, on a même obtenu le résultat suivant : si $z \in V(b,M)$ et si $|z - z'| < d(z, \mathbb{C}\backslash U)$, alors $z' \in V(b,M)$. Comme $|d(z,\mathbb{C}\backslash U) - d(z',\mathbb{C}\backslash U)| \leqslant |z - z'|$, on voit donc que,

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

si $z \notin V(b, M)$ et $2|z - z'| < d(z, \mathbb{C}\backslash U)$, alors $z' \notin V(b, M)$. Ainsi, $V(b, M)$ et $\mathbb{C}\backslash V(b, M)$ sont des ouverts de U. La connexité de U implique que ou $V(b, M) = U$, ou $V(b, U) = \emptyset$. D'après l'hypothèse et le cas particulier, on a $V(a, M) = U$.

Toujours d'après le cas particulier, si $c \in V(a, M) = U$, pour tout disque compact D de centre c, contenu dans U, il existe une constante M_D telle que, pour tout $f \in \mathscr{P}$, on ait $\sup\{|f(z)|\,;\, z \in D\} \leqslant M_D$. Tout compact de U pouvant être recouvert par un nombre fini de disques compacts contenus dans U, on a obtenu le résultat. $\square$

Théorème 13.1.4. **(Petit théorème de Picard).** *Soit f une fonction entière non constante. L'ensemble $\mathbb{C}\backslash f(\mathbb{C})$ contient au plus un élément.*

Démonstration. Supposons que f ne prenne pas les valeurs α, β, avec $\alpha \neq \beta$. Quitte à changer f en $z \to \big(f(z) - \alpha\big)/(\beta - \alpha)$, on peut supposer $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

D'après la preuve de 13.1.3, il existe une fonction entière non constante g et un réel $\delta > 0$ tel que l'image de g ne contienne aucun disque ouvert de rayon supérieur à δ.

Pour $R > 0$ et $|z| \leqslant R$, posons $\theta(R) = \sup\{(R - |z|)|g'(z)|\,;\, |z| \leqslant R\}$. Il existe $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $g'(\zeta) \neq 0$ (sinon g est constante). Pour $R \geqslant |\zeta|$, on a $\theta(R) \geqslant (R - |\zeta|)|g'(\zeta)|$. Par suite, $\theta(R)$ tend vers $+\infty$ si R tend vers $+\infty$. D'après 13.1.2, pour tout $\rho > 0$, $g(\mathbb{C})$ contient un disque de rayon $\dfrac{\rho}{16}\cdot$ Contradiction. D'où le résultat. $\square$

> ***Remarque.*** On peut avoir ou $\operatorname{card}\big(\mathbb{C}\backslash f(\mathbb{C})\big) = 0$ (cas de $z \to z$), ou $\operatorname{card}\big(\mathbb{C}\backslash f(\mathbb{C})\big) = 1$ (cas de $z \to e^z$).

Théorème 13.1.5. **(Grand théorème de Picard).** *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et $f \in \mathcal{H}(U\backslash\{a\})$ ayant une singularité essentielle en a. Pour tout nombre complexe $\zeta \in \mathbb{C}$, sauf un au plus, il existe une suite $(z_n)_n$ d'éléments de U vérifiant :*

$$\lim_n z_n = a\ ,\ \lim_n f(z_n) = \zeta.$$

Démonstration. On peut supposer que $a = 0$ et que U est un disque $D(a, 2R)$, avec $R > 0$. Il faut prouver que $\operatorname{card}\big(\mathbb{C}\backslash f(\mathbb{C})\big) \leqslant 1$. Supposons que cet ensemble contienne au moins deux éléments. On peut supposer que $\{0, 1\} \subset \mathbb{C}\backslash f(\mathbb{C})$ (car, si $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$, f et $\alpha f + \beta$ ont les mêmes singularités).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$M_n = \sup\left\{|f(z)|\,;\, |z| \leqslant \frac{R}{n}\right\}.$$

Montrons que M_n tend vers $+\infty$ si n tend vers $+\infty$. Si ce n'est pas le cas, il existe une suite strictement croissante $k \to n_k$ d'entiers strictement positifs et $M > 0$ tels que $M_{n_k} \leqslant M$ pour tout k. En appliquant le principe du maximum dans la couronne fermée C_k définie par $\dfrac{R}{n_{k+1}}$ et $\dfrac{R}{n_k}$, on obtient $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in C_k$. Comme

$D'\Big(0, \dfrac{R}{n_1}\Big)\backslash\{0\}$ est la réunion des C_k, on voit que a est une fausse singularité de f (8.2.2). Contradiction.

Comme f ne s'annule pas dans $U\backslash\{0\}$, on a $g = \dfrac{1}{f} \in \mathcal{H}(U\backslash\{0\})$. D'autre part, 0 est point singulier essentiel de g, car sinon, $f \in \mathcal{M}(U)$ (8.3.3). Remplaçant f par g dans le raisonnement précédent, on obtient que

$$m_n = \inf\Big\{|f(z)|\,;\ |z| = \frac{R}{n}\Big\}$$

tend vers 0 si n tend vers $+\infty$.

Pour n assez grand, on a donc $m_n < 1 < M_n$. Par suite, il existe un réel α_n tel que $\Big|f\Big(\dfrac{R}{n}e^{i\alpha_n}\Big)\Big| = 1$. Définissons $h_n \in \mathcal{H}(U\backslash\{0\})$ par

$$g_n(z) = f\Big(\frac{z}{n}e^{i\alpha_n}\Big).$$

On a $0, 1 \notin g(U\backslash\{0\})$ et $|g_n(R)| = 1$ si n est au moins égal à un entier n_0. Compte tenu de 13.1.3, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait :

$$M_n = \sup\{|g_n(z)|\,;\ |z| = R\} \leqslant \delta.$$

Cela contredit le début de la preuve. D'où le théorème. □

13.2 THÉORÈME DE RUNGE

13.2.1. Soit K un compact de $\mathbb{C}$. La même preuve qu'en 6.3.1 montre que $\mathbb{C}\backslash K$ a une unique composante connexe non bornée.

Dans la suite, $\mathscr{C}(K)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur K. Pour $f \in \mathscr{C}(K)$, on pose :

$$\|f\|_K = \sup\{|f(z)|\,;\ z \in K\}.$$

L'application $f \to \|f\|_K$ est une norme sur $\mathscr{C}(K)$ et, muni de cette norme, $\mathscr{C}(K)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé complet.

Proposition 13.2.2. *Soient K un compact de $\mathbb{C}$, V une composante connexe de $\mathbb{C}\backslash K$, et $a, b \in V$.*

(i) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que :*

$$\sup\Big\{\Big|\frac{1}{z-a} - P\Big(\frac{1}{z-b}\Big)\Big|\,;\ z \in K\Big\} \leqslant \varepsilon.$$

(ii) *Si V est la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash K$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que :*

$$\sup\Big\{\Big|\frac{1}{z-a} - P(z)\Big|\,;\ z \in K\Big\} \leqslant \varepsilon.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Démonstration. (i) Si $a \in V$, notons E_a l'ensemble des points b de V pour lesquels la condition (i) est vérifiée. On a $a \in E_a$. Soit $\delta = d(a, K) > 0$.

Soit $b \in V$ tel que $|a - b| < \delta/4$. Alors $d(b, K) \geqslant (3\delta)/4$. Par suite, la série

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(b-a)^n}{(z-b)^{n+1}}$$

est normalement convergente sur K. En prenant pour P une somme partielle convenable de cette série, on voit que $b \in E_a$. Ainsi, E_a est un ouvert non vide de V.

Soit $c \in V$ adhérent à E_a. Comme précédemment, on voit qu'il existe $b \in E_a$ tel que $c \in E_b$. Il est alors immédiat que $c \in E_a$. Ainsi, E_a est fermé dans V. L'ensemble V étant connexe, on a $E_a = V$.

(ii) Supposons que V soit la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \backslash K$. Il existe $b \in V \backslash \{0\}$ tel que $K \subset D(0, |b|)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in K$, la série

$$\frac{1}{(z-b)^n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} \frac{z^k}{b^{n+k}}$$

est normalement convergente sur K. On a alors facilement le résultat d'après (i). □

Lemme 13.2.3. *Soient K un compact de $\mathbb{C}$, γ un chemin vérifiant $K \cap \operatorname{im} \gamma = \emptyset$, et h une fonction continue sur $\operatorname{im} \gamma$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $w_1, \ldots, w_m \in \operatorname{im} \gamma$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tels que :*

$$\sup \left\{ \left| \int_\gamma \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{z - w_k} \right| ; \, z \in K \right\} \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. Soient $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_r = 1$ tels que γ soit de classe C^1 sur chaque intervalle $[s_i, s_{i+1}]$. Fixons $M > 0$ tel que $|\gamma'(t)| \leqslant M$ pour $t \in [s_i, s_{i+1}]$, $0 \leqslant i \leqslant r-1$.

La fonction $\ell \colon [0,1] \times K \to \mathbb{C}$, $(t, z) \to \dfrac{h(\gamma(t))}{\gamma(t) - z}$ est continue, donc uniformément continue sur le compact $[0,1] \times K$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que, si $|t - t'| \leqslant \eta$, on ait $|\ell(t,z) - \ell(t',z)| \leqslant \varepsilon M^{-1}$ pour tout $z \in K$.

Fixons une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ de $[0,1]$ telle que $|t_i - t_{i+1}| \leqslant \eta$ pour $0 \leqslant i \leqslant m-1$. Si $z \in K$ et $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$, il vient :

$$\left| \frac{h(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{h(\gamma(t_i))}{\gamma(t_i) - z} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}.$$

En posant

$$Q(z) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h(\gamma(t_i))\big(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\big)}{\gamma(t_i) - z},$$

on obtient :

$$\left| \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - Q(z) \right| \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| \left| \frac{h(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{h(\gamma(t_i))}{\gamma(t_i) - z} \right| dt \leqslant \frac{M\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

D'où l'assertion. □

13.2.4. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r, s > 0$. On note $R(a, r, s)$ le rectangle constitué des points $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(a) \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant \mathrm{Re}(a) + r$ et $\mathrm{Im}(a) \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant \mathrm{Im}(a) + s$. On désigne par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ les chemins définis respectivement, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, par :

$$\gamma_1(t) = a + rt\ ,\ \gamma_2(t) = a + r + ist\ ,\ \gamma_3(t) = a + r + is - irt\ ,\ \gamma_4(t) = a + is - ist.$$

Le bord orienté $\gamma = \gamma_{R(a,r,s)}$ est le chemin fermé :

$$\gamma = \gamma_1 \vee \big(\gamma_2 \vee (\gamma_3 \vee \gamma_4)\big).$$

Lemme. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $R = R(a, r, s)$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f(z) \ \text{ si } \ z \in \overset{\circ}{R}, \\ 0 \ \text{ si } \ z \notin R. \end{cases}$$

Démonstration. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $R_1 = R(a - \varepsilon - i\varepsilon, r + 2\varepsilon, s + 2\varepsilon)$, on ait $R \subset \overset{\circ}{R}_1$ et $R_1 \subset U$. Comme $\overset{\circ}{R}_1$ est convexe, donc simplement connexe (10.1.10), on a le résultat si $z \notin R$ d'après 10.4.2 et 10.4.4.

Supposons $z \in \overset{\circ}{R}$. D'après 10.3.5, $\mathrm{ind}_\gamma(z) = \mathrm{ind}_\gamma(z_0)$, où $z_0 = a + \dfrac{r}{2} + \dfrac{is}{2}$ (c'est le « centre » de R). Pour obtenir le résultat, il suffit (6.4.7) de prouver que $\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = 1$.

Soit $\rho > 0$ tel que $D'(z_0, \rho) \subset \overset{\circ}{R}$. L'application

$$\delta\colon [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{C}\ ,\ (t, u) \to uz_0 + \rho u \frac{\gamma(t) - z_0}{|\gamma(t) - z_0|} + (1 - u)\gamma(t)$$

est une homotopie, dans $\overset{\circ}{R}\backslash\{z_0\}$, de γ au cercle $C(z_0, \rho)$ parcouru dans le sens direct. On a donc obtenu le résultat d'après 6.4.8 et 10.4.1. □

Proposition 13.2.5. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et K un compact non vide de U. Il existe des segments orientés $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ dans $U\backslash K$, d'images horizontales ou verticales, de même longueur, tels que pour tout $f \in \mathcal{H}(U)$ et tout $z \in K$, on ait :*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{4}$$

Démonstration. On peut supposer que U est borné. Posons $d(K, \mathbb{C}\backslash U) = \delta > 0$.

Considérons l'ensemble des points $\mathbb{Z}d + i\mathbb{Z}d$ de $\mathbb{C}$, avec $\sqrt{2}d < \delta$. Chaque « maille » de ce réseau est un carré compact. Comme K est compact, il ne rencontre qu'un nombre fini de ces carrés ; notons les $C_1, \cdots, C_k$. D'après le choix de d, il est immédiat que $K \subset C_1 \cup \cdots \cup C_k \subset U$.

Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, notons θ_k le bord orienté de C_k (voir 13.2.4). Chaque θ_k est composé de quatre segments orientés $\theta_{k,j}$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, dont les images sont parallèles aux axes.

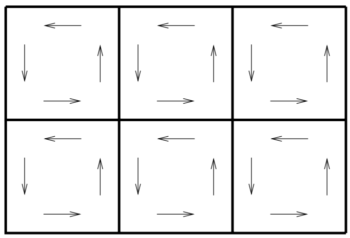
Parmi les segments orientés précédents, considérons ceux qui ne sont pas un côté de deux carrés C_r et C_s, avec $r \neq s$. Notons les $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Si γ est l'un de ces segments, et si $\operatorname{im}\gamma \cap K \neq \emptyset$, alors $\operatorname{im}\gamma$ est le côté de deux carrés rencontrant K. Par suite, on a :

$$\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{im}\gamma_i \subset U \backslash K.$$

Les segments orientés qui sont des côtés communs à deux carrés distincts interviennent avec des orientations opposées.



Par suite, si $z \in U\backslash(\operatorname{im}\theta_1 \cup \cdots \cup \operatorname{im}\theta_k)$, on a :

$$\sum_{p=1}^{k} \int_{\theta_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{5}$$

D'autre part, d'après 13.2.4, si z est intérieur à C_i et si $j \neq i$, il vient :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\theta_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z)\ ,\ \frac{1}{2i\pi} \int_{\theta_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0. \tag{6}$$

On en déduit que la formule (4) est vraie si z appartient à la réunion des intérieurs des C_j, $1 \leqslant j \leqslant k$.
Soit $z \in K$ appartenant à la frontière d'un carré C_j. D'après ce que l'on a déjà dit, on a $z \notin \operatorname{im}\gamma_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Soit $(z_p)_p$ une suite de points de l'intérieur de C_j de limite z. Il existe $\rho > 0$ tel que $|(\zeta - z)(\zeta - z_p)| \geqslant \rho$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $\zeta \in \operatorname{im}\gamma_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. On a alors :

$$\Big| \int_{\gamma_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_n}\, d\zeta - \int_{\gamma_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \Big| \leqslant \frac{|z - z_n|}{\rho} \operatorname{long}(\gamma_i) \sup\{|f(\zeta)|\, ;\, \zeta \in \operatorname{im}\gamma_i\}.$$

Compte tenu de (5) et (6), on obtient alors (4) pour z. □

Corollaire 13.2.6. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et K un compact de U. Il existe des segments orientés $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ dans $U\backslash K$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $f \in \mathcal{H}(U)$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ et $w_1, \ldots, w_k \in \operatorname{im}\gamma_1 \cup \cdots \cup \operatorname{im}\gamma_n$, vérifiant :*

$$\sup \left\{ \left| f(z) - \sum_{p=1}^{k} \frac{\lambda_p}{z - w_p} \right| ; \, z \in K \right\} \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ comme en 13.2.5. Pour $1 \leqslant p \leqslant n$, il résulte de 13.2.3 qu'il existe $\lambda_{p,1}, \ldots, \lambda_{p,m(p)} \in \mathbb{C}$ et $w_{p,1}, \ldots, w_{p,m(p)} \in \operatorname{im}\gamma_p$ tels que, si

$$Q_p(z) = \sum_{j=1}^{m(p)} \frac{\lambda_{p,j}}{z - w_{p,j}},$$

on ait :

$$\sup\left\{\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - Q_p(z)\right| ; \, z \in K\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{n}\cdot$$

On a alors le résultat en considérant la somme des Q_p et en appliquant 13.2.5. □

13.2.7. Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Dans la suite, on note $\mathscr{L}(K)$ l'ensemble des fonctions f sur K pour lesquelles il existe un voisinage V de K et $g \in \mathcal{H}(V)$ vérifiant $g|K = f$. On a $\mathscr{L}(K) \subset \mathscr{C}(K)$.

Si A est une partie de $\mathbb{C}$, on désigne par $\mathbb{C}_A(X)$ l'ensemble des fonctions rationnelles dont les pôles appartiennent à A.

Proposition 13.2.8. *Soient K un compact de $\mathbb{C}$ et A une partie de $\mathbb{C}\backslash K$. On suppose que, pour toute composante connexe bornée C de $\mathbb{C}\backslash K$, on a $A \cap C \neq \emptyset$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $f \in \mathscr{L}(K)$, il existe $g \in \mathbb{C}_A(X)$ vérifiant $\|f - g\|_K \leqslant \varepsilon$.*

Démonstration. Comme $f \in \mathscr{L}(K)$, il résulte de 13.2.6 qu'il existe un compact L de $\mathbb{C}$ vérifiant $L \cap K = \emptyset$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, et $w_1, \ldots, w_n \in L$ tels que, si

$$g(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{z - w_i},$$

on ait $\|f - g\|_K \leqslant \varepsilon/2$.

Soit C_i la composante connexe de $\mathbb{C}\backslash K$ contenant w_i.

• Si C_i est bornée, il existe $\zeta_i \in A \cap Z_i$. D'après 13.2.2, (i), il existe un polynôme g_i en $(z - \zeta_i)^{-1}$ tel que :

$$\sup\left\{\left|g_i(z) - \frac{\lambda_i}{z - \zeta_i}\right| ; \, z \in K\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2n}\cdot$$

• Supposons C_i non bornée. Il existe (13.2.2, (ii)) un polynome g_i tel que

$$\sup\left\{\left|g_i(z) - \frac{\lambda_i}{z - \zeta_i}\right| ; \, z \in K\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2n}\cdot$$

Si l'on pose $g = g_1 + \cdots + g_n$, on a alors $\|f - g\|_K \leqslant \varepsilon$. □

Corollaire 13.2.9. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et K un compact de U. On suppose que, pour toute composante connexe bornée C de $\mathbb{C}\backslash K$, on a $C \cap (\mathbb{C}\backslash U) \neq \emptyset$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $f \in \mathscr{L}(K)$, il existe une fraction rationnelle g holomorphe dans U telle que $\|f - g\|_K \leqslant \varepsilon$.*

Démonstration. On peut prendre $A \cap U = \emptyset$ dans 13.2.8. □

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Corollaire 13.2.10. *Soit K un compact de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{C}\setminus K$ soit connexe. Si $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathscr{L}(K)$, il existe un polynôme g tel que $\|f - g\|_K \leqslant \varepsilon$.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la preuve de 13.2.8. □

13.2.11. Donnons un exemple d'utilisation de 13.2.10. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 1$ (respectivement $f(z) = 0$, $f(z) = -1$) si $\operatorname{Im}(z) > 0$ (respectivement $\operatorname{Im}(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) < 0$). On va prouver qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :

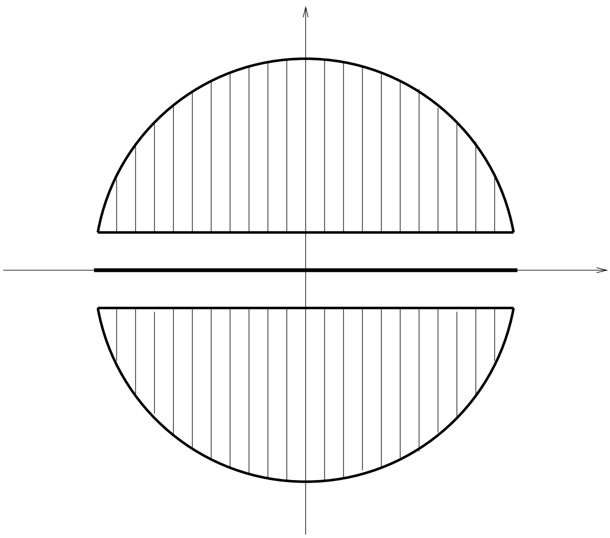
$$\lim_n P_n(z) = f(z).$$

Si $n \geqslant 2$, on pose :

$$K_n = D'(0,n)\setminus\left\{z \in \mathbb{C}\,;\, 0 < \operatorname{Im}(z) < \frac{1}{n}\right\},\ f_n = f|K_n,$$

$$U_n = \left\{z \in \mathbb{C}\,;\, |\operatorname{Im}(z)| > \frac{1}{n^2}\right\} \cup \left\{z \in \mathbb{C}\,;\, |\operatorname{Im}(z)| < \frac{1}{2n^2}\right\}.$$

L'ensemble K_n est figuré ci-dessous :



On a $K_n \subset U_n$, et $f|U_n \in \mathcal{H}(U_n)$, car f est constante sur les trois composantes connexes de U_n. Ainsi, $f_n \in \mathscr{L}(K_n)$. D'après 13.2.10, il existe un polynôme P_n tel que

$$\|f_n - P_n\|_{K_n} \leqslant \frac{1}{n}$$

pour tout $n \geqslant 2$. Comme $\mathbb{C}$ est la réunion des K_n, la suite $(P_n)_n$ répond à la question.

13.2.12. Soient K un compact de $\mathbb{C}$, U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant K, P une partie de $U\setminus K$, $\widetilde{P}$ son adhérence dans U, et $\overline{P}$ son adhérence dans $\mathbb{C}$. On a $\widetilde{P} \subset \overline{P}$.

Supposons que $\widetilde{P}$ soit un compact de U (on dit alors que P est *relativement compacte dans* U). Il résulte de la définition d'un compact que $\widetilde{P}$ est un compact de $\mathbb{C}$, donc est fermé dans $\mathbb{C}$. Par suite, $\widetilde{P} = \overline{P}$.

Lemme.

(i) *Soient C une composante connexe de $U\backslash K$ et ∂C sa frontière. On a $U \cap \partial C \subset K$. Si C est une partie relativement compacte de U, pour tout $f \in \mathcal{H}(U)$, on a* $\sup\{|f(z)|\,;\, z \in C\} \leqslant \|f\|_K$.

(ii) *Soit C une composante connexe de $\mathbb{C}\backslash K$ contenue dans U. Alors C est contenue dans une composante connexe de $U\backslash K$. Si C est bornée, c'est une partie relativement compacte dans U.*

Démonstration. (i) Supposons l'existence de $a \in (D \cap \partial C)\backslash K$. Il existe un disque $D(a,r)$ contenu dans $U\backslash K$. On a $D(a,r) \cap C \neq \emptyset$, donc $D(a,r) \subset C$ puisque C est une composante connexe de $U\backslash K$. C'est absurde puisque $\partial C = \overline{C}\backslash C$ (car C est un ouvert de $\mathbb{C}$).

Si C est une partie relativement compacte de U, on a $\partial C \subset U$, donc $\partial C \subset K$. La dernière assertion résulte alors de 7.2.5.

(ii) Comme C est une partie connexe de $U\backslash K$, elle est contenue dans une composante connexe C_0 de $U\backslash K$. La maximalité de C implique alors que $C = C_0$. Si C est bornée, alors $\overline{C} = C \cup \partial C$ est un compact. D'après (i), où l'on prend $U = \mathbb{C}$, on a $\partial C \subset K$. D'où $\overline{C} \subset U \cup K = U$. □

Théorème 13.2.13. **(Théorème de Runge).** *Soient K un compact de $\mathbb{C}$ et U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant K. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Aucune composante connexe de $U\backslash K$ n'est relativement compacte dans U.*

(ii) *Toute composante connexe bornée de $\mathbb{C}\backslash K$ a une intersection non vide avec $\mathbb{C}\backslash U$.*

(iii) *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $f \in \mathscr{L}(K)$, il existe une fraction rationnelle g sans pôle dans U et vérifiant $\|f - g\|_K \leqslant \varepsilon$.*

(iv) *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $f \in \mathscr{L}(K)$, il existe $g \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $\|f - g\|_K \leqslant \varepsilon$.*

(v) *Pour tout $a \in U\backslash K$, il existe $f \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $|f(a)| > \|f\|_K$.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) C'est clair d'après 13.2.12, (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Résulte de 13.2.9.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) C'est évident.

(v) $\Rightarrow$ (i) Si $U\backslash K$ a une composante connexe C relativement compacte dans U, l'inégalité de (v) n'est pas vérifiée d'après 13.2.12, (i).

(iv) $\Rightarrow$ (i) Supposons que $U\backslash K$ possède une composante connexe C relativement compacte dans U. Soit $a \in C$ et $\delta = \sup\{|z - a|\,;\, z \in K\}$. L'application $f\colon z \to (z-a)^{-1}$ appartenant à $\mathscr{L}(K)$, il existe $g \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $\|f - g\|_K < \delta^{-1}$, donc :

$$\sup\{|1 - (z-a)g(z)|\,;\, z \in K\} < 1.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

D'après 13.2.12, (i), on a $|1 - (z - a)g(z)| < 1$ pour tout $z \in C$. On obtient une contradiction en prenant $z = a$.

(i) $\Rightarrow$ (v) Soient $a \in U \backslash K$ et $L = K \cup \{a\}$. Si C est une composante connexe de $U \backslash K$ ne contenant pas a (respectivement contenant a) alors C (respectivement $C \backslash \{a\}$) est une composante connexe de $U \backslash L$, et on obtient ainsi toutes les composantes connexes de $U \backslash L$.

Soit $g \in \mathscr{C}(L)$ définie par $g|K = 0$ et $g(a) = 1$. Il est clair que $g \in \mathscr{L}(L)$. Ayant déjà montré l'équivalence de (i) et (iv), on voit qu'il existe $h \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $\|h\|_K < 1/2$ et $|1 - h(a)| < 1/2$. D'où $|h(a)| > \|h\|_K$ et (v). □

> ***Remarque.*** Prenons $U = D(0,5)$ et $K = D'(0,1) \cup C'(0,2,3)$. Alors les conditions de 13.2.13 ne sont pas vérifiées.

Corollaire 13.2.14. *Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathbb{C} \backslash K$ est connexe.*

(ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $f \in \mathscr{L}(K)$, il existe un polynôme g tel que $\|f - g\|_K \leqslant \varepsilon$.*

(iii) *Pour tout $a \in \mathbb{C} \backslash K$, il existe un polynôme g tel que $|g(a)| > \|g\|_K$.*

Démonstration. Dire que $\mathbb{C} \backslash K$ est connexe signifie que $\mathbb{C} \backslash K$ n'a pas de composante connexe relativement compacte dans $\mathbb{C}$. On a alors facilement le résultat d'après 13.2.13 car, si h est une fonction entière et si $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme g tel que $\|h - g\|_K \leqslant \varepsilon$. □

EXERCICES

Exercice 13.1. Soit $(P_n)_{n \geqslant 2}$ une suite de polynômes à une indéterminée. On considère les conditions suivantes :

(i) $P_n(0) = 1$ pour tout $n \geqslant 2$.

(ii) Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(iii) $\sup\{|P_n(z)| \,;\, |z| = 1, n \geqslant 2\} < +\infty$.

a) Existe-t-il une suite $(P_n)_{n \geqslant 2}$ vérifiant (i), (ii) et (iii) ?

b) Existe-t-il une suite $(P_n)_{n \geqslant 2}$ vérifiant (i) et (ii) ?

Exercice 13.2. Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}(U)$ qui converge simplement sur U vers une application f de U dans $\mathbb{C}$. Si $z \in U$, on pose :

$$\delta(z) = \sup\{|f_n(z)| \,;\, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

a) Prouver que $\delta(z) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $z \in U$.

b) Soit Δ un disque fermé contenu dans U. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\Delta_n = \{z \in \Delta\,;\, \delta(z) \leqslant n\}.$$

Montrer que les Δ_n sont fermés et qu'il existe au moins un indice n tel que Δ_n soit d'intérieur non vide.

c) Prouver qu'il existe un ouvert V contenu dans U, dense dans U, et tel que la restriction de f à V appartienne à $\mathcal{H}(V)$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 13.1. On note $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(0) = 1$ et $f(z) = 0$ si $z \in \mathbb{C}^*$.

a) Supposons qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 2}$ vérifiant les trois conditions. Posons :

$$M = \sup\{|P_n(z)|\,;\, |z| = 1, n \geqslant 2\}.$$

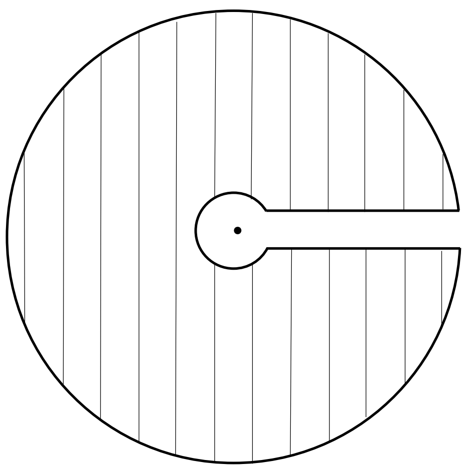
D'après le principe du maximum, il vient $|P_n(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in D(0,1)$ et tout $n \geqslant 2$.

D'après le théorème de Montel, il existe une suite extraite de la suite $(P_n)_{n\geqslant 2}$ qui converge uniformément vers f sur tout compact de $D(0,1)$. L'application f n'étant pas continue sur $D(0,1)$, c'est absurde.

b) Pour tout entier n au moins égal à 2, on pose :

$$K_n = \left(\left\{z \in \mathbb{C}\,;\, \frac{1}{n} \leqslant |z| \leqslant n\right\} \setminus \left\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) > 0, 0 < \mathrm{Im}(z) < \frac{1}{n}\right\}\right) \cup \{0\}.$$

Le compact K_n est représenté par le dessin suivant :



© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

La restriction f_n de f à K_n se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage de K_n. D'autre part, $\mathbb{C}\backslash K_n$ est connexe.

D'après 13.2.4, il existe un polynôme Q_n tel que

$$|f(z) - Q_n(z)| < \frac{1}{n}$$

pour tout $z \in K_n$.

Si, pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$P_n(z) = Q_n(z) + 1 - Q_n(0),$$

alors la suite $(P_n)_n$ vérifie les conditions (i) et (ii).

Exercice 13.2. On utilisera la forme suivante du théorème de Baire : si X est un espace métrique complet, et si $(F_n)_n$ est une suite de fermés de X dont la réunion est X, alors l'un au moins des F_n est d'intérieur non vide.

a) Si $z \in U$, la suite $\big(f_n(z)\big)_n$ est convergente, donc bornée. Le résultat est alors clair.

b) L'application δ étant la borne supérieure d'une suite de fonctions continues, elle est semi-continue inférieurement. Ainsi, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble des $z \in U$ vérifiant $\delta(z) \leqslant \lambda$ est un fermé de U. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Δ_n est un fermé.

L'ensemble Δ est un espace métrique complet qui est la réunion des Δ_n, $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de Baire, l'un au moins des Δ_n est d'intérieur non vide.

c) Soient $a \in U$ et $r > 0$ tels que $D'(a,r) \subset U$. Ce qui précède prouve qu'il existe un ouvert non vide $V_{a,r}$ contenu dans $D'(a,r)$, et sur lequel la suite $(f_n)_n$ est uniformément bornée. Soit V la réunion des $V_{a,r}$ pour $a \in U$ et $r > 0$. Il est clair que V est un ouvert dense de U et que la suite $(f_n)_n$ est uniformément bornée sur tout compact de V.

Posons $g = f|V$ et $g_n = f_n|V$. Ce qui précède montre que $\{g_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie rélativement compacte de $\mathcal{H}(V)$ (théorème de Montel). La suite $(g_n)_n$ convergeant simplement vers g sur V, elle converge donc uniformément vers g sur tout compact de V. D'où $g \in \mathcal{H}(V)$.

Chapitre 14

Fonctions harmoniques

Dans tout ce chapitre, on reprend les conventions du paragraphe 5.1. En particulier, on identifie un ouvert U de $\mathbb{C}$ à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une fonction de la variable $z \in U$ est aussi considérée comme une fonction des variables réelles x et y, où $z = x + iy$.

14.1 PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

14.1.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$. Si f est une fonction sur U, on note $\overline{f}$ la fonction $z \to \overline{f(z)}$. On dit que f est *antiholomorphe* sur U si $\overline{f} \in \mathcal{H}(U)$. Compte tenu du paragraphe 5.3, dire que f est antiholomorphe sur U signifie que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

14.1.2. On note $C^2(U)$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Soit $f \in C^2(U)$. Si $z_0 \in U$, le *laplacien* de f au point z_0 est défini par :

$$\Delta f(z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_0).$$

Avec les notations de 5.2.4, on trouve facilement :

$$\Delta f(z_0) = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}}(z_0) = 4\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z}(z_0). \qquad (1)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

On note Δf la fonction $z \to \Delta f(z)$ sur U.

Définition 14.1.3. *Une fonction f de classe C^2 dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ est dite* harmonique *dans U si $\Delta f = 0$.*

14.1.4. On note $\mathrm{Har}(U)$ l'ensemble des fonctions harmoniques dans U.

• Il est clair que $\mathrm{Har}(U)$ est un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de l'algèbre $C^2(U)$. Ce n'est *pas* une sous-algèbre de $C^2(U)$ (par exemple, $z = x + iy \to x$ est harmonique dans U, alors que $z \to x^2$ ne l'est pas).

• D'après (1), si f est holomorphe ou antiholomorphe dans U, alors $f \in \mathrm{Har}(U)$.

• Il est immédiat que $\overline{\Delta f} = \Delta \overline{f}$. Par suite :

$$f \in \mathrm{Har}(U) \Leftrightarrow \overline{f} \in \mathrm{Har}(U) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \mathrm{Har}(U).$$

Proposition 14.1.5. *Soient U un ouvert* simplement connexe *de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathrm{Har}(U)$.*

(i) *f est la somme d'une fonction holomorphe et d'une fonction antiholomorphe dans U.*

(ii) *Si f est à valeurs réelles, c'est la partie réelle d'une fonction holomorphe dans U déterminée à une constante additive imaginaire pure près.*

Démonstration. D'après (1), on a :

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big) = 0 \Leftrightarrow g = \frac{\partial f}{\partial z} \in \mathcal{H}(U).$$

L'ouvert U étant simplement connexe, g a une primitive h dans U (12.2.5). Alors $\ell = f - h$ est antiholomorphe, et on a $f = \ell + h$.

Si f est à valeurs réelles, on a $f = \mathrm{Re}(h + \ell) = \mathrm{Re}(h + \overline{\ell})$ et $h + \overline{\ell} \in \mathcal{H}(U)$. Le dernier point est immédiat d'après 5.2.7. □

Corollaire 14.1.6. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathrm{Har}(U)$.*

(i) *Si f est à valeurs réelles, c'est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe.*

(ii) *f est de classe C^∞ dans U et toutes les dérivées de f sont harmoniques dans U.*

(iii) *Soient V un ouvert de $\mathbb{C}$ et $g \in \mathcal{H}(V)$ vérifiant $g(V) \subset U$. Alors $f \circ g \in \mathrm{Har}(V)$.*

Démonstration. L'assertion (i) et le premier point de (ii) sont clairs d'après 14.1.5. Le second point de (ii) résulte alors du théorème de Schwarz quant à l'interversion des dérivations. Pour établir (iii), on peut supposer f à valeurs réelles (14.1.4). Alors, d'après (i), localement, $f \circ g$ est de la forme $h \circ g$, où $h \in \mathcal{H}(U)$. D'où $f \in \mathrm{Har}(V)$ d'après (1). □

Proposition 14.1.7. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathrm{Har}(U)$. Alors f possède la propriété de moyenne dans U et vérifie le principe du maximum dans U.*

Démonstration. D'après 7.2.4, il suffit de démontrer le premier point. Soient $a \in U$ et $r > 0$ tels que $D'(a, r) \subset U$. Dans un voisinage de $D'(a, r)$, on a $f = g + \overline{h}$, où $g, h \in \mathcal{H}(U)$ (14.1.5). On conclut d'après 7.2.2. $\square$

Corollaire 14.1.8. *Soient U un ouvert connexe et $f \in \mathrm{Har}(U)$ à valeurs réelles.*

(i) *Si $a \in U$ et si $f(z) \leqslant f(a)$ dans un voisinage de a, alors f est constante.*

(ii) *Supposons U borné, f continue sur $\overline{U}$, et non constante dans U. Pour tout $z \in U$, on a $f(z) < \sup\{f(\zeta)\,;\, \zeta \in \overline{U} \backslash U\}$.*

Démonstration. Soit $r > 0$ vérifiant $D'(a, R) \subset U$. Il existe $M > 0$ tel que $g(z) = f(z) + M > 0$ pour tout $z \in D'(a, r)$. On a $|g(z)| = g(z) \leqslant g(a) = |g(a)|$ dans un voisinage de a. Il suffit donc d'appliquer le principe du maximum à g pour obtenir (i). L'assertion (ii) s'en déduit aussitôt. $\square$

14.2 REPRÉSENTATION INTÉGRALE

14.2.1. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Le *noyau de Poisson* relatif au disque $D(a, r)$ est la fonction définie, pour $(z, w) \in D(a, r) \times C(a, r)$, par :

$$P(z, w) = \frac{r^2 - |z - a|^2}{|w - z|^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{(w - a) + (z - a)}{(w - a) - (z - a)}\right). \tag{2}$$

Ainsi, si $|w| = r$, l'application $z \to P(z, w)$ est la partie réelle d'une fonction holomorphe dans $D(a, r)$. Par suite, $z \to P(z, w)$ est harmonique dans $D(a, r)$.

Si $|u| < 1$, on a :

$$\frac{1 + u}{1 - u} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} u^n.$$

Utilisant la seconde expression de (2), on voit donc que, si $0 \leqslant \rho < r$ et $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, on a

$$P(a + \rho e^{i\theta}, a + re^{i\varphi}) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cos[n(\theta - \varphi)] \tag{3}$$

et, ce développement est normalement convergent pour $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. D'où :

$$\int_0^{2\pi} P(a + \rho e^{i\theta}, a + re^{i\varphi})\, d\theta = \int_0^{2\pi} P(a + \rho e^{i\theta}, a + re^{i\varphi})\, d\varphi = 2\pi.$$

14.2.2. Soit p une fonction continue sur $C(a, r)$. Le *problème de Dirichlet* dans le disque $D(a, r)$ consiste à prolonger p en une fonction continue sur $D'(a, r)$ et harmonique dans $D(a, r)$. Le résultat suivant montre que ce problème a une unique solution.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Théorème. *Soient $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, et p une fonction continue sur $C(a, r)$. Il existe une et une seule fonction continue f sur $D'(a, r)$, harmonique sur $D(a, r)$ et prolongeant p. Si $z \in D(a, r)$, on a :*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, a + re^{i\varphi}) p(a + re^{i\varphi})\, d\varphi. \tag{4}$$

Démonstration. Il est clair qu'il suffit d'établir le résultat pour p à valeurs réelles, ce que nous supposerons désormais réalisé.
Si f_1 et f_2 sont solutions du problème, on a $f_1 - f_2 | C(a, r) = 0$, donc $f_1 = f_2$ (14.1.8). D'où l'unicité.
Soient $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z - a| = \rho < r$ et $w \in C(a, r)$. Posons

$$Q(z, w) = \frac{(w - a) + (z - a)}{(w - a) - (z - a)}.$$

On a $P(z, w) = \mathrm{Re}\,\big(Q(z, w)\big)$ et, pour $\varphi \in \mathbb{R}$

$$Q(z, a + re^{i\varphi}) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{r^n} e^{-in\varphi},$$

ce développement étant normalement convergent pour $\varphi \in \mathbb{R}$. Par suite,

$$\int_0^{2\pi} Q(z, a + re^{i\varphi}) p(a + re^{i\varphi})\, d\varphi = \alpha_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (z - a)^n \tag{5}$$

avec

$$\alpha_0 = \int_0^{2\pi} p(a + re^{i\varphi})\, d\varphi \ \text{ et } \ \alpha_n = \frac{1}{r^n} \int_0^{2pi} e^{-in\varphi} p(a + re^{i\varphi})\, d\varphi \ \text{ si } \ n \geqslant 1.$$

Comme p est à valeurs réelles, l'identité (5) nous montre que la fonction donnée par (4) est la partie réelle d'une fonction holomorphe dans $D(a, r)$, donc f est harmonique dans $D(a, r)$. Prouvons que f est continue sur $D'(a, r)$. Afin de simplifier les notations, on va supposer $a = 0$. Soit $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$. Compte tenu de 14.2.1 et de la périodicité des fonctions que l'on intègre, si $z \in D(0, r)$, il vient :

$$\begin{aligned} |f(z) - p(re^{i\varphi_0})| &= \frac{1}{2\pi} \Big| \int_{\varphi_0 - \pi}^{\varphi_0 + \pi} P(z, re^{i\varphi}) \big(p(re^{i\varphi}) - p(re^{i\varphi_0})\big)\, d\varphi \Big| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0 - \pi}^{\varphi_0 + \pi} P(z, re^{\varphi}) \big| p(re^{i\varphi}) - p(re^{i\varphi_0}) \big|\, d\varphi. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta \in]0, \pi|$ tel que $|p(re^{i\varphi}) - p(re^{i\varphi_0})| < \varepsilon$ dès que $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \eta$. Alors :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0 - \eta}^{\varphi_0 + \eta} P(z, re^{\varphi}) \big| p(re^{i\varphi}) - p(re^{i\varphi_0}) \big|\, d\varphi \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{\varphi_0 - \pi}^{\varphi_0 + \pi} P(z, re^{\varphi})\, d\varphi = \varepsilon.$$

Soit $K = \{re^{i\varphi}\,;\, \varphi \in [\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi] \setminus]\varphi_0 - \eta, \varphi_0 + \eta[$. C'est un compact de $\mathbb{C}$ ne contenant pas $re^{i\varphi_0}$. Par suite, il existe $\delta > 0$ et un voisinage V de $re^{i\varphi_0}$ dans $\mathbb{C}$ tels que $|\zeta - w| \geqslant \delta$ pour tout $w \in K$ dès que $\zeta \in V$. On en déduit que, si $z \in V \cap D(0,r)$ et $\varphi \in [\varphi_0 - \pi, \varphi_0 - \eta] \cup [\varphi_0 + \eta, \varphi_0 + \pi]$, on a :

$$0 \leqslant P(z, re^{i\varphi}) \leqslant \frac{r^2 - |z|^2}{\delta^2}.$$

Si $M > 0$ vérifie $|p(\zeta)| \leqslant M$ pour tout $\zeta \in C(0,r)$, pour $z \in V \cap D(0,r)$, il vient alors :

$$\int_{\varphi_0-\pi}^{\varphi_0-\eta} P(z, re^{i\varphi})|p(re^{i\varphi}) - p(re^{i\varphi_0}|\, d\varphi \leqslant \frac{2\pi M(r^2 - |z|^2)}{\delta^2},$$
$$\int_{\varphi_0+\eta}^{\varphi_0+\pi} P(z, re^{i\varphi})|p(re^{i\varphi}) - p(re^{i\varphi_0}|\, d\varphi \leqslant \frac{2\pi M(r^2 - |z|^2)}{\delta^2}.$$

Tout ce qui précède montre que $f(z)$ tend vers $p(re^{i\varphi_0})$ quand z tend vers $re^{i\varphi}$. On a prouvé que f est continue dans $D'(0,r)$. □

Corollaire 14.2.3. (Formule de Poisson). *Soient $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, et f une fonction continue sur $D'(a,r)$ et harmonique dans $D(a,r)$. Si $|z| < r$, on a :*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, a + re^{i\varphi}) f(a + re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Corollaire 14.2.4. (Inégalités de Harnack). *Soient $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, U un ouvert contenant $D'(a,r)$, et $f \in \mathrm{Har}(U)$, à valeurs réelles positives ou nulles. Si $|z - a| < r$, on a :*

$$\frac{r - |z-a|}{r + |z-a|} f(a) \leqslant f(z) \leqslant \frac{r + |z-a|}{r - |z-a|} f(a).$$

Démonstration. Le noyau de Poisson $P(z,w)$ relatif à $D(a,r)$ vérifie :

$$\frac{r - |z-a|}{r + |z-a|} \leqslant P(z, a + re^{i\varphi}) \leqslant \frac{r + |z-a|}{r - |z-a|}.$$

Comme f est à valeurs positives ou nulles, il suffit d'appliquer 14.2.3 pour obtenir le résultat. □

Théorème 14.2.5. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur U. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in \mathrm{Har}(U)$.

(ii) *f possède la propriété de moyenne dans U.*

Démonstration. (i) ⇒ Cela a été vu en 14.1.7.

(ii) ⇒ (i) Soient $a \in U$ et $r > 0$ tels que $D'(a,r) \subset U$. Notons g la solution du problème de Dirichlet relative au disque $D(a,r)$ et à f. La fonction g vérifie la propriété de moyenne dans $D(a,r)$ (14.1.7). Il en est de même de $f - g$. Par suite, $f - g$ vérifie le principe du maximum (7.2.4). Comme $f - g$ est nulle sur $C(a,r)$, on a $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in D(a,r)$ (7.2.5). D'où $f \in \mathrm{Har}(U)$. □

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Théorème 14.2.6. (Théorème de Harnack). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions harmoniques dans U.*

(i) *Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de U, sa limite f est harmonique dans U.*

(ii) *Si U est connnexe et si la suite $(f_n)_n$ est à valeurs réelles et croissante, alors ou $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de U ou, pour tout $z \in U$, $f_n(z)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.*

Démonstration. (i) Les f_n possèdent la propriété de moyenne et convergent uniformément vers f sur tout disque fermé contenu dans U. On en déduit que f possède la propriété de moyenne dans U, donc $f \in \mathrm{Har}(U)$ (14.2.5).

(ii) Quitte à remplacer f_n par $f_n - f_1$, on peut supposer les f_n à valeurs positives ou nulles. La suite $(f_n)_n$ étant croissante, pour tout $z \in U$, la suite $\big(f_n(z)\big)_n$ a une limite $f(z) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Posons :

$$V = \{z \in U\,;\, f(z) < +\infty\}\;,\; W = \{z \in U\,;\, f(z) = +\infty\}.$$

En appliquant les inégalités de Harnack (14.2.5) aux f_n, on voit que V et W sont ouverts dans U. Par suite, ou $W = U$, ou $f(z) < +\infty$ pour tout $z \in U$. Supposons que l'on soit dans ce dernier cas. Si $D'(a,r) \subset U$ et si $m \leqslant n$, les inégalités de Harnack montrent à nouveau que

$$0 \leqslant f_n(z) - f_m(z) \leqslant \frac{r + |z-a|}{r - |z-a|}\big(f_n(a) - f_m(a)\big)$$

si $|z-a| < r$. Par conséquent, la suite $(f_n)_n$ converge uniformément dans tout disque $D'(a,\rho)$, avec $\rho < r$. D'où le résultat. □

EXERCICES

Exercice 14.1. Soit $U = \{z \in \mathbb{C}\,;\, Re(z) > 0\}$. Déterminer les applications de classe C^2 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$u\colon U \to \mathbb{R}\;,\; (x,y) \to f\Big(\frac{x^2+y^2}{x}\Big)$$

soit harmonique dans U.

Exercice 14.2. a) Soient $D = D(0,1)$ et $u\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ continue et harmonique dans D. Si $|z| < 1$, on pose :

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}u(e^{it})\,dt.$$

Prouver que $g \in \mathcal{H}(U)$ et que $\mathrm{Re}(g) = u$.

b) Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur U. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathrm{Re}(f_n)$. On suppose que la suite $(u_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de U et qu'il existe $z_0 \in U$ tel que la suite $\big(f_n(z_0)\big)_n$ soit convergente. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de U.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 14.1. Supposons qu'une telle application f existe, et posons, si $(x, y) \in U$, $t = (x^2 + y^2)/x$. Il vient : $\Delta(x, y) = \dfrac{2t}{x} f'(t) + \dfrac{t^2}{x^2} f''(t)$.

Si $u \in \mathrm{Har}(U)$, on a donc $0 = 2tf'(t) + t^2 f''(t) = [tf'(t)]'$ pour tout $t > 0$. On en déduit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) = \lambda \ln t + \mu$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Réciproquement, on vérifie facilement que de telles fonctions conviennent.

Exercice 14.2. a) Si $|z| < 1$ et $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u(e^{it}) = u(e^{it}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-int} u(e^{it}),$$

et, z étant fixé, la convergence de cette série est normale quand $t \in [0, 1]$. On peut l'intégrer terme à terme, et ceci prouve que $g \in \mathcal{H}(U)$. Le fait que $\mathrm{Re}(g) = u$ résulte alors de 14.2.2.

b) Notons V l'ensemble des points $z \in U$ en lesquels la suite $\big(f_n(z)\big)_n$ converge.

Soient $a \in V$ et $R > 0$ tels que $D'(a, R) \subset U$, et γ le cercle $C(0, 1)$ orienté dans le sens positif. D'après a), si $|z| < 1$, il vient :

$$(*) \qquad f_n(a + Rz) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u_n(a + Re^{it})\, dt + f_n(a) - u_n(a).$$

D'après les hypothèses, il existe $M > 0$ tel que $|u_n(a + Re^{it})| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$. Si $|z| \leqslant r < 1$, on a donc :

$$|f_n(a+Rz) - f_p(a+Rz)| \leqslant \frac{2M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + r}{1 - r}\, dt + |f_n(a) - f_p(a)| + |u_n(a) - u_p(a)|.$$

Le critère de Cauchy uniforme prouve alors que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $D'(a, r)$. Ainsi, V est ouvert.

Prouvons que V est fermé dans U. On peut supposer $V \neq U$. Soient $a \in U \backslash V$ et $R > 0$ vérifiant $D'(a, R) \subset U$. Si $|z| < 1$, le terme $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u_n(a + Re^{it})\, dt$ a une limite quand n tend vers $+\infty$. Il en résulte que la suite $\big(f_n(a + Rz)\big)_n$ ne peut converger en aucun point z tel que $|z| < 1$ (sinon, la suite $\big(f_n(a)\big)_n$ convergerait). Ainsi, $U \backslash V$ est ouvert, et V est fermé. La connexité de U et la non vacuité de V impliquent que $U = V$. On a vu que la convergence de la suite est uniforme au voisinage de tout $a \in V = U$, d'où le résultat.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Chapitre 15

Quelques calculs d'intégrales

On donne des méthodes pour calculer quelques intégrales en utilisant le théorème des résidus. Les exemples proposés sont nécessairement en nombre limité, et on renvoie à des livres d'exercices pour plus de détails. On n'indique généralement que des méthodes, les calculs et justifications étant souvent laissés au lecteur. Dans un premier paragraphe, on prouve d'abord quelques lemmes qui sont utiles pour le calcul d'intégrales.

15.1 QUELQUES LEMMES

Lemme 15.1.1. (Lemme du petit cercle). *Soient $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ et $\gamma_r \colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $t \to a + re^{it}$ un chemin dont l'image est un arc de cercle. Soit f une fonction holomorphe dans un disque épointé $D^*(a, R)$. On suppose que a est un point régulier ou un pôle simple de f. Alors :*

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = (\beta - \alpha) i \operatorname{Res}(f, a).$$

Démonstration. Posons $g(z) = f(z) - \dfrac{\operatorname{Res}(f, a)}{z - a}\cdot$ D'après les hypothèses, il existe $\rho, M \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $|g(z)| \leqslant M$ si $z \in D^*(a, \rho)$. Si $0 < r < \rho$, on a donc :

$$\Big| \int_{\gamma_r} g(z)\, dz \Big| \leqslant M \operatorname{long}(\gamma_r) = M|\beta - \alpha| r.$$

D'autre part :

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z-a} = \int_\alpha^\beta i\,dt = (\beta-\alpha)i.$$

D'où le résultat. □

Lemme 15.1.2. **(Lemme du grand cercle).** *Soient α, β des éléments de $[0, 2\pi]$ et $\gamma_R\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$, $t \to Re^{it}$ un chemin dont l'image est un arc de cercle. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ contenant $\operatorname{im}\gamma_R$ pour R assez grand. On pose*

$$M(R) = \sup\{|f(z)|\,;\, z \in \operatorname{im}\gamma_R\},$$

et on suppose que $RM(R)$ tend vers 0 si R tend vers $+\infty$. Alors :

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Si R est assez grand, on a $RM(R) < \varepsilon$. Dans ce cas :

$$\Big|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{R}\operatorname{long}(\gamma_R) = \varepsilon|\beta-\alpha|.$$

D'où l'assertion. □

Lemme 15.1.3. *Avec les notations de* 15.1.2*, on suppose que $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que $M(R)$ tend vers 0 si R tend vers $+\infty$. Soit*

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)e^{iz}\,dz.$$

Alors I_R tend vers 0 si R tend vers $+\infty$.

Démonstration. Soit

$$g\colon \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}_+\ ,\ t \to \frac{\sin t}{t}\cdot$$

Il vient :

$$g'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2} = \frac{\cos t}{t^2}(t - \tan t) \leqslant 0.$$

Ainsi, g est décroissante. Par suite, si $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\frac{2t}{\pi} \leqslant \sin t.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}|I_R| &= \Big|iR\int_\alpha^\beta f(Re^{it})e^{iR\cos t - R\sin t}e^{it}\,dt\Big| \leqslant RM(R)\Big|\int_\alpha^\beta e^{-R\sin t}\,dt\Big| \\ &\leqslant RM(R)\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{-2Rt}{\pi}\right)dt = \frac{\pi M(R)}{2}\cdot\end{aligned}$$

On a obtenu l'assertion. □

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

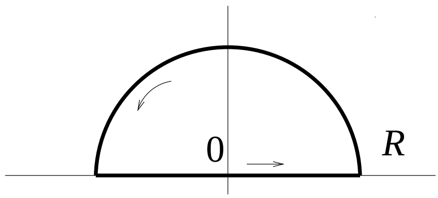
15.2 QUELQUES MÉTHODES

15.2.1. Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle à coefficients réels, où $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux. On suppose que le polynôme Q n'a aucune racine réelle et que $\deg P \leqslant \deg Q - 2$. On sait alors que l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, dt$$

est convergente.

Notons $a_1, \ldots, a_r$ les racines de Q de partie imaginaire strictement positive. On considère le chemin suivant γ_R (on a figuré seulement l'image du chemin sur le dessin ; le lecteur en déterminera facilement une représentation paramétrique).



Pour R assez grand, tous les a_k appartiennent à la composante bornée de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{im} \gamma_R$. D'autre part, si a appartient à la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{im} \gamma_R$, on a $\operatorname{ind}_{\gamma_R}(a) = 0$ (6.3.2).

Soit $a \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Im} a > 0$ et $|a| < R$. Il existe $\rho > 0$ tel que $|z| < R$ et $\operatorname{Im}(z) > 0$ pour tout $z \in D'(a, \rho)$. Notons $\theta \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ le chemin $t \to a + e^{2i\pi t}$. On a $\operatorname{ind}_\theta(a) = 1$ (6.3.3). D'autre part, l'application

$$\delta \colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C} \,,\ (t,u) \to au + u\frac{\gamma_R(t) - a}{|\gamma_R(t) - a|} + (1-u)\gamma_R(t)$$

est une homotopie dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ de γ_R à θ. On a ainsi $\operatorname{ind}_{\gamma_R}(a) = 1$ (10.4.1).

Compte tenu de 10.6.2, on a alors :

$$\int_{\gamma_R} F(z)\, dz = 2i\pi\big(\operatorname{Res}(F, a_1) + \cdots + \operatorname{Res}(F, a_n)\big).$$

Notons θ_R le sous-chemin de γ_R dont l'image est l'arc de cercle figuré sur le dessin. Comme $\deg P \leqslant \deg Q - 2$, il résulte de 15.1.2 que l'intégrale de F sur θ_R tend vers 0 si R tend vers $+\infty$. Comme

$$\int_{\gamma_R} F(z)\, dz = \int_{-R}^{+R} F(t)\, dt + \int_{\theta_R} F(z)\, dz,$$

il vient :

$$I = 2i\pi\big(\operatorname{Res}(F, a_1) + \cdots + \operatorname{Res}(F, a_n)\big).$$

15.2.2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $2n - m \geqslant 2$. Prenons

$$F(t) = \frac{t^m}{1 + t^{2n}}.$$

Les pôles de F de partie imaginaire strictement positive sont les a_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, avec :

$$a_k = \exp\left(\frac{i\pi(2k+1)}{2n}\right).$$

Ce sont des pôles simples de F. D'après 8.4.2, il vient :

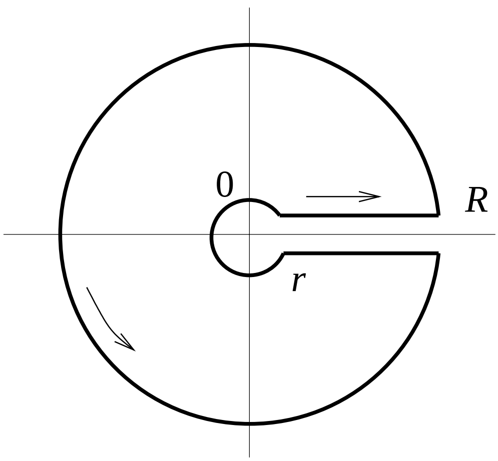
$$\operatorname{Res}(F, a_k) = -\frac{1}{2n} a_k^{m+1}.$$

Un calcul facile donne alors :

$$I = \frac{\pi[1 - (-1)^{m+1}]}{2n \sin \dfrac{(m+1)\pi}{n}}.$$

> ***Remarque.*** Dans les exemples à venir, les calculs d'indices et de résidus seront laissés au lecteur. De même, il montrera que les intégrales introduites sont convergentes.

15.2.3. On note $\Gamma_{r,R}$ le chemin dont l'image est illustrée par le dessin suivant.



On se propose de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} t^{-\alpha} F(t)\, dt$$

où $0 < \alpha < 1$, et où F est une fraction rationnelle à coefficients réels vérifiant $F(0) \neq 0$, $\deg F \leqslant -1$, et dont les pôles $a_1, \ldots, a_n$ n'appartiennent pas à $\mathbb{R}_+$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

On note φ_0 la détermination holomorphe de z^α définie sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$, et qui correspond à un argument θ vérifiant $0 < \theta(z) < 2\pi$ (voir 5.3.2). On pose $f = F/\varphi_0$. Dans la suite, on suppose r assez petit et R assez grand pour que $r < |a_k| < R$ si $1 \leqslant i \leqslant n$. Si $\rho > 0$, on pose $\chi_\rho(t) = \rho e^{2i\pi t}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

De même, φ_1 (respectivement φ_2) est la détermination holomorphe de z^α définie dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ et correspondant à un argument strictement compris entre $-\pi$ et $+\pi$ (respectivement π et 3π). On a ainsi :

- $\varphi_0(z) = \varphi_1(z)$ si $\mathrm{Re}(z) > 0$ et $\mathrm{Im}(z) > 0$.
- $\varphi_0(z) = \varphi_2(z)$ si $\mathrm{Re}(z) > 0$ et $\mathrm{Im}(z) < 0$.

Notons $\gamma_{1,r,R}$ et $\gamma_{2,r,R}$ les chemins suivants :

On a :

$$J = \int_{\Gamma_{r,R}} \frac{F(z)}{\varphi_0(z)}\,dz = 2i\pi\big(\mathrm{Res}(f,a_1) + \cdots + \mathrm{Res}(f,a_n)\big).$$

D'autre part :

$$\int_{\gamma_{1,r,R}} \frac{F(z)}{\varphi_1(z)}\,dz = \int_{\gamma_{2,r,R}} \frac{F(z)}{\varphi_2(z)}\,dz = 0.$$

On voit donc que

$$J = \int_r^R t^{-\alpha} F(t)\,dt + e^{-2i\pi\alpha} \int_R^r t^{-\alpha} F(t)\,dt + S,$$

où S est une combinaison linéaire de six intégrales de la forme

$$J_{k,\gamma} = \int_\gamma \frac{F(z)}{\varphi_k(z)}\,dz,$$

avec $k = 0, 1, 2$ et $\mathrm{im}\,\gamma \subset \mathrm{im}\,\chi_r$ ou $\mathrm{im}\,\gamma \subset \mathrm{im}\,\chi_R$. Les intégrales telles que $\mathrm{im}\,\gamma \subset \mathrm{im}\,\chi_R$ tendent vers 0 quand R tend vers l'infini d'après les hypothèses et 15.1.2. Pour les intégrales telles que $\mathrm{im}\,\gamma \subset \mathrm{im}\,\chi_r$, on trouve facilement :

$$|J_{k,\gamma}| \leqslant 2\pi r^{1-\alpha} \sup\{|F(z)|\,;\, |z| = r\}.$$

Comme 0 n'est pas un pôle de F et que $0 < \alpha < 1$, ces intégrales tendent vers 0 si r tend vers 0.

Compte tenu de tout ce qui précède, on a donc obtenu :

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2i\pi\alpha}}\big(\mathrm{Res}(f,a_1) + \cdots + \mathrm{Res}(f,a_n)\big).$$

15.2.4. Soit F une fraction rationnelle non nulle, à coefficients réels, sans pôle dans $\mathbb{R}_+$, et vérifiant $\deg F \leqslant -2$. On pose :

$$I = \int_0^{+\infty} F(t) \ln t \, dt.$$

On conserve les notations $\Gamma_{r,R}$, $\gamma_{1,r,R}$, $\gamma_{2,r,R}$, φ_0, φ_1, et φ_2 de 15.2.3. On note ψ_k la détermination du logarithme correspondant à φ_k, et on pose $f(z) = F(z)[\psi_0(z)]^2$. Pour r assez petit et R assez grand, on a :

$$J_{r,R} = \int_{\Gamma_{r,R}} f(z) \, dz = 2i\pi\big(\operatorname{Res}(f, a_1) + \cdots + \operatorname{Res}(f, a_n)\big),$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont les pôles de F. D'autre part :

$$\int_{\gamma_{1,r,R}} F(z)[\psi_1(z)]^2 \, dz = \int_{\gamma_{2,r,R}} F(z)[\psi_2(z)]^2 \, dz = 0.$$

On en déduit que

$$J = \int_r^R F(t)[\ln t]^2 \, dt + \int_R^r F(t)[\ln t + 2i\pi]^2 \, dt + S,$$

où S est combinaison linéaire de six intégrales de la forme

$$J_{k,\gamma} = \int_\gamma F(z)[\psi_k(z)]^2 \, dz$$

avec $\operatorname{im} \gamma \subset \operatorname{im} \chi_r$ ou $\operatorname{im} \gamma \subset \operatorname{im} \chi_R$. Comme en 15.2.3, on prouve que ces intégrales tendent vers 0 quand r tend vers 0 ou quand R tend vers $+\infty$. On en déduit :

$$-4i\pi I + 4\pi^2 \int_0^{+\infty} F(t) \, dt = 2i\pi\big(\operatorname{Res}(f, a_1) + \cdots + \operatorname{Res}(f, a_n)\big).$$

D'où :

$$2I = -\operatorname{Re}\big(\operatorname{Res}(f, a_1) + \cdots + \operatorname{Res}(f, a_n)\big).$$

Remarque. Une méthode analogue permet de calculer, lorsqu'elle est définie une intégrale du type

$$\int_0^{+\infty} F(t)[\ln t]^p \, dt.$$

On considère, pour cela :

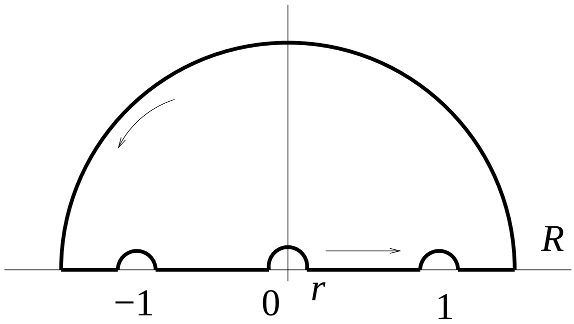
$$\int_{\Gamma_{r,R}} F(z)[\psi_0(z)]^{p+1} \, dz.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

15.2.5. Proposons nous de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha \ln t}{t^2 - 1}\, dt,$$

avec $-1 < \alpha < 1$. On va utiliser le chemin $\Gamma_{r,R}$ suivant :



Notons φ et ψ les déterminations du logarithme et de z^α définies sur $\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}_-$, et correspondant à un argument strictement compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}\cdot$

L'intégrale de $f(z) = \dfrac{\psi(z)\varphi(z)}{z^2 - 1}$ sur $\Gamma_{r,R}$ est nulle pour r assez petit et R assez grand.

Pour $a \in \mathbb{C}$ et $\rho > 0$, posons $\chi_{a,\rho}(t) = a + \rho e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Compte tenu de 15.1.1 et 15.1.2, les intégrales de f sur $\chi_{0,r}$, $\chi_{0,R}$, et $\chi_{1,r}$ tendent vers 0 quand r tend vers 0 ou quand R tend vers $+\infty$. De même, d'après 15.1.1, on a :

$$\lim_{r\to 0} \int_{\chi_{-1,r}} f(z)\, dz = \pi i \operatorname{Res}(f, -1) = \frac{\pi^2}{2} e^{i\alpha\pi}.$$

Posons alors :

$$J_r = \int_r^{1-r} \frac{t^\alpha \ln t}{t^2 - 1}\, dt\ ,\ K_{r,R} = \int_{1+r}^{R} \frac{t^\alpha \ln t}{t^2 - 1}\, dt,$$

$$L_r = \int_r^{1-r} \frac{t^\alpha}{t^2 - 1}\, dt\ ,\ M_{r,R} = \int_{1+r} \frac{t^\alpha}{t^2 - 1}\, dt\ ,\ N_{a,\rho} = \int_{\chi_{a,\rho}} f(z)\, dz.$$

On a :

$$(1 + e^{i\alpha\pi})(J_r + K_{r,R}) + i\pi e^{i\alpha\pi}(L_r + M_{r,R}) + N_{0,R} - N_{0,r} - N_{-1,r} - N_{1,r} = 0.$$

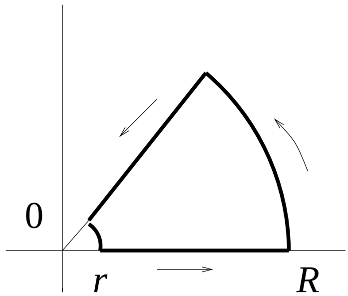
En faisant tendre r vers 0 et R vers $+\infty$, on voit alors facilement que :

$$I = \frac{\pi^2}{4\cos^2 \dfrac{\alpha\pi}{2}}\cdot$$

15.2.6. Soient n un entier et α un réel tels que $n > \alpha + 1 > 0$. On veut calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^n}\, dt.$$

On va utiliser le chemin $\Gamma_{r,R}$ suivant



où l'angle entre les deux segments de droite est $\dfrac{2\pi}{n}\cdot$

Pour $\rho > 0$, on pose $\gamma_\rho(t) = \rho e^{it}$, avec $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2\pi}{n}$. On note φ la détermination holomorphe de z^α définie sur $\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}_-$, et qui correspond à un argument strictement compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}\cdot$ On pose :

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{1+z^n}\ ,\ I_\rho = \int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz = i\rho^{\alpha+1} \int_0^{2\pi/n} \frac{e^{i(\alpha+1)t}}{\rho^n e^{int}+1}\, dt.$$

Il vient :

$$|I_\rho| \leqslant \frac{2\pi\rho^{\alpha+1}}{n|\rho^n - 1|}\cdot$$

Ainsi, I_ρ tend vers 0 quand ρ tend vers 0 ou quand R tend vers $+\infty$. D'autre part, d'après le théorème des résidus :

$$\int_{\Gamma_{r,R}} f(z)\, dz = 2i\pi\, \mathrm{Res}(f, e^{i\pi/n}) = -\frac{2i\pi}{n} \exp\left(\frac{i(\alpha+1)\pi}{n}\right)$$

$$I_R - I_r + \int_r^R \frac{t^\alpha}{1+t^n}\, dt + \exp\left(\frac{2i\pi(\alpha+1)}{n}\right) \int_R^r \frac{t^\alpha}{1+t^n}\, dt.$$

On en déduit que :

$$I = \frac{\pi}{n \sin \dfrac{(\alpha+1)\pi}{n}}\cdot$$

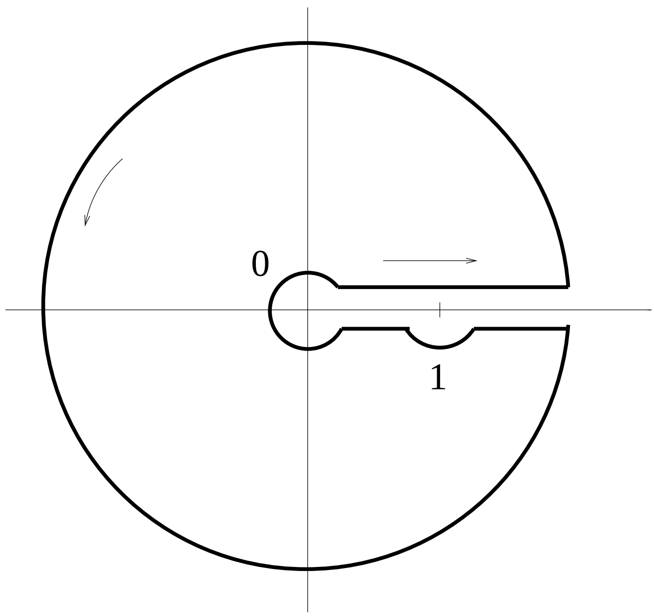
© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Remarque. Soit n un entier au moins égal à 2. la méthode précédente avec $r = 0$ fournit :
$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^n} = \frac{\pi}{n \sin \dfrac{\pi}{n}}\cdot$$
Nous invitons le lecteur à calculer cette intégrale en utilisant une décomposition en éléments simples (et en raisonnant *rigoureusement*). Il pourra constater que la méthode des résidus est nettement plus simple.

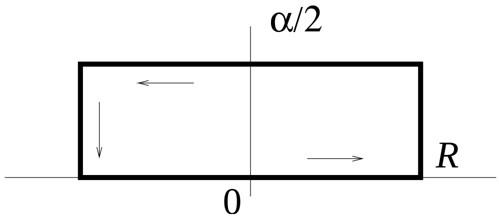
15.2.7. Rappelons que $\Gamma(z)$ a été défini en 7.5.2. Soit p un entier au moins égal à 2. En utilisant le chemin de 15.2.6, et la fonction $z \to e^{iz^p}$, le lecteur montrera que :
$$\int_0^{+\infty} \cos(t^p)\, dt = \frac{1}{p}\Gamma\Big(\frac{1}{p}\Big) \cos \frac{\pi}{2p}\ , \ \int_0^{+\infty} \sin(t^p)\, dt = \frac{1}{p}\Gamma\Big(\frac{1}{p}\Big) \sin \frac{\pi}{2p}\cdot$$

15.2.8. On va maintenant proposer au lecteur certains calculs d'intégrales en lui indiquant quels chemins il peut utiliser pour le faire. A lui de déterminer des fonctions convenables à utiliser et le soin de mener à bien les calculs.

• Calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha \ln t}{t-1}\, dt$ où $-1 < \alpha < 0$.

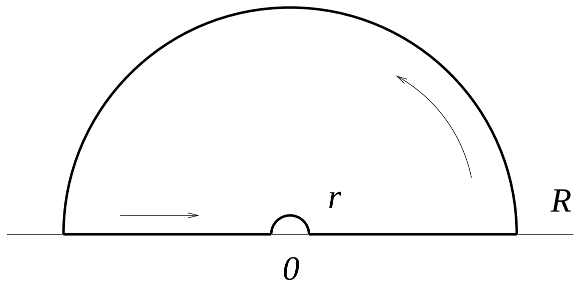


• Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos(\alpha t)\, dt$, où $\alpha > 0$.



• Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. En remplaçant $\alpha/2$ par 2π dans le chemin précédent, calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta t}{\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} a}\, dt$.

• Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}(1+t^2)}\, dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)}$.



© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Bibliographie

[1] H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, 1961.

[2] J. Dieudonné. *Calcul infinitésimal*. Hermann, 1968.

[3] J. Dieudonné. *Éléments d'analyse, Tome* I, *Fondements de l'analyse moderne*. Gauthier-Villars, 1979.

[4] P. Dolbeault. *Analyse complexe*. Masson, 1990.

[5] D. Feyel, A. de La Pradelle. *Exercices sur les fonctions analytiques*. Armand Colin, 1973.

[6] M. Hervé. *Les fonctions analytiques*. Presses Universitaires de France, 1982.

[7] H. Kober. *Dictionary of conformal representations*. Dover Publications, 1957.

[8] C. Laurent-Thiébaut. *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables*. InterÉditions, 1997.

[9] R. Remmert. *Theory of Complex Functions*. Springer, 1991.

[10] R. Remmert. *Classical Topics in Complex Function Theory*. Springer, 1998.

[11] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 1998.

[12] S. Saks, A. Zygmund. *Fonctions analytiques*. Masson, 1970.

[13] P. Tauvel. *Analyse complexe. Exercices corrigés*. Dunod, 1999.

[14] P. Vogel. *Fonctions analytiques. Cours et exercices avec solutions*. Dunod, 1999.

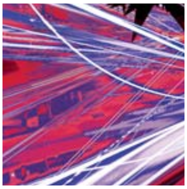
Index

R

S

T

SCIENCES SUP



Patrice Tauvel

ANALYSE COMPLEXE POUR LA LICENCE 3

Les fonctions holomorphes d'une ou plusieurs variables complexes interviennent dans plusieurs branches des mathématiques et aussi dans d'autres disciplines scientifiques, en particulier en physique. L'étude de ces fonctions est relativement ancienne et constitue toujours un domaine de recherche actif. Elles mettent en valeur la position privilégiée de l'analyse complexe, située entre la géométrie différentielle, la topologie, l'analyse fonctionnelle et l'analyse harmonique.

Cet ouvrage présente l'ensemble des notions d'analyse complexe habituellement abordées en Licence. Afin que le livre soit très autonome, les premiers chapitres reprennent, avec démonstrations, les résultats classiques concernant les séries entières. Des exercices corrigés illustrent le cours et permettent au lecteur de faire le point sur les connaissances acquises.

Cet ouvrage est principalement destiné aux étudiants de troisième année de Licence de mathématiques. Il s'adresse aussi aux candidats au CAPES ou à l'Agrégation et aux élèves des écoles d'ingénieurs.

PATRICE TAUVEL

est professeur à l'université de Poitiers.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE

1er cycle | 2e cycle | 3e cycle

1 2 3 4 5 6 7 8

LICENCE | MASTER | DOCTORAT

9 782100 500741

ISBN 2 10 050074 0

www.dunod.com

DUNOD