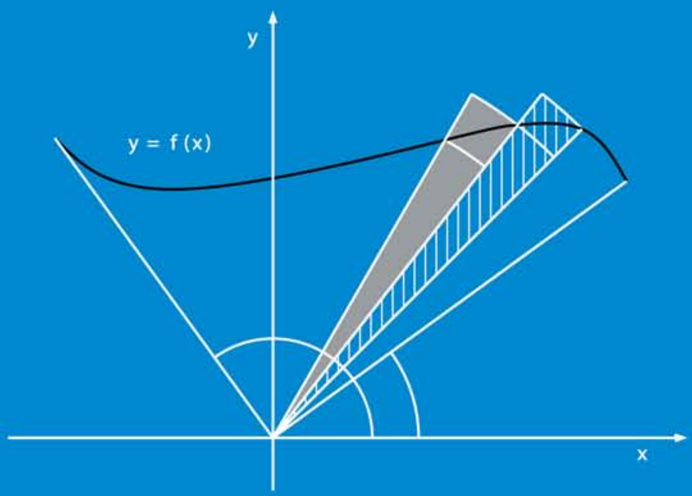
COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP //// Mathématiques

L3M1

Problèmes d'analyse III

INTÉGRATION

EXERCICES CORRIGÉS



Wieslawa J. Kaczor et Maria T. Nowak

Traduction : Eric Kouris

EDP SCIENCES

PROBLÈMES D'ANALYSE III
Intégration

Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak
Traduction : Eric Kouris

Collection dirigée par Daniel Guin

EDP SCIENCES

17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

This work was originally published in English by the American Mathematical Society under the title "*Problems in Mathematical Analysis III: Integration*", © 2003 American Mathematical Society. The present translation was created for EDP Sciences under authority of the American Mathematical Society and is published by permission.

Imprimé en France

ISBN : 978-2-7598-0087-2

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE DU TRADUCTEUR

Ce livre est le troisième et dernier d'une série de trois recueils d'exercices corrigés traitant des bases de l'analyse réelle. Il s'adresse d'abord aux étudiants, principalement ceux des niveaux L3 et M1, mais les étudiants des niveaux L1 et L2 tireront un grand profit de l'étude du premier chapitre et de la dernière section du second chapitre. Il intéressera aussi les candidats aux concours du CAPES et de l'agrégation de mathématiques qui y trouveront autant les théorèmes qu'ils doivent connaître que des exercices pour les illustrer.

Ce troisième volume traite de l'intégration des fonctions réelles. Le premier chapitre aborde l'intégrale de Riemann et de Riemann-Stieltjes (la dernière section applique ce qui précède aux calculs de volumes, d'aires et de longueurs), le second chapitre s'intéresse à l'intégrale de Lebesgue (la quatrième section porte sur la continuité absolue et la continuité approximative et la dernière section sur les séries Fourier). Chaque section, centrée sur un thème, commence par des exercices relativement simples et se poursuit par des problèmes plus difficiles, certains étant des théorèmes classiques.

Tous les exercices sont corrigés, le plus souvent en détail, ce qui permettra aux étudiants de ne pas « sécher » sur un exercice difficile. Nous les invitons cependant à chercher par eux-mêmes les exercices avant de regarder les solutions et nous insistons aussi sur le fait que les auteurs ne donnent pas nécessairement toutes les étapes d'un calcul lorsqu'ils considèrent que celui-ci ne pose pas de problèmes techniques. C'est bien sur aux étudiants de prendre le temps de rédiger entièrement leurs solutions.

Nous avons ajouter en note les noms de certaines propriétés et relations pour inviter les étudiants à engager des recherches par eux-mêmes. L'index à la fin de l'ouvrage permet de facilement retrouver une définition et la table des renvois permet de voir les liens entre les différents problèmes dans ce volume et dans les deux autres.

Je tiens à remercier Daniel Guin et Xavier Cottrell pour avoir pris le temps de relire cette traduction et pour les remarques qu'ils m'ont faites afin d'améliorer le style et de corriger les erreurs. Je reste responsable de celles qui subsisteraient. Je souhaite aussi remercier pour sa disponibilité Patrick Fradin, l'auteur du logiciel TeXgraph avec lequel toutes les figures de cet ouvrage et l'illustration de la couverture ont été réalisées.

É. Kouris

PRÉFACE À L'ÉDITION ANGLAISE

Cet ouvrage fait suite aux *Problèmes d'Analyse I* et *II*. Il s'intéresse à l'intégrale de Riemann-Stieltjes et à l'intégrale de Lebesgue des fonctions réelles d'une variable réelle. Ce volume est organisé de façon semblable aux deux premiers. Chaque chapitre est divisé en deux parties : les problèmes et leurs solutions. Chaque section commence par un certain nombre de problèmes de difficulté modérée, certains étant en fait des théorèmes. Il ne s'agit donc pas d'un recueil typique d'exercices mais plutôt d'un complément à des ouvrages d'analyse pour la licence. Nous espérons que ce livre intéressera les étudiants de licence, les enseignants et les chercheurs en analyse et ses applications. Nous espérons aussi qu'il sera utile aux personnes travaillant seules.

Le premier chapitre est consacré aux intégrales de Riemann et de Riemann-Stieltjes. La section I.1 traite de l'intégrale de Riemann-Stieltjes par rapport à des fonctions monotones ; la section I.3 étudie l'intégration par rapport à des fonctions à variation bornée. Nous rassemblons à la section I.6 des inégalités plus ou moins connues portant sur les intégrales. On y trouvera entre autres l'inégalité d'Opial et l'inégalité de Steffensen. Ce chapitre se termine par une section intitulée « Mesure de Jordan ». La mesure de Jordan, appelée aussi « contenu » par certains auteurs, n'est pas une mesure dans le sens usuel car elle n'est pas dénombrablement additive. Elle est cependant très liée à l'intégrale de Riemann et nous espérons que cette section donnera à l'étudiant une compréhension plus profonde des idées sous-tendant les calculs.

Le chapitre II traite de la mesure et de l'intégration de Lebesgue. La section II.3 présente de nombreux problèmes liés aux théorèmes de convergence qui permettent de permuter limite et intégrale. On y considère aussi les espaces L^p sur des intervalles bornés. On discute à la section suivante de la continuité absolue et des relations entre intégration et dérivation. On donne une démonstration du théorème de Banach et Zarecki affirmant qu'une fonction f est absolument continue sur un intervalle borné $[a, b]$ si et seulement si elle est continue, à variation bornée sur $[a, b]$ et transforme les ensembles de mesure nulle en des ensembles de mesure nulle. De plus, on introduit le concept de continuité approximative. On notera ici qu'il existe une analogie entre deux relations : d'une part la relation entre intégrabilité au sens de Riemann et continuité, d'autre part la relation entre intégrabilité au sens de Lebesgue et continuité approximative. Précisément, une fonction bornée sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable si et seulement si elle est presque partout continue ; de même, une fonction bornée sur $[a, b]$ est mesurable et donc Lebesgue-intégrable si et seulement si elle est presque partout approximativement continue. La dernière section est consacrée aux séries de Fourier. Étant donné l'existence d'une abondante littérature sur ce sujet, par exemple le livre de A. Zygmund, *Trigonometric Series*, celui de N.K. Bari, *A Treatise on Trigonometric Series* et celui de R.E. Edwards, *Fourier Series*, il a été difficile de choisir quel matériel inclure dans un livre s'adressant principalement à des étudiants de licence. En conséquence, nous nous sommes concentrés sur les coefficients de Fourier de fonctions de différentes classes et sur les théorèmes élémentaires portant sur la convergence des séries de Fourier.

Toutes les notations et définitions utilisées dans ce volume sont standards. On peut les trouver dans les ouvrages [28] et [29] qui donnent aussi aux lecteurs les connaissances théoriques suffisantes. Cependant, pour éviter toute ambiguïté et pour que l'ouvrage ne nécessite pas le recours à des références extérieures, nous démarrons presque chaque section par un paragraphe d'introduction présentant les premières définitions et les théorèmes utilisés dans cette section. Nos conventions pour les renvois s'expliquent le mieux par des exemples : I.2.13, I.2.13 (vol. I) et I.2.13 (vol. II) représentent respectivement le numéro du problème dans ce volume, dans le volume I et dans le volume II. On utilise aussi les notations et la terminologie données dans les deux premiers volumes.

Nous avons emprunté de nombreux problèmes aux sections de problèmes de journaux tels que l'*American Mathematical Monthly* ou le *Mathematics Today* (en russe) et de différents livres de cours et recueils d'exercices ; de tout ceci, seuls les livres sont cités dans la bibliographie. On aimerait ajouter que de nombreux problèmes de la section I.5 proviennent du livre de Fikhtengol'ts ([11]) et que la section I.7 a été influencée par le livre de Rogosinski ([27]). Il allait malheureusement au-delà de nos objectifs de repérer les sources originales et nous présentons nos sincères excuses si nous sommes passés à côté de certaines contributions.

Nous voudrions, pour finir, remercier plusieurs personnes du département de mathématiques de l'université Maria Curie-Skłodowska auprès desquelles nous sommes redevables. Une mention toute particulière va à Tadeusz Kuczumow et à Witold Rzymowski pour leurs suggestions sur de nombreux problèmes et solutions et à Stanisław Prus pour ses conseils et son soutien sur TEX. Notre gratitude va à Richard J. Libera de l'université du Delaware, pour son aide généreuse en anglais et sur la présentation du matériel. Nous sommes très reconnaissants envers Jadwiga Zygmunt de l'université Catholique de Lublin qui a tracé toutes les figures et nous a aidé à les incorporer dans le texte. Nous remercions nos étudiants qui nous ont aidés dans le long et ennuyeux travail de relecture. Des remerciements particuliers vont à Paweł Sobolewski et Przemysław Widelski qui ont lu le manuscrit avec beaucoup de soin et d'attention et ont apporté nombre de suggestions utiles. Sans leur aide, des erreurs, et pas seulement typographiques, seraient passées inaperçues. Nous acceptons cependant l'entière responsabilité pour les erreurs qui subsistent. Nous aimerions aussi saisir cette opportunité pour remercier l'équipe de l'AMS pour sa longue coopération, sa patience et ses encouragements.

W. J. Kaczor, M. T. Nowak

This page intentionally left blank

NOTATIONS ET TERMINOLOGIE

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\overline{\mathbb{R}}$ est la droite réelle achevée, autrement dit, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- $[a, b]$ est l'intervalle fermé d'extrémités a et b.
- $]a, b[$ est l'intervalle ouvert d'extrémités a et b.
- $[x]$ est la partie entière du nombre réel x (on a conservé la notation anglophone).
- Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0, \\ -1 & \text{pour } x < 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$, on pose aussi $0! = 1$,

  $(2n)!! = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times 2n$,

  $(2n-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3) \times (2n-1)$.

- Si $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ est non vide et majoré, $\sup \mathbf{A}$ est alors le plus petit majorant de $\mathbf{A}$. Si l'ensemble non vide $\mathbf{A}$ n'est pas majoré, on pose alors $\sup \mathbf{A} = +\infty$.

- Si $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ est non vide et minoré, $\inf \mathbf{A}$ est alors le plus grand minorant de $\mathbf{A}$. Si l'ensemble non vide $\mathbf{A}$ n'est pas minoré, on pose alors $\inf \mathbf{A} = -\infty$.

- Une suite $\{a_n\}$ est dite croissante (resp. décroissante) si $a_{n+1} \geqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (resp. $a_{n+1} \leqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). La classe des suites monotones est formée des suites croissantes et des suites décroissantes.

- Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites réelles ($b_n \neq 0$ pour tout n). Si le quotient a_n/b_n tend vers 0 (resp. reste borné) lorsque n tend vers $+\infty$, on écrit alors $a_n = o(b_n)$ (resp. $a_n = O(b_n)$).

- Un réel c est une valeur d'adhérence de la suite $\{a_n\}$ s'il existe une sous-suite $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ qui converge vers c.

- Soit $\mathbf{S}$ l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de $\{a_n\}$. La limite inférieure, $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n$, et la limite supérieure, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$, sont définies comme suit :
$$\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ n'est pas majorée,} \\ -\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ est majorée et } \mathbf{S} = \varnothing, \\ \sup \mathbf{S} & \text{si } \{a_n\} \text{ est majorée et } \mathbf{S} \neq \varnothing, \end{cases}$$
$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ n'est pas minorée,} \\ +\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ est minorée et } \mathbf{S} = \varnothing, \\ \inf \mathbf{S} & \text{si } \{a_n\} \text{ est minorée et } \mathbf{S} \neq \varnothing. \end{cases}$$

- Un produit infini $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ est dit convergent s'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ pour $n \geqslant n_0$ et la suite $\{a_{n_0}a_{n_0+1}\cdot\dots\cdot a_{n_0+n}\}$ converge, lorsque n tend vers $+\infty$, vers une limite P_0 non nulle. Le nombre $P = a_1a_2\cdot\dots\cdot a_{n_0-1}\cdot P_0$ est appelée la valeur du produit infini.

- Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ et si f est une fonction définie sur $\mathbf{X}$, $f_{|\mathbf{A}}$ est la restriction de f à $\mathbf{A}$.

- $$\chi_{\mathbf{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{A}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{A} \end{cases}$$
  est la *fonction caractéristique* de $\mathbf{A}$.

- On note $f_n \underset{\mathbf{A}}{\rightarrow} f$ pour $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{A}$.

Si $(\mathbf{X}, d)$ est un **espace métrique**, $x \in \mathbf{X}$ et $\mathbf{A}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbf{X}$, alors

- $\mathbf{A}^c = \mathbf{X} \setminus \mathbf{A}$ est le complémentaire de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{X}$,
- $\mathbf{B}_{\mathbf{X}}(x, r)$, $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{X}}(x, r)$ représentent respectivement la boule ouverte et la boule fermée de centre x et de rayon r ; si $\mathbf{X}$ est fixé, on omet l'indice et on écrit simplement $\mathbf{B}(x, r)$, $\overline{\mathbf{B}}(x, r)$,
- $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$ est l'intérieur de $\mathbf{A}$ dans l'espace métrique $(\mathbf{X}, d)$,
- $\overline{\mathbf{A}}$ est l'adhérence de $\mathbf{A}$ dans l'espace métrique,
- $\partial\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}}$ est la frontière de $\mathbf{A}$,
- $\operatorname{diam}(\mathbf{A}) = \sup\{d(x, y) : x, y \in \mathbf{A}\}$ est le diamètre de l'ensemble $\mathbf{A}$,
- $\operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) = \inf\{d(x, y) : y \in \mathbf{A}\}$ est la distance de x à l'ensemble $\mathbf{A}$,
- $\mathbf{A}$ est un *ensemble de type* $\mathcal{F}_\sigma$ si c'est une union dénombrable d'ensembles fermés dans $(\mathbf{X}, d)$,
- $\mathbf{A}$ est un *ensemble de type* $\mathcal{G}_\delta$ si c'est une intersection dénombrable d'ensembles ouverts dans $(\mathbf{X}, d)$,
- $\mathbf{X}$ est connexe s'il n'existe pas de sous-ensembles ouverts disjoints $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ de $\mathbf{X}$ tels que $\mathbf{X} = \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$.

Continuité, dérivabilité.

- $\mathscr{C}_{\mathbf{A}}$ est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{A}$.
- $\mathscr{C}^n_{]a,b[}$ est l'ensemble des fonctions n fois continûment dérivables sur $]a, b[$.
- $\mathscr{C}^1_{[a,b]}$ est l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur $[a, b]$, en considérant aux extrémités respectivement la dérivée à droite et la dérivée à gauche. L'ensemble $\mathscr{C}^n_{[a,b]}$ des fonctions n fois continûment dérivables sur $[a, b]$ est défini récursivement.
- $\mathscr{C}^\infty_{]a,b[}$ (resp. $\mathscr{C}^\infty_{[a,b]}$) est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur $]a, b[$ (resp. $[a, b]$).

Si f et g sont des fonctions réelles d'une variable réelle, alors

- $f(a^+)$ et $f(a^-)$ représentent respectivement la limite à droite et la limite à gauche de f en a,
- si le quotient $f(x)/g(x)$ tend vers 0 (resp. reste borné) lorsque x tend vers x_0, on écrit alors $f(x) = o(g(x))$ (resp. $f(x) = O(g(x))$),
- $f^{(n)}$ est la dérivée n-ième de f,
- $f'_+(a)$ et $f'_-(a)$ représentent respectivement la dérivée à droite et la dérivée à gauche de f en a.

I

L'INTÉGRALE DE RIEMANN-STIELTJES

Énoncés

I.1. Propriétés de l'intégrale de Riemann-Stieltjes

Nous commençons par quelques notations, définitions et théorèmes. Nous entendons par une *partition* P d'un intervalle fermé $[a\,,b]$ un ensemble fini de points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tels que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Le réel $\mu(P) = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \ldots, n\}$ est appelé le *pas* de P.

Pour une fonction α croissante sur $[a\,,b]$, on pose

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}).$$

Si f est une fonction réelle bornée sur $[a\,,b]$, on définit les *sommes de Darboux* supérieure et inférieure par rapport à α et relativement à P respectivement par

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i, \qquad L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i,$$

où

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

On pose aussi

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \inf U(P, f, \alpha), \qquad \underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \sup L(P, f, \alpha),$$

les bornes inférieures et supérieures étant prises sur l'ensemble des partitions P de $[a\,,b]$ et on appelle ces quantités les intégrales de Riemann-Stieltjes respectivement supérieure et inférieure. Si les intégrales de Riemann-Stieltjes supérieure et inférieure sont égales, on note leur valeur commune $\int_a^b f\,d\alpha$ que l'on appelle l'*intégrale de Riemann-Stieltjes par rapport à* α *sur* $[a\,,b]$. On dit dans ce cas que f est intégrable par rapport à α au sens de Riemann (ou Riemann-intégrable par rapport à α) et on écrit $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. Dans le cas particulier où $\alpha(x) = x$, on obtient l'intégrale de Riemann. Dans ce cas, la somme de Darboux supérieure (resp. inférieure) correspondant à une partition P et l'intégrale de Riemann supérieure (resp. inférieure) sont notées respectivement $U(P,f)$ (resp. $L(P,f)$) et $\overline{\int_a^b} f\,dx$ (resp. $\underline{\int_a^b} f\,dx$). L'intégrale de Riemann de f sur $[a\,,b]$ est notée $\int_a^b f\,dx$.

De plus, on choisit, pour chaque partition P de $[a\,,b]$, des points $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tels que $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et on considère la somme

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i.$$

On écrit

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(P, f, \alpha) = A$$

si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\mu(P) < \delta$ implique $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$ pour tous les choix admissibles de t_i. Dans le cas où $\alpha(x) = x$, on pose

$$S(P, f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Dans toute cette section, on supposera toujours f bornée et α croissante sur $[a\,,b]$. On utilisera souvent les théorèmes suivants (voir, par exemple, [29]) dans les solutions des problèmes.

Théorème 1. *$f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sur $[a\,,b]$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition P telle que*

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon.$$

Théorème 2. *Si f est continue sur $[a\,,b]$, alors $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sur $[a\,,b]$.*

I.1.1. On suppose que α est croissante sur $[a\,,b]$, $a \leqslant c \leqslant b$, α est continue en c, $f(c) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \neq c$. Prouver que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ et $\int_a^b f\,d\alpha = 0$.

I.1.2. On suppose que f est continue sur $[a\,,b]$, $a < c < b$, $\alpha(x) = 0$ si $x \in [a\,,c[$ et $\alpha(x) = 1$ si $x \in [c\,,b]$. Prouver que $\int_a^b f\,d\alpha = f(c)$.

I.1.3. Soit $0 < a < b$ et

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [a\,,b] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in [a\,,b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Trouver les intégrales de Riemann supérieure et inférieure de f sur $[a\,,b]$.

I.1.4. Soit $a > 0$ et

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-a\,,a] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in [-a\,,a] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Trouver les intégrales de Riemann supérieure et inférieure de f sur $[-a\,,a]$.

I.1.5. Prouver que la *fonction* dite *de Riemann*,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel ou } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \text{ et} \\ & p \text{ et } q \text{ premiers entre eux,} \end{cases}$$

est Riemann-intégrable sur tout intervalle $[a\,,b]$.

I.1.6. On note $f\colon [0\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Prouver que $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

I.1.7. Prouver que $f\colon [0\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] & \text{sinon} \end{cases}$$

est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

I.1.8. On définit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1\,,0], \\ 1 & \text{si } x \in]0\,,1] \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1\,,0[, \\ 1 & \text{si } x \in [0\,,1]. \end{cases}$$

Prouver que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ bien que $\lim\limits_{\mu(P) \to 0} S(P, f, \alpha)$ n'existe pas.

I.1.9. Prouver que si f et α ont un point commun de discontinuité dans $[a\,,b]$, alors $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(P,f,\alpha)$ n'existe pas.

I.1.10. Prouver que si $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(P,f,\alpha)$ existe, alors $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sur $[a\,,b]$ et

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(P,f,\alpha) = \int_a^b f\,d\alpha.$$

Prouver aussi que cette égalité est vérifiée pour toute fonction f continue sur $[a,b]$.

I.1.11. Prouver que si f est bornée et α est continue sur $[a,b]$, alors $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ si et seulement si $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(P,f,\alpha)$ existe.

I.1.12. Soit

$$\alpha(x) = \begin{cases} c & \text{si } a \leqslant x < x^*, \\ d & \text{si } x^* < x \leqslant b, \end{cases}$$

où $c < d$ et $c \leqslant \alpha(x^*) \leqslant d$. Montrer que si la fonction f, bornée sur $[a,b]$, est telle qu'au moins une des fonctions f ou α est continue à gauche en x^* et l'autre continue à droite en x^*, alors $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ et

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(x^*)(d-c).$$

I.1.13. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que α est une *fonction en escalier*, autrement dit qu'elle est constante sur les sous-intervalles $]a\,,c_1[$, $]c_1\,,c_2[$, $\ldots$, $]c_m\,,b[$, où $a < c_1 < c_2 < \cdots < c_m < b$. Prouver que

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(a)(\alpha(a^+)-\alpha(a)) + \sum_{k=1}^{m} f(c_k)(\alpha(c_k^+)-\alpha(c_k^-)) + f(b)(\alpha(b)-\alpha(b^-)).$$

I.1.14. En utilisant les intégrales de Riemann de fonctions choisies de façon appropriée, trouver les limites suivantes :

(a) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)$,

(b) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{1}{n^3+1^3}+\frac{1}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{1}{n^3+n^3}\right)$,

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}\right), \qquad k\geqslant 0,$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)},$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{n}{n^2+1^2}+\sin\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\sin\frac{n}{n^2+n^2}\right),$

(f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right),$

(g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{f\left(\tfrac{1}{n}\right)f\left(\tfrac{2}{n}\right)\ldots f\left(\tfrac{n}{n}\right)}$, où f est une fonction continue strictement positive sur $[0\,,1]$.

I.1.15. Prouver que la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}}{2}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n+1}}{n}\right)$$

est strictement positive.

I.1.16. Prouver que si f est continûment dérivable sur $[0\,,1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)-\int_0^1 f(x)\,dx\right)=\frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

En utilisant ce résultat, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}-\frac{1}{k+1}\right), \qquad k\geqslant 0.$$

I.1.17. Pour $k\geqslant 0$, calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^k+3^k+\cdots+(2n-1)^k}{n^{k+1}}\right).$$

I.1.18. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[0\,,1]$ telle que f'' soit bornée et Riemann-intégrable. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right)=\frac{f'(1)-f'(0)}{24}.$$

I.1.19. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

et

$$V_n = \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n+3} + \cdots + \frac{2}{4n-1}\,.$$

Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = \ln 2.$$

De plus, en utilisant les résultats énoncés en **I.1.16** et **I.1.18**, prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} n(\ln 2 - U_n) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n^2(V_n - \ln 2) = \frac{1}{32}\,.$$

I.1.20. Prouver que si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, on peut alors changer la valeur prise par f en un nombre fini de points sans affecter ni l'intégrabilité de f, ni la valeur de son intégrale.

I.1.21. Prouver que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ si f est monotone et si α est continue sur $[a\,,b]$.

I.1.22. Prouver que si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ et si α n'est continue ni à gauche ni à droite en un point de $[a\,,b]$, alors f est continue en ce point.

I.1.23. Soit f une fonction Riemann-intégrable et α une fonction continue sur $[a\,,b]$. Si α est dérivable sur $[a\,,b]$ excepté en un nombre fini de points et si α' est Riemann-intégrable, alors $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ et

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx.$$

I.1.24. Soit f une fonction Riemann-intégrable et α une fonction continue sur $[a\,,b]$, excepté en un nombre fini de points. Si α est dérivable excepté en un nombre fini de points et si α' est Riemann-intégrable, alors $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ et

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b & f(x)\alpha'(x)\,dx + f(a)\left(\alpha(a^+) - \alpha(a)\right)\\ &+ \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\left(\alpha(c_k^+) - \alpha(c_k^-)\right) + f(b)\left(\alpha(b) - \alpha(b^-)\right),\end{aligned}$$

où les c_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ sont les points de discontinuité de α dans $]a\,,b[$.

I.1.25. Calculer $\int_{-2}^{2} x^2\, d\alpha(x)\, dx$, où

$$\alpha(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant -1, \\ 2 & \text{si } -1 < x < 0, \\ x^2+3 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

I.1.26. Démontrer la *première formule de la moyenne*. Si f est une fonction continue et si α est une fonction croissante sur $[a\,,b]$, il existe alors $c \in [a\,,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = f(c)(\alpha(b) - \alpha(a)).$$

I.1.27. Montrer que si f est une fonction continue et α une fonction strictement croissante sur $[a\,,b]$, on peut alors choisir $c \in \,]a\,,b[$ de sorte que l'égalité dans la première formule de la moyenne (énoncée précédemment) soit vérifiée.

I.1.28.

(a) Soit f une fonction continue sur $[0\,,1]$. Pour a et b strictement positifs, déterminer la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\, dx.$$

(b) Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx.$$

I.1.29. Soit f une fonction continue et α une fonction strictement croissante sur $[a\,,b]$, on pose

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, d\alpha(t).$$

Prouver que, pour $x \in [a\,,b]$, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{\alpha(x+h) - \alpha(x)} = f(x).$$

I.1.30. On suppose que f est continue sur $[a\,,b]$, que α est continue et strictement croissante sur cet intervalle et que la limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{\alpha(x+h)-\alpha(x)}=\frac{df}{d\alpha}(x)$$

existe et est continue sur $[a\,,b]$. Prouver que

$$\int_a^b \frac{df}{d\alpha}(x)\,d\alpha(x)=f(b)-f(a).$$

I.2. Fonctions à variation bornée

On rappelle que la *variation totale* $V(f;a,b)$ de la fonction f sur $[a\,,b]$ est

$$V(f;a,b)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\right\},$$

la borne supérieure étant prise sur toutes les partitions $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ de $[a\,,b]$. Si $V(f;a,b)<+\infty$, f est dite à *variation bornée* sur $[a\,,b]$. On définit aussi

$$v_f(x)=V(f;a,x),\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Clairement, $v_f(a)=0$ et v_f est croissante sur $[a\,,b]$. Le théorème suivant dit qu'une fonction à variation bornée peut être vue comme la différence de deux fonctions monotones.

Théorème 1. *Si f est à variation bornée sur $[a\,,b]$, alors*

$$f(x)-f(a)=p(x)-q(x),$$

où

$$p(x)=\frac{1}{2}\left(v_f(x)+f(x)-f(a)\right)\quad \textit{et}\quad q(x)=\frac{1}{2}\left(v_f(x)-f(x)+f(a)\right)$$

sont des fonctions croissantes sur $[a\,,b]$.

Les fonctions p et q sont appelées respectivement les *fonctions de variation positive* et *négative* de f.

I.2.1. Montrer que la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x^2} & \text{si } x \in]0\,,1], \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $[0\,,1]$ mais n'est pas à variation bornée.

I.2.2. Prouver que si f est à dérivée bornée sur $[a\,,b]$, alors f est à variation bornée.

I.2.3. Prouver que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x} & \text{si } x \in]0\,,1], \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est à variation bornée sur $[0\,,1]$.

I.2.4. Démontrer que

$$V(f; a, b) = f(b) - f(a)$$

si et seulement si f est croissante sur $[a\,,b]$.

I.2.5. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, on définit

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{\pi}{x^\beta} & \text{si } x \in]0\,,1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Prouver que f est à variation bornée si et seulement si $\alpha > \beta$.

I.2.6. Prouver que f est bornée sur $[a\,,b]$ si f est à variation bornée sur $[a\,,b]$.

I.2.7. Si f et g sont à variation bornée sur $[a\,,b]$, il en est alors de même de leur produit fg. De plus, si $\inf\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| > 0$, alors $\frac{g}{f}$ est aussi à variation bornée.

I.2.8. La composée de deux fonctions à variation bornée est-elle aussi à variation bornée ?

I.2.9. Si f vérifie une condition de Lipschitz et si g est à variation bornée, alors la composée $f \circ g$ est à variation bornée.

I.2.10. Prouver que si f est à variation bornée sur $[a\,,b]$, il en est de même de $|f|^p$, $1 \leqslant p < +\infty$.

I.2.11. Prouver que si f est continue sur $[a\,,b]$ et si $|f|$ est à variation bornée sur $[a\,,b]$ alors f l'est aussi. Justifier aussi que la continuité est une hypothèse essentielle.

I.2.12. Si f et g sont à variation bornée sur $[a\,,b]$, il en est alors de même de $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$.

I.2.13. On dit que $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$, vérifie une *condition de Hölder* (aussi appelée *condition de Lipschitz d'ordre* α) sur $\mathbf{A}$ s'il existe des constantes strictement positives M et α telles que

$$\left|f(x) - f(x')\right| \leqslant M\left|x - x'\right|^{\alpha} \quad \text{pour} \quad x, x' \in \mathbf{A}.$$

(a) Prouver que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(1/x)} & \text{si } x \in \left]0\,,\frac{1}{2}\right], \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est à variation bornée sur $[0\,,\frac{1}{2}]$ mais ne vérifie pas de condition de Hölder.

(b) On pose $x_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\ln^2 k}$, $n = 2, 3, \ldots$ Soit f la fonction continue sur $[0\,,x_2]$ définie par

$$f(0) = f(x_n) = 0, \quad f\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right) = \frac{1}{n}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

et f est affine sur $\left[x_{n+1}\,,\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right]$ et $\left[\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\,,x_n\right]$. Prouver que f vérifie une condition de Hölder pour tout $0 < \alpha < 1$ et que f n'est pas à variation bornée sur $[0\,,x_2]$.

I.2.14. Soit $f\colon\ [a\,,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée sur tout intervalle $[a\,,b]$, $b > a$. On pose

$$V(f; a, +\infty) = \lim_{b\to+\infty} V(f; a, b).$$

Prouver que si $V(f; a, +\infty) < +\infty$, alors la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est finie. L'implication réciproque est-elle vérifiée ?

I.2.15. On considère la somme

$$V(f, P) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

pour une fonction f définie sur $[a\,, b]$ et une partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a\,, b]$. Prouver que si f est continue sur $[a\,, b]$, alors

$$\lim_{\mu(P)\to 0} V(f, P) = V(f; a, b),$$

autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\mu(P) < \delta$ implique

$$V(f; a, b) - V(f, P) < \varepsilon.$$

I.2.16. On considère la somme

$$W(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)$$

pour une fonction f définie sur $[a\,, b]$ et une partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a\,, b]$, où on pose

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

En utilisant le résultat du problème précédent, prouver que si f est continue sur $[a\,, b]$, alors

$$\lim_{\mu(P)\to 0} W(f, P) = V(f; a, b).$$

I.2.17. Soit f une fonction à variation bornée sur $[a\,, b]$, p et q respectivement les fonctions de variation positive et négative comme définies au **théorème 1**. Soit p_1 et q_1 des fonctions croissantes sur $[a, b]$ telles que $f = p_1 - q_1$. Prouver que si $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$, alors

$$p(x) - p(y) \leqslant p_1(x) - p_1(y) \quad \text{et} \quad q(x) - q(y) \leqslant q_1(x) - q_1(y).$$

En conclure que $V(p; a, b) \leqslant V(p_1; a, b)$ et $V(q; a, b) \leqslant V(q_1; a, b)$.

I.2.18. Soit f une fonction à variation bornée sur $[a, b]$ telle que $f(x) \geqslant m > 0$ pour tout $x \in [a\,, b]$. Prouver qu'il existe deux fonctions croissantes g et h telles que

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \text{pour} \quad x \in [a, b].$$

I.2.19. Calculer les fonctions de variation positive et négative de

(a) $f(x) = x^3 - |x|, \quad x \in [-1\,,1]$,

(b) $f(x) = \cos x, \quad x \in [0\,,2\pi]$,

(c) $f(x) = x - [x], \quad x \in [0\,,3]$.

I.2.20. Soit f une fonction à variation bornée sur $[a\,,b]$. Montrer que si f est continue à droite (resp. gauche) en x_0, alors v_f est aussi continue à droite (resp. gauche) en x_0.

I.2.21. Prouver que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction f à variation bornée sur $[a,b]$ est au plus dénombrable. De plus, si $\{x_n\}$ est la suite des points de discontinuité de f, alors la fonction $g(x) = f(x) - s(x)$, où $s(a) = 0$ et

$$s(x) = f(a^+) - f(a) + \sum_{x_n < x} \left(f(x_n^+) - f(x_n^-)\right) + f(x) - f(x^-)$$

pour $a < x \leqslant b$, est continue sur $[a\,,b]$. (La fonction s est appelée la *fonction de saut de* f.)

I.2.22. Soit f une fonction à variation bornée sur $[a\,,b]$. On pose

$$g(a) = 0 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{pour tout } x \in \,]a\,,b].$$

Prouver que g est à variation bornée sur $[a\,,b]$.

I.2.23. Montrer que si f vérifie une condition de Lipschitz sur $[a\,,b]$, alors v_f vérifie aussi une condition de Lipschitz, avec la même constante de Lipschitz.

I.2.24. Démontrer que si f est à variation bornée sur $[a\,,b]$ et vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, elle est alors continue. En déduire que si f' est à variation bornée sur $[a\,,b]$, elle est alors continue sur $[a\,,b]$.

I.2.25. Montrer que si f est continûment dérivable sur $[a\,,b]$, alors

$$v_f(x) = \int_a^x \left|f'(t)\right| dt.$$

I.2.26. Prouver que si f est continue et α est croissante sur $[a\,,b]$, alors la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,d\alpha(t), \quad x \in [a\,,b],$$

est à variation bornée sur $[a\,,b]$.

I.2.27. Si $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in [a\,,b]$, alors

$$V(f;a,b) \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} V(f_n;a,b).$$

I.2.28. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ des séries absolument convergentes et $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de points distincts de $]0\,,1[$. Démontrer que la fonction f définie par

$$f(0) = 0, \quad f(x) = \sum_{x_n \leqslant x} a_n + \sum_{x_n < x} b_n \quad \text{pour tout } x \in\,]0\,,1]$$

est continue pour tout $x \neq x_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et

$$f(x_n) - f(x_n^-) = a_n, \quad f(x_n^+) - f(x_n) = b_n.$$

Montrer aussi que

$$V(f;0,1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n| + |b_n|\right).$$

I.3. D'autres propriétés de l'intégrale de Riemann-Stieltjes

On considère dans cette section des intégrales de Riemann-Stieltjes par rapport à des fonctions à variation bornée. Si α est une fonction à variation bornée sur $[a\,,b]$ et si $\alpha = p - q$, où p et q sont des fonctions croissantes, alors

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)dp(x) - \int_a^b f(x)dq(x),$$

pour autant que $f \in \mathcal{R}(p)$ et $f \in \mathcal{R}(q)$ (voir la définition à la section I.1). Cette définition est indépendante de la décomposition de la fonction α en la différence de deux fonctions croissantes.

Théorème 1. *Si les fonctions f et α sont à variation bornée sur $[a\,,b]$ et si l'une d'elles est continue, alors*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)\,df(x).$$

La formule précédente est appelée la *formule d'intégration par parties*.

Théorème 2. *On suppose que les fonctions f et φ sont continues sur $[a\,,b]$ et que φ est strictement croissante sur $[a\,,b]$. Si ψ est la fonction réciproque de φ, alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\psi(y))\,d\psi(y).$$

La formule du **théorème 2** est appelée la *formule de changement de variable*.

Théorème 3. *On suppose soit que f est continue et α est à variation bornée sur $[a\,,b]$, soit que f et α sont à variation bornée sur $[a\,,b]$ et α est continue. On a alors*

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dv_\alpha(x),$$

où $v_\alpha(x)$ représente la variation de α sur $[a\,,x]$, $a \leqslant x \leqslant b$.

I.3.1. Calculer $\int_{-1}^2 x\,d\alpha(x)$, où

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -1, \\ 1 & \text{si } -1 < x < 2, \\ -1 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

I.3.2. Soit f une fonction à variation bornée sur $[0\,,2\pi]$ telle que $f(0) = f(2\pi)$. Prouver que chacune des intégrales

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

est inférieure en valeur absolue à $\frac{V(f;0,2\pi)}{n}$.

I.3.3. Soit f et g des fonctions continues sur $[a\,,b]$ et α une fonction à variation bornée. On pose

$$\beta(x) = \int_a^x f(x)\,d\alpha(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Prouver que

$$\int_a^b g(x)\,d\beta(x) = \int_a^b g(x)f(x)\,d\alpha(x).$$

I.3.4. Soit $\{x_n\}$ une suite de points distincts de $]0\,,1[$ et $\{c_n\}$ une suite telle que $c_n > 0$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n < +\infty$. On définit

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \rho(x - x_n),$$

où la fonction ρ est donnée par

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Prouver que si f est continue sur $[0\,,1]$, alors

$$\int_0^1 f\,d\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n f(x_n).$$

I.3.5. Soit α une fonction continue à variation bornée sur $[a\,,b]$ telle que

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = 0$$

pour toute fonction f continue sur $[a\,,b]$. Prouver que α est constante sur $[a\,,b]$.

I.3.6. Soit α une fonction croissante sur $[0\,,\pi]$ telle que

$$\int_0^\pi \sin x\,d\alpha(x) = \alpha(\pi) - \alpha(0).$$

Prouver que

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(0) & \text{si } x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[, \\ \alpha(\pi) & \text{si } x \in \left]\frac{\pi}{2}\,,\pi\right]. \end{cases}$$

I.3.7. Trouver une fonction α croissante sur $[0\,,1]$ telle que

$$\int_0^1 f(x)\,d\alpha(x) = \frac{f(0) + f(1)}{2}$$

pour toute fonction f continue sur $[0\,,1]$.

I.3.8. Trouver une fonction f continue sur $[a\,,b]$ telle que

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a)$$

pour toute fonction α croissante sur $[a\,,b]$.

I.3.9. Soit α une fonction à variation bornée sur $[a\,,b]$ et $\{f_n\}$ une suite de fonctions Riemann-Stieltjes-intégrables par rapport à α sur $[a\,,b]$. Montrer que si $\{f_n\}$ converge uniformément sur $[a\,,b]$ vers f, alors f est Riemann-Stieltjes-intégrable et

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,d\alpha(x).$$

I.3.10. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx\left(1-x^2\right)^n dx.$$

I.3.11. Soit α une fonction à variation bornée sur $[0\,,1]$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n\,d\alpha(x).$$

I.3.12. Soit $\{\alpha_n\}$ une suite de fonctions dont les variations totales sont uniformément bornées sur $[a\,,b]$, autrement dit, il existe $M>0$ tel que $V(\alpha_n;a,b)\leqslant M$ pour tout n. Montrer que si $\{\alpha_n\}$ converge simplement vers α sur $[a\,,b]$, on a alors, pour toute fonction f continue sur $[a\,,b]$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\,d\alpha_n(x) = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x).$$

I.3.13. Soit $\{\alpha_n\}$ une suite de fonctions dont les variations totales sont uniformément bornées sur $[a,b]$ et telle que $\{\alpha_n\}$ converge simplement vers α sur $[a,b]$. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions continues uniformément convergente vers f sur $[a,b]$. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,d\alpha_n(x) = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x).$$

I.3.14. Démontrer le *théorème de sélection de Helly*. Soit $\{\alpha_n\}$ une suite de fonctions définies sur $[a\,,b]$ telles que $|\alpha_n(a)| \leqslant M$ et $V(\alpha_n; a, b) \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $\{\alpha_n\}$ contient alors une sous-suite $\{\alpha_{n_k}\}$ convergente vers une fonction α à variation bornée sur $[a\,,b]$ et on a, pour toute fonction f continue sur $[a\,,b]$,

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f(x)\,d\alpha_{n_k}(x) = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x).$$

I.3.15. Prouver le *théorème* suivant dû à *Helly* qui généralise le résultat de **I.3.12**. Soit f une fonction continue et α une fonction à variation bornée sur $[a\,,b]$. Si la suite $\{\alpha_n\}$ de fonctions à variation uniformément bornée converge vers α sur un ensemble $\mathbf{A}$ dense dans $[a\,,b]$ tel que $a, b \in \mathbf{A}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\,d\alpha_n(x) = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x).$$

I.3.16. Démontrer la *seconde formule de la moyenne*. Si f est une fonction monotone et si α une fonction continue et à variation bornée sur $[a\,,b]$, il existe alors un point $c \in [a\,,b]$ tel que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) &= f(a)\int_a^c d\alpha(x) + f(b)\int_c^b d\alpha(x)\\ &= f(a)\,(\alpha(c)-\alpha(a)) + f(b)\,(\alpha(b)-\alpha(c))\,.\end{aligned}$$

I.3.17. Montrer les *formes de Bonnet* suivantes de la *seconde formule de la moyenne*.

(a) Si f est une fonction croissante strictement positive sur $[a\,,b]$ et si α est une fonction continue à variation bornée sur $[a\,,b]$, il existe alors un point $c \in [a\,,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(b)\int_c^b d\alpha(x) = f(b)(\alpha(b)-\alpha(c)).$$

(b) Si f est une fonction décroissante strictement positive sur $[a\,,b]$ et si α est une fonction continue à variation bornée sur $[a\,,b]$, il existe alors un point $c \in [a\,,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(a)\int_a^c d\alpha(x) = f(a)(\alpha(c)-\alpha(a)).$$

I.3.18. Déterminer, pour $0 < a < b$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \frac{\sin(nx)}{x}\, dx.$$

I.3.19. Pour $x > 0$, montrer que

(a) si $F(x) = \int_x^{x+1} \sin\left(t^2\right) dt$, alors $|F(x)| \leqslant \frac{1}{x}$,

(b) si $F(x) = \int_x^{x+1} \sin\left(e^t\right) dt$, alors $|F(x)| \leqslant \frac{2}{e^x}$.

I.3.20. Prouver que si les fonctions f, α_1, α_2 sont continues et à variation bornée sur $[a\,,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\, d(\alpha_1(x)\alpha_2(x)) = \int_a^b f(x)\alpha_1(x)\, d\alpha_2(x) + \int_a^b f(x)\alpha_2(x)\, d\alpha_1(x).$$

I.3.21. Montrer que si f est continue et à variation bornée sur $[a\,,b]$, on a alors, pour tout entier n strictement positif,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)d\left((f(x))^n\right) &= n\int_a^b (f(x))^n\, df(x)\\ &= \frac{n}{n+1}\left((f(b))^{n+1} - (f(a))^{n+1}\right).\end{aligned}$$

I.3.22. Soit f une fonction continue sur $[0\,,1]$. Déterminer les limites suivantes

(a) $$\lim_{n\to+\infty}\left(n\int_0^1 x^n f(x)\, dx\right),$$

(b) $$\lim_{n\to+\infty}\left(n\int_0^1 e^{-nx} f(x)\, dx\right),$$

(c) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^1 x^n f(x)\, dx}{\int_0^1 x^n e^{x^2}\, dx},$$

(d) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}\int_0^1 f(x)\sin^{2n}(2\pi x)\, dx\right),$$

(e) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^1 f(x)\sin^{2n}(2\pi x)\, dx}{\int_0^1 e^{x^2}\sin^{2n}(2\pi x)\, dx}.$$

I.3.23. Démontrer le *théorème de convergence monotone pour l'intégrale de Riemann*. Si $\{f_n\}$ est une suite décroissante de fonctions Riemann-intégrables sur $[a\,,b]$ convergente sur $[a\,,b]$ vers une fonction Riemann-intégrable f, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

I.3.24. Prouver le théorème de convergence monotone pour l'intégrale inférieure de Riemann. Si $\{f_n\}$ est une suite décroissante de fonctions à variation bornée sur $[a\,,b]$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$ pour tout $x\in[a\,,b]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\underline{\int_a^b} f_n(x)\,dx=0.$$

I.3.25. Prouver le *théorème d'Arzelà*. Si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions Riemann-intégrables sur $[a\,,b]$ convergente sur $[a\,,b]$ vers une fonction Riemann-intégrable f et s'il existe une constante $M>0$ telle que $|f_n(x)|\leqslant M$ pour tout $x\in[a\,,b]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

I.3.26. Prouver le *lemme de Fatou pour l'intégrale de Riemann*. Si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions positives Riemann-intégrables sur $[a\,,b]$ convergente sur $[a\,,b]$ vers une fonction Riemann-intégrable f, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\varliminf_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

I.4. Intégrales définies

I.4.1. Calculer, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

(a) $\displaystyle\int_0^4\frac{|x-1|}{|x-2|+|x-3|}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$, (d) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$,

(e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x\, dx$, (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$,

(g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx$.

I.4.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, utiliser l'intégrale $\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx$ pour calculer

$$\frac{1}{1}\binom{n}{0} - \frac{1}{3}\binom{n}{1} + \frac{1}{5}\binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}\binom{n}{n}.$$

I.4.3. Soit une fonction f admettant une *primitive* sur un intervalle $\mathbf{I}$, autrement dit, il existe une fonction dérivable F telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{I}$. Prouver que si f admet une limite à gauche ou à droite en $x_0 \in \mathbf{I}$ et que cette limite est égale à a, alors $f(x_0) = a$.

I.4.4. On note f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ c & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

où $c \in [-1\,,1]$. Pour quelles valeurs de c la fonction f admet-elle une primitive ?

I.4.5. On pose $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Construire une fonction f continue sur $]0\,,1]$ telle que $f \geqslant 0$ sur $[x_{2k}\,,x_{2k-1}]$, $f \leqslant 0$ sur $[x_{2k+1}\,,x_{2k}]$ et

$$F(x_{2k-1}) - F(x_{2k}) = F(x_{2k+1}) - F(x_{2k}) = \frac{1}{k},$$

où F est une primitive de f. On prolonge la fonction f à $[0\,,1]$ en posant $f(0) = 0$. Montrer que f admet une primitive sur $[0\,,1]$ alors que $|f|$ n'en admet pas.

I.4.6. Soit f une fonction continue sur $[0\,,1]$. Prouver que

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx.$$

En utilisant cette égalité, calculer

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}\, dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

I.4.7. Soit f une fonction continue sur $[-a\,,a]$, $a>0$. Démontrer que

(a)
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{si } f \text{ est paire,}$$

(b)
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \quad \text{si } f \text{ est impaire.}$$

I.4.8. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T>0$. Prouver que, pour tout réel a,

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx.$$

I.4.9. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T>0$. Prouver que, pour tout $a<b$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{a}^{b} f(nx)\,dx = \frac{b-a}{T}\int_{0}^{T} f(x)\,dx.$$

I.4.10. Soit $f \in \mathscr{C}_{[-1,1]}$. Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^n f(\sin x)\,dx$,

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^n f\left(|\sin x|\right)dx$,

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 x f\left(\sin(2\pi n x)\right)dx$.

I.4.11. Pour $f \in \mathscr{C}_{[a,b]}$, déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx$,

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin^2(nx)\,dx$.

I.4.12. Soit $f \in \mathscr{C}_{[0,+\infty[}$. On pose

$$a_n = \int_0^1 f(n+x)\,dx \qquad \text{pour} \quad n\in\mathbb{N}.$$

On suppose aussi que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(nx)\,dx$.

I.4.13. Calculer, pour une fonction f strictement positive et continue sur $[0\,,1]$,

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx.$$

I.4.14. Prouver que si f est continue et paire sur $[-a\,,a]$, $a>0$, alors

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx = \int_0^a f(x)\,dx.$$

I.4.15. Prouver que si f est positive et continue sur $[a\,,b]$ et que

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

alors f est identiquement nulle sur $[a\,,b]$.

I.4.16. Prouver que si f est continue sur $[a\,,b]$ et que

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0$$

pour tout α, β, $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$, alors f est identiquement nulle sur $[a\,,b]$.

I.4.17. Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$ telle que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

pour toute fonction g continue sur $[a\,,b]$. Prouver que f est identiquement nulle sur $[a\,,b]$.

I.4.18. Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$. On suppose que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

pour toute fonction g continue sur $[a\,,b]$ telle que $g(a)=g(b)=0$. Prouver que f est identiquement nulle sur $[a\,,b]$.

I.4.19. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer que

(a) si $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est alors une fonction impaire,

(b) si $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est alors une fonction paire,

(c) étant donné $T > 0$, si $\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est alors périodique de période $T > 0$.

I.4.20. Calculer

(a) $$\lim_{n\to+\infty}\left(n^4\int_n^{n+1}\frac{x\,dx}{x^5+1}\right),$$

(b) $$\lim_{n\to+\infty}\left(n^3\int_n^{2n}\frac{x\,dx}{x^5+1}\right),$$

(c) $$\lim_{n\to+\infty}\int_1^2 \ln\left(x+\frac{x^5}{n}\right)dx,$$

(d) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3\pi}\int_\pi^{2\pi}\frac{x\,dx}{\operatorname{Arctan}(nx)}\right)^n.$$

I.4.21. Déterminer les limites suivantes :

(a) $$\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,dt,$$

(b) $$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} \sqrt[n]{x}\sin x\,dx,$$

(c) $$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}}\,dx.$$

I.4.22. Déterminer, pour une fonction f continue sur $[0\,,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f\left(x^n\right)dx.$$

I.4.23. Prouver que si f est Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$, il existe $\theta \in [a\,,b]$ tel que

$$\int_a^\theta f(t)\,dt = \int_\theta^b f(t)\,dt.$$

I.4.24. Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$ telle que

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Prouver qu'il existe $\theta \in \,]a\,,b[$ tel que

$$\int_a^\theta f(x)\,dx = f(\theta).$$

I.4.25. Soit $f \in \mathscr{C}_{[a,b]}$, $a > 0$, telle que

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Prouver qu'il existe $\theta \in \,]a\,,b[$ tel que

$$\int_a^\theta f(x)\,dx = \theta f(\theta).$$

I.4.26. Soit $f, g \in \mathscr{C}_{[a,b]}$. Prouver qu'il existe $\theta \in \,]a\,,b[$ tel que

$$g(\theta)\int_a^b f(x)\,dx = f(\theta)\int_a^b g(x)\,dx.$$

I.4.27. Soit $f, g \in \mathscr{C}_{[a,b]}$. Prouver qu'il existe $\theta \in \,]a\,,b[$ tel que

$$g(\theta)\int_a^\theta f(x)\,dx = f(\theta)\int_\theta^b g(x)\,dx.$$

I.4.28. Soit f et g des fonctions strictement positives et continues sur $[a\,,b]$. Prouver qu'il existe $\theta \in \,]a\,,b[$ tel que

$$\frac{f(\theta)}{\int_a^\theta f(x)\,dx} - \frac{g(\theta)}{\int_\theta^b g(x)\,dx} = 1.$$

I.4.29. Soit f une fonction strictement positive et continue sur $[0\,,1]$. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta(n)$ tel que

$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\theta(n)} f(x)\,dx + \int_{1-\theta(n)}^1 f(x)\,dx.$$

Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} (n\theta(n))$.

I.4.30. Soit $f \in \mathscr{C}^1_{[0,1]}$. Prouver qu'il existe $\theta \in \left]0\,,1\right[$ tel que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = f(0) + \frac{1}{2}\,f'(\theta).$$

I.4.31. Soit $f \in \mathscr{C}^2_{[0,1]}$. Prouver qu'il existe $\theta \in \left]0\,,1\right[$ tel que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = f(0) + \frac{1}{2}\,f'(\theta) + \frac{1}{6}\,f''(\theta).$$

I.4.32. Soit $f \in \mathscr{C}^1_{[0,1]}$ telle que $f'(0) \neq 0$. Pour $x \in \left]0\,,1\right]$, soit $\theta(x)$ tel que

$$\int_0^x f(t)\,dt = f(\theta(x))x.$$

Déterminer la limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\theta(x)}{x}.$$

I.4.33. Soit f une fonction continue, positive et strictement croissante sur $[a\,,b]$. Pour $p > 0$, on note $\theta(p)$ l'unique réel tel que

$$(f(\theta(p)))^p = \frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x))^p\,dx.$$

Déterminer $\lim\limits_{p\to+\infty} \theta(p)$.

I.4.34. Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$ telle que

$$\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prouver que f est identiquement nulle sur $[a\,,b]$.

I.4.35. Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$ telle que

$$\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$$

pour $n = 0, 1, \ldots, N$. Prouver que f possède au moins $N+1$ zéros dans $[a\,,b]$.

I.4.36. Soit $f \in \mathscr{C}_{[-a,a]}$, $a > 0$. Montrer que

(a) si
$$\int_{-a}^{a} x^{2n} f(x)\, dx = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$
f est alors impaire sur $[-a\,, a]$,

(b) si
$$\int_{-a}^{a} x^{2n+1} f(x)\, dx = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$
f est alors paire sur $[-a\,, a]$.

I.4.37. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{a}^{b} (f(x+h) - f(x))\, dx.$$

I.4.38. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $a < b$, on pose
$$g(x) = \int_{a}^{b} f(x+t)\, dt.$$
Déterminer la dérivée de g.

I.4.39. Déterminer les limites suivantes :

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{1}^{x} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt,$$

(b) $$\lim_{x\to 0} x \int_{x}^{1} \frac{\cos t}{t^2}\, dt,$$

(c) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\, dt}{x^3},$$

(d) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^a} \int_{0}^{x} \ln \frac{P(t)}{Q(t)}\, dt\right),$$

où $a > 1$ et P et Q sont des polynômes strictement positifs sur $\mathbb{R}_+$.

I.4.40. Déterminer les limites suivantes :

(a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\int_0^x \frac{1}{\sqrt[5]{1+t^5}}\,dt\right),$$

(b) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x (1+\sin t)^{\frac{1}{t}}\,dt\right),$$

(c) $$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x t^{1+t}\,dt\right),$$

(d) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^{1/x^2}.$$

I.4.41. Prouver que si f est continue sur $[0\,,1]$, alors

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \max_{x\in[0,1]}|f(x)|\,.$$

I.4.42. On suppose que la fonction à valeurs réelles $f(x,y)$ est continue sur le rectangle $\mathbf{R}=[a\,,b]\times[c\,,d]$. Prouver que

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$$

est continue sur $[c\,,d]$.

I.4.43. On suppose que la fonction à valeurs réelles $f(x,y)$ définie sur le rectangle $\mathbf{R}=[a\,,b]\times[c\,,d]$ est Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$ pour tout $y\in[c\,,d]$ et que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbf{R}$. Démontrer que

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

I.4.44. Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[0\,,1]$. Déterminer

$$\lim_{p\to 0}\left(\int_0^1 (f(x))^p\,dx\right)^{1/p}.$$

I.4.45. Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[0\,,1]$. Déterminer

$$\lim_{p\to-\infty}\left(\int_0^1 (f(x))^p\,dx\right)^{1/p}.$$

I.4.46. Démontrer que pour tout entier N strictement positif, l'équation

$$\int_0^x e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{2N}}{(2N)!}\right)dt = N$$

admet une solution dans l'intervalle $]N\,,2N[$.

I.4.47. Soit P un polynôme de degré n tel que

$$\int_0^1 x^k P(x)\,dx = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Montrer que

$$\int_0^1 (P(x))^2\,dx = (n+1)^2\left(\int_0^1 P(x)\,dx\right)^2.$$

I.4.48. Prouver que si f est continue sur $\mathbf{R} = [a\,,b] \times [c\,,d]$, alors

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

I.4.49. Prouver que, pour $0 < a < b$,

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \ln\frac{1+b}{1+a}.$$

I.5. Intégrales impropres

On suppose que la fonction f est définie sur $[a\,,+\infty[$ et qu'elle est Riemann-intégrable sur tout intervalle borné $[a\,,b]$, $b > a$. On définit

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

pour autant que cette limite existe et est finie. On dit, dans ce cas, que l'intégrale impropre (celle se trouvant dans le premier membre de l'égalité) converge et sinon, on dit qu'elle diverge. On définit l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ de la même façon et on définit l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx,$$

pour autant que les deux intégrales impropres dans le second membre convergent. Cette définition ne dépend pas du choix de a.

Pour une fonction f définie sur $[a\,,b[$ et Riemann-intégrable sur tout sous-intervalle fermé de $[a\,,b[$, on définit l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,dx$ par

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to 0^+}\int_a^{b-\eta} f(x)\,dx,$$

pour autant que la limite est finie. Si f est définie sur $]a\,,b]$ et Riemann-intégrable sur tout sous-intervalle fermé de $]a\,,b]$, l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,dx$ est définie de la même façon.

I.5.1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et a strictement positif, calculer

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$,

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_0^1 x^n\,(1-x)^\alpha\,dx,\ \alpha>-1$,

(d) $\displaystyle\int_0^1(-\ln x)^n\,dx$,

(e) $\displaystyle\int_0^n\frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\,dx$,

(f) $\displaystyle\int_0^1 x^n\ln^n x\,dx$,

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$,

(h) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$,

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$,

(j) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+a^2)^2}\,dx$,

(k) $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1+\cos x)\,dx$,

(l) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1+x^2}$.

I.5.2. Pour $0<\alpha<1$, on définit

$$f_\alpha(x)=\left[\frac{\alpha}{x}\right]-\alpha\left[\frac{1}{x}\right],\qquad 0<x<1.$$

Prouver que

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx=\alpha\ln\alpha.$$

I.5.3. Soit f une fonction monotone sur l'intervalle $]0\,,1[$ telle que l'intégrale impropre $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

I.5.4. Soit f une fonction monotone sur l'intervalle $]0\,,1[$ telle qu'une des limites $\lim_{x\to0^+} f(x)$ ou $\lim_{x\to1^-} f(x)$ existe. Prouver que l'intégrale impropre $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n}$$

existe et est finie.

I.5.5. Montrer sur un exemple qu'on ne peut omettre l'hypothèse qu'une des limites en 0^+ ou en 1^- est finie dans le problème précédent.

I.5.6. En utilisant le résultat de **I.5.3**, déterminer

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$,

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}$,

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln k)^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right)^2\right)$.

I.5.7. Soit $f\colon]0\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone telle que pour un certain $\alpha\in\mathbb{R}$, l'intégrale impropre $\int_0^1 x^\alpha f(x)\,dx$ existe. Prouver que $\lim_{x\to0^+} x^{\alpha+1}f(x) = 0$.

I.5.8. Vérifier lesquelles des intégrales impropres suivantes convergent ou divergent :

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$,

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_0^1 (-\ln x)^a\,dx, \quad a\in\mathbb{R}$,

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^a\,(-\ln x)^b}, \quad a,b\in\mathbb{R}$,

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2\sin^2 x}$.

I.5.9. On suppose que f et g sont des fonctions strictement positives sur $[a\,,+\infty[$ et que $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge. Montrer qu'au moins une des deux intégrales

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx \quad \text{et} \qquad \int_a^{+\infty} \frac{g(x)}{f(x)}\,dx$$

diverge.

I.5.10. Prouver le *théorème de Cauchy* suivant. Pour que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, il faut et il suffit que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $a_0 > a$ tel que pour tout $a_2 > a_1 > a_0$,

$$\left|\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

I.5.11. Prouver que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si et seulement si, pour toute suite croissante $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui diverge vers $+\infty$ et telle que $a_0 = a$ et $a_n > a$ pour $n \geqslant 1$, la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx \tag{1}$$

converge. De plus, en cas de convergence,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx.$$

Prouver aussi que si f est positive, il suffit qu'il existe une suite croissante $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_0 = a$ et $a_n > a$ pour $n \geqslant 1$, divergente vers $+\infty$ et pour laquelle la série (1) converge pour que l'intégrale impropre converge.

I.5.12. Pour a strictement positif, étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^a \sin^2 x}.$$

I.5.13. Soit f une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ existe. La fonction $f(x)$ doit-elle tendre vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$?

I.5.14. Soit f une fonction strictement positive et dérivable sur $[a\,,+\infty[$ telle que $|f'(x)| \leqslant 2$ pour $x \geqslant a$. La convergence de $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ implique-t-elle que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$?

I.5.15. Montrer que si f est uniformément continue sur $[a\,,+\infty[$ et que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

I.5.16. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante. Prouver que si

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty,$$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$. Montrer sur un exemple que la réciproque est fausse, autrement dit, la condition $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ n'implique pas la convergence de $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

I.5.17. Soit $f\colon [1\,,+\infty[\longrightarrow]e\,,+\infty[$ une fonction croissante telle que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} = +\infty$.

(a) Prouver que l'on a aussi $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln f(x)} = +\infty$.

(b) Donner un exemple de fonction f vérifiant la condition ci-dessus et pour laquelle $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln f(x)\ln(\ln f(x))}$ converge.

I.5.18. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) + \int_0^x f(t)\,dt \right)$$

existe et est finie. Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

I.5.19. Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty.$$

Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_0^n xf(x)\,dx = 0.$$

I.5.20. Soit f une fonction uniformément continue sur $[a\,,+\infty[$ telle que les intégrales $\int_a^x f(t)\,dt$ soient uniformément bornées, autrement dit, il existe $M > 0$ tel que

$$\left| \int_a^x f(t)\,dt \right| \leqslant M \quad \text{pour tout } x \in [a\,,+\infty[.$$

Prouver que f est bornée sur $[a\,,+\infty[$.

I.5.21. Prouver que si les intégrales $\int_a^{+\infty} (f(x))^2\,dx$ et $\int_a^{+\infty} (f''(x))^2\,dx$ convergent, alors $\int_a^{+\infty} (f'(x))^2\,dx$ converge aussi.

I.5.22. Prouver le *test d'Abel pour la convergence des intégrales impropres*. Soit f et g des fonctions définies sur $[a\,,+\infty[$ vérifiant les conditions suivantes :

(1) l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existe,

(2) g est monotone et bornée sur $[a\,,+\infty[$.

Alors, l'intégrale impropre
$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$$
converge.

I.5.23. Prouver le *test de Dirichlet pour la convergence des intégrales impropres*. Soit f et g des fonctions définies sur $[a\,,+\infty[$ vérifiant les conditions suivantes :

(1) f est (proprement) intégrable sur chaque intervalle $[a\,,b]$ $(b > a)$ et les intégrales $\int_a^b f(x)\,dx$ sont uniformément bornées, autrement dit, il existe $C > 0$ tel que
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant C \quad \text{pour tout } b > a,$$

(2) g est monotone et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Alors, l'intégrale impropre
$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$$
converge.

I.5.24. Pour $\alpha > 0$, étudier la convergence des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(x^2\right)dx$, (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\sin x}\frac{\sin(2x)}{x^\alpha}\,dx$,

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln^\alpha x\frac{\sin x}{x}\,dx$.

I.5.25. Soit $f\colon [a\,,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$ et $g\colon [a\,,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Prouver que si $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = 0$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ converge. Prouver de plus que si $\int_a^{a+T} f(x)\,dx \neq 0$, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge.

I.5.26. Utiliser le résultat du problème précédent pour étudier la convergence des intégrales suivantes :

(a) $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sin x)}{x}\, e^{\cos x}\,dx,$$

(b) $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sin x)}{x}\, e^{\sin x}\,dx.$$

I.5.27. Pour $\alpha > 0$, étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}\,dx.$$

I.5.28. Prouver que si $\int_a^{+\infty} xf(x)\,dx$ $(a > 0)$ existe, alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existe aussi.

I.5.29. Soit f une fonction monotone sur $\mathbb{R}_+$ telle que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ existe. Prouver que

$$\lim_{h\to0^+} h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Utiliser ce résultat pour déterminer

$$\lim_{h\to0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h}{1+h^2n^2}\,.$$

I.5.30. Pour $\alpha > 0$, on pose

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx.$$

Montrer que $\Gamma(\alpha)$ est finie pour tout α strictement positif. $\Gamma(\alpha)$ est appelée la *fonction gamma d'Euler*.

I.5.31. Utiliser le résultat de **I.5.29** pour montrer que

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\alpha-1} n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}$$

pour $\alpha > 0$.

I.5.32. Utiliser la formule donnée dans le problème précédent pour prouver que, pour $\alpha > 0$,

$$\Gamma(\alpha) = \frac{e^{-\gamma\alpha}}{\alpha} \prod_{k=1}^{+\infty} e^{\alpha/k} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)^{-1},$$

où γ est la constante d'Euler (voir, par exemple, **II.1.41 (vol. I)**).

I.5.33. Prouver que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

I.5.34. Prouver que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

I.5.35. Soit $f(x, y)$ une fonction définie sur $[a\,, +\infty[\times\mathbf{A}$ où $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ *converge uniformément sur* $\mathbf{A}$ si, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $a_0 > a$ tel que

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx - \int_a^b f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon$$

pour tout $b > a_0$ et tout $y \in \mathbf{A}$. Montrer que s'il existe une fonction $\varphi(x)$ telle que

$$|f(x, y)| \leqslant \varphi(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in [a\,, +\infty[\,, y \in \mathbf{A}$$

et $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ converge, alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$.

I.5.36. Montrer le critère suivant de convergence uniforme d'une intégrale impropre. On suppose que $\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$ et $g(x, y)$ est monotone par rapport à x et est bornée sur $[a\,, +\infty[\times\mathbf{A}$. Alors

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y)\, dx$$

converge uniformément sur $\mathbf{A}$.

I.5.37. Déduire le critère suivant du problème précédent. Si l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et si $g(x,y)$ est monotone par rapport à x et est bornée sur $[a\,,+\infty[\times\mathbf{A}$, alors

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x,y)\,dx$$

converge uniformément sur $\mathbf{A}$.

I.5.38. On suppose qu'il existe C strictement positif tel que

$$\left|\int_a^b f(x,y)\,dx\right| \leqslant C \quad \text{pour tout } b > a,\ y \in \mathbf{A}.$$

La fonction $g(x,y)$ est monotone par rapport à x et $g(x,y)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ uniformément sur $\mathbf{A}$. Alors,

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$$

converge uniformément sur $\mathbf{A}$.

I.5.39. Étudier la convergence uniforme des intégrales impropres suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx, \quad a \in [a_0\,,+\infty[\,, \quad a_0 > 0,$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx, \quad a \in \mathbb{R}_+,$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos a\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\,dx, \quad a \in \mathbb{R},$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos x^2\,dx, \quad a \in \mathbb{R}_+^*.$

I.5.40. On suppose que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$. Prouver que si $f(x,y)$ converge vers $\varphi(x)$ lorsque y tend vers y_0 uniformément sur chaque intervalle $[a\,,b]$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ converge et

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

I.5.41. Considérer l'exemple

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x^3}\, e^{-\frac{n}{2x^2}} & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

pour montrer qu'on ne peut pas omettre l'hypothèse sur la convergence uniforme de l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ dans l'énoncé du **théorème I.5.40**.

I.5.42. Montrer que

(a) $$\lim_{y\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-yx}\,dx = \frac{\pi}{2}\,,$$

(b) $$\lim_{y\to +\infty} \int_0^{+\infty} \sin x^2 \operatorname{Arctan}(yx)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx,$$

(c) $$\lim_{n\to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-x}\,dx,$$

(d) $$\lim_{y\to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(yx)}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{\pi}{2}\,,$$

(e) $$\lim_{y\to 0^+} \int_0^{+\infty} y^2 \sin x e^{-y^2x^2}\,dx = 0.$$

I.5.43. Soit $f : \mathbf{R} = [a\,,+\infty[\times[c\,,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ converge uniformément sur $[c\,,d]$. La fonction

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

est alors continue sur $[c\,,d]$.

I.5.44. Soit $f : \mathbf{R} = [a\,,+\infty[\times[c\,,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ converge pour tout $y \in [c\,,d]$ et que $\frac{\partial f}{\partial y}$ soit continue sur $\mathbf{R}$. On suppose que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ converge uniformément sur $[c,d]$. Montrer que

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

I.5.45. Utiliser le résultat de **I.5.44** pour calculer

(a) $$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x^{2n}\,dx, \quad a > 0,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}}, \quad a>0,\ n\in\mathbb{N}^*,$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x}\, e^{-x}\, dx, \quad a\in\mathbb{R},$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(ax)}{x}\, e^{-x}\, dx, \quad a\in\mathbb{R}.$

I.5.46. Prouver que

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos(yx)\, dx = \sqrt{2\pi}e^{-y^2/2}, \quad y\in\mathbb{R},$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x-y/x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi}e^{-2\sqrt{y}}, \quad y>0.$

I.5.47. Prouver que si une fonction à valeurs réelles $f(x,y)$ est continue sur $[a\,,+\infty[\times[c\,,d]$ et que l'intégrale impropre

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\, dx$$

converge uniformément sur $[c\,,d]$, alors

$$\int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\, dx\right) dy = \int_a^{+\infty}\left(\int_c^d f(x,y)\, dy\right) dx.$$

I.5.48. Utiliser le théorème précédent pour trouver

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\, dx, \quad a,b>0,$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(bx)-\cos(ax)}{x^2}\, dx, \quad 0<a<b.$

I.5.49. Soit que $f\in\mathscr{C}^1_{\mathbb{R}_+}$ telle que f' soit monotone sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ existe et soit finie. Prouver[(1)] que, pour $a,b>0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\, dx = (l-f(0))\ln\frac{b}{a}\,.$$

[(1)] Cette intégrale est appelée l'*intégrale de Frullani*. (N.d.T.)

I.5.50. Soit $f(x,y)$ une fonction continue sur $[a\,,+\infty[\times[c\,,+\infty[$. On suppose que

(1) l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ converge uniformément sur chaque intervalle $[c\,,d]$,

(2) l'intégrale impropre $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ converge uniformément sur chaque intervalle $[a\,,b]$,

(3) les intégrales impropres $\int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx$ et $\int_c^{+\infty} |f(x,y)|\,dy$ convergent respectivement pour $y \geqslant c$ et $x \geqslant a$,

(4) au moins une des intégrales impropres

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_c^{+\infty} |f(x,y)|\,dy\right)dx, \quad \int_c^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx\right)dy$$

converge.

Alors,

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy$$

et chacune des intégrales converge[(2)].

I.5.51. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(Les intégrales impropres $\int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$ sont appelées des *intégrales de Fresnel*.)

I.5.52. Soit $f(x,y)$ une fonction définie sur $[a\,,b[\times\mathbf{A}$ telle que pour tout $y\in\mathbf{A}$, f est Riemann-intégrable sur tout intervalle $[a\,,b-\eta]$ où $0<\eta<b-a$. On suppose aussi que $f(x,y)$ tend vers $\varphi(x)$ lorsque y tend vers y_0 uniformément sur chacun de

(2) *Théorème de Fubini-Tonelli.* (N.d.T.)

ces intervalles. Si l'intégrale impropre $\int_a^b f(x,y)\,dx$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$ (autrement dit, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe η_0 tel que

$$\left|\int_{b-\eta}^{b} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$$

pour tout $0 < \eta < \eta_0 < b-a$ et $y \in \mathbf{A}$), alors

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

I.5.53. Soit $f_n\colon [a\,,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ des fonctions Riemann-intégrables sur tout intervalle $[a\,,b-\eta]$ où $0 < \eta < b-a$, telles que la suite $f_n(x)$ converge uniformément sur chacun de ces intervalles vers $\varphi(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On suppose aussi qu'il existe une fonction strictement positive $f(x)$ telle que $|f_n(x)| \leqslant f(x)$ pour tout $x \in [a\,,b[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et telle que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ existe. Alors[(3)],

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

I.5.54. Montrer que

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^y}\,dx = 1.$$

I.5.55. Montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt, \quad \text{pour } x > 0.$$

I.5.56. Montrer que

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

I.5.57. Montrer que, pour $0 < a < 1$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{a+k}+\frac{1}{a-k}\right) = \frac{\pi}{\sin \pi a}\,.$$

---

(3) *Théorème de convergence dominée.* (N.d.T.)

I.5.58. Montrer que pour $a, b \in\,]0\,,1[$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x}\, dx = \pi(\operatorname{cotan} \pi a - \operatorname{cotan} \pi b).$$

I.5.59. Exprimer les intégrandes sous forme de série entière pour calculer

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\, dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx,$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}\, dx,$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x \ln^2(1-x)}{x}\, dx.$

I.5.60. Utiliser l'identité

$$\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 x^{2n}\, dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

pour trouver la somme des séries

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3}\right),$

(b) $\displaystyle 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{8n+1} - \frac{1}{8n-1}\right).$

I.5.61. Utiliser le résultat de **I.5.1(c)** pour déterminer la somme des séries

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)},$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(2n+1)(2n+2)}.$

I.5.62. Démontrer que

$$\int_0^1 x^{-x}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

I.5.63. Déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\, dx.$

I.5.64. Pour a et b strictement positifs, on pose

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx.$$

($B(a,b)$ est appelée la *fonction bêta d'Euler*.) Montrer que, pour $0 < a < 1$,

$$B(a, 1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{1+y}\,dy = \frac{\pi}{\sin a\pi}\,.$$

I.5.65. Montrer que, pour $a, b > 0$,

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

et en conclure que

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

pour $0 < a < 1$.

I.5.66. Déterminer $\lim\limits_{a \to 0^+} a\Gamma(a)$.

I.5.67. Calculer $\int_0^1 \ln\Gamma(a)\,da$.

I.5.68. Pour $a > 0$, prouver la *formule de duplication* suivante :

$$2^{2a}\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2a)} = 2\sqrt{\pi}.$$

I.5.69. Vérifier les égalités suivantes :

(a) $$\int_0^{\pi/2} \tan^a x\,dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi a}{2}}\,, \quad |a| < 1,$$

(b) $$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2,$$

(c) $$\int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} x\,dx = 2^{a-2}B\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), \quad a > 0.$$

I.5.70. Prouver la *formule de Stirling* :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = 1.$$

I.5.71. Montrer que

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^{+\infty} \left(e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right) \frac{dx}{x}$$

pour $a > 0$.

I.5.72. Déterminer les limites suivantes :

(a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(x+1)},$$

(b) $$\lim_{x \to +\infty} x^a B(a,x), \quad a > 0.$$

I.6. Inégalités portant sur les intégrales

I.6.1. Prouver l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*. Si f et g sont des fonctions Riemann-intégrables sur $[a\,,b]$, alors

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx \right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

De plus, si f et g sont continues sur $[a\,,b]$, l'égalité est vérifiée si et seulement s'il existe λ_1 et λ_2 tels que $|\lambda_1| + |\lambda_2| > 0$ et $\lambda_1 f(x) = \lambda_2 g(x)$ pour tout $x \in [a\,,b]$.

I.6.2. Prouver que si f est Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$, alors

$$\left(\int_a^b f(x)\sin x\,dx \right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\cos x\,dx \right)^2 \leqslant (b-a) \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

I.6.3. Prouver que si f est strictement positive et Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$, alors

$$(b-a)^2 \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)}.$$

De plus, si $0 < m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

I.6.4. Soit f et g des fonctions Riemann-intégrables sur $[a\,,b]$ telles que

$$m_1 \leqslant f(x) \leqslant M_1 \quad \text{et} \quad m_2 \leqslant g(x) \leqslant M_2 \quad \text{pour tout} \quad x \in [a\,,b].$$

Prouver que[4]

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{4}\,(M_1 - m_1)\,(M_2 - m_2).$$

I.6.5. Soit $f \in \mathscr{C}^1_{[a,b]}$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et $\int_a^b f^2(x)\,dx = 1$. Montrer que

$$\int_a^b x f(x) f'(x)\,dx = -\frac{1}{2}$$

et

$$\frac{1}{4} \leqslant \int_a^b \left(f'(x)\right)^2 dx \int_a^b x^2 f^2(x)\,dx.$$

I.6.6. Déterminer

$$\min_{f \in \mathcal{A}} \int_0^1 \left(1 + x^2\right) f^2(x)\,dx$$

où

$$\mathcal{A} = \left\{ f \in \mathscr{C}_{[0,1]} : \int_0^1 f(x)\,dx = 1 \right\}$$

et trouver une fonction pour laquelle le minimum est atteint.

I.6.7. Soit $f\colon [a\,,b] \longrightarrow [m\,,M]$ une fonction telle que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Prouver que

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \leqslant -mM(b-a).$$

I.6.8. Prouver que si f est une fonction continue sur $[0\,,1]$ et dérivable sur $]0\,,1[$ telle que $f(0) = 0$ et $0 < f'(x) \leqslant 1$ sur $]0\,,1[$, alors

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \geqslant \int_0^1 \left(f(x)\right)^3 dx.$$

Montrer aussi que l'égalité est atteinte si et seulement si $f(x) = x$.

[4] *Inégalité de Grüss*. (N.d.T.)

I.6.9. Soit $f \in \mathscr{C}_{[a,b]}$ une fonction croissante sur $[a\,,b]$. Prouver que l'on a, pour $x \in \,]a\,,b[$,

$$\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)\,dt.$$

I.6.10. Prouver l'*inégalité de Tchebychev*. Si les fonctions f et g sont toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes sur $[a\,,b]$, alors

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Si une des fonctions est croissante et l'autre décroissante, l'inégalité est alors inversée.

I.6.11. Prouver la généralisation suivante de l'inégalité de Tchebychev. Soit p une fonction strictement positive et Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$. Si les fonctions f et g sont toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes sur $[a\,,b]$, alors

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx \int_a^b p(x)g(x)\,dx \leqslant \int_a^b p(x)\,dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx.$$

Si une des fonctions est croissante et l'autre décroissante, l'inégalité est alors inversée.

I.6.12. Soit f et g des fonctions croissantes sur $[0\,,a]$. Prouver que

$$\int_0^a f(x)g(x)\,dx \geqslant \int_0^a f(a-x)g(x)\,dx.$$

I.6.13. Soit q une fonction strictement positive et décroissante sur $[a\,,b]$, $a > 0$. Montrer que

$$\frac{\int_a^b xq^2(x)\,dx}{\int_a^b xq(x)\,dx} \leqslant \frac{\int_a^b q^2(x)\,dx}{\int_a^b q(x)\,dx}.$$

I.6.14. Montrer que si f est une fonction convexe sur $[a\,,b]$, alors[5]

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\,.$$

[5] *Inégalité de Hadamard-Hermite*. (N.d.T.)

I.6.15. Étant donné x et y des réels strictement positifs, on note A, G et L respectivement leur moyenne arithmétique, géométrique et logarithmique (voir, par exemple, **II.5.41 (vol. II)** pour la définition de la moyenne logarithmique). Utiliser le résultat précédent pour prouver que pour $x \neq y$, $A^L < G^A$ si x et y sont tous les deux supérieurs à $e^{3/2}$ et $A^L > G^A$ si x et y sont tous les deux inférieurs à $e^{3/2}$.

I.6.16. Montrer que si $f \in \mathscr{C}_{[a,b]}$ est strictement positive et strictement concave sur $[a\,,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx > \frac{1}{2}\,(b-a)\max_{x\in[a,b]} f(x).$$

I.6.17. Soit f et g des fonctions continûment dérivables sur $[0\,,b]$ telles que f' et g' soient positives sur $[0\,,b]$, f n'étant pas constante et $f(0)=0$. Alors, pour $0 < a \leqslant b$,

$$f(a)g(b) \leqslant \int_0^a g(x)f'(x)\,dx + \int_0^b g'(x)f(x)\,dx.$$

L'égalité est atteinte si et seulement si $a=b$ ou si g est une fonction constante.

I.6.18. Soit $f \in \mathscr{C}^1_{[0,c]}$, $c>0$, une fonction strictement croissante sur $[0\,,c]$ telle que $f(0)=0$. Prouver que, pour $x \in [0\,,c]$,

$$\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt = xf(x),$$

où f^{-1} représente la bijection réciproque de f.

I.6.19. Utiliser le résultat du problème précédent pour prouver l'*inégalité de Young*. Sous les hypothèses de **I.6.18**,

$$\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt \geqslant ab$$

pour tout $a \in [0\,,c]$ et tout $b \in [0\,,f(c)]$. De plus, l'égalité est atteinte si et seulement si $b = f(a)$.

I.6.20. Montrer que pour $a, b \geqslant 0$,

$$(1+a)\ln(1+a) - (1+a) + (e^b - b) \geqslant ab.$$

I.6.21. Prouver la réciproque de l'inégalité de Young. On suppose que f et g sont continûment dérivables et strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(0) = g(0) = 0$, $g^{-1}(x) \geqslant f(x)$ pour tout $x \geqslant 0$. Si, pour a et b strictement positifs,

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b g(x)\,dx,$$

alors f et g sont inverses l'une de l'autre.

I.6.22. Soit

$$\mathcal{A} = \left\{ f \in \mathcal{R}([0,1]) : \int_0^1 f(x)\,dx = 3, \int_0^1 x f(x)\,dx = 2 \right\}.$$

Déterminer

$$\min_{f \in \mathcal{A}} \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

et une fonction pour laquelle le minimum est atteint.

I.6.23. Soit

$$\mathcal{A} = \left\{ f \in \mathscr{C}^2_{[0,1]} : f(0) = f(1) = 0, f'(0) = a \right\}.$$

Déterminer

$$\min_{f \in \mathcal{A}} \int_0^1 \left(f''(x)\right)^2 dx$$

et une fonction pour laquelle le minimum est atteint.

I.6.24. Existe-t-il une fonction f continûment dérivable sur $[0\,,2]$ telle que $f(0) = f(2) = 1$, $|f'(x)| \leqslant 1$ pour $x \in [0\,,2]$ et $\left|\int_0^2 f(x)\,dx\right| \leqslant 1$?

I.6.25. Soit $f \in \mathscr{C}^1_{[a,b]}$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que

$$\max_{x \in [a,b]} \left|f'(x)\right| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

I.6.26. Démontrer l'*inégalité de Hölder*. Si les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont positives et Riemann-intégrables sur $[a\,,b]$ et si les réels strictement positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ vérifient $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, alors

$$\int_a^b \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i}(x)\,dx \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(x)\,dx\right)^{\alpha_i}.$$

I.6.27. Soit f et g deux fonctions positives et Riemann-intégrables sur $[a\,,b]$. Pour $p \neq 0$, on note q son conjugué (q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). En utilisant le résultat du problème précédent, prouver que

(a) si $p > 1$, alors

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \left(\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b g^q(x)\,dx\right)^{1/q};$$

(b) si $p < 0$ ou si $0 < p < 1$ et si f et g sont strictement positives, alors

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \geqslant \left(\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b g^q(x)\,dx\right)^{1/q}.$$

I.6.28. Soit f une fonction continue sur $[0\,,1]$ telle qu'il existe $a > 0$ pour lequel $0 \leqslant f(x) \leqslant a^{2/3}$ pour tout $x \in [0\,,1]$. Prouver que

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx \geqslant a^{2/3} \quad \text{si} \quad \int_0^1 f(x)dx = a.$$

I.6.29. Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$ telle que $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Démontrer que si φ est continue et convexe sur $[m\,,M]$, alors

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\left(f(x)\right)dx.$$

Cette inégalité est appelée l'*inégalité de Jensen*.

I.6.30. Prouver la généralisation suivante de l'inégalité de Jensen énoncée au problème précédent. Soit f et p des fonctions Riemann-intégrables sur $[a\,,b]$ telles que $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $p(x) \geqslant 0$ et $\int_a^b p(x)\,dx > 0$. Si φ est continue et convexe sur $[m\,,M]$, alors

$$\varphi\left(\frac{1}{\int_a^b p(x)\,dx}\int_a^b p(x)f(x)\,dx\right) \leqslant \frac{1}{\int_a^b p(x)\,dx}\int_a^b p(x)\varphi\left(f(x)\right)dx.$$

I.6.31. Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[0\,,1]$ telle que $|f(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in [0\,,1]$. Montrer que

$$\int_0^1 \sqrt{1-f^2(x)}\,dx \leqslant \sqrt{1-\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2}.$$

I.6.32. Soit f une fonction positive et décroissante sur $[0\,,1]$. Montrer que, pour a et b positifs,

$$\left(1-\left(\frac{a-b}{a+b+1}\right)^2\right)\int_0^1 x^{2a}f(x)\,dx\int_0^1 x^{2b}f(x)\,dx \geqslant \left(\int_0^1 x^{a+b}f(x)\,dx\right)^2.$$

I.6.33. Soit f une fonction positive et croissante sur $[0,1]$. Montrer que, pour a et b positifs,

$$\left(1-\left(\frac{a-b}{a+b+1}\right)^2\right)\int_0^1 x^{2a}f(x)\,dx\int_0^1 x^{2b}f(x)\,dx \leqslant \left(\int_0^1 x^{a+b}f(x)\,dx\right)^2.$$

I.6.34. Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$ qu'on prolonge en posant $f(x)=0$ pour $x \notin [a\,,b]$. Pour $h>0$, on définit f_h en posant

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt.$$

Prouver que

$$\int_a^b |f_h(x)|\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

I.6.35. Prouver l'*inégalité de Minkowski* pour les intégrales. Soit $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions positives et Riemann-intégrables sur $[a\,,b]$.

(a) Si $k>1$, alors

$$\left(\int_a^b (f_1(x)+\cdots+f_n(x))^k\,dx\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \left(\int_a^b f_1^k(x)\,dx\right)^{\frac{1}{k}} + \cdots + \left(\int_a^b f_n^k(x)\,dx\right)^{\frac{1}{k}}.$$

(b) Si $0<k<1$, alors

$$\left(\int_a^b (f_1(x)+\cdots+f_n(x))^k\,dx\right)^{\frac{1}{k}} \geqslant \left(\int_a^b f_1^k(x)\,dx\right)^{\frac{1}{k}} + \cdots + \left(\int_a^b f_n^k(x)\,dx\right)^{\frac{1}{k}}.$$

I.6.36. Soit $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions positives et Riemann-intégrables sur $[a\,,b]$.

(a) Si $k > 1$, alors

$$\int_a^b (f_1(x) + \cdots + f_n(x))^k\,dx \geqslant \int_a^b f_1^k(x)\,dx + \cdots + \int_a^b f_n^k(x)\,dx.$$

(b) Si $0 < k < 1$, alors

$$\int_a^b (f_1(x) + \cdots + f_n(x))^k\,dx \leqslant \int_a^b f_1^k(x)\,dx + \cdots + \int_a^b f_n^k(x)\,dx.$$

I.6.37. Prouver l'*inégalité de Steffensen*. Si g est Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$ telle que $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in [a, b]$ et si f est décroissante sur cet intervalle, alors

$$\int_{b-\lambda}^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \int_a^{a+\lambda} f(x)\,dx,$$

où

$$\lambda = \int_a^b g(x)\,dx.$$

I.6.38. Prouver la généralisation de Bellman de l'inégalité de Steffensen. Si g est Riemann-intégrable sur $[0\,,1]$ telle que $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in [0\,,1]$ et si f est positive et décroissante sur cet intervalle, on a alors, pour $p \geqslant 1$,

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^p \leqslant \int_0^\lambda (f(x))^p\,dx,$$

où

$$\lambda = \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^p.$$

I.6.39. En utilisant **I.6.38**, prouver que si g est Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$ telle que $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in [a\,,b]$ et si f est positive et décroissante sur cet intervalle, on a alors, pour $p > 1$,

$$\frac{1}{(b-a)^{p-1}}\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^p \leqslant \int_a^{a+\lambda} (f(x))^p\,dx,$$

où

$$\lambda = \frac{1}{(b-a)^{p-1}}\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^p.$$

I.6.40. Démontrer la variante suivante de l'inégalité de Steffensen due à R. Apéry. Soit f une fonction positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et g une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $0 \leqslant g(x) \leqslant A$ ($A > 0$) et $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$. On a alors

$$\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx \leqslant A \int_0^{\lambda} f(x)\,dx,$$

où

$$\lambda = \frac{1}{A} \int_0^{+\infty} g(x)\,dx.$$

I.6.41. Prouver la généralisation suivante de Bellman de l'inégalité de Steffensen. Soit $f\colon [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et décroissante et soit $g\colon [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et Riemann-intégrable telle que

$$0 \leqslant g(x) \left(\int_a^b g(t)\,dt \right)^{p-1} \leqslant 1, \quad x \in [a\,,b].$$

Si $p \geqslant 1$, alors

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx \right)^p \leqslant \int_a^{a+\lambda} (f(x))^p\,dx,$$

où

$$\lambda = \left(\int_a^b g(x)\,dx \right)^p.$$

Prouver de plus que si $0 < p \leqslant 1$, alors

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx \right)^p \geqslant \int_{b-\lambda}^b (f(x))^p\,dx,$$

où λ est défini comme précédemment.

I.6.42. Soit g_1 et g_2 des fonctions intégrables sur $[a\,,b]$ telles que

$$\int_a^x g_1(t)\,dt \geqslant \int_a^x g_2(t)\,dt$$

pour tout $x \in [a\,,b]$ et

$$\int_a^b g_1(t)\,dt = \int_a^b g_2(t)\,dt.$$

Prouver que si f est croissante sur $[a\,,b]$, alors

$$\int_a^b f(t)g_1(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)g_2(t)\,dt$$

et si f est décroissante sur $[a\,,b]$, alors

$$\int_a^b f(t)g_1(t)\,dt \geqslant \int_a^b f(t)g_2(t)\,dt.$$

I.6.43. Utiliser l'inégalité de Steffensen (voir **I.6.37**) pour prouver que si f est continûment dérivable sur $[a\,,b]$ et $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ $(m < M)$ pour tout $x \in [a\,,b]$, alors

$$m + \frac{(M-m)\lambda^2}{(b-a)^2} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M - \frac{(M-m)(b-a-\lambda)^2}{(b-a)^2}\,,$$

où

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)-m(b-a)}{M-m}\,.$$

I.6.44. Montrer que si f est continûment dérivable sur $[a\,,b]$ et $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ $(m < M)$ pour tout $x \in [a\,,b]$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right| \leqslant \frac{(f(b)-f(a)-m(b-a))(M(b-a)-f(b)+f(a))}{2(M-m)}\,.$$

I.6.45. Prouver l'*inégalité d'Opial*. Si f est continûment dérivable sur $[0\,,a]$ et $f(0) = 0$, alors

$$\int_0^a \left|f(x)f'(x)\right|dx \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a \left(f'(x)\right)^2 dx.$$

I.6.46. Prouver la généralisation suivante de l'inégalité d'Opial. Si $f \in \mathscr{C}^n_{[0,a]}$ est telle que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, $n \geqslant 1$, alors

$$\int_0^a \left|f(x)f^{(n-1)}(x)\right|dx \leqslant \frac{a^n}{2}\int_0^a \left(f^{(n)}(x)\right)^2 dx.$$

I.6.47. Prouver la généralisation suivante de l'inégalité d'Opial. Si f est continûment dérivable sur $[0\,,a]$, $f(0) = 0$ et $p \geqslant 0$, $q \geqslant 1$, alors

$$\int_0^a |f(x)|^p\,|f'(x)|^q\,dx \leqslant \frac{qa^p}{p+q}\int_0^a \left(f'(x)\right)^{p+q} dx.$$

I.6.48. Soit $f \in \mathscr{C}^{2n}_{[a,b]}$ une fonction telle que $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Prouver que si $M = \max\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{(2n)}(x)\right|$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{(n!)^2\,(b-a)^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\,M.$$

I.7. Mesure de Jordan

Pour $a_i \leqslant b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, le *volume du pavé* $\mathbf{R} = [a_1\,, b_1] \times \ldots \times [a_p\,, b_p]$ est le réel $|\mathbf{R}| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_p - a_p)$. Dans le cas $p = 1$ ou $p = 2$, $|\mathbf{R}|$ est appelé respectivement la longueur ou la surface de $\mathbf{R}$. On dit que deux pavés sont séparés s'ils ont au plus en commun des points de leur frontière. Une union d'un nombre fini de pavés est appelée un *ensemble élémentaire*. Tout ensemble élémentaire peut s'exprimer (d'une infinité de façon) comme une union de pavés deux à deux séparés $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n$. Le volume de l'ensemble élémentaire $\mathbf{E}$ est le réel $|\mathbf{E}| = |\mathbf{R}_1| + \cdots + |\mathbf{R}_n|$. Le volume $|\mathbf{E}|$ ne dépend pas du choix des $\mathbf{R}_i$. Pour un ensemble non vide $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^p$, on pose $|\mathbf{A}|_* = \sup|\mathbf{E}|$, où la borne supérieure est prise sur tous les ensembles élémentaires $\mathbf{E}$ inclus dans $\mathbf{A}$. Le réel $|\mathbf{A}|_*$ est appelée le *volume intérieur* (ou *mesure intérieure de Jordan*) de $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{A}$ n'est pas borné, sa mesure intérieure de Jordan peut être infinie. Si $\mathbf{A}$ est borné, son *volume extérieur* (ou *mesure extérieure de Jordan*) est le réel $|\mathbf{A}|^* = \inf|\mathbf{E}|$ où la borne inférieure est prise sur tous les ensembles élémentaires $\mathbf{E}$ contenant $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{A}$ n'est pas borné, alors $|\mathbf{A}|^* = \lim\limits_{k\to+\infty} |\mathbf{A} \cap \mathbf{R}_k|^*$, où $\mathbf{R}_k = [-k, k] \times \ldots \times [-k, k] \subset \mathbb{R}^p$. Si $|\mathbf{A}|_* = |\mathbf{A}|^* = |\mathbf{A}|$, on dit que $\mathbf{A}$ a pour volume $|\mathbf{A}|$ (ou qu'il est *Jordan-mesurable* et que sa *mesure de Jordan* est $|\mathbf{A}|$). Dans le cas où $|\mathbf{A}| = +\infty$, on suppose de plus que $\mathbf{A} \cap \mathbf{R}$ est Jordan-mesurable pour tout pavé $\mathbf{R}$. On suppose aussi que $|\varnothing| = 0$.

I.7.1. Montrer qu'un ensemble borné $\mathbf{A}$ est Jordan-mesurable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux ensembles élémentaires $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ tels que $\mathbf{E}_1 \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{E}_2$ et $|\mathbf{E}_2| - |\mathbf{E}_1| < \varepsilon$.

I.7.2. Montrer que si $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ sont bornés, Jordan-mesurables et deux à deux séparés, autrement dit, $\overset{\circ}{\mathbf{A}}_i \cap \overset{\circ}{\mathbf{A}}_j = \varnothing$ pour $i \neq j$, alors

$$|\mathbf{A}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{A}_n| = |\mathbf{A}_1| + \cdots + |\mathbf{A}_n|\,.$$

I.7.3. Prouver que si $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ sont Jordan-mesurables, il en est de même de $\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2$ et $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2$ et on a

$$|\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2| + |\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2| = |\mathbf{A}_1| + |\mathbf{A}_2|\,.$$

I.7.4. Prouver que si $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ sont Jordan-mesurables, $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}_2$ et $|\mathbf{A}_1| < +\infty$, alors $\mathbf{A}_2 \setminus \mathbf{A}_1$ est Jordan-mesurable et $|\mathbf{A}_2 \setminus \mathbf{A}_1| = |\mathbf{A}_2| - |\mathbf{A}_1|$.

I.7.5. Prouver que l'ensemble

$$\mathbf{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0\,,1], y \in [0\,,1] \setminus \mathbb{Q}\right\}$$

n'est pas Jordan-mesurable.

I.7.6. Prouver que l'ensemble

$$\mathbf{B} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0\,,1],\ y \in [0\,,1] \setminus \left\{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}\right\}$$

est Jordan-mesurable.

I.7.7. Prouver que si $|\mathbf{B}|^* = 0$, on a alors, pour tout $\mathbf{A}$ borné,

$$|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}|_* = |\mathbf{A}|_*\,.$$

Donner un exemple pour montrer que $|\mathbf{B}|_* = 0$ n'est pas une condition suffisante pour que cette égalité soit vérifiée.

I.7.8. Prouver que si $\mathbf{A}$ est Jordan-mesurable, son intérieur et son adhérence sont Jordan-mesurables et

$$|\mathbf{A}| = |\mathring{\mathbf{A}}| = \left|\overline{\mathbf{A}}\right|.$$

I.7.9. Prouver que $\mathbf{A}$ est Jordan-mesurable si et seulement si la mesure de Jordan de sa frontière $\partial\mathbf{A}$ est nulle.

I.7.10. Prouver que l'hypothèse, selon laquelle $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ sont bornés, peut être ignorée dans la propriété énoncée en **I.7.2**.

I.7.11. On note $\mathbf{C} \subset [0\,,1]$ l'ensemble de Cantor (pour la définition de l'ensemble de Cantor voir, par exemple, la solution de **I.3.1 (vol. II)**). Prouver que $|\mathbf{C}| = 0$.

I.7.12. Soit $\mathbf{A}$ un ensemble de Cantor généralisé défini comme suit. Étant donné $\alpha \in \,]0\,,1[$, on enlève de $[0\,,1]$ un intervalle ouvert $\left]\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}\,,\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{4}\right[$ et on note $\mathbf{E}_1$ l'union des deux intervalles fermés restants. On enlève alors les intervalles ouverts de longueur $\frac{\alpha}{2^3}$ situés au milieu des deux intervalles formant $\mathbf{E}_1$ et on note $\mathbf{E}_2$ l'union des quatre intervalles fermés restants. On répète le procédé sur chacun des quatre intervalles en retirant les intervalles ouverts de longueur $\frac{\alpha}{2^5}$ situés au milieu. En continuant le procédé, on obtient une suite $\{\mathbf{E}_n\}$ d'ensembles, $\mathbf{E}_n$ étant l'union de 2^n intervalles fermés, et on pose $\mathbf{A} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{E}_n$. Prouver que $\mathbf{A}$ n'est pas Jordan-mesurable.

I.7.13. $\mathbf{A} = \left\{1+\frac{1}{n+1}\,,2+\frac{1}{n+1}\,,\ldots : n \in \mathbb{N}\right\}$ est-il un sous-ensemble Jordan-mesurable de $\mathbb{R}$?

I.7.14. Soit $\{r_k\}$ une suite de tous les rationnels de $[0\,,1]$ et soit $\mathbf{I}_k$ l'intervalle ouvert centré en r_k de longueur $\frac{1}{2^{k+1}}$. Démontrer que l'ensemble $\mathbf{A} = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbf{I}_k$ n'est pas Jordan-mesurable.

I.7.15. Donner des exemples d'ensembles ouverts non mesurables et d'ensembles fermés non mesurables.

I.7.16. Soit $\mathbf{A} \subset [a, b]$. Si $\chi_{\mathbf{A}}$ est la fonction caractéristique de $\mathbf{A}$, alors

$$|\mathbf{A}|_* = \underline{\int_a^b} \chi_{\mathbf{A}}(x)\,dx \quad \text{et} \quad |\mathbf{A}|^* = \overline{\int_a^b} \chi_{\mathbf{A}}(x)\,dx.$$

I.7.17. Soit f une fonction positive et bornée sur un intervalle $[a, b]$, on pose $\mathbf{A}_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$. Prouver que

$$|\mathbf{A}_f|_* = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \text{et} \quad |\mathbf{A}_f|^* = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

I.7.18. Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit

$$\mathbf{J}_\varepsilon = \{x \in [a\,,b], o_f(x) \geqslant \varepsilon\},$$

$o_f(x)$ représentant l'oscillation de f en x (voir, par exemple, **I.7.12 (vol. II)**). Prouver que f est Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$ si et seulement si $|\mathbf{J}_\varepsilon| = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

I.7.19. Prouver qu'un ensemble borné $\mathbf{A}$ est Jordan-mesurable si et seulement s'il existe deux suites $\{\mathbf{B}_n\}$ et $\{\mathbf{C}_n\}$ d'ensembles Jordan-mesurables tels que

$$\mathbf{B}_n \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{C}_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} |\mathbf{B}_n| = \lim_{n\to+\infty} |\mathbf{C}_n| = |\mathbf{A}|\,.$$

I.7.20. Montrer que l'ensemble

$$\mathbf{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leqslant 1,\, 0 \leqslant y \leqslant \left|\sin\frac{1}{x}\right|\right\}$$

est Jordan-mesurable.

I.7.21. On note $\mathbf{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$ et

$$\mathbf{K}_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4^{2n}}\right\}.$$

Montrer que l'ensemble $\mathbf{A} \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{K}_n$ est Jordan-mesurable.

I.7.22. Démontrer la formule suivante sur la mesure de Jordan d'ensembles définis par des inégalités sur les coordonnées polaires (r,θ). Si f est une fonction positive et continue sur $[\alpha,\beta]$, $\beta - \alpha < 2\pi$, alors l'ensemble

$$\mathbf{A} = \{(r,\theta) : \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, 0 \leqslant r \leqslant f(\theta)\}$$

est Jordan-mesurable et son aire est égale à

$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta.$$

I.7.23. Déterminer l'aire d'une des boucles du lemniscate $r^2 = a^2\cos(2\theta)$ où $a > 0$ est fixé.

I.7.24. La courbe $r = a(1 + \cos(3\theta))$, $a > 0$, est formée de trois feuilles superposables, tangentes les unes aux autres à l'origine. Déterminer l'aire d'une de ces feuilles.

I.7.25. Déterminer l'aire du limaçon $r = a + b\cos\theta$, où les réels strictement positifs a et b sont donnés, en distinguant les cas $a > b$, $a = b$ et $a < b$.

I.7.26. Déterminer l'aire de la boucle de la courbe $x^5 + y^5 = 5ax^2y^2$, où $a > 0$ est donné.

I.7.27. Déterminer l'aire de la région se trouvant à l'extérieur du cercle $r = 2$ et à l'intérieur du limaçon $r = 1 + 2\cos\theta$.

I.7.28. Soit f une fonction positive et continue sur $[a\,,b]$. Une région plane $\mathbf{A}_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$ tourne autour de l'axe des abscisses pour former un solide de révolution $\mathbf{V}$ de volume $|\mathbf{V}|$. Montrer que

$$|\mathbf{V}| = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

I.7.29. Soit f une fonction positive et continue sur $[a\,,b]$, $0 < a$. Prouver que le volume du solide $\mathbf{V}$ engendré par la rotation autour de l'axe des ordonnées de la région plane $\mathbf{A}_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$

$$|\mathbf{V}| = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx.$$

I.7.30. Déterminer le volume du tore obtenu en faisant tourner le disque $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + y^2 \leqslant r^2\}$ $(0 < a < r)$ autour de l'axe des ordonnées.

I.7.31. Déterminer le volume du tore obtenu en faisant tourner autour de l'axe des abscisses la région non bornée située sous le graphe de $f(x) = e^{-x}\sqrt{\sin x}$ définie sur l'ensemble $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} [2k\pi, (2k+1)\pi]$.

I.7.32. Montrer que la longueur L de l'ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

vérifie

$$\pi(a+b) < L < \pi\sqrt{2\,(a^2+b^2)}.$$

I.7.33. Prouver que la longueur L de l'ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad a > b > 0,$$

est donnée par

$$L = 2\pi a \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{e^{2n}}{2n-1}\right),$$

où $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ est l'excentricité de l'ellipse.

I.7.34. Prouver la formule suivante donnant la longueur d'une courbe en coordonnées polaires (r, θ). Si f est continûment dérivable sur $[\alpha\,, \beta]$, la longueur L de la courbe $r = f(\theta)$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, est alors donnée par

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta.$$

I.7.35. Déterminer la longueur de la courbe d'équation polaire

(a) $$r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}\,, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 3\pi,$$

(b) $$r = \frac{1}{1 + \cos\theta}\,, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\,.$$

I.7.36. Déterminer la longueur de la courbe d'équation polaire

$$\theta = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad 1 \leqslant r \leqslant 3.$$

I.7.37. Déterminer la longueur de la courbe

$$r = 1 + \cos t, \quad \theta = t - \tan\frac{t}{2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \beta,$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaires et $0 < \beta < \pi$.

Solutions

I.1. Propriétés de l'intégrale de Riemann-Stieltjes

I.1.1. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le **théorème 1**, il suffit de trouver une partition P telle que

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$$

pour prouver que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. Supposons d'abord que $c \in]a\,, b[$. Puisque α est continue en c, il existe $\delta > 0$ tel que $|\alpha(x) - \alpha(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $|x - c| < \delta$. Si on choisit une partition P dont le pas est inférieur à δ telle que $x_{i-1} < c < x_i$ pour un certain i, alors

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) < \varepsilon.$$

On peut appliquer le même raisonnement aux cas $c = a$ et $c = b$. Clairement, $\int_a^b f\,d\alpha = \sup L(P, f, \alpha) = 0$.

I.1.2. Soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une partition de $[a\,, b]$, on note i l'entier tel que $x_{i-1} < c \leqslant x_i$. On a

$$U(P, f, \alpha) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = M_i$$

et

$$L(P, f, \alpha) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = m_i.$$

Puisque f est continue sur $[a\,, b]$, en considérant des partitions dont le pas tend vers 0, on voit que

$$\inf U(P, f, \alpha) = \sup L(P, f, \alpha) = f(c).$$

I.1.3. Puisque les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, on a $L(P, f) = 0$ pour toute partition P de $[a\,, b]$. En conséquence,

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = 0.$$

D'autre part,

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1} \geqslant \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

car $2x_ix_{i-1} \leqslant x_i^2 + x_{i-1}^2$. On remarquera ici que

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right).$$

En effet, en considérant la suite de partition P_n avec $x_i = a + \frac{(b-a)i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, on voit que $\lim\limits_{n\to+\infty} U(P_n, f) = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$.

I.1.4. Choisissons une partition P de $[-a\,, a]$ telle que

$$-a = x_0 < \cdots < x_{j-1} = 0 < x_j < \cdots < x_n = a.$$

Comme dans le problème précédent, on a

$$U(P, f) = \sum_{k=j-1}^{n-1} x_{k+1}(x_{k+1} - x_k) \geqslant \frac{a^2}{2}$$

et

$$L(P, f) = \sum_{k=0}^{j-2} x_k(x_{k+1} - x_k) \leqslant -\frac{a^2}{2}.$$

En prenant une suite appropriée de partitions (comparez avec la solution du problème précédent), on montre que

$$\overline{\int_{-a}^{a}} f(x)\,dx = \frac{a^2}{2} \quad \text{et} \quad \underline{\int_{-a}^{a}} f(x)\,dx = -\frac{a^2}{2}.$$

Finalement, on remarque que si

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

alors f n'est Riemann-intégrable sur aucun intervalle $[a\,, b]$.

I.1.5. On fixe arbitrairement $[a\,, b]$. Étant donné un entier N strictement positif, on remarque qu'il n'y a qu'un nombre fini de rationnels $\frac{p}{q}$ (p et q premiers entre eux) tels que $q \leqslant N$. Soit k_N ce nombre. On considère une partition de $[a\,, b]$ de pas $\delta > 0$. Il y a alors au plus $2k_N$ sous-intervalles $[x_{i-1}\,, x_i]$ contenant au moins un des rationnels mentionnés ci-dessus. Sur les autres sous-intervalles $[x_{j-1}\,, x_j]$, on a $M_j - m_j < \frac{1}{N}$. Il s'ensuit que

$$U(P, f) - L(P, f) < 2k_N\delta + \frac{b-a}{N}.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, on prend $N > \frac{2(b-a)}{\varepsilon}$. On a alors, de ce qui précède, pour toute partition de pas $\delta < \frac{\varepsilon}{4k_N}$,

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon.$$

I.1.6. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n > n_0$. On choisit une partition P déterminée par

$$0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n_0 + 1} < x_2 < \cdots < x_k = 1$$

telle que $x_i - x_{i-1} < \frac{\varepsilon}{4n_0}$ pour $i = 2, 3, \ldots, k$. On a alors

$$U(P, f) - L(P, f) = U(P, f) < \frac{\varepsilon}{2} + 2n_0 \frac{\varepsilon}{4n_0} = \varepsilon.$$

I.1.7. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n > n_0$. On choisit une partition P déterminée par

$$\begin{aligned} 0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n_0 + 1} < x_2 < \cdots < x_{n'_0} = \frac{1}{n_0} \\ < x_{n'_0+1} < \cdots < x_{n'_1} = \frac{1}{n_0 - 1} < \cdots < x_{n'_{n_0-1}} = 1 \end{aligned}$$

telle que $x_i - x_{i-1} < \frac{\varepsilon}{4n_0}$ $(i \geqslant 2)$. On a alors

$$\begin{aligned} U(P, f) - L(P, f) &= \frac{1}{n_0 + 1} + \sum_{i=2}^{n'_0} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n_0-2} \sum_{i=n'_k+1}^{n'_{k+1}} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2n_0 \frac{\varepsilon}{4n_0} = \varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc prouvé que f est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

I.1.8. Puisque, pour chaque partition P telle que $x_k = 0$ pour un certain k, on a $U(P, f, \alpha) = L(P, f, \alpha) = 0$, on voit que $\int_a^b f \, d\alpha = 0$. Pour maintenant prouver que $\lim_{\mu(P) \to 0} S(P, f)$ n'existe pas, on considère des partitions où $\mu(P)$ tend vers 0 telles que $x_{k-1} < 0 < x_k$ pour un certain k. Si on choisit $t_k = 0$ et $t'_k \in]0, x_k]$, on obtient respectivement $S(P, f) = 0$ et $S(P, f) = 1$.

I.1.9. Soit c ($a < c < b$) un point de discontinuité commun à f et α. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe x' et x'' vérifiant $|x' - c| < \delta$, $|x'' - c| < \delta$ et

$$\left|f(x') - f(c)\right| > \varepsilon, \quad \left|\alpha(x'') - \alpha(c)\right| > \varepsilon. \tag{1}$$

Supposons, contrairement à l'énoncé, que $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(P, f, \alpha)$ existe. On en déduit alors qu'il existe $\delta' > 0$ tel que $\mu(P) < \delta'$ implique

$$\left|S(P, f, \alpha) - S'(P, f, \alpha)\right| < \varepsilon^2, \tag{2}$$

où

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i \quad \text{et} \quad S'(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(t'_i)\Delta\alpha_i$$

pour tous les choix admissibles de t_i et t'_i. Notre but est maintenant de trouver une partition P avec des points t_i et t'_i pour laquelle l'inégalité (2) n'est pas vérifiée. Pour cela, on commence avec une partition P_1 de pas inférieur à δ' telle que $x_{k-1} < c < x_k$. Il existe alors $x', x'' \in \,]x_{k-1}\,, x_k[$ vérifiant (1). On suppose d'abord que $x' < c < x''$ et on construit la partition P en ajoutant les points x' et x'' à P_1. On choisit ensuite $t_i = t'_i$ dans chaque sous-intervalle, excepté pour $[x'\,, x'']$. Si maintenant on prend $t = x'$ et $t' = c$ dans $[x'\,, x'']$, on a

$$\begin{aligned}\left|S(P, f, \alpha) - S'(P, f, \alpha)\right| &= \left|f(c) - f(x')\right|(\alpha(x'') - \alpha(x')) \\ &\geqslant \left|f(c) - f(x')\right|(\alpha(x'') - \alpha(c)) > \varepsilon^2.\end{aligned}$$

On peut appliquer un raisonnement semblable dans le cas $x'' < c < x'$. Si $x_{k-1} < x'' < x' < c < x_k$, on ajoute alors à la partition P_1 les points x'' et c. Comme précédemment, on choisit $t_i = t'_i$ dans chaque sous-intervalle, excepté dans l'intervalle $[x'', c]$. Dans $[x''\,, c]$, on choisit $t = x'$ et $t' = c$ et on obtient

$$\left|S(P, f, \alpha) - S'(P, f, \alpha)\right| = \left|f(c) - f(x')\right|(\alpha(c) - \alpha(x'')) > \varepsilon^2.$$

Si $x_{k-1} < x' \leqslant x'' < c < x_k$, on affine la partition P_1 en ajoutant les points x' et c. En choisissant $t_i = t'_i$ dans chaque sous-intervalle, excepté dans l'intervalle $[x', c]$ dans lequel on choisit $t = x'$ et $t' = c$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|S(P, f, \alpha) - S'(P, f, \alpha)\right| &= \left|f(c) - f(x')\right|(\alpha(c) - \alpha(x')) \\ &\geqslant \left|f(c) - f(x')\right|(\alpha(c) - \alpha(x'')) > \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Des argument semblables s'appliquent au cas $x', x'' \in \,]c\,, x_k[$. Finalement, la démonstration se mène comme précédemment si le point commun de discontinuité est a ou b.

I.1.10. On montre d'abord qu'étant donné une partition P,

$$U(P,f,\alpha) = \sup S(P,f,\alpha) \quad \text{et} \quad L(P,f,\alpha) = \inf S(P,f,\alpha),$$

les bornes supérieures et inférieures étant prises sur tous les choix admissibles de t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. En effet, pour $\varepsilon > 0$, il existe t_i' et t_i'' dans l'intervalle $[x_{i-1}\,, x_i]$ tels que $f(t_i') < m_i + \frac{\varepsilon}{b-a}$ et $f(t_i'') > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}$. En conséquence, si $S'(P,f,\alpha)$ et $S''(P,f,\alpha)$ sont les sommes correspondantes, alors

$$L(P,f,\alpha) \leqslant S'(P,f,\alpha) < \varepsilon + L(P,f,\alpha)$$

et

$$U(P,f,\alpha) \geqslant S''(P,f,\alpha) > U(P,f,\alpha) - \varepsilon.$$

Maintenant, si $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(P,f,\alpha) = A$, alors, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\mu(P) < \delta$ implique $|S(P,f,\alpha) - A| < \varepsilon$ pour tous les choix admissibles de t_i. On déduit de ce qui précède que

$$S'(P,f,\alpha) - \varepsilon < L(P,f,\alpha) \leqslant U(P,f,\alpha) < S''(P,f,\alpha) + \varepsilon$$

et

$$A - 2\varepsilon < L(P,f,\alpha) \leqslant U(P,f,\alpha) < A + 2\varepsilon,$$

ce qui donne le résultat voulu.

On suppose maintenant que f est continue sur $[a\,, b]$; elle est donc uniformément continue sur cet intervalle. Ainsi, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)}$ si $|x - x'| < \delta$. En conséquence, pour chaque partition de pas inférieur à δ, on a $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon$ (ce qui prouve clairement que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$). Maintenant, puisque $S(P,f,\alpha)$ et $\int_a^b f\,d\alpha$ se trouvent entre $U(P,f,\alpha)$ et $L(P,f,\alpha)$, la propriété énoncée suit.

I.1.11. D'après le problème précédent, si $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(P,f,\alpha)$ existe, $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sur $[a\,, b]$. Pour démontrer l'autre implication, on suppose que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. Alors, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une partition P' telle que

$$U(P',f,\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) < L(P',f,\alpha) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Supposons que la partition P' soit un ensemble de n points. On pose

$$M = \sup\{|f(x)| : x \in [a\,, b]\}\,.$$

D'après la définition de la continuité uniforme de α, il existe $\delta > 0$ tel que $|\alpha(x) - \alpha(x')| < \frac{\varepsilon}{4Mn}$ pour $|x - x'| < \delta$. Si P est une partition de pas inférieur à δ, alors la partition $P \cup P'$ contient au plus $n-2$ points de plus que P et, en conséquence,

$$U(P, f, \alpha) - U(P \cup P', f, \alpha) < (n-2)\frac{\varepsilon}{4Mn} 2M < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque (1) reste vérifiée si on remplace P' par $P' \cup P$, il s'ensuit que

$$U(P, f, \alpha) - \varepsilon < \int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

De même,

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) < L(P, f, \alpha) + \varepsilon.$$

la propriété énoncée suit car $S(P, f, \alpha)$ se trouve entre $L(P, f, \alpha)$ et $U(P, f, \alpha)$.

I.1.12. Supposons que α soit continue à gauche en x^*. On a alors, pour une partition P telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} = x^* < x_i < \cdots < x_n = b$,

$$U(P, f, \alpha) = M_i(d-c) \quad \text{et} \quad L(P, f, \alpha) = m_i(d-c).$$

Puisque, dans le cas considéré, f est continue à droite en x^*, le résultat suit. On peut appliquer un raisonnement semblable à l'autre cas.

I.1.13. En prenant $c_0 = a$ et $c_{m+1} = b$, on obtient

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \sum_{k=0}^{m} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\, d\alpha(x).$$

De plus, puisque f est continue, on voit, d'après le résultat de **I.1.10**, que

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\, d\alpha(x) = f(c_k)\left(\alpha(c_k^+) - \alpha(c_k)\right) + f(c_{k+1})\left(\alpha(c_{k+1}) - \alpha(c_{k+1}^-)\right).$$

I.1.14.

(a) On a

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}} + \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2n}} + \cdots + \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2n}{2n}}\right)$$

Puisque $f(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$ est continue sur $[0,1]$, on obtient, à l'aide du résultat de **I.1.10**,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) = \int_0^1 \frac{2}{1+2x} = \ln 3.$$

(b) Puisque

$$n^2\left(\frac{1}{n^3+1^3}+\frac{1}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{1}{n^3+n^3}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1^3}{n^3}}+\frac{1}{1+\frac{2^3}{n^3}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n^3}{n^3}}\right),$$

on voit que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{1}{n^3+1^3}+\frac{1}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{1}{n^3+n^3}\right) &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx\\ &= \frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{9}\sqrt{3}\pi.\end{aligned}$$

(c) Comme en (a) et (b), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}\right)=\int_0^1 x^k\,dx=\frac{1}{k+1}\,.$$

(d) On note que

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}\\ &= \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n}\right)}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\ln a_n=\frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right).$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\ln a_n=\int_0^1\ln(1+x)\,dx=2\ln 2-1$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\frac{4}{e}\,.$$

(e) On sait que

$$x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x$$

pour $x>0$. Donc,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i^2+n^2}-\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n}{i^2+n^2}\right)^3<\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{n}{i^2+n^2}<\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i^2+n^2}.$$

Comme en (b), on peut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i^2+n^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

Clairement,

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{i^2+n^2}\right)^3 < \sum_{i=1}^{n} \frac{n^3}{n^6} = \frac{1}{n^2}\,.$$

On en déduit que la limite cherchée est égale à $\dfrac{\pi}{4}$.

(f) On a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2^{i/n}}{n+\frac{1}{i}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{i/n}}{1+\frac{1}{in}}\,.$$

De plus, l'inégalité $e^x > 1+x$ pour $x > 0$ implique

$$2^{i/n} > \frac{2^{i/n}}{1+\frac{1}{in}} = 2^{(i-1)/n} \frac{2^{1/n}}{1+\frac{1}{in}} > 2^{(i-1)/n} \frac{1+\frac{\ln 2}{n}}{1+\frac{1}{in}}\,.$$

Donc, pour $i \geqslant 2$,

$$2^{i/n} > \frac{2^{i/n}}{1+\frac{1}{in}} > 2^{(i-1)/n}.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\zeta_i \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, $i \geqslant 2$, tel que

$$\frac{2^{i/n}}{1+\frac{1}{in}} = 2^{\zeta_i}.$$

On en déduit que la limite est égale à

$$\int_0^1 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}\,.$$

(g) Si $a_n = \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \dots f\left(\frac{n}{n}\right)}$, alors

$$\ln a_n = \frac{1}{n}\left(\ln f\left(\frac{1}{n}\right) + \ln f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \ln f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \exp\left(\int_0^1 \ln f(x)\,dx\right).$$

I.1.15. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \in \left]0\,,\pi\right], \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $[0\,,\pi]$ et strictement positive sur $[0\,,\pi[$. Elle est donc Riemann-intégrable et $\int_0^\pi f(x)\,dx > 0$. De plus, puisque

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{1} + \frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}}{2} + \cdots + \frac{\sin\frac{n\pi}{n+1}}{n} \\ &= \frac{\pi}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}} + \frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}}{\frac{2\pi}{n+1}} + \cdots + \frac{\sin\frac{n\pi}{n+1}}{\frac{n\pi}{n+1}}\right), \end{aligned}$$

on voit que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^\pi f(x)\,dx > 0.$$

I.1.16. Observons d'abord que

$$\begin{aligned} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right) &= n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) - \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx\right) \\ &= n\sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right) dx \\ &= n\sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f'(\xi_i(x))\left(\frac{i}{n} - x\right) dx, \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du théorème des accroissement finis. Si on pose

$$m_i = \inf\left\{f'(x) : x \in \left[\tfrac{i-1}{n}\,,\tfrac{i}{n}\right]\right\}$$

et

$$M_i = \sup\left\{f'(x) : x \in \left[\tfrac{i-1}{n}\,,\tfrac{i}{n}\right]\right\},$$

on obtient

$$m_i \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(\frac{i}{n} - x\right) dx \leqslant \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f'(\xi_i(x))\left(\frac{i}{n} - x\right) dx \leqslant M_i \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(\frac{i}{n} - x\right) dx$$

et, en conséquence,

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n m_i \leqslant n\sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f'(\xi_i(x))\left(\frac{i}{n} - x\right) dx \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n M_i.$$

Enfin, puisque f' est continue sur $[0\,,1]$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

En appliquant alors le résultat obtenu à $f(x)=x^k$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

I.1.17. On écrit

$$\frac{1^k+3^k+\dots+(2n-1)^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1^k+3^k+\dots+(2n-1)^k}{n^k}\right) = \frac{2^k}{n}\left(\left(\frac{1}{2n}\right)^k + \left(\frac{3}{2n}\right)^k + \dots + \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^k\right)$$

et on note que

$$\frac{2i-1}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{i-1}{n} + \frac{i}{n}\right)$$

est le milieu de $\left[\frac{i-1}{n}\,,\frac{i}{n}\right]$, $i=1,2,\dots,n$. La dernière somme est donc égale à un $S(P,f)$ pour $f(x)=2^kx^k$ et la limite est égale à $\frac{2^k}{k+1}$.

I.1.18. D'après la formule de Taylor, on a

$$f(x) - f\left(\frac{2i-1}{2n}\right) = f'\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\left(x-\frac{2i-1}{2n}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi_i(x))\left(x-\frac{2i-1}{2n}\right)^2.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}
&n^2\left(\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right)\\
&= n^2\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\left(f(x) - f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right)dx\\
&= n^2\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f'\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\left(x-\frac{2i-1}{2n}\right)dx\\
&\quad + \frac{n^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f''(\xi_i(x))\left(x-\frac{2i-1}{2n}\right)^2 dx.
\end{aligned}$$

On remarque alors que chacune des intégrales

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f'\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\left(x-\frac{2i-1}{2n}\right)dx$$

s'annule et

$$\frac{1}{24n}\sum_{i=1}^{n} m_i \leqslant \frac{n^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f''(\xi_i(x))\left(x-\frac{2i-1}{2n}\right)^2 dx \leqslant \frac{1}{24n}\sum_{i=1}^{n} M_i,$$

où m_i et M_i sont les bornes inférieures et supérieures de f'' dans le i-ième intervalle. Puisque f'' est Riemann-intégrable sur $[0\,,1]$, le résultat cherché suit.

I.1.19. Appliquez les résultats prouvés en **I.1.16** et **I.1.18** à $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $x\in[0\,,1]$.

I.1.20. Il suffit de prouver que changer f en un point $x'\in[a\,,b]$ ne change pas l'intégrabilité et la valeur de l'intégrale. Notons $\tilde{f}$ la fonction modifiée et m et M respectivement son minimum et son maximum sur $[a\,,b]$. Supposons, par exemple, que $x'\in\,]a\,,b[$. Puisque $\tilde{f}=f$ est intégrable sur $[a\,,x'-\varepsilon]$ et sur $[x'+\varepsilon\,,b]$, étant donné $\varepsilon>0$, il existe des partitions P_1 de $[a\,,x'-\varepsilon]$ et P_2 de $[x'+\varepsilon\,,b]$ telles que

$$U(P_i,\tilde{f})-L(P_i,\tilde{f})<\varepsilon,\quad i=1,2.$$

Donc, si $P=P_1\cup P_2$, alors

$$U(P,\tilde{f})-L(P,\tilde{f})<2\varepsilon+2(M-m)\varepsilon,$$

ce qui prouve que $\tilde{f}$ est Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$. De plus,

$$\left|\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|=\left|\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}\Big(\tilde{f}(x)-f(x)\Big)\,dx\right|\leqslant 2M^*\varepsilon,$$

où M^* est le sup de $\left|\tilde{f}-f\right|$ sur $[a\,,b]$.

I.1.21. Supposons, par exemple, que f est croissante sur $[a\,,b]$. D'après le **théorème 1**, il suffit de prouver que, étant donné $\varepsilon>0$, il existe une partition P telle que $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\varepsilon$. Considérons la partition $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ avec

$$x_i-x_{i-1}=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}\,.$$

On a alors

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))$$
$$= \frac{(\alpha(b) - \alpha(a))(f(b) - f(a))}{n} < \varepsilon$$

pour n suffisamment grand.

Le corollaire suivant vaut la peine d'être noté ici :

Corollaire. *Toute fonction monotone sur $[a\,, b]$ est Riemann-intégrable sur cet intervalle.*

I.1.22. On suppose que $c \in \,]a\,, b[$, $\alpha(c^-) \neq \alpha(c)$, $\alpha(c) \neq \alpha(c^+)$ et on se donne $\varepsilon > 0$. Puisque $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, il existe une partition P' telle que

$$U(P', f, \alpha) - L(P', f, \alpha) < \varepsilon. \tag{1}$$

Soit $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = c < x_{k+1} < \cdots < x_n = b$ l'affinement de P' obtenu en ajoutant le point c. L'inégalité (1) est encore vérifiée si on remplace P' par P. En conséquence,

$$(M_{k-1} - m_{k-1})(\alpha(c) - \alpha(x_{k-1})) < \varepsilon \quad \text{et} \quad (M_k - m_k)(\alpha(x_k) - \alpha(c)) < \varepsilon.$$

Puisque α est monotone,

$$(M_{k-1} - m_{k-1})(\alpha(c) - \alpha(c^-)) \leqslant (M_{k-1} - m_{k-1})(\alpha(c) - \alpha(x_{k-1})) < \varepsilon.$$

Donc, pour $x \in [x_{k-1}\,, c]$,

$$|f(x) - f(c)| \leqslant M_{k-1} - m_{k-1} < \frac{\varepsilon}{\alpha(c) - \alpha(c^-)}\,.$$

Ceci prouve que $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f(c)$. On montre de la même façon que $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c)$. Un raisonnement semblable s'applique aussi dans les cas $c = a$ ou $c = b$.

I.1.23. Si les points où α' n'existe pas sont inclus dans une partition $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a\,, b]$, on a alors, d'après le théorème des accroissements finis,

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\alpha'(\tau_k)(x_k - x_{k-1}),$$

où $\tau_k \in \,]x_{k-1}\,, x_k[$. Vu le résultat de **I.1.20**, on peut prolonger arbitrairement la fonction α' à tout l'intervalle $[a\,, b]$. Puisque $f\alpha'$ et α' sont Riemann-intégrables, d'après **I.1.11**, on sait que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ tels que

$$\left|S(P, f\alpha') - \int_a^b f\alpha'\, dx\right| < \varepsilon$$

si $\mu(P) < \delta_1$ et

$$\left|S(P, \alpha') - \int_a^b \alpha'\, dx\right| < \varepsilon$$

si $\mu(P) < \delta_2$. Puisque l'on peut choisir arbitrairement les points intermédiaires t_k dans $[x_{k-1}\,, x_k]$, on voit que

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\alpha'(t_k) - \alpha'(\tau_k)\right| (x_k - x_{k-1}) < 2\varepsilon$$

si $\mu(P) < \delta_2$ et $t_k, \tau_k \in [x_{k-1}\,, x_k]$. En conséquence, si P est une partition de pas inférieur à $\min\{\delta_1, \delta_2\}$ contenant les points où α' n'existe pas, alors

$$\begin{aligned}\left|S(P, f, \alpha) - \int_a^b f\alpha'\, dx\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\alpha'(\tau_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f\alpha'\, dx\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\alpha'(t_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f\alpha'\, dx\right| \\ &\quad + \left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(\alpha'(t_k) - \alpha'(\tau_k))(x_k - x_{k-1})\right| \\ &\leqslant \varepsilon + 2M\varepsilon,\end{aligned}$$

où M est un majorant de $|f|$ sur $[a\,, b]$. Puisque α est continue, on peut montrer que si P_1 est une partition (de pas suffisamment petit) ne contenant pas de points où α' n'existe pas, alors $|S(P, f, \alpha) - S(P_1, f, \alpha)| < \varepsilon$.

I.1.24. On pose

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Pour $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m < c_{m+1} = b$, on définit

$$\begin{aligned}\alpha_1(x) = &\sum_{k=0}^{m} \left(\alpha(c_k^+) - \alpha(c_k)\right) \rho(x - c_k) \\ &- \sum_{k=1}^{m+1} \left(\alpha(c_k) - \alpha(c_k^-)\right) \rho(c_k - x).\end{aligned}$$

Alors, $\alpha = (\alpha - \alpha_1) + \alpha_1$ et $\alpha - \alpha_1 = \alpha_2$ est continue sur $[a\,,b]$. De plus, excepté pour un nombre fini de points, $\alpha_2' = \alpha'$. On obtient donc, d'après **I.1.20**,

$$\int_a^b f(x)\alpha_2'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx.$$

En conséquence, en utilisant les résultats du problème précédent et de **I.1.13**, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) &= \int_a^b f(x)\,d\alpha_1(x) + \int_a^b f(x)\,d\alpha_2(x)\\ &= \int_a^b f(x)\,d\alpha_1(x) + \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx\\ &= f(a)\left(\alpha(a^+) - \alpha(a)\right) + \sum_{k=1}^m f(c_k)\left(\alpha(c_k^+) - \alpha(c_k^-)\right)\\ &\quad + f(b)\left(\alpha(b) - \alpha(b^-)\right) + \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx.\end{aligned}$$

I.1.25. On obtient, à l'aide du résultat du problème précédent,

$$\int_{-2}^2 x^2\,d\alpha(x) = \int_{-2}^{-1} x^2\,dx + \int_0^2 2x^3\,dx + (-1)^2 \times 1 + 0 \times 1 = \frac{34}{3}\,.$$

I.1.26. Clairement,

$$m(\alpha(b) - \alpha(a)) \leqslant \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \leqslant M(\alpha(b) - \alpha(a)),$$

où $m = \inf\{f(x) : x \in [a\,,b]\}$ et $M = \sup\{f(x) : x \in [a\,,b]\}$. On a donc

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)}{\alpha(b) - \alpha(a)} \leqslant M.$$

Puisque f est continue sur $[a\,,b]$, les valeurs m et M sont atteintes dans $[a\,,b]$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(c)(\alpha(b) - \alpha(a))$$

pour un certain $c \in [a\,,b]$.

I.1.27. Si f est constante sur $[a\,,b]$, la proposition est évidente. Si f n'est pas constante, on pose alors $m = \inf\{f(x) : x \in [a\,,b]\} = f(x_1)$ et $M = \sup\{f(x) : x \in [a\,,b]\} = f(x_2)$. On a $m < M$ et la continuité de f implique l'existence de sous-intervalles $[c_1\,,d_1]$ et $[c_2\,,d_2]$ tels que $f(x) > m$ pour

$x \in [c_1\,, d_1]$ et $f(x) < M$ pour $x \in [c_2\,, d_2]$. Puisque α est strictement croissante, on voit que

$$m < \frac{\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)}{\alpha(b) - \alpha(a)} < M.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c dans l'intervalle ouvert d'extrémités x_1 et x_2 pour lequel l'égalité cherchée est vérifiée.

On remarque que l'hypothèse de stricte monotonie de α est essentielle. En effet, si

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = a, \\ 1 & \text{si } x \in]a\,, b] \end{cases}$$

et si f est continue sur $[a\,, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(a).$$

I.1.28.

(a) Il est clair (voir, par exemple, **I.1.23**) que

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)d(\ln x).$$

On a alors, en utilisant la première formule de la moyenne (voir **I.1.26**),

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)d(\ln x) = f(c(\varepsilon))(\ln(b\varepsilon) - \ln(a\varepsilon)) = f(c(\varepsilon))\ln\frac{b}{a}\,.$$

La limite est donc égale à $f(0)\ln\frac{b}{a}$.

(b) Comme en (a), on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1+c_n)(n+1)} = 0.$$

I.1.29. D'après la première formule de la moyenne (voir **I.1.26**),

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{\alpha(x+h) - \alpha(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(c(h))(\alpha(x+h) - \alpha(x))}{\alpha(x+h) - \alpha(x)} = f(x),$$

la dernière égalité découlant de la continuité de f.

I.1.30. On peut faire ici une analyse semblable à celle utilisée dans la démonstration de la première formule de la moyenne (voir **I.1.26**). On remarque d'abord que si $c \in \left]a\,,b\right[$ est un point où f atteint un extremum local, alors $\frac{df}{d\alpha}(c) = 0$. En effet, si par exemple f atteint un maximum local en c, on a alors, pour h suffisamment petit, $\frac{f(c+h)-f(c)}{\alpha(c+h)-\alpha(c)} \leqslant 0$ si $h > 0$ et $\frac{f(c+h)-f(c)}{\alpha(c+h)-\alpha(c)} \geqslant 0$ si $h < 0$.

Fixons x et h et supposons, par exemple, que h est strictement positif. On pose

$$g(t) = (f(x+h) - f(x))\,\alpha(t) - (\alpha(x+h) - \alpha(x))\,f(t).$$

La fonction g est continue sur $[a\,,b]$ et $g(x) = g(x+h)$. Si g est constante sur $[x\,,x+h]$, alors $\frac{dg}{d\alpha}(t) = 0$ pour tout $t \in \left]x\,,x+h\right[$. Si, par exemple, $g(t) > g(x)$ pour un certain $t \in \left]x\,,x+h\right[$, alors g atteint son maximum en un certain c et $c \in \left]x\,,x+h\right[$. Donc, $\frac{dg}{d\alpha}(c) = 0$. D'autre part,

$$\frac{dg}{d\alpha}(c) = (f(x+h) - f(x)) - (\alpha(x+h) - \alpha(x))\,\frac{df}{d\alpha}(c)\,.$$

On en déduit que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{\alpha(x+h) - \alpha(x)} = \frac{df}{d\alpha}(c)$$

pour un certain c situé entre x et $x+h$.

Donc, pour toute partition $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a\,,b]$, on a

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})}\,(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{df}{d\alpha}(t_k)\,(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) \end{aligned}$$

pour certains $t_k \in \left]x_{k-1}\,,x_k\right[$. On a d'autre part, d'après la première formule de la moyenne,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{df}{d\alpha}(x)\,d\alpha(x) &= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{df}{d\alpha}(x)\,d\alpha(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{df}{d\alpha}(\tau_k)\,(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) \end{aligned}$$

pour certains $\tau_k \in [x_{k-1}\,,x_k]$. La continuité uniforme de $\frac{df}{d\alpha}$ implique alors que, étant donné $\varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{df}{d\alpha}(\tau_k) - \frac{df}{d\alpha}(t_k)\right| < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}$$

si le pas de la partition est suffisamment petit. Il s'ensuit que

$$\left|\int_a^b \frac{df}{d\alpha}(x)\,d\alpha(x) - (f(b)-f(a))\right| < \varepsilon.$$

I.2. Fonctions à variation bornée

I.2.1. Il est clair que f est dérivable sur $[0\,,1]$. Pour prouver qu'elle n'est pas à variation bornée, on considère la partition

$$0 < \sqrt{\frac{1}{n}} < \sqrt{\frac{1}{n-\frac{1}{2}}} < \sqrt{\frac{1}{n-1}} < \cdots < \sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt{\frac{1}{2-\frac{1}{2}}} < 1.$$

La fonction étant monotone sur chacun des intervalles $\left[\frac{1}{\sqrt{i}}\,,\frac{1}{\sqrt{i-1/2}}\right]$ pour $i = 2, 3, \ldots, n$ et $\left[\frac{1}{\sqrt{i+1/2}}\,,\frac{1}{\sqrt{i}}\right]$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, on voit que

$$V(f;0,1) \geqslant 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{2}{i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

I.2.2. D'après le théorème des accroissements finis, pour toute partition $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left|f'(\xi_i)\right| (x_i - x_{i-1}) \leqslant M(b-a)$$

où $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

I.2.3. Puisque f' est bornée sur $[0,1]$, d'après le résultat du problème précédent, f est à variation bornée sur $[0\,,1]$.

I.2.4. Clairement, si f est croissante sur $[a\,,b]$, alors

$$V(f;a,b) = f(b) - f(a).$$

Pour prouver l'implication réciproque, on suppose que $V(f;a,b) = f(b) - f(a)$ et on prend $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b$. On a alors

$$f(b) - f(a) \leqslant |f(x_i) - f(a)| + |f(b) - f(x_i)| \leqslant V(f;a,b) = f(b) - f(a).$$

Donc, $f(a) \leqslant f(x_i) \leqslant f(b)$, $i = 1, 2$. En conséquence,

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &\leqslant f(x_1) - f(a) + |f(x_2) - f(x_1)| + f(b) - f(x_2) \\ &\leqslant V(f; a, b) = f(b) - f(a), \end{aligned}$$

ce qui donne $f(x_2) - f(x_1) = |f(x_2) - f(x_1)| \geqslant 0$.

I.2.5. On prouve d'abord que $V(f; 0, 1) = +\infty$ si $\alpha \leqslant \beta$. En effet, en prenant

$$0 < \frac{1}{n^{1/\beta}} < \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^{1/\beta}} < \frac{1}{(n-1)^{1/\beta}} < \cdots < \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^{1/\beta}} < 1,$$

on voit que

$$V(f; 0, 1) > 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{2}{i^{\alpha/\beta}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

Notre tâche est maintenant de démontrer que $V(f; 0, 1) < +\infty$ si $\alpha > \beta$. Soit $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une partition de $[0\,, 1]$. On prend n suffisamment grand pour que $n^{-1/\beta} < x_1$ et on ajoute à la partition P les points

$$\frac{1}{n^{1/\beta}}, \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^{1/\beta}}, \frac{1}{(n-1)^{1/\beta}}, \ldots, \frac{1}{2^{1/\beta}}, \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^{1/\beta}}.$$

On remarque que f est monotone sur chacun des intervalles $\left[i^{-1/\beta}, \left(i - \frac{1}{2}\right)^{-1/\beta}\right]$ pour $i = 2, 3, \ldots, n$ et $\left[\left(i + \frac{1}{2}\right)^{-1/\beta}, i^{-1/\beta}\right]$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Donc,

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i^{\alpha/\beta}} \leqslant 2 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^{\alpha/\beta}} < +\infty.$$

I.2.6. On déduit immédiatement de la définition de $V(f; a, b)$ que, pour $x \in [a\,, b]$,

$$|f(x)| \leqslant |f(a)| + V(f; a, b).$$

I.2.7. On déduit du problème précédent que les fonctions f et g sont bornées sur $[a\,, b]$, autrement dit, qu'il existe des constantes strictement positives C et D telles que $|f(x)| < C$ et $|g(x)| < D$ sur $[a\,, b]$. Si $h = fg$, alors pour toute partition de $[a\,, b]$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |h(x_i) - h(x_{i-1})| &\leqslant C \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| + D \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\leqslant CV(g; a, b) + DV(f; a, b). \end{aligned}$$

Pour prouver la seconde partie de l'énoncé, il suffit de montrer que si f est à variation bornée sur $[a\,,b]$ et $\inf\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| = c > 0$, alors $\frac{1}{f}$ est aussi à variation bornée sur $[a\,,b]$. Pour toute partition de $[a\,,b]$, on a

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{f(x_i)}-\frac{1}{f(x_{i-1})}\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{f(x_i)f(x_{i-1})}\right| \leqslant \frac{1}{c^2}V(f;a,b).$$

I.2.8. Non. Considérez les fonctions

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos^2\frac{\pi}{x} & \text{si } x \in \,]0,1], \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et $g(y) = \sqrt{y}$, $y \in [0\,,1]$. Toutes deux sont à variation bornée sur $[0\,,1]$ (la dérivée f' est bornée sur $[0\,,1]$ et g est croissante) et la composée $h(x) = g(f(x))$ est donnée par

$$h(x) = \begin{cases} x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| & \text{si } x \in \,]0,1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour voir que h n'est pas à variation bornée, on considère la partition

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n-\frac{1}{2}} < \frac{1}{n-1} < \cdots < \frac{1}{2} < \frac{1}{2-\frac{1}{2}} < 1$$

et on remarque que

$$V(f;0,1) \geqslant \frac{2}{n} + \frac{2}{n-1} + \cdots + \frac{2}{2} + 1.$$

I.2.9. Soit $g\colon [a\,,b] \longrightarrow [c\,,d]$ et $f\colon [c\,,d] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f vérifie une *condition de Lipschitz*, il existe alors $L \geq 0$ (appelé *constante de Lipschitz*) tel que $|f(x)-f(y)| \leqslant L\,|x-y|$ pour tout $x, y \in [c\,,d]$. Donc, pour toute partition de $[a\,,b]$,

$$\sum_{i=1}^{n}|f\left(g(x_i)\right) - f\left(g(x_{i-1})\right)| \leqslant L\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)-g(x_{i-1})| \leqslant LV(g;a,b).$$

I.2.10. Clairement, si f est à variation bornée sur $[a\,,b]$, il en est de même de $|f|$ et, d'après **I.2.6**, f est bornée. Puisque $x \mapsto x^p$ vérifie une condition de Lipschitz sur tout intervalle borné dans le domaine, la proposition découle du résultat du problème précédent.

I.2.11. On observe d'abord que si $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, alors $|f(x_i) - f(x_{i-1})| = ||f(x_i)| - |f(x_{i-1})||$ dans le cas où $f(x_i)$ et $f(x_{i-1})$ sont de même signe. Si ce n'est pas le cas, la continuité de f implique qu'il existe $\xi_i \in \left]x_{i-1}\,, x_i\right[$ tel que $f(\xi_i) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}|f(x_i) - f(x_{i-1})| &= |f(x_i) - f(\xi_i) + f(\xi_i) - f(x_{i-1})|\\ &\leqslant |f(x_i) - f(\xi_i)| + |f(\xi_i) - f(x_{i-1})|\\ &= ||f(x_i)| - |f(\xi_i)|| + ||f(\xi_i)| - |f(x_{i-1})||\,.\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant 2V(|f|\,; a, b).$$

L'exemple suivant montre que la continuité est une hypothèse essentielle :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a\,, b] \cap \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{si } x \in [a\,, b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

I.2.12. Puisque

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{|f(x) - g(x)| + f(x) + g(x)}{2},$$

le résultat découle du fait que la combinaison linéaire de deux fonctions à variation bornée est aussi à variation bornée et du fait que la valeur absolue d'une fonction à variation bornée est à variation bornée (voir **I.2.10**).

I.2.13.

(a) Puisque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-\alpha}}{-\ln x} = +\infty$$

pour $\alpha > 0$, on voit que f ne vérifie pas de condition de Hölder. Clairement, f est croissante sur $\left[0\,, \frac{1}{2}\right]$ et $V\left(f; 0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$.

(b) On prouve que f vérifie une condition de Hölder pour tout $0 < \alpha < 1$. Pour cela, on suppose d'abord que $x, x' \in [x_{n+1}\,, x_n]$ $(x \neq x')$ et on pose $g(x) = 2\left(\ln^2 n\right)(x - x_{n+1})$ sur $[x_{n+1}\,, x_n]$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{|f(x) - f(x')|}{|x - x'|^\alpha} &\leqslant \frac{|g(x) - g(x')|}{|x - x'|^\alpha} = \frac{2\left(\ln^2 n\right)|x - x'|}{|x - x'|^\alpha}\\ &\leqslant \frac{2\ln^2 n}{n^{1-\alpha}\ln^{2(1-\alpha)} n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe un $C > 0$ tel que

$$\frac{|f(x) - f(x')|}{|x - x'|^{\alpha}} \leqslant C.$$

On suppose maintenant que $x < x'$, $x \in [x_{n+1}\,, x_n]$ et $x' \in [x_{k+1}\,, x_k]$ où $n > k$. On a alors

$$\begin{aligned}\left|f(x) - f(x')\right| &\leqslant |f(x) - f(x_n)| + \left|f(x_{k+1}) - f(x')\right| \\ &\leqslant C\,|x - x_n|^{\alpha} + C\left|x_{k+1} - x'\right|^{\alpha} \\ &\leqslant 2C \max\left\{|x - x_n|^{\alpha}, \left|x_{k+1} - x'\right|^{\alpha}\right\} \\ &\leqslant 2C\left|x - x'\right|^{\alpha}.\end{aligned}$$

Pour voir que f n'est pas à variation bornée, on prend la partition

$$0 < x_n < \frac{x_n + x_{n-1}}{2} < x_{n-1} < \cdots < x_3 < \frac{x_3 + x_2}{2} < x_2$$

et on remarque que

$$V(f; 0, x_2) \geqslant \frac{2}{n} + \frac{2}{n-1} + \cdots + \frac{2}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

I.2.14. Puisque $V(f; a, +\infty) = \lim\limits_{b\to+\infty} V(f; a, b) < +\infty$, le théorème de Cauchy (voir, par exemple, **I.1.37 (vol. II)**) implique que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $M > a$ tel que

$$V(f; a, x) - V(f; a, x') = V(f; x, x') < \varepsilon$$

pour tous $x > x' > M$. Donc,

$$\left|f(x) - f(x')\right| \leqslant V(f; x, x') < \varepsilon,$$

ce qui, combiné avec le théorème de Cauchy, montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est finie.

Pour voir que l'implication réciproque est fausse, on considère la fonction $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$, $x \geqslant 1$. Clairement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et

$$V(f; 1, n\pi) \geqslant \sin 1 + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

I.2.15. Soit $\varepsilon > 0$. On déduit de la définition de la variation totale $V(f; a, b)$ qu'il existe une partition, notons-la $P^* = \{x_0^*, x_1^*, \ldots, x_n^*\}$, telle que

$$V(f, P^*) > V(f; a, b) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque f est uniformément continue sur $[a\,,b]$, on choisit $\delta > 0$ assez petit pour que $|x - x'| < \delta$ et on a alors

$$\left| f(x) - f(x') \right| < \frac{\varepsilon}{4m}\,.$$

À partir d'une partition P de pas inférieur à δ, on forme une partition P_1 en adjoignant tous les points de P^*. On a

$$V(f, P) \leqslant V(f, P_1) \quad \text{et} \quad V(f, P^*) \leqslant V(f, P_1).$$

De plus,

$$V(f, P_1) \leqslant V(f, P) + \frac{\varepsilon}{2}$$

car P_1 est obtenue à partir de P en ajoutant au plus m nouveaux points et $V(f, P)$ augmente donc au plus de $2m\frac{\varepsilon}{4m}$. En conséquence,

$$V(f, P) \geqslant V(f, P_1) - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant V(f, P^*) - \frac{\varepsilon}{2} > V(f; a, b) - \varepsilon.$$

I.2.16. Puisque f est continue, il existe des points de $[x_{i-1}\,, x_i]$ où f prend les valeurs M_i et m_i. Il est aussi clair que $|f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant M_i - m_i$. Donc, pour toute partition P,

$$V(f; a, b) \geqslant W(f, P) \geqslant V(f, P).$$

Le problème précédent implique que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $V(f; a, b) - V(f, P) < \varepsilon$ si $\mu(P) < \delta$. On en déduit que

$$0 \leqslant V(f; a, b) - W(f, P) \leqslant V(f; a, b) - V(f, P) < \varepsilon.$$

I.2.17. Il est clair que si $f = \alpha g_1 + \beta g_2$ où g_1, g_2 sont à variation bornée, alors $V(f; a, b) \leqslant |\alpha|\, V(g_1; a, b) + |\beta|\, V(g_2; a, b)$. Donc, pour $a \leqslant x < y \leqslant b$,

$$\begin{aligned} V(f; x, y) &\leqslant V(p_1; x, y) + V(q_1; x, y) \\ &= p_1(y) - p_1(x) + q_1(y) - q_1(x). \end{aligned}$$

Par définition,

$$\begin{aligned} p(y) - p(x) &= \frac{1}{2}\,(v_f(y) + f(y) - v_f(x) - f(x)) \\ &= \frac{1}{2}\,(V(f; x, y) + f(y) - f(x))\,. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} p(y) - p(x) &\leqslant \frac{1}{2}\left(p_1(y) - p_1(x) + q_1(y) - q_1(x) + p_1(y) - q_1(y) - p_1(x) + q_1(x)\right) \\ &= p_1(y) - p_1(x). \end{aligned}$$

Ceci implique immédiatement $V(p; a, b) \leqslant V(p_1; a, b)$. On tire une conclusion analogue pour q et q_1.

I.2.18. Puisque f est à variation bornée, elle est majorée, par exemple par $M > 0$. Soit $F(x) = \ln x$, $x \in [m\,,M]$. F vérifie une condition de Lipschitz car F' est bornée sur $[m\,,M]$. Il découle du résultat de **I.2.9** que $F \circ f = \ln f$ est à variation bornée sur $[a\,,b]$. D'après le **théorème 1**,

$$\ln f = p - q,$$

où p et q sont croissantes sur $[a\,,b]$. On peut donc prendre $g = e^p$ et $h = e^q$.

I.2.19.

(a) On a

$$v_f(x) = \begin{cases} f(x) + 2 & \text{si } x \in [-1\,,0], \\ 2 - f(x) & \text{si } x \in \left[0\,, \frac{\sqrt{3}}{3}\right], \\ f(x) + 2 + \frac{4\sqrt{3}}{9} & \text{si } x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}\,, 1\right]. \end{cases}$$

Donc,

$$p(x) = \begin{cases} f(x) + 2 & \text{si } x \in [-1\,,0], \\ 2 & \text{si } x \in \left[0\,, \frac{\sqrt{3}}{3}\right], \\ f(x) + 2 + \frac{2\sqrt{3}}{9} & \text{si } x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}\,, 1\right] \end{cases}$$

et

$$q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1\,,0], \\ -f(x) & \text{si } x \in \left[0\,, \frac{\sqrt{3}}{3}\right], \\ \frac{2\sqrt{3}}{9} & \text{si } x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}\,, 1\right]. \end{cases}$$

(b) On vérifie facilement que

$$v_f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{si } x \in [0\,,\pi], \\ \cos x + 3 & \text{si } x \in [\pi\,,2\pi], \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0\,,\pi], \\ \cos x + 1 & \text{si } x \in [\pi\,,2\pi], \end{cases}$$

et

$$q(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{si } x \in [0\,,\pi], \\ 2 & \text{si } x \in [\pi\,,2\pi]. \end{cases}$$

(c) On a

$$v_f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0\,,1[, \\ 1+x & \text{si } x \in [1\,,2[, \\ 2+x & \text{si } x \in [2\,,3[, \\ 6 & \text{si } x = 3, \end{cases}$$

et

$$p(x) = x \quad \text{et} \quad q(x) = [x].$$

I.2.20. Soit $x_0 \in [a\,,b[$ et $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+) = f(x_0)$. Il suffit de prouver que $\lim\limits_{x\to x_0^+} V(f;x_0,x) = 0$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\zeta > x_0$ tel que $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $x_0 < x < \zeta$. La définition de la variation totale implique qu'il existe une partition $x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ telle que

$$V(f;x_0,b) \leqslant |f(x_1) - f(x_0)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})| + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Donc, pour $x_0 < x < \min\{x_1, \zeta\}$, on a

$$\begin{aligned} V(f;x_0,b) &\leqslant |f(x) - f(x_0)| + |f(x_1) - f(x)| \\ &\qquad + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon + V(f;x,b), \end{aligned}$$

ce qui implique $\lim\limits_{x\to x_0^+} V(f;x_0,x) = 0$. La seconde partie de l'énoncé se démontre de façon semblable.

On remarquera ici qu'une fonction f à variation bornée est continue en x_0 si et seulement si v_f est continue en x_0. Par rapport à ce que nous avons prouvé, il suffit de montrer que si v_f est continue en x_0, il en est de même de f. Ceci se déduit immédiatement de $|f(x) - f(x_0)| \leqslant |v_f(x) - v_f(x_0)|$.

I.2.21. D'après le **théorème 1**, la fonction f peut s'écrire comme la différence de deux fonctions croissantes, soit $f = p - q$. Puisque l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante est au plus dénombrable (voir, par exemple, **I.2.29 (vol. II)**), il en est de même pour une fonction à variation bornée. On remarque aussi qu'en tout point x_n de discontinuité de f, les limites à gauche et à droite existent (voir, par exemple, **I.1.35 (vol. II)**) et la fonction s est donc bien définie. Le résultat de **I.2.20** implique qu'en tout point où f est continue, les fonctions p et q le sont aussi. En conséquence, tous les points de discontinuité de p et q sont contenus dans $\{x_n\}$. Il suffit de montrer que les fonctions $g_p = p - s_p$ et $g_q = q - s_q$, où s_p et s_q sont respectivement les fonctions de saut de p et q sont continues. Pour $a \leqslant x < b$, on a

$$s_p\left(x^+\right) = p\left(a^+\right) - p(a) + \sum_{x_n \leqslant x} \left(p\left(x_n^+\right) - p\left(x_n^-\right)\right)$$

car $\lim\limits_{t \to x^+} p\left(x^-\right) = p\left(x^+\right)$ (voir, par exemple, **I.1.36(a) (vol. II)**). Il s'ensuit que $p\left(x^+\right) - p(x) = s_p(x^+) - s_p(x)$, prouvant ainsi que $g_p(x^+) = g_p(x)$. De plus, pour $a < x \leqslant b$,

$$s_p\left(x^-\right) = p\left(a^+\right) - p(a) + \sum_{x_n < x} \left(p\left(x_n^+\right) - p\left(x_n^-\right)\right),$$

ce qui donne $g_p(x^-) = g_p(x)$.

On a prouvé de cette façon que toute fonction à variation bornée peut s'écrire comme la somme de sa fonction de saut et d'une fonction continue.

I.2.22. D'après le **théorème 1**, $f(x) - f(a) = p(x) - q(x)$, où p et q sont les fonctions de variation positive et négative de f. Les fonctions p et q sont Riemann-intégrables (voir **I.1.21**) sur $[a\,,b]$ et

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(a)(b-a) + \int_a^b p(x)\,dx - \int_a^b q(x)\,dx.$$

Pour prouver la proposition, il suffit de démontrer que si p est croissante sur $[a\,,b]$, il en est de même de g définie par

$$g(a) = 0 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x p(t)\,dt, \quad x \in \left]a\,,b\right].$$

En effet, si $a < x < y \leqslant b$, alors

$$\begin{aligned}
g(y) - g(x) &= \frac{1}{y-a}\int_a^y p(t)\,dt - \frac{1}{x-a}\int_a^x p(t)\,dt \\
&= \frac{x-y}{(x-a)(y-a)}\int_a^x p(t)\,dt + \frac{1}{y-a}\int_x^y p(t)\,dt \\
&\geqslant \frac{x-y}{(x-a)(y-a)}\int_a^x p(t)\,dt + \frac{1}{y-a}\int_x^y p(x)\,dt \\
&= \frac{x-y}{(x-a)(y-a)}\int_a^x (p(x) - p(t))\,dt \geqslant 0.
\end{aligned}$$

I.2.23. Supposons que $|f(x') - f(x'')| \leqslant L\,|x' - x''|$ pour $x', x'' \in [a\,,b]$. Si $x' = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x''$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} L(x_i - x_{i-1}) = L(x'' - x').$$

En prenant la borne supérieure sur l'ensemble des partitions de $[x'\,,x'']$, on obtient

$$v_f(x'') - v_f(x') = V(f; x', x'') \leqslant L(x'' - x').$$

I.2.24. D'après le **théorème 1**, $f = p - q$, où p et q sont monotones sur $[a\,,b]$. Les limites à gauche et à droite de f existent donc en tout point de $[a\,,b]$ (voir, par exemple, **I.1.35 (vol. II)**). Supposons, contrairement à ce qu'affirme l'énoncé, que x_0 est un point de discontinuité de f. Si $f(x_0^+) - f(x_0^-) = d > 0$, alors par définition d'une limite à gauche ou à droite, il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(x) < f(x_0^-) + \frac{d}{3} \quad \text{pour} \quad x \in \,]x_0 - \delta\,, x_0[$$

et

$$f(x) > f(x_0^+) - \frac{d}{3} \quad \text{pour} \quad x \in \,]x_0\,, x_0 + \delta[\,.$$

Si $y \in \left[f(x_0^-) + \frac{d}{3}\,, f(x_0^+) - \frac{d}{3}\right] \setminus \{f(x_0)\} \subset [f(x_1)\,, f(x_2)] \setminus \{f(x_0)\}$, avec $x_1 \in \,]x_0 - \delta\,, x_0[$ et $x_2 \in \,]x_0\,, x_0 + \delta[$, il n'existe alors pas de $x \in \,]x_1\,, x_2[$ tel que $f(x) = y$, contradiction. Un raisonnement semblable s'applique si $f(x_0^+) = f(x_0^-) \neq f(x_0)$.

La dérivée f' vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires (voir, par exemple, **II.2.31 (vol. II)**), la seconde partie de l'énoncé suit immédiatement.

I.2.25. Pour $x \in [a\,,b]$, soit $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une partition de $[a\,,x]$. Puisque f' est continue sur $[a\,,b]$, les résultats de **I.2.15** et **I.1.26** impliquent

$$\begin{aligned} v_f(x) &= \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &= \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(t)\,dt \right| \\ &= \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left|f'(t_k)\right| (x_k - x_{k-1}) = \int_a^x \left|f'(t)\right| dt. \end{aligned}$$

I.2.26. Clairement, il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour $x \in [a\,, b]$. De plus, pour $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, en utilisant la première formule de la moyenne (voir **I.1.26**), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_a^{x_i} f(t)\, d\alpha(t) - \int_a^{x_{i-1}} f(t)\, d\alpha(t) \right| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\, d\alpha(t) \right| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)\,(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))| \\ &\leqslant M(\alpha(b) - \alpha(a)).\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $V(f; a, b) \leqslant M(\alpha(b) - \alpha(a))$.

I.2.27. Si $\varliminf\limits_{n\to+\infty} V(f_n; a, b) = +\infty$, l'inégalité est évidente. On suppose donc que $\varliminf\limits_{n\to+\infty} V(f_n; a, b) = l < +\infty$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors une sous-suite $\{n_k\}$ telle que $V(f_{n_k}; a, b) < l + \varepsilon$. On a donc, pour toute partition $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,

$$\sum_{i=1}^{n} |f_{n_k}(x_i) - f_{n_k}(x_{i-1})| < l + \varepsilon.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant l + \varepsilon$$

et l'inégalité voulue suit.

I.2.28. Puisque les séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ sont absolument convergentes, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} |b_n| < \varepsilon.$$

Si $x \neq x_k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, il existe alors $\delta > 0$ tel qu'il n'existe pas de $x_n \in \left]x - \delta\,, x + \delta\right[$ pour $n < n_0$. Il s'ensuit que, pour $x - \delta < y < x$,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \sum_{y < x_n \leqslant x} |a_n| + \sum_{y \leqslant x_n < x} |b_n| < 2\varepsilon.$$

De même, $|f(y) - f(x)| < 2\varepsilon$ pour $x < y < x + \delta$. Donc f est continue en tout point $x \neq x_k$.

On remarque maintenant que

$$f(x_k) = \sum_{x_n \leqslant x_k} a_n + \sum_{x_n < x_k} b_n \quad \text{et} \quad f(x_k^-) = \sum_{x_n < x_k} a_n + \sum_{x_n < x_k} b_n.$$

En effet, si $\delta = \min\{|x_n - x_k| : n \leqslant n_0, n \neq k\}$, il n'existe alors pas de $x_n \in]x_k - \delta\,, x_k[$ pour $n \leqslant n_0$ et on a donc, pour $x_k - \delta < x < x_k$,

$$\left| f(x) - \left(\sum_{x_n < x_k} a_n + \sum_{x_n < x_k} b_n \right) \right| = \left| \sum_{x < x_n < x_k} a_n + \sum_{x \leqslant x_n < x_k} b_n \right| < 2\varepsilon.$$

Donc, $f(x_k) - f(x_k^-) = a_k$. On prouve de façon complètement semblable que $f(x_k^+) - f(x_k) = b_k$.

On montre pour finir que

$$V(f; 0, 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(|a_n| + |b_n| \big).$$

Pour cela, on prend une partition $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{t_{k-1} < x_n \leqslant t_k} a_n + \sum_{t_{k-1} \leqslant x_n < t_k} b_n \right| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|\,. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$V(f; 0, 1) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \big(|a_n| + |b_n| \big).$$

Pour montrer l'inégalité opposée, on fixe arbitrairement N et on suppose, sans perte de généralité, que $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$. Puisque $f(x_k) - f(x_k^-) = a_k$ et $f(x_k^+) - f(x_k) = b_k$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe x'_k, x''_k tels que

$$x_{k-1} < x'_k < x_k < x''_k < x'_{k+1} < x_{k+1},$$

$k = 1, \ldots, N-1$ (où l'on suppose que $x_0 = 0$) et

$$\big| f(x_k) - f(x'_k) \big| > |a_k| - \frac{\varepsilon}{2N}, \quad \big| f(x''_k) - f(x_k) \big| > |b_k| - \frac{\varepsilon}{2N}.$$

En prenant la partition

$$t_0 = 0 < t_1 = x'_1 < t_2 = x_1 < t_3 = x''_1 < t_4 = x'_2 < \cdots < t_{3N+2} = 1,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3N+2}|f(t_k)-f(t_{k-1})| &\geqslant \sum_{k=1}^{N}\left|f(x_k)-f(x'_k)\right|+\sum_{k=1}^{N}\left|f(x''_k)-f(x_k)\right|\\ &> \sum_{k=1}^{N}\big(|a_k|+|b_k|\big)-\varepsilon;\end{aligned}$$

$\varepsilon>0$ étant pris arbitrairement, on a

$$V(f;0,1)\geqslant\sum_{k=1}^{N}\big(|a_k|+|b_k|\big).$$

On obtient l'inégalité cherchée en faisant tendre N vers $+\infty$.

I.3. D'autres propriétés de l'intégrale de Riemann-Stieltjes

I.3.1. On a $\alpha(x)=\alpha_1(x)-\alpha_2(x)$, où

$$\alpha_1(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=-1,\\ 1 & \text{si } x\in\,]-1\,,3],\end{cases}\qquad\text{et}\qquad \alpha_2(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in[-1\,,2[,\\ 2 & \text{si } x\in[2\,,3].\end{cases}$$

On obtient donc, d'après le résultat de **I.1.24**,

$$\int_{-1}^{3}x\,d\alpha(x)=\int_{-1}^{3}x\,d\alpha_1(x)-\int_{-1}^{3}x\,d\alpha_2(x)=-1\times1-2\times2=-5.$$

I.3.2. Une intégration par parties et le **théorème 3** donnent

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx\right| &= \left|\int_0^{2\pi}f(x)d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\right|\\ &= \left|\frac{-1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,df(x)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}|\sin nx|\,dv_f(x)\leqslant\frac{V(f;0,2\pi)}{n}.\end{aligned}$$

I.3.3. Puisque f est continue sur $[a\,,b]$, il existe $M>0$ tel que $|f(x)|\leqslant M$, $x\in[a\,,b]$. On suppose d'abord que α est croissante sur $[a\,,b]$. Pour une partition $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, soit ξ_i un réel défini par la première formule de la moyenne :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,d\alpha(x)=f(\xi_i)\left(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})\right).\qquad(1)$$

On déduit de **I.2.26** que β est à variation bornée sur $[a\,,b]$. Soit $\beta = \beta_1 - \beta_2$ une décomposition de β en la différence de deux fonctions croissantes. Puisque f et g sont continues, on peut appliquer le résultat de **I.1.10**. Il s'ensuit que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,d\alpha(x) = \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\left(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\right),$$

les ξ_i étant définis comme en (1). En conséquence,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)\,d\alpha(x) &= \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,d\alpha(x) \\
&= \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\left(\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})\right) \\
&= \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\left(\beta_1(x_i) - \beta_1(x_{i-1})\right) \\
&\quad - \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\left(\beta_2(x_i) - \beta_2(x_{i-1})\right) \\
&= \int_a^b g(x)\,d\beta_1(x) - \int_a^b g(x)\,d\beta_2(x) \\
&= \int_a^b g(x)\,d\beta(x).
\end{aligned}$$

I.3.4. Puisque $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ converge, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe N tel que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} c_n < \varepsilon.$$

Si on pose

$$\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \rho(x - x_n) \quad \text{et} \quad \alpha_2(x) = \alpha(x) - \alpha_1(x),$$

on a alors, d'après le résultat de **I.1.2**,

$$\int_0^1 f\,d\alpha_1 = \sum_{n=1}^{N} c_n f(x_n).$$

De plus,

$$V(\alpha_2; 0, 1) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} c_n < \varepsilon$$

et, en conséquence, d'après le **théorème 3**,

$$\left| \int_0^1 f\, d\alpha - \int_0^1 f\, d\alpha_1 \right| = \left| \int_0^1 f\, d\alpha_2 \right| \leqslant MV(\alpha_2; 0, 1) < M\varepsilon$$

où $M = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

I.3.5. En prenant $f(x) \equiv 1$, on voit que $\alpha(b) = \alpha(a)$. On définit maintenant f pour $a < u < v < b$ en posant

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, u[, \\ -1 & \text{si } x \in [v, b], \\ l(x) & \text{si } x \in [u, v], \end{cases}$$

où $l(x)$ est une fonction affine telle que $l(u) = 1$ et $l(v) = -1$. On a alors

$$0 = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \alpha(u) - \alpha(a) + \int_u^v l(x)\, d\alpha(x) - \alpha(b) + \alpha(v),$$

ou, de façon équivalente,

$$\alpha(u) + \alpha(v) - 2\alpha(a) = -\int_u^v l(x)\, d\alpha(x). \tag{1}$$

De plus,

$$\int_u^v l(x)\, d\alpha(x) = \int_u^v l(x) dp(x) - \int_u^v l(x) dq(x),$$

où p et q sont croissantes et continues sur $[a\,, b]$ (voir **I.2.20**). En utilisant la première formule de la moyenne, on obtient, par la continuité de p,

$$\lim_{v \to u^+} \int_u^v l(x) dp(x) = \lim_{v \to u^+} l(c)(p(v) - p(u)) = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{v \to u^+} \int_u^v l(x)\, d\alpha(x) = 0.$$

Ceci, combiné avec (1), montre que $2\alpha(u) = 2\alpha(a)$.

I.3.6. Pour $0 < u < \frac{\pi}{2} < v < \pi$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\pi} (1 - \sin x)\, d\alpha(x) \\ &= \int_0^{u} (1 - \sin x)\, d\alpha(x) + \int_u^{v} (1 - \sin x)\, d\alpha(x) \\ &\quad + \int_v^{\pi} (1 - \sin x)\, d\alpha(x). \end{aligned}$$

Puisque α est croissante, chacun des termes de l'égalité précédente est positif, ce qui implique

$$\int_0^{u} (1 - \sin x)\, d\alpha(x) = 0 \quad \text{et} \quad \int_v^{\pi} (1 - \sin x)\, d\alpha(x) = 0.$$

Il découle alors de la première formule de la moyenne (voir **I.1.26**) que $\alpha(u) = \alpha(0)$ et $\alpha(v) = \alpha(\pi)$.

I.3.7. En prenant $f(x) \equiv 1$, on voit que $\alpha(1) - \alpha(0) = 1$. Pour $0 < u < v < 1$, on définit

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{u}\, x & \text{si } x \in [0\,,u], \\ 1 & \text{si } x \in [u\,,v], \\ \frac{-1}{1-v}\,(x-1) & \text{si } x \in [v\,,1]. \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_1(x)\, d\alpha(x) &= \int_0^u \frac{1}{u}\, x\, d\alpha(x) + (\alpha(v) - \alpha(u)) \\ &\quad + \int_v^1 \frac{-1}{1-v}\,(x-1)\; d\alpha(x) = 0. \end{aligned}$$

Chacun des termes dans l'égalité précédente s'annule donc. Ceci donne alors $\alpha(u) = \alpha(v)$ pour $u, v \in \left]0\,,1\right[$. Considérons maintenant, pour $0 < v < 1$, la fonction f_2 donnée par

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0\,,v], \\ \frac{-1}{1-v}\,(x-1) & \text{si } x \in [v\,,1]. \end{cases}$$

D'après les hypothèses,

$$\alpha(v) - \alpha(0) + \int_v^1 f_2(x)\, d\alpha(x) = \frac{1}{2}\,.$$

Puisque $\alpha(u) = \alpha(v)$ pour $u, v \in \left]0\,,1\right[$, on obtient

$$\int_v^1 f_2(x)\, d\alpha(x) = f_2(1)\left(\alpha(1) - \alpha(1^-)\right) = 0.$$

Il s'ensuit que $\alpha(v) = \alpha(0) + \frac{1}{2}$ pour $0 < v < 1$. En conclusion,

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(0) & \text{si } x = 0, \\ \alpha(0) + \frac{1}{2} & \text{si } x \in]0\,,1[, \\ \alpha(0) + 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

I.3.8. On considère la fonction

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(a) & \text{si } x \in [a\,,u[, \\ \alpha(b) & \text{si } x \in]u\,,b], \end{cases}$$

où $\alpha(a) < \alpha(b)$. On a alors

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(u)(\alpha(b) - \alpha(a)),$$

ce qui, combiné avec l'hypothèse, donne $f(u) = 1$ pour $u \in]a\,,b[$. On voit que $f(a) = f(b) = 1$ car f est continue sur $[a\,,b]$.

I.3.9. Puisque $\alpha = p - q$, où p et q sont croissantes, il suffit de prouver que $f \in \mathcal{R}(p)$ si $f_n \in \mathcal{R}(p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, et

$$\int_a^b f(x)\,dp(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dp(x).$$

La convergence uniforme de $\{f_n\}$ signifie que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = d_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$d_n\,(p(b) - p(a)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_0.$$

D'après le **théorème 1** de la section **I.1**, il existe une partition P telle que

$$U(P, f_{n_0}, p) - L(P, f_{n_0}, p) < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

De plus, on a

$$U(P, f, p) \leqslant U(P, f_{n_0}, p) + \frac{\varepsilon}{3}$$

et

$$L(P, f, p) \geqslant L(P, f_{n_0}, p) - \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

On voit donc que $f \in \mathcal{R}(p)$. On remarque alors que, pour $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,dp(x) - \int_a^b f(x)\,dp(x)\right| &\leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dp(x)\\ &\leqslant \int_a^b d_n\,dp(x) < \frac{\varepsilon}{3}\,.\end{aligned}$$

I.3.10. On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} nx\left(1-x^2\right)^n = 0$ pour $x \in [0,1]$, mais la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$ et le résultat du problème précédent ne peut pas s'appliquer. On a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx\left(1-x^2\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\,.$$

I.3.11. Comme dans le problème précédent, on ne peut pas appliquer le résultat de **I.3.9** car $\{x^n\}$ ne converge pas uniformément sur $[0\,,1]$. Soit $\alpha = p-q$, p et q étant croissantes sur $[0\,,1]$. Pour $\varepsilon \in\,]0\,,1[$, on a

$$0 \leqslant \int_0^{\varepsilon} x^n\,dp(x) \leqslant \varepsilon^n\left(p(\varepsilon) - p(0)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et

$$\int_{1-\varepsilon}^1 x^n\,dp(x) \leqslant p(1) - p(1-\varepsilon).$$

De plus, si $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$, on a alors

$$\begin{aligned}\int_{1-\varepsilon}^1 x^n\,dp(x) &\geqslant \int_{1-\frac{1}{n^2}}^1 x^n\,dp(x)\\ &\geqslant \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\left(p(1) - p\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right).\end{aligned}$$

On obtient alors, en faisant tendre n vers $+\infty$,

$$p(1) - p(1^-) \leqslant \varliminf_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n dp(x) \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n dp(x) \leqslant p(1) - p(1-\varepsilon).$$

Puisque l'on peut choisir $\varepsilon \in\,]0\,,1[$ arbitrairement petit,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n dp(x) = p(1) - p(1^-).$$

Le même raisonnement s'applique à q et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n\,d\alpha(x) = \alpha(1) - \alpha(1^-).$$

I.3.12. D'après les hypothèses, on a

$$\sum_{k=1}^{m} |\alpha_n(x_k) - \alpha_n(x_{k-1})| \leqslant M.$$

pour toute partition $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on voit que

$$\sum_{k=1}^{m} |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})| \leqslant M,$$

ce qui signifie que α est à variation bornée sur $[a\,,b]$. De plus, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha_n(x) - \int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{m}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k))\,d\alpha(x)\right| \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m} |f(x_k)|\,|\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}) - \alpha_n(x_k) + \alpha_n(x_{k-1})| \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x_k) - f(x))\,d\alpha_n(x)\right|.\end{aligned}$$

Maintenant, par continuité de f, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si le pas de la partition est inférieur à δ, alors $|f(x) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3M}$ pour $x \in [x_{k-1}\,, x_k]$. Donc, d'après le **théorème 3**,

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k))\,d\alpha(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

et

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x_k) - f(x))\,d\alpha_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

De plus, si n est suffisamment grand et la partition fixée, on voit que

$$\sum_{k=1}^{m} |f(x_k)|\,|\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}) - \alpha_n(x_k) + \alpha_n(x_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

I.3.13. On a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,d\alpha_n(x) - \int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| &\leqslant \left|\int_a^b f_n(x)\,d\alpha_n(x) - \int_a^b f(x)\,d\alpha_n(x)\right| \\ &\quad + \left|\int_a^b f(x)\,d\alpha_n(x) - \int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right|.\end{aligned}$$

D'après le résultat du problème précédent, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$\left| \int_a^b f(x)\, d\alpha_n(x) - \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour $n \geqslant n_0$. De plus, d'après les hypothèses, il existe M strictement positif tel que $V(\alpha_n; a, b) \leqslant M$ pour tout n. La convergence uniforme de $\{f_n\}$ implique donc que, pour n suffisamment grand,

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f_n(x)\, d\alpha_n(x) - \int_a^b f(x)\, d\alpha_n(x) \right| &\leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dv_{\alpha_n}(x) \\ &\leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\, V(\alpha_n; a, b) \\ &< \frac{\varepsilon}{2M} M.\end{aligned}$$

I.3.14. On observe d'abord que la suite $\{\alpha_n\}$ est uniformément bornée sur $[a\,,b]$. En effet, pour $x \in [a\,,b]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|\alpha_n(x)| \leqslant |\alpha_n(x) - \alpha_n(a)| + |\alpha_n(a)| \leqslant V(\alpha_n; a, b) + M \leqslant 2M.$$

D'après le **théorème 1** de la section **I.2**, on peut écrire

$$\alpha_n(x) - \alpha_n(a) = p_n(x) - q_n(x),$$

où

$$p_n(x) = \frac{1}{2}\left(v_{\alpha_n}(x) + \alpha_n(x) - \alpha_n(a)\right)$$

et

$$q_n(x) = \frac{1}{2}\left(v_{\alpha_n}(x) - \alpha_n(x) + \alpha_n(a)\right)$$

sont croissantes sur $[a\,,b]$. On vérifie facilement que $\{p_n\}$ et $\{q_n\}$ sont uniformément bornées. La suite $\{p_n\}$ contient donc une sous-suite $\{p_{n_\nu}\}$ simplement convergente sur $[a\,,b]$ (voir, par exemple, **III.1.23 (vol. II)**) et la suite $\{q_{n_\nu}\}$ contient donc à son tour une sous-suite $\{q_{n_k}\}$ simplement convergente sur $[a\,,b]$. Il s'ensuit que la suite $\{\alpha_{n_k}\}$ converge sur $[a\,,b]$ vers une limite α. Clairement, α est à variation bornée. Il suffit d'appliquer le résultat de **I.3.12** pour obtenir

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^b f(x)\, d\alpha_{n_k}(x) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

I.3.15. Notre but est de prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\, d\beta_n(x) = 0, \quad \text{où} \quad \beta_n = \alpha_n - \alpha.$$

Clairement, $V(\beta_n; a, b) \leqslant V(\alpha_n; a, b) + V(\alpha; a, b)$. Donc, par hypothèse, il existe M strictement positif tel que $V(\beta_n; a, b) \leqslant M$ pour tout n. Étant donné $\varepsilon > 0$, l'uniforme continuité de f implique que l'on peut choisir une partition

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, $x_0, x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{A}$, telle que $|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ si $t, s \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Donc,

$$\left| \int_a^b f(x)\, d\beta_n(x) - \sum_{k=1}^m f(t_k)\left(\beta_n(x_k) - \beta_n(x_{k-1})\right) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} V(\beta_n; a, b) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n(x_k) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ on a, à partir d'une certaine valeur de l'indice n,

$$\left| \sum_{k=1}^m f(t_k)\left(\beta_n(x_k) - \beta_n(x_{k-1})\right) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ceci donne

$$\left| \int_a^b f(x)\, d\beta_n(x) \right| \leqslant \varepsilon.$$

I.3.16. La formule d'intégration par parties (**théorème 1**) et la première formule de la moyenne (voir **I.1.26**) impliquent

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) &= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)\, df(x) \\ &= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \alpha(c)(f(b) - f(a)).\end{aligned}$$

I.3.17.

(a) On pose $m = \min\{\alpha(x) : x \in [a\,, b]\}$ et $M = \max\{\alpha(x) : x \in [a\,, b]\}$. En utilisant la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) &= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)\, df(x) \\ &\leqslant f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - m(f(b) - f(a)) \\ &= (f(b) - f(a))(\alpha(b) - m) + f(a)(\alpha(b) - \alpha(a)) \\ &\leqslant (f(b) - f(a))(\alpha(b) - m) + f(a)(\alpha(b) - m) \\ &= f(b)(\alpha(b) - m).\end{aligned}$$

De même,

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \geqslant f(b)(\alpha(b) - M).$$

Il s'ensuit que

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(b)(\alpha(b)-k), \quad \text{où} \quad m \leqslant k \leqslant M.$$

Puisque α est continue, il existe $c \in [a\,,b]$ tel que $\alpha(c) = k$.

(b) La démonstration se conduit comme en (a).

I.3.18. D'après la forme de Bonnet de la seconde formule de la moyenne,

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\sin(nx)}{x}\,dx &= \int_a^b \frac{-1}{nx}\,d\cos(nx)\\ &= \frac{-1}{na}\left(\cos(nc)-\cos(na)\right).\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \frac{\sin(nx)}{x}\,dx = 0.$$

I.3.19.

(a) Si on pose $t^2 = u$ et si on utilise la forme de Bonnet de la seconde formule de la moyenne, on obtient

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1} \sin\left(t^2\right)dt &= \int_{x^2}^{(x+1)^2} (\sin u)\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = -\int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{1}{2\sqrt{u}}\,d\cos u\\ &= -\frac{1}{2x}\left(\cos c - \cos\left(x^2\right)\right).\end{aligned}$$

Ceci implique l'inégalité cherchée.

(b) De même,

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1} \sin\left(e^t\right)dt &= \int_{e^x}^{e^{x+1}} (\sin u)\frac{1}{u}\,du = \frac{1}{e^x}\int_{e^x}^{c} \sin u\,du\\ &= \frac{\cos(e^x)-\cos c}{e^x}.\end{aligned}$$

I.3.20. Par hypothèse, les trois intégrales existent et sont les limites des sommes partielles correspondantes (voir **I.1.11**). En particulier, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $\delta > 0$ tel que si $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots, x_n = b\}$ est une partition dont le pas est inférieur à δ, alors

$$\left|\int_a^b f(x)d(\alpha_1(x)\alpha_2(x)) - S(P, f, \alpha_1\alpha_2)\right| < \varepsilon, \tag{1}$$

où
$$S(P,f,\alpha_1\alpha_2)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left(\alpha_1(x_k)\alpha_2(x_k)-\alpha_1(x_{k-1})\alpha_2(x_{k-1})\right).$$
On pose $M=\max\{|f(x)| : x\in[a\,,b]\}$. La continuité uniforme de α_2 implique $|\alpha_2(x_k)-\alpha_2(x_{k-1})|<\frac{\varepsilon}{MV(\alpha_1;a,b)}$ pour $k=1,2,\dots,n$, si le pas de P est suffisamment petit. Donc,
$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left(\alpha_2(x_{k-1})-\alpha_2(x_k)\right)\left(\alpha_1(x_k)-\alpha_1(x_{k-1})\right)\right|<\varepsilon.$$
De plus,
$$\begin{aligned}S(P,f,\alpha_1\alpha_2)&=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\alpha_1(x_k)\left(\alpha_2(x_k)-\alpha_2(x_{k-1})\right)\\&\quad+\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\alpha_2(x_k)\left(\alpha_1(x_k)-\alpha_1(x_{k-1})\right)\\&\quad+\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left(\alpha_2(x_{k-1})-\alpha_2(x_k)\right)\left(\alpha_1(x_k)-\alpha_1(x_{k-1})\right).\end{aligned}$$
D'autre part,
$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\alpha_1(x_k)\left(\alpha_2(x_k)-\alpha_2(x_{k-1})\right)-\int_a^b f(x)\alpha_1(x)\,d\alpha_2(x)\right|<\varepsilon$$
et
$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\alpha_2(x_k)\left(\alpha_1(x_k)-\alpha_1(x_{k-1})\right)-\int_a^b f(x)\alpha_2(x)\,d\alpha_1(x)\right|<\varepsilon$$
si le pas de P est suffisamment petit. D'où
$$\left|S(P,f,\alpha_1\alpha_2)-\int_a^b f(x)\alpha_1(x)\,d\alpha_2(x)-\int_a^b f(x)\alpha_2(x)\,d\alpha_1(x)\right|<3\varepsilon,$$
ce qui, combiné avec (1), donne le résultat désiré.

I.3.21. On montre d'abord que
$$\int_a^b f(x)\,d\left((f(x))^n\right)=n\int_a^b (f(x))^n\,df(x).$$

L'égalité est évidente pour $n = 1$. Si $n > 1$, en utilisant le résultat du problème précédent, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, d\left((f(x))^n\right) &= \int_a^b (f(x))^2 d\left((f(x))^{n-1}\right) + \int_a^b (f(x))^n\, df(x)\\ &= \int_a^b (f(x))^3 d\left((f(x))^{n-2}\right) + 2\int_a^b (f(x))^n\, df(x)\\ &= \cdots = n\int_a^b (f(x))^n\, df(x).\end{aligned}$$

La formule d'intégration par parties (**théorème 1**) et l'égalité prouvée précédemment donnent alors

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x))^n\, df(x) &= (f(b))^{n+1} - (f(a))^{n+1} - \int_a^b f(x)\, d\left((f(x))^n\right)\\ &= (f(b))^{n+1} - (f(a))^{n+1} - n\int_a^b (f(x))^n\, df(x),\end{aligned}$$

ce qui donne la seconde égalité.

I.3.22.

(a) On a

$$n\int_0^1 x^n f(x)\, dx = \frac{n}{n+1}\int_0^1 f(x)\, d\left(x^{n+1}\right).$$

Clairement,

$$\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = \alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0\,,1[,\\ 1 & \text{si } x = 1.\end{cases}$$

On obtient donc, en utilisant les résultats de **I.3.12** et **I.3.13**,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, d(\alpha(x)) = f(1).$$

(b) Comme en (a), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\int_0^1 e^{-nx} f(x)\, dx\right) = -\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)\, d\left(e^{-nx}\right) = f(0).$$

(c) En utilisant (a), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^1 x^n f(x)\, dx}{\int_0^1 x^n e^{x^2}\, dx} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n\int_0^1 x^n f(x)\, dx}{n\int_0^1 x^n e^{x^2}\, dx} = \frac{f(1)}{e}.$$

(d) On pose
$$F_n(x) = 2\pi \int_0^x \sqrt{n}\sin^{2n}(2\pi t)\,dt.$$
Puisque $\sqrt{n}\sin^{2n}(2\pi t)$ tend vers 0 uniformément sur $[0\,,x]$, $0 < x < \frac{1}{4}$, on voit que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$ pour $0 \leqslant x < \frac{1}{4}$. On remarque aussi que
$$F_n\left(\frac{1}{4}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{n}\sin^{2n}(t)\,dt = \sqrt{n}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,.$$
On déduit de la formule de Wallis (voir, par exemple, **III.8.38 (vol. I)**) que
$$\lim_{n\to+\infty} F_n\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,.$$
Si maintenant $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$, alors
$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_0^{2\pi x} \sqrt{n}\sin^{2n} t\,dt = \int_0^{\pi} \sqrt{n}\sin^{2n} t\,dt - \int_{2\pi x}^{\pi} \sqrt{n}\sin^{2n} t\,dt \\ &= 2F_n\left(\frac{1}{4}\right) - \int_{2\pi x}^{\pi} \sqrt{n}\sin^{2n} t\,dt. \end{aligned}$$
Comme précédemment,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{2\pi x}^{\pi} \sqrt{n}\sin^{2n} t\,dt = 0.$$
Donc,
$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad \text{si} \quad x \in \left]\frac{1}{4}\,,\frac{3}{4}\right[.$$
Une analyse semblable donne
$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right[, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} & \text{si } x = \frac{1}{4}, \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} & \text{si } x \in \left]\frac{1}{4}\,,\frac{3}{4}\right[, \\ \frac{3}{\sqrt{\pi}} & \text{si } x = \frac{3}{4}, \\ \frac{4}{\sqrt{\pi}} & \text{si } x \in \left]\frac{3}{4}\,,1\right]. \end{cases}$$
Comme en (a), on écrit
$$2\pi\sqrt{n}\int_0^1 f(x)\sin^{2n}(2\pi x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,d(F_n(x))$$

et on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}\int_0^1 f(x)\sin^{2n}(2\pi x)\,dx\right)=\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}\left(f\left(\frac14\right)+f\left(\frac34\right)\right).$$

(e) En utilisant (d), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^1 f(x)\sin^{2n}(2\pi x)\,dx}{\int_0^1 e^{x^2}\sin^{2n}(2\pi x)\,dx}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\int_0^1 f(x)\sin^{2n}(2\pi x)\,dx}{\sqrt{n}\int_0^1 e^{x^2}\sin^{2n}(2\pi x)\,dx}$$
$$=\frac{f\left(\frac14\right)+f\left(\frac34\right)}{e^{1/16}+e^{9/16}}.$$

I.3.23. [W.A.J. Luxembourg, *Amer. Math. Monthly*, 78(1971), 970-979]. On peut supposer, sans perte de généralité, que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$ pour $x\in[a\,,b]$. On montre d'abord que si f est positive et Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$, étant donné $\varepsilon>0$, il existe alors une fonction continue g telle que $0\leqslant g(x)\leqslant f(x)$ et

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx+\varepsilon.$$

Il existe une partition $a=x_0<x_1<\ldots,x_n=b$ telle que

$$\int_a^b f(x)\,dx<\sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1})+\frac{\varepsilon}{2},$$

où $m_i=\inf\limits_{x_i\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Ceci signifie qu'il existe une fonction en escalier s telle que

$$\int_a^b f(x)\,dx<\int_a^b s(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2}.$$

On voit facilement que l'on peut transformer s en une fonction g affine par morceaux telle que $0\leqslant g\leqslant s$ et $\int_a^b s(x)\,dx<\int_a^b g(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2}$, ce qui démontre notre proposition. On se tourne maintenant vers la démonstration du théorème de convergence monotone. Soit $\varepsilon>0$. Pour tout n, il existe une fonction continue g_n telle que $0\leqslant g_n\leqslant f_n$ et

$$\int_a^b f_n(x)\,dx\leqslant\int_a^b g_n(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{1}$$

Si on pose $h_n=\min\{g_1,g_2,\ldots,g_n\}$, alors $0\leqslant h_n\leqslant g_n\leqslant f_n$ et les fonctions h_n sont continues sur $[a\,,b]$. Puisque la suite $\{f_n\}$ est décroissante,

$$0\leqslant f_n-h_n=\min\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}-\min\{g_1,g_2,\ldots,g_n\}\leqslant\sum_{i=1}^n(f_i-g_i).$$

D'où,

$$0 \leqslant \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b h_n(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_a^b (f_i(x) - g_i(x))\,dx$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right). \tag{2}$$

Puisque $\{h_n\}$ est une suite de fonctions continues sur $[a\,,b]$ décroissant vers 0, d'après le théorème de Dini (voir, par exemple, **III.1.16 (vol. II)**), elle converge uniformément vers 0 sur $[a,b]$. Ceci, combiné avec (2), implique le résultat cherché.

I.3.24. [W.A.J. Luxembourg, *Amer. Math. Monthly*, 78(1971), 970-979]. La démonstration se mène comme dans le problème précédent, les intégrales $\int_a^b f\,dx$ et $\int_a^b f_n\,dx$ devant être remplacées respectivement par $\underline{\int_a^b} f\,dx$ et $\underline{\int_a^b} f_n\,dx$, excepté le fait que l'intégrale de Riemann inférieure n'est pas sous-additive (comme observé dans la publication citée). L'inégalité

$$0 \leqslant \int_a^b f_n(x)\,dx \leqslant \int_a^b h_n(x)\,dx + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

doit donc être prouvée autrement. Pour cela, on remarque que pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$0 \leqslant g_n = g_i + (g_n - g_i) \leqslant g_i + (\max\{g_i, \ldots, g_n\} - g_i)$$
$$\leqslant g_i + \sum_{i=1}^{n-1} (\max\{g_i, \ldots, g_n\} - g_i).$$

D'où

$$0 \leqslant g_n \leqslant h_n + \sum_{i=1}^{n-1} (\max\{g_i, \ldots, g_n\} - g_i).$$

De plus, en utilisant

$$\max\{g_i, \ldots, g_n\} \leqslant \max\{f_i, \ldots, f_n\} = f_i$$

on obtient

$$\underline{\int_a^b} f_i(x)\,dx \geqslant \int_a^b (\max\{g_i, \ldots, g_n\} - g_i(x))\,dx + \int_a^b g_i(x)\,dx$$

et

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(\max\{g_i,\dots,g_n\} - g_i(x)\right) dx &\leqslant \underline{\int_a^b} f_i(x)dx - \int_a^b g_i(x)\, dx \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2^i}\,,\end{aligned}$$

la dernière inégalité découlant de (1) dans la solution du problème précédent. Il s'ensuit que

$$\int_a^b g_n(x)\, dx \leqslant \int_a^b h_n(x)\, dx + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i},$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

I.3.25. [W.A.J. Luxembourg, *Amer. Math. Monthly*, 78(1971), 970-979]. On peut supposer, sans perte de généralité, que $0 \leqslant f_n(x) \leqslant M$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour $x \in [a\,,b]$. Si on pose $p_n(x) = \sup\limits_{k\geqslant 0} f_{n+k}(x)$, on a alors $0 \leqslant f_n(x) \leqslant p_n(x)$, d'où

$$0 = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} p_n(x),$$

ce qui prouve que la suite $\{p_n\}$ décroît vers 0 sur $[a\,,b]$. D'après le théorème de convergence monotone pour l'intégrale de Riemann inférieure énoncé dans le problème précédent,

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \leqslant \lim_{n\to+\infty} \underline{\int_a^b} p_n(x)\, dx = 0.$$

I.3.26. [W.A.J. Luxembourg, Amer. Math. Monthly, 78(1971), 970-979]. Les fonctions f_n et f étant positives, et, en posant $(f - f_n)^+ = \max\{f - f_n, 0\}$, on obtient $f - f_n \leqslant f$ et $(f - f_n)^+ \leqslant f$. Ceci prouve que la suite $\{(f - f_n)^+\}$ est uniformément bornée sur $[a\,,b]$. D'après le théorème d'Arzelà, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b (f(x) - f_n(x))^+\, dx = 0$. On remarque aussi que $f = (f - f_n) + f_n \leqslant (f - f_n)^+ + f_n$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx &\leqslant \underline{\lim_{n\to+\infty}} \left(\int_a^b (f(x) - f_n(x))^+\, dx + \int_a^b f_n(x)\, dx \right) \\ &= \underline{\lim_{n\to+\infty}} \int_a^b f_n(x)\, dx,\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de **II.4.19 (vol. I)**.

I.4. Intégrales définies

I.4.1.

(a) On a

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{|x-1|}{|x-2|+|x-3|}\,dx &= \int_0^1 \frac{x-1}{2x-5}\,dx + \int_1^2 \frac{x-1}{-2x+5}\,dx \\ &\quad + \int_2^3 (x-1)\,dx + \int_3^4 \frac{x-1}{2x-5}\,dx \\ &= 2 + \frac{9}{4}\ln 3 - \frac{3}{4}\ln 5.\end{aligned}$$

(b) En utilisant le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$, on voit que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx.$$

On montre alors par récurrence que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \times \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

et

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2\times 4\times\cdots\times(2n)}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,. \qquad (2)$$

On vérifie facilement que chacune des deux égalités est vraie pour $n = 1$. Pour $n > 1$, l'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = -\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,d\cos x \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos x\,d\sin^{n-1} x = (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x\,dx \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,\end{aligned}$$

d'où,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \qquad (3)$$

Donc si

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \times \frac{\pi}{2},$$

on obtient alors, avec (3),

$$I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \times \frac{\pi}{2}\,.$$

Ceci complète la démonstration de (1). L'égalité (2) se démontre de la même façon.

(c) On a

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\, dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x\, dx + \int_{1}^{e} \ln x\, dx.$$

En utilisant une intégration par parties, on obtient

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\, dx = 2 - \frac{2}{e}\,.$$

(d) Le changement de variable $t = \pi - x$ donne

$$\begin{aligned} I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx &= \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx \\ &= \int_0^\pi \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx - \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx. \end{aligned}$$

Donc,

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}\,.$$

(e) On a

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \tan^{2n-2} x\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-2} x\, d(\tan x) - I_{2n-2} = \frac{1}{2n-1} - I_{2n-2}. \end{aligned}$$

On obtient alors par récurrence

$$I_{2n} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right)\right).$$

(f) On a

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{2\cos x}\, dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\,. \end{aligned}$$

(g) On remarque que

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,dx.$$

Il s'ensuit que

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}\,.$$

I.4.2. En utilisant le changement de variable $x=\cos t$ et **I.4.1(b)**, on obtient

$$\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,.$$

D'autre part,

$$\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\int_0^1 x^{2k}\,dx=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{1}{2k+1}\,.$$

I.4.3. On suppose, par exemple, que $f(x_0^+)=a$. On a

$$f(x_0)=F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\,.$$

On obtient d'autre part, en utilisant la règle de l'Hospital,

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{F'(x)}{1}=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=a.$$

I.4.4. On pose $F(x)=x^2\cos\frac{1}{x}-2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\,dt$ pour $x\neq 0$ et $F(0)=0$. On a alors $F'(x)=f(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$. Donc F est une primitive de f dans le cas où $c=0$. Si $c\neq 0$, alors une primitive G de f serait égale à $F(x)+c_1$ pour $x>0$ et $F(x)+c_2$ pour $x<0$, c_1 et c_2 étant des constantes. De plus, puisque G doit être continue en 0, $c_1=c_2$ et $G'(0)=0$. Ceci montre que f admet une primitive si et seulement si $c=0$.

I.4.5. On va prouver que

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{kx^3}\sin\frac{\pi}{x^2} & \text{si } x\in[x_{2k+1}\,,x_{2k-1}],\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

a les propriétés requises. En effet, f étant continue sur $]0\,,1]$, on a

$$\begin{aligned} F(x_{2k-1}) - F(x_{2k}) &= -\frac{\pi}{k}\int_{x_{2k}}^{x_{2k-1}} \frac{1}{x^3}\sin\frac{\pi}{x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2k}\int_{2k\pi}^{(2k-1)\pi} \sin t\,dt = \frac{1}{k}\,. \end{aligned}$$

De même,

$$F(x_{2k+1}) - F(x_{2k}) = \frac{1}{k}\,.$$

On pose maintenant

$$F(x) = \begin{cases} \int_1^x f(t)\,dt & \text{si } x \in\,]0\,,1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Un calcul montre que

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2k}\left(\cos\frac{\pi}{x^2}+1\right) & \text{si } x \in [x_{2k+1}\,, x_{2k-1}], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a alors $F'(x) = f(x)$ pour $x \in\,]0\,,1]$. De plus, pour $x \in [x_{2k+1}\,, x_{2k-1}]$,

$$-\frac{\sqrt{2k-1}}{k} \leqslant \frac{F(x)}{x} \leqslant 0,$$

ce qui implique

$$F'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x} = f(0).$$

Ayant établi que f admet une primitive sur $[0\,,1]$, on se tourne maintenant vers la démonstration de la seconde partie de l'énoncé. Pour cela, on pose

$$G(x) = \int_1^x |f(t)|\,dt \qquad (x \in\,]0\,,1])$$

et on obtient

$$G(x) = -2\left(1+\cdots+\frac{1}{k-1}\right) - \frac{1}{2k}\left(\cos\frac{\pi}{x^2}+1\right)$$

si $x \in [x_{2k}\,, x_{2k-1}]$ $(k > 1)$ et

$$G(x) = -2\left(1+\cdots+\frac{1}{k-1}\right) - \frac{1}{k} + \frac{1}{2k}\left(\cos\frac{\pi}{x^2}-1\right)$$

si $x \in [x_{2k+1}\,, x_{2k}]$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = -\infty$, il n'existe pas de fonction G telle que $G'(x) = |f(x)|$ sur l'intervalle fermé $[0\,,1]$.

I.4.6. Le changement de variable $t = \pi - x$ donne

$$I = \int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t)\,dt = \pi \int_0^\pi f(\sin t)\,dt - I.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}\,dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}\,dx \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}\,dx \\
&\quad + \frac{\pi}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}\,dx \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

I.4.7.

(a) On a

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

(b) On a

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} -f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0.$$

I.4.8. La fonction f étant périodique, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+T} f(x)\,dx &= \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x-T)\,dx \\
&= \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx - \int_a^0 f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

I.4.9. On a

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(nx)\,dx &= \frac{1}{n} \int_{na}^{nb} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{n} \left(\int_{na}^{na+T} f(x)\,dx + \cdots + \int_{na+k(n)T}^{nb} f(x)\,dx \right),
\end{aligned}$$

où $k(n) = \left[\frac{n(b-a)}{T}\right]$. D'après le résultat du problème précédent,

$$\int_a^b f(nx)\,dx = \frac{1}{n}\,k(n)\int_0^T f(x)\,dx + \frac{1}{n}\int_{na+k(n)T}^{nb} f(x)\,dx.$$

Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{k(n)}{n} = \frac{b-a}{T}$ et

$$\left|\frac{1}{n}\int_{na+k(n)T}^{nb} f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{T}{n}\sup_{x\in[0,T]}|f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

I.4.10.

(a) On a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^n f(\sin x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f\left(\sin(nx)\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sin x)\,dx,$$

la dernière égalité découlant de **I.4.9**.

(b) Comme en (a), on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^n f(|\sin x|)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

(c) On remarque que

$$\int_0^1 xf\left(\sin(2\pi nx)\right)dx = \frac{1}{4\pi^2 n^2}\int_0^{2\pi n} xf(\sin x)\,dx$$

et

$$\int_0^{2n\pi} xf(\sin x)\,dx = \int_0^{2\pi} xf(\sin x)\,dx + \cdots + \int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} xf(\sin x)\,dx.$$

Puisque

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} xf(\sin x)\,dx = 2k\pi\int_0^{2\pi} f(\sin x)\,dx + \int_0^{2\pi} xf(\sin x)\,dx,$$

on voit que

$$\int_0^{2n\pi} xf(\sin x)\,dx$$
$$= 2\pi(1+2+\cdots+(n-1))\int_0^{2\pi} f(\sin x)\,dx + n\int_0^{2\pi} xf(\sin x)\,dx,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 xf\left(\sin(2\pi nx)\right)dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(\sin x)\,dx.$$

I.4.11.

(a) On va prouver que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0.$$

La fonction f étant uniformément continue sur $[a\,,b]$, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ si $|t - s| < \delta$. En prenant une partition $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ de pas inférieur à δ, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx &= \sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\cos(nx)\,dx\\ &= \sum_{k=1}^{m}\left(f(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}\cos(nx)\,dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x) - f(x_k))\cos(nx)\,dx\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{m}|f(x_k)|\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}\cos(nx)\,dx\right| + \varepsilon(b-a)\\ &\leqslant \frac{2}{n}Mm + \varepsilon(b-a),\end{aligned}$$

où $M = \max\{|f(x)| : x \in [a\,,b]\}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = 0$. La démonstration de l'autre égalité se conduit de façon semblable.

(b) D'après (a), on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin^2(nx)\,dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

I.4.12. On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(nx)\,dx &= \frac{1}{n}\int_0^n f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\,dx\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f(x+k)\,dx\\ &= \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx = a$$

(voir, par exemple, **II.3.2 (vol. I)**).

I.4.13. On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx &= \int_0^{1/2} \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx + \int_{1/2}^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx\\ &= \int_0^{1/2} \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx + \int_0^{1/2} \frac{f(1-x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx = \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

I.4.14. On a

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx &= \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx\\ &= \int_0^a \frac{e^t f(t)}{1+e^t}\,dt + \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx\\ &= \int_0^a f(x)\,dx.\end{aligned}$$

I.4.15. S'il existe $x_0 \in [a\,,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors par continuité de f, $f(x) > 0$ sur un intervalle $[\alpha\,,\beta] \subset [a\,,b]$. Donc

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0,$$

contradiction.

I.4.16. Soit $a \leqslant x_0 < x_0 + h \leqslant b$. Par hypothèse et d'après la première formule de la moyenne (voir **I.1.26**),

$$0 = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx = f(x_0+\theta h)h$$

où $\theta \in [0\,,1]$. Donc $f(x_0+\theta h) = 0$. Puisque l'on peut choisir arbitrairement $h > 0$, on voit que $f(x_0) = 0$.

I.4.17. En prenant $g = f$, on obtient $\int_a^b (f(x))^2\,dx = 0$ et, d'après le résultat de **I.4.15**, $f(x) \equiv 0$.

I.4.18. On observe d'abord que si f est Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En effet,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{M}{n}$$

où $M = \sup\{|f(x)| : x\in[a\,,b]\}$. On pose, pour un entier n suffisamment grand,

$$g(x)=\begin{cases} nf\left(a+\frac{1}{n}\right)(x-a) & \text{si } x\in\left[a\,,a+\frac{1}{n}\right],\\ f(x) & \text{si } x\in\left[a+\frac{1}{n}\,,b-\frac{1}{n}\right],\\ -nf\left(b-\frac{1}{n}\right)(x-b) & \text{si } x\in\left[b-\frac{1}{n}\,,b\right].\end{cases}$$

On a alors, par hypothèse,

$$\begin{aligned}0 &= \int_a^b f(x)g(x)\,dx\\ &= \int_a^{a+\frac{1}{n}} nf\left(a+\frac{1}{n}\right)(x-a)f(x)\,dx + \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} (f(x))^2\,dx\\ &\quad - \int_{b-\frac{1}{n}}^{b} nf\left(b-\frac{1}{n}\right)(x-b)f(x)\,dx.\end{aligned}$$

On note maintenant que

$$\left|\int_a^{a+\frac{1}{n}} nf\left(a+\frac{1}{n}\right)(x-a)f(x)\,dx\right| \leqslant M^2\frac{1}{2n},$$

ce qui montre que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^{a+\frac{1}{n}} nf\left(a+\frac{1}{n}\right)(x-a)f(x)\,dx = 0.$$

En conclusion, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} (f(x))^2\,dx = \int_a^b (f(x))^2\,dx = 0,$$

ce qui, combiné avec le résultat de **I.4.15**, donne $f(x)\equiv 0$.

I.4.19. On va utiliser le résultat de **I.4.16**.

(a) On remarque que, pour tout x,

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} (f(-t) + f(t))\,dt = 0.$$

Ceci implique clairement que

$$\int_{x}^{y} (f(-t) + f(t))\,dt = 0$$

pour tous x et y, ce qui, combiné avec le résultat de **I.4.16**, donne $f(-t) + f(t) = 0$.

(b) La démonstration est semblable.

(c) On a

$$\int_{x}^{x+T} f(t)\,dt = \int_{x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{T} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t+T)\,dt,$$

ce qui, combiné avec l'hypothèse, montre que

$$\int_{0}^{x} (f(t+T) - f(t))\,dt = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Comme en (a), on obtient donc $f(t+T) - f(t) = 0$.

I.4.20.

(a) D'après la première formule de la moyenne (voir **I.1.26**), il existe $x_n \in [n\,, n+1]$ tels que

$$n^4 \int_{n}^{n+1} \frac{x\,dx}{x^5+1} = \frac{n^4 x_n}{x_n^5+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

(b) On a

$$n^3 \int_{n}^{2n} \frac{dx}{(x+1)^4} < n^3 \int_{n}^{2n} \frac{x\,dx}{x^5+1} < n^3 \int_{n}^{2n} \frac{dx}{x^4}\,.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 \int_{n}^{2n} \frac{x\,dx}{x^5+1} = \frac{7}{24}\,.$$

(c) Puisque $\ln\left(x + \frac{x^5}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln x$ uniformément sur $[1\,,2]$, on a, d'après le résultat de **I.3.9**,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{1}^{2} \ln\left(x + \frac{x^5}{n}\right) dx = \int_{1}^{2} \ln x\,dx = 2\ln 2 - 1.$$

(d) On a
$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x\,dx}{\operatorname{Arctan}(nx)} = \frac{1}{n^2}\int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{x\,dx}{\operatorname{Arctan} x}.$$
Puisque
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x}{\operatorname{Arctan} x} - \frac{x}{\pi/2}\right) = \frac{4}{\pi^2},$$
étant donné $\varepsilon > 0$, il existe x_0 tel que
$$\frac{4}{\pi^2} + \frac{2x}{\pi} - \varepsilon < \frac{x}{\operatorname{Arctan} x} < \frac{4}{\pi^2} + \frac{2x}{\pi} + \varepsilon$$
si $x > x_0$. Donc, pour x suffisamment grand,
$$3\pi\left(1 + \frac{\frac{4}{\pi^2} - \varepsilon}{3n}\right) < \frac{1}{n^2}\int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{x\,dx}{\operatorname{Arctan} x} < 3\pi\left(1 + \frac{\frac{4}{\pi^2} + \varepsilon}{3n}\right).$$
Il s'ensuit que
$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{3}\left(\frac{4}{\pi^2}-\varepsilon\right)} &\leqslant \varliminf_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x\,dx}{\operatorname{Arctan}(nx)}\right)^n \\ &\leqslant \varlimsup_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x\,dx}{\operatorname{Arctan}(nx)}\right)^n \leqslant e^{\frac{1}{3}\left(\frac{4}{\pi^2}+\varepsilon\right)}. \end{aligned}$$
En faisant tendre ε vers 0, on obtient
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x\,dx}{\operatorname{Arctan}(nx)}\right)^n = \exp\left(\frac{4}{3\pi^2}\right).$$

I.4.21.

(a) On sait que $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t$ pour $t \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$. Donc,
$$0 \leqslant \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,dt \leqslant \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}Rt}\,dt = \frac{\pi}{2R}\left(1 - e^{-R}\right),$$
d'où
$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,dt = 0.$$

(b) On se donne $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. La suite $\{\sqrt[n]{x}\}$ est alors uniformément convergente vers 1 sur $[\varepsilon\,,\pi]$. Donc, d'après le résultat de **I.3.9**,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\varepsilon}^{\pi} \sqrt[n]{x}\sin x\,dx = \int_{\varepsilon}^{\pi} \sin x\,dx = 1 + \cos\varepsilon.$$
De plus,
$$\int_0^{\varepsilon} \sqrt[n]{x}\sin x\,dx < \varepsilon\sqrt[n]{\varepsilon} < \varepsilon$$

pour $0 < \varepsilon < 1$. On voit, en faisant tendre ε vers 0^+, que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \sqrt[n]{x} \sin x \, dx = 2.$$

(c) On se donne $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et on écrit

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} \, dx = \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} \, dx + \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} \, dx.$$

Puisque $\{\sin^n x\}$ converge vers 0 uniformément sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} \, dx = 0.$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} \, dx < \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\frac{\pi}{2}-\varepsilon}}\,.$$

Le passage à la limite lorsque ε tend vers 0 donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} \, dx = 0.$$

I.4.22. Soit $0 < \varepsilon < 1$. On a

$$\int_0^1 f(x^n) \, dx = \int_0^{1-\varepsilon} f(x^n) \, dx + \int_{1-\varepsilon}^1 f(x^n) \, dx$$

et, d'après la première formule de la moyenne (voir **I.1.26**),

$$\int_0^{1-\varepsilon} f(x^n) \, dx = f(\xi^n)(1-\varepsilon) \quad \text{où} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1-\varepsilon.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1-\varepsilon} f(x^n) \, dx = f(0)(1-\varepsilon).$$

De plus,

$$\left| \int_{1-\varepsilon}^1 f(x^n) \, dx \right| \leqslant M\varepsilon \quad \text{où} \quad M = \sup\left\{|f(x)| : x \in [0\,,1]\right\}.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x^n) \, dx = f(0).$$

I.4.23. Les **problèmes I.4.23–I.4.30** sont empruntés à [8].
Puisque

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt$$

est continue sur $[a\,,b]$ et $F(a) = -F(b)$, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, il existe $\theta \in [a\,,b]$ tel que $F(\theta) = 0$.

I.4.24. Posons

$$F(x) = e^{-x}\int_a^x f(t)\,dt.$$

Par hypothèse, $F(a) = F(b) = 0$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\theta \in\,]a\,,b[$ tel que

$$F'(\theta) = e^{-\theta}f(\theta) - e^{-\theta}\int_a^\theta f(t)\,dt = 0.$$

I.4.25. On considère

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_a^x f(t)\,dt.$$

Par hypothèse, $F(a) = F(b) = 0$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\theta \in\,]a\,,b[$ tel que

$$F'(\theta) = -\frac{1}{\theta^2}\int_a^\theta f(t)\,dt + \frac{1}{\theta}f(\theta) = 0.$$

I.4.26. Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis généralisé aux fonctions

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_a^x g(t)\,dt.$$

I.4.27. On pose

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\int_x^b g(t)\,dt.$$

Puisque $F(a) = F(b) = 0$, il existe $\theta \in\,]a\,,b[$ tel que $F'(\theta) = 0$.

I.4.28. On considère

$$F(x) = e^{-x}\int_a^x f(t)\,dt\int_x^b g(t)\,dt$$

et on applique le théorème des accroissements finis.

I.4.29. On pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_{1-x}^1 f(t)\,dt$$

et on remarque que

$$F(0) = 0 \quad \text{et} \quad F(1) = 2\int_0^1 f(t)\,dt.$$

Puisque F est continue sur $[0\,,1]$, il existe $\theta(n)$ tel que

$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\theta(n)} f(x)\,dx + \int_{1-\theta(n)}^1 f(x)\,dx.$$

De plus, d'après le théorème des accroissements finis,

$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx = \theta(n)\big(f(\xi_1(n)) + f(\xi_2(n))\big),$$

où $0 \leqslant \xi_1(n) \leqslant \theta(n)$ et $1-\theta(n) \leqslant \xi_2(n) \leqslant 1$. Finalement,

$$n\theta(n) = \frac{\int_0^1 f(x)\,dx}{f(\xi_1(n)) + f(\xi_2(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\int_0^1 f(x)\,dx}{f(0)+f(1)}.$$

I.4.30. On a

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \big[(x-1)f(x)\big]_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x)\,dx.$$

On a donc, d'après le théorème des accroissements finis,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = f(0) - f'(\theta)\int_0^1 (x-1)\,dx.$$

I.4.31. Comme dans la démonstration du problème précédent, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= f(0) - \int_0^1 (x-1)f'(x)\,dx \\ &= f(0) - \left[\frac{(x-1)^2}{2}f'(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2}f''(x)\,dx,\end{aligned}$$

ce qui, combiné avec le théorème des accroissements finis, donne le résultat voulu.

I.4.32. On pose
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt,$$
on obtient $F''(0) = f'(0) \neq 0$ et, d'après la formule de Taylor avec reste sous la forme de Peano (voir, par exemple, **II.3.1 (vol. II)**),
$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}\,F''(0)x^2 + o\left(x^2\right).$$
De même,
$$f(\theta)x = F'(\theta)x = x(F'(0) + F''(0)\theta + o(\theta)).$$
Par hypothèse,
$$F'(0)x + \frac{1}{2}\,F''(0)x^2 + o\left(x^2\right) = x(F'(0) + F''(0)\theta + o(\theta)),$$
ce qui donne
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\theta(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

I.4.33. Soit ε un réel donné tel que $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$. Puisque f est strictement croissante, $\frac{f(b-\varepsilon)}{f(b-2\varepsilon)} > 1$. Il existe donc un entier strictement positif p_0 tel que
$$\left(\frac{f(b-\varepsilon)}{f(b-2\varepsilon)}\right)^p > \frac{b-a}{\varepsilon}$$
pour $p > p_0$ ou, de façon équivalente,
$$(f(b-\varepsilon))^p > \frac{b-a}{\varepsilon}\,(f(b-2\varepsilon))^p.$$
Puisque
$$\int_a^b (f(x))^p\,dx > \int_{b-\varepsilon}^b (f(b-\varepsilon))^p\,dx,$$
on voit que
$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x))^p\,dx &> \frac{1}{b-a}\int_{b-\varepsilon}^b (f(b-\varepsilon))^p\,dx\\ &= \frac{\varepsilon\,(f(b-\varepsilon))^p}{b-a} > (f(b-2\varepsilon))^p.\end{aligned}$$
On en déduit que $\theta(p)$ doit vérifier $\theta(p) > b - 2\varepsilon$ pour $p > p_0$, ce qui signifie que $\lim\limits_{p\to+\infty} \theta(p) = b$.

I.4.34. Clairement,

$$\int_a^b P(x)f(x)\,dx = 0$$

pour tout polynôme P. D'après le théorème d'approximation de Weierstrass (voir, par exemple, **III.1.33 (vol. II)**), il existe une suite de polynômes $\{P_n\}$ uniformément convergente sur $[a,b]$ vers f. Donc, d'après le résultat de **I.3.9**,

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b P_n(x)f(x)\,dx = 0,$$

ce qui donne $f(x) \equiv 0$ sur $[a\,,b]$.

I.4.35. Par hypothèse,

$$\int_a^b P(x)f(x)\,dx = 0$$

pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à N. On suppose, contrairement à la proposition, que $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leqslant b$, $m \leqslant N$, sont les zéros de f. On choisit alors les points $x_{i_1},\ldots,x_{i_r}$ où f change de signe. On peut, sans perte de généralité, supposer que $f(x) \geqslant 0$ dans $[a, x_{i_1}]$, $f(x) \leqslant 0$ dans $[x_{i_1}, x_{i_2}]$, et ainsi de suite. On pose

$$P(x) = \prod_{k=1}^{r}(x_{i_k} - x).$$

On a alors $P(x)f(x) \geqslant 0$ sur $[a\,,b]$ et $P(x)f(x) > 0$ sur chacun des intervalles $]a\,,x_{i_1}[$, $]x_{i_1}\,,x_{i_2}[$, …, $]x_{i_m}\,,b[$. On en déduit que

$$\int_a^b P(x)f(x)\,dx > 0,$$

bien que P soit un polynôme de degré inférieur ou égal à N. Contradiction.

I.4.36. Soit $f \in \mathscr{C}_{[-a,a]}$.

(a) On remarque d'abord que, par hypothèse,

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}(f(x)+f(-x))\,x^{2n}\,dx &= \int_{-a}^{a} f(x)x^{2n}\,dx + \int_{-a}^{a} f(-x)\,(-x)^{2n}\,dx\\ &= 2\int_{-a}^{a} f(x)x^{2n}\,dx = 0.\end{aligned}$$

De plus,

$$\int_{-a}^{a}(f(x)+f(-x))x^{2n+1}\,dx = \int_{-a}^{a} f(x)x^{2n+1}\,dx - \int_{-a}^{a} f(-x)(-x)^{2n+1}dx.$$

On voit donc que

$$\int_{-a}^{a} (f(x) + f(-x))\, x^n\, dx = 0 \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}$$

et le résultat cherché découle de **I.4.34**.

(b) La démonstration se mène comme en (a).

I.4.37. La première formule de la moyenne (voir **I.1.26**) donne

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x+h) - f(x))\, dx &= \int_{a+h}^{b+h} f(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \\ &= \int_{a+h}^{a} f(x)\, dx + \int_b^{b+h} f(x)\, dx \\ &= -hf(a + \theta h) + hf(b + \theta' h),\end{aligned}$$

où $\theta, \theta' \in [0\,, 1]$. La continuité de f donne alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_a^b (f(x+h) - f(x))\, dx = f(b) - f(a).$$

I.4.38. On a

$$g(x) = \int_{a+x}^{b+x} f(u)\, du.$$

Donc,

$$g'(x) = f(b+x) - f(a+x).$$

I.4.39. On obtient, en utilisant la règle de L'Hospital :

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2.$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\, dt}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

(c) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\, dt}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}\,.$$

(d) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^a} \int_0^x \ln \frac{P(t)}{Q(t)}\, dt\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln P(x) - \ln Q(x)}{a x^{a-1}} = 0.$$

I.4.40. On obtient, en utilisant la règle de L'Hospital :

(a)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt[5]{1+t^5}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt[5]{1+x^5}}=1.$$

(b)
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x (1+\sin t)^{\frac{1}{t}}\,dt\right)=\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

car
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{1+\sin x}=1.$$

(c)
$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x t^{1+t}\,dt\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^x}{2}=\frac{1}{2}\,.$$

(d)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\ln\int_0^x e^{t^2}\,dt&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2x\int_0^x e^{t^2}\,dt}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2xe^{x^2}}{2\int_0^x e^{t^2}\,dt+2xe^{x^2}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{2e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=1.\end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^{1/x^2}=e.$

I.4.41. Si $A=|f(x_0)|=\max\{|f(x)| : x\in[0\,,1]\}$, on a alors, pour $p>0$,

$$\left(\int_0^1|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_0^1 A^p\right)^{1/p}=A.$$

D'autre part, par continuité de la fonction f, étant donné $\varepsilon>0$, il existe un intervalle $[\alpha\,,\beta]\subset[0\,,1]$ tel que $|f(x)|\geqslant A-\frac{\varepsilon}{2}$ pour $x\in[\alpha\,,\beta]$. En conséquence,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}&\geqslant\left(\int_\alpha^\beta|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\geqslant\left(\int_\alpha^\beta\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}\\&=\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta-\alpha)^{1/p}\geqslant A-\varepsilon\end{aligned}$$

pour p suffisamment grand.

I.4.42. Soit $y_0 \in [c\,,d]$ et $\varepsilon > 0$ choisis arbitrairement. Puisque f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}$ et $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$ et pour $|y - y_0| < \delta$,

$$|I(y) - I(y_0)| \leqslant \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon.$$

I.4.43. Par définition,

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx = \lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}\,dx.$$

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ étant continue sur $\mathbf{R}$, elle y est aussi uniformément continue. Donc, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $x \in [a\,,b]$ et $|h| < \delta$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

D'où, par le théorème des accroissements finis,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}\,dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dx\right|& \\ \leqslant \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| dx &< \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dx.$$

I.4.44. On obtient, en appliquant la règle de L'Hospital et le résultat du problème précédent,

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 0} \ln\left(\int_0^1 (f(x))^p\,dx\right)^{1/p} &= \lim_{p\to 0} \frac{\ln \int_0^1 (f(x))^p\,dx}{p} \\ &= \lim_{p\to 0} \frac{\int_0^1 (f(x))^p \ln(f(x))\,dx}{\int_0^1 (f(x))^p\,dx} \\ &= \int_0^1 \ln f(x)\,dx,\end{aligned}$$

car

$$(f(x))^p \ln(f(x)) \xrightarrow[p\to 0]{} \ln f(x) \quad \text{et} \quad (f(x))^p \xrightarrow[p\to 0]{} 1$$

uniformément sur $[0\,,1]$.

I.4.45. On obtient, en utilisant le résultat de **I.4.41**,

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to-\infty}\left(\int_0^1 (f(x))^p\,dx\right)^{1/p} &= \lim_{p\to\infty}\left(\int_0^1 (f(x))^{-p}\,dx\right)^{-1/p} \\
&= \lim_{p\to\infty} \frac{1}{\left(\int_0^1 \frac{dx}{(f(x))^p}\right)^{1/p}} \\
&= \frac{1}{\max\left\{\frac{1}{f(x)} : x\in[0\,,1]\right\}} \\
&= \min\left\{f(x) : x\in[0\,,1]\right\}.
\end{aligned}$$

I.4.46. On va utiliser l'inégalité suivante (voir, par exemple, **II.5.30 (vol. II)**) :

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} > e^x - \frac{x}{N}e^x + \frac{x}{N} \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

Si on pose

$$F(x) = \int_0^x e^{-t}\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^{2N}}{(2N)!}\right) dt,$$

on obtient alors, avec l'inégalité précédente,

$$\begin{aligned}
F(2N) &= \int_0^{2N} e^{-t}\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^{2N}}{(2N)!}\right) dt \\
&> \int_0^{2N} \left(1 - \frac{t}{2N} + e^{-t}\frac{t}{2N}\right) dt > N.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$F(N) = \int_0^N e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^{2N}}{(2N)!}\right) dt < \int_0^N 1\, dt = N.$$

La fonction F étant continue, le résultat cherché découle de la propriété des valeurs intermédiaires.

I.4.47. On pose

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Par hypothèse,

$$\int_0^1 (P(x))^2\, dx = a_0 \int_0^1 P(x)\, dx.$$

D'autre part,

$$\int_0^1 x^k P(x)\, dx = \frac{a_n}{n+k+1} + \frac{a_{n-1}}{n+k} + \cdots + \frac{a_0}{k+1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

et, par hypothèse,

$$\frac{a_n}{n+k+1} + \frac{a_{n-1}}{n+k} + \cdots + \frac{a_0}{k+1} = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, n.$$

On observe maintenant que

$$\frac{a_n}{n+k+1} + \frac{a_{n-1}}{n+k} + \cdots + \frac{a_0}{k+1} = \frac{Q(k)}{(k+1)\ldots(n+k+1)}, \tag{1}$$

où Q est un polynôme de degré au plus n. Puisque que $Q(k) = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$, il existe une constante C telle que

$$Q(k) = C(k-1)(k-2)\ldots(k-n).$$

En prenant $k = 0$ dans (1), on voit que

$$\int_0^1 P(x)\, dx = \frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \cdots + \frac{a_0}{1} = (-1)^n \frac{C}{n+1}.$$

En multipliant maintenant (1) par $k+1$, puis en prenant $k=-1$, on obtient $a_0 = (-1)^n(n+1)C$. Donc,

$$a_0 = (n+1)^2 \int_0^1 P(x)\,dx,$$

ce qui implique le résultat cherché.

I.4.48. Si $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, d'après **I.4.42**, $I(y)$ est alors continue sur $[c\,,d]$. L'intégrale dans le premier membre de l'égalité à prouver existe donc. De plus, si

$$g(z) = \int_c^z I(y)\,dy \quad \text{et} \quad h(z) = \int_a^b \left(\int_c^z f(x,y)\,dy\right) dx,$$

alors $g'(z) = I(z)$ pour $z \in [c\,,d]$ et, d'après **I.4.42**, la fonction

$$F(x,z) = \int_c^z f(x,y)\,dy$$

est continue par rapport à x. Il est clair que $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z) = f(x,z)$ est continue sur $\mathbf{R}$. Donc, d'après **I.4.43**, $h'(z) = I(z)$, d'où $h'(z) = g'(z) = f(z)$ pour $z \in [c\,,d]$ et $h(z) = g(z) + C$. Puisque $h(c) = g(c) = 0$, on voit que $C = 0$, ce qui conclut la démonstration.

I.4.49. Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^b-x^a}{\ln x} = b-a$, l'intégrale est bien définie. D'après **I.4.48**, on a

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y\,dy\right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y\,dx\right) dy$$

$$= \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \ln\frac{1+b}{1+a}\,.$$

I.5. Intégrales impropres

I.5.1.

(a) On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} &= 8\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} \\
&= 8\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2(2x) + \frac{1}{2}\sin^2(2x)} \\
&= 8\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(2x)}\left(\frac{dx}{1+\frac{1}{2}\tan^2(2x)}\right) \\
&= 4\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\frac{1}{2}\tan^2(2x)}\, d(\tan(2x)) \\
&= 4\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+\frac{1}{2}t^2} \\
&= 2\pi\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

(b) On a

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln\frac{\sin 2x}{2}\, dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \ln\frac{\sin x}{2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin x) - \ln 2)\, dx.
\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

(c) On montre par récurrence que

$$\int_0^1 x^n (1-x)^\alpha\, dx = \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n+1)}\,.$$

Pour $n = 0$ et $\alpha > -1$, on a

$$\int_0^1 (1-x)^\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha+1} = \frac{0!}{\alpha+1}\,.$$

On suppose que l'égalité est vérifiée au rang n et on intègre par parties pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^\alpha\,dx &= \int_0^1 x^{n+1}\left(\frac{-(1-x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'dx\\ &= \frac{n+1}{\alpha+1}\int_0^1 x^n(1-x)^{\alpha+1}\,dx\\ &= \frac{(n+1)!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}.\end{aligned}$$

(d) Une intégration par parties donne

$$I_n=\int_0^1(-\ln x)^n\,dx = n\int_0^1(-\ln x)^{n-1}\,dx = nI_{n-1}.$$

Puisque que $I_1=1$, on en déduit que $I_n=n!$.

(e) Le changement de variable $t=1-\frac{x}{n}$ donne

$$\begin{aligned}\int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\,dx &= \int_0^1\frac{1-t^n}{1-t}\,dt\\ &= \int_0^1\left(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}\right)dt\\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

(f) On obtient, en intégrant n fois par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n\ln^n x\,dx &= -\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n\ln^{n-1}x\,dx\\ &= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\int_0^1 x^n\ln^{n-2}x\,dx\\ &= \cdots = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

(g) Si $n=1$, alors $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\frac{\pi}{2}$. Si $n>1$, le changement de variable $x=\tan t$ donne

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n} &= \int_0^{\pi/2}\cos^{2n}t\cos^{-2}t\,dt = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}t\,dt\\ &= \frac{1\times3\times\ldots\times(2n-3)}{2\times4\times\ldots\times(2n-2)}\times\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de **I.4.1(b)**.

(h) Le changement de variable $t = x - \sqrt{x^2-1}$ donne

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int_0^1 \frac{4t}{(1+t^2)^2}\,dt = 1.$$

(i) On remarque d'abord que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$$

et chacune des intégrales du second membre converge. De plus,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx &= \int_0^a \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx + \int_a^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx \\
&= \int_0^a \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx + \int_a^0 \frac{\ln\left(a^2/t\right)}{\left(a^2/t\right)^2+a^2}\left(-\frac{a^2}{t^2}\right)dt \\
&= \int_0^a \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx + \int_0^a \frac{2\ln a - \ln t}{t^2+a^2}\,dt \\
&= \int_0^a \frac{2\ln a}{t^2+a^2}\,dt = \frac{\pi \ln a}{2a}\,.
\end{aligned}$$

(j) On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,dx &= \frac{1}{a^3}\int_0^{+\infty} \frac{\ln a + \ln t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt \\
&= \frac{1}{a^3}\int_0^{+\infty} \frac{\ln a}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt + \frac{1}{a^3}\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt \\
&= \frac{\pi \ln a}{4a^3} + \frac{1}{a^3}\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt,
\end{aligned}$$

la dernière égalité venant de (g). Le changement de variable $t = \tan x$ donne alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \ln(\tan x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} \ln(\tan x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \ln(\tan x)\,dx,
\end{aligned}$$

car $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan x)\,dx = 0$ (voir la solution de (b)). Finalement, une intégration par parties donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \ln(\tan x)\,dx = 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2} \times \frac{1}{\tan x} \times \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = -\frac{\pi}{2}.$$

(k) On voit, en utilisant le changement de variable $t = \pi - x$, que

$$I = \int_0^{\pi} \ln(1+\cos x)\,dx = \int_0^{\pi} \ln(1-\cos t)\,dt.$$

On a donc, par symétrie de $\sin x$ et d'après (b),

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\pi} \ln\left(1+\cos^2 x\right)dx = 2\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,dx \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx = -2\pi\ln 2. \end{aligned}$$

(l) Le changement de variable $x = \tan t$ et (b) donnent

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{\sin t \cos t}\right)dt = \pi \ln 2.$$

I.5.2. On observe que

$$f_\alpha(x) = -\left(\frac{\alpha}{x} - \left[\frac{\alpha}{x}\right]\right) + \alpha\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right).$$

Puisque

$$\int_{\alpha/(j+1)}^{\alpha/j} \left(\frac{\alpha}{x} - \left[\frac{\alpha}{x}\right]\right)dx = \alpha\int_{1/(j+1)}^{1/j} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)dx$$

pour $j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_\alpha(x) &= -\int_0^{\alpha} \left(\frac{\alpha}{x} - \left[\frac{\alpha}{x}\right]\right)dx - \int_\alpha^1 \left(\frac{\alpha}{x} - \left[\frac{\alpha}{x}\right]\right)dx + \alpha\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)dx \\ &= -\int_\alpha^1 \left(\frac{\alpha}{x} - \left[\frac{\alpha}{x}\right]\right)dx = \alpha\ln\alpha. \end{aligned}$$

I.5.3. On suppose, par exemple, que f est croissante sur $]0\,,1[$. On a alors

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\,dx \leqslant \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx,$$

ce qui implique le résultat cherché.

I.5.4. On peut supposer, sans perte de généralité, que f est décroissante et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ est finie. On a alors

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx \leqslant \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n}.$$

Donc, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx$ existe et est finie.

I.5.5. On considère

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}.$$

La fonction f est décroissante sur $]0\,,1[$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n}=0,$$

mais l'intégrale impropre $\int_0^1 f(x)\,dx$ n'existe pas.

I.5.6.

(a) On voit, en prenant $f(x)=\ln x$, que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n-1}{n}}{n}=-1.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}.$$

(b) On obtient, en prenant $f(x)=\ln\sin(\frac{\pi x}{2})$ pour $x\in\,]0\,,1]$ et en utilisant **I.5.1(b)**,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}=\frac{1}{2}.$$

(c) On pose

$$a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln k)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right)^2.$$

On a alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}+\ln n\right)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}+\ln n\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k}{n}\right)^2. \end{aligned}$$

Donc, d'après **I.5.3** et **I.5.1(d)**,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \int_0^1 (\ln x)^2\,dx - \left(\int_0^1 \ln x\,dx\right)^2 = 2-1 = 1.$$

I.5.7. On remarque d'abord que le théorème de Cauchy (voir, par exemple, **I.1.37 (vol. II)**) implique le critère suivant pour la convergence des intégrales impropres : pour $g\colon]a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, l'intégrale impropre $\int_a^b g(x)\,dx$ converge si et seulement si, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\left|\int_{a_1}^{a_2} g(x)\,dx\right| < \varepsilon$ pour tous a_1 et a_2 tels que $a < a_1 < a+\delta$ et $a < a_2 < a+\delta$.

Il s'ensuit, par hypothèse, que

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x} t^\alpha f(t)\,dt = 0.$$

Clairement, on peut supposer qu'il existe $x_0 > 0$ tel que f est soit strictement positive, soit strictement négative sur $]0\,,x_0[$. Si f est strictement positive sur $]0\,,x_0[$ et décroissante, alors

$$\int_x^{2x} t^\alpha f(t)\,dt > \begin{cases} f(2x)x^\alpha x & \text{si } \alpha \geqslant 0, \\ f(2x)(2x)^\alpha x & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

De même, si f est strictement positive sur $]0\,,x_0[$ et croissante, alors

$$\int_x^{2x} t^\alpha f(t)\,dt > \begin{cases} f(x)x^\alpha x & \text{si } \alpha \geqslant 0, \\ f(x)(2x)^\alpha x & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Les inégalités précédentes impliquent $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)x^{\alpha+1} = 0$. Un raisonnement analogue s'applique au cas où f est strictement négative sur $]0\,,x_0[$.

I.5.8.

(a) On a

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\ln\ln x - \ln\ln 2 = +\infty.$$

(b) Puisque
$$\frac{\sin^2 x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2},$$
l'intégrale converge.

(c) Le changement de variable $-\ln x = t$ donne
$$\int_0^1 (-\ln x)^a \, dx = \int_0^{+\infty} t^a e^{-t} \, dt = \int_0^1 t^a e^{-t} \, dt + \int_1^{+\infty} t^a e^{-t} \, dt.$$
Puisque
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^a e^{-t}}{t^{-2}} = 0,$$
la dernière intégrale converge pour tout réel a. De plus, puisque
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^a e^{-t}}{t^a} = 1,$$
l'intégrale $\int_0^1 t^a e^{-t} \, dt$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^1 t^a \, dt$ converge, autrement dit, si et seulement si $a > -1$.

(d) Comme en (c),
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a(-\ln x)^b} = \int_0^{+\infty} t^{-b} e^{-(1-a)t} \, dt.$$
On vérifie facilement que cette dernière intégrale diverge vers $+\infty$ pour tout b si $a \geqslant 1$. Puisque, pour $a < 1$,
$$\int_0^{+\infty} t^{-b} e^{-(1-a)t} \, dt = (1-a)^{b-1} \int_0^{+\infty} t^{-b} e^{-t} \, dt,$$
on déduit de la solution de (c) que notre intégrale converge si et seulement si $a < 1$ et $b < 1$.

(e) La divergence de l'intégrale se déduit de l'inégalité
$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2\sin^2 x} \, dx \geqslant \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \, dx.$$

I.5.9. Puisque $f(t) + \frac{1}{f(t)} \geqslant 2$, on voit que
$$\int_a^x f(t)g(t) \, dt + \int_a^x \frac{g(t)}{f(t)} \, dt \geqslant 2 \int_a^x g(t) \, dt.$$
On obtient le résultat voulu en faisant tendre x vers $+\infty$.

I.5.10. L'énoncé découle immédiatement de la définition de l'intégrale impropre et du théorème de Cauchy donné, par exemple, en **I.1.37 (vol. II)**.

I.5.11. Supposons que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et que $\{a_n\}$, $a_n > a$, est une suite croissante divergente vers $+\infty$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_a^{a_n} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

D'autre part, si la série précédente converge pour toute suite croissante $\{a_n\}$ divergente vers $+\infty$, alors la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt$ existe et est égale à la somme de la série.

Si f est positive, la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est alors croissante. De plus, s'il existe une suite croissante $\{a_n\}$, $a_n > a$, divergente vers $+\infty$ pour laquelle la série (1) converge, alors F est majorée par la somme de cette série. Donc la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ existe.

I.5.12. D'après le résultat du problème précédent, l'intégrale converge si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^a\sin^2 x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+(x+n\pi)^a\sin^2 x} < +\infty.$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+((n+1)\pi)^a\sin^2 x} &\leqslant \int_0^{\pi}\frac{dx}{1+(x+n\pi)^a\sin^2 x}\\ &\leqslant \int_0^{\pi}\frac{dx}{1+(n\pi)^a\sin^2 x}.\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+b^2\sin^2 x} = 2\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+b^2\sin^2 x}.$$

On voit alors, en faisant le changement de variable $y = \tan x$, que

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+b^2\sin^2 x} = \int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+(b^2+1)y^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{b^2+1}}.$$

On en déduit alors que l'intégrale converge pour $a > 2$ et diverge pour $0 < a \leqslant 2$.

I.5.13. Non. Prenez $f(x) = e^{-x} + g(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, où

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0\,,\frac{7}{4}\right], \\ 1 & \text{si } x = 2, 3, \ldots \\ n^2(x-n)+1 & \text{si } x \in \left[n - n^{-2}\,, n\right],\ n = 2, 3, \ldots \\ -n^2(x-n)+1 & \text{si } x \in \left[n\,, n + n^{-2}\right],\ n = 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

I.5.14. Oui, elle l'implique. En effet, si on n'a pas $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, il existe alors $\varepsilon > 0$ et une suite $\{x_n\}$ tendant vers $+\infty$ telle que $x_{n+1} - x_n > 2\varepsilon$ et telle que $f(x_n) \geqslant \varepsilon$. D'après le théorème des accroissements finis,

$$f(x) = f(x_n) + f'(\xi_n)(x - x_n), \quad x_n < \xi_n < x < x_n + \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

En conséquence,

$$f(x) > \varepsilon - 2\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } x \in \left[x_n\,, x_x + \frac{\varepsilon}{4}\right]$$

et

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x)\,dx &\geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx > \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_n+\varepsilon/4} f(x)\,dx \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{8} = +\infty. \end{aligned}$$

Contradiction.

I.5.15. On suppose, contrairement à l'énoncé, que l'on n'a pas $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ et une suite croissante $\{x_n\}$ tendant vers $+\infty$ telle que soit $f(x_n) \geqslant \varepsilon$ pour tout n, soit $f(x_n) \leqslant -\varepsilon$ pour tout n. Supposons, par exemple, que $f(x_n) \geqslant \varepsilon$ pour tout n. Par continuité uniforme de f, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $|t - s| < \delta$. Donc, pour $t \in [x_n - \delta\,, x_n + \delta]$, on obtient $f(t) > \frac{\varepsilon}{2}$, d'où

$$\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f(x)\,dx > \varepsilon\delta. \tag{1}$$

D'autre part, puisque l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, d'après le théorème de Cauchy (voir **I.5.10**), il existe $a_0 > a$ tel que pour $a_2 > a_1 > a_0$,

$$\left|\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon\delta,$$

ce qui contredit (1).

De plus, on peut remarquer que si f est continue sur $[a\,,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, f est alors uniformément continue sur $[a\,,+\infty[$ (voir, par exemple, **I.5.7(b) (vol. II)**).

On notera aussi que le résultat de **I.5.14** est un cas particulier de ce problème.

I.5.16. Soit $\{x_n\}$ une suite croissante tendant vers $+\infty$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors n_0 tel que

$$\int_{x_{n_0}}^{+\infty} f(x)\,dx < \varepsilon.$$

Donc, par monotonie de f, pour $n > n_0$,

$$(x_n - x_{n_0})f(x_n) \leqslant \int_{x_{n_0}}^{x_n} f(x)\,dx \leqslant \int_{x_{n_0}}^{+\infty} f(x)\,dx < \varepsilon$$

et

$$0 \leqslant x_n f(x_n) \leqslant \frac{x_n}{x_n - x_{n_0}}\,\varepsilon.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $0 \leqslant \varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n f(x_n) \leqslant \varepsilon$. Puisque l'on peut choisir ε arbitrairement, on voit que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n f(x_n) = 0$.

Pour voir que la réciproque est fausse, considérez, par exemple, $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ $(x \geqslant 2)$.

I.5.17.

(a) On suppose, contrairement à l'énoncé, que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln f(x)} < +\infty$. On voit, en utilisant le changement de variable $x = e^t$, que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\ln f(e^t)} < +\infty$. Le résultat du problème précédent implique $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln f(e^x)} = 0$. Donc, pour x suffisamment grand, $\frac{x}{\ln f(e^x)} < \frac{1}{2}$, et $\frac{e^x}{f(e^x)} < e^{-x}$. En conséquence, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$ converge. Contradiction.

(b) On pose

$$a_n = e^{e^{e^n}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

On définit f en posant $f(x) = a_n$ pour $a_{n-1} \leqslant x < a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. D'après **I.5.11**, on a

$$\int_{e^e}^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} = +\infty$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\int_{e^e}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln f(x) \ln(\ln f(x))} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{dx}{x e^{e^n} e^n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{e^n} - e^{e^{n-1}}}{e^{e^n} e^n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^n}.\end{aligned}$$

I.5.18. Soit $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. On a $F'x) = f(x)$ et, par hypothèse,

$$\lim_{x\to+\infty} (F'(x) + F(x)) = l, \quad l \in \mathbb{R}.$$

On déduit de **II.2.32 (vol. II)** que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = l$, d'où

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} F'(x) = 0.$$

I.5.19. Posons $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Par hypothèse, F est croissante et une intégration par parties donne

$$\frac{1}{n}\int_0^n x f(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^n x\,dF(x) = F(n) - \frac{1}{n}\int_0^n F(x)\,dx.$$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$. On montre alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^n F(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} F(n)$. Par monotonie de F, on a

$$\frac{F(0) + \cdots + F(n-1)}{n} \leqslant \frac{1}{n}\int_0^n F(x)\,dx \leqslant \frac{F(1) + \cdots + F(n)}{n}$$

et notre proposition se déduit de **II.3.2 (vol. I)**.

I.5.20. Puisque f est uniformément continue sur $[a\,,+\infty[$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(s) - f(t)| < 1$ si $|t - s| < \delta$. Supposons que f ne soit pas bornée. Il existe alors une suite $\{a_n\}$ telle que $a_{n+1} > a_n + \delta$ et $|f(a_n)| \geqslant n$. Par hypothèse,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{a_n} f(t)\,dt\right| &\geqslant \left|\int_{a_n-\frac{\delta}{2}}^{a_n} f(t)\,dt\right| - \left|\int_a^{a_n-\frac{\delta}{2}} f(t)\,dt\right| \\ &\geqslant \left|\int_{a_n-\frac{\delta}{2}}^{a_n} f(t)\,dt\right| - M.\end{aligned}$$

De plus, on a $|f(t)-f(a_n)|<1$ pour $t\in\left[a_n-\frac{\delta}{2}\,,a_n\right]$. Donc,

$$\left|\int_{a_n-\frac{\delta}{2}}^{a_n} f(t)\,dt\right| \geqslant (|f(a_n)|-1)\,\frac{\delta}{2} \geqslant (n-1)\,\frac{\delta}{2}$$

et

$$\left|\int_{a}^{a_n} f(t)\,dt\right| \geqslant (n-1)\,\frac{\delta}{2}-M.$$

Contradiction.

I.5.21. Une intégration par parties donne

$$\int_a^x f(t)f''(t)\,dt = f(x)f'(x)-f(a)f'(a)-\int_a^x \left(f'(t)\right)^2 dt. \tag{1}$$

D'après l'inégalité $(f(x))^2+(f''(x))^2 \geqslant 2\,|f(x)f''(x)|$ et les hypothèses, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)f''(t)\,dt$ converge. Clairement, lorsque x tend vers $+\infty$, $\int_a^x \left(f'(t)\right)^2 dt$ soit converge, soit diverge vers $+\infty$. Dans le second cas, d'après (1), $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)f'(x)=+\infty$ et, puisque

$$f^2(x)-f^2(a)=\frac{1}{2}\int_a^x f(t)f'(t)\,dt,$$

on voit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x) = +\infty$, ce qui contredit la convergence de $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$. On a donc prouvé la convergence de $\int_a^{+\infty} \left(f'(x)\right)^2 dx$.

I.5.22. On déduit du théorème de Cauchy (voir **I.5.10**) que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ converge si et seulement si, étant donné $\varepsilon>0$, il existe $a_0>a$ tel que pour $a_2>a_1>a_0$,

$$\left|\int_{a_1}^{a_2} f(x)g(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

D'après la seconde formule de la moyenne (voir **I.3.16**),

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)g(x)\,dx = g(a_1)\int_{a_1}^{c} f(x)\,dx + g(a_2)\int_{c}^{a_2} f(x)\,dx$$

pour un certain $c\in[a_1\,,a_2]$. Puisque g est bornée, il existe $C>0$ tel que $|g(x)|\leqslant C$ pour $x\in[a\,,+\infty[$. D'après (1), l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existe et le théorème de Cauchy implique qu'il existe $a_0>a$ tel que

$$\left|\int_{a_1}^{c} f(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{et} \quad \left|\int_{c}^{a_2} f(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2C}$$

pour $a_1 > a_0$. Donc,

$$\begin{aligned}\left|\int_{a_1}^{a_2} f(x)g(x)\,dx\right| &\leqslant |g(a_1)|\left|\int_{a_1}^{c} f(x)\,dx\right| + |g(a_2)|\left|\int_{c}^{a_2} f(x)\,dx\right| \\ &< C\frac{\varepsilon}{2C} + C\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon.\end{aligned}$$

I.5.23. Comme dans la démonstration du test d'Abel, on montre que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $a_0 > a$ tel que

$$\left|\int_{a_1}^{a_2} f(x)g(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

pour $a_2 > a_1 > a_0$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, il existe $a_0 > a$ tel que $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4C}$ pour $x > a_0$. D'après la seconde formule de la moyenne et d'après (1),

$$\begin{aligned}\left|\int_{a_1}^{a_2} f(x)g(x)\,dx\right| &\leqslant |g(a_1)|\left|\int_{a_1}^{c} f(x)\,dx\right| + |g(a_2)|\left|\int_{c}^{a_2} f(x)\,dx\right| \\ &< 2C\frac{\varepsilon}{4C} + 2C\frac{\varepsilon}{4C} = \varepsilon.\end{aligned}$$

I.5.24.

(a) Puisque

$$\left|\int_{1}^{b} \sin x\,dx\right| \leqslant 2 \quad \text{pour tout } b > 1$$

et puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ tend de façon monotone vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ découle du test de Dirichlet.

(b) Si l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ convergeait, alors $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ convergerait aussi (car $\sin^2 x \leqslant |\sin x|$). Ceci donnerait

$$\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx < +\infty. \tag{1}$$

Comme en (a), on peut prouver que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ converge. Ceci, combiné avec (1), impliquerait la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$. Contradiction.

(c) Le changement de variable $x = \sqrt{t}$ donne

$$\int_1^{+\infty} \sin\left(x^2\right)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt.$$

Donc, comme en (a), l'intégrale converge.

(d) On applique le test de Dirichlet avec $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ et $f(x) = e^{\sin x} \sin 2x$ car

$$\left|\int_1^b e^{\sin x} \sin 2x\, dx\right| = \left|\left[2e^{\sin x}(\sin x - 1)\right]_1^b\right| \leqslant 8e$$

pour tout $b > 1$.

(e) On pose

$$g(x) = \frac{\ln^\alpha x}{x} \quad \text{et} \quad f(x) = \sin x.$$

On a alors

$$g'(x) = \frac{\ln^{\alpha-1} x}{x^2}(\alpha - \ln x) < 0$$

pour x suffisamment grand. Donc g décroît vers 0 et le test de convergence de Dirichlet s'applique.

I.5.25. Si $\int_a^{a+T} f(x)\, dx = 0$, alors de même $\int_a^{a+kT} f(x)\, dx = 0$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $b > a$, on pose $k = \left[\frac{b-a}{T}\right]$. D'après le résultat de **I.4.8**, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| &= \left|\int_{a+kT}^b f(x)\, dx\right| = \left|\int_a^{b-kT} f(x) dx\right| \\ &\leqslant \int_a^{b-kT} |f(x)|\, dx \leqslant \int_a^{a+T} |f(x)|\, dx = C.\end{aligned}$$

Le premier énoncé est alors une conséquence immédiate du test de Dirichlet (voir **I.5.23**).

Pour démontrer le second énoncé, on pose $\int_a^{a+T} f(x)\, dx = I \neq 0$ et on considère l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \left(f(x) - \frac{I}{T}\right) g(x)\, dx.$$

Ce que l'on a déjà prouvé implique que cette intégrale converge. En conséquence, $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\, dx$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge.

I.5.26.

(a) Puisque

$$\int_0^{2\pi} \sin(\sin x)e^{\cos x} dx = \int_0^{\pi} \sin(\sin x)e^{\cos x} dx + \int_\pi^{2\pi} \sin(\sin x)e^{\cos x} dx = 0,$$

l'intégrale considérée converge.

(b) On a

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(\sin x)e^{\sin x}\,dx &= \int_0^{\pi} \sin(\sin x)e^{\sin x}\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin(\sin x)e^{\sin x}\,dx \\ &= \int_0^{\pi} \left(e^{\sin x} - e^{-\sin x}\right)\sin(\sin x)\,dx > 0.\end{aligned}$$

Donc l'intégrale diverge.

I.5.27. On observe d'abord que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}$ existe et est finie pour tout α strictement positif. On peut donc se limiter à étudier la convergence de

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}\,dx.$$

On a

$$\frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} = \frac{\sin x}{x^\alpha} - \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha + \sin x)}.$$

On sait (voir **I.5.24(a)**) que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}$ converge pour $\alpha > 0$. Il suffit donc d'étudier l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha + \sin x)}\,dx. \tag{1}$$

Puisque

$$\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha + 1)} \leqslant \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha + \sin x)} \leqslant \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha - 1)}, \tag{2}$$

on voit que l'intégrale (1) converge pour $\alpha > \frac{1}{2}$. En appliquant le résultat de **I.5.25**, on trouve que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)}\,dx$ diverge pour $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. On déduit donc de (2) que l'intégrale (1) diverge aussi si $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. L'intégrale étudiée converge pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

I.5.28. Puisque

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} (xf(x))\frac{1}{x}\,dx,$$

l'énoncé découle du test de convergence d'Abel pour les intégrales impropres (voir **I.5.22**).

I.5.29. Supposons, par exemple, que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On voit alors, puisque $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ existe, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Donc, d'après **I.5.11**,

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nh}^{(n+1)h} f(x)\,dx \leqslant h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh).$$

De même,

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \geqslant h \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) = h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) - hf(0).$$

Donc,

$$0 \leqslant h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) - \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant hf(0),$$

ce qui donne l'égalité désirée.

En prenant $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, on obtient

$$\lim_{h\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h}{1+h^2n^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

I.5.30. Il est clair que

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1.$$

On suppose d'abord que $0 < \alpha < 1$ et on écrit

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx = \int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx = I_1 + I_2.$$

On a

$$I_1 = \int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx \leqslant \int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx = \frac{1}{\alpha}\,.$$

De plus,

$$I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx \leqslant \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = e^{-1}.$$

Si $\alpha > 1$, alors $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x}x^{\alpha-1} = 0$ et il suffit de prouver la convergence de

$$\int_{x_0}^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$$

pour un certain $x_0 > 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x/2}x^{\alpha-1} = 0$, il existe x_0 tel que $e^{-x/2}x^{\alpha-1} < 1$ pour $x > x_0$. Donc,

$$\int_{x_0}^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx \leqslant \int_{x_0}^{+\infty} e^{-x/2}\,dx = 2e^{\frac{-x_0}{2}}.$$

I.5.31. On pose $f(x) = e^{-x}x^{\alpha-1}$ et on prend $h = -\ln t$. On a alors

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{t\to1^-}(-\ln t)\sum_{n=1}^{+\infty} t^n(-n\ln t)^{\alpha-1} = \lim_{t\to1^-}(-\ln t)^{\alpha}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-1}t^n.$$

Puisque $\lim\limits_{t\to1^-}\frac{-\ln t}{1-t} = 1$, on obtient

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{t\to1^-}(1-t)^{\alpha}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-1}t^n.$$

On note maintenant que, pour $0 < t < 1$,

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}\,t^n$$

et on remarque que la suite

$$c_n = \frac{n^{\alpha-1}n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}$$

est monotone. En effet, si $\alpha \geqslant 1$, alors

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n}{\alpha+n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \geqslant 1,$$

car $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \geqslant 1+\frac{\alpha}{n}$ (voir, par exemple, **II.3.7(a) (vol. II)**). Dans ce cas donc, la suite $\{c_n\}$ soit converge, soit diverge vers $+\infty$. Si $0 < \alpha < 1$, alors $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} < 1+\frac{\alpha}{n}$ (voir, par exemple, **II.3.7(b) (vol. II)**) et la suite $\{c_n\}$ est décroissante. Il suffit pour conclure la démonstration d'appliquer le résultat donné, par exemple, en **III.3.21 (vol. II)** (qui peut aussi être étendu au cas où $A = +\infty$).

I.5.32. On a

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\alpha-1}n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\alpha-1}n}{\alpha(\alpha+1)\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{\alpha}{n-1}+1\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\frac{1}{\alpha}\exp\left(-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha}{k}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\frac{e^{\alpha/k}}{1+\frac{\alpha}{k}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{\alpha\left(\ln n-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)\right)}\frac{1}{\alpha}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{e^{\alpha/k}}{1+\frac{\alpha}{k}} \\
&= \frac{e^{-\gamma\alpha}}{\alpha}\prod_{k=1}^{+\infty}e^{\alpha/k}\left(1+\frac{\alpha}{k}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

I.5.33. D'après **I.5.24(a)**, on sait que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ converge. Donc,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi/2}\frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

D'où

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)x}{x}\,dx.$$

On va prouver que

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad (n\in\mathbb{N}^*) \tag{1}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)x}{x}\,dx - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx\right) = 0. \tag{2}$$

Pour prouver (1), on se rappelle que

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

pour $x\in\,]0\,,2\pi[$. Donc,

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1+2\cos 2x+2\cos 4x+\cdots+2\cos 2nx, \quad x\in\,]0\,,\pi[\,.$$

Ceci donne

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\, dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Pour prouver (2), on remarque que, d'après **I.4.11(a)**,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{x}\, dx - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\, dx\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - x}{x\sin x}\sin(2n+1)x\, dx = 0.$$

I.5.34. L'inégalité

$$1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$

implique

$$\left(1-x^2\right)^n \leqslant e^{-nx^2} \quad \text{pour } |x| \leqslant 1,\ n \in \mathbb{N}^*$$

et

$$e^{-nx^2} \leqslant \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc,

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx \leqslant \int_0^1 e^{-nx^2}\, dx \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\, dx \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx.$$

On obtient alors, d'après la solution de **I.4.2** et d'après **I.5.1(g)**,

$$\frac{2\times 4\times\cdots\times(2n)}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\, dx \leqslant \frac{3\times 5\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times\cdots\times(2n-2)} \times \frac{\pi}{2}\,.$$

De plus, le changement de variable $t = x\sqrt{n}$ donne

$$\sqrt{n}\frac{2\times 4\times\cdots\times(2n)}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \leqslant \frac{3\times 5\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times\cdots\times(2n-2)} \times \frac{\pi}{2}\sqrt{n},$$

ce qui, combiné avec la formule de Wallis (voir, par exemple, **III.8.38 (vol. I)**), donne l'égalité désirée.

I.5.35. D'après le théorème de Cauchy (voir **I.5.10**), étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $a_0 > a$ tel que pour $b > a_0$ et $y \in \mathbf{A}$, on a

$$\left|\int_a^b f(x,y)\, dx - \int_a^{a_0} f(x,y)\, dx\right| \leqslant \int_{a_0}^b |f(x,y)|\, dx \leqslant \int_{a_0}^b \varphi(x)\, dx < \varepsilon.$$

Ceci implique le résultat voulu.

I.5.36. Il suffit de prouver que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $a_0 > a$ tel que

$$\left|\int_{a_1}^{a_2} f(x,y)g(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$$

pour $a_2 > a_1 > a_0$ et pour $y \in \mathbf{A}$. D'après la seconde formule de la moyenne (voir **I.3.16**),

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x,y)g(x,y)\,dx = g(a_1,y)\int_{a_1}^{c} f(x,y)\,dx + g(a_2,y)\int_{c}^{a_2} f(x,y)\,dx$$

pour un certain c de $[a_1\,,a_2]$. Puisque g est bornée, il existe $C > 0$ tel que $|g(x,y)| \leqslant C$ pour $x \in [a\,,+\infty[$ et $y \in \mathbf{A}$. La convergence uniforme de $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ implique qu'il existe $a_0 > a$ tel que

$$\left|\int_{a_1}^{c} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{et} \quad \left|\int_{c}^{a_2} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

pour $a_1 > a_0$ et $y \in \mathbf{A}$. Donc, pour $y \in \mathbf{A}$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{a_1}^{a_2} f(x,y)g(x,y)\,dx\right| &\leqslant |g(a_1,y)|\left|\int_{a_1}^{c} f(x,y)\,dx\right| + |g(a_2,y)|\left|\int_{c}^{a_2} f(x,y)\,dx\right| \\ &< C\frac{\varepsilon}{2C} + C\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon.\end{aligned}$$

I.5.37. Appliquez les tests précédents avec $f(x,y) = f(x)$ pour tout $y \in \mathbf{A}$.

I.5.38. La démonstration est semblable à celle de **I.5.36**.

I.5.39.

(a) La convergence uniforme de $\int_a^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx$ sur $[a_0\,,+\infty[$ se déduit du test donné au problème précédent.

(b) L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx$ n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$. En effet pour tout $b > 0$,

$$\int_b^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx = \int_{ba}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

d'où

$$\lim_{a\to 0^+}\int_b^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

cette dernière égalité provenant de **I.5.33**.

(c) Puisque
$$\left|\frac{\cos a(x^2+1)}{x^2+1}\right| \leqslant \frac{1}{x^2+1}, \quad a \in \mathbb{R},$$
la convergence uniforme de l'intégrale se déduit de **I.5.35**.

(d) On sait (comparez avec **I.5.24(c)**) que $\int_0^{+\infty} \cos^2 x\, dx$ converge. La convergence uniforme de l'intégrale se déduit donc de **I.5.37**.

I.5.40. Puisque $f(x,y)$ converge vers $\varphi(x)$ lorsque y tend vers y_0 uniformément sur un intervalle $[a\,,b]$,
$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx \quad \text{(voir } \textbf{I.3.9}\text{)}. \tag{1}$$
De plus, la convergence uniforme de $\int_a^{+\infty} f(x,y)\, dx$ implique que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $a_0 > a$ tel que pour $b, b' > a_0$
$$\left|\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^{b'} f(x,y)\, dx\right| < \varepsilon$$
pour tout $y \in \mathbf{A}$. En faisant tendre y vers y_0, on obtient, d'après (1),
$$\left|\int_a^b \varphi(x)\, dx - \int_a^{b'} \varphi(x)\, dx\right| < \varepsilon.$$
Ceci signifie que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ converge. On montre maintenant que l'égalité cherchée est bien vérifiée. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $a_0 > a$ tel que pour $b > a_0$,
$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)\, dx\right| < \varepsilon \quad \text{pour tout } y \in \mathbf{A}$$
et
$$\left|\int_b^{+\infty} \varphi(x)\, dx\right| < \varepsilon.$$
De plus, d'après (1), il existe $\delta = \delta(b,\varepsilon)$ tel que
$$\left|\int_a^b f(x,y)\, dx - \int_a^b \varphi(x)\, dx\right| < \varepsilon$$
si $|y - y_0| < \delta$. En conséquence,
$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)\, dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx\right| < 3\varepsilon$$
dès que $|y - y_0| < \delta$.

Il est clair que l'on suppose que y_0 est un point de l'adhérence de $\mathbf{A}$. De plus, le raisonnement précédent s'applique encore lorsque y tend vers $+\infty$. En particulier, le théorème s'applique à des suites de fonctions.

I.5.41. Ici $\mathbf{A} = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \left[e^{-\frac{n}{2x^2}}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

De plus, puisque

$$\sup_{x \geqslant 0} f_n(x) = f_n\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{n}\,e^{-3/2},$$

f_n converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$, mais

$$1 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \neq \int_0^{+\infty} 0\,dx = 0.$$

On remarque que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{N}^*$ car

$$\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1 - e^{-\frac{n}{2a^2}} > 1 - e^{-1} \quad \text{pour} \quad n > 2a^2.$$

I.5.42.

(a) D'après **I.5.37**, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,e^{-yx}\,dx$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\sup_{x\in[0,b]} \left|\frac{\sin x}{x}\,e^{-yx} - \frac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1 - e^{-yb}.$$

Le résultat se déduit donc de **I.5.33** et **I.5.40**.

(b) On prouve d'abord que

$$\sin x^2 \operatorname{Arctan}(yx) \xrightarrow[y\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}\sin x^2$$

uniformément sur $\mathbb{R}_+$. En effet, étant donné $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|\sin x^2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(yx)\right)\right| \\
&\leqslant \sup_{x\in\left[0,\sqrt{\varepsilon/\pi}\right]} \left|\sin x^2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(yx)\right)\right| \\
&\quad + \sup_{x\in\left[\sqrt{\varepsilon/\pi},+\infty\right[} \left|\sin x^2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(yx)\right)\right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(y\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}\right) < \varepsilon
\end{aligned}$$

pour y suffisamment grand. De plus, la convergence uniforme de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin x^2 \operatorname{Arctan}(yx)\,dx$ se déduit de **I.5.24(c)** et **I.5.37**. On peut donc appliquer **I.5.40**.

(c) Pour montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} dx$ converge uniformément sur $\mathbb{N}^*$, on applique **I.5.37** en prenant $g(x,n) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}$ et $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Le résultat souhaité se déduit donc de **I.5.40**.

(d) Comme précédemment, on applique **I.5.37**, **I.5.1(h)** et **I.5.40**.

(e) Le changement de variable $u = yx$ donne

$$\int_0^{+\infty} y^2 \sin x e^{-y^2x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} y \sin\frac{u}{y}\, e^{-u^2}\,du.$$

La convergence uniforme de cette dernière intégrale sur $\mathbb{R}_+^*$ découle de **I.5.35**. Il est aussi clair que $y\sin\frac{u}{y}\,e^{-u^2} \xrightarrow[y\to 0^+]{} 0$, uniformément sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc appliquer **I.5.40**.

I.5.43. Puisque l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ converge uniformément sur $[c\,,d]$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $b > a$ tel que

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout $y \in [c\,,d]$. De plus, la convergence uniforme de f sur $[a\,,b]\times[c\,,d]$ implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

pour $(x,y_1),(x,y_2) \in [a\,,b]\times[c\,,d]$ si $|y_1 - y_2| < \delta$. En conséquence,

$$\begin{aligned}
&|I(y_1) - I(y_2)|\\
&\quad= \left|\int_a^b f(x,y_1)\,dx - \int_a^b f(x,y_2)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x,y_1)\,dx - \int_b^{+\infty} f(x,y_2)\,dx\right|\\
&\quad\leqslant \int_a^b |f(x,y_1) - f(x,y_2)|\,dx + \left|\int_b^{+\infty} f(x,y_1)\,dx\right| + \left|\int_b^{+\infty} f(x,y_2)\,dx\right|\\
&\quad< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

I.5.44. Puisque $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ converge pour tout $y \in [c\,,d]$, on peut écrire

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x,y)\,dx,$$

où $a_0 = a$ et $\{a_n\}$ est une suite croissante tendant vers $+\infty$ (voir **I.5.11**). D'après **I.4.43**,

$$\frac{d}{dy}\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x,y)\,dx = \int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

De plus, la convergence uniforme de l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ implique la convergence uniforme sur $[c\,,d]$ de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

On voit en utilisant, par exemple, le résultat de **III.2.28 (vol. II)** que

$$\frac{d}{dy}I(y) = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

I.5.45.

(a) On déduit de **I.5.34** que

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0. \tag{1}$$

On remarque aussi que chacune des intégrales impropres

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}x^{2n}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

converge uniformément sur $[c\,,d]$, $0 < c < d$. Donc, en dérivant (1) sous l'intégrale, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}x^{2n}\,dx = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

(b) Puisque

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a+x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}},$$

comme précédemment, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\times\frac{1}{a^n}\times\frac{\pi}{2\sqrt{a}}.$$

(c) On pose
$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} e^{-x}\,dx.$$
En dérivant sous l'intégrale, on obtient
$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \cos(ax)e^{-x}\,dx.$$
Une intégration par parties donne alors
$$I'(a) = 1 - a^2 I'(a).$$
Donc $I'(a) = \frac{1}{1+a^2}$ dont on déduit que $I(a) = \operatorname{Arctan} a + C$. Puisque $I(0) = 0$, on a $I(a) = \operatorname{Arctan} a$.

(d) On pose
$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(ax)}{x} e^{-x}\,dx.$$
En dérivant sous l'intégrale et en intégrant par parties, on obtient
$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \sin(ax)e^{-x}\,dx = a\int_0^{+\infty} \cos(ax)e^{-x}\,dx = \frac{a}{1+a^2},$$
la dernière égalité se déduisant de (c). Puisque $I(0) = 0$, il s'ensuit que $I(a) = \frac{1}{2}\ln\left(1+a^2\right)$.

I.5.46.

(a) On pose
$$I(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos(yx)\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos(yx)\,dx.$$
D'après le résultat de **I.5.44**,
$$I'(y) = -2\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} x\sin(yx)\,dx.$$
Une intégration par parties donne
$$I'(y) = -2y\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos(yx)\,dx = -yI(y).$$
Donc,
$$I(y) = Ce^{-y^2/2}$$
et, puisque $I(0) = \sqrt{2\pi}$ (voir **I.5.34**), le résultat cherché suit.

(b) On pose

$$I(y)=\int_0^{+\infty} e^{-x-y/x}\frac{dx}{\sqrt{x}}\,.$$

Une dérivation sous l'intégrale (voir **I.5.44**) donne

$$I'(y)=-\int_0^{+\infty} e^{-x-y/x}\frac{dx}{x\sqrt{x}}\,.$$

On obtient alors, avec le changement de variable $t=\frac{y}{x}$,

$$I'(y)=-\frac{1}{\sqrt{y}}\,I(y).$$

Donc,

$$I(y)=Ce^{-2\sqrt{y}}$$

et l'égalité cherchée se déduit de

$$I(0)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}.$$

I.5.47. D'après **I.5.43**, $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ est continue sur $[c\,,d]$ donc Riemann-intégrable sur cet intervalle. On a

$$\int_c^d I(y)\,dy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy+\int_c^d\left(\int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Par uniforme convergence de $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ sur $[c\,,d]$, on a

$$\left|\int_c^d\left(\int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy\right|\xrightarrow[b\to+\infty]{}0.$$

Donc, d'après **I.4.48**,

$$\int_c^d I(y)\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx+o(1)\quad\text{lorsque } b \text{ tend vers } +\infty.$$

On obtient l'égalité cherchée en faisant tendre b vers $+\infty$.

I.5.48.

(a) On a

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\,dx=\int_0^{+\infty}\left(\int_b^a e^{-yx}\,dy\right)dx.$$

Puisque $\int_0^{+\infty} e^{-yx}\,dx$ converge uniformément sur l'intervalle fermé $[a\,,b]$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\,dx=\int_b^a\left(\int_0^{+\infty} e^{-yx}\,dx\right)dy=\int_b^a\frac{1}{y}\,dy=\ln\frac{a}{b}\,.$$

(b) Comme en (a),

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(bx) - \cos(ax)}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_a^b -\frac{\sin(yx)}{x}\,dy\right) dx$$
$$= \int_a^b \left(\int_0^{+\infty} -\frac{\sin(yx)}{x}\,dx\right) dy$$
$$= -\frac{\pi}{2}\,(b-a)\,,$$

la dernière égalité se déduisant de **I.5.39(a)**.

I.5.49. On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_a^b f'(yx)\,dy\right) dx.$$

Il est clair que

$$\int_0^{+\infty} f'(yx)\,dx = \frac{l - f(0)}{y}\,.$$

Étant donné que f' est monotone, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ et f' est soit positive et décroissante, soit négative et croissante. On suppose, par exemple, que f' est positive et décroissante pour démontrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f'(yx)\,dx$ converge uniformément sur $[a\,,b]$. On a

$$f'(yx) \leqslant f'(ax) \quad (x \geqslant 0,\ y \in [a\,,b])$$

et la convergence uniforme se déduit de **I.5.35**. D'après le résultat de **I.5.47**,

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx = \int_a^b \left(\int_0^{+\infty} f'(yx)\,dx\right) dy = (l - f(0))\ln\frac{b}{a}\,.$$

I.5.50. On suppose, par exemple, que la première intégrale de (d) converge et on pose

$$F(x,d) = \int_c^d f(x,y)\,dy, \quad x \geqslant a.$$

D'après **I.5.47**, on a alors

$$\int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^{+\infty} F(x,d)\,dx.$$

Puisque

$$|F(x,d)| \leqslant \varphi(x) = \int_c^{+\infty} |f(x,y)|\, dy$$

et puisque l'intégrale $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ converge, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} F(x,d)\, dx$ converge uniformément sur $[c\,, +\infty[$ d'après le résultat de **I.5.35**. On montre alors que $F(x,d)$ converge vers $\int_c^{+\infty} f(x,y)\, dy$ uniformément sur chaque intervalle $[a\,, b]$ lorsque d tend vers $+\infty$. En effet, d'après (b), étant donné $\varepsilon > 0$, il existe d_0 tel que

$$\sup_{x\in[a,b]} \left| F(x,d) - \int_c^{+\infty} f(x,y)\, dy \right| = \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_d^{+\infty} f(x,y)\, dy \right| < \varepsilon$$

pour $d > d_0$. On obtient, en utilisant le résultat de **I.5.40**,

$$\begin{aligned} \lim_{d\to+\infty} \int_a^{+\infty} F(x,d)\, dx &= \int_a^{+\infty} \left(\lim_{d\to+\infty} F(x,d) \right) dx \\ &= \int_a^{+\infty} \left(\int_c^{+\infty} f(x,y)\, dy \right) dx. \end{aligned}$$

I.5.51. On obtient, avec le changement de variable $x = \sqrt{u}$,

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du$$

et

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du.$$

On calcule la seconde intégrale, la première se calculant pareillement. D'après le résultat de **I.5.34**, on a

$$\frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-uy^2}\, dy.$$

Pour $k > 0$, on considère

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, e^{-ku}\, du.$$

On déduit de ce qui précède que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, e^{-ku}\, du &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin u e^{-ku} \left(\int_0^{+\infty} e^{-uy^2}\, dy\right) du\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \sin u e^{-\left(k+y^2\right)u}\, dy\right) du\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \sin u e^{-\left(k+y^2\right)u}\, du\right) dy,\end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de **I.5.50**. Un calcul facile montre que

$$\int_0^{+\infty} \sin u e^{-\left(k+y^2\right)u}\, du = \frac{1}{1+\left(k+y^2\right)^2}\,.$$

En conséquence,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, e^{-ku}\, du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\left(k+y^2\right)^2}\, dy.$$

Finalement, en utilisant le résultat de **I.5.40**, on peut permuter la limite et l'intégrale pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du &= \lim_{k\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, e^{-ku}\, du\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^4}\, dy\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.\end{aligned}$$

I.5.52. Puisque $f(x,y)$ converge uniformément vers $\varphi(x)$ sur $[a\,,b-\eta]$ lorsque y tend vers y_0,

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^{b-\eta} f(x,y)\, dx = \int_a^{b-\eta} \varphi(x)\, dx \quad \text{(voir I.3.9)}. \tag{1}$$

De plus, par hypothèse, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_0 > 0$ tel que, pour $0 < \eta, \eta' < \eta_0$,

$$\left|\int_a^{b-\eta} f(x,y)\, dx - \int_a^{b-\eta'} f(x,y)\, dx\right| < \varepsilon$$

pour tout $y \in \mathbf{A}$. En faisant tendre y vers y_0, on obtient, avec (1),

$$\left|\int_a^{b-\eta} \varphi(x)\, dx - \int_a^{b-\eta'} \varphi(x)\, dx\right| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci signifie que l'intégrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ converge (comme une intégrale impropre entre des bornes finies). On prouve maintenant que l'égalité cherchée est bien vérifiée. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\eta_0 > 0$ tel que, pour $0 < \eta < \eta_0$,

$$\left|\int_{b-\eta}^{b} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon \quad (y \in \mathbf{A})$$

et

$$\left|\int_{b-\eta}^{b} \varphi(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

De plus, il existe $\delta = \delta(\eta, \varepsilon)$ tel que

$$\left|\int_{a}^{b-\eta} f(x,y)\,dx - \int_{a}^{b-\eta} \varphi(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

si $|y - y_0| < \delta$. En conséquence,

$$\left|\int_{a}^{b} f(x,y)\,dx - \int_{a}^{b} \varphi(x)\,dx\right| < 3\varepsilon$$

dès que $|y - y_0| < \delta$.

Clairement, on suppose que y_0 est une valeur d'adhérence de $\mathbf{A}$. De plus, le raisonnement précédent s'applique au cas où $f(x,y)$ est Riemann-intégrable sur $[a+\eta\,, b]$ avec $0 < \eta < b - a$.

I.5.53. Pour appliquer le résultat du problème précédent avec $\mathbf{A} = \mathbb{N}^*$, on remarque que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \eta_0 < b - a$ tel que

$$\left|\int_{b-\eta}^{b} f_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_{b-\eta}^{b} |f_n(x)|\,dx \leqslant \int_{b-\eta}^{b} f(x)\,dx < \varepsilon$$

pour $0 < \eta < \eta_0$.

I.5.54. Puisque

$$\lim_{y\to+\infty} e^{-x^y} = \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0\,,1[, \\ \frac{1}{e} & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

on voit que la convergence n'est pas uniforme sur $[0\,,b]$ $(b > 1)$ et le résultat de **I.5.40** ne peut s'appliquer. On peut cependant écrire

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^y}\,dx = \int_0^1 e^{-x^y}\,dx + \int_1^2 e^{-x^y}\,dx + \int_2^{+\infty} e^{-x^y}\,dx.$$

D'après le résultat de **I.5.52**,

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^1 e^{-x^y}\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx = 1$$

et

$$\lim_{y\to+\infty}\int_1^2 e^{-x^y}\,dx = \int_1^2 \varphi(x)\,dx = 0.$$

La démonstration est complète puisqu'on peut appliquer le résultat de **I.5.40** à l'intégrale $\int_2^{+\infty} e^{-x^y}\,dx$.

I.5.55. On pose

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant n,\\ 0 & \text{si } t > n. \end{cases}$$

D'après **II.1.39 (vol. I)**, la suite est strictement croissante sur tout intervalle $[0\,,a]$ à partir d'une certaine valeur de l'indice n. De plus, $f_n(t)$ et la fonction $f(t) = e^{-t}t^{x-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$ sont continues. D'après le théorème de Dini (voir, par exemple, **III.1.16 (vol. II)**), $\{f_n\}$ converge vers f uniformément sur $[0\,,a]$. Puisque $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \Gamma(x) < +\infty$ (voir **I.5.30**), étant donné $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_a^{+\infty} f_n(t)\,dt \leqslant \int_a^{+\infty} f(t)\,dt < \varepsilon$$

pour a suffisamment grand. Le résultat de **I.5.40** s'applique donc.

I.5.56. On montre d'abord que

$$\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}\,. \tag{1}$$

On sait (voir (1) dans la solution de **I.5.33**) que

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = \frac{\pi}{2}\,.$$

De plus, puisque

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)x = \frac{1-\cos 2nx}{2\sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}\,,\qquad x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots,$$

l'égalité (1) s'en déduit. Le changement de variable $y = nx$ dans (1) donne

$$\int_0^{n\pi/2}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\left(\frac{y/n}{\sin(y/n)}\right)^2 dy = \frac{\pi}{2}\,.$$

On définit alors

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \left(\frac{x/n}{\sin(x/n)}\right)^2 & \text{si } 0 < x \leqslant \frac{n\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } x > \frac{n\pi}{2}. \end{cases}$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et la convergence est uniforme sur chaque intervalle $[0\,,a]$. On se rappelle (voir, par exemple, **II.5.28(a) (vol. II)**) que

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$$

pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Donc,

$$f_n(x) < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{\pi^2}{4} \qquad (x > 0)$$

et, puisque $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx < +\infty$, la convergence uniforme de $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ se déduit de **I.5.35**. Donc, d'après **I.5.40**,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx. \end{aligned}$$

I.5.57. On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = I_1 + I_2.$$

Pour $0 < x < 1$,

$$\frac{x^{a-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{a+n-1}$$

et la série converge uniformément sur $[\eta\,, 1-\eta']$ où $0 < \eta < 1-\eta' < 1$. De plus,

$$0 \leqslant S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{a+k-1} = \frac{x^{a-1}\left(1-(-x)^n\right)}{1+x} \leqslant x^{a-1}.$$

Puisque $\int_0^1 x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a}$, on voit que les hypothèses de **I.5.53** sont vérifiées et

$$I_1 = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{a+n-1}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{a+n}.$$

De plus, le changement de variable $x = \frac{1}{y}$ donne

$$I_2 = \int_0^1 \frac{y^{-a}}{1+y}\,dy = \int_0^1 \frac{y^{(1-a)-1}}{1+y}\,dy = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{1-a+n},$$

la dernière égalité découlant de celle obtenue plus haut. On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k}\right),$$

ce qui est la première égalité à prouver. Pour démontrer l'autre, on part de l'identité (voir, par exemple, **III.8.37 (vol. I)**)

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

On a donc, si $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$,

$$\ln|\sin x| = \ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|.$$

On remarque que la série dérivée

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

converge uniformément sur tout intervalle compact disjoint de l'ensemble $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x} &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2} \\
&= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi}\right).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\tan x &= -\operatorname{cotan}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x-(2n-1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{x+(2n-1)\frac{\pi}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant l'identité

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cotan}\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}\right),$$

on obtient

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi}\right),$$

ce qui implique l'égalité cherchée.

I.5.58. On a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx &= \int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx\\ &= \int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx + \int_0^1\frac{(1/x)^{a-1}-(1/x)^{b-1}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)x^2}\,dx\\ &= \int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{-a}}{1-x}\,dx - \int_0^1\frac{x^{b-1}-x^{-b}}{1-x}\,dx\\ &= I_1 - I_2.\end{aligned}$$

Comme dans la solution du problème précédent, on obtient

$$I_1 = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a+n} - \frac{1}{a-n}\right) = \pi\operatorname{cotan}\pi a.$$

I.5.59.

(a) On peut prolonger la fonction

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n} \qquad (x\in\,]0\,,1[)$$

par continuité à l'intervalle $[0\,,1[$ et la série entière converge uniformément sur tout intervalle $[0\,,b]$, $0<b<1$. De plus, si $S_n(x)$ désigne la n-ième somme partielle de la série, alors

$$|S_n(x)| = -S_n(x) \leqslant -\frac{\ln(1-x)}{x}\,.$$

On vérifie facilement que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$ converge. Les hypothèses de **I.5.53** sont donc vérifiées. En conséquence,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n}\,dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}\,.$$

(Pour une démonstration élémentaire de la dernière égalité, voir, par exemple, **III.1.28(a) (vol. I)**.)

(b) Comme en (a), on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

(c) On a

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n^2} = \frac{\pi^2}{24}\,.$$

(d) On pose

$$f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln x \ln^2(1-x)}{x}\,dx &= -\int_0^1 f(x)\left(\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x}\right)dx \\
&= -\int_0^1 f(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)\frac{\ln x}{1-x}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}f^2(1) + \int_0^1 f(x)\frac{\ln x}{1-x}\,dx.
\end{aligned}$$

Puisque $f(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{x^2}$, en utilisant (a) et **I.5.53**, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln x \ln^2(1-x)}{x}\,dx &= -\frac{1}{2}f^2(1) - \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \ln x\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\zeta^2(2) - \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\cdots+\frac{1}{n^2}\right) x^n \ln x\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\zeta^2(2) - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\int_0^1 x^n \ln x\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\zeta^2(2) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{(n+1)^2}\,.
\end{aligned}$$

On observe alors que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{1\leqslant m<n}^{+\infty} \frac{1}{m^2n^2} = \frac{1}{2}\left(\zeta^2(2)-\zeta(4)\right).$$

Puisque $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ (pour une démonstration élémentaire de cette égalité, voir, par exemple, **III.1.28(b) (vol. I)**), on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln x \ln^2(1-x)}{x}\,dx = -\frac{\pi^4}{180}\,.$$

I.5.60.

(a) On obtient, en utilisant le résultat de **I.5.53**,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1\left(x^{4n}+x^{4n+2}\right)dx \\
&= \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{4n}\left(1+x^2\right)dx \\
&= \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\,.
\end{aligned}$$

(b) Comme en (a), on a

$$\begin{aligned}1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{8n+1}-\frac{1}{8n-1}\right) &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1\left(x^{8n}-x^{8n-2}\right)dx\\ &= 1+\int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(x^{8n}-x^{8n-2}\right)dx\\ &= 1-\int_0^1\frac{x^6}{(1+x^2)(1+x^4)}\,dx\\ &= \frac{\pi}{4}\times\frac{1+\sqrt{2}}{2}\,.\end{aligned}$$

I.5.61.

(a) D'après le résultat de **I.5.1(c)** en prenant $\alpha=2k$ et $n=2$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)} &= \frac{1}{2!}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 x^2(1-x)^{2k}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\sum_{k=0}^{+\infty}(1-x)^{2k}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\frac{x}{2-x}\,dx=\ln 2-\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

(b) De même,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n(2n+1)(2n+2)}=\frac{3}{4}-\ln 2.$$

I.5.62. Pour $x\in\,]0\,,1]$,

$$x^{-x}=e^{-x\ln x}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n\ln^n x}{n!}\,.$$

La série converge uniformément sur $]0\,,1]$ car $\sup\{|x\ln x| : x\in\,]0\,,1]\}=\frac{1}{e}$ et la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1/e)^n}{n!}$ converge. Donc,

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n\ln^n x\,dx=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\,,$$

la dernière égalité provenant de **I.5.1(f)**.

I.5.63. Pour $x \geqslant 0$,

$$\frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} xe^{-nx}$$

et, d'après le test donné en **III.2.9 (vol. II)**, la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. De plus, si $S_n(x)$ désigne la n-ième somme partielle de la série, on a

$$|S_n(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} xe^{-nx} = \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$$

et $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx < +\infty$. En conséquence, $\int_0^{+\infty} S_n(x)\,dx$ converge uniformément sur $\mathbb{N}^*$ (voir **I.5.35**). L'intégration terme à terme donne donc

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} xe^{-nx}\,dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,,\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de **III.1.27 (vol. I)** et **III.1.28(a) (vol. I)**.

I.5.64. Il est clair que $B(a,b)$ est finie pour tous a et b strictement positifs. Pour montrer la première égalité, on applique le changement de variable $x = \frac{y}{1+y}$ et on obtient

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\,dy.$$

D'où

$$B(a, 1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{1+y}\,dy.$$

La seconde égalité provient de **I.5.57**.

I.5.65. On effectue le changement de variable $x = ty$ $(t > 0)$ dans

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\,dx$$

pour obtenir

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-ty}\,dy,$$

d'où,

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y}\,dy.$$

En multipliant chaque membre de cette égalité par t^{a-1} et en intégrant pas rapport à t, on obtient

$$\Gamma(a+b)\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,dt=\int_0^{+\infty}t^{a-1}\left(\int_0^{+\infty}y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}\,dy\right)dt.$$

On voit facilement que les hypothèses de **I.5.50** sont vérifiées, d'où

$$\begin{aligned}\Gamma(a+b)\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,dt&=\int_0^{+\infty}y^{a+b-1}e^{-y}\left(\int_0^{+\infty}t^{a-1}e^{-ty}\,dt\right)dy\\&=\int_0^{+\infty}y^{a+b-1}e^{-y}\frac{\Gamma(a)}{y^a}\,dy\\&=\Gamma(a)\int_0^{+\infty}y^{b-1}e^{-y}\,dy\\&=\Gamma(a)\Gamma(b).\end{aligned}$$

Si l'on prend $b=1-a$, $0<a<1$, on obtient

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=B(a,1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}\,,$$

la dernière égalité provenant du problème précédent.

I.5.66. On montre d'abord que

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$$

pour $a>0$. En effet, une intégration par parties donne

$$\Gamma(a+1)=\int_0^{+\infty}x^ae^{-x}\,dx=\left[-x^ae^{-x}\right]_0^{+\infty}+a\int_0^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}\,dx=a\Gamma(a).$$

Donc, puisque Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{a\to0^+}a\Gamma(a)=\lim_{a\to0^+}\Gamma(a+1)=\Gamma(1)=1.$$

I.5.67. On déduit du problème précédent que l'intégrale $\int_0^1\ln\Gamma(a)da=I$ converge. De plus,

$$\int_0^1\ln\Gamma(a)\,da=\int_0^1\ln\Gamma(1-a)\,da.$$

Donc,

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^1 \ln\left(\Gamma(a)\Gamma(1-a)\right) da = \int_0^1 \ln \frac{\pi}{\sin a\pi}\, da \\ &= \ln \pi - \int_0^1 \ln(\sin \pi a)\, da = \ln \pi - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \ln(\sin x)\, dx \\ &= \ln \pi - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx = \ln 2\pi, \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de **I.5.1(b)**.

I.5.68. On montre d'abord que

$$B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right).$$

En effet,

$$\begin{aligned} B(a,a) &= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}\, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{a-1} dx \\ &= 2\int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{a-1} dx. \end{aligned}$$

Le changement de variable $t = 4\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$ donne

$$B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{a-1}\, dt = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right).$$

Ceci, combiné avec le résultat de **I.5.65**, implique

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{1}{2^{2a-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}.$$

I.5.69.

(a) Le changement de variable $y = \sin x$ donne

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \tan^a x\, dx &= \int_0^1 y^a\left(1-y^2\right)^{-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{a}{2}-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}}\, dt \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}, -\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi a}{2}}, \end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de **I.5.64**.

(b) Puisque

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{1+\sin^2 \frac{x}{2}}},$$

le changement de variable $y = \sin \frac{x}{2}$ donne

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}} &= \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 t^{-3/4}(1-t)^{-1/2}\,dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.\end{aligned}$$

En utilisant maintenant l'identité $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$, $0 < a < 1$, on voit que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$, ce qui donne l'égalité désirée.

(c) Comme en (a), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} x\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{a/2-1}(1-t)^{-1/2}\,dt \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{a}{2},\frac{1}{2}\right) = 2^{a-2} B\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right),\end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de la formule de duplication (voir **I.5.68**).

I.5.70. Il existe de nombreuses preuves de cette formule. On présente ici une preuve due à W. Feller [*Amer. Math. Monthly*, 74(1967), 1223-1225]. On pose

$$A_n = \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n + n. \tag{1}$$

Notre but est de prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \ln\sqrt{2\pi}.$$

On pose

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{2}\ln k - \int_{k-1/2}^k \ln x\,dx = \int_{k-1/2}^k \ln\left(\frac{k}{x}\right)dx, \\ b_k &= \int_k^{k+1/2} \ln x\,dx - \frac{1}{2}\ln k = \int_k^{k+1/2} \ln\left(\frac{x}{k}\right)dx.\end{aligned}$$

On a alors

$$a_k - b_k = 1 + \ln k + \left(k-\frac{1}{2}\right)\ln\left(k-\frac{1}{2}\right) - \left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(k+\frac{1}{2}\right).$$

En conséquence,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = n + \ln n! + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) = B_n. \qquad (2)$$

On montre alors que la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(a_k - b_k)$ converge. Puisque

$$a_k = \int_0^{1/2} \ln\frac{1}{1-\frac{t}{k}}\,dt \quad \text{et} \quad b_k = \int_0^{1/2}\ln\left(1+\frac{t}{k}\right)dt, \qquad (3)$$

on voit que $a_k > b_k > a_{k+1} > 0$. De plus, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = \lim\limits_{k\to+\infty} b_k = 0$. Donc la série

$$a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + \cdots + a_n - b_n + \cdots$$

converge d'après la règle de Leibniz. Ceci signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n$ existe et est égale à la somme de la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(a_k - b_k)$. Il découle de (3) que

$$a_k - b_k = -\int_0^{1/2}\ln\left(1-\frac{t^2}{k^2}\right)dt.$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k - b_k) = -\int_0^{1/2}\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{t^2}{k^2}\right)dt,$$

car la série dans le second membre converge uniformément sur $\left[0\,,\frac{1}{2}\right]$. Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k - b_k) &= -\int_0^{1/2}\ln\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{t^2}{k^2}\right)dt \\ &= -\int_0^{1/2}\ln\frac{\sin\pi t}{\pi t}\,dt,\end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant, par exemple, de **III.8.37 (vol. I)**. En utilisant le résultat de **I.5.1(b)**, on obtient

$$-\int_0^{1/2}\ln\frac{\sin\pi t}{\pi t}\,dt = \frac{1}{2}\left(\ln\pi - 1\right).$$

D'après (1) et (2),

$$\lim_{n\to+\infty}(A_n - B_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\left(1+\ln 2\right).$$

Finalement, on arrive à

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} B_n + \frac{1}{2}(1+\ln 2) = \ln\sqrt{2\pi}.$$

I.5.71. On note d'abord que Γ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Effectivement, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} x^{a-1}\ln x e^{-x}\,dx$ converge uniformément sur tout intervalle $[c\,,d]$, $0 < c < d$, car chacune des intégrales

$$\int_0^1 x^{a-1}\ln x e^{-x}\,dx \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} x^{a-1}\ln x e^{-x}\,dx$$

converge uniformément sur $[c\,,d]$. On voit donc, en appliquant **I.5.44**, que

$$\Gamma'(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}\ln x e^{-x}\,dx.$$

La formule

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}\ln^n x e^{-x}\,dx$$

peut s'obtenir par récurrence. Maintenant, d'après **I.5.65**,

$$\begin{aligned}\Gamma(b) - B(a,b) &= \Gamma(b) - \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{\Gamma(b)b}{\Gamma(a+b)}\cdot\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}\\ &= \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)}\cdot\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}.\end{aligned}$$

On obtient, par passage à la limite,

$$\lim_{b\to0^+}(\Gamma(b) - B(a,b)) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}.$$

Puisque (voir la solution de **I.5.65**)

$$B(a,b) = \int_0^{+\infty}\frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx,$$

on a

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b\to0^+}\int_0^{+\infty} x^{b-1}\left(e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}}\right)dx. \qquad (1)$$

De plus, les intégrales impropres

$$\int_0^1 x^{b-1}\left(e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}}\right)dx, \quad \int_1^{+\infty} x^{b-1}\left(e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}}\right)dx$$

convergent uniformément sur $[0\,,b_0]$. Le résultat de **I.5.43** s'applique donc et on peut permuter la limite et l'intégrale dans (1). Ceci complète la démonstration.

I.5.72.

(a) On montre d'abord que la fonction

$$F(x) = \frac{\sqrt{x}\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(x+1)}$$

est croissante pour $x > 1$. Pour ce faire, on observe que

$$(\ln F(x))' = \frac{1}{2x} + \frac{\Gamma'\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)} - \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}.$$

D'après le problème précédent,

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{\Gamma'\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^{x+1}} \frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^{x+1}} \frac{1}{\sqrt{1+t}+1}\, dt \\
&< \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^{x+1}}\, dt \\
&= \frac{1}{2x},
\end{aligned}$$

ce qui montre que $(\ln F(x))' > 0$. En conséquence, F est croissante sur $]1\,,+\infty[$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F(n)$. On va utiliser la formule de duplication et la formule de Stirling données respectivement en **I.5.68** et **I.5.70** pour trouver cette limite. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} F(n) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\Gamma(2n)\sqrt{\pi}}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)2^{2n-1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n\pi}(2n-1)!}{(n-1)!n!2^{2n-1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \beta_n \frac{\sqrt{n}(2n-1)^{2n-1/2}e^{-(2n-1)}}{\sqrt{2}n(2n-2)^{2n-1}e^{-(2n-2)}} = 1,
\end{aligned}$$

où $\{\beta_n\}$ est une suite qui converge vers 1.

(b) Observons d'abord que si $a = 1$, d'après **I.5.65**,

$$x^a B(a,x) = xB(1,x) = \frac{x\Gamma(1)\Gamma(x)}{\Gamma(1+x)} = 1$$

pour tout $x > 0$. Donc, dans ce cas, la limite à trouver est égale à 1. On va prouver que la fonction $F_a(x) = x^a B(a, x)$, $x > 0$, est croissante si $a > 1$ et décroissante si $0 < a < 1$. On a

$$\begin{aligned}(\ln F_a(x))' &= \frac{a}{x} + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x+a)}{\Gamma(x+a)} \\ &= \frac{a}{x} - \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(1+t)^x} - \frac{1}{(1+t)^{a+x}} \right) \frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Si $a > 1$, alors

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(1+t)^x} - \frac{1}{(1+t)^{a+x}} \right) \frac{dt}{t} &= \int_0^{+\infty} \frac{1+t-(1+t)^{1-a}}{(1+t)^{x+1}} \frac{dt}{t} \\ &< a \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^{x+1}} \, dt = \frac{a}{x},\end{aligned}$$

l'inégalité précédente se déduisant de l'inégalité $(1+t)^{1-a} > 1 + (1-a)t$ (voir **II.3.7(a) (vol. II)**). Ceci montre que $(\ln F_a(x))' > 0$, ce qui signifie que F_a est croissante. De même, si $0 < a < 1$, alors l'inégalité $(1+t)^{1-a} < 1 + (1-a)t$ (voir **II.3.7(b) (vol. II)**) implique que F_a est décroissante. Il suffit donc, pour trouver la limite cherchée, de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_a(n)$. On obtient

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n^a B(a, n) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^a \Gamma(a)\Gamma(n)}{\Gamma(a+n)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^a \Gamma(a)(n-1)!}{(a+n-1)(a+n-2)\dots(a+1)a\Gamma(a)}, \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{a-1} n!}{(a+n-1)(a+n-2)\dots(a+1)a} = \Gamma(a),\end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de **I.5.31**.

I.6. Inégalités portant sur les intégrales

I.6.1. Il est clair que

$$\int_a^b \left(\int_a^b (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 \, dx \right) dy \geqslant 0.$$

Donc,

$$2 \int_a^b f^2(x) \, dx \int_a^b g^2(x) \, dx - 2 \left(\int_a^b f(x)g(x) \, dx \right)^2 \geqslant 0,$$

ce qui donne l'inégalité désirée. Si maintenant f et g sont continues sur $[a\,,b]$ et que l'égalité est vérifiée, alors

$$\int_a^b (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2\, dx = 0$$

pour tout $y \in [a\,,b]$. En conséquence, $f(x)g(y) - f(y)g(x) = 0$ pour tout $x \in [a\,,b]$ et $y \in [a\,,b]$. Donc, s'il existe $y_0 \in [a\,,b]$ tel que $g(y_0) \neq 0$, alors $f(x) = \frac{f(y_0)}{g(y_0)}\, g(x)$. Si g est identiquement nulle sur $[a\,,b]$, on peut alors prendre $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$.

I.6.2. Il s'agit d'une conséquence immédiate de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

I.6.3. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir **I.6.1**),

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{f(x)}\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\, dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)}\,.$$

De plus, puisque

$$\frac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{f(x)} \leqslant 0 \quad \text{pour} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

on a

$$\int_a^b \frac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{f(x)}\, dx \leqslant 0,$$

ce qui donne

$$\int_a^b f(x)\, dx + mM \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leqslant (m+M)(b-a).$$

Donc,

$$\begin{aligned} mM \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \int_a^b f(x)\, dx &\leqslant (m+M)(b-a) \int_a^b f(x)\, dx - \left(\int_a^b f(x)\, dx\right)^2 \\ &\leqslant \frac{(m+M)^2\,(b-a)^2}{4}\,. \end{aligned}$$

La dernière inégalité se déduit du fait que la fonction $x \mapsto -x^2 + \alpha x$ atteint son maximum en $x = \frac{\alpha}{2}$.

I.6.4. Le changement de variable $t = \frac{x-a}{b-a}$ montre qu'il suffit de considérer le cas $a = 0$, $b = 1$. Posons, par commodité,

$$F = \int_0^1 f(x)\,dx, \quad G = \int_0^1 g(x)\,dx$$

et

$$D(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx - FG.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir **I.6.1**),

$$D(f,f) = \int_0^1 f^2(x)\,dx - \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \geqslant 0.$$

D'autre part, on a

$$D(f,f) = (M_1 - F)(F - m_1) - \int_0^1 (M_1 - f(x))\,(f(x) - m_1)\,dx,$$

ce qui implique

$$D(f,f) \leqslant (M_1 - F)(F - m_1).$$

Clairement,

$$D(f,g) = \int_0^1 (f(x) - F)\,(g(x) - G)\,dx,$$

et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(D(f,g))^2 \leqslant \int_0^1 (f(x) - F)^2\,dx \int_0^1 (g(x) - G)^2\,dx = D(f,f)D(g,g).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}(D(f,g))^2 &\leqslant (M_1 - F)(F - m_1)(M_2 - G)(G - m_2)\\ &\leqslant \frac{(M_1 - m_1)^2}{4} \times \frac{(M_2 - m_2)^2}{4}.\end{aligned}$$

I.6.5. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b x f(x) f'(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_a^b x\left(f^2(x)\right)'\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\left[x f^2(x)\right]_a^b - \int_a^b f^2(x)\,dx\right) = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir **I.6.1**),

$$\frac{1}{4} \leqslant \int_a^b \left(f^2(x)\right)'\,dx \int_a^b x^2 f^2(x)\,dx.$$

I.6.6. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir **I.6.1**),

$$\begin{aligned}
1 = \left| \int_0^1 f(x)\, dx \right| &= \left| \int_0^1 f(x) \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \right| \\
&\leqslant \left(\int_0^1 (1+x^2) f^2(x)\, dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_0^1 (1+x^2) f^2(x)\, dx \right)^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\inf_{f \in \mathcal{A}} \int_0^1 (1+x^2) f^2(x)\, dx \geqslant \frac{4}{\pi}\,.$$

La borne inférieure est égale à $\frac{4}{\pi}$ et elle est atteinte pour $f(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)}$.

I.6.7. L'inégalité se déduit de

$$\int_a^b (M - f(x))\,(f(x) - m)\, dx \geqslant 0.$$

I.6.8. On pose

$$F(t) = \left(\int_0^t f(x)\, dx \right)^2 - \int_0^t (f(x))^3\, dx, \quad t \in [0\,,1].$$

On a alors

$$F'(t) = f(t) \left(2 \int_0^t f(x)\, dx - (f(t))^2 \right)$$

et si $G(t) = 2\int_0^t f(x)\, dx - (f(t))^2$, alors $G'(t) = 2f(t)(1 - f'(t)) \geqslant 0$. En conséquence, $G(t) \geqslant G(0) = 0$, ce qui donne $F'(t) \geqslant 0$. Donc, $F(t) \geqslant 0$ et, en particulier, $F(1) \geqslant 0$.

De plus, si $F(1) = 0$, alors $F(t) = 0$ pour $t \in [0\,,1]$ et $F'(t) = f(t)G(t) = 0$. Ceci implique $G'(t) = 2f(t)(1 - f'(t)) = 0$ et $1 - f'(t) = 0$ pour $t \in]0\,,1[$.

I.6.9. La solution de **I.2.22** implique que la fonction

$$g(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)\, dt$$

est croissante sur $]a\,,b]$. Donc $g(x) \leqslant g(b)$. On peut prouve, comme dans la solution de **I.2.22**, que la fonction

$$h(x) = \frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)\,dt$$

est croissante sur $[a\,,b[$ et que $h(a) \leqslant h(x)$.

I.6.10. On suppose ici que les deux fonctions ont le même sens de variation. On a

$$\begin{aligned}&\int_a^b \left(\int_a^b (f(x)g(x) - f(x)g(y))\,dx\right)dy\\&\qquad\qquad = (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\int_a^b \left(\int_a^b (f(y)g(y) - f(y)g(x))\,dx\right)dy\\&\qquad\qquad = (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}&(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx\\&\qquad\qquad = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\int_a^b (f(x)-f(y))\,(g(x)-g(y))\,dx\right)dy \geqslant 0\end{aligned}$$

car, par hypothèse, $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geqslant 0$ pour tous x et y dans $[a\,,b]$.

I.6.11. La démonstration est identique à celle de **I.6.10**.

I.6.12. D'après l'inégalité de Tchebychev (voir **I.6.10**),

$$\begin{aligned}\int_0^a f(a-x)g(x)\,dx &\leqslant \frac{1}{a}\int_0^a f(a-x)\,dx\int_0^a g(x)\,dx\\&= \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx\int_0^a g(x)\,dx\\&\leqslant \int_0^a f(x)g(x)\,dx.\end{aligned}$$

I.6.13. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Tchebychev généralisée (voir **I.6.11**) en prenant $p(x) = q^2(x)$, $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{q(x)}$.

I.6.14. On obtient, en utilisant la convexité de f,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= (b-a)\int_0^1 f\left((1-x)a + xb\right)dx \\
&\leqslant (b-a)\int_0^1 \left((1-x)f(a) + xf(b)\right)dx \\
&= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\,.
\end{aligned}$$

On utilise pour prouver l'autre inégalité le changement de variable $x = \frac{a+b}{2} + t$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} f\left(\frac{a+b}{2} + t\right)dt \\
&= \int_0^{(b-a)/2} \left(f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) + f\left(\frac{a+b}{2} - t\right)\right)dt \\
&\geqslant \int_0^{(b-a)/2} 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).
\end{aligned}$$

I.6.15. On pose $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Puisque $f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$, on voit que f est strictement convexe sur $]e^{3/2}\,, +\infty[$ et strictement concave sur $]0\,, e^{3/2}[$. Donc, si $y > x \geqslant e^{3/2}$, on a

$$\frac{\ln A}{A} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{y-x}\int_x^y \frac{\ln t}{t}\,dt = \frac{\ln^2 y - \ln^2 x}{2(y-x)} = \frac{\ln G}{L}\,,$$

ce qui donne $A^L < G^A$. On peut utiliser un raisonnement semblable pour prouver que $A^L > G^A$ si $0 < x < y \leqslant e^{3/2}$.

I.6.16. Soit $c \in [a\,,b]$ tel que $f(c) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. On a alors, par hypothèse,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\
&= (c-a)\int_0^1 f\left((1-x)a + xc\right)dx \\
&\quad + (b-c)\int_0^1 f\left((1-x)c + xb\right)dx \\
&> (c-a)\int_0^1 \left((1-x)f(a) + xf(c)\right)dx \\
&\quad + (b-c)\int_0^1 \left((1-x)f(c) + xf(b)\right)dx \\
&= (c-a)\frac{f(a)+f(c)}{2} + (b-a)\frac{f(b)+f(c)}{2} \\
&> \frac{1}{2}\,(b-a)f(c).
\end{aligned}$$

I.6.17. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
&\int_0^a g(x)f'(x)\,dx + \int_0^b g'(x)f(x)\,dx \\
&\qquad = \left[g(x)f(x)\right]_a^b - \int_0^a g'(x)f(x)\,dx + \int_0^b g'(x)f(x)\,dx \\
&\qquad = f(a)g(a) + \int_a^b g'(x)f(x)\,dx \\
&\qquad \geqslant f(a)g(a) + \int_a^b g'(x)f(a)\,dx = f(a)g(b).
\end{aligned}$$

Le cas d'égalité se déduit immédiatement de ce qui précède.

I.6.18. Le changement de variable $u = f^{-1}(t)$ et une intégration par parties donnent

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt &= \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x uf'(u)\,du \\
&= xf(x).
\end{aligned}$$

I.6.19. On suppose d'abord que $f(a) < b = f(x)$. D'après I.6.18,

$$\begin{aligned}\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt &= \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^{f(a)} f^{-1}(t)\,dt + \int_{f(a)}^b f^{-1}(t)\,dt \\ &= af(a) + \int_a^x uf'(u)\,du = xf(x) - \int_a^x f(u)\,du \\ &\geqslant xf(x) - (x-a)f(x) = af(x) = ab.\end{aligned}$$

De même, si $b \leqslant f(a) = y$,

$$\begin{aligned}\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt &= \int_0^{f^{-1}(b)} f(t)\,dt + \int_{f^{-1}(b)}^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt \\ &= f^{-1}(b)b + \int_{f^{-1}(b)}^{f^{-1}(y)} f(t)\,dt \\ &= f^{-1}(b)b + \int_b^y u\left(f^{-1}(u)\right)'\,du \\ &= yf^{-1}(y) - \int_b^y f^{-1}(u)\,du \\ &\geqslant yf^{-1}(y) - (y-b)f^{-1}(y) = bf^{-1}(y) = ba.\end{aligned}$$

I.6.20. En appliquant l'inégalité de Young à $f(x) = \ln(1+x)$, on obtient

$$\int_0^a \ln(1+x)\,dx + \int_0^b (e^x - 1)\,dx \geqslant ab,$$

ce qui donne l'inégalité souhaitée.

I.6.21. S'il existe x_0 tel que $g^{-1}(x_0) > f(x_0)$, par hypothèse,

$$\begin{aligned}x_0 g^{-1}(x_0) &\leqslant \int_0^{x_0} f(x)\,dx + \int_0^{g^{-1}(x_0)} g(x)\,dx \\ &< \int_0^{x_0} g^{-1}(x)\,dx + \int_0^{g^{-1}(x_0)} g(x)\,dx \\ &= x_0 g^{-1}(x_0),\end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de I.6.18. Contradiction.

I.6.22. On déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir I.6.1) que

$$(2+3b)^2 = \left(\int_0^1 f(x)(x+b)\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 (x+b)^2\,dx$$

si $f \in \mathcal{A}$. Donc,

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \geqslant \frac{3(2+3b)^2}{3b^2+3b+1}\,.$$

La dernière inégalité étant vérifiée pour tout b,

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \geqslant \max_{b\in\mathbb{R}} \frac{3(2+3b)^2}{3b^2+3b+1} = 12.$$

L'égalité est atteinte pour $f(x) = 6x$.

I.6.23. Soit $f \in \mathcal{A}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir I.6.1),

$$\left(\int_0^1 (1-x)f''(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 (1-x)^2\,dx \int_0^1 \left(f''(x)\right)^2 dx. \qquad (1)$$

De plus,

$$\int_0^1 (1-x)f''(x)\,dx = \left[(1-x)f'(x)\right]_0^1 + \int_0^1 f'(x)\,dx = -a$$

et, en conséquence,

$$\int_0^1 \left(f''(x)\right)^2 dx \geqslant 3a^2.$$

L'égalité dans (1) est vérifiée si $f''(x) = \lambda(1-x)$ pour un certain réel λ. Puisque $f \in \mathcal{A}$, on trouve $f(x) = \frac{a}{2}\left(x^3 - 3x^2 + 2x\right)$.

I.6.24. D'après le théorème des accroissements finis, pour $x \in \,]0\,,2[$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)-1}{x} = f'(\theta_1) \geqslant -1,$$

ce qui implique $f(x) \geqslant 1-x$. Donc, $f(x) \geqslant |x-1|$. Il s'ensuit que

$$\int_0^2 f(x)\,dx \geqslant \int_0^2 |x-1|\,dx = 1.$$

Puisque f est continue, l'égalité est vérifiée si et seulement si $f(x) = |x-1|$, $x \in [0\,,2]$. Mais cette fonction n'est pas dérivable en $x=1$. La réponse à notre question est donc non.

I.6.25. D'après le théorème des accroissements finis,

$$f(x) = f'(\theta_1)(x-a) \quad \text{et} \quad f(x) = f'(\theta_2)(x-b).$$

Si $M = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, alors

$$|f(x)| \leqslant M(x-a) \quad \text{et} \quad |f(x)| \leqslant M(b-x).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,dx \\
&\qquad \leqslant \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^{(a+b)/2} M(x-a)\,dx + \frac{4}{(b-a)^2}\int_{(a+b)/2}^b M(b-x)\,dx \\
&\qquad = \frac{4}{(b-a)^2}\left(\frac{(b-a)^2}{8}M + \frac{(b-a)^2}{8}M\right) = M.
\end{aligned}$$

I.6.26. Nous allons appliquer l'inégalité

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n$$

pour $x_i, \alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tels que $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i = 1$ (voir, par exemple, **II.4.13(b) (vol. II)**). En supposant qu'aucune des fonctions ne s'annule, on pose

$$x_i = \frac{f_i(x)}{\int_a^b f_i(x)\,dx} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\int_a^b \prod\limits_{i=1}^n f_i^{\alpha_i}(x)\,dx}{\prod\limits_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(x)\,dx\right)^{\alpha_i}} &= \int_a^b \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i(x)}{\int_a^b f_i(x)\,dx}\right)^{\alpha_i} dx \\
&\leqslant \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i f_i(x)}{\int_a^b f_i(x)\,dx}\right) dx = 1.
\end{aligned}$$

On remarque que la fonction $x \mapsto \prod\limits_{i=1}^n f_i^{\alpha_i}(x)$ est Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$ car chacune des fonctions $f_i^{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ est Riemann-intégrable (voir, par exemple, le **théorème 6.11** dans [29]).

I.6.27.

(a) Il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder en prenant $f_1 = f^p$ et $f_2 = g^q$.

(b) On suppose d'abord que $0 < p < 1$ et on pose $r = \frac{1}{p} > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ et

$$v = \frac{1}{g^p}, \qquad u = \frac{f^p}{v}.$$

On a alors $fg = u^r$, $f^p = uv$, $g^p = v^s$ et, d'après (a),

$$\begin{aligned}\int_a^b f^p(x)\,dx &= \int_a^b u(x)v(x)\,dx\\ &\leqslant \left(\int_a^b u^r(x)\,dx\right)^{1/r}\left(\int_a^b v^s(x)\,dx\right)^{1/s}\\ &= \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^{1/r}\left(\int_a^b g^q(x)\,dx\right)^{1/s}\\ &= \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^{p}\left(\int_a^b g^q(x)\,dx\right)^{1-p}.\end{aligned}$$

Si $p < 0$, alors $0 < q < 1$ et le raisonnement précédent s'applique encore.

I.6.28. D'après l'inégalité de Hölder (voir **I.6.26**), pour $p > 1$,

$$a = \int_0^1 f(x)^{\frac{1}{2p}+1-\frac{1}{2p}}\,dx \leqslant \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} a^{\frac{2p-1}{3p}},$$

ce qui donne

$$a^{\frac{p+1}{3}} \leqslant \int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx.$$

Puisque l'on peut choisir $p > 1$ arbitrairement, l'inégalité à prouver suit.

I.6.29. D'après l'inégalité de Jensen (voir, par exemple, **II.4.3 (vol. II)**),

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\varphi\left(f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right).$$

On obtient l'inégalité cherchée en faisant tendre n vers $+\infty$.

I.6.30. On applique, comme dans le problème précédent, l'inégalité de Jensen pour obtenir

$$\varphi\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^n p\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)}{\sum\limits_{k=1}^n p\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)}\right)$$

$$\leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^n p\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\varphi\left(f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)}{\sum\limits_{k=1}^n p\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)}.$$

Le passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ donne le résultat voulu.

I.6.31. La fonction $\varphi(t) = -\sqrt{1-t^2}$ est continue et convexe sur $[-1\,,1]$. On peut donc appliquer l'inégalité donnée en **I.6.29**.

I.6.32. On remarque d'abord que l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir **I.6.1**) reste vraie si on remplace les intégrales de Riemann par des intégrales de Riemann-Stieltjes par rapport à une fonction α monotone, autrement dit :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,d\alpha(x)\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,d\alpha(x)\int_a^b g^2(x)\,d\alpha(x).$$

On obtient, en intégrant par parties et en utilisant cette inégalité,

$$\begin{aligned}\left((a+b+1)\int_0^1 x^{a+b}f(x)\,dx\right)^2 &= \left(f(1)-\int_0^1 x^{a+b+1}\,df(x)\right)^2\\ &= f^2(1)-2f(1)\int_0^1 x^{a+b+1}\,df(x)\\ &\quad+\left(\int_0^1 x^{a+b+1}\,df(x)\right)^2\\ &\leqslant f^2(1)-2f(1)\int_0^1 x^{a+b+1}\,df(x)\\ &\quad+\int_0^1 x^{2a+1}\,df(x)\int_0^1 x^{2b+1}\,df(x).\end{aligned}$$

Puisque

$$\int_0^1 x^k\,df(x) = f(1)-k\int_0^1 x^{k-1}f(x)\,dx,$$

on obtient

$$\begin{aligned}&\left((a+b+1)\int_0^1 x^{a+b}f(x)\,dx\right)^2\\ &\quad\leqslant (2a+1)\int_0^1 x^{2a}f(x)dx\times(2b+1)\int_0^1 x^{2b}f(x)\,dx\\ &\quad\quad+f(1)\left(2(a+b+1)\int_0^1 x^{a+b}f(x)\,dx\right.\\ &\quad\quad\left.-(2a+1)\int_0^1 x^{2a}f(x)\,dx-(2b+1)\int_0^1 x^{2b}f(x)\,dx\right).\end{aligned}$$

Pour voir que

$$\int_0^1 f(x)\left(2(a+b+1)x^{a+b}-(2a+1)x^{2a}-(2b+1)x^{2b}\right)dx \leqslant 0,$$

on intègre par parties et on obtient

$$\int_0^1 f(x)\left(2(a+b+1)x^{a+b}-(2a+1)x^{2a}-(2b+1)x^{2b}\right)dx$$
$$=-\int_0^1\left(2x^{a+b+1}-x^{2a+1}-x^{2b+1}\right)df(x)$$
$$=\int_0^1\left(x^a-x^b\right)^2 x\,df(x)\leqslant 0,$$

car f est décroissante.

I.6.33. [26]. On peut réécrire l'inégalité à prouver sous la forme

$$(2a+1)\int_0^1 x^{2a}f(x)\,dx\times(2b+1)\int_0^1 x^{2b}f(x)\,dx$$
$$\leqslant(a+b+1)^2\left(\int_0^1 x^{a+b}f(x)\,dx\right)^2.$$

On voit facilement que si f est constante sur $[0\,,1]$ ou si $a=b$, l'égalité est alors vérifiée. On suppose donc que f n'est pas constante et que $a\neq b$. Pour prouver cette inégalité, on considère la forme quadratique

$$Q(u,v)=Au^2+2Buv+Cv^2,$$

où

$$A=(2a+1)\int_0^1 x^{2a}f(x)\,dx,\qquad B=(a+b+1)\int_0^1 x^{a+b}f(x)\,dx,$$
$$C=(2b+1)\int_0^1 x^{2b}f(x)\,dx$$

et on montre que cette forme n'est pas définie. Une intégration par parties donne

$$\int_0^1 x^c f(x)\,dx=\frac{f(1)}{c+1}-\int_0^1\frac{x^{c+1}}{c+1}\,df(x)$$

pour $c>0$. On en déduit que

$$Q(u,v)=f(1)(u+v)^2-\int_0^1\left(x^au+x^bv\right)^2 x\,df(x).$$

Donc, $Q(1,1)=4f(1)-\int_0^1\left(x^a+x^b\right)^2 x\,df(x)>4f(0)\geqslant 0$ et il est clair que $Q(1,-1)<0$. Ceci montre que la forme quadratique n'est pas définie, ce qui implique $AC-B^2<0$.

I.6.34. On a

$$\int_a^b \left(\int_{-h}^h f(y+t)\,dy\right) dt = \int_{-h}^h \left(\int_a^b f(y+t)\,dt\right) dy.$$

On remarque de plus que

$$\int_a^b \left(\int_{-h}^h f(y+t)\,dy\right) dt = \int_a^b \left(\int_{t-h}^{t+h} f(z)\,dz\right) dt = 2h\int_a^b f_h(t)\,dt$$

et

$$\int_{-h}^h \left(\int_a^b f(y+t)\,dt\right) dy = \int_{-h}^h \left(\int_{a+y}^{b+y} f(z)\,dz\right) dy.$$

Supposons d'abord que $f \geqslant 0$. Pour prouver l'inégalité dans ce cas, il suffit de montrer que $\int_{a+y}^{b+y} f(z)\,dz \leqslant \int_a^b f(x)\,dx$. Si $y \geqslant 0$, alors

$$\int_{a+y}^{b+y} f(z)\,dz = \int_{a+y}^{b} f(z)\,dz \leqslant \int_a^b f(x)\,dx.$$

Un raisonnement semblable s'applique si $y < 0$. On suppose maintenant que f est une fonction continue quelconque et on pose $\tilde{f}_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} |f(t)|\,dt$. Il découle de ce que l'on a déjà prouvé que $\int_a^b \tilde{f}_h(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx$. On a de plus

$$|f_h(x)| = \left|\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} |f(t)|\,dt = \tilde{f}_h(x).$$

L'inégalité est donc prouvée.

I.6.35.

(a) On pose

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

On a alors, d'après l'inégalité de Hölder (voir **I.6.27(a)**),

$$\begin{aligned}\int_a^b S_n^k(x)\,dx &= \int_a^b f_1(x)S_n^{k-1}(x)\,dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)S_n^{k-1}(x)\,dx\\ &\leqslant \left(\int_a^b f_1^k(x)\,dx\right)^{\frac{1}{k}} \left(\int_a^b S_n^k(x)\,dx\right)^{\frac{k-1}{k}}\\ &\quad + \cdots + \left(\int_a^b f_n^k(x)\,dx\right)^{\frac{1}{k}} \left(\int_a^b S_n^k(x)\,dx\right)^{\frac{k-1}{k}},\end{aligned}$$

ce qui implique l'inégalité cherchée.

(b) Il suffit d'appliquer l'inégalité donnée en **I.6.27(b)**.

I.6.36. Le résultat se déduit du fait que pour $x_1, x_2, \dots, x_n \geqslant 0$, on a

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k \geqslant x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \tag{a}$$

pour $k > 1$ et

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k \leqslant x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \tag{b}$$

pour $0 < k < 1$. (Comparez avec **II.5.25 (vol. II)**.)

I.6.37. Puisque $0 \leqslant \lambda \leqslant b-a$, on voit que $a+\lambda, b-\lambda \in [a\,,b]$. On va prouver la première inégalité. On a

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \int_{b-\lambda}^b f(x)\,dx \\
&\qquad = \int_a^{b-\lambda} f(x)g(x)\,dx + \int_{b-\lambda}^b f(x)\,(g(x)-1)\,dx \\
&\qquad \geqslant \int_a^{b-\lambda} f(x)g(x)\,dx + f(b-\lambda)\left(\int_{b-\lambda}^b g(x)\,dx - \lambda\right) \\
&\qquad = \int_a^{b-\lambda} f(x)g(x)\,dx + f(b-\lambda)\left(\int_{b-\lambda}^b g(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx\right) \\
&\qquad = \int_a^{b-\lambda} f(x)g(x)\,dx - f(b-\lambda)\int_a^{b-\lambda} g(x)\,dx \\
&\qquad = \int_a^{b-\lambda} g(x)\,(f(x)-f(b-\lambda))\,dx \geqslant 0.
\end{aligned}$$

L'autre inégalité se démontre de la même façon.

I.6.38. [J.E. Pečarić, J. Math. Anal. Appl. 88(1982), pp. 505-507]. Supposons d'abord que $\int_0^1 g(x)\,dx > 0$. On obtient alors, en utilisant la version généralisée de l'inégalité de Jensen énoncée en **I.6.30** et en prenant $\varphi(x) = x^p$ $(p \geqslant 1)$,

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^p \leqslant \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^{p-1} \int_0^1 (f(x))^p g(x)\,dx.$$

Il suffit maintenant de prouver que

$$\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^{p-1} \int_0^1 (f(x))^p g(x)\,dx \leqslant \int_0^\lambda (f(x))^p\,dx.$$

Pour obtenir cette inégalité, on pose

$$\mu = \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^{p-1}$$

et on procède comme suit :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\lambda (f(x))^p\,dx - \mu\int_0^1 (f(x))^p g(x)\,dx \\
&\qquad = \int_0^\lambda (f(x))^p\,(1-\mu g(x))\,dx - \mu\int_\lambda^1 (f(x))^p g(x)\,dx \\
&\qquad \geqslant (f(\lambda))^p \int_0^\lambda (1-\mu g(x))\,dx - \mu\int_\lambda^1 (f(x))^p g(x)\,dx \\
&\qquad = (f(\lambda))^p \left(\lambda - \mu\int_0^\lambda g(x)\,dx\right) - \mu\int_\lambda^1 (f(x))^p g(x)\,dx \\
&\qquad = (f(\lambda))^p \left(\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^p - \mu\int_0^\lambda g(x)\,dx\right) - \mu\int_\lambda^1 (f(x))^p g(x)\,dx \\
&\qquad = \mu\left((f(\lambda))^p \int_\lambda^1 g(x)\,dx - \int_\lambda^1 (f(x))^p g(x)\,dx\right) \\
&\qquad = \mu\int_\lambda^1 g(x)\,((f(\lambda))^p - (f(x))^p)\,dx \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Le résultat énoncé est encore vérifié si $\int_0^1 g(x)\,dx = 0$. Dans ce cas, les deux membres de l'inégalité sont nuls, ce qui est une conséquence de **II.3.6**.

I.6.39. Utilisez le changement de variable $x = (b-a)t + a$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

I.6.40. On a

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx - A\int_0^\lambda f(x)\,dx \\
&\qquad = -\int_0^\lambda (A - g(x))\,(f(x) - f(\lambda))\,dx - \int_\lambda^{+\infty} g(x)\,(f(\lambda) - f(x))\,dx \leqslant 0.
\end{aligned}$$

I.6.41. On remarque qu'intégrer l'inégalité

$$0 \leqslant g(x)\left(\int_a^b g(t)\,dt\right)^{p-1} \leqslant 1$$

sur $[a\,,b]$ donne $\lambda \in [0\,,b-a]$. On suppose d'abord que $p \geqslant 1$. On a alors, d'après l'inégalité généralisée de Jensen (voir la solution de **I.6.38**),

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^p \leqslant \mu\int_a^b f^p(x)g(x)\,dx$$

où
$$\mu = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^{p-1}.$$
On va utiliser l'idée d'Apéry, présentée dans la solution du problème précédent. Puisque $0 \leqslant \mu g(x) \leqslant 1$, on note que
$$\begin{aligned}\int_a^{a+\lambda} f^p(x)\,dx - \int_a^b \mu g(x) f^p(x)\,dx \\ &= \int_a^{a+\lambda} \big(f^p(x) - f^p(a+\lambda)\big)\,(1-\mu g(x))\,dx \\ &\quad + \int_{a+\lambda}^b \left(f^p(a+\lambda) - f^p(x)\right)\mu g(x)\,dx \geqslant 0.\end{aligned}$$
Si $0 < p \leqslant 1$, on a alors, d'après l'inégalité généralisée de Jensen (**I.6.30**),
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^p \geqslant \mu \int_a^b f^p(x)g(x)\,dx,$$
où μ est défini comme précédemment. De plus,
$$\begin{aligned}\int_a^b \mu g(x) f^p(x)\,dx - \int_{b-\lambda}^b f^p(x)\,dx \\ &= \int_a^{b-\lambda} \left(f^p(x) - f^p(b-\lambda)\right)\mu g(x)\,dx \\ &\quad + \int_{b-\lambda}^b \big(f^p(b-\lambda) - f^p(x)\big)\,(1-\mu g(x))\,dx \geqslant 0.\end{aligned}$$

I.6.42. On pose $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ et $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$. Puisque $G(x) \geqslant 0$ pour $x \in [a\,,b]$ et $G(a) = G(b) = 0$, une intégration par parties donne
$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dG(t) &= \big[f(t)G(t)\big]_a^b - \int_a^b G(t)\,df(t) \\ &= -\int_a^b G(t)\,df(t),\end{aligned}$$
ce qui implique le résultat cherché.

I.6.43. [H. Gauchman, J. Inequal. *Pure and Appl. Math.* 3(2002) no. 2, article 26, pp. 9 (*electronic*)]. On applique l'inégalité de Steffensen donnée en **I.6.37** en prenant $g(x) = \frac{f'(x)-m}{M-m}$ pour obtenir
$$\frac{\lambda^2}{2} \leqslant \int_a^b \frac{f'(x)-m}{M-m}(b-x)\,dx \leqslant \frac{(b-a)^2 - (b-a-\lambda)^2}{2}$$

et

$$-\frac{(b-a)^2-(b-a-\lambda)^2}{2} \leqslant \int_a^b \frac{f'(x)-m}{M-m}\,(a-x)\,dx \leqslant -\frac{\lambda^2}{2}\,,$$

où $\lambda = \frac{f(b)-f(a)-m(b-a)}{M-m}$. En multipliant la dernière inégalité par -1 et en l'additionnant à la précédente, on obtient

$$\lambda^2 \leqslant \int_a^b \frac{f'(x)-m}{M-m}\,(b-a)\,dx \leqslant (b-a)^2-(b-a-\lambda)^2.$$

Un calcul simple montre que cette inégalité est équivalente à celle demandée.

On remarquera que ce résultat est une amélioration de l'inégalité triviale suivante : $m \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$.

I.6.44. [H. Gauchman, J. Inequal. Pure and Appl. Math. 3(2002) no. 2, article 26, pp. 9 (electronic)]. Comme dans la solution du problème précédent, on applique l'inégalité de Steffensen donnée en **I.6.37** en prenant $g(x) = \frac{f'(x)-m}{M-m}$. On remarque d'abord qu'une intégration par parties donne

$$\int_a^b \frac{f'(x)-m}{M-m}\,(b-x)\,dx = \frac{\int_a^b f(x)\,dx - f(a)(b-a) - \frac{m(b-a)^2}{2}}{M-m}$$

et

$$\int_a^b \frac{f'(x)-m}{M-m}\,(a-x)\,dx = \frac{\int_a^b f(x)\,dx - f(b)(b-a) - \frac{m(b-a)^2}{2}}{M-m}\,.$$

D'après l'inégalité de Steffensen,

$$\frac{\lambda^2}{2} \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx - f(a)(b-a) - \frac{m(b-a)^2}{2}}{M-m} \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} - \frac{(b-a-\lambda)^2}{2}$$

et

$$\frac{(b-a-\lambda)^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2} \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx - f(b)(b-a) + \frac{m(b-a)^2}{2}}{M-m} \leqslant -\frac{\lambda^2}{2}\,.$$

On voit maintenant en additionnant ces deux inégalités que

$$\begin{aligned}\frac{2}{M-m}&\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}\,(b-a)\right| \\ &\leqslant -\lambda^2+\lambda(b-a) \\ &= \frac{\big(f(b)-f(a)-m(b-a)\big)\big(M(b-a)-f(b)+f(a)\big)}{(M-m)^2}\,.\end{aligned}$$

On observe finalement que si $m = -M$, on obtient en corollaire

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{4} - \frac{(f(b)-f(a))^2}{4M}.$$

I.6.45. Pour $0 \leqslant x \leqslant a$, on pose

$$h(x) = \int_0^x |f'(t)|\,dt.$$

On a alors

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^x |f'(t)|\,dt = h(x)$$

et $h'(x) = |f'(x)|$. En conséquence,

$$\begin{aligned}\int_0^a |f(x)f'(x)|\,dx &\leqslant \int_0^a h(x)h'(x)\,dx = \frac{1}{2}h^2(a)\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^a |f'(t)|\,dt\right)^2\\ &\leqslant \frac{a}{2}\int_0^a (f'(x))^2\,dx,\end{aligned}$$

la dernière inégalité découlant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir **I.6.1**).

On remarque que la constante $\frac{a}{2}$ est la meilleure possible. En effet, on obtient l'égalité en prenant $f(x) = cx$.

I.6.46. Pour $0 \leqslant x \leqslant a$, on pose

$$h(x) = \int_0^x \left(\int_0^{t_{n-1}} \left(\dots\left(\int_0^{t_1} \left|f^{(n)}(t)\right|dt\right)\dots\right)dt_{n-2}\right)dt_{n-1}.$$

On a alors $h^{(n)}(x) = \left|f^{(n)}(x)\right|$ et

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|\int_0^x \left(\int_0^{t_{n-1}} \left(\dots\left(\int_0^{t_1} f^{(n)}(t)\,dt\right)\dots\right)dt_{n-2}\right)dt_{n-1}\right|\\ &\leqslant \int_0^x \left(\int_0^{t_{n-1}} \left(\dots\left(\int_0^{t_1} \left|f^{(n)}(t)\right|dt\right)\dots\right)dt_{n-2}\right)dt_{n-1}\\ &= h(x).\end{aligned}$$

De plus, puisque les fonctions $h, h', \dots$ et $h^{(n-1)}$ sont croissantes, on voit que

$$\begin{aligned}\int_0^a \left|f(t)f^{(n)}(t)\right| dt &\leqslant \int_0^a h(t)h^{(n)}(t)\,dt \leqslant \int_0^a th'(t)h^{(n)}(t)\,dt\\ &\leqslant \cdots \leqslant \int_0^a t^{n-1}h^{n-1}(t)h^{(n)}(t)\,dt\\ &\leqslant a^{n-1}\frac{\left(h^{(n-1)}(a)\right)^2}{2}\\ &= \frac{a^{n-1}}{2}\left(\int_0^a h^{(n)}(t)\,dt\right)^2 \leqslant \frac{a^n}{2}\int_0^a \left(h^{(n)}(t)\right)^2 dt,\end{aligned}$$

la dernière inégalité se déduisant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir **I.6.1**).

I.6.47. On pose

$$z(x) = \int_0^x \left|f'(t)\right|^q dt.$$

On a alors $z'(x) = |f'(x)|^q$ et

$$|f(x)|^p \leqslant \left(\int_0^x \left|f'(t)\right| dt\right)^p.$$

On suppose que $q > 1$ et q' est tel que $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. D'après l'inégalité de Hölder (voir **I.6.26**),

$$|f(x)|^p \leqslant \left(\int_0^x \left|f'(t)\right|^q dt\right)^{p/q} a^{p/q'}, \quad 0 \leqslant x \leqslant a.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}\int_0^a |f(x)|^p \left|f'(x)\right|^q dx &\leqslant a^{p/q'} \int_0^a \left|f'(x)\right|^q \left(\int_0^x \left|f'(t)\right|^q dt\right)^{p/q} dx\\ &= a^{p/q'} \int_0^a z'(x)\,(z(x))^{p/q}\,dx\\ &= a^{p/q'}\frac{q}{p+q}\,z(a)^{\frac{p}{q}+1}\\ &= \frac{q}{p+q}\,a^{p/q'}\left(\int_0^a \left|f'(x)\right|^q dx\right)^{\frac{p}{q}+1}\\ &\leqslant \frac{q}{p+q}\,a^p \int_0^a \left|f'(x)\right|^{p+q} dx,\end{aligned}$$

la dernière inégalité se déduisant de celle de Jensen (voir **I.6.29**). Le cas $q = 1$ se traite de façon semblable.

I.6.48. On pose
$$P_n(x) = (x-a)^n(x-b)^n$$
et on observe que $P_n^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(b) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. Donc, par hypothèse,
$$P_n^{(k)}(a)f^{(2n-k-1)}(a) = P_n^{(k)}(b)f^{(2n-k-1)}(b) = 0$$
pour $k = 0, 1, \dots, 2n-1$. On obtient donc, en intégrant $2n$ fois par parties,
$$\int_a^b P_n(x)f^{(2n)}(x)\,dx = \int_a^b P_n^{(2n)}(x)f(x)\,dx = (2n)!\int_a^b f(x)\,dx.$$
Il s'ensuit que
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{M}{(2n)!}\int_a^b |P_n(x)|\,dx.$$
Puisque sur $]a\,,b[$, $P_n(x)$ est soit strictement positif, soit strictement négatif, il suffit de calculer $\int_a^b P_n(x)\,dx$. Le changement de variable $x = a + t(b-a)$ donne
$$\begin{aligned}\int_a^b P_n(x)\,dx &= \int_a^b (x-a)^n\,(x-b)^n\,dx \\ &= (-1)^n(b-a)^{2n+1}\int_0^1 t^n\,(1-t)^n\,dt \\ &= (-1)^n(b-a)^{2n+1}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\,,\end{aligned}$$
la dernière égalité provenant de **I.5.1(c)**.

I.7. Mesure de Jordan

I.7.1. Si $\mathbf{A}$ est Jordan-mesurable, alors $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|^* = |\mathbf{A}|_* < +\infty$. Par définition des bornes supérieures et inférieures, il s'ensuit que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble élémentaire $\mathbf{E}_1$ inclus dans $\mathbf{A}$ tel que
$$|\mathbf{A}| - |\mathbf{E}_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$
et un ensemble élémentaire $\mathbf{E}_2$ contenant $\mathbf{A}$ tel que
$$|\mathbf{E}_2| - |\mathbf{A}| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ceci montre que la condition est nécessaire. On prouve maintenant que la condition est aussi suffisante pour la mesurabilité au sens de Jordan de $\mathbf{A}$. En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, on a

$$|\mathbf{A}|^* - |\mathbf{A}|_* \leqslant |\mathbf{E}_2| - |\mathbf{E}_1| < \varepsilon,$$

ce qui implique $|\mathbf{A}|^* = |\mathbf{A}|_*$.

I.7.2. Puisque les $\mathbf{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont Jordan-mesurables, d'après le résultat du problème précédent, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe des ensembles élémentaires $\mathbf{E}_i$ et $\mathbf{E}'_i$ tels que $\mathbf{E}_i \subset \mathbf{A}_i \subset \mathbf{E}'_i$ et $|\mathbf{E}'_i| - |\mathbf{E}_i| < \frac{\varepsilon}{n}$. On a donc, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$|\mathbf{A}_i| - \frac{\varepsilon}{n} < |\mathbf{E}_i| \quad \text{et} \quad \left|\mathbf{E}'_i\right| < |\mathbf{A}_i| + \frac{\varepsilon}{n}\,.$$

On remarque alors que les $\mathbf{E}_i$ sont deux à deux séparés,

$$\mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2 \cup \cdots \cup \mathbf{E}_n \subset \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \cdots \cup \mathbf{A}_n$$

et $\mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2 \cup \cdots \cup \mathbf{E}_n$ est un ensemble élémentaire dont le volume est $|\mathbf{E}_1| + |\mathbf{E}_2| + \cdots + |\mathbf{E}_n|$. D'autre part,

$$\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \cdots \cup \mathbf{A}_n \subset \mathbf{E}'_1 \cup \mathbf{E}'_2 \cup \cdots \cup \mathbf{E}'_n$$

et $\mathbf{E}'_1 \cup \mathbf{E}'_2 \cup \cdots \cup \mathbf{E}'_n$ est un ensemble élémentaire dont le volume est $|\mathbf{E}'_1| + |\mathbf{E}'_2| + \cdots + |\mathbf{E}'_n|$. En conséquence,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}_1| + |\mathbf{A}_2| + \cdots + |\mathbf{A}_n| - \varepsilon &< |\mathbf{E}_1| + |\mathbf{E}_2| + \cdots + |\mathbf{E}_n| \\
&\leqslant |\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \cdots \cup \mathbf{A}_n|_* \\
&\leqslant |\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \cdots \cup \mathbf{A}_n|^* \\
&\leqslant \left|\mathbf{E}'_1\right| + \left|\mathbf{E}'_2\right| + \cdots + \left|\mathbf{E}'_n\right| \\
&< |\mathbf{A}_1| + |\mathbf{A}_2| + \cdots + |\mathbf{A}_n| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Puisque l'on peut choisir $\varepsilon > 0$ arbitrairement, le résultat cherché suit.

I.7.3. Il est clair que l'énoncé est vrai pour les ensembles élémentaires. On démontre d'abord que

$$|\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2|^* + |\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2|^* \leqslant |\mathbf{A}_1|^* + |\mathbf{A}_2|^*\,. \tag{1}$$

En effet, si $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ sont bornés et si $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ sont des ensembles élémentaires tels que $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{E}_1$ et $\mathbf{A}_2 \subset \mathbf{E}_2$, alors $\mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2$ sont tous les deux des ensembles élémentaires (ou $\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 = \varnothing$) et $\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \subset \mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2$, $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \subset \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2$. Donc,

$$|\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2|^* + |\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2|^* \leqslant |\mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2| + |\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2| = |\mathbf{E}_1| + |\mathbf{E}_2|\,.$$

En prenant la borne inférieure sur tous les ensembles élémentaires $\mathbf{E}_1 \supset \mathbf{A}_1$ et $\mathbf{E}_2 \supset \mathbf{A}_2$, on obtient (1) pour les ensembles bornés. Si au moins un des ensembles n'est pas borné, l'inégalité (1) est alors vérifiée pour $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{R}_k$ et $\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{R}_k$ avec $\mathbf{R}_k = [-k\,,k] \times \cdots \times [-k\,,k]$. On obtient (1) en faisant tendre k vers $+\infty$. De plus, la définition de la mesure intérieure de Jordan implique directement que (voir la démonstration de la première partie de (1))

$$|\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2|_* + |\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2|_* \geqslant |\mathbf{A}_1|_* + |\mathbf{A}_2|_* . \tag{2}$$

Puisque $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ sont tous les deux Jordan-mesurables, (1) et (2) impliquent

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2|_* + |\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2|_* &\geqslant |\mathbf{A}_1| + |\mathbf{A}_2| \\ &\geqslant |\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2|^* + |\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2|^* .\end{aligned}$$

En conséquence, si $|\mathbf{A}_1|$ et $|\mathbf{A}_2|$ sont finis, alors

$$(|\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2|^* - |\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2|_*) + (|\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2|^* - |\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2|_*) \leqslant 0.$$

Chacun des termes du premier membre étant positif, on conclut que $|\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2|^* = |\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2|_*$ et $|\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2|^* = |\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2|_*$. Si un des ensembles a une mesure de Jordan extérieure infinie, alors $|\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2|^* = |\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2|_* = +\infty$ et la mesurabilité au sens de Jordan se déduit des considérations précédentes.

I.7.4. On prouve d'abord que si $\mathbf{A}$ est contenu dans un pavé $\mathbf{R}$, alors

$$|\mathbf{A}|_* = |\mathbf{R}| - |\mathbf{R} \setminus \mathbf{A}|^* \quad \text{et} \quad |\mathbf{A}|^* = |\mathbf{R}| - |\mathbf{R} \setminus \mathbf{A}|_* . \tag{1}$$

On considère pour ce faire un ensemble élémentaire $\mathbf{E}_1 \subset \mathbf{A}$. L'ensemble élémentaire $\overline{\mathbf{R} \setminus \mathbf{E}_1}$ contient alors $R \setminus A$ et

$$|\mathbf{R}| - |\mathbf{E}_1| = |\mathbf{R} \setminus \mathbf{E}_1| \geqslant |\mathbf{R} \setminus \mathbf{A}|^* .$$

Donc $|\mathbf{E}_1| \leqslant |\mathbf{R}| - |\mathbf{R} \setminus \mathbf{A}|^*$ et on obtient en passant à la borne supérieure sur l'ensemble de tous les $\mathbf{E}_1 \subset \mathbf{A}$

$$|\mathbf{A}|_* \leqslant |\mathbf{R}| - |\mathbf{R} \setminus \mathbf{A}|^* . \tag{2}$$

Soit maintenant $\mathbf{E}_2$ un ensemble élémentaire tel que $\mathbf{R} \setminus \mathbf{A} \subset \mathbf{E}_2 \subset \mathbf{R}$. On a alors $\mathbf{R} \setminus \mathbf{E}_2 \subset \mathbf{A}$ et $|\mathbf{R}| - |\mathbf{E}_2| = |\mathbf{R} \setminus \mathbf{E}_2| \leqslant |\mathbf{A}|_*$, ce qui donne $|\mathbf{R}| - |\mathbf{A}|_* \leqslant |\mathbf{E}_2|$. On voit, en prenant la borne inférieure sur tous les $\mathbf{E}_2 \supset \mathbf{R} \setminus \mathbf{A}$, que

$$|\mathbf{R}| - |\mathbf{A}|_* \leqslant |\mathbf{R} \setminus \mathbf{A}|^* .$$

Ceci, combiné avec (2), donne

$$|\mathbf{A}|_* = |\mathbf{R}| - |\mathbf{R} \setminus \mathbf{A}|^* .$$

L'autre égalité de (1) se prouve de façon semblable. On peut maintenant se tourner vers la démonstration du résultat énoncé. On suppose d'abord que $\mathbf{A}_2$ est borné. Soit $\mathbf{R}$ un pavé tel que $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}_2 \subset \mathbf{R}$. On pose $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 \setminus \mathbf{A}_1$. On a alors, en utilisant ce que l'on a prouvé précédemment,

$$|\mathbf{R} \setminus \mathbf{A}|^* = |(\mathbf{R} \setminus \mathbf{A}_2) \cup \mathbf{A}_1|^* \leqslant |\mathbf{R} \setminus \mathbf{A}_2|^* + |\mathbf{A}_1|^* = |\mathbf{R}| - |\mathbf{A}_2|_* + |\mathbf{A}_1|^* ,$$

d'où

$$|\mathbf{A}|_* = |\mathbf{R}| - |\mathbf{R} \setminus \mathbf{A}|^* \geqslant |\mathbf{A}_2|_* - |\mathbf{A}_1|^* . \tag{3}$$

Un raisonnement semblable donne

$$|\mathbf{A}|^* = |\mathbf{R}| - |\mathbf{R} \setminus \mathbf{A}|_* \geqslant |\mathbf{A}_2|^* - |\mathbf{A}_1|_* . \tag{4}$$

Puisque $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ sont mesurables, on obtient

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_2 \setminus \mathbf{A}_1| = |\mathbf{A}_2| - |\mathbf{A}_1| . \tag{5}$$

Si $\mathbf{A}_2$ n'est pas borné, on considère les ensembles $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{R}_k$ et $\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{R}_k$. Leur différence est $\mathbf{A} \cap \mathbf{R}_k$ qui vérifie (5). On obtient le résultat cherché en faisant tendre k vers $+\infty$, du moment que $|\mathbf{A}_1| < +\infty$.

I.7.5. Les seuls rectangles contenus dans $\mathbf{A}$ sont $[a\,,b]\times[c\,,c]$, où $[a\,,b] \subset [0\,,1]$ et $c \in [0\,,1]\setminus\mathbb{Q}$. Donc, $|\mathbf{A}|_* = 0$. D'un autre côté, le plus petit rectangle contenant $\mathbf{A}$ est $[0\,,1] \times [0\,,1]$. Donc, $|\mathbf{A}|^* = 1$.

I.7.6. On va utiliser le résultat de **I.7.1**. Étant donné $0 < \varepsilon < 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{n_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{n_0 - 1} .$$

Soit $\mathbf{E}_1$ un ensemble élémentaire inscrit dans $\mathbf{B}$, formé de rectangles dont un des côtés est $[0\,,1]$ et dont l'autre est de longueur respectivement

$$\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2n_0} , \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \frac{\varepsilon}{2n_0} , \ldots , \left(\frac{1}{n_0 - 1} - \frac{1}{n_0}\right) - \frac{\varepsilon}{2n_0} .$$

On a alors

$$|\mathbf{E}_1| = 1 - \frac{1}{n_0} - \frac{n_0 - 1}{n_0} \times \frac{\varepsilon}{2} > 1 - \varepsilon.$$

En prenant $\mathbf{E}_2 = [0\,,1] \times [0\,,1]$, on a $|\mathbf{E}_2| - |\mathbf{E}_1| < \varepsilon$. Il est clair que $|\mathbf{B}| = 1$.

I.7.7. D'après l'égalité (3) dans la solution de **I.7.4**,

$$|\mathbf{A}|_* = |(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus (\mathbf{B} \setminus \mathbf{A})|_* \geqslant |\mathbf{A} \cup \mathbf{B}|_* - |\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}|^* = |\mathbf{A} \cup \mathbf{B}|_* ,$$

la dernière égalité découlant de l'hypothèse $|\mathbf{B}|^* = 0$. On a donc

$$|\mathbf{A}|_* \geqslant |\mathbf{A} \cup \mathbf{B}|_* .$$

Puisque l'inégalité opposée est évidente, l'égalité est vérifiée.

Si on prend maintenant $\mathbf{A}$ comme défini en **I.7.5** et $\mathbf{B} = ([0\,,1] \times [0\,,1]) \setminus \mathbf{A}$, on voit que

$$1 = |\mathbf{A} \cup \mathbf{B}|_* \neq 0 = |\mathbf{A}|_* ,$$

bien que $|\mathbf{B}|_* = 0$.

I.7.8. On montre d'abord que

$$|\mathbf{A}| = |\mathring{\mathbf{A}}|. \tag{1}$$

Si un ensemble élémentaire $\mathbf{E}'$ est contenu dans $\mathbf{A}$, on a alors $\mathring{\mathbf{E}'} \subset \mathring{\mathbf{A}}$ et $|\mathbf{E}'| = |\mathring{\mathbf{E}'}|_* \leqslant |\mathring{\mathbf{A}}|_*$. Donc, $|\mathbf{A}| \leqslant |\mathring{\mathbf{A}}|_*$. L'inégalité opposée est évidente. Il est aussi clair que $|\mathring{\mathbf{A}}|_* \leqslant |\mathring{\mathbf{A}}|^* \leqslant |\mathbf{A}|$. Cela prouve (1) et la mesurabilité au sens de Jordan de $\mathring{\mathbf{A}}$ dans le cas où $|\mathbf{A}| < +\infty$. On doit prouver si $|\mathbf{A}| = +\infty$ que $\mathring{\mathbf{A}} \cap \mathbf{R}$ est Jordan-mesurable pour tout pavé $\mathbf{R}$. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble élémentaire contenu dans $\mathbf{A} \cap \mathbf{R}$. On a

$$\mathring{\mathbf{E}} \subset \overset{\circ}{\overbrace{\mathbf{A} \cap \mathbf{R}}} = \mathring{\mathbf{A}} \cap \mathring{\mathbf{R}} \subset \mathring{\mathbf{A}} \cap \mathbf{R}.$$

Puisque $\mathbf{A} \cap \mathbf{R}$ est mesurable et $|\mathbf{E}| = |\mathring{\mathbf{E}}|$, on obtient

$$|\mathbf{A} \cap \mathbf{R}| \leqslant |\mathring{\mathbf{A}} \cap \mathbf{R}|_*.$$

Clairement,

$$|\mathring{\mathbf{A}} \cap \mathbf{R}|_* \leqslant |\mathbf{A} \cap \mathbf{R}| ,$$

ce qui montre que $|\mathring{\mathbf{A}} \cap \mathbf{R}|_* = |\mathbf{A} \cap \mathbf{R}|$. De plus,

$$|\mathring{\mathbf{A}} \cap \mathbf{R}|^* \leqslant |\mathbf{A} \cap \mathbf{R}| = |\mathring{\mathbf{A}} \cap \mathbf{R}|_*,$$

ce qui complète la preuve de la mesurabilité au sens de Jordan de $\mathring{\mathbf{A}}$.

On se tourne maintenant vers la démonstration de la seconde partie de l'énoncé. Si $\mathbf{A}$ est borné, alors pour tout ensemble élémentaire $\mathbf{E}$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$ si et seulement si $\overline{\mathbf{A}} \subset \mathbf{E}$ car $\mathbf{E}$ est fermé. Ceci montre que $|\mathbf{A}| = |\overline{\mathbf{A}}|^*$. Puisque $|\mathbf{A}| = |\overline{\mathbf{A}}|_*$, on a

$$|\mathbf{A}| = |\overline{\mathbf{A}}|. \tag{2}$$

Supposons maintenant que $\mathbf{A}$ n'est pas borné. Puisque que $\mathring{\mathbf{R}}$ est ouvert,

$$\mathring{\mathbf{R}} \cap \overline{\mathbf{A}} \subset \overline{\mathring{\mathbf{R}} \cap \mathbf{A}}.$$

De plus, les ensembles $\mathbf{R} \cap \overline{\mathbf{A}}$ et $\mathring{\mathbf{R}} \cap \overline{\mathbf{A}}$ diffèrent par un ensemble de mesure extérieure de Jordan nulle. Il s'ensuit, d'après I.7.7, que

$$|\mathbf{R} \cap \overline{\mathbf{A}}|_* = |\mathring{\mathbf{R}} \cap \overline{\mathbf{A}}|_* \leqslant |\overline{\mathring{\mathbf{R}} \cap \mathbf{A}}|_* \leqslant |\overline{\mathbf{R} \cap \mathbf{A}}|_* = |\mathbf{R} \cap \mathbf{A}| \leqslant |\mathbf{R} \cap \overline{\mathbf{A}}|_*.$$

On peut facilement montrer que $|\mathbf{R} \cap \overline{\mathbf{A}}|^* \leqslant |\mathbf{R} \cap \mathbf{A}| \leqslant |\mathbf{R} \cap \overline{\mathbf{A}}|^*$. Donc, pour tout pavé $\mathbf{R}$,

$$|\mathbf{R} \cap \overline{\mathbf{A}}| = |\mathbf{R} \cap \mathbf{A}|\,.$$

Finalement, en prenant $\mathbf{R} = \mathbf{R}_k$ et en faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient (2) pour des ensembles non bornés.

I.7.9. On suppose d'abord que $\mathbf{A}$ est borné. Puisque $\partial\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \setminus \mathring{\mathbf{A}}$, on voit, d'après les résultats de I.7.4 et I.7.8, que $|\partial\mathbf{A}| = 0$ si $\mathbf{A}$ est Jordan-mesurable. Supposons maintenant que $|\partial\mathbf{A}| = 0$ et que $\mathbf{A}$ est contenu dans un pavé $\mathbf{R}$. Alors, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble élémentaire $\mathbf{E} \subset \mathbf{R}$ contenant la frontière de $\mathbf{A}$ et tel que $|\mathbf{E}| < \varepsilon$. Donc $\mathbf{R} \setminus \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2$, où $\mathbf{E}_1 \subset \mathring{\mathbf{A}}$ et $\mathbf{A} \subset \mathbf{R} \setminus \mathbf{E}_2$. Puisque $\overline{\mathbf{E}}_1$ est un ensemble élémentaire, on a $|\mathbf{E}_1| = \left|\overline{\mathbf{E}}_1\right| \leqslant |\mathbf{A}|_*$. Clairement, $\mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}$ est un ensemble élémentaire contenant $\mathbf{A}$ et $|\mathbf{A}|^* \leqslant |\mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}| = |\mathbf{E}_1| + |\mathbf{E}|$. Donc, $|\mathbf{A}|^* - |\mathbf{A}|_* < \varepsilon$.

Si maintenant $\mathbf{A}$ est Jordan-mesurable et non borné, alors soit $|\mathbf{A}| < +\infty$, soit $|\mathbf{A}| = +\infty$. Dans le premier cas, d'après les résultats de I.7.4 et I.7.8, $|\partial\mathbf{A}| = 0$. Dans le second cas, pour tout pavé $\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |\partial\mathbf{A} \cap \mathbf{R}| &= |\overline{\mathbf{A}} \setminus \mathring{\mathbf{A}} \cap \mathbf{R}| = |\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{R}| - |\mathring{\mathbf{A}} \cap \mathbf{R}| \\ &= |\overline{\mathbf{A}} \cap \mathring{\mathbf{R}}| - |\mathring{\mathbf{A}} \cap \mathring{\mathbf{R}}|, \end{aligned}$$

car $|\partial\mathbf{R}| = 0$. De plus, puisque $\mathring{\mathbf{R}}$ est un ensemble ouvert, on a $\overline{\mathbf{A}} \cap \mathring{\mathbf{R}} \subset \overline{\mathbf{A} \cap \mathring{\mathbf{R}}}$, d'où

$$0 \leqslant |\partial\mathbf{A} \cap \mathbf{R}| \leqslant |\overline{\mathbf{A} \cap \mathring{\mathbf{R}}}| - |\widehat{\mathbf{A} \cap \mathbf{R}}| = |\mathbf{A} \cap \mathring{\mathbf{R}}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{R}| \leqslant 0,$$

ce qui implique $|\partial\mathbf{A}| = 0$.

Pour finir, on suppose que $\mathbf{A}$ n'est pas borné et $|\partial\mathbf{A}| = 0$. On a alors, pour tout pavé $\mathbf{R}$, $|\partial\mathbf{A}\cap\mathbf{R}| = 0$ et on peut montrer en répétant la considération utilisée au début de la démonstration que, étant donné $\varepsilon > 0$, $|\mathbf{A}\cap\mathbf{R}|^* \leqslant |\mathbf{A}\cap\mathbf{R}|_* + \varepsilon$, ce qui implique la mesurabilité au sens de Jordan de $\mathbf{A}\cap\mathbf{R}$ pour tout pavé $\mathbf{R}$. Il suffit, pour prouver que $|\mathbf{A}|^* = |\mathbf{A}|_*$, de montrer que $|\mathbf{A}|_* = \lim\limits_{k\to+\infty} |\mathbf{A}\cap\mathbf{R}_k|_*$. Pour cela, on pose $l = \lim\limits_{k\to+\infty} |\mathbf{A}\cap\mathbf{R}_k|_*$. Clairement, $l \leqslant |\mathbf{A}|_*$. De plus, si $\mathbf{E}$ est un ensemble élémentaire contenu dans $\mathbf{A}$, alors $\mathbf{E}\subset\mathbf{A}\cap\mathbf{R}_k$ pour k suffisamment grand et $|\mathbf{A}|_* \leqslant l$.

I.7.10. En utilisant **I.7.9** et le fait que

$$\partial(\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2\cup\cdots\cup\mathbf{A}_n)\subset\partial(\mathbf{A}_1)\cup\partial(\mathbf{A}_2)\cup\cdots\cup\partial(\mathbf{A}_n),$$

on voit qu'une union finie d'ensembles mesurables est mesurable. Il découle de **I.7.3** et **I.7.8** que l'égalité annoncée est vérifiée pour $n = 2$. En effet, si $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ sont séparés, alors $\overset{\circ}{\overbrace{\mathbf{A}_1\cap\mathbf{A}_2}} = \overset{\circ}{\mathbf{A}}_1\cap\overset{\circ}{\mathbf{A}}_2 = \varnothing$, d'où

$$|\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2| = |\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2| + \left|\overset{\circ}{\overbrace{\mathbf{A}_1\cap\mathbf{A}_2}}\right| = |\mathbf{A}_1| + |\mathbf{A}_2|\,.$$

On procède maintenant par récurrence. On suppose l'égalité vérifiée à l'ordre n et on prouve qu'elle l'est à l'ordre $n+1$. On a

$$\begin{aligned}&|(\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2\cup\cdots\cup\mathbf{A}_n)\cup\mathbf{A}_{n+1}| + |(\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2\cup\cdots\cup\mathbf{A}_n)\cap\mathbf{A}_{n+1}|\\ &\qquad= |\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2\cup\cdots\cup\mathbf{A}_n| + |\mathbf{A}_{n+1}| = |\mathbf{A}_1| + \cdots + |\mathbf{A}_n| + |\mathbf{A}_{n+1}|\,.\end{aligned}$$

Il suffit pour conclure la démonstration de prouver que

$$|(\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2\cup\cdots\cup\mathbf{A}_n)\cap\mathbf{A}_{n+1}| = 0.$$

Ceci provient du fait que $\mathbf{A}_i\cap\mathbf{A}_{n+1}\subset\partial(\mathbf{A}_i)$.

I.7.11. On rappelle que $\mathbf{C} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbf{E}_n$, où on pose $\mathbf{E}_1 = \left[0\,,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3}\,,1\right]$, $\mathbf{E}_2 = \left[0\,,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9}\,,\frac{3}{9}\right]\cup\left[\frac{6}{9}\,,\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9}\,,1\right]$ et on obtient $\mathbf{E}_n$ à partir de $\mathbf{E}_{n-1}$ en enlevant l'ouvert représentant le second tiers de tous les 2^{n-1} intervalles fermés formant $\mathbf{E}_{n-1}$. Par construction, $\mathbf{C}$ ne contient aucun intervalle $[a\,,b]$ $(a < b)$, d'où $|\mathbf{C}|_* = 0$. Il est aussi clair que $\mathbf{C}$ est contenu dans chacun des $\mathbf{E}_n$. Donc, $|\mathbf{C}|^* \leqslant |\mathbf{E}_n| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

I.7.12. La construction de $\mathbf{A}$ implique que cet ensemble ne contient aucun intervalle $[a\,,b]$ $(a<b)$, d'où $|\mathbf{A}|_*=0$. De plus, $\mathbf{A}^c=[0\,,1]\setminus\mathbf{A}$ est une union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints. D'après le résultat de **II.1.2**, on a $|\mathbf{A}^c|_*=\alpha$. On voit donc en utilisant la relation (1) de la solution de **I.7.4** que

$$|\mathbf{A}|^*=1-|\mathbf{A}^c|_*=1-\alpha>|\mathbf{A}|_*\,.$$

I.7.13. L'ensemble $\mathbf{A}$ est mesurable et sa mesure de Jordan est nulle. Ceci se déduit du fait que $|\mathbf{A}\cap[0\,,k]|^*=0$ pour tout entier k strictement positif. Soit $\varepsilon>0$. Il existe n_0 tel que $\frac{1}{n+k}<\frac{\varepsilon}{k}$ pour $n>n_0$. L'union des intervalles $\left[1\,,1+\frac{\varepsilon}{k}\right],\ldots,\left[k-1\,,k-1+\frac{\varepsilon}{k}\right]$ recouvre $\mathbf{A}\cap[0\,,k]$ excepté un nombre fini de points, d'où $|\mathbf{A}\cap[0\,,k]|^*\leqslant\frac{k-1}{k}\,\varepsilon<\varepsilon$.

I.7.14. Il est clair que $|\mathbf{A}|^*\geqslant 1$. D'autre part, si un ensemble élémentaire $\mathbf{E}$ est contenu dans $\mathbf{A}$, alors $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}\mathbf{I}_k$ est un recouvrement ouvert de l'ensemble compact $\mathbf{E}$. D'après le théorème de Heine-Borel, il existe un sous-recouvrement fini. En conséquence, $|\mathbf{E}|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$ et $|\mathbf{A}|_*\leqslant\frac{1}{2}$.

I.7.15. L'ensemble $\mathbf{A}$ défini au problème précédent est ouvert et n'est pas Jordan-mesurable. Puisque cet ensemble est borné, il est inclus dans un intervalle fermé $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}\setminus\mathbf{A}$ est donc un ensemble fermé qui n'est pas mesurable au sens de Jordan.

I.7.16. Soit $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ une partition de $[a\,,b]$. On a alors

$$\underline{\int_a^b}\chi_{\mathbf{A}}(x)\,dx=\sup\sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1}),$$

où

$$m_i=\begin{cases}1 & \text{si } [x_{i-1}\,,x_i]\subset\mathbf{A},\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

et la borne supérieure est prise sur l'ensemble de toutes les partitions P. Donc,

$$\underline{\int_a^b}\chi_{\mathbf{A}}(x)\,dx=\sup\sum_{[x_{i-1}\,,x_i]\subset\mathbf{A}}(x_i-x_{i-1})=\sup_{\mathbf{E}\subset\mathbf{A}}|\mathbf{E}|=|\mathbf{A}|_*\,.$$

L'autre égalité se prouve de la même façon.

I.7.17. On a

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

où $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ est une partition de $[a\,,b]$, $m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\}$ et la borne supérieure est prise sur l'ensemble de toutes les partitions de $[a\,,b]$. Puisque les rectangles $[x_{i-1}\,,x_i] \times [0\,,m_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, forment un ensemble élémentaire contenu dans $\mathbf{A}_f$, on voit que

$$|\mathbf{A}_f|_* \geqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

D'autre part, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble élémentaire $\mathbf{E} \subset \mathbf{A}_f$ tel que $|\mathbf{E}| > |\mathbf{A}_f|_* - \varepsilon$. Supposons que l'ensemble élémentaire $\mathbf{E}$ soit une union de rectangles $[a_i\,,b_i] \times [c_i\,,d_i]$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Si on ordonne toutes les extrémités a_i, b_i, on obtient une partition $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_s\}$ de $[a\,,b]$. Il est clair que $\mathbf{E}$ est inclus dans l'ensemble élémentaire formé des rectangles $[t_{i-1}\,,t_i] \times [0\,,m_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ où $m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\}$. Donc,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geqslant |\mathbf{A}_f|_* - \varepsilon.$$

L'autre égalité se prouve de façon semblable.

I.7.18. On suppose que f est Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$ et que contrairement à l'énoncé du problème, $|\mathbf{J}_\varepsilon|^* > 0$ pour un $\varepsilon > 0$. Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ est une partition de $[a\,,b]$ et si $\mathbf{J}_\varepsilon \cap [x_{i-1}\,,x_i] \neq \varnothing$, alors $M_i - m_i \geqslant \varepsilon$ et la somme des longueurs de tels intervalles $[x_{i-1}\,,x_i]$ est supérieure ou égale à $|\mathbf{J}_\varepsilon|^*$. Donc,

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{n=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \geqslant \varepsilon\,|\mathbf{J}_\varepsilon|^*,$$

ce qui contredit l'intégrabilité de f au sens de Riemann (voir le **théorème 1** en **I.1**). On prouve maintenant que la condition est nécessaire. On se donne $\varepsilon > 0$. Puisque $|\mathbf{J}_\varepsilon|^* = 0$, il existe un nombre fini de sous-intervalles disjoints recouvrant $\mathbf{J}_\varepsilon$ dont la somme des longueurs est inférieure à ε. On considère la partition $P_0 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ formée des extrémités de ces sous-intervalles. Si l'intervalle $[x_{i-1}\,,x_i]$ ne contient pas de point de $\mathbf{J}_\varepsilon$, alors $o_f(x) < \varepsilon$ pour $x \in [x_{i-1}\,,x_i]$. Par définition, il existe δ_x tel que $\operatorname{diam} f\big(\,]x - \delta_x\,, x + \delta_x[\,\big) < o_f(x) + (\varepsilon - o_f(x)) = \varepsilon$. Les intervalles ouverts $]x - \delta_x\,, x + \delta_x[$ recouvrent $[x_{i-1}\,, x_i]$ et, d'après le théorème de Heine-Borel, il existe donc un sous-recouvrement fini. Ceci implique que $[x_{i-1}\,, x_i]$ peut être divisé en un nombre fini de sous-intervalles fermés sur lesquels l'oscillation de f est inférieure à ε. On obtient de cette façon un affinement $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ de P_0. De plus,

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{i=1}^{m}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) = S_1 + S_2,$$

où S_1 contient les termes provenant des sous-intervalles contenant des points de $\mathbf{J}_\varepsilon$ et S_2 contient les termes restants. Si $(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$ est un terme de S_2, alors $M_i - m_i < \varepsilon$ et $S_2 < \varepsilon(b-a)$. On a pour S_1 la majoration $S_1 \leqslant (M-m)\varepsilon$, où M et m sont respectivement les bornes supérieure et inférieure de f sur $[a\,, b]$. D'où,

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon(M - m + b - a),$$

ce qui prouve, d'après le **théorème 1** de **I.1**, l'intégrabilité de f au sens de Riemann.

I.7.19. Si $\mathbf{A}$ est Jordan-mesurable, il existe alors, par définition, deux suites d'ensembles élémentaires vérifiant la condition. Supposons maintenant qu'il existe des suites $\{\mathbf{B}_n\}$ et $\{\mathbf{C}_n\}$ d'ensembles Jordan-mesurables telles que $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{C}_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |\mathbf{B}_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} |\mathbf{C}_n| = L$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors n_0 tel que $|L - |\mathbf{B}_n|| < \frac{\varepsilon}{4}$ et $|L - |\mathbf{C}_n|| < \frac{\varepsilon}{4}$ pour $n \geqslant n_0$. De plus, puisque $\mathbf{B}_n$ et $\mathbf{C}_n$ sont Jordan-mesurables, il existe des ensembles élémentaires $\mathbf{E}_n \subset \mathbf{B}_n$ et $\mathbf{E}'_n \supset \mathbf{C}_n$ tels que $|\mathbf{B}_n| - |\mathbf{E}_n| < \frac{\varepsilon}{4}$ et $|\mathbf{E}'_n| - |\mathbf{C}_n| < \frac{\varepsilon}{4}$. Il s'ensuit, d'après le résultat de **I.7.1**, que $\mathbf{A}$ est Jordan-mesurable et $|\mathbf{A}| = L$.

I.7.20. On utilise les résultats donnés en **I.7.17** et **I.7.19**. On définit

$$\mathbf{B}_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\pi} \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \left|\sin\frac{1}{x}\right|\right\}$$

et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{B}_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{(n+1)\pi} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n\pi},\ 0 \leqslant y \leqslant \left|\sin\frac{1}{x}\right|\right\}.$$

Chaque ensemble $\mathbf{B}_n$ est Jordan-mesurable et

$$|\mathbf{B}_0| = \int_{\frac{1}{\pi}}^{1} \left|\sin\frac{1}{x}\right| dx, \quad |\mathbf{B}_n| = \int_{\frac{1}{(n+1)\pi}}^{\frac{1}{n\pi}} \left|\sin\frac{1}{x}\right| dx.$$

De plus,

$$\mathbf{B}_0 \cup \mathbf{B}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{B}_n \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{B}_0 \cup \mathbf{B}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{B}_n \cup \mathbf{D}_n,$$

où $\mathbf{D}_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n\pi}, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Le résultat découle alors du fait que

$$|\mathbf{B}_0 \cup \mathbf{B}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{B}_n| - |\mathbf{B}_0 \cup \mathbf{B}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{B}_n \cup \mathbf{D}_n| = |\mathbf{D}_n| = \frac{1}{n\pi}.$$

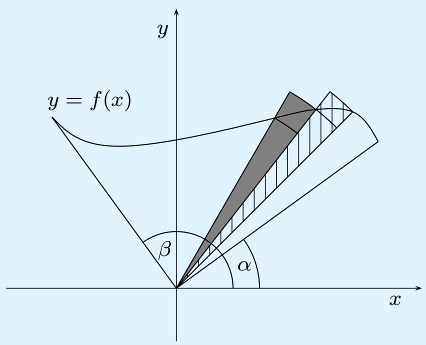
I.7.21. Il suffit de montrer la mesurabilité au sens de Jordan de $\mathbf{B} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathbf{K}_n$. On note que les $\mathbf{K}_n$ sont deux à deux disjoints et

$$\mathbf{B}_n = \bigcup_{k=1}^{n} \mathbf{K}_n \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{B}_n \cup \mathbf{D}_n = \mathbf{C}_n,$$

où $\mathbf{D}_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, -\frac{1}{4^n} \leqslant y \leqslant \frac{1}{4^n}\right\}$. Le résultat se déduit alors de **I.7.19** car $|\mathbf{D}_n|$ tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$.

I.7.22. La mesurabilité au sens de Jordan de l'ensemble $\mathbf{A}$ découle du résultat énoncé en **I.7.19**. Pour une partition $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \beta$, on pose $m_i = \min\{f(\theta) : \theta_{i-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_i\}$, $M_i = \max\{f(\theta) : \theta_{i-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ et on considère les secteurs angulaires

$$\mathbf{S}_i = \{(r, \theta) : 0 \leqslant r \leqslant m_i, \theta_{i-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_i\}$$
$$\mathbf{S}'_i = \{(r, \theta) : 0 \leqslant r \leqslant M_i, \theta_{i-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_i\}.$$



Si $\mathbf{B}_n = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{S}_i$ et $\mathbf{C}_n = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{S}'_i$, alors $\mathbf{B}_n$ et $\mathbf{C}_n$ sont des ensembles Jordan-mesurables tels que $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{C}_n$. De plus,

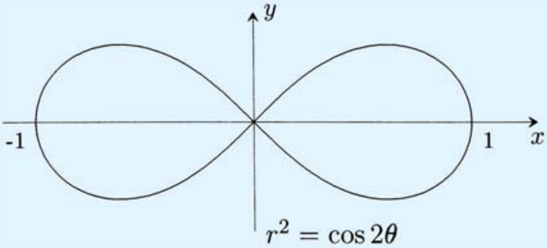
$$|\mathbf{B}_n| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2(\theta_i - \theta_{i-1}), \quad |\mathbf{C}_n| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2(\theta_i - \theta_{i-1}).$$

Puisque f est continue, on conclut la démonstration en prenant une suite de partitions dont le pas tend vers zéro.

I.7.23. On a

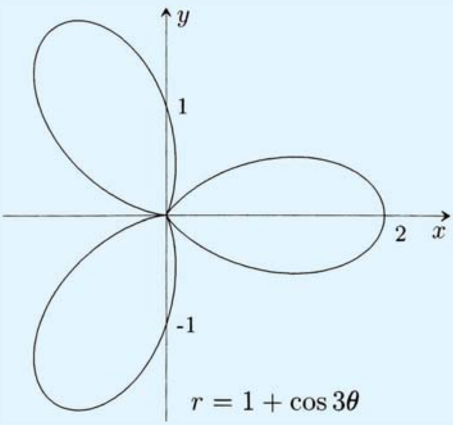
$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{2}\,a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\,a^2$$

et la figure montre le cas $a = 1$.

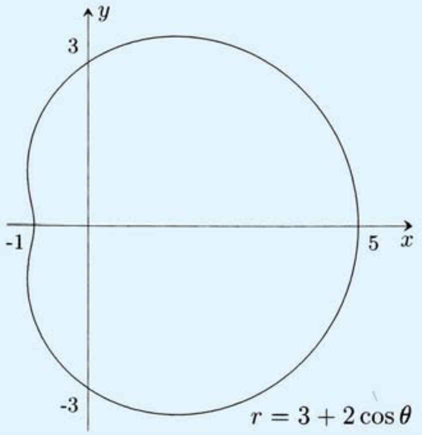


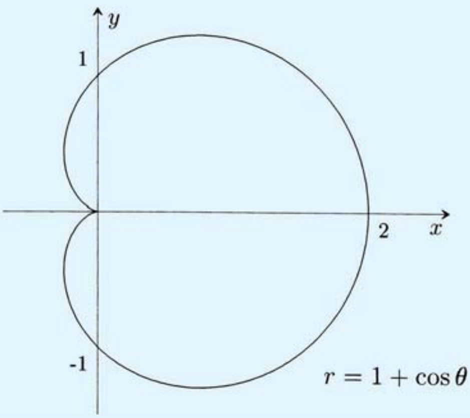
I.7.24. En utilisant le résultat de **I.7.22**, on obtient

$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{2}\,a^2 \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (1+\cos(3\theta))^2\,d\theta = \frac{1}{2}\,\pi a^2.$$



I.7.25. On considère d'abord le cas $a \geqslant b$. Les différentes possibilités sont illustrées sur les figures suivantes.

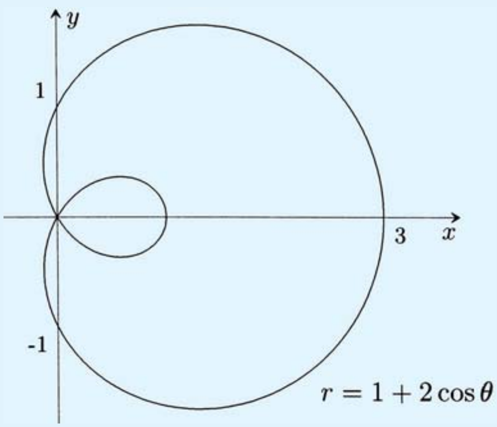




Par symétrie, on a

$$|\mathbf{A}| = \int_0^{\pi} (a + b\cos\theta)^2 \, d\theta = \frac{\pi}{2}\left(2a^2 + b^2\right).$$

On rappelle que lorsqu'on utilise les coordonnées polaires, r désigne la distance orientée d'un point à l'origine (ou pôle). Si $r < 0$, les coordonnées (r, θ) et $(|r|, \theta + \pi)$ représentent alors le même point. On considère maintenant le cas $a < b$. L'équation $a + b\cos\theta = 0$ admet deux solutions dans $[0, 2\pi]$: $\theta_1 = \operatorname{Arccos}\frac{-a}{b}$ et $\theta_2 = 2\pi - \operatorname{Arccos}\frac{-a}{b}$. Si $\theta \in [0, \theta_1]$, r est alors positif et on obtient la moitié supérieure de la boucle extérieure du limaçon. La boucle intérieure du limaçon correspond aux valeurs de θ comprises entre θ_1 et θ_2 où r est strictement négatif.



L'aire délimitée par la boucle intérieure est donc

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}_1| &= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}(a+b\cos\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(-3a\sqrt{b^2-a^2}+\left(b^2+2a^2\right)\left(\pi-\operatorname{Arc}\cos\frac{-a}{b}\right)\right).\end{aligned}$$

Par symétrie, l'aire délimitée par la boucle extérieure du limaçon est

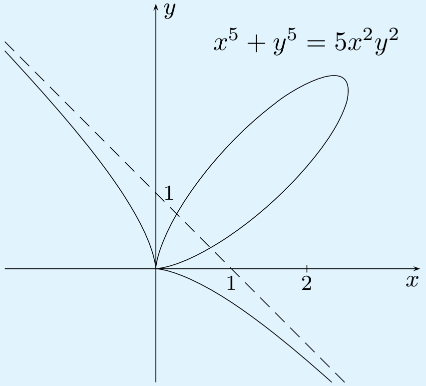
$$\begin{aligned}|\mathbf{A}_2| &= \int_0^{\theta_1}(a+b\cos\theta)^2\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(2a^2+b^2\right)\operatorname{Arc}\cos\frac{-a}{b}+3a\sqrt{b^2-a^2}\right).\end{aligned}$$

I.7.26. Une transformation en coordonnées polaires donne

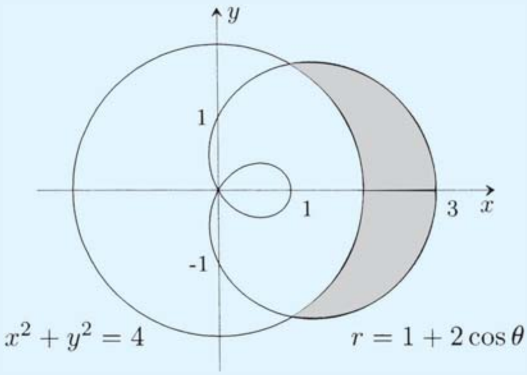
$$r\left(\sin^5\theta+\cos^5\theta\right)=5a\sin^2\theta\cos^2\theta.$$

La courbe a une boucle qui correspond aux valeurs de θ comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Donc,

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}| &= \frac{25}{2}\,a^2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^4\theta\cos^4\theta}{\left(\sin^5\theta+\cos^5\theta\right)^2}\,d\theta \\ &= \frac{25}{2}\,a^2\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^4\theta}{\left(1+\tan^5\theta\right)^2\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \frac{5}{2}\,a^2\int_0^{+\infty}\frac{5u^4}{\left(1+u^5\right)^2}\,du=\frac{5}{2}\,a^2\int_1^{+\infty}\frac{dv}{v^2} \\ &= \frac{5}{2}\,a^2.\end{aligned}$$



I.7.27. Les points d'intersection du cercle et du limaçon sont donnés par $\cos\theta = \frac{1}{2}$.

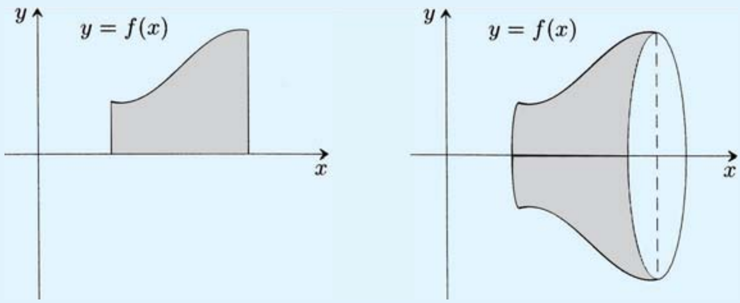


Donc, par symétrie,

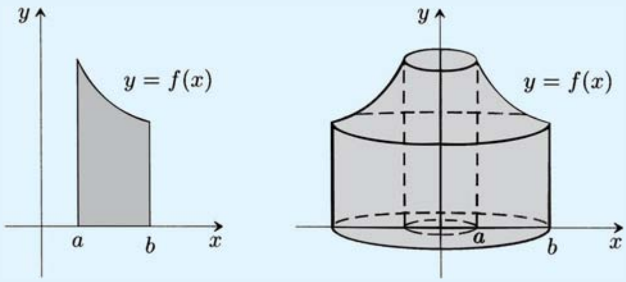
$$|\mathbf{A}| = \int_0^{\pi/3} \left((1+2\cos\theta)^2 - 2^2\right) d\theta = \frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\,.$$

I.7.28. On considère une partition $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ et on pose $m_i = \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $M_i = \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. On note $\mathbf{B}_n$ l'union des n cylindres obtenus en faisant tourner les rectangles $[x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i]$ autour de l'axe des abscisses et $\mathbf{C}_n$ l'union des n cylindres obtenus en faisant tourner les rectangles $[x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i]$ autour du même axe. Puisque f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, d'après **I.7.19**, on a

$$|\mathbf{V}| = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$



I.7.29. Comme dans la solution du problème précédent, on démarre avec une partition $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ et on considère les rectangles $[x_{i-1}\,, x_i] \times [0\,, m_i]$ et $[x_{i-1}\,, x_i] \times [0\,, M_i]$, où $m_i = \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}\,, x_i]\}$, $M_i = \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}\,, x_i]\}$. Lorsque l'on fait tourner ces rectangles autour de l'axe des ordonnées, ils balaient des enveloppes cylindriques dont les volumes sont respectivement $\pi m_i \left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right)$ et $\pi M_i \left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right)$. Puisque l'intégrale de Riemann-Stieltjes $\pi \int_a^b f(x)\, d(x^2)$ existe et est égale à $2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$, le résultat cherché s'en déduit.



I.7.30. On obtient par symétrie et en utilisant le résultat de **I.7.29**

$$\begin{aligned}
|\mathbf{V}| &= 4\pi \int_{a-r}^{a+r} x\sqrt{r^2 - (x-a)^2}\, dx \\
&= 4\pi \int_{a-r}^{a+r} (x-a)\sqrt{r^2 - (x-a)^2}\, dx + 4\pi a \int_{a-r}^{a+r} \sqrt{r^2 - (x-a)^2}\, dx \\
&= 4\pi a \int_{a-r}^{a+r} \sqrt{r^2 - (x-a)^2}\, dx = 2\pi^2 a r^2.
\end{aligned}$$

I.7.31. Le volume est égal à

$$\begin{aligned}
|\mathbf{V}| &= \sum_{k=0}^{+\infty} \pi \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-2x} \sin x\, dx \\
&= \frac{\pi}{5} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-4k\pi} \left(1 + e^{-2\pi}\right) \\
&= \frac{\pi}{5\left(1 - e^{-2\pi}\right)}\,.
\end{aligned}$$

I.7.32. L'équation paramétrique de l'ellipse est

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Donc,

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt\\ &= 4\int_0^{\pi/4} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt + 4\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt.\end{aligned}$$

On obtient, en faisant le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - s$ dans la dernière intégrale,

$$L = 4\int_0^{\pi/4} \left(\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} + \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\right) dt.$$

Des calculs montrent que l'intégrande est une fonction croissante sur $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$. L'encadrement cherché s'en déduit.

I.7.33. La longueur de l'ellipse est

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\,dt\\ &= 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\,dt.\end{aligned}$$

D'après la formule du binôme de Newton (voir, par exemple, **III.4.4 (vol. II)**), si $|u| < 1$, alors

$$\begin{aligned}\sqrt{1-u} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\,u^n\\ &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\,u^n.\end{aligned}$$

En posant $u = e\cos t$, on obtient

$$L = 4a\left(\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\,e^{2n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\,dt\right)$$

car la série converge uniformément sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$. D'après **I.4.1(b)**, on a

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\,dt = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2}$$

et le résultat cherché s'en déduit.

I.7.34. L'équation paramétrique de la courbe est

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta, \quad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta.$$

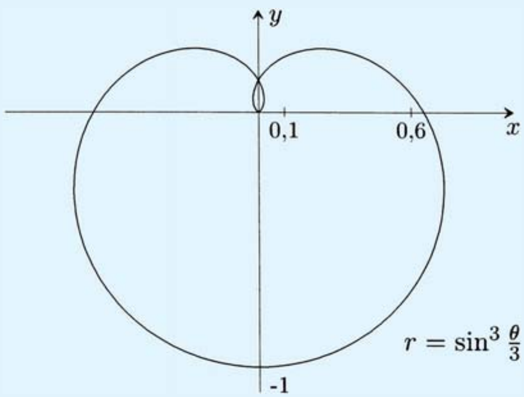
Donc,

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}d\theta.$$

I.7.35.

(a) On applique la formule donnée au problème précédent. On a

$$L = a\int_0^{3\pi} \sin^2\frac{\theta}{3}\,d\theta = \frac{3\pi a}{2}.$$

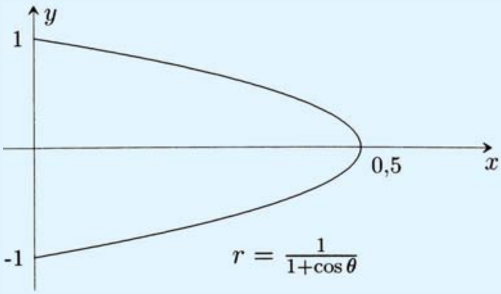


(b) L'équation paramétrique de la courbe est

$$x = \frac{1}{1+\cos\theta}\cos\theta, \quad y = \frac{1}{1+\cos\theta}\sin\theta, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

On vérifie facilement que la courbe est l'arc de la parabole $y^2 = 1 - 2x$, $y \in [-1, 1]$. Sa longueur est donc

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1+y^2}\,dy = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}.$$



I.7.36. On remarque que si une courbe a pour équation $\theta = g(r)$ $(a \leqslant r \leqslant b)$ et si g est continûment dérivable sur $[a\,,b]$, on peut alors, comme en **I.7.34**, en déduire la formule suivante pour sa longueur :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (rg'(r))^2}dr.$$

La longueur de la courbe est donc donnée par

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right)^2}dr = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(r + \frac{1}{r}\right)dr = \frac{1}{2}(\ln 3 + 4)\,.$$

I.7.37. L'équation paramétrique de la courbe est

$$x = (1 + \cos t)\cos\left(t - \tan\frac{t}{2}\right), \quad y = (1 + \cos t)\sin\left(t - \tan\frac{t}{2}\right),$$

où $t \in [0\,,\beta]$. Donc,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \\ &= \int_0^\beta \sqrt{\sin^2(t) + (1 + \cos t)^2\left(1 - \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)^2}\,dt \\ &= \int_0^\beta dt = \beta. \end{aligned}$$

This page intentionally left blank

II

L'INTÉGRALE DE LEBESGUE

Énoncés

II.1. Mesure de Lebesgue sur la droite réelle

Pour $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$, on considère une collection dénombrable d'intervalles fermés $\{\mathbf{I}_n\}$ recouvrant $\mathbf{A}$, $\mathbf{I}_n = [a_n\,, b_n]$, $a_n \leqslant b_n$, autrement dit, $\mathbf{A} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{I}_n$. On définit la *mesure extérieure de Lebesgue* $m^*(\mathbf{A})$ de $\mathbf{A}$ par

$$m^*(\mathbf{A}) = \inf \sum_{n=1}^{+\infty} |\mathbf{I}_n| = \inf \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - a_n),$$

où la borne inférieure est prise sur tous les recouvrements dénombrables de $\mathbf{A}$ par des intervalles fermés. Clairement, les intervalles fermés apparaissant dans la définition de la mesure extérieure de Lebesgue peuvent être remplacés par des intervalles ouverts $]a_n\,, b_n[$. La mesure extérieure de Lebesgue a les propriétés suivantes :

(i) Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, alors $m^*(\mathbf{A}) \leqslant m^*(\mathbf{B})$.

(ii) $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(\mathbf{A}_n)$.

Un ensemble $\mathbf{A}$ est dit *Lebesgue-mesurable* (ou *mesurable*), si la *condition de Carathéodory*

$$m^*(\mathbf{E}) = m^*(\mathbf{E} \cap \mathbf{A}) + m^*(\mathbf{E} \setminus \mathbf{A})$$

est vérifiée pour tout ensemble $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}$. La collection $\mathfrak{M}$ de tous les sous-ensembles Lebesgue-mesurables de $\mathbb{R}$ est une *σ-algèbre* : le complémentaire d'un ensemble mesurable est mesurable et l'union d'une collection dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable. On rappelle que la collection $\mathfrak{B}$ des *boréliens* est la plus petite σ-algèbre contenant tous les ensembles ouverts de $\mathbb{R}$. Tous les boréliens sont mesurables. Si $\mathbf{A}$ est un ensemble mesurable, on définit la *mesure de Lebesgue* $m(\mathbf{A})$ comme étant la mesure extérieure de $\mathbf{A}$. La mesure m est dénombrablement additive sur $\mathfrak{M}$, autrement dit, si les ensembles $\mathbf{A}_n \subset \mathfrak{M}$ sont deux à deux disjoints, alors

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(\mathbf{A}_n).$$

II.1.1. Démontrer que $\mathbf{A}$ est mesurable si $m^*(\mathbf{A}) = 0$.

II.1.2. Soit $\mathbf{S} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{I}_n$ où les $\mathbf{I}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont des intervalles fermés. Prouver que $m(\mathbf{S}) = |\mathbf{S}|_*$ où $|\mathbf{S}|_*$ représente la mesure intérieure de Jordan de $\mathbf{S}$.

II.1.3. Soit $\mathbf{S}_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{I}_n$ et $\mathbf{S}_2 = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{K}_n$, où $\mathbf{I}_n, \mathbf{K}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont des intervalles fermés. Prouver que

$$m(\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2) + m(\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2) = m(\mathbf{S}_1) + m(\mathbf{S}_2).$$

II.1.4. Prouver que, quels que soient les ensembles $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$,

$$m^*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + m^*(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \leqslant m^*(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{B}).$$

II.1.5. L'ensemble $\mathbf{G}$ étant un ouvert, soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ tels que $\mathbf{A} \subset \mathbf{G}$ et $\mathbf{B} \cap \mathbf{G} = \varnothing$. Prouver que

$$m^*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = m^*(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{B}).$$

II.1.6. Soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ des ensembles séparés par une distance strictement positive, autrement dit,

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \inf\{|x - y| : x \in \mathbf{A}, y \in \mathbf{B}\} > 0.$$

On a alors

$$m^*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = m^*(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{B}).$$

II.1.7. Montrer que si $m(\mathbf{A}) = 0$, on a alors, pour tout $\mathbf{B}$,

$$m^*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = m^*(\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}) = m^*(\mathbf{B}).$$

II.1.8. Prouver que si $\mathbf{A}$ est un ensemble mesurable de mesure finie, on a alors, pour tout $\mathbf{B} \supset \mathbf{A}$,

$$m^*(\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}) = m^*(\mathbf{B}) - m(\mathbf{A}).$$

II.1.9. Prouver que si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont mesurables, alors

$$m(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + m(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = m(\mathbf{A}) + m(\mathbf{B}).$$

II.1.10. Prouver que si $m^*(\mathbf{A}) < +\infty$ et s'il existe $\mathbf{A}_1$, sous-ensemble mesurable de $\mathbf{A}$, tel que $m(\mathbf{A}_1) = m^*(\mathbf{A})$, alors $\mathbf{A}$ est mesurable.

II.1.11. Soit $\mathbf{A}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble ouvert $\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{A} \subset \mathbf{G}$ et $m(\mathbf{G}) < m^*(\mathbf{A}) + \varepsilon$. Prouver aussi qu'il existe un $\mathcal{G}_\delta$-ensemble $\mathbf{A}_2$ tel que $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}_2$ et $m(\mathbf{A}_2) = m^*(\mathbf{A})$.

II.1.12. Montrer que pour tout $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$, les énoncés suivants sont équivalents :

(i) $\mathbf{A}$ est mesurable.

(ii) Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathbf{G} \supset \mathbf{A}$ tel que

$$m^*(\mathbf{G} \setminus \mathbf{A}) < \varepsilon.$$

(iii) Il existe un $\mathcal{G}_\delta$-ensemble $\mathbf{U} \supset \mathbf{A}$ tel que $m^*(\mathbf{U} \setminus \mathbf{A}) = 0$.

(iv) Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $\mathbf{F} \subset \mathbf{A}$ tel que

$$m^*(\mathbf{A} \setminus \mathbf{F}) < \varepsilon.$$

(v) Il existe un $\mathcal{F}_\sigma$-ensemble $\mathbf{V} \subset \mathbf{A}$ tel que $m^*(\mathbf{A} \setminus \mathbf{V}) = 0$.

II.1.13. Prouver que si $m^*(\mathbf{A}) < +\infty$, alors $\mathbf{A}$ est mesurable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une union finie $\mathbf{W}$ d'intervalles ouverts telle que $m^*(\mathbf{W} \triangle \mathbf{A}) < \varepsilon$ où $\mathbf{W} \triangle \mathbf{A}$ est la *différence symétrique* de $\mathbf{W}$ et $\mathbf{A}$, soit $\mathbf{W} \triangle \mathbf{A} = (\mathbf{W} \setminus \mathbf{A}) \cup (\mathbf{A} \setminus \mathbf{W})$.

II.1.14. Pour $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$, on définit la *mesure intérieure de Lebesgue* $m_*(\mathbf{A})$ de $\mathbf{A}$ en posant

$$m_*(\mathbf{A}) = \sup\left\{m(\mathbf{B}) : \mathbf{B} \in \mathfrak{M}, \mathbf{B} \subset \mathbf{A}\right\},$$

où $\mathfrak{M}$ est la σ-algèbre de tous les sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}$. Démontrer :

(a) Si $\mathbf{A}$ est mesurable, alors $m_*(\mathbf{A}) = m^*(\mathbf{A})$.

(b) Si $\mathbf{A}$ est un sous-ensemble d'un intervalle fermé borné $\mathbf{I}$, alors

$$m_*(\mathbf{A}) = |\mathbf{I}| - m^*(\mathbf{I} \setminus \mathbf{A}).$$

(c) Si $m_*(\mathbf{A}) = m^*(\mathbf{A}) < +\infty$ alors $\mathbf{A}$ est mesurable.

(d) Pour tout ensemble $\mathbf{A}$ et tout ensemble $\mathbf{C}$,

$$m_*(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) + m_*(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \geqslant m_*(\mathbf{A}) + m_*(\mathbf{C}).$$

(e) Si les $\mathbf{A}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont deux à deux disjoints, alors

$$m_*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m_*(\mathbf{A}_n).$$

(f) Si $\mathbf{M}$ est de mesure nulle, alors $m_*(\mathbf{A} \cup \mathbf{M}) = m_*(\mathbf{A})$.

II.1.15. Prouver que $\mathbf{A} \subset \mathbf{I}$, $\mathbf{I}$ étant un intervalle fermé borné, est mesurable si et seulement si

$$|\mathbf{I}| = m^*(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{I} \setminus \mathbf{A}).$$

II.1.16. Soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux ensembles donnés de mesure extérieure finie. Prouver que $m^*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = m^*(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{B})$ si et seulement s'il existe des ensembles mesurables $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{B}_1$ tels que $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}_1$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{B}_1$ et $m(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{B}_1) = 0$.

II.1.17. Soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux ensembles de mesure extérieure finie. Prouver que si $m^*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = m^*(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{B})$, alors $m_*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = m_*(\mathbf{A}) + m_*(\mathbf{B})$.

II.1.18. Démontrer que si $\{\mathbf{A}_n\}$ est une suite croissante d'ensembles mesurables, alors

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n\right) = \lim_{n \to +\infty} m(\mathbf{A}_n).$$

II.1.19. Démontrer que si $\{\mathbf{A}_n\}$ est une suite décroissante d'ensembles mesurables et si $m(\mathbf{A}_k)$ est finie pour au moins un k, alors

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} m(\mathbf{A}_n).$$

Prouver aussi qu'on ne peut pas omettre l'hypothèse $m(\mathbf{A}_k) < +\infty$ pour un certain k.

II.1.20. On définit, pour une suite $\{\mathbf{A}_n\}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}$, la *limite supérieure* et la *limite inférieure* de $\{\mathbf{A}_n\}$ en posant

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \mathbf{A}_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} \mathbf{A}_n \quad \text{et} \quad \underline{\lim_{n\to+\infty}} \mathbf{A}_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} \mathbf{A}_n.$$

(a) Montrer que si $\mathbf{A}_n$ est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$m\left(\underline{\lim_{n\to+\infty}} \mathbf{A}_n\right) \leqslant \underline{\lim_{n\to+\infty}} m(\mathbf{A}_n).$$

(b) Montrer que si, de plus, $m(\mathbf{A}_n \cup \mathbf{A}_{n+1} \cup \cdots) < +\infty$ pour au moins un n, alors

$$m\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}} \mathbf{A}_n\right) \geqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}} m(\mathbf{A}_n).$$

II.1.21. On dit que la suite $\{\mathbf{A}_n\}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ converge si $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \mathbf{A}_n = \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \mathbf{A}_n$ et on note la limite commune $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{A}_n$.

(a) Prouver qu'une suite monotone d'ensembles converge.

(b) Prouver que si une suite d'ensembles mesurables $\{\mathbf{A}_n\}$ telle que $\mathbf{A}_n \subset \mathbf{B}$ et $m^*(\mathbf{B}) < +\infty$ converge, alors

$$m\left(\lim_{n\to+\infty} \mathbf{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} m(\mathbf{A}_n).$$

II.1.22. Prouver que la mesure de Lebesgue de l'ensemble défini en **I.7.12** est égale à $1 - \alpha$.

II.1.23. Soit $\mathbf{A}$ l'ensemble des points de $[0\,,1]$ tels que $x \in \mathbf{A}$ si et seulement si l'écriture décimale de x ne nécessite pas l'utilisation du chiffre 7. Montrer que $\mathbf{A}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

II.1.24. Soit $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des nombres dont l'écriture décimale ne nécessite pas l'utilisation du chiffre 7 après la virgule. Montrer que $\mathbf{B}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

II.1.25. Soit $\mathbf{A}$ l'ensemble des points de $[0\,,1]$ qui admettent une écriture binaire avec des 0 à chaque position paire. Montrer que $\mathbf{A}$ est un ensemble nulle part dense(1) de mesure de Lebesgue nulle.

II.1.26. Trouver la mesure de Lebesgue de l'ensemble des points de $[0\,,1]$ qui admettent une écriture décimale contenant tous les chiffres $1, 2, \ldots, 9$.

II.1.27. Quelle est la mesure de Lebesgue de l'ensemble des points de $[0\,,1]$ qui admettent une écriture décimale $0, d_1 d_2 d_3 \ldots$ telle qu'aucune suite $d_{3k+1}\ d_{3k+2}\ d_{3k+3}$ ne soit formée de trois 2 consécutifs ?

II.1.28. Soit $\mathbf{A}$ l'union des intervalles centrés aux points de l'ensemble de Cantor et de longueur 0,1. Trouver la mesure de Lebesgue de $\mathbf{A}$.

II.1.29. Prouver que si $\mathbf{A}$ est un ensemble borné et mesurable de mesure $m(\mathbf{A}) = p > 0$, il existe alors un ensemble mesurable $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ de mesure q pour tout $q \in \,]0\,,p[$.

II.1.30. Prouver que si $0 < m(\mathbf{A}) \leqslant +\infty$, il existe alors un ensemble mesurable $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ de mesure q pour tout q strictement positif tel que $q < m(\mathbf{A})$.

II.1.31. Montrer que si $0 < m(\mathbf{A}) \leqslant +\infty$, il existe alors un ensemble parfait(2) $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ de mesure q pour tout q strictement positif tel que $q < m(\mathbf{A})$.

II.1.32. Démontrer que tout ensemble $\mathbf{A}$ de mesure de Lebesgue strictement positive a la puissance du continu.

II.1.33. Prouver que tout ensemble fermé et non vide $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle est nulle part dense.

(1) Un sous-ensemble $\mathbf{A}$ de $\mathbf{X}$ est *nulle part dense* si l'intérieur de son adhérence dans $\mathbf{X}$ est vide. (N.d.T.)

(2) Un *ensemble* est *parfait* s'il coïncide avec l'ensemble de ses points d'accumulation, dit autrement, s'il est fermé et sans points isolés. (N.d.T.)

II.1.34. Soit $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ un ensemble nulle part dense de mesure de Lebesgue nulle. Son adhérence doit-elle être de mesure de Lebesgue nulle ?

II.1.35. Prouver que si $\mathbf{A} \subset [a\,,b]$ et $m(\mathbf{A}) > 0$, il existe x et y dans $\mathbf{A}$ tels que $|x - y|$ soit irrationnel.

II.1.36. Existe-t-il une collection dénombrable de sous-ensembles de $[0\,,1]$, nulle part denses et parfaits, dont l'union soit de mesure de Lebesgue égale à 1 ?

II.1.37. Existe-t-il un sous-ensemble de $[0\,,1]$ nulle part dense et parfait de mesure de Lebesgue égale à 1 ?

II.1.38. Donner un exemple d'ensemble mesurable $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante : pour tout intervalle $]\alpha\,,\beta[$,

$$m\big(\mathbf{A} \cap\,]\alpha\,,\beta[\big) > 0 \quad \text{et} \quad m\big((\mathbb{R} \setminus \mathbf{A}) \cap\,]\alpha\,,\beta[\big) > 0.$$

II.1.39. Soit $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable vérifiant la propriété : pour tout $\delta > 0$, $m\big(\mathbf{A} \cap\,]-\delta\,,\delta[\big) > 0$ et $0 \in \mathbf{A}$. Montrer qu'il existe un ensemble parfait $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ tel que $m\big(\mathbf{B} \cap\,]-\delta\,,\delta[\big) > 0$ pour tout $\delta > 0$.

II.1.40. Un ensemble mesurable $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ est dit de *densité d en x* si la limite

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{m(\mathbf{A} \cap [x - h\,, x + h])}{2h}$$

existe et est égale à d. Si $d = 1$, x est appelé un *point de densité de* $\mathbf{A}$ et si $d = 0$, x est appelé un *point de dispersion de* $\mathbf{A}$. Déterminer les points de densité et les points de dispersion de $\mathbf{A} =]-1\,,0[\cup]0\,,1[\cup \{2\}$.

II.1.41. Étant donné $\alpha \in]0\,,1[$, construire un ensemble $\mathbf{A}$ dont la densité en $x_0 \in \mathbb{R}$ est égale α.

II.1.42. Soit $\mathbf{A}$ un ensemble mesurable tel que $0 \in \mathbf{A}$ soit un point de densité de $\mathbf{A}$. Prouver qu'il existe un ensemble parfait $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ tel que 0 soit un point de densité de $\mathbf{B}$.

II.1.43. Si x et y appartiennent à $[0\,,1[$, on définit la somme $x+y \pmod 1$ comme étant $x+y$ si $x+y<1$ et $x+y-1$ si $x+y \geqslant 1$. Pour $\mathbf{A} \subset [0\,,1[$ et $a \in [0\,,1[$, on définit le translaté modulo 1 de $\mathbf{A}$ comme étant l'ensemble

$$\mathbf{A} + a\,(\mathrm{mod} 1) = \{x + a\,(\mathrm{mod} 1) : x \in \mathbf{A}\}.$$

Montrer que $m^*(\mathbf{A}) = m^*\left(\mathbf{A} + a\,(\mathrm{mod} 1)\right)$.

II.1.44. Prouver que si $\mathbf{A} \subset [0\,,1[$ et $a \in [0\,,1[$, alors l'ensemble $\mathbf{A} + a\,(\mathrm{mod} 1)$ est mesurable si et seulement si $\mathbf{A}$ est mesurable et

$$m(\mathbf{A}) = m\left(\mathbf{A} + a\,(\mathrm{mod} 1)\right).$$

II.1.45. On dit que x et y sont équivalents et on note $x \sim y$ si et seulement si $x-y$ est rationnel. Cette relation d'équivalence divise $[0\,,1[$ en une famille non dénombrable de classes d'équivalence disjointes. D'après l'axiome du choix, il existe un ensemble $\mathbf{V}$ contenant exactement un élément de chaque classe d'équivalence. On appelle un tel ensemble un *ensemble de Vitali*. Prouver qu'un ensemble de Vitali n'est pas mesurable.

II.1.46. Montrer que si $\mathbf{A}$ est un sous-ensemble mesurable d'un ensemble de Vitali $\mathbf{V}$, alors $m(\mathbf{A}) = 0$.

II.1.47. Montrer sur un exemple que la réciproque du résultat énoncé en **II.1.17** est fausse. Autrement dit, il existe des ensembles $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ tels que

$$m_*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = m_*(\mathbf{A}) + m_*(\mathbf{B}) \quad \text{et} \quad m^*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) < m^*(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{B}).$$

II.1.48. Prouver que tout ensemble de mesure extérieure strictement positive contient un sous-ensemble non mesurable.

II.1.49. Donner un exemple de suite $\{\mathbf{A}_n\}$ d'ensembles deux à deux disjoints telle que

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n\right) < \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(\mathbf{A}_n).$$

II.1.50. Donner un exemple de suite décroissante $\{\mathbf{A}_n\}$ d'ensembles telle que $m^*(\mathbf{A}_1) < +\infty$ et

$$m^*\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n\right) < \lim_{n\to+\infty} m^*(\mathbf{A}_n).$$

II.1.51. Prouver que si $\mathbf{A}$ est un ensemble mesurable de mesure strictement positive, il existe alors $\delta > 0$ tel que $\mathbf{A} \cap (\mathbf{A} + x)$ soit non vide dès que $|x| < \delta$.

II.1.52. Soit $\mathbf{V}_k$ $(k \in \mathbb{N})$ les ensembles définis dans la solution de **II.1.45**. Prouver qu'aucun des ensembles $\mathbf{A}_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} \mathbf{V}_k$ n'est mesurable.

II.1.53. Soit $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable pour lequel il existe c strictement positif tel que $m(\mathbf{A} \cap \mathbf{I}) \geqslant c\,|\mathbf{I}|$ pour tout intervalle $\mathbf{I}$. Prouver que le complémentaire de $\mathbf{A}$ est de mesure nulle.

II.1.54. Montrer qu'il existe un ensemble $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ tel que chaque ensemble Lebesgue-mesurable inclus dans $\mathbf{A}$ ou dans $\mathbf{A}^c$ est de mesure de Lebesgue nulle.

II.1.55. Démontrer le *critère de Lebesgue d'intégrabilité au sens de Riemann.* Une fonction bornée sur un intervalle fermé et borné est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble des discontinuités de f est de mesure de Lebesgue nulle.

II.1.56. Soit $f\colon [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, on note $\mathbf{D}$ l'ensemble des discontinuités de f et $\mathbf{L}$ l'ensemble des points où f admet une limite à gauche. Prouver que $\mathbf{D} \cap \mathbf{L}$ est dénombrable. En déduire le critère intégrabilité au sens de Riemann suivant : une fonction bornée sur $[a\,,b]$ est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble $[a\,,b] \setminus \mathbf{L}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

II.1.57. Soit $f\colon [0\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que la mesure de Lebesgue de

$$\mathbf{A} = \{h \in [0\,,1] : f(x+h) = f(x) \text{ pour un certain } x \in [0\,,1]\}$$

est au moins égale à $\frac{1}{2}$.

II.2. Fonctions mesurables au sens de Lebesgue

Une fonction $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie sur un ensemble mesurable $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ est dite *Lebesgue-mesurable* (ou *mesurable*) sur $\mathbf{A}$ si $f^{-1}\left(]c\,,+\infty]\right) = \{x \in \mathbf{A} : f(x) > c\}$ est un sous-ensemble Lebesgue-mesurable de $\mathbf{A}$ pour tout réel c. On a :

Théorème 1. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) f *est Lebesgue-mesurable sur* $\mathbf{A}$.

(ii) $f^{-1}([c,+\infty]) = \{x \in \mathbf{A} : f(x) \geqslant c\}$ *est un sous-ensemble Lebesgue-mesurable de* $\mathbf{A}$ *pour tout réel* c.

(iii) $f^{-1}([-\infty,c[) = \{x \in \mathbf{A} : f(x) < c\}$ *est un sous-ensemble Lebesgue-mesurable de* $\mathbf{A}$ *pour tout réel* c.

(iv) $f^{-1}([-\infty,c]) = \{x \in \mathbf{A} : f(x) \leqslant c\}$ *est un sous-ensemble Lebesgue-mesurable de* $\mathbf{A}$ *pour tout réel* c.

On utilisera aussi les théorèmes suivants :

Théorème 2. *Soit* f *et* g *deux fonctions mesurables à valeurs réelles définies sur* $\mathbf{A}$, *soit* F *une fonction à valeurs réelles continue sur* $\mathbb{R}^2$. *Pour* $x \in \mathbf{A}$ *on pose* $h(x) = F(f(x), g(x))$. *La fonction* h *est alors mesurable sur* $\mathbf{A}$. *En particulier,* $f + g$ *et* fg *sont mesurables.*

Théorème 3. *Soit* $\{f_n\}$ *une suite de fonctions mesurables sur* $\mathbf{A}$. *Alors*

$$h_1(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad h_2(x) = \varlimsup_{n\to+\infty} f_n(x)$$

sont aussi mesurables sur $\mathbf{A}$. *En particulier, si* f *et* g *sont mesurables sur* $\mathbf{A}$, *il en est de même de* $\max\{f,g\}$ *et* $\min\{f,g\}$.

Une propriété est dite *vérifiée presque partout* (en abrégé p.p.) sur un ensemble mesurable si l'ensemble des points où elle n'est pas vérifiée est de mesure nulle. En particulier, on dit que $f = g$ p.p. si f et g sont définies sur le même ensemble $\mathbf{A}$ et $m(\{x \in \mathbf{A} : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Supposons que $\mathbf{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i$, où les ensembles $\mathbf{A}_i$ sont mesurables et deux à deux disjoints. Une fonction φ définie sur $\mathbf{A}$ par

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{\mathbf{A}_i}(x),$$

où $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont des réels, est appelée une *fonction simple*.

Le théorème suivant est appelé le *théorème d'approximation des fonctions mesurables*.

Théorème 4. *Pour toute fonction mesurable f définie sur un ensemble mesurable $\mathbf{A}$, il existe une suite $\{\varphi_n\}$ de fonctions simples qui converge simplement vers f. Dans le cas où f est positive, on peut construire la suite $\{\varphi_n\}$ de sorte qu'elle soit croissante. Dans le cas où f est bornée sur $\mathbf{A}$, on peut choisir la suite $\{\varphi_n\}$ de sorte que la convergence soit uniforme sur $\mathbf{A}$.*

II.2.1. Montrer que si f est mesurable, il en est de même de $|f|$. La mesurabilité de $|f|$ implique-t-elle celle de f ?

II.2.2. Donner des exemples de fonctions f et g non mesurables telles que

(a) $f + g$ soit mesurable,

(b) fg soit mesurable.

II.2.3. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}$. Prouver que la mesurabilité de l'ensemble $\{x : f(x) = c\}$ pour tout réel c n'est pas suffisante pour que f soit mesurable.

II.2.4. Soit $\mathbf{C}$ un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$. Prouver qu'une fonction f définie sur un ensemble mesurable $\mathbf{A}$ est mesurable si et seulement si $\{x \in \mathbf{A} : f(x) \geqslant c\}$ est mesurable pour tout $c \in \mathbf{C}$.

II.2.5. Prouver qu'une fonction f à valeurs réelles définie sur un ensemble mesurable $\mathbf{A}$ est mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathbf{G})$ est mesurable pour tout ouvert $\mathbf{G} \subset \mathbb{R}$.

II.2.6. Prouver que si une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}$ est mesurable, alors $f^{-1}(\mathbf{B})$ est mesurable pour tout borélien $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}$.

II.2.7. Prouver qu'une fonction continue à valeurs réelles définie sur un ensemble mesurable est mesurable.

II.2.8. Soit f et g des fonctions définies sur un ensemble mesurable $\mathbf{A}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Prouver que si f est une fonction mesurable et si $f = g$ p.p., alors g est mesurable.

II.2.9. Montrer que toute fonction Riemann-intégrable définie sur $[a, b]$ est mesurable sur $[a, b]$.

II.2.10. Montrer que toute fonction à variation bornée sur $[a, b]$ est mesurable.

II.2.11. On définit la *fonction de Cantor* $\varphi\colon [0\,,1] \longrightarrow [0\,,1]$ comme suit : si x est un élément de l'ensemble de Cantor $\mathbf{C}$ et $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n}$, avec $a_n = 0$ ou $a_n = 2$, on pose

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{a_n}{2},$$

autrement dit, si a_n est le n-ième chiffre de l'écriture ternaire de x, alors le n-ième chiffre de l'écriture binaire de $\varphi(x)$ est $\frac{a_n}{2}$. On prolonge φ à $[0\,,1]$ en posant

$$\varphi(x) = \sup\{\varphi(y) : y \in \mathbf{C}, y < x\}.$$

Prouver que l'image de l'ensemble de Cantor $\mathbf{C}$ par φ est $[0\,,1]$. Prouver aussi que φ est croissante et continue sur $[0\,,1]$ et $\varphi'(x) = 0$ p.p. sur $[0\,,1]$.

II.2.12. Démontrer que si f est une application continue et bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, alors l'image par f de tout borélien est un borélien.

II.2.13. Donner un exemple pour chacun des cas suivants :

(a) une fonction mesurable f et un ensemble mesurable $\mathbf{A}$ tels que $f(\mathbf{A})$ ne soit pas mesurable ;

(b) une fonction mesurable g et un ensemble mesurable $\mathbf{B}$ tels que $g^{-1}(\mathbf{B})$ ne soit pas mesurable.

II.2.14. Donner un exemple d'ensemble mesurable qui ne soit pas borélien.

II.2.15. Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$. Montrer que f vérifie la condition

$$\mathbf{E} \subset [a\,,b] \quad \text{et} \quad m(\mathbf{E}) = 0 \quad \text{implique} \quad m(f(\mathbf{E})) = 0$$

si et seulement si, pour tout ensemble mesurable $\mathbf{A} \subset [a\,,b]$, son image $f(\mathbf{A})$ est mesurable.

II.2.16. Soit g une fonction à valeurs réelles définie et mesurable sur $\mathbf{A}$ et f une fonction continue sur $g(\mathbf{A})$. Prouver que $f \circ g$ est mesurable.

II.2.17. Soit g une fonction continue sur $[a, b]$ et h une fonction à valeurs réelles mesurable sur $g([a, b])$. La composée $h \circ g$ est-elle mesurable ?

II.2.18. Soit g une fonction à valeurs réelles mesurable sur $\mathbf{A}$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout ensemble ouvert $\mathbf{G}$, son image réciproque $f^{-1}(\mathbf{G})$ est un borélien. Prouver que $f \circ g$ est mesurable.

II.2.19. Donner un exemple de fonction mesurable dont la fonction réciproque n'est pas mesurable.

II.2.20. Soit f une fonction dérivable sur $[a\,,b]$. Démontrer que f' est mesurable sur $[a\,,b]$.

II.2.21. Soit $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable de mesure finie et f une fonction mesurable sur $\mathbf{A}$ à valeurs finies presque partout. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors un ensemble mesurable $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ tel que $m(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) < \varepsilon$ et la restriction de f à $\mathbf{B}$ est bornée.

II.2.22. Démontrer le *théorème d'Egorov*. Soit $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable de mesure finie. Si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions mesurables qui converge vers une fonction à valeurs réelles f presque partout sur $\mathbf{A}$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors un sous-ensemble mesurable $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ tel que $m(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) < \varepsilon$ et la suite $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{B}$.

II.2.23. Montrer sur un exemple que l'hypothèse $m(\mathbf{A}) < +\infty$ est essentielle dans le théorème d'Egorov.

II.2.24. On suppose que $\mathbf{A}$ est mesurable et que $\{f_n\}$ est une suite de fonctions mesurables convergente vers f presque partout sur $\mathbf{A}$. Montrer qu'il existe un ensemble $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ tel que $\mathbf{B} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathbf{B}_i$, $m(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) = 0$ et la suite $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur chaque $\mathbf{B}_i$.

II.2.25. Soit $\{\mathbf{V}_n\}$ la suite d'ensembles définie dans la solution de **II.1.45** et soit $\{f_n\}$ la suite de fonctions définies sur $[0\,,1[$ par $f_n = \chi_{\bigcup\limits_{i=n}^{+\infty} \mathbf{V}_i}$. Démontrer que f_n tend vers 0 sur $[0\,,1[$ mais que l'assertion du théorème d'Egorov (voir **II.2.22**) n'est pas vérifiée, autrement dit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la convergence n'est uniforme sur aucun sous-ensemble mesurable $\mathbf{B}$ de $[0\,,1[$ vérifiant $m\left([0,1[\setminus \mathbf{B}\right) < \varepsilon$.

II.2.26. Construire une suite $\{f_n\}$ de fonctions mesurables sur $[0\,,1]$ telle que la suite converge partout sur $[0\,,1]$ et telle que, pour tout ensemble $\mathbf{B} \subset [0\,,1]$ de mesure 1, la convergence ne soit pas uniforme sur $\mathbf{B}$.

II.2.27. Démontrer le *théorème de Lusin* suivant. Pour qu'une fonction à valeurs réelles f définie sur un ensemble mesurable $\mathbf{A}$ soit mesurable, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fermé $\mathbf{F} \subset \mathbf{A}$ tel que $m(\mathbf{A} \setminus \mathbf{F}) < \varepsilon$ et la restriction de f à $\mathbf{F}$ soit continue.

II.2.28. En utilisant le résultat de **II.1.38**, construire une fonction f mesurable sur $\mathbb{R}$ telle que f soit discontinue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbf{E}$ pour tout ensemble $\mathbf{E}$ de mesure nulle.

II.2.29. Soit $f\colon [0\,,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Prouver qu'il existe une fonction g décroissante sur $[0\,,a]$ telle que, pour tout réel y,

$$m\left(\{x \in [0\,,a] : f(x) > y\}\right) = m\left(\{x \in [0\,,a] : g(x) > y\}\right).$$

II.2.30. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions à valeurs réelles mesurables sur $\mathbf{A}$. On dit que $\{f_n\}$ *converge en mesure* vers une fonction mesurable f si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} m\left(\{x \in \mathbf{A} : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0$. Prouver que si une suite $\{f_n\}$ converge en mesure vers f et si $\{f_n\}$ converge en mesure vers g, alors $f = g$ p.p. sur $\mathbf{A}$.

II.2.31. Démontrer le *théorème de Lebesgue* suivant. Si $m(\mathbf{A}) < +\infty$ et $\{f_n\}$ converge vers f p.p. sur $\mathbf{A}$, alors $\{f_n\}$ converge en mesure vers f.

II.2.32. Montrer sur un exemple que l'hypothèse $m(\mathbf{A}) < +\infty$ est essentielle dans le théorème de Lebesgue énoncé précédemment.

II.2.33. Donner un exemple d'une suite de fonctions mesurables sur l'intervalle $[0\,,1]$ convergente en mesure sur $[0\,,1]$ mais qui ne converge en aucun point de cet intervalle.

II.2.34. Soit $\{f_n\}$ la suite de fonctions définie dans la solution du problème précédent. Donner une sous-suite de cette suite qui converge vers la fonction nulle p.p. sur $[0\,,1]$.

II.2.35. Démontrer le *théorème de Riesz* suivant. Toute suite $\{f_n\}$ convergente en mesure vers f sur $\mathbf{A}$ contient une sous-suite convergente vers f p.p. sur $\mathbf{A}$.

II.2.36. Soit $\{f_n\}$ une suite croissante de fonctions définies sur $]a\,,b[$. Prouver que si la suite converge en mesure vers f, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ en tout point x où f est continue.

II.2.37. Démontrer le *théorème de Fréchet* suivant. Si f est une fonction mesurable à valeurs réelles définie sur $\mathbf{A}$, il existe alors un $\mathcal{F}_\sigma$-ensemble $\mathbf{H}$ tel que $m(\mathbf{A}\setminus\mathbf{H}) = 0$ et la restriction de f à $\mathbf{H}$ appartient à la *première classe de Baire* (f est la limite simple d'une suite de fonctions continues sur $\mathbf{H}$).

II.2.38. Démontrer le *théorème de Vitali* suivant. Si f est une fonction mesurable à valeurs réelles définie sur $\mathbf{A}$, il existe alors une fonction g appartenant à la *seconde classe de Baire* (g est la limite simple d'une suite de fonctions appartenant à la première classe de Baire sur $\mathbf{A}$) telle que $f = g$ p.p.

II.3. Intégrale de Lebesgue

L'*intégrale de Lebesgue* d'une fonction simple $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\chi_{\mathbf{A}_i}(x)$ sur $\mathbf{A}$, où $\mathbf{A} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i$ et les $\mathbf{A}_i$ sont des ensembles deux à deux disjoints et mesurables, est définie par

$$\int_{\mathbf{A}} \varphi\,dm = \sum_{i=1}^{n} c_i m(\mathbf{A}_i).$$

Si f est mesurable et positive sur $\mathbf{A}$, on définit

$$\int_{\mathbf{A}} f\,dm = \sup \int_{\mathbf{A}} \varphi\,dm,$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les fonctions simples φ pour lesquelles $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. La fonction f est dite *intégrable* (ou *sommable*) au sens de Lebesgue sur $\mathbf{A}$ si son intégrale sur $\mathbf{A}$ est finie. Si f est mesurable sur $\mathbf{A}$, on définit

$$\int_{\mathbf{A}} f\,dm = \int_{\mathbf{A}} f^+\,dm - \int_{\mathbf{A}} f^-\,dm,$$

où $f^+ = \max\{f,0\}$ et $f^- = -\min\{f,0\}$. On dit que f est intégrable sur $\mathbf{A}$ si f^+ et f^- le sont.

Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. Une fonction mesurable f définie sur $\mathbf{A}$ appartient à l'*espace* $L^p(\mathbf{A})$ si $\int_{\mathbf{A}} |f|^p \, dm < +\infty$. On écrit dans ce cas $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbf{A}} |f|^p \, dm\right)^{1/p}$. Dans le cas où $\mathbf{A} = [a\,,b]$, on écrit $f \in L^p[a\,,b]$.

Une fonction mesurable f définie sur $\mathbf{A}$ est dite *essentiellement bornée* si $m\big(\{x \in \mathbf{A} : |f(x)| > r\}\big) = 0$ pour un certain réel r. Dans ce cas, on définit la *borne supérieure essentielle* de f par

$$\|f\|_\infty = \inf \{r : m(\{x \in \mathbf{A} : |f(x)| > r\}) = 0\}\,.$$

L'ensemble $\mathbf{E} = \{x \in \mathbf{A} : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ est de mesure nulle et $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ en dehors de $\mathbf{E}$. Donc $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ p.p. sur $\mathbf{A}$.

On utilisera les théorèmes suivants :

Théorème 1 **(Théorème de convergence monotone de Lebesgue).** *Soit* $\{f_n\}$ *une suite croissante de fonctions positives mesurables sur* $\mathbf{A}$. *Si* $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbf{A}$, *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} f_n \, dm = \int_{\mathbf{A}} f \, dm.$$

Théorème 2 **(Lemme de Fatou).** *Soit* $\{f_n\}$ *une suite de fonctions positives mesurables sur* $\mathbf{A}$. *On a*

$$\int_{\mathbf{A}} \varliminf_{n\to+\infty} f_n \, dm \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} f_n \, dm.$$

Théorème 3 **(Théorème de convergence dominée de Lebesgue).** *Soit* $\{f_n\}$ *une suite de fonctions mesurables sur* $\mathbf{A}$ *et* $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbf{A}$. *S'il existe une fonction* g *intégrable sur* $\mathbf{A}$ *telle que* $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ *pour tout* n *et pour tout* $x \in \mathbf{A}$, *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} f_n \, dm = \int_{\mathbf{A}} f \, dm.$$

Théorème 4. *Si* f *est Riemann-intégrable sur* $[a\,,b]$, *alors* f *est Lebesgue-intégrable et*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, dm.$$

II.3.1. Trouver l'intégrale de Lebesgue de la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0\,,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in [0\,,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Cette fonction est-elle Riemann-intégrable sur $[0\,,1]$?

II.3.2. Soit f la fonction définie sur $[0\,,1]$ comme suit : $f(x) = 0$ si x est un élément de l'ensemble de Cantor $\mathbf{C}$ et $f(x) = n$ sur chacun des intervalles enlevés de longueur $\frac{1}{3^n}$ (voir, par exemple, la solution de **I.3.1 (vol. II)** pour la définition de $\mathbf{C}$). Déterminer $\int_{[0,1]} f\,dm$.

II.3.3. Soit $\mathbf{C}$ l'ensemble de Cantor. Déterminer $\int_{[0,1]} f\,dm$, où

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x \in \left[0\,,\frac{1}{2}\right] \setminus \mathbf{C}, \\ \cos(\pi x) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}\,,1\right] \setminus \mathbf{C}, \\ x^2 & \text{si } x \in \mathbf{C}. \end{cases}$$

II.3.4. Prouver que si f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbf{A}$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors $\delta > 0$ tel que $\int_{\mathbf{B}} |f|\,dm < \varepsilon$ pour tout $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ et $m(\mathbf{B}) < \delta$, dit autrement, l'intégrale de Lebesgue est *absolument continue* par rapport à la mesure de Lebesgue.

II.3.5. Montrer que si f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbf{A}$ et si

$$\mathbf{A}_n = \{x \in \mathbf{A} : |f(x)| \geqslant n\},$$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n \cdot m(\mathbf{A}_n) = 0$.

II.3.6. Montrer que si $f \geqslant 0$ sur un ensemble $\mathbf{A}$ de mesure strictement positive et $\int_{\mathbf{A}} f\,dm = 0$, alors $f = 0$ p.p. sur $\mathbf{A}$.

II.3.7. Prouver que si $\int_{\mathbf{B}} f\,dm = 0$ pour tout $\mathbf{B}$, sous-ensemble mesurable de $\mathbf{A}$ tel que $m(\mathbf{A}) > 0$, alors $f = 0$ p.p. sur $\mathbf{A}$.

II.3.8. Prouver que si f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbf{A}$ et

$$\left|\int_{\mathbf{A}} f\,dm\right| = \int_{\mathbf{A}} |f|\,dm,$$

alors soit $f \geqslant 0$ p.p. sur $\mathbf{A}$, soit $f \leqslant 0$ p.p. sur $\mathbf{A}$.

II.3.9. Prouver que si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions positives et mesurables sur $\mathbf{A}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} f_n\, dm = 0$, alors $\{f_n\}$ converge vers 0 en mesure. Montrer sur un exemple qu'on ne peut pas remplacer la convergence en mesure par la convergence p.p.

II.3.10. Pour une suite $\{f_n\}$ de fonctions mesurables sur un ensemble $\mathbf{A}$ de mesure finie, prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} \frac{|f_n|}{1+|f_n|} = 0$$

si et seulement si $\{f_n\}$ converge vers 0 en mesure. Montrer sur un exemple qu'on ne peut pas omettre l'hypothèse $m(\mathbf{A}) < +\infty$.

II.3.11. Soit f une fonction positive et mesurable sur un ensemble $\mathbf{A}$ de mesure finie. Prouver que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbf{A}$ si et seulement si la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} km(\mathbf{A}_k)$, où $\mathbf{A}_k = \{x \in \mathbf{A} : k \leqslant f(x) < k+1\}$, converge.

II.3.12. Soit f une fonction positive et mesurable sur un ensemble $\mathbf{A}$ de mesure finie. Prouver que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbf{A}$ si et seulement si la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} m(\mathbf{B}_k)$, où $\mathbf{B}_k = \{x \in \mathbf{A} : f(x) \geqslant k\}$, converge.

II.3.13. Soit f une fonction positive et intégrable sur un ensemble $\mathbf{A}$ de mesure finie. Pour $\varepsilon > 0$, on définit

$$S(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\varepsilon m(\mathbf{A}_n) \quad \text{où} \quad \mathbf{A}_n = \{x \in \mathbf{A} : n\varepsilon \leqslant f(x) < (n+1)\varepsilon\}\,.$$

Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} S(\varepsilon) = \int_{\mathbf{A}} f\, dm.$$

II.3.14. Soit $\{f_n\}$ est une suite de fonctions positives, convergente vers f sur $\mathbb{R}$, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = \int_{\mathbb{R}} f\, dm < +\infty$. Montrer que, pour tout ensemble mesurable $\mathbf{A}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} f_n\, dm = \int_{\mathbf{A}} f\, dm.$$

II.3.15. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions à valeurs réelles intégrables sur un ensemble $\mathbf{A}$ de mesure finie. Prouver que si la suite est uniformément convergente sur $\mathbf{A}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbf{A}} f_n\,dm = \int_{\mathbf{A}} \lim_{n\to+\infty} f_n\,dm.$$

II.3.16. Soit $\{f_n\}$ est une suite de fonctions convergente vers f sur $\mathbf{A}$ telle que $\int_{\mathbf{A}} |f_n|^p\,dm < +\infty$ et $\int_{\mathbf{A}} |f|^p\,dm < +\infty$ pour $1 \leqslant p < +\infty$. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbf{A}} |f_n|^p\,dm = \int_{\mathbf{A}} |f|^p\,dm$$

si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbf{A}} |f_n - f|^p\,dm = 0.$$

II.3.17. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables sur $\mathbf{A}$ telles que $|f_n| \leqslant g$, où g est une fonction intégrable sur $\mathbf{A}$. Prouver que

$$\int_{\mathbf{A}} \varliminf_{n\to+\infty} f_n\,dm \leqslant \varliminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbf{A}} f_n\,dm \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbf{A}} f_n\,dm \leqslant \int_{\mathbf{A}} \varlimsup_{n\to+\infty} f_n\,dm.$$

II.3.18. On pose $f_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$, $x \in]0,1[$. Prouver que

$$\int_{]0,1[} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n\,dm \neq \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{]0,1[} f_n\,dm$$

et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_{]0,1[} |f_n|\,dm = +\infty$.

II.3.19. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables sur $\mathbf{A}$ telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_{\mathbf{A}} |f_n|\,dm < +\infty$. Prouver que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur $\mathbf{A}$ et

$$\int_{\mathbf{A}} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n\,dm = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\mathbf{A}} f_n\,dm.$$

II.3.20. Les fonctions f_n ($n \in \mathbb{N}^*$), intégrables sur $\mathbf{A}$, sont *équi-intégrables* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\mathbf{B}$, sous-ensemble mesurable de $\mathbf{A}$, $\int_{\mathbf{B}} |f_n| < \varepsilon$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ si $m(\mathbf{B}) < \delta$. Prouver que si $\{f_n\}$ est une suite convergente de fonctions équi-intégrables sur un ensemble $\mathbf{A}$ de mesure finie, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbf{A}} f_n\,dm = \int_{\mathbf{A}} \lim_{n\to+\infty} f_n\,dm.$$

II.3.21. Démontrer la version suivante du théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir **théorème 3**). Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables convergente en mesure sur $\mathbf{A}$ vers f. S'il existe une fonction g intégrable sur $\mathbf{A}$ telle que $|f_n(x)| \leqslant g(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbf{A}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} f_n \, dm = \int_{\mathbf{A}} f \, dm.$$

II.3.22. Prouver que le théorème énoncé en **II.3.20** reste vrai si la convergence est remplacée par la convergence en mesure.

II.3.23. Soit $\{f_n\}$ une suite convergente en mesure vers f sur un ensemble $\mathbf{A}$ de mesure finie telle que $|f_n(x)| \leqslant C$ pour tout $x \in \mathbf{A}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que si g est continue sur $[-C\,, C]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} g(f_n) \, dm = \int_{\mathbf{A}} g(f) \, dm.$$

II.3.24. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble $\mathbf{A}$ de mesure finie convergente en mesure sur $\mathbf{A}$ vers f. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} \sin(f_n) \, dm = \int_{\mathbf{A}} \sin(f) \, dm.$$

II.3.25. Soit $f \in L^p[a\,,b]$, $1 \leqslant p < +\infty$. Prouver que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe

(i) une fonction simple φ telle que $\int_{[a,b]} |f - \varphi|^p \, dm < \varepsilon$,

(ii) une fonction en escalier ψ telle que $\int_{[a,b]} |f - \psi|^p \, dm < \varepsilon$.

II.3.26. Trouver une fonction f mesurable et bornée sur $[a\,,b]$ telle que

$$\|f - \psi\|_\infty = \sup\{|f(x) - \psi(x)| : x \in [a\,,b]\} \geqslant 1/2$$

pour toute fonction en escalier ψ.

II.3.27. Soit $f \in L^p[a\,,b]$, $1 \leqslant p < +\infty$. Montrer que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue g telle que $\int_{[a,b]} |f - g|^p \, dm < \varepsilon$.

II.3.28. Montrer sur un exemple que le résultat précédent est faux si $p = +\infty$.

II.3.29. Soit g une fonction vérifiant une condition de Lipschitz sur $\mathbb{R}$. Prouver que si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions mesurables sur $[a\,,b]$ convergente en mesure vers f et s'il existe une fonction Lebesgue-intégrable G telle que $|f_n(x)| \leqslant G(x)$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} g(f_n)\, dm = \int_{[a,b]} g(f)\, dm.$$

II.3.30. On suppose que $1 \leqslant p < +\infty$. Soit f une fonction mesurable sur $\mathbf{A}$ telle que $|f|^p$ soit intégrable sur $\mathbf{A}$. Montrer que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue g s'annulant en dehors d'un intervalle borné telle que

$$\int_{\mathbf{A}} |f - g|^p\, dm < \varepsilon.$$

II.3.31. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions de $L^p[a\,,b]$, $1 < p < +\infty$, convergente presque partout sur $[a\,,b]$ vers f. On suppose qu'il existe une constante C telle que $\|f_n\|_p \leqslant C$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que, pour tout g dans $L^q[a\,,b]$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n g\, dm = \int_{[a,b]} f g\, dm.$$

II.3.32. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions de $L^p[a, b]$, $1 \leqslant p < +\infty$, convergente en norme vers $f \in L^p[a, b]$ et soit $\{g_n\}$ une suite de fonctions mesurables telles que $|g_n| \leqslant C$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et telles que g_n tend vers g p.p. Prouver que $f_n g_n$ tend vers fg dans $L^p[a\,,b]$.

II.3.33. Prouver que si f est une fonction essentiellement bornée sur $[a\,,b]$, alors

$$\lim_{p\to+\infty} \left(\int_{[a,b]} |f|^p\, dm \right)^{1/p} = \|f\|_\infty\,.$$

(Comparer avec **I.4.41**.)

II.3.34. Démontrer l'*inégalité de Jensen pour l'intégrale de Lebesgue* (voir aussi **I.6.29**). Soit f une fonction Lebesgue-intégrable sur $[a\,,b]$. Si φ est convexe sur $\mathbb{R}$, alors

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f\, dm \right) \leqslant \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} \varphi(f)\, dm.$$

II.3.35. Prouver que si $m(\mathbf{A}) < +\infty$ et $0 < p_1 < p_2 < +\infty$, alors

$$L^{p_2}(\mathbf{A}) \subset L^{p_1}(\mathbf{A})$$

et l'inégalité

$$\|f\|_{p_1} \leqslant \|f\|_{p_2} (m(\mathbf{A}))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}$$

est vérifiée pour tout $f \in L^{p_2}(\mathbf{A})$.

II.3.36. Prouver que si $f \in L^{p_1}(\mathbf{A}) \cap L^{p_2}(\mathbf{A})$ $(0 < p_1 < p_2 < +\infty)$ et si $p_1 < r < p_2$, alors $f \in L^r(\mathbf{A})$ et la fonction φ définie par $\varphi(r) = \ln \|f\|_r^r$ est convexe sur $[p_1\,, p_2]$.

II.3.37. Prouver que si $f \in L^1[a\,,b]$ et $f \neq 0$ p.p. sur $[a\,,b]$, alors

$$\lim_{p \to 0^+} \left(\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} |f|^p \, dm \right)^{1/p} = \exp \left(\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} \ln |f| \, dm \right).$$

II.3.38. Pour $t \in \mathbb{R}$, le *translaté de* f *par* t est défini par $f_t(x) = f(x+t)$. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Prouver que :

(a) $\int_{\mathbb{R}} f \, dm = \int_{\mathbb{R}} f_t \, dm$.

(b) Si g est une fonction bornée mesurable, alors

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}} |g(f - f_t)| \, dm = 0.$$

II.3.39. On suppose que $1 \leqslant p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, autrement dit, $\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, dm < +\infty$. Prouver que $\lim\limits_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}} |f - f_t|^p \, dm = 0$, où f_t est le translaté de f par t défini au problème précédent.

II.3.40. Soit f une fonction mesurable et positive sur un ensemble $\mathbf{A}$ tel que $0 < m(\mathbf{A}) < +\infty$. On suppose qu'il existe des réels α et β strictement positifs tels que

$$\frac{1}{m(\mathbf{A})} \int_{\mathbf{A}} f \, dm \geqslant \alpha \quad \text{et} \quad \frac{1}{m(\mathbf{A})} \int_{\mathbf{A}} f^2 \, dm \leqslant \beta.$$

Prouver que si $0 < \delta < 1$ et $\mathbf{A}_\delta = \{x \in \mathbf{A} : f(x) \geqslant \alpha\delta\}$, alors

$$m(\mathbf{A}_\delta) \geqslant m(\mathbf{A})\,(1-\delta)^2 \, \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

II.4. Continuité absolue, dérivation et intégration

Une fonction à valeurs réelles définie sur $[a\,,b]$ est *absolument continue* sur $[a\,,b]$ si, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(x'_k) - f(x_k) \right| < \varepsilon$$

pour toute collection finie $\{]x_k\,,x'_k[\}$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints de $[a\,,b]$ vérifiant

$$\sum_{k=1}^{n} (x'_k - x_k) < \delta.$$

On ne s'intéressera plus, à partir de maintenant, qu'à des intégrales de Lebesgue et on écrira $\int_a^b f(x)\,dx$ au lieu de $\int_{[a,b]} f\,dm$. On utilisera les théorèmes suivants.

Théorème 1. *Soit f une fonction à valeurs réelles croissante sur $[a\,,b]$. La fonction f est dérivable presque partout sur $[a\,,b]$, sa dérivée f' est mesurable et*

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b) - f(a).$$

Théorème 2. *Une fonction f définie sur $[a\,,b]$ est de la forme*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$$

pour une certaine fonction g définie sur $[a\,,b]$ si et seulement si f est absolument continue sur $[a\,,b]$. On a dans ce cas $g(x) = f'(x)$ p.p. sur $[a\,,b]$.

II.4.1. Montrer que si f est absolument continue sur $[a\,,b]$, elle est alors à variation bornée sur cet intervalle.

II.4.2. Donner un exemple de fonction continue sur $[a\,,b]$ qui n'est pas absolument continue sur cet intervalle.

II.4.3. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}} & \text{si } x \in \,]0\,,1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est absolument continue sur $[0\,,1]$ si $0 < \beta < \alpha$ et qu'elle n'est pas absolument continue si $0 < \alpha \leqslant \beta$.

II.4.4. On pose

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\sin \frac{1}{x}\right| & \text{si } x \in \,]0\,,1], \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

et $g(x) = \sqrt{x}$. Prouver que f et g sont absolument continues sur $[0\,,1]$, que la composée $f(g)$ est absolument continue, mais que la composée $g(f)$ ne l'est pas.

II.4.5. Montrer que si f et g sont absolument continues et que g est monotone, alors $f(g)$ est absolument continue.

II.4.6. Prouver qu'une fonction absolument continue $f\colon [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ transforme

(a) les ensembles de mesure nulle en des ensembles de mesure nulle,

(b) les ensembles mesurables en des ensembles mesurables.

II.4.7. Une fonction à variation bornée sur $[a\,,b]$, $a < b$, est-elle absolument continue sur $[a\,,b]$?

II.4.8. Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a\,,b]$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose $\mathbf{A}_y = \{x \in [a\,,b] : f(x) = y\}$. On définit l'*indicatrice de Banach de* f en posant

$$v(y) = \begin{cases} \operatorname{card} \mathbf{A}_y & \text{si } \mathbf{A}_y \text{ est fini}, \\ +\infty & \text{si } \mathbf{A}_y \text{ est infini}, \end{cases}$$

où $\operatorname{card} \mathbf{A}_y$ est le cardinal de l'ensemble $\mathbf{A}_y$. Prouver que v est mesurable et

$$\int_{\mathbb{R}} v(y)\,dy = V(f; a, b).$$

II.4.9. Démontrer le *théorème de Banach et Zarecki* suivant. Si f est continue et à variation bornée sur $[a\,,b]$ et si f transforme les ensembles de mesure nulle en des ensembles de mesure nulle, alors f est absolument continue sur $[a\,,b]$.

II.4.10. Soit f et g des fonctions absolument continues. Prouver que $f(g)$ est absolument continue si et seulement si elle est à variation bornée.

II.4.11. Soit f une fonction intégrable sur $[a\,,b]$. On pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Prouver que

$$V(F; a, b) = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

(Comparer avec **I.2.21**.)

II.4.12. Soit g une fonction strictement croissante et absolument continue sur $[a\,,b]$ telle que $g(a) = c$ et $g(b) = d$.

(a) Prouver que pour tout ensemble mesurable $\mathbf{E} \subset [a\,,b]$,
$$m(g(\mathbf{E})) = \int_{\mathbf{E}} g'\,dm.$$

(b) Si $\mathbf{H} = \{x \in [a\,,b] : g'(x) \neq 0\}$ et $\mathbf{A}$ est un sous-ensemble de $[c\,,d]$ tel que $m(\mathbf{A}) = 0$, alors $g^{-1}(\mathbf{A}) \cap \mathbf{H}$ est de mesure nulle.

(c) Si $\mathbf{B}$ est un sous-ensemble mesurable de $[c\,,d]$ et $\mathbf{H}$ est comme en (b), alors $\mathbf{C} = g^{-1}(\mathbf{B} \cap \mathbf{H})$ est mesurable et
$$m(\mathbf{B}) = \int_{\mathbf{C}} g'\,dm = \int_a^b \chi_{\mathbf{B}}(g(x))g'(x)\,dx.$$

II.4.13. En utilisant le résultat du problème précédent, prouver la *formule de changement de variable pour l'intégrale de Lebesgue*. On suppose que g est strictement croissante et absolument continue sur $[a\,,b]$ avec $g(a) = c$ et $g(b) = d$. Si f est intégrable sur $[c\,,d]$, alors
$$\int_c^d f(t)\,dt = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx.$$

II.4.14. Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a\,,b]$. On pose
$$F(x) = \alpha + \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{et} \quad G(x) = \beta + \int_a^x g(t)\,dt.$$
Montrer que
$$\int_a^b f(t)G(t)\,dt + \int_a^b F(t)g(t)\,dt = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

II.4.15. Démontrer la *formule d'intégration par parties pour l'intégrale de Lebesgue et des fonctions absolument continues*. Si f et g sont des fonctions absolument continues sur $[a\,,b]$, alors
$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt + \int_a^b f'(t)g(t)\,dt = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

II.4.16. Une fonction monotone sur $[a\,,b]$ est dite *singulière* si $f' = 0$ p.p. Démontrer que toute fonction croissante est la somme d'une fonction absolument continue et d'une fonction singulière.

II.4.17. Construire une fonction f strictement croissante, continue et singulière sur $[0\,,1]$.

II.4.18. Prouver qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est de la forme

$$f(x) = \int_{]-\infty,x]} \varphi\, dm = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt,$$

pour une certaine fonction φ intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est absolument continue sur $[-K\,,K]$ pour tout $K > 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et

$$V(f;-\infty,+\infty) = \lim_{K\to+\infty} V(f;-K,K) < +\infty.$$

II.4.19. Prouver que si f et g sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions du problème précédent, alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t)g'(t)\, dt + \int_{\mathbb{R}} f'(t)g(t)\, dt &= \int_{\mathbb{R}} f'(t)\, dt \times \int_{\mathbb{R}} g'(t)\, dt \\ &= \lim_{x\to+\infty} f(x) \times \lim_{x\to+\infty} g(x).\end{aligned}$$

II.4.20. Soit $f \in L^p\,[a\,,b]$, $1 \leqslant p < +\infty$. On pose $f(x) = 0$ pour $x \notin [a\,,b]$. Pour $h > 0$, on définit f_h en posant

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt.$$

Montrer que f_h est continue et $\|f_h\|_p \leqslant \|f\|_p$ (comparer avec **I.6.34**).

II.4.21. Démontrer qu'avec les notations et sous les hypothèses de **II.4.20**, $\lim\limits_{h\to 0} \|f_h - f\|_p = 0$.

II.4.22. Soit $f \in L^1\,[a\,,b]$ et $x \in\,]a\,,b[$ tel que $f(x) \neq \pm\,\infty$. Le point x est appelé un *point de Lebesgue de* f si

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt = 0.$$

Prouver que si x est un point de Lebesgue de f, alors la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$.

II.4.23. Prouver que tout point de continuité de $f \in L^1\,[a\,,b]$ est un point de Lebesgue de f.

II.4.24. Prouver que presque tous les points de $[a\,,b]$ sont des points de Lebesgue de $f \in L^1\,[a\,,b]$.

II.4.25. Prouver que presque tous les points d'un ensemble mesurable $\mathbf{A}$ sont des points de densité de $\mathbf{A}$ (voir **II.1.40** pour la définition d'un point de densité).

II.4.26. Un ensemble $\mathbf{A}$ a une *densité extérieure d en x* si la limite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{m^*(\mathbf{A}\cap[x-h,x+h])}{2h}$$

existe et est égale à d. Si $d=1$, x est appelé un *point de densité extérieure de* $\mathbf{A}$ et si $d=0$, x est appelé un *point de dispersion extérieure de* $\mathbf{A}$. Prouver la généralisation suivante du problème précédent. Si $\mathbf{A}$ est un ensemble (quelconque, mesurable ou non), alors presque tous les points de $\mathbf{A}$ sont des points de densité extérieure. L'ensemble $\mathbf{A}$ est mesurable si et seulement si presque tous les points de $\mathbf{A}^c$ sont des points de dispersion extérieure de $\mathbf{A}$.

II.4.27. Soit f une fonction à valeurs réelles (mesurable ou non) définie sur $[a\,,b]$. Le point $x_0 \in [a\,,b]$ est un *point de continuité approximative de f* si, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{m^*\left([x_0-h\,,x_0+h]\cap\{x\in[a\,,b] : |f(x)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon\}\right)}{2h} = 0.$$

Prouver qu'une fonction à valeurs réelles est mesurable sur $[a\,,b]$ si et seulement si presque tous les points de $[a\,,b]$ sont des points de continuité approximative de f.

II.4.28. Prouver qu'une fonction Lebesgue-intégrable sur $[a\,,b]$ est approximativement continue en chacun de ses points de Lebesgue. Montrer sur un exemple que la réciproque est fausse.

II.4.29. Prouver que si f est mesurable et bornée sur $[a\,,b]$, alors $x \in\,]a\,,b[$ est un point de Lebesgue de f si et seulement si x est un point de continuité approximative de f.

II.4.30. Une définition alternative de la *continuité approximative* est que f est approximativement continue en x_0 s'il existe un ensemble mesurable $\mathbf{A}$ tel que x_0 soit un point de densité de $\mathbf{A}$ et tel que la restriction de f à $\mathbf{A}$ soit continue en x_0. Démontrer que cette définition est équivalente à celle donnée en **II.4.27**.

II.4.31. Donner un exemple de fonction bornée $f\colon [0\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui n'est pas Riemann-intégrable mais qui est la dérivée d'une certaine fonction F sur $[0\,,1]$.

II.4.32. Soit f une fonction intégrable sur $[a\,,b]$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit

$$G(t) = m\left(\{x \in [a\,,b] : f(x) < t\}\right).$$

Prouver que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,d(G(t)),$$

où

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} td(G(t)) &= \int_{-\infty}^{0} td(G(t)) + \int_{0}^{+\infty} td(G(t))\\ &= \lim_{A\to-\infty}\int_A^0 td(G(t)) + \lim_{B\to-\infty}\int_0^B td(G(t)).\end{aligned}$$

II.5. Séries de Fourier

Les *coefficients de Fourier* de $f \in L^1[-\pi\,,\pi]$ sont donnés par

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

La série

$$\frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$$

est la *série de Fourier de f* et on écrira

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx).$$

On note $s_n(x)$ la n-ième somme partielle de la série de Fourier de f, autrement dit, $s_n(x) = \frac{1}{2}\,a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k \sin kx)$.

II.5.1. Prouver que si $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \sin(nx + \alpha_n),$$

pour des α_n bien choisis.

II.5.2. Prouver que si a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de $f \in L^1\,[-\pi\,,\pi]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

II.5.3. Soit f une fonction 2π-périodique vérifiant une condition de Lipschitz d'ordre α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, autrement dit, $f(x+h) - f(x) = O\left(|h|^\alpha\right)$ lorsque h tend vers 0 uniformément par rapport à x. Prouver que si a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de f, alors

$$a_n = O\left(n^{-\alpha}\right) \quad \text{et} \quad b_n = O\left(n^{-\alpha}\right).$$

II.5.4. Prouver que si f est à variation bornée sur $[-\pi\,,\pi]$, alors

$$a_n = O\left(n^{-1}\right) \quad \text{et} \quad b_n = O\left(n^{-1}\right).$$

II.5.5. Prouver que si f est une fonction 2π-périodique absolument continue sur $[-\pi\,,\pi]$, alors

$$a_n = o\left(n^{-1}\right) \quad \text{et} \quad b_n = o\left(n^{-1}\right).$$

II.5.6. Prouver que si f est une fonction 2π-périodique et $f \in \mathscr{C}^k_{\mathbb{R}}$, alors

$$a_n = o\left(n^{-k}\right) \quad \text{et} \quad b_n = o\left(n^{-k}\right).$$

II.5.7. Montrer que pour $f \in L^1\,[-\pi\,,\pi]$, la n-ième somme partielle de la série de Fourier de f, soit $s_n(x) = \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, est donnée par

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}\,(t-x)}\,dt.$$

II.5.8. Soit f une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $[-\pi\,,\pi]$. Montrer que si s_n représente la n-ième somme partielle de la série de Fourier de f, alors

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+t)+f(x-t))\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}\,t}\,dt.$$

II.5.9. Prouver le *test de Dini-Lipschitz pour la convergence des séries de Fourier*. Soit f une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $[-\pi\,,\pi]$. Si f vérifie la condition $|f(x_0+t)-f(x_0)| \leqslant L\,|t|^{\alpha}$ pour $|t|<\delta$ et L et δ strictement positifs, $0<\alpha\leqslant 1$, alors la série de Fourier de f converge en x_0 vers $f(x_0)$.

II.5.10. Prouver le *test de Dirichlet-Jordan pour la convergence des séries de Fourier*. Soit f une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $[-\pi\,,\pi]$ et à variation bornée sur $[x_0-\delta, x_0+\delta]$. Prouver que la série de Fourier de f converge en x_0 vers $\frac{1}{2}\left(f\left(x_0^+\right)+f\left(x_0^-\right)\right)$.

II.5.11. Montrer sur un exemple que le test de Dirichlet-Jordan n'inclut pas le test de Dini-Lipschitz et que le test de Dini-Lipschitz n'inclut pas le test de Dirichlet-Jordan.

II.5.12. Montrer que

$$\frac{\pi-x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n} \qquad (0<x<2\pi)$$

et en déduire

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \qquad 0<x<\pi,$$

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots,$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\cdots$$

II.5.13. Pour $x\in\,]0\,,2\pi[$, trouver la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^3}\,.$$

II.5.14. Prouver qu'en **II.5.4**, les grands O ne peuvent pas être remplacés par des petits o.

II.5.15. Soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ pour $x \in [0\,,2\pi[$. On note $s_n(x)$ la n-ième somme partielle de sa série de Fourier (voir **II.5.12**). Prouver que si x_n est le plus petit nombre strictement positif où $s_n(x)$ atteint son maximum local, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n(x_n) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$.

II.5.16. Montrer que, pour $a \neq 0$,

$$e^{ax} = \frac{e^{2a\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a\cos nx - n\sin nx}{a^2+n^2}\right), \qquad 0 < x < 2\pi,$$

$$e^{ax} = \frac{e^{a\pi}-1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^n e^{a\pi} - 1\right) \frac{a\cos nx}{a^2+n^2}, \qquad 0 < x < \pi,$$

$$e^{ax} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - (-1)^n e^{a\pi}\right) \frac{n\sin nx}{a^2+n^2}, \qquad 0 < x < \pi.$$

Trouver la somme des séries précédentes lorsque $x = 0$.

II.5.17. Pour $0 < x < 2\pi$ et $a \neq 0$, déterminer la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a\cos nx}{a^2+n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sin nx}{a^2+n^2}.$$

II.5.18. Montrer que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

En utilisant cette égalité, prouver que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

II.5.19. Soit $f \in L^1[-\pi\,,\pi]$ et a_n, b_n les coefficients de Fourier de f. Prouver que

(a) si $f(x+\pi) = f(x)$ pour $x \in [-\pi\,,0]$, alors $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$,

(b) si $f(x+\pi) = -f(x)$ pour $x \in [-\pi\,,0]$, alors $a_{2n} = b_{2n} = 0$.

II.5.20. Montrer que, pour $0 < x < \pi$,

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$$

II.5.21. Montrer que

$$\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right| = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n} \quad \text{pour} \quad x \neq 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

et

$$\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n} \quad \text{pour} \quad x \neq (2k+1)\pi \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

II.5.22. Soit f une fonction 2π-périodique de $L^1[-\pi\,,\pi]$ et a_n, b_n ses coefficients de Fourier. Prouver que, pour $x\in[0\,,2\pi]$,

$$\int_0^x\left(f(t)-\frac{1}{2}\,a_0\right)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n\sin nx + b_n(1-\cos nx)}{n}.$$

II.5.23. Prouver que, sous les hypothèses du problème précédent, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n}$ converge. Utiliser ce résultat pour montrer que la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ n'est la série de Fourier d'aucune fonction intégrable.

II.5.24. Prouver que si $f\in L^2[-\pi\,,\pi]$, alors

$$\frac{1}{2}\,a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

(Cette inégalité est connue sous le nom d'*inégalité de Bessel*.)

II.5.25. Utiliser les résultats donnés en **II.5.22** et **II.5.24** pour prouver que si $f\in L^2[-\pi\,,\pi]$, on a alors, pour tout ensemble mesurable $\mathbf{A}\subset[-\pi\,,\pi]$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbf{A}}(f(x)-s_n(x))\,dx = 0,$$

où s_n est la n-ième somme partielle de la série de Fourier de f.

II.5.26. Prouver que si $f, g \in L^2[-\pi\,,\pi]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,(f(x)-s_n(x))\,dx = 0,$$

où s_n est la n-ième somme partielle de la série de Fourier de f.

II.5.27. Montrer que si $f, g \in L^2[-\pi\,,\pi]$ et

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

$$g(x) \sim \frac{1}{2}\,\alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx),$$

alors

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{2}\,a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

II.5.28. Montrer que si $f \in L^2[0\,,2\pi]$ et que si a_n et b_n sont ses coefficients de Fourier, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)f(x)\,dx.$$

II.5.29. Démontrer que si $f, g \in L^1[-\pi\,,\pi]$ ont la même série de Fourier, alors $f = g$ p.p. sur $[-\pi\,,\pi]$.

II.5.30. Utiliser l'égalité de Parseval (voir **II.5.27**)

(a) pour sommer les séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(a^2+n^2)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{(a^2+n^2)^2},$$

(b) pour calculer

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^6 x\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos^8 x\,dx.$$

II.5.31. Prouver que si $f \in L^2[-\pi\,,\pi]$ et que si a_n et b_n sont ses coefficients de Fourier, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{|a_n|+|b_n|}{n}$ converge.

II.5.32. Prouver que si f est une fonction 2π-périodique dérivable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - s_n(x)| = o\left(n^{-1/2}\right).$$

II.5.33. Démontrer le *théorème de Bernstein* suivant. Si f est 2π-périodique et vérifie la condition $|f(x+h) - f(x)| \leqslant L\,|h|^{\alpha}$ pour un certain $L > 0$ et pour $\alpha > \frac{1}{2}$, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ converge.

II.5.34. Prouver que si f est 2π-périodique et vérifie la condition de Lipschitz $|f(x+h) - f(x)| \leqslant L\,|h|^{\alpha}$ pour un certain $L > 0$ et pour $0 < \alpha \leqslant 1$, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n|^{\beta} + |b_n|^{\beta}\right)$ converge pour $\beta > \frac{2}{2\alpha+1}$.

II.5.35. Soit f une fonction 2π-périodique vérifiant la condition de Lipschitz $|f(x+h) - f(x)| \leqslant L\,|h|^{\alpha}$ pour un L et un α strictement positifs. Prouver que si f est à variation bornée sur $[0\,,2\pi]$, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ converge.

II.5.36. Donner un exemple de fonction continue et 2π-périodique dont la série de Fourier ne converge pas sur $\mathbb{R}$.

II.5.37. Prouver que si la fonction 2π-périodique f est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $|s_n(x)| = O(\ln n)$.

II.5.38. Soit L_n les *constantes de Lebesgue* définies par

$$L_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{\sin \frac{x}{2}} \right| dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que $L_n = \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1)$.

II.5.39. Prouver que si la fonction 2π-périodique f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $|s_n(x)| = o(\ln n)$.

II.5.40. Soit $f \in L^1[-\pi, \pi]$ une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Utiliser la formule donnée en **II.5.8** pour prouver que si

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)}{n}$$

(qui est appelée la *n-ième moyenne de Cesàro de la série de Fourier de f*), alors

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{1}{2} nt}{\sin^2 \frac{1}{2} t} \left(f(x+t) + f(x-t)\right) dt.$$

II.5.41. Prouver que si f est 2π-périodique et $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout x, alors $m \leqslant \sigma_n(x) \leqslant M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver aussi que si on a $\sigma_n(x) = M$ (resp. $\sigma_n(x) = m$) pour un certain n et un certain x, alors $f(x) = M$ (resp. $f(x) = m$) presque partout.

II.5.42. Montrer que si f est 2π-périodique, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout x et

$$n\,|a_n| \leqslant A, \quad n\,|b_n| \leqslant B \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

alors

$$m - A - B \leqslant s_n(x) \leqslant M + A + B$$

pour toute valeur de n et de x. Utiliser le résultat de **II.5.12** pour conclure que

$$\left| \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} \right| \leqslant \frac{\pi}{2} + 1$$

pour tout n et tout x.

II.5.43. Soit $\{c_n\}$ une suite décroissante de réels positifs. On suppose qu'il existe A strictement positif tel que $nc_n \leqslant A$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que

$$\left| \sum_{k=1}^n c_k \sin kx \right| \leqslant A(\pi + 1)$$

pour tout n et tout x.

II.5.44. Soit f une fonction impaire sur $[-\pi, \pi]$ telle que $|f(x)| \leqslant M$ pour $x \in [-\pi, \pi]$ et telle que ses coefficients de Fourier b_n soient positifs. Prouver que

$$|s_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^n b_k \sin kx \right| \leqslant 5M.$$

II.5.45. Soit f une fonction paire sur $[-\pi\,,\pi]$ telle que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in [-\pi\,,\pi]$ et telle que ses coefficients de Fourier a_n soient positifs. Prouver que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$.

II.5.46. Utiliser le résultat de **II.5.12** pour prouver que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n^4+1} \sin nx$$

appartient à $\mathscr{C}^{\infty}_{]0,2\pi[}$.

II.5.47. Démontrer le *théorème de Fejér* suivant. Soit $f \in L^1[-\pi\,,\pi]$ une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que les limites $f(x^-)$ et $f(x^+)$ existent. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}.$$

II.5.48. Démontrer le *théorème de Fejér-Lebesgue* suivant. Soit $f \in L^1[-\pi\,,\pi]$ une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et x un point de Lebesgue de f (voir **II.4.22**). On a

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(x) = f(x).$$

II.5.49. Soit $f \in L^2[-\pi\,,\pi]$ une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Prouver que la fonction

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)f(t)\,dt$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

II.5.50. Soit f une fonction 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Prouver que la suite des moyennes de Cesàro de la série de Fourier (voir **II.5.40**) de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

II.5.51. Prouver que la série de fourier d'une fonction 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$ ayant des coefficients de Fourier positifs converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

II.5.52. Démontrer le *théorème de Fatou* suivant. Si f est une fonction intégrable sur $[-\pi\,,\pi]$ et 2π-périodique telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{a_k^2+b_k^2}=0,$$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n(x)=f(x)$ p.p. De plus, si f est continue, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n(x)=f(x)$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

II.5.53. Démontrer le *théorème de Wiener* suivant. Une fonction 2π-périodique à variation bornée sur $[0\,,2\pi]$ est continue si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{a_k^2+b_k^2}=0.$$

En conclure qu'une fonction 2π-périodique à variation bornée sur $[0\,,2\pi]$ telle que $a_n=o\left(n^{-1}\right)$ est continue.

II.5.54. Montrer que si la série de Fourier de $f\in L^1\,[-\pi\,,\pi]$ est *lacunaire*, autrement dit, si

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{+\infty}(a_{n_k}\cos n_kx+b_{n_k}\sin n_kx)$$

où $\frac{n_{k+1}}{n_k}\geqslant q>1$ pour $k\in\mathbb{N}^*$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n(x)=f(x)$ presque partout.

II.5.55. Soit f une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, $f\in L^p\,[-\pi\,,\pi]$, $1\leqslant p<+\infty$. Prouver que la suite des moyennes de Cesàro de la série de Fourier de f (voir **II.5.40**) converge pour la norme L^p, autrement dit, que

$$\lim_{n\to+\infty}\|\sigma_n-f\|_p=\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\sigma_n(x)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}=0.$$

II.5.56. Soit $\{b_n\}$ une suite décroissante convergente vers zéro. Démontrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n\sin nx$ est uniformément convergente sur $[0\,,2\pi]$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}nb_n=0$.

II.5.57. Soit $\{b_n\}$ une suite décroissante convergente vers zéro. Prouver que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n\sin nx$ est la série de Fourier d'une fonction continue si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}nb_n=0$.

II.5.58. Soit $\{b_n\}$ une suite décroissante convergente vers zéro. Démontrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ est la série de Fourier d'une fonction bornée si et seulement si $nb_n = O(1)$.

II.5.59. Soit $\{a_n\}$ une suite décroissante convergente vers zéro telle que

$$a_{n+1} \leqslant \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$$

est la série de Fourier d'une fonction positive et intégrable sur $[-\pi, \pi]$. En déduire que la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$$

est la série de Fourier d'une telle fonction. (Comparer avec le résultat de **II.5.23**).

Solutions

II.1. Mesure de Lebesgue sur la droite réelle

II.1.1. Pour tout ensemble $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}$, on a $m^*(\mathbf{E} \cap \mathbf{A}) \leqslant m^*(\mathbf{A}) = 0$ et $m^*(\mathbf{E} \setminus \mathbf{A}) \leqslant m^*(\mathbf{E})$. Donc, $m^*(\mathbf{E}) \geqslant m^*(\mathbf{E} \cap \mathbf{A}) + m^*(\mathbf{E} \setminus \mathbf{A})$.

II.1.2. On sait que tout intervalle $\mathbf{I}$ est mesurable et que sa mesure de Lebesgue $m(\mathbf{I})$ est égale à sa longueur, qui est aussi sa mesure de Jordan $|\mathbf{I}|$. L'ensemble $\mathbf{S} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{I}_n$ est donc mesurable. On sait aussi que $\mathbf{S}$ peut s'écrire d'une infinité de façons sous la forme $\mathbf{S} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{J}_n$, où les $\mathbf{J}_n$ sont des intervalles fermés deux à deux disjoints. De plus, si $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{J}_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{I}_n$, où les $\mathbf{J}_n$ sont deux à deux disjoints, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\mathbf{J}_n| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\mathbf{I}_n|$. Pour prouver ceci, soit $\varepsilon > 0$ et $\mathbf{I}'_n$ un intervalle ouvert de même centre que $\mathbf{I}_n$ tel que $|\mathbf{I}'_n| = |\mathbf{I}_n| + 2^{-n}\varepsilon$. Si $\mathbf{S}_N = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \mathbf{J}_k$, $\mathbf{S}_N$ est alors recouvert par $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{I}'_n$ et, d'après le théorème de Heine-Borel, il existe un sous-recouvrement fini $\bigcup\limits_{k=1}^{n_N} \mathbf{I}'_k$. Donc, pour tout entier strictement positif N, d'après **I.7.2**,

$$|\mathbf{S}_N| = \sum_{k=1}^{N} |\mathbf{J}_k| \leqslant \sum_{k=1}^{k_N} |\mathbf{I}'_k| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |\mathbf{I}'_k| = \sum_{k=1}^{+\infty} |\mathbf{I}_k| + \varepsilon.$$

(On rappelle que $|\mathbf{A}|$ représente la mesure de Jordan de $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$.) Ceci montre que $m(\mathbf{S}) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\mathbf{J}_k|$ et que $m(\mathbf{S})$ ne dépend pas du choix des $\mathbf{J}_k$. Si $\mathbf{E}$ est une union finie d'intervalles fermés disjoints et $\mathbf{E} \subset \mathbf{S}$, alors $|\mathbf{E}| \leqslant m(\mathbf{S})$, ce qui montre que $|\mathbf{S}|_* \leqslant m(\mathbf{S})$. D'autre part, $\mathbf{S}_N = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \mathbf{J}_k \subset \mathbf{S}$ et $\{\mathbf{S}_N\}$ est une suite d'ensembles élémentaires telle que $|\mathbf{S}_N|$ tend vers $m(\mathbf{S})$ lorsque N tend vers $+\infty$, ce qui implique $|\mathbf{S}|_* \geqslant m(\mathbf{S})$.

II.1.3. On déduit du résultat du problème précédent et de (2) dans la solution de **I.7.3** que

$$m(\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2) + m(\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2) \geqslant m(\mathbf{S}_1) + m(\mathbf{S}_2).$$

L'inégalité opposée est visiblement vérifiée lorsque $m(\mathbf{S}_1)$ ou $m(\mathbf{S}_2)$ est infinie. Si les deux sont finies, on pose

$$\mathbf{S}_1 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{J}_n \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_2 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{J}'_n,$$

où $\{\mathbf{J}_n\}$ et $\{\mathbf{J}'_n\}$ sont deux suites d'intervalles fermés deux à deux disjoints, de sorte que

$$m(\mathbf{S}_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} |\mathbf{J}_n| \quad \text{et} \quad m(\mathbf{S}_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} |\mathbf{J}'_n|.$$

Puisque

$$\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2 = \bigcup_{n=1}^{N} \mathbf{J}_n \cup \bigcup_{n=1}^{N} \mathbf{J}'_n \cup \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} \mathbf{J}_n \cup \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} \mathbf{J}'_n$$

et

$$\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2 \subset \left(\bigcup_{n=1}^{N} \mathbf{J}_n \cap \bigcup_{n=1}^{N} \mathbf{J}'_n\right) \cup \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} \mathbf{J}_n \cup \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} \mathbf{J}'_n,$$

on obtient

$$m(\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2) \leqslant \left|\bigcup_{n=1}^{N} \mathbf{J}_n \cup \bigcup_{n=1}^{N} \mathbf{J}'_n\right| + m\left(\bigcup_{n=N+1}^{+\infty} \mathbf{J}_n\right) + m\left(\bigcup_{n=N+1}^{+\infty} \mathbf{J}'_n\right)$$

et

$$m(\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2) \leqslant \left|\bigcup_{n=1}^{N} \mathbf{J}_n \cap \bigcup_{n=1}^{N} \mathbf{J}'_n\right| + m\left(\bigcup_{n=N+1}^{+\infty} \mathbf{J}_n\right) + m\left(\bigcup_{n=N+1}^{+\infty} \mathbf{J}'_n\right).$$

En conséquence, d'après **I.7.3** et la solution de **II.1.2**,

$$\begin{aligned}
&m(\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2) + m(\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2) \\
&\qquad \leqslant \left|\bigcup_{n=1}^{N} \mathbf{J}_n\right| + \left|\bigcup_{n=1}^{N} \mathbf{J}'_n\right| + 2\left(m\left(\bigcup_{n=N+1}^{+\infty} \mathbf{J}_n\right) + m\left(\bigcup_{n=N+1}^{+\infty} \mathbf{J}'_n\right)\right) \\
&\qquad = \sum_{n=1}^{N} |\mathbf{J}_n| + \sum_{n=1}^{N} |\mathbf{J}'_n| + 2\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |\mathbf{J}_n| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |\mathbf{J}'_n|\right).
\end{aligned}$$

Le dernier terme tendant vers zéro lorsque N tend vers $+\infty$, on obtient donc l'inégalité opposée.

II.1.4. Soit $\mathbf{S}_1 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{I}_n$ et $\mathbf{S}_2 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{I}'_n$ des recouvrements respectivement de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ par des intervalles fermés. On a alors $\mathbf{A}\cup\mathbf{B} \subset \mathbf{S}_1\cup\mathbf{S}_2$ et $\mathbf{A}\cap\mathbf{B} \subset \mathbf{S}_1\cap\mathbf{S}_2$. Donc, d'après le résultat du problème précédent,

$$m^*(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}) + m^*(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}) \leqslant m(\mathbf{S}_1\cup\mathbf{S}_2) + m(\mathbf{S}_1\cap\mathbf{S}_2) = m(\mathbf{S}_1) + m(\mathbf{S}_2).$$

L'inégalité cherchée s'obtient en prenant la borne inférieure sur tous les recouvrements $\mathbf{S}_1$ de $\mathbf{A}$ puis la borne inférieure sur tous les recouvrements $\mathbf{S}_2$ de $\mathbf{B}$.

II.1.5. Puisque $\mathbf{G}$ est mesurable, la condition de Carathéodory implique

$$m^*(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}) = m^*((\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{G}) + m^*((\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\setminus\mathbf{G}) = m^*(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{B}).$$

On note que l'on peut remplacer $\mathbf{G}$ par tout ensemble mesurable.

II.1.6. Supposons que $d(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \eta > 0$. L'ensemble

$$\mathbf{G} = \bigcup_{x\in\mathbf{A}} \left]x - \frac{\eta}{2}, x + \frac{\eta}{2}\right[$$

est alors un ouvert contenant $\mathbf{A}$ et disjoint de $\mathbf{B}$. Le résultat cherché est donc une conséquence immédiate du problème précédent.

II.1.7. On a

$$m^*(\mathbf{B}) \leqslant m^*(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}) \leqslant m^*(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{B}) = m^*(\mathbf{B}),$$

ce qui donne $m^*(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}) = m^*(\mathbf{B})$. Puisque $\mathbf{B} = (\mathbf{B}\setminus\mathbf{A}) \cup (\mathbf{A}\cap\mathbf{B})$ et $m^*(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}) = 0$, il s'ensuit que $m^*(\mathbf{B}\setminus\mathbf{A}) = m^*(\mathbf{B})$.

II.1.8. D'après la condition de Carathéodory, on a

$$m^*(\mathbf{B}) = m^*(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}) + m^*(\mathbf{B}\setminus\mathbf{A}) = m(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{B}\setminus\mathbf{A}).$$

II.1.9. Par additivité de la mesure de Lebesgue m,

$$\begin{aligned} m(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}) + m(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}) &= (m(\mathbf{A}\setminus\mathbf{B}) + m(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})) \\ &\quad + (m(\mathbf{B}\setminus\mathbf{A}) + m(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})) \\ &= m(\mathbf{A}) + m(\mathbf{B}). \end{aligned}$$

II.1.10. D'après la condition de Carathéodory et l'hypothèse du problème,

$$m(\mathbf{A}_1) = m^*(\mathbf{A}) = m^*(\mathbf{A} \setminus \mathbf{A}_1) + m^*(\mathbf{A} \cap \mathbf{A}_1) = m^*(\mathbf{A} \setminus \mathbf{A}_1) + m(\mathbf{A}_1).$$

Puisque $m(\mathbf{A}_1) < \infty$, on voit que $m^*(\mathbf{A} \setminus \mathbf{A}_1) = 0$. D'où, d'après **II.1.1** et **II.1.7**, pour tout ensemble $\mathbf{B}$,

$$m^*(\mathbf{B}) = m^*(\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}_1) + m^*(\mathbf{B} \cap \mathbf{A}_1) = m^*(\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}) + m^*(\mathbf{B} \cap \mathbf{A}).$$

La dernière égalité découle du fait que les ensembles $\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}_1$ et $\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$, de même que les ensembles $\mathbf{B} \cap \mathbf{A}_1$ et $\mathbf{B} \cap \mathbf{A}$, ne diffèrent que par des ensembles de mesure extérieure nulle.

II.1.11. Il suffit de considérer le cas $m^*(\mathbf{A}) < +\infty$. La définition de la mesure extérieure implique que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbf{I}_k$ de $\mathbf{A}$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\mathbf{I}_k| \leqslant m^*(\mathbf{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$. Si $\mathbf{I}'_k$ est un intervalle ouvert, de même centre que $\mathbf{I}_k$, tel que $|\mathbf{I}'_k| = |\mathbf{I}_k| + 2^{-k-1}\varepsilon$, alors $\mathbf{G} = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbf{I}'_k$ est un intervalle ouvert contenant $\mathbf{A}$ tel que $m(\mathbf{G}) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\mathbf{I}'_k| \leqslant m^*(\mathbf{A}) + \varepsilon$. Pour démontrer la seconde partie de l'énoncé, on considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, un ensemble ouvert $\mathbf{G}_n$ contenant $\mathbf{A}$ tel que $m(\mathbf{G}_n) \leqslant m^*(\mathbf{A}) + \frac{1}{n}$ et on pose $\mathbf{A}_2 = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{G}_n$.

II.1.12. On montre d'abord que (i) implique (ii). Si $m(\mathbf{A}) < +\infty$, l'implication se déduit alors de **II.1.11** et **II.1.8**. Si $m(\mathbf{A}) = +\infty$, alors $\mathbf{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n$ où $\mathbf{A}_n = \mathbf{A} \cap [-n\,, n]$. Puisque $m(\mathbf{A}_n) < +\infty$, il existe un ouvert $\mathbf{G}_n$ tel que $\mathbf{A}_n \subset \mathbf{G}_n$ et $m(\mathbf{G}_n \setminus \mathbf{A}_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Si $\mathbf{G} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{G}_n$, alors $\mathbf{A} \subset \mathbf{G}$ et $\mathbf{G} \setminus \mathbf{A} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{G}_n \setminus \mathbf{A}_n)$. En conséquence, $m(\mathbf{G} \setminus \mathbf{A}) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$. Pour voir que (iii) se déduit de (ii), il suffit de procéder comme dans la solution du second énoncé de **II.1.11**. Si (iii) est vérifié, l'ensemble $\mathbf{A} = \mathbf{U} \setminus (\mathbf{U} \setminus \mathbf{A})$ est alors mesurable comme différence de deux ensembles mesurables (voir **II.1.1**). Les trois premières conditions sont donc équivalentes.

Pour voir que (i) implique (iv), on note que si $\mathbf{A}$ est mesurable, il en est de même de $\mathbf{A}^c$. D'après (ii), il existe un ouvert $\mathbf{G} \supset \mathbf{A}^c$ tel que

$m^*(\mathbf{G} \setminus \mathbf{A}^c) < \varepsilon$. Donc, $\mathbf{F} = \mathbb{R} \setminus \mathbf{G}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbf{A}$ et $m^*(\mathbf{A} \setminus \mathbf{F}) = m^*(\mathbf{G} \setminus \mathbf{A}^c) < \varepsilon$. Pour prouver que (iv) implique (v), on prend, pour $n \in \mathbb{N}^*$, un fermé $\mathbf{F}_n \subset \mathbf{A}$ tel que $m^*(\mathbf{A} \setminus \mathbf{F}_n) < \frac{1}{n}$ et on pose $\mathbf{V} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{F}_n$. $\mathbf{V}$ est alors un $\mathcal{F}_\sigma$-sous-ensemble de $\mathbf{A}$ et, puisque $m^*(\mathbf{A} \setminus \mathbf{V}) < \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient $m^*(\mathbf{A} \setminus \mathbf{V}) = 0$. Finalement, si (v) est vérifié, $\mathbf{A}$ est alors mesurable comme somme de deux ensembles mesurables. Les conditions (i), (iv) et (v) sont donc aussi équivalentes.

II.1.13. On suppose d'abord que $\mathbf{A}$ est mesurable. Puisque $m(\mathbf{A}) < +\infty$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement dénombrable de $\mathbf{A}$ par des intervalles ouverts $\mathbf{I}_n$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} |\mathbf{I}_n| < m(\mathbf{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$ et tel qu'il existe N pour lequel $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |\mathbf{I}_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. On voit, en prenant $\mathbf{W} = \bigcup_{n=1}^{N} \mathbf{I}_n$, que

$$m(\mathbf{W} \triangle \mathbf{A}) \leqslant m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{I}_n \setminus \mathbf{A}\right) + m\left(\bigcup_{n=N+1}^{+\infty} \mathbf{I}_n\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On prouve maintenant que la condition est aussi suffisante. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une union finie $\mathbf{W}$ d'intervalles ouverts telle que

$$m^*(\mathbf{W} \triangle \mathbf{A}) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par définition de la mesure extérieure de Lebesgue, il existe un recouvrement dénombrable de $\mathbf{A} \setminus \mathbf{W}$ par des intervalles ouverts $\mathbf{J}_n$ tels que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\mathbf{J}_n| < m^*(\mathbf{A} \setminus \mathbf{W}) + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

L'ensemble $\mathbf{G} = \mathbf{W} \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{J}_n$ est un ouvert contenant $\mathbf{A}$ et

$$m^*(\mathbf{G} \setminus \mathbf{A}) \leqslant m^*(\mathbf{W} \setminus \mathbf{A}) + m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{J}_n\right) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

D'après la proposition (ii) du problème précédent, l'ensemble $\mathbf{A}$ est mesurable.

II.1.14.

(a) Si $\mathbf{A}$ est mesurable, alors clairement $m_*(\mathbf{A}) \geqslant m(\mathbf{A}) = m^*(\mathbf{A})$. Donc si $m(\mathbf{A}) = +\infty$, le résultat est prouvé. Si $m(\mathbf{A}) < +\infty$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors une collection dénombrable d'intervalles fermés $\mathbf{I}_n$ telle que

$$\mathbf{A} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{I}_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |\mathbf{I}_n| < m^*(\mathbf{A}) + \varepsilon.$$

Donc, si $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ est mesurable, alors $m(\mathbf{B}) \leqslant m^*(\mathbf{A}) + \varepsilon$. Il s'ensuit que $m_*(\mathbf{A}) \leqslant m^*(\mathbf{A})$.

(b) D'après le résultat de **II.1.11**, il existe un ensemble mesurable $\mathbf{A}_2$ tel que $\mathbf{I} \setminus \mathbf{A} \subset \mathbf{A}_2$ et $m(\mathbf{A}_2) = m^*(\mathbf{I} \setminus \mathbf{A})$. Donc,

$$|\mathbf{I}| = m(\mathbf{I} \setminus \mathbf{A}_2) + m(\mathbf{A}_2) = m(\mathbf{I} \setminus \mathbf{A}_2) + m^*(\mathbf{I} \setminus \mathbf{A}).$$

Puisque $\mathbf{I} \setminus \mathbf{A}_2$ est un sous-ensemble mesurable de $\mathbf{A}$, on obtient

$$|\mathbf{I}| \leqslant m_*(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{I} \setminus \mathbf{A}).$$

On prouve maintenant que l'inégalité opposée est aussi vérifiée. Si $\mathbf{B}$ est un sous-ensemble mesurable de $\mathbf{A}$, alors $\mathbf{I} \setminus \mathbf{A} \subset \mathbf{I} \setminus \mathbf{B}$ et, en conséquence, $m^*(\mathbf{I} \setminus \mathbf{A}) \leqslant m^*(\mathbf{I} \setminus \mathbf{B}) = m(\mathbf{I}) - m(\mathbf{B})$, la dernière égalité provenant de **II.1.8**. En prenant la borne supérieure sur tous les ensembles mesurables $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, on obtient $|\mathbf{I}| \leqslant m_*(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{I} \setminus \mathbf{A})$.

(c) Par définition de la mesure intérieure de Lebesgue, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un ensemble mesurable $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{A}$ tel que $m_*(\mathbf{A}) - \frac{1}{n} < m(\mathbf{B}_n)$. Puisque $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{B}_n \subset \mathbf{A}$, on a

$$m_*(\mathbf{A}) - \frac{1}{n} < m(\mathbf{B}_n) \leqslant m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{B}_n\right) \leqslant m_*(\mathbf{A}).$$

Il s'ensuit que

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{B}_n\right) = m_*(\mathbf{A}) = m^*(\mathbf{A}),$$

la dernière égalité étant notre hypothèse. La mesurabilité de $\mathbf{A}$ se déduit alors de **II.1.10**.

(d) On a

$$\begin{aligned}
&m_*(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) + m_*(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \\
&\qquad \geqslant \sup\{m(\mathbf{B} \cup \mathbf{D}) : \mathbf{B}, \mathbf{D} \in \mathfrak{M}, \mathbf{B} \subset \mathbf{A}, \mathbf{D} \subset \mathbf{C}\} \\
&\qquad\quad + \sup\{m(\mathbf{B} \cap \mathbf{D}) : \mathbf{B}, \mathbf{D} \in \mathfrak{M}, \mathbf{B} \subset \mathbf{A}, \mathbf{D} \subset \mathbf{C}\} \\
&\qquad \geqslant \sup\{m(\mathbf{B} \cup \mathbf{D}) + m(\mathbf{B} \cap \mathbf{D}) : \mathbf{B}, \mathbf{D} \in \mathfrak{M}, \mathbf{B} \subset \mathbf{A}, \mathbf{D} \subset \mathbf{C}\} \\
&\qquad = \sup\{m(\mathbf{B}) + m(\mathbf{D}) : \mathbf{B}, \mathbf{D} \in \mathfrak{M}, \mathbf{B} \subset \mathbf{A}, \mathbf{D} \subset \mathbf{C}\} \\
&\qquad = \sup\{m(\mathbf{B}) : \mathbf{B} \in \mathfrak{M}, \mathbf{B} \subset \mathbf{A}\} + \sup\{m(\mathbf{D}) : \mathbf{D} \in \mathfrak{M}, \mathbf{D} \subset \mathbf{C}\} \\
&\qquad = m_*(\mathbf{A}) + m_*(\mathbf{C}).
\end{aligned}$$

(e) La proposition (d) implique, par récurrence, que si les ensembles $\mathbf{A}_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ sont deux à deux disjoints, alors
$$m_*\left(\bigcup_{n=1}^{N} \mathbf{A}_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{N} m_*(\mathbf{A}_n).$$
En conséquence,
$$m_*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n\right) \geqslant m_*\left(\bigcup_{n=1}^{N} \mathbf{A}_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{N} m_*(\mathbf{A}_n)$$
et on obtient le résultat cherché en faisant tendre N vers $+\infty$.

(f) Par définition de la mesure intérieure de Lebesgue, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable $\mathbf{B} \subset \mathbf{A} \cup \mathbf{M}$ tel que $m_*(\mathbf{A} \cup \mathbf{M}) - \varepsilon < m(\mathbf{B})$. Donc,
$$m_*(\mathbf{A} \cup \mathbf{M}) - \varepsilon < m(\mathbf{B}) = m(\mathbf{B} \setminus \mathbf{M}) \leqslant m_*(\mathbf{A})$$
car $\mathbf{B} \setminus \mathbf{M} \subset \mathbf{A}$.

II.1.15. Il est évident que la condition est nécessaire. Pour montrer qu'elle est aussi suffisante, il suffit d'appliquer le résultat du problème précédent.

II.1.16. [M. Machover, *Amer. Math. Monthly*, 74(1967), 1080-1081]. Supposons d'abord qu'il existe des ensembles mesurables $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{B}_1$ tels que $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}_1$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{B}_1$ et $m(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{B}_1) = 0$. Par définition de la mesure extérieure de Lebesgue, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \subset \mathbf{G}$ et
$$m(\mathbf{G}) < m^*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + \varepsilon.$$
Puisque $\mathbf{A} \subset \mathbf{G} \cap \mathbf{A}_1$ et $\mathbf{B} \subset \mathbf{G} \cap \mathbf{B}_1$, on a
$$\begin{aligned} m^*(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{B}) &\leqslant m(\mathbf{G} \cap \mathbf{A}_1) + m(\mathbf{G} \cap \mathbf{B}_1) = m(\mathbf{G} \cap (\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{B}_1)) \\ &\leqslant m(\mathbf{G}) < m^*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + \varepsilon \leqslant m^*(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{B}) + \varepsilon. \end{aligned}$$
En faisant tendre ε vers 0, on voit que $m^*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = m^*(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{B})$.

Supposons maintenant que $m^*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = m^*(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{B})$. D'après le résultat de **II.1.11**, il existe des $\mathcal{G}_\delta$-ensembles $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{B}_1$ tels que $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}_1$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{B}_1$ et $m(\mathbf{A}_1) = m^*(\mathbf{A})$, $m(\mathbf{B}_1) = m^*(\mathbf{B})$. Nous allons prouver que $m(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{B}_1) = 0$. En effet, si $m(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{B}_1) > 0$, on obtient en utilisant **II.1.9**
$$\begin{aligned} m^*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = m^*(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{B}) &= m(\mathbf{A}_1) + m(\mathbf{B}_1) \\ &= m(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{B}_1) + m(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{B}_1) \\ &> m(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{B}_1) \geqslant m^*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}), \end{aligned}$$

contradiction. On remarquera que le théorème prouvé ici généralise les résultats de **II.1.5** et **II.1.6**.

II.1.17. [M. Machover, *Amer. Math. Monthly*, 74(1967), 1080-1081]. Par définition de la mesure intérieure de Lebesgue (voir **II.1.14**), étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable $\mathbf{C} \subset \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ tel que $m_*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) - \varepsilon < m(\mathbf{C})$. D'après le résultat du problème précédent, il existe des ensembles mesurables $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{B}_1$ tels que $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}_1$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{B}_1$ et $m(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{B}_1) = 0$. On obtient donc, en utilisant **II.1.14(d)**,

$$\begin{aligned} m_*(\mathbf{A}) + m_*(\mathbf{B}) - \varepsilon \leqslant m_*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) - \varepsilon &< m(\mathbf{C}) \\ &= m(\mathbf{C} \cap (\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{B}_1)) \\ &= m(\mathbf{C} \cap \mathbf{A}_1) + m(\mathbf{C} \cap \mathbf{B}_1). \end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{C} \cap \mathbf{A}_1 \subset (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{A}_1) \subset \mathbf{A} \cup (\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{A}_1)$, on a $m(\mathbf{C} \cap \mathbf{A}_1) \leqslant m_*(\mathbf{A} \cup (\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{A}_1))$. De même, $m(\mathbf{C} \cap \mathbf{B}_1) \leqslant m_*(\mathbf{B} \cup (\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{A}_1))$. Il s'ensuit alors que

$$\begin{aligned} m_*(\mathbf{A}) + m_*(\mathbf{B}) - \varepsilon &\leqslant m_*(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) - \varepsilon \\ &< m_*(\mathbf{A} \cup (\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{A}_1)) + m_*(\mathbf{B} \cup (\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{A}_1)) \\ &= m_*(\mathbf{A}) + m_*(\mathbf{B}), \end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de **II.1.14(f)**.

II.1.18. On pose $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1$ et $\mathbf{B}_n = \mathbf{A}_n \setminus \mathbf{A}_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$. Les ensembles $\mathbf{B}_n$ sont alors mesurables et deux à deux disjoints et, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $\bigcup\limits_{n=1}^{N} \mathbf{A}_n = \bigcup\limits_{n=1}^{N} \mathbf{B}_n$ et $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{B}_n$. D'où,

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{B}_n\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} m(\mathbf{B}_n) \\ &= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} m(\mathbf{B}_n) = \lim_{N \to +\infty} m(\mathbf{A}_N). \end{aligned}$$

II.1.19. On peut, sans perte de généralité, supposer que $m(\mathbf{A}_1)$ est finie. On obtient, en utilisant la formule de De Morgan, les résultats de **II.1.8** et du problème précédent

$$m(\mathbf{A}_1) - m\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n\right) = m\left(\mathbf{A}_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{A}_1 \setminus \mathbf{A}_n)\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} m(\mathbf{A}_1 \setminus \mathbf{A}_n) = m(\mathbf{A}_1) - \lim_{n\to+\infty} m(\mathbf{A}_n).$$

Pour montrer que l'hypothèse $m(\mathbf{A}_k) < +\infty$ pour au moins un k est essentielle, on peut considérer $\mathbf{A}_n =]n\,,+\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1.20.

(a) Les ensembles $\mathbf{B}_k = \bigcap_{n=k}^{+\infty} \mathbf{A}_n$ vérifient $\mathbf{B}_k \subset \mathbf{B}_{k+1}$. Donc, d'après **II.1.18**,

$$m\left(\varliminf_{n\to+\infty} \mathbf{A}_n\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathbf{B}_k\right) = \lim_{k\to+\infty} m(\mathbf{B}_k) \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} m(\mathbf{A}_k),$$

la dernière inégalité provenant, par exemple, de **II.4.14(a) (vol. I)**.

(b) Ceci s'obtient en procédent comme en (a) et en utilisant **II.1.19**.

II.1.21.

(a) Si, par exemple, $\{\mathbf{A}_n\}$ est une suite croissante d'ensembles, alors pour tout k, $\bigcup_{n=k}^{+\infty} \mathbf{A}_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n$. Donc, $\varlimsup_{n\to+\infty} \mathbf{A}_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n$. De plus, puisque $\bigcup_{n=k}^{+\infty} \mathbf{A}_n = \mathbf{A}_k$, on voit que $\varliminf_{n\to+\infty} \mathbf{A}_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n$.

(b) Par monotonie de la mesure extérieure de Lebesgue, chacun des $\mathbf{A}_n$ est de mesure finie et les résultats de **II.1.20(a)** et **(b)** s'appliquent. Donc,

$$\varliminf_{n\to+\infty} m(\mathbf{A}_n) \geqslant m(\lim_{n\to+\infty} \mathbf{A}_n) \geqslant \varlimsup_{n\to+\infty} m(\mathbf{A}_n).$$

II.1.22. On a

$$m(\mathbf{A}) = 1 - m\big([0\,,1] \setminus \mathbf{A}\big) = 1 - \left(\frac{\alpha}{2} + 2\frac{\alpha}{2^3} + 2^2\frac{\alpha}{2^5} + \cdots\right) = 1 - \alpha.$$

II.1.23. On divise $[0\,,1]$ en dix intervalles de même longueur et on enlève l'intervalle $]0{,}7\,;0{,}8[$. À la seconde étape, on divise chacun des neuf intervalles restants $[0{,}1\,;0{,}2]$, …, $[0{,}6\,;0{,}7]$, $[0{,}8\,;0{,}9]$, $[0{,}9\,;1]$ en dix intervalles de même longueur et on enlève les intervalles ouverts $]0{,}07\,;0{,}08[$, …, $]0{,}67\,;0{,}68[$,

$]0{,}87\,;0{,}88[$, $]0{,}97\,;0{,}98[$. En poursuivant cette procédure, on retire à la n-ième étape 9^{n-1} intervalles ouverts de longueur $\frac{1}{10^n}$. On remarque que si $]a_i\,,b_i[$ ($i \in \mathbb{N}^*$) est la suite d'intervalles enlevés, alors

$$\mathbf{A} = [0\,,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty}]a_i\,,b_i[.$$

Donc,

$$m\big([0\,,1] \setminus \mathbf{A}\big) = \frac{1}{10} + 9\frac{1}{10^2} + 9^2\frac{1}{10^3} + \cdots + 9^{n-1}\frac{1}{10^n} + \cdots = 1$$

et $m(\mathbf{A}) = 0$. On remarquera que l'ensemble $\mathbf{A}$ est parfait et nulle part dense.

II.1.24. On a

$$\mathbf{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \big(\mathbf{B} \cap [n\,,n+1]\big)$$

et l'ensemble $\mathbf{B}\cap[n\,,n+1]$ est obtenu par translation de l'ensemble $\mathbf{A}$ défini au problème précédent, autrement dit, $\mathbf{B}\cap[n\,,n+1] = \mathbf{A}+n = \{x+n : x \in \mathbf{A}\}$. Puisque la mesure de Lebesgue est invariante par translation, on déduit du résultat du problème précédent que $m(\mathbf{B}) = 0$.

II.1.25. On divise l'intervalle $[0\,,1]$ en quatre intervalles de même longueur, on enlève les deux intervalles ouverts $\left]\frac{1}{4}\,,\frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{3}{4}\,,1\right[$ et on note $\mathbf{A}_1$ la réunion des deux intervalles fermés restants. Clairement, l'ensemble $\mathbf{A}_1$ contient tous les éléments de $[0\,,1]$ dont le développement binaire admet un 0 comme second chiffre après la virgule. À la seconde étape, on divise chacun des deux intervalles fermés restants en quatre intervalles de même longueur, on enlève les quatre intervalles $\left]\frac{1}{4^2}\,,\frac{2}{4^2}\right[$, $\left]\frac{3}{4^2}\,,\frac{4}{4^2}\right[$, $\left]\frac{9}{4^2}\,,\frac{10}{4^2}\right[$, $\left]\frac{11}{4^2}\,,\frac{12}{4^2}\right[$ et on note $\mathbf{A}_2$ la réunion des quatre intervalles fermés restants. L'ensemble $\mathbf{A}_2$ contient donc tous les éléments de $[0\,,1]$ dont le développement binaire admet un 0 en seconde et quatrième position après la virgule. En poursuivant le procédé, on obtient à la n-ième étape l'ensemble $\mathbf{A}_n$ formé de 2^n intervalles fermés, chacun de longueur 4^{-n}. Il est évident que

$$\mathbf{A}_1 \supset \mathbf{A}_2 \supset \cdots \supset \mathbf{A}_n \supset \cdots$$

et

$$\mathbf{A} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n.$$

Puisque $m(\mathbf{A}_n) = 2^n \times 4^{-n} = 2^{-n}$, l'ensemble $\mathbf{A}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

II.1.26. On note $\mathbf{A}_i$ l'ensemble des points de $[0\,,1]$ admettant des développements décimaux contenant le chiffre i, $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. L'ensemble $\mathbf{A}$ des points de $[0\,,1]$ admettant des développements décimaux contenant tous les chiffres $1, 2, \ldots, 9$ est alors l'intersection $\bigcap\limits_{i=1}^{9} \mathbf{A}_i$. D'après le résultat de **II.1.23**, $m\big([0,1] \setminus \mathbf{A}_i\big) = 0$ et on obtient donc $m\left([0,1] \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{9} \mathbf{A}_i\right) = 0$, d'où $m(\mathbf{A}) = 1$.

II.1.27. Soit $\mathbf{A}$ l'ensemble considéré. $\mathbf{A}$ est contenu dans chacun des ensembles $\mathbf{A}_n$ définis comme suit. On divise l'intervalle $[0\,,1]$ en mille intervalles de même longueur, on enlève l'intervalle $]0{,}222\,;0{,}223[$ et on note $\mathbf{A}_1$ la réunion des 999 intervalles fermés restants. On divise alors chacun des intervalles restants en mille intervalles de même longueur et on enlève les intervalles de la forme $]0, d_1d_2d_3222\,; 0, d_1d_2d_3223[$. On obtient de cette façon l'ensemble $\mathbf{A}_2$ comme union des 999^2 intervalles fermés restants. En poursuivant le procédé, on obtient une suite d'ensembles $\{\mathbf{A}_n\}$, où $\mathbf{A}_n$ est l'union de 999^n intervalles fermés, chacun de longueur 10^{-3n} et

$$\mathbf{A} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n.$$

Puisque $\{\mathbf{A}_n\}$ est une suite décroissante, d'après **II.1.17**, on a

$$m(\mathbf{A}) = \lim_{n\to+\infty} m(\mathbf{A}_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{999}{1000}\right)^n = 0.$$

II.1.28. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = &\left]-\frac{1}{20}, \frac{1}{9} + \frac{1}{20}\right[\cup \left]\frac{2}{9} - \frac{1}{20}, \frac{1}{3} + \frac{1}{20}\right[\cup \left]\frac{2}{3} - \frac{1}{20}, \frac{7}{9} + \frac{1}{20}\right[\\ &\cup \left]\frac{8}{9} - \frac{1}{20}, 1 + \frac{1}{20}\right[\end{aligned}$$

et $m(\mathbf{A}) = \dfrac{38}{45}$.

II.1.29. Soit $\mathbf{A} \subset [a\,,b]$. La fonction $f(x) = m\big([a\,,x] \cap \mathbf{A}\big)$ est croissante, continue et $f(a) = 0$, $f(b) = p$. Le résultat se déduit donc de la propriété des valeurs intermédiaires.

II.1.30. Si $\mathbf{A}$ est un ensemble borné, le résultat est contenu dans le problème précédent. Si $\mathbf{A}$ n'est pas borné, on pose $\mathbf{A}_n = \mathbf{A} \cap [-n\,,n]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et on obtient $m(\mathbf{A}) = \lim\limits_{n\to+\infty} m(\mathbf{A}_n)$ (voir **II.1.18**). Donc, pour $q < m(\mathbf{A})$, il existe N tel que $m(\mathbf{A}_N) > q$ et on peut appliquer le résultat du problème précédent.

II.1.31. Nous allons utiliser dans la démonstration le *théorème de Cantor-Bendixson* qui affirme que tout ensemble fermé $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ est l'union d'un ensemble parfait $\mathbf{P}$ et d'un ensemble dénombrable $\mathbf{C}$. Pour démontrer le théorème de Cantor-Bendixson, on définit

$$\mathbf{P} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ est un point de condensation de } \mathbf{A}\}\,.$$

On se souvient que x est un *point de condensation* de $\mathbf{A}$ si tout voisinage de x contient une infinité non dénombrable de points de $\mathbf{A}$. Il est clair que chaque point de condensation de $\mathbf{A}$ est un point d'accumulation de $\mathbf{A}$. Donc, $\mathbf{P} \subset \mathbf{A}$ et $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cup (\mathbf{A} \setminus \mathbf{P})$. Si $x \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{P}$, il existe alors un intervalle ouvert $\mathbf{U}$ à extrémités rationnelles contenant x tel que $\mathbf{A} \cap \mathbf{U}$ soit dénombrable. En conséquence, $\mathbf{C} = \mathbf{A} \setminus \mathbf{P}$ est un ensemble dénombrable. On montre maintenant que $\mathbf{P}$ est parfait, autrement dit, que cet ensemble est égal à l'ensemble de ses points d'accumulation. Soit $x \in \mathbf{P}$ et soit $\mathbf{U}$ un voisinage de x. Alors $\mathbf{U} \cap \mathbf{A}$ est non dénombrable et $\mathbf{U} \cap \mathbf{C}$ est dénombrable. Donc $\mathbf{U} \cap \mathbf{P} = (\mathbf{U} \cap \mathbf{A}) \cap (\mathbf{U} \cap \mathbf{C})^c$ n'est pas dénombrable et x est un point d'accumulation de $\mathbf{P}$. Pour voir que $\mathbf{P}$ est fermé, on prend $z \in \mathbf{P}^c$. Alors z admet un voisinage $\mathbf{V}$ tel que $\mathbf{V} \cap \mathbf{A}$ soit dénombrable. S'il existe $y \in \mathbf{V} \cap \mathbf{P}$, alors $\mathbf{V} \cap \mathbf{A}$ serait non dénombrable. Contradiction. Ceci montre que $\mathbf{P}^c$ est un ensemble ouvert.

On se tourne maintenant vers la démonstration de notre énoncé. On déduit du problème précédent qu'il existe un ensemble mesurable $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ tel que $m(\mathbf{B}) = q' < q < m(\mathbf{A})$. De plus, d'après **II.1.12(iv)**, il existe un ensemble fermé $\mathbf{F} \subset \mathbf{B}$ tel que $m(\mathbf{B} \setminus \mathbf{F}) = q - q'$. Donc, $m(\mathbf{F}) = q$ et le résultat cherché découle du théorème de Cantor-Bendixson.

II.1.32. Le résultat découlera du problème précédent si on prouve que tout ensemble parfait non vide a la puissance du continu. Soit $\mathbf{P}$ un tel ensemble, c'est-à-dire un ensemble fermé sans point isolé. Si on pose $\mathbf{G}_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \operatorname{dist}(x, \mathbf{P}) < \frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\mathbf{P} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{G}_n.$$

$\mathbf{P}$ contient au moins deux points que l'on note x_0 et x_1. On choisit à la première étape deux intervalles ouverts disjoints $\mathbf{I}_0$ et $\mathbf{I}_1$ contenant respectivement x_0

et x_1 et des sous-intervalles fermés $\mathbf{J}_0 \subset \mathbf{I}_0$ et $\mathbf{J}_1 \subset \mathbf{I}_1$, tous deux de longueur respective strictement inférieure à 1 et tels que $\mathbf{J}_0 \subset \mathbf{G}_1$, $\mathbf{J}_1 \subset \mathbf{G}_1$. On choisit à la deuxième étape des intervalles ouverts disjoints $\mathbf{I}_{00}, \mathbf{I}_{01} \subset \mathbf{J}_0$ et $\mathbf{I}_{10}, \mathbf{I}_{11} \subset \mathbf{J}_1$ et des sous-intervalles fermés $\mathbf{J}_{00}$, $\mathbf{J}_{01}$, $\mathbf{J}_{10}$, $\mathbf{J}_{11}$, tous de longueur respective strictement inférieure à $\frac{1}{2}$ et tels que

$$\mathbf{J}_{00}, \mathbf{J}_{01} \subset \mathbf{G}_2 \cap \mathbf{J}_0, \quad \mathbf{J}_{10}, \mathbf{J}_{11} \subset \mathbf{G}_2 \cap \mathbf{J}_1.$$

On remarquera que la construction ci-dessus est possible puisque x_0 et x_1 sont des points d'accumulation de $\mathbf{P}$. En poursuivant le procédé, on obtient à la n-ième étape 2^n intervalles fermés deux à deux disjoints $\mathbf{J}_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, où i_k prend les valeurs 0 ou 1, tous de longueur strictement inférieure à $\frac{1}{n}$ et tels que $\mathbf{J}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset \mathbf{G}_n \cap \mathbf{J}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$. D'après le théorème des ensembles emboîtés de Cantor, il existe un unique point $x_{i_1 i_2 \ldots}$ dans l'intersection des intervalles fermés $\mathbf{J}_{i_1}$, $\mathbf{J}_{i_1 i_2}$, $\mathbf{J}_{i_1 i_2 i_3}, \ldots$ Il découle aussi de ce qui précède que des suites $\{i_n\}$ et $\{i'_n\}$ de 0 et de 1 distinctes gênèrent des points $x_{i_1 i_2 \ldots}$ et $x_{i'_1 i'_2 \ldots}$ distincts. Puisque l'ensemble des suites de 0 et de 1 a la puissance du continu, l'ensemble de tous les points $x_{i_1 i_2 \ldots}$ a aussi la puissance du continu et puisque tous les $x_{i_1 i_2 \ldots}$ sont dans $\mathbf{P}$, l'ensemble $\mathbf{P}$ a la puissance du continu.

II.1.33. Pour prouver que $\mathbf{A}$ est nulle part dense, on va montrer que tout intervalle contient un sous-intervalle disjoint de $\mathbf{A}$. Soit $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Puisque $m(\mathbf{A}) = 0$, $\mathbf{I}$ ne peut pas être un sous-ensemble de $\mathbf{A}$. Donc $\mathbf{I} \cap \mathbf{A}^c \neq \varnothing$. Puisque que $\mathbf{A}^c$ est ouvert, il existe un intervalle $\mathbf{J} \subset \mathbf{I} \cap \mathbf{A}^c$, ce qui prouve que $\mathbf{A}$ est nulle part dense.

II.1.34. Non. Pour s'en rendre compte, on considère l'ensemble $\mathbf{A}$ défini en **I.7.12**. C'est un sous-ensemble nulle part dense de $[0\,,1]$ de mesure strictement positive. Soit $\mathbf{B}$ l'ensemble formé des extrémités des intervalles enlevés de $[0\,,1]$ dans la construction de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ est alors un ensemble nulle part dense dénombrable. En conséquence, $m(\mathbf{B}) = 0$ et $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{A}$, ce qui montre que $m(\overline{\mathbf{B}}) > 0$.

II.1.35. Puisque $m(\mathbf{A}) > 0$, cet ensemble a la puissance du continu (voir **II.1.32**). Soit $x_0 \in \mathbf{A}$. L'ensemble des réels $|x_0 - x|$ $(x \in \mathbf{A})$ a la puissance du continu et tous ses éléments ne sont donc pas rationnels.

II.1.36. Oui. Soit $\mathbf{A}_n$ un sous-ensemble nulle part dense et parfait de $[0\,,1]$, de mesure de Lebesgue égale à $1 - \frac{1}{n}$ (on a construit et étudié de tels ensembles en **I.7.12** et **II.1.22**). Si $\mathbf{A} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n$, alors $1 - \frac{1}{n} \leqslant m(\mathbf{A}_n) \leqslant m(\mathbf{A}) \leqslant 1$ et $m(\mathbf{A}) = 1$.

II.1.37. Non. Si $\mathbf{A}$ était un tel ensemble, $[0\,,1] \setminus \mathbf{A}$ serait alors un ensemble ouvert de mesure de Lebesgue nulle, donc vide.

II.1.38. Soit $\{\mathbf{U}_n\}$ une suite de tous les intervalles ouverts à extrémités rationnelles. Notons $\mathbf{A}_1$ un sous-ensemble nulle part dense de $\mathbf{U}_1$ de mesure de Lebesgue strictement positive (voir, par exemple, **I.7.12** pour la construction d'un tel ensemble). Puisque $\mathbf{A}_1$ est nulle part dense, il existe un intervalle $]a\,,b[\ \subset \mathbf{U}_1$ disjoint de $\mathbf{A}_1$. On peut donc trouver un ensemble nulle part dense $\mathbf{A}_2 \subset\ ]a\,,b[$ de mesure strictement positive. Nous avons donc deux ensembles disjoints et nulle part denses $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ tels que $\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \subset \mathbf{U}_1$. Puisque $\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2$ est un ensemble nulle part dense, il existe $]c\,,d[\ \subset \mathbf{U}_2$ disjoint de $\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2$. On prend alors un ensemble nulle part dense $\mathbf{A}_3 \subset\ ]c\,,d[$ de mesure strictement positive, un intervalle ouvert $]e\,,f[\ \subset\ ]c\,,d[$ disjoint de $\mathbf{A}_3$ et un ensemble nulle part dense $\mathbf{A}_4 \subset\ ]e\,,f[$ de mesure strictement positive. En poursuivant le procédé, on obtient une suite $\{\mathbf{A}_n\}$ d'ensembles nulle part denses et deux à deux disjoints tels que $\mathbf{A}_{2n} \cup \mathbf{A}_{2n-1} \subset \mathbf{U}_n$ et $m(\mathbf{A}_n) > 0$. Posons $\mathbf{A} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_{2n}$. On montre alors que l'ensemble $\mathbf{A}$ a la propriété requise. En effet, étant donné un intervalle $]\alpha\,,\beta[$, il existe un ensemble $\mathbf{U}_k \subset\ ]\alpha\,,\beta[$, d'où $m(\mathbf{A} \cap\ ]\alpha\,,\beta[) \geqslant m(\mathbf{A}_{2k}) > 0$. Il est aussi clair que $m\big((\mathbb{R} \setminus \mathbf{A}) \cap\ ]\alpha\,,\beta[\big) \geqslant m(\mathbf{A}_{2k-1}) > 0$.

II.1.39. On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{A} \cap \left(\left]-\frac{1}{n}\,, -\frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}\,, \frac{1}{n}\right[\right).$$

Si $m(\mathbf{A}_n) > 0$, d'après le résultat de **II.1.31**, il existe alors un ensemble parfait $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{A}_n$ tel que $m(\mathbf{B}_n) \geqslant \frac{1}{2}\, m(\mathbf{A}_n)$. Si $m(\mathbf{A}_n) = 0$, on pose $\mathbf{B}_n = \varnothing$. On va prouver que l'ensemble

$$\mathbf{B} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{B}_n \cup \{0\}$$

a la propriété requise. On observe d'abord que $\mathbf{B}$ est un ensemble parfait. Il est clair que tout point de $\mathbf{B}$ est un point d'accumulation de $\mathbf{B}$. Pour prouver que $\mathbf{B}$ est un ensemble fermé, on pose $x = \lim_{k \to +\infty} x_k$ où $x_k \in \mathbf{B}$. Si $x > 0$, il existe alors un entier strictement positif m tel que $x \in \left[\frac{1}{m}, \frac{1}{m-1}\right[$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_k \in \left[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m-1}\right[$ si $k \geqslant N$, d'où $x_k \in \mathbf{B}_m \cup \mathbf{B}_{m-1}$, ce qui donne $x \in \mathbf{B}_m \cup \mathbf{B}_{m-1}$. Un raisonnement semblable s'applique si $x < 0$. Le cas $x = 0$ est évident. Maintenant, si $\delta > 0$, il existe alors un entier $N > 0$ tel que $\frac{1}{N} < \delta$. On a alors, par construction de $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{B} \cap \left]-\delta, \delta\right[\supset \mathbf{B} \cap \left]-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right[= \bigcup_{n=N}^{+\infty} \mathbf{B}_n \cup \{0\}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} m\left(\mathbf{B} \cap \left]-\delta, \delta\right[\right) &\geqslant m\left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} \mathbf{B}_n\right) = \sum_{n=N}^{+\infty} m(\mathbf{B}_n) \\ &\geqslant \frac{1}{2} m\left(\mathbf{A} \cap \left]-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right[\right) > 0. \end{aligned}$$

II.1.40. On a

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{m\big(\mathbf{A} \cap [x-h, x+h]\big)}{2h} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left]-1, 1\right[, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \{-1, 1\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

II.1.41. On suppose d'abord que $x_0 = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathbf{P}_n = \left]-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$$

et on choisit un ensemble mesurable $\mathbf{A}_n \subset \mathbf{P}_n$ tel que $m(\mathbf{A}_n) = \alpha m(\mathbf{P}_n)$. En posant $\mathbf{A} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n$, on voit que $\mathbf{A}$ a pour densité α en 0. Pour cela, on remarque que si $\frac{1}{n+1} \leqslant h < \frac{1}{n}$, alors

$$\begin{aligned} \frac{m\left(\mathbf{A} \cap [-h, h]\right)}{2h} \leqslant \frac{m\left(\mathbf{A} \cap \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]\right)}{\frac{2}{n+1}} &= \frac{\frac{2\alpha}{n}}{\frac{2}{n+1}} \\ &= \alpha\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \alpha(1 + 2h). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\frac{m\left(\mathbf{A}\cap[-h\,,h]\right)}{2h} \geqslant \frac{m\left(\mathbf{A}\cap\left[-\frac{1}{n+1}\,,\frac{1}{n+1}\right]\right)}{\frac{2}{n}} = \frac{\frac{2\alpha}{n+1}}{\frac{2}{n}}$$
$$= \alpha\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \geqslant \alpha(1-h).$$

La mesure de Lebesgue étant invariante par translation, si $x_0 \neq 0$, l'ensemble $\mathbf{A}+x_0$ a la propriété requise.

II.1.42. On définit, pour n entier strictement positif,

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{A}\cap\left(\left]-\frac{1}{n}\,,-\frac{1}{n+1}\right]\cup\left[\frac{1}{n+1}\,,\frac{1}{n}\right[\right)$$

et on choisit un ensemble parfait $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{A}_n$ tel que $m(\mathbf{B}_n) \geqslant \left(1-\frac{1}{n}\right) m(\mathbf{A}_n)$. On va prouver que

$$\mathbf{B} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{B}_n \cup \{0\}$$

a la propriété voulue. L'ensemble $\mathbf{B}$ est parfait (voir la solution de **II.1.39**). Pour $h>0$, on note N la partie entière de $\frac{1}{h}$. On a alors, par construction de $\mathbf{B}$,

$$\frac{m\left(\mathbf{B}\cap[-h\,,h]\right)}{2h} \geqslant \frac{m\left(\mathbf{B}\cap\left[-\frac{1}{N+1}\,,\frac{1}{N+1}\right]\right)}{\frac{2}{N}} = \frac{N}{2}\sum_{n=N+1}^{+\infty} m(\mathbf{B}_n)$$
$$\geqslant \frac{N}{2}\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} m(\mathbf{A}_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=N+1}^{+\infty} m(\mathbf{A}_n)\right)$$
$$= \frac{N}{2}\, m\left(\mathbf{A}\cap\left[-\frac{1}{N+1}\,,\frac{1}{N+1}\right]\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)$$
$$= \frac{m\left(\mathbf{A}\cap\left[-\frac{1}{N+1}\,,\frac{1}{N+1}\right]\right)}{\frac{2}{N}} \times \frac{N-1}{N}\,.$$

II.1.43. On note $T_a(\mathbf{A})$ le translaté de $\mathbf{A}$, autrement dit,

$$T_a(\mathbf{A}) = \mathbf{A}+a = \{x+a : x\in\mathbf{A}\}.$$

On a alors

$$\mathbf{A}+a\,(\mathrm{mod} 1) = T_a\left(\mathbf{A}\cap[0\,,1-a[\right)\cup T_{a-1}\left(\mathbf{A}\cap[1-a\,,1[\right).$$

En posant

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \cap [0\,,1-a[\,, \mathbf{A}_2 = \mathbf{A} \cap [1-a\,,1[\,,$$
$$\mathbf{B}_1 = T_a(\mathbf{A}_1), \mathbf{B}_2 = T_{a-1}(\mathbf{A}_2) \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mathbf{A} + a \pmod 1,$$

on peut écrire $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2$. Puisque m^* est invariante par translation, on a

$$m^*(\mathbf{B}_1) = m^*(\mathbf{A}_1) \quad \text{et} \quad m^*(\mathbf{B}_2) = m^*(\mathbf{A}_2).$$

Il découle de **II.1.5** (voir la solution) que

$$\begin{aligned} m^*(\mathbf{A}) &= m^*\left(\mathbf{A} \cap ([0\,,1-a[\cup [1-a\,,1[)\right) \\ &= m^*(\mathbf{A}_1) + m^*(\mathbf{A}_2). \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} m^*(\mathbf{B}) = m^*(\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2) &= m^*\left((\mathbf{B}_1 \cap [a\,,1[) \cup (\mathbf{B}_2 \cap [0\,,a[)\right) \\ &= m^*\left(\mathbf{B}_1 \cap [a\,,1[\right) + m^*\left(\mathbf{B}_2 \cap [0\,,a[\right), \end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de **II.1.5**. Il s'ensuit que

$$m^*(\mathbf{B}) = m^*(\mathbf{A}_1) + m^*(\mathbf{A}_2) = m^*(\mathbf{A}).$$

II.1.44. On adopte ici la notation introduite dans la solution du problème précédent.

Si $\mathbf{A}$ est mesurable, il en est de même de $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ et, puisque m est invariante par translation, les ensembles $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$ sont aussi mesurables. La mesurabilité de $\mathbf{A} + a \pmod 1$ découle donc de l'égalité

$$\mathbf{A} + a \,(\mathrm{mod} 1) = \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2.$$

D'autre part, si $\mathbf{B}$ est mesurable, alors $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} \cap [a\,,1[$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B} \cap [0\,,a[$ et les ensembles $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$ sont aussi mesurables. Puisque $\mathbf{A}_1 = T_{-a}(\mathbf{B}_1)$, $\mathbf{A}_2 = T_{1-a}(\mathbf{B}_2)$ et $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2$, la mesurabilité de $\mathbf{A}$ s'en déduit.

II.1.45. Supposons, contrairement à la proposition à démontrer, que $\mathbf{V}$ est un ensemble mesurable. Soit $\{r_n\}$ une suite énumérant les rationnels de $[0\,,1[$ telle que $r_0 = 0$. On définit $\mathbf{V}_n = \mathbf{V} + r_n \pmod 1$. D'après le résultat du problème précédent, chaque $\mathbf{V}_n$ est aussi mesurable et $m(\mathbf{V}_n) = m(\mathbf{V})$. On prouve maintenant que les $\mathbf{V}_n$ sont deux à deux disjoints et que $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbf{V}_n = [0\,,1[$. En effet, si $x \in \mathbf{V}_i \cap \mathbf{V}_j$, alors $x = v_i + r_i \pmod 1$ et $x = v_j + r_j \pmod 1$, v_i et v_j appartenant à $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0$. En conséquence, $v_i - v_j \in \mathbb{Q}$ ce qui implique que $v_i \sim v_j$, donc que $i = j$. Ceci montre que $\mathbf{V}_i \cap \mathbf{V}_j = \varnothing$ si $i \neq j$. Puisque chaque $x \in [0\,,1[$ se trouve dans une classe d'équivalence, x diffère modulo 1 d'un élément de $\mathbf{V}$ par un nombre rationnel, par exemple $r_k \in [0\,,1[$. Donc

$x \in \mathbf{V}_k$, ce qui prouve que $[0\,,1[\ \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbf{V}_n$. L'inclusion opposée est évidente. Il s'ensuit alors que

$$1 = m\left([0\,,1[\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(\mathbf{V}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(\mathbf{V})$$

et le dernier membre de cette égalité est soit nul, soit infini, selon que $m(\mathbf{V})$ est nul ou strictement positif, ce qui induit une contradiction.

II.1.46. Soit $\{r_n\}$ une suite énumérant les rationnels de $[0\,,1[$ telle que $r_0 = 0$. On pose $\mathbf{A}_n = \mathbf{A} + r_n \pmod 1$. Chaque $\mathbf{A}_n$ est alors mesurable et $m(\mathbf{A}_n) = m(\mathbf{A})$. Puisque $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$, les ensembles $\mathbf{A}_n$ sont deux à deux disjoints (voir la solution du problème précédent). D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} m(\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(\mathbf{A}_n) = m\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbf{A}_n\right) \leqslant m\left([0\,,1[\right) = 1,$$

ce qui donne $m(\mathbf{A}) = 0$.

II.1.47. [M. Machover, *Amer. Math. Monthly*, 74(1967), 1080-1081]. On pose $\mathbf{A} = [-2\,,-1]$ et $\mathbf{B} = [2\,,3]$ et on appelle $\mathbf{V}$ l'ensemble de Vitali défini en **II.1.45**. Le résultat précédent implique $m_*(\mathbf{V}) = 0$. Puisque $\mathbf{V}$ n'est pas mesurable, $m^*(\mathbf{V}) > 0$. D'après **II.1.6**,

$$m^*(\mathbf{A} \cup \mathbf{V}) = m(\mathbf{A}) + m^*(\mathbf{V}), \quad m^*(\mathbf{B} \cup \mathbf{V}) = m(\mathbf{B}) + m^*(\mathbf{V}),$$
$$m^*((\mathbf{A} \cup \mathbf{V}) \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{V})) = m(\mathbf{A}) + m(\mathbf{B}) + m^*(\mathbf{V}).$$

D'autre part, on a

$$m_*(\mathbf{A} \cup \mathbf{V}) + m_*(\mathbf{B} \cup \mathbf{V}) = m_*((\mathbf{A} \cup \mathbf{V}) \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{V})).$$

Cette égalité se déduit du fait que si $\mathbf{A}$ est un ensemble mesurable et $m_*(\mathbf{V}) = 0$, alors $m_*(\mathbf{A} \cup \mathbf{V}) = m(\mathbf{A})$. En effet, si $\mathbf{M}$ est mesurable et $\mathbf{M} \subset \mathbf{A} \cup \mathbf{V}$, alors $\mathbf{M} \setminus \mathbf{A}$ est un sous-ensemble mesurable de $\mathbf{V}$ et $m(\mathbf{M} \setminus \mathbf{A}) = 0$. Donc $m(\mathbf{M}) = m(\mathbf{M} \cap \mathbf{A}) \leqslant m(\mathbf{A})$, ce qui montre que $m_*(\mathbf{A} \cup \mathbf{V}) \leqslant m(\mathbf{A})$.

II.1.48. Soit $\mathbf{A}$ un ensemble de mesure extérieure strictement positive. On suppose d'abord que $\mathbf{A} \subset [0\,,1[$ et on pose alors $\mathbf{B}_n = \mathbf{A} \cap \mathbf{V}_n$, où les $\mathbf{V}_n$ sont définis dans la solution de **II.1.45**. On note que si $\mathbf{B}_n$ est mesurable, alors $m(\mathbf{B}_n) = 0$. En effet, $\mathbf{B}_n = \mathbf{B} + r_n \pmod 1$, où $\mathbf{B}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{V}$. D'après **II.1.43**, $m^*(\mathbf{B}_n) = m^*(\mathbf{B})$ et, d'après **II.1.44**, $\mathbf{B}_n$ est mesurable si et seulement si $\mathbf{B}$ est mesurable. D'autre part, d'après le résultat du problème précédent, si $\mathbf{B}$ est mesurable, alors $m(\mathbf{B}) = 0$. Enfin, si tous les $\mathbf{B}_n$ sont mesurables, alors $0 = m\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbf{B}_n\right) = m^*(\mathbf{A}) > 0$, contradiction. Ceci signifie qu'au moins un des $\mathbf{B}_n$ n'est pas mesurable. Si maintenant $\mathbf{A}$ n'est pas inclus dans $[0\,,1[$, il existe alors un intervalle $[-k\,,k[$ tel que $\mathbf{A}\cap[-k\,,k[$ soit de mesure extérieure strictement positive. On peut appliquer une analyse semblable à celle utilisée dans la solution de **II.1.45** pour construire un ensemble non mesurable inclus dans $[-k\,,k[$ et on peut donc reproduire le raisonnement précédent.

II.1.49. On pose $\mathbf{A}_n = \mathbf{V}_n$, les $\mathbf{V}_n$ étant définis dans la solution de **II.1.45**. Puisque les $\mathbf{A}_n$ ne sont pas mesurables, $m^*(\mathbf{A}_n) > 0$ (comparez avec **II.1.1**). De plus, tous les $\mathbf{A}_n$ ont la même mesure extérieure. Donc,

$$1 = m\left([0\,,1[\right) = m^*\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbf{A}_n\right) < \sum_{n=0}^{+\infty} m^*(\mathbf{A}_n) = +\infty.$$

II.1.50. On pose $\mathbf{A}_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} \mathbf{V}_k$, les $\mathbf{V}_k$ étant définis dans la solution de **II.1.45**. Clairement, $\{\mathbf{A}_n\}$ est une suite décroissante. Les ensembles $\mathbf{V}_k$ étant deux à deux disjoints, on voit que $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathbf{A}_n = \varnothing$. De plus,

$$m^*(\mathbf{A}_n) \geqslant m^*(\mathbf{V}_n) = m^*(\mathbf{V}) = a > 0.$$

Donc,

$$0 = m^*\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathbf{A}_n\right) < \lim_{n\to+\infty} m^*(\mathbf{A}_n) \geqslant a > 0.$$

II.1.51. On suppose d'abord que $m(\mathbf{A})$ est finie. D'après la définition de la mesure de Lebesgue, étant donné $\alpha \in\,]0\,,1[$, il existe une suite $\{\mathbf{I}_n\}$ d'intervalles ouverts tels que $\mathbf{A} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{I}_n$ et

$$\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} |\mathbf{I}_n| \leqslant m(\mathbf{A}),$$

d'où

$$\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} |\mathbf{I}_n| \leqslant m\left(\mathbf{A} \cap \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{I}_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m(\mathbf{A}\cap\mathbf{I}_n).$$

Il existe donc n_0 tel que $\alpha\,|\mathbf{I}_{n_0}| \leqslant m(\mathbf{A}\cap\mathbf{I}_{n_0})$. En prenant $\alpha = \frac{3}{4}$, on trouve un intervalle ouvert tel que $\frac{3}{4}\,|\mathbf{I}| \leqslant m(\mathbf{A}\cap\mathbf{I})$. On pose $\delta = \frac{1}{2}\,|\mathbf{I}|$. Si $|x| < \delta$, alors

$$(\mathbf{A}\cap\mathbf{I}) \cup ((\mathbf{A}\cap\mathbf{I}) + x) \subset \mathbf{I} \cup (\mathbf{I} + x)$$

et $\mathbf{I} \cup (\mathbf{I} + x)$ est un intervalle dont la longueur est inférieure à $\frac{3}{2}|\mathbf{I}|$. On montre maintenant que $(\mathbf{A} \cap \mathbf{I}) \cap ((\mathbf{A} \cap \mathbf{I}) + x) \neq \varnothing$. En effet, si $(\mathbf{A} \cap \mathbf{I}) \cap ((\mathbf{A} \cap \mathbf{I}) + x) = \varnothing$, alors

$$m((\mathbf{A} \cap \mathbf{I}) \cup ((\mathbf{A} \cap \mathbf{I}) + x)) = 2m(\mathbf{A} \cap \mathbf{I}) \geqslant \frac{3}{2}|\mathbf{I}|,$$

contradiction. Si $m(\mathbf{A}) = +\infty$, d'après ce que l'on a prouvé, la proposition est alors vérifiée pour $\mathbf{A} \cap [-n, n]$ et, en conséquence, aussi pour $\mathbf{A}$.

II.1.52. On sait que $m^*(\mathbf{A}_n) > 0$. Si $\mathbf{A}_n$ était mesurable, d'après le problème précédent, il existerait $\delta > 0$ tel que $\mathbf{A}_n \cap (\mathbf{A}_n + x) \neq \varnothing$ dès que $|x| < \delta$. On choisit un tel x rationnel, différent de $r_i - r_j$, $r_i - r_j + 1$, $r_i - r_j - 1$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ (voir la solution du **problème II.1.45**). Il existe $y \in \mathbf{A}_n \cap (\mathbf{A}_n + x)$, c'est à dire, $y = v_k + r_k \pmod 1 = x + v_i + r_i \pmod 1$, où v_k et v_i appartiennent à l'ensemble de Vitali $\mathbf{V}$ défini en **II.1.45**. Puisque $v_k - v_i$ est irrationnel, il en est de même de x, contradiction.

II.1.53. Supposons, contrairement à ce qui est annoncé, que $m(\mathbf{A}^c) > 0$. Par définition de la mesure de Lebesgue, étant donné $\alpha \in]0, 1[$, il existe une suite $\{\mathbf{I}_n\}$ d'intervalles ouverts telle que $\mathbf{A}^c \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{I}_n$ et

$$\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} |\mathbf{I}_n| \leqslant m(\mathbf{A}^c),$$

d'où

$$\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} |\mathbf{I}_n| \leqslant m\left(\mathbf{A}^c \cap \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{I}_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m(\mathbf{A}^c \cap \mathbf{I}_n).$$

Il existe donc n_0 tel que $\alpha |\mathbf{I}_{n_0}| \leqslant m(\mathbf{A}^c \cap \mathbf{I}_{n_0})$. Ceci, combiné à la condition donnée, implique

$$|\mathbf{I}_{n_0}| = m(\mathbf{A} \cap \mathbf{I}_{n_0}) + m(\mathbf{A}^c \cap \mathbf{I}_{n_0}) \geqslant (c + \alpha)|\mathbf{I}_{n_0}|. \tag{$*$}$$

Puisque $0 < c \leqslant 1$, on peut choisir $\alpha \in]0, 1[$ tel que $c + \alpha > 1$, ce qui montre que $(*)$ est impossible.

II.1.54. On définit les ensembles $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ comme suit :

$$\mathbf{A}_0 = \left\{r + n\sqrt{2} : r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$\mathbf{A}_1 = \left\{r + 2n\sqrt{2} : r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$\mathbf{A}_2 = \left\{r + (2n+1)\sqrt{2} : r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

On a $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 + \sqrt{2}$ et $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2$. On définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ en posant $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in \mathbf{A}_0$. D'après l'axiome de choix, il existe un ensemble $\mathbf{B}$ contenant exactement un élément de chaque classe d'équivalence de la relation $\sim$. On pose

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{A}_1 = \{b + a_1 : b \in \mathbf{B}, a_1 \in \mathbf{A}_1\}.$$

Soit $\mathbf{C}$ un sous-ensemble mesurable de $\mathbf{A}$, on suppose que $m(\mathbf{C}) > 0$. D'après le résultat de **II.1.51**, il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbf{C} \cap (\mathbf{C} + x)$ ne soit pas vide dès que $|x| < \delta$. Ceci implique que $\mathbf{A} \cap (\mathbf{A} + x)$ n'est pas vide dès que $|x| < \delta$. Puisque $\mathbf{A}_2$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un $x \in \mathbf{A}_2$ tel que $|x| < \delta$. Puisque $\mathbf{A} \cap (\mathbf{A} + x)$ n'est pas vide, il existe $y = x + b_1 + a_1 = b_2 + a_1'$ pour certains $b_1, b_2 \in \mathbf{B}$ et $a_1, a_1' \in \mathbf{A}_1$. D'où, $b_2 - b_1 \in \mathbf{A}_0$ et donc $b_2 = b_1$. En conséquence, $x = a_1' - a_1$ ne peut pas être un élément de $\mathbf{A}_2$, contradiction. Ceci prouve que chaque sous-ensemble mesurable de $\mathbf{A}$ est de mesure de Lebesgue nulle. On vérifie facilement que $\mathbf{A}^c = \mathbf{B} + \mathbf{A}_2$. Donc, $\mathbf{A}^c = \mathbf{A} + \sqrt{2}$, d'où il découle que chaque sous-ensemble mesurable de $\mathbf{A}^c$ est de la forme $\mathbf{C} + \sqrt{2}$, où $\mathbf{C}$ est un sous-ensemble Lebesgue-mesurable de $\mathbf{A}$. Il s'ensuit que chaque sous-ensemble mesurable de $\mathbf{A}^c$ est de mesure de Lebesgue nulle.

On remarquera ici que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^c$ sont des ensembles non mesurables.

II.1.55. On suppose que f est Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$ et, pour $\varepsilon > 0$, on pose $\mathbf{J}_\varepsilon = \{x : o_f(x) \geqslant \varepsilon\}$, où $o_f(x)$ représente l'oscillation de f en x (voir, par exemple, **I.7.12 (vol. II)**). On déduit du résultat de **I.7.18** que $|\mathbf{J}_\varepsilon| = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, où $|\mathbf{J}_\varepsilon| = 0$ est la mesure de Jordan de $\mathbf{J}_\varepsilon$. Si x est un point de discontinuité de f, alors $o_f(x) \neq 0$ (voir, par exemple, **I.7.12 (vol. II)**). Ceci implique qu'il existe un entier strictement positif n tel que $o_f(x) \geqslant \frac{1}{n}$. En conséquence, l'ensemble $\mathbf{D}$ des points de discontinuité de f vérifie

$$\mathbf{D} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{J}_{1/n}.$$

Puisque $\left|\mathbf{J}_{1/n}\right|^* = 0$, on a aussi $m^*(\mathbf{J}_{1/n}) = 0$ et $m^*(\mathbf{D}) = m(\mathbf{D}) = 0$. Pour prouver que la condition est suffisante, on suppose que $m^*(\mathbf{D}) = m(\mathbf{D}) = 0$. D'après le résultat de **I.7.18**, il suffit de montrer que $|\mathbf{J}_\varepsilon| = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathbf{J}_\varepsilon \subset \mathbf{D}$, on a $m^*(\mathbf{J}_\varepsilon) = 0$. Donc, étant donné $\delta > 0$, il existe un recouvrement de $\mathbf{J}_\varepsilon$ par des intervalles ouverts $\{\mathbf{I}_n\}$ tels que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\mathbf{I}_n| < \delta$. Puisque $\mathbf{J}_\varepsilon$ est un ensemble compact (voir, par exemple, **I.7.13 (vol. II)**), d'après le théorème de Heine-Borel, il existe un sous-recouvrement fini $\bigcup_{k=1}^{N} \mathbf{I}_{n_k}$. Ceci montre que $|\mathbf{J}_\varepsilon|^* < \delta$. On obtient $|\mathbf{J}_\varepsilon|^* = 0$ en faisant tendre δ vers 0.

II.1.56. [Leo M. Levine, Amer. Math. Monthly 84 (1977), 205]. On démontre d'abord que $\mathbf{D} \cap \mathbf{L}$ est dénombrable. Comme dans la solution du problème précédent, on pose $\mathbf{J}_{1/n} = \left\{x \in [a\,,b] : o_f(x) > \frac{1}{n}\right\}$. Puisque $\mathbf{D} \cap \mathbf{L} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{J}_{1/n} \cap \mathbf{L})$, il suffit de prouver que chacun des ensembles $\mathbf{J}_{1/n} \cap \mathbf{L}$ est dénombrable. Si $x_0 \in \mathbf{J}_{1/n} \cap \mathbf{L}$, il existe alors $\delta > 0$ tel que

$$\left|f(x) - f(x_0^-)\right| < \frac{1}{2n}$$

pour $x \in \,]x_0 - \delta\,, x_0[$. D'où,

$$|f(z) - f(u)| < \frac{1}{n}$$

pour $z, u \in \,]x_0 - \delta\,, x_0[$. En conséquence, si $x \in \,]x_0 - \delta\,, x_0[$, alors $o_f(x) \leqslant \frac{1}{n}$, de sorte que $x \notin \mathbf{J}_{1/n}$. Tout point de $\mathbf{J}_{1/n} \cap \mathbf{L}$ est donc l'extrémité droite d'un intervalle ouvert ne contenant aucun point de $\mathbf{J}_{1/n} \cap \mathbf{L}$. Puisque ces intervalles ouverts sont disjoints, les points considérés forment un ensemble dénombrable. $\mathbf{J}_{1/n} \cap \mathbf{L}$ est donc dénombrable.

Puisque $\mathbf{D} = (\mathbf{D} \cap \mathbf{L}) \cup (\mathbf{D} \cap \mathbf{L}^c) = (\mathbf{D} \cap \mathbf{L}) \cup ([a\,,b] \setminus \mathbf{L})$ et $m(\mathbf{D} \cap \mathbf{L}) = 0$, le critère d'intégrabilité au sens de Riemann énoncé dans ce problème est une conséquence du critère de Lebesgue énoncé au problème précédent.

II.1.57. On remarque d'abord que l'ensemble $\mathbf{A}$ est fermé donc Lebesgue-mesurable car f est continue. De plus, $\mathbf{A}' = \{h \in [0\,,1] : 1 - h \in \mathbf{A}\}$ a la même mesure de Lebesgue. Notre but est de prouver que $\mathbf{A} \cup \mathbf{A}' = [0\,,1]$. Pour $h \in [0\,,1]$, on pose

$$g(x) = \begin{cases} f(x+h) - f(x) & \text{si } x + h \leqslant 1, \\ f(x+h-1) - f(x) & \text{si } x + h > 1. \end{cases}$$

Par hypothèse, g est continue sur $[0\,,1]$. Si f atteint son minimum et son maximum respectivement en x_0 et en x_1, alors $g(x_0) \geqslant 0$ et $g(x_1) \leqslant 0$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, il existe x_2 tel que $g(x_2) = 0$. Il s'ensuit que h est soit dans $\mathbf{A}$, soit dans $\mathbf{A}'$.

II.2. Fonctions mesurables au sens de Lebesgue

II.2.1. Si f est mesurable, les ensembles $\{x : f(x) > c\}$ et $\{x : f(x) < -c\}$ sont alors mesurables pour tout réel c et il en est de même de

$$\{x : |f(x)| > c\} = \{x : f(x) > c\} \cup \{x : f(x) < -c\} .$$

L'exemple suivant montre que l'implication réciproque est fausse. Soit $\mathbf{A}$ un ensemble mesurable et $\mathbf{V}$ un sous-ensemble non mesurable de $\mathbf{A}$. La fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{V}, \\ -1 & \text{si } x \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{V} \end{cases}$$

est alors non mesurable bien que $|f|$ le soit.

II.2.2. On prend pour f une fonction définie comme dans le problème précédent et $g = -f$.

II.2.3. Soit $\mathbf{V}$ un sous-ensemble non mesurable de $[0\,,1]$. On considère la fonction f définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbf{V}, \\ -x & \text{si } x \in [0\,,1] \setminus \mathbf{V}. \end{cases}$$

Les ensembles $f^{-1}(c)$ sont alors soit vides, soit réduits à un élément et sont donc mesurables, alors que la fonction f n'est pas mesurable.

II.2.4. Étant donné un réel a, il existe une suite croissante $\{c_n\}$ d'éléments de $\mathbf{C}$ telle que $a = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$. Donc,

$$\{x \in \mathbf{A} : f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{x \in \mathbf{A} : f(x) \geqslant c_n\}$$

est un ensemble mesurable.

II.2.5. On suppose d'abord que $f^{-1}(\mathbf{G})$ est mesurable pour tout ouvert $\mathbf{G} \subset \mathbb{R}$. Alors, en particulier, $f^{-1}(]c\,,+\infty[)$ est mesurable pour tout réel c. D'autre part, chaque ensemble ouvert $\mathbf{G}$ est une union dénombrable d'intervalles ouverts

$$\mathbf{G} = \bigcup_{n=1}^{+\infty}]a_n\,,b_n[\,, \quad (a_n, b_n \in \mathbb{R},\ a_n < b_n)$$

et, puisque $f^{-1}(]a_n\,,b_n[) = f^{-1}(]-\infty\,,b_n[) \cap f^{-1}(]a_n\,,+\infty[)$ est un ensemble mesurable, il en est de même de $f^{-1}(\mathbf{G})$.

II.2.6. L'ensemble $\mathfrak{A} = \left\{\mathbf{A} \subset \mathbb{R} : f^{-1}(\mathbf{A}) \in \mathfrak{M}\right\}$, où $\mathfrak{M}$ est la σ-algèbre de tous les ensembles Lebesgue-mesurables de $\mathbb{R}$, est une σ-algèbre. D'après le résultat du problème précédent, les ensembles ouverts appartiennent à $\mathfrak{A}$ et, puisque la collection $\mathfrak{B}$ des boréliens est la plus petite σ-algèbre contenant tous les ensembles ouverts de $\mathbb{R}$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$.

II.2.7. Soit f une fonction continue sur l'ensemble mesurable $\mathbf{A}$ et c un nombre réel. On doit montrer que $\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{A} : f(x) > c\}$ est un sous-ensemble mesurable de $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{B}$ est vide, il est alors mesurable. Sinon, si $x \in \mathbf{B}$, par continuité, $f(x) > c$ dans un voisinage de x, par exemple $]x - \delta(x)\,, x + \delta(x)[\cap \mathbf{A}$. En conséquence,

$$\mathbf{B} = \bigcup_{x\in\mathbf{B}} \big(]x - \delta(x)\,, x + \delta(x)[\cap \mathbf{A}\big) = \left(\bigcup_{x\in\mathbf{B}}]x - \delta(x)\,, x + \delta(x)[\right) \cap \mathbf{A}.$$

Ceci montre que $\mathbf{B}$, comme intersection d'un ensemble ouvert et de l'ensemble mesurable $\mathbf{A}$, est lui aussi mesurable.

II.2.8. On doit prouver que $\{x \in \mathbf{A} : g(x) > c\}$ est un sous-ensemble mesurable de $\mathbf{A}$ pour tout réel c. On pose pour cela $\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{A} : f(x) \neq g(x)\}$. Puisque

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbf{A} : g(x) > c\} &= \{x \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{B} : g(x) > c\} \cup \{x \in \mathbf{B} : g(x) > c\}\\ &= \{x \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{B} : f(x) > c\} \cup \{x \in \mathbf{B} : g(x) > c\}\\ &= (\{x \in \mathbf{A} : f(x) > c\} \cap (\mathbf{A} \setminus \mathbf{B})) \cup \{x \in \mathbf{B} : g(x) > c\}\,,\end{aligned}$$

on voit que l'ensemble $\{x \in \mathbf{A} : g(x) > c\}$ est mesurable.

II.2.9. Il s'agit d'une conséquence immédiate de **II.2.7**, **II.1.55** et **II.2.8**.

II.2.10. On sait que toute fonction à variation bornée sur $[a\,,b]$ est la différence de deux fonctions monotones et, d'après le résultat de **I.1.21**, elle est Riemann-intégrable sur cet intervalle. Le résultat découle donc du problème précédent.

II.2.11. On prouve d'abord que φ envoie l'ensemble de Cantor sur $[0\,,1]$. En effet, tout élément de $[0\,,1]$ peut s'écrire sous la forme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{2^n}$ où $b_n = 0$ ou 1. Donc,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{2^n} = \varphi\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2b_n}{3^n}\right).$$

On note maintenant que la fonction de Cantor φ est constante sur chaque intervalle ouvert qui est retiré dans la construction de l'ensemble de Cantor $\mathbf{C}$ (voir, par exemple, **I.3.1 (vol. II)** pour la construction de $\mathbf{C}$). Puisque $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \varphi\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$, on a

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad x \in \left]\frac{1}{3}\,,\frac{2}{3}\right[.$$

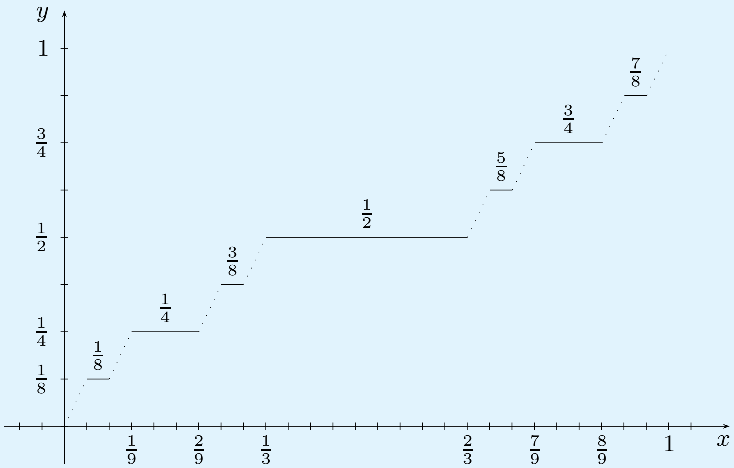
De plus, puisque $\varphi\left(\frac{1}{9}\right) = \varphi\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{1}{4}$ et $\varphi\left(\frac{7}{9}\right) = \varphi\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{3}{4}$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2^2} \quad \text{pour} \quad x \in \left]\frac{1}{3^2}\,,\frac{2}{3^2}\right[, \quad \varphi(x) = \frac{3}{2^2} \quad \text{pour} \quad x \in \left]\frac{7}{3^2}\,,\frac{8}{3^2}\right[.$$

Par récurrence, la fonction φ prend successivement les valeurs

$$\frac{1}{2^n}\,,\frac{3}{2^n}\,,\frac{5}{2^n}\,,\ldots\,,\frac{2^n-1}{2^n}$$

sur les intervalles retirés à la n-ième étape de la construction de $\mathbf{C}$. Le graphe de φ est esquissé ci-dessous.



Il s'ensuit que la fonction de Cantor φ est croissante. On montre maintenant qu'elle est continue. Puisque φ est croissante, pour tout $x_0 \in \,]0\,,1[$, on a $\varphi(x_0^-) \leqslant \varphi(x_0) \leqslant \varphi(x_0^+)$ (voir, par exemple, **I.1.35 (vol. II)**). Si, par exemple, $\varphi(x_0^-) < \varphi(x_0)$, alors φ ne prend aucune valeur dans l'intervalle

$]\varphi(x_0^-), \varphi(x_0)[$. Mais par ailleurs, $\varphi(\mathbf{C}) = [0,1]$, contradiction. On peut montrer de même que φ est continue en 0 et en 1. Puisque φ est une fonction constante sur chaque intervalle ouvert enlevé dans la construction de l'ensemble de Cantor et que celui-ci est de mesure de Lebesgue nulle, $\varphi'(x) = 0$ presque partout sur $[0,1]$.

II.2.12. On rappelle d'abord que si f est une application bijective de $\mathbf{X}$ sur $\mathbf{Y}$, on a alors, pour $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbf{X}$,

$$f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = f(\mathbf{A}) \cap f(\mathbf{B}) \quad \text{et} \quad f(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) = f(\mathbf{A}) \setminus f(\mathbf{B}).$$

On pose

$$\mathfrak{A} = \{\mathbf{A} \subset \mathbb{R} : f(\mathbf{A}) \in \mathfrak{B}\},$$

où $\mathfrak{B}$ représente la collection des ensembles boréliens. On prouve que $\mathfrak{A}$ est une σ-algèbre si f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet, si $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}$, alors $\mathbf{A}^c \in \mathfrak{A}$ car $f(\mathbf{A}^c) = f(\mathbb{R} \setminus \mathbf{A}) = \mathbb{R} \setminus f(\mathbf{A})$. De plus, si $\{\mathbf{A}_n\}$ est une suite d'ensembles de $\mathfrak{A}$, alors $f\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f(\mathbf{A}_n)$, ce qui prouve que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n \in \mathfrak{A}$. Puisque f est strictement monotone (voir, par exemple, **I.3.16 (vol. II)**), on a $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ ou $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$. $\mathfrak{A}$ contient donc tous les intervalles fermés, donc tous les boréliens.

II.2.13.

(a) Soit φ la fonction de Cantor définie en **II.2.11**. On prolonge cette fonction à $\mathbb{R}$ tout entier en posant $\varphi(x) = 0$ si $x < 0$ et $\varphi(x) = 1$ si $x > 1$ et on pose $f(x) = x + \varphi(x)$. L'application f est alors continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. D'après le résultat du précédent problème, f envoie les ensembles boréliens sur des ensembles boréliens. On pose $\mathbf{C} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty}]a_n, b_n[$, où $\{]a_n, b_n[\}$ est la suite des intervalles qui ont été enlevés durant la construction de l'ensemble de Cantor $\mathbf{C}$. On montre que $m(f(\mathbf{C})) = 1$. Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned} m(f([0,1] \setminus \mathbf{C})) &= m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} f(]a_n, b_n[)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} m\left(f(]a_n, b_n[)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} m(]a_n + \varphi(a_n), b_n + \varphi(b_n)[) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} m(]a_n, b_n[) = 1. \end{aligned}$$

Puisque l'image de $[0\,,1]$ par f est $[0\,,2]$, on obtient

$$2 = m([0\,,2]) = m(f(\mathbf{C})) + m(f([0\,,1] \setminus \mathbf{C})) = m(f(\mathbf{C})) + 1.$$

Donc $m(f(\mathbf{C})) = 1$. D'après le résultat de **II.1.48**, il existe un ensemble non mesurable $\mathbf{V}$ contenu dans $f(\mathbf{C})$. Mais alors $\mathbf{A} = f^{-1}(\mathbf{V}) \subset \mathbf{C}$ est mesurable alors que son image $f(\mathbf{A}) = f(f^{-1}(\mathbf{V})) = \mathbf{V}$ ne l'est pas.

(b) Il suffit de prendre $g = f^{-1}$ où f est une fonction définie comme précédemment.

II.2.14. On remarque que l'ensemble $\mathbf{A} = f^{-1}(\mathbf{V})$ construit dans la solution du problème précédent est un exemple d'ensemble mesurable qui n'est pas un borélien. En effet, s'il s'agissait d'un borélien, alors d'après le résultat de **II.2.12**, $f(\mathbf{A}) = \mathbf{V}$ serait aussi un borélien, contradiction.

II.2.15. On suppose d'abord que la fonction continue f vérifie la condition

$$\mathbf{E} \subset [a\,,b] \quad \text{et} \quad m(\mathbf{E}) = 0 \quad \text{implique} \quad m(f(\mathbf{E})) = 0. \tag{$*$}$$

Si $\mathbf{A} \subset [a\,,b]$ est mesurable, il existe alors un $\mathcal{F}_\sigma$-ensemble $\mathbf{F} \subset \mathbf{A}$ et un ensemble $\mathbf{E} \subset [a\,,b]$ de mesure nulle tels que $\mathbf{A} = \mathbf{F} \cup \mathbf{E}$ (voir **II.1.12**). Puisque $f(\mathbf{A}) = f(\mathbf{F}) \cup f(\mathbf{E})$, où $f(\mathbf{F})$ est un $\mathcal{F}_\sigma$-ensemble et $m(f(\mathbf{E})) = 0$, $f(\mathbf{A})$ est mesurable. On suppose maintenant que l'image $f(\mathbf{A})$ de tout ensemble mesurable $\mathbf{A}$ est mesurable. Si la condition $(*)$ n'est pas vérifiée, il existe alors $\mathbf{E}_0$ de mesure nulle tel que $m(f(\mathbf{E}_0)) > 0$. D'après **II.1.45**, il existe un ensemble non mesurable $\mathbf{V} \subset f(\mathbf{E}_0)$, contradiction.

II.2.16. Pour tout réel c, on a

$$(f \circ g)^{-1}\left(]-\infty\,,c[\right) = g^{-1}\left(f^{-1}\left(]-\infty\,,c[\right)\right).$$

Par continuité de f, l'ensemble $f^{-1}\left(]-\infty\,,c[\right)$ est ouvert dans $g(\mathbf{A})$, autrement dit, $f^{-1}\left(]-\infty\,,c[\right) = g(\mathbf{A}) \cap \mathbf{G}$, où $\mathbf{G}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. En conséquence,

$$(f \circ g)^{-1}\left(]-\infty\,,c[\right) = g^{-1}(g(\mathbf{A}) \cap \mathbf{G}) = \mathbf{A} \cap g^{-1}(\mathbf{G})$$

est un ensemble mesurable.

II.2.17. L'exemple suivant montre que la réponse est NON. Soit f la fonction définie dans la solution de **II.2.13(a)**. cette fonction est strictement croissante et continue sur $[0,1]$ et l'image de $[0,1]$ par f est $[0,2]$. De plus, puisque $m(f(\mathbf{C})) = 1$, $\mathbf{C}$ étant l'ensemble de Cantor, il existe un ensemble non mesurable $\mathbf{V} \subset f(\mathbf{C})$ (voir **II.1.48**). Il est aussi clair que $\mathbf{A} = f^{-1}(\mathbf{V}) \subset \mathbf{C}$ est mesurable. On pose maintenant $g(x) = f^{-1}(x)$ pour $x \in [0,2]$ et on note $h = \chi_{\mathbf{A}}$ la fonction caractéristique de $\mathbf{A}$. Pour voir que $h \circ g$ n'est pas mesurable, on observe que

$$\{x \in [0,2] : (h \circ g)(x) > 0\} = \mathbf{V}.$$

II.2.18. Il suffit d'utiliser les résultats de **II.2.5** et **II.2.6** et le fait que

$$(f \circ g)^{-1}(\mathbf{G}) = g^{-1}\left(f^{-1}(\mathbf{G})\right).$$

On notera ici que le résultat de **II.2.16** est un cas particulier de **II.2.18**.

II.2.19. Soit f la fonction définie dans la solution de **II.2.13(a)**. L'image de $[0,1]$ par f est $[0,2]$ et $m(f(\mathbf{C})) = 1$, $\mathbf{C}$ étant l'ensemble de Cantor. D'après le résultat de **II.1.48**, il existe un ensemble non mesurable $\mathbf{V} \subset f(\mathbf{C})$. De plus, puisque $\mathbf{A} = f^{-1}(\mathbf{V}) \subset \mathbf{C}$, l'ensemble $\mathbf{A}$ est mesurable. On peut supposer, sans perte de généralité, que $0, 1 \in \mathbf{A}$. On définit

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbf{A}, \\ 2 + f(x) & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbf{A} \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in [0,1], \\ f_1(x-1) + 2 & \text{si } x \in (\mathbf{A}+1) \setminus \{1\}, \\ f_1(x-1) - 2 & \text{si } x \in ([0,1] \setminus \mathbf{A}) + 1. \end{cases}$$

L'application g est alors bijective de $[0,2]$ sur $[0,4]$. Puisque $\mathbf{A}$ est un ensemble mesurable et que f est une fonction mesurable, g est aussi mesurable. Pour prouver que g^{-1} n'est pas mesurable, on observe d'abord que

$$g([0,1]) = g(\mathbf{A}) \cup g([0,1] \setminus \mathbf{A}) = \mathbf{V} \cup (2 + ([0,2] \setminus \mathbf{V})).$$

Ceci signifie que

$$\left(g^{-1}\right)^{-1}([0,1]) = \mathbf{V} \cup (2 + ([0,2] \setminus \mathbf{V})).$$

Si $(g^{-1})^{-1}([0,1])$ est mesurable, alors l'ensemble

$$\left(g^{-1}\right)^{-1}([0,1]) \setminus [2,4] = \mathbf{V} \setminus \{2\}$$

l'est aussi, contradiction.

II.2.20. On prolonge la fonction f en posant $f(x) = f'(b)(x-b) + f(b)$ pour $x > b$ de sorte que la fonction prolongée soit dérivable sur $[a\,,+\infty[$. On observe alors que

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$$

pour $x \in [a\,,b]$. Le résultat découle du **théorème 3** et de **II.2.7**.

II.2.21. On pose

$$\mathbf{A}_n = \{x \in \mathbf{A} : |f(x)| > n\}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Si $\mathbf{C} = \{x \in \mathbf{A} : |f(x)| = +\infty\}$, par hypothèse, $m(\mathbf{C}) = 0$. De plus,

$$\mathbf{A}_1 \supset \mathbf{A}_2 \supset \mathbf{A}_3 \supset \cdots \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n.$$

D'après le résultat de **II.1.17**, $\lim\limits_{n\to+\infty} m(\mathbf{A}_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} m(\mathbf{C}) = 0$. D'où, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $m(\mathbf{A}_{n_0}) < \varepsilon$. On pose donc $\mathbf{B} = \mathbf{A} \setminus \mathbf{A}_{n_0}$.

II.2.22. Par hypothèse, il existe $\mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A}$ tel que $m(\mathbf{A}_0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \setminus \mathbf{A}_0$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x), \quad |f_n(x)| < +\infty,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour des entiers strictement positifs m et n, on définit

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= \left\{x \in \mathbf{A}_1 : |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \quad \text{pour tout } j \geqslant n\right\} \\ &= \bigcap_{j=n}^{+\infty} \left\{x \in \mathbf{A}_1 : |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\}. \end{aligned}$$

On a

$$\mathbf{A}_{m,1} \subset \mathbf{A}_{m,2} \subset \cdots \quad \text{pour} \quad m \in \mathbb{N}^*$$

et

$$\mathbf{A}_1 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_{m,n}$$

car la suite $\{f_n\}$ converge vers f sur $\mathbf{A}_1$. D'après le résultat de **II.1.16**,

$$m(\mathbf{A}_1) = \lim_{n\to+\infty} m(\mathbf{A}_{m,n})$$

et, étant donné $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$, il existe un entier strictement positif n_m tel que

$$m\left(\mathbf{A}_1 \setminus \mathbf{A}_{m,n_m}\right) = m(\mathbf{A}_1) - m\left(\mathbf{A}_{m,n_m}\right) < \frac{\varepsilon}{2^m}\,.$$

Donc, si

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_0 \cup \bigcup_{m=1}^{+\infty} (\mathbf{A}_1 \setminus \mathbf{A}_{m,n_m}),$$

alors

$$m(\mathbf{A}_2) \leqslant \sum_{m=1}^{+\infty} m(\mathbf{A}_1 \setminus \mathbf{A}_{m,n_m}) < \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon.$$

On pose $\mathbf{B} = \mathbf{A} \setminus \mathbf{A}_2$ et on note que $\mathbf{B} = \bigcap\limits_{m=1}^{+\infty} \mathbf{A}_{m,n_m}$. Donc si $x \in \mathbf{B}$, alors $x \in \mathbf{A}_{m,n_m}$ pour $m \in \mathbb{N}^*$, ce qui signifie que

$$|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \quad \text{pour} \quad j \geqslant n_m.$$

Ceci montre que la suite $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{B}$.

II.2.23. Si $\mathbf{A} = [0\,,+\infty[$ et $f_n = \chi_{[n,+\infty[}$, alors $\{f_n\}$ converge vers $f = 0$ sur $\mathbf{A}$. Supposons qu'il existe $\mathbf{B}$ tel que $m(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) < \varepsilon$ et $\{f_n\}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbf{B}$. Alors $m(\mathbf{B}) = +\infty$ et $\mathbf{B}$ est donc un ensemble non borné. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe alors $x_n \in \mathbf{B} \cap [n\,,+\infty[$ et $f(x_n) = 1$, contradiction.

II.2.24. Supposons d'abord que $m(\mathbf{A}) < +\infty$. D'après le théorème d'Egorov (voir **II.2.22**), il existe $\mathbf{B}_1 \subset \mathbf{A}$ tel que $m(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}_1) < \frac{1}{2}$ et f_n converge uniformément sur $\mathbf{B}_1$ vers f. En appliquant le théorème d'Egorov à l'ensemble $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}_1$, on trouve $\mathbf{B}_2 \subset (\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}_1)$ tel que $m\left(\mathbf{A} \setminus (\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2)\right) < \frac{1}{2^2}$ et f_n converge uniformément sur $\mathbf{B}_2$ vers f. On trouve par récurrence une suite d'ensembles mesurables $\{\mathbf{B}_i\}$ telle que $\mathbf{B}_i \subset \mathbf{A} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{i-1} \mathbf{B}_k$, $m\left(\mathbf{A} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{i} \mathbf{B}_k\right) < \frac{1}{2^i}$ et f_n converge uniformément sur $\mathbf{B}_i$ vers f. On voit, en posant $\mathbf{B} = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbf{B}_k$, que

$$m(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) = m\left(\mathbf{A} \setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathbf{B}_k\right) \leqslant m\left(\mathbf{A} \setminus \bigcup_{k=1}^{i} \mathbf{B}_k\right) < \frac{1}{2^i}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne $m(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) = 0$. Supposons maintenant que $m(\mathbf{A}) = +\infty$. Alors $\mathbf{A} = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbf{A}_k$ où $m(\mathbf{A}_k) < +\infty$ et on peut appliquer le résultat prouvé précédemment sur chaque $\mathbf{A}_k$.

II.2.25. On a $[0\,,1[\, = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbf{V}_n$ et $\mathbf{V}_i \cap \mathbf{V}_j = \varnothing$ pour $i \neq j$. Donc si $x \in [0\,,1[$, il existe alors n_0 tel que $x \in \mathbf{V}_{n_0}$. Mais alors, $x \notin \bigcup_{i=n}^{+\infty} \mathbf{V}_i$ pour $n > n_0$, ce qui implique $f_n(x) = 0$ pour $n > n_0$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. De la solution de **II.1.45**, on sait que la mesure extérieure $m^*(\mathbf{V}_n) = m^*(\mathbf{V}) = \alpha$ est strictement positive pour tout n. On prend alors $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ et on suppose, contrairement à l'énoncé, qu'il existe un ensemble mesurable $\mathbf{B}$ tel que $m\left([0\,,1[\, \setminus \mathbf{B}\right) < \varepsilon$ et f_n tend uniformément vers 0 sur $\mathbf{B}$. On en déduit alors qu'il existe n_1 tel que $f_n(x) = 0$ pour $n > n_1$ et pour tout $x \in \mathbf{B}$. D'autre part,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathbf{V}_i, \\ 1 & \text{si } x \in \bigcup_{i=n}^{+\infty} \mathbf{V}_i, \end{cases}$$

ce qui implique $\mathbf{B} \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathbf{V}_i$ pour $n > n_1$. Donc,

$$m\left([0\,,1[\, \setminus \mathbf{B}\right) \geqslant m^*\left(\bigcup_{i=n}^{+\infty} \mathbf{V}_i\right) \geqslant m^*(\mathbf{V}_n) = \alpha,$$

contradiction. Enfin, on remarque sur cet exemple que l'hypothèse de mesurabilité de f_n est essentielle et ne peut être omise dans le théorème d'Egorov.

II.2.26. On définit f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ n & \text{si } 0 < x \leqslant \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

La limite simple de $\{f_n\}$ sur $[0\,,1]$ est la fonction nulle. Si $m(\mathbf{B}) = 1$, alors $\max\{f_n(x) : x \in \mathbf{B}\} = n$ et la convergence ne peut donc pas être uniforme sur $\mathbf{B}$. On remarque sur cet exemple que l'hypothèse $m(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) < \varepsilon$ ne peut pas être remplacée par l'hypothèse $m(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) = 0$ dans le théorème d'Egorov (voir **II.2.22**).

II.2.27. On prouve d'abord que la condition est suffisante pour la mesurabilité de f. Soit $c \in \mathbb{R}$. On pose $\mathbf{A}_0 = \{x \in \mathbf{A} : f(x) \geqslant c\}$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fermé $\mathbf{F} \subset \mathbf{A}$ tel que $m(\mathbf{A} \setminus \mathbf{F}) < \varepsilon$ et la restriction de f à $\mathbf{F}$

est continue. Ceci implique que l'ensemble $\mathbf{F}_0 = \{x \in \mathbf{F} : f(x) \geqslant c\} = \mathbf{A}_0 \cap \mathbf{F}$ est fermé. Puisque $\mathbf{A}_0 \setminus \mathbf{F}_0 \subset \mathbf{A} \setminus \mathbf{F}$, on a $m(\mathbf{A}_0 \setminus \mathbf{F}_0) < \varepsilon$. La mesurabilité de $\mathbf{A}_0$ se déduit donc de **II.1.12(iv)** et f est mesurable. On prouve maintenant que la condition est nécessaire. On suppose d'abord que f est une fonction bornée. D'après le théorème d'approximation des fonctions mesurables (**théorème 4**), il existe une suite $\{\varphi_n\}$ de fonctions simples uniformément convergente vers f sur $\mathbf{A}$. On note que, pour chaque fonction simple φ_n, il existe un ensemble fermé $\mathbf{F}_n$ tel que $m(\mathbf{A} \setminus \mathbf{F}_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ et la restriction de φ_n à $\mathbf{F}_n$ est continue. La restriction de f à $\mathbf{F} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{F}_n$ est donc continue et

$$m(\mathbf{A} \setminus \mathbf{F}) = m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{A} \setminus \mathbf{F}_n)\right) < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Dans le cas où f n'est pas bornée, on considère la fonction $g(x) = \operatorname{Arctan} f(x)$ (donc $f = \tan g$) et on applique **II.2.16**.

II.2.28. Soit $\mathbf{A}$ l'ensemble construit dans la solution de **II.1.38** et soit f la fonction caractéristique de $\mathbf{A}$. La restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \mathbf{E}$ est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{E}, \\ 0 & \text{si } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbf{A}) \setminus \mathbf{E}. \end{cases}$$

Il découle de la propriété de $\mathbf{A}$ que pour tout intervalle ouvert $]\alpha\,, \beta[$,

$$m\left(]\alpha\,, \beta[\cap (\mathbf{A} \setminus \mathbf{E})\right) > 0 \quad \text{et} \quad m\left(]\alpha\,, \beta[\cap ((\mathbb{R} \setminus \mathbf{A}) \setminus \mathbf{E})\right) > 0.$$

Donc, si $x_0 \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{E}$, alors tout voisinage de x_0 contient des points de $\mathbf{A} \setminus \mathbf{E}$ et des points de $(\mathbb{R} \setminus \mathbf{A}) \setminus \mathbf{E}$ et f n'est donc pas continue en x_0. Le même raisonnement s'applique dans le cas où $x_0 \in (\mathbb{R} \setminus \mathbf{A}) \setminus \mathbf{E}$.

II.2.29. On pose $m_f(y) = m\left(\{x \in [0\,, a] : f(x) > y\}\right)$. La fonction m_f est décroissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{y \to +\infty} m_f(y) = 0$ et $\lim\limits_{y \to -\infty} m_f(y) = a$. De plus, la fonction est continue à droite. En effet, si $\{y_n\}$ est une suite décroissante convergente vers y, alors

$$\begin{aligned} m_f(y) &= m\left(f^{-1}\left(]y\,, +\infty[\right)\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}\left(]y_n\,, +\infty[\right)\right) \\ &= \lim_{n \to +\infty} m\left(f^{-1}\left(]y_n\,, +\infty[\right)\right) = \lim_{n \to +\infty} m_f(y_n). \end{aligned}$$

Dans le cas où $y \mapsto m_f(y)$ est continue et strictement décroissante, sa fonction réciproque est la fonction g cherchée, car

$$\begin{aligned} m_g(y) &= m\left(g^{-1}\left(]y\,,+\infty[\right)\right) = m\left(m_f\left(]y\,,+\infty[\right)\right) \\ &= m\left(]0\,,m_f(y)[\right) = m_f(y). \end{aligned}$$

Si y_0 est un point de discontinuité de m_f, on pose alors $g(x) = y_0$ pour $x \in \left]m(y_0)\,,m_f(y_0^-)\right[$. Si $m_f(y) = x_0$ sur un intervalle, on pose alors $g(x_0) = \inf\{y : m_f(y) = x_0\}$. En prenant en compte les discontinuités et les intervalles où $m_f(y)$ est constante, on peut vérifier que l'ensemble $\{x : g(x) > y\}$ est un intervalle de longueur $m_f(y)$. On remarque enfin qu'on peut définir la fonction g par $g(x) = \inf\{y : m_f(y) \leqslant x\}$.

II.2.30. Pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbf{A} : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\} \subset &\left\{x \in \mathbf{A} : |f(x) - f_n(x)| > \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \\ &\cup \left\{x \in \mathbf{A} : |f_n(x) - g(x)| > \tfrac{\varepsilon}{2}\right\}. \end{aligned}$$

D'où, $m\left(\{x \in \mathbf{A} : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}\right) = 0$. De plus, puisque

$$\{x \in \mathbf{A} : f(x) \neq g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left\{x \in \mathbf{A} : |f(x) - g(x)| > \tfrac{1}{k}\right\},$$

la propriété en découle.

II.2.31. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathbf{B}_n = \{x \in \mathbf{A} : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} \mathbf{B}_k.$$

La suite $\{\mathbf{A}_n\}$ est alors une suite décroissante d'ensembles mesurables et, d'après **II.1.19** et **II.1.21**,

$$\lim_{n\to+\infty} m(\mathbf{A}_n) = m\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n\right) = m\left(\varlimsup_{n\to+\infty} \mathbf{B}_n\right).$$

Puisque $\varlimsup_{n\to+\infty} \mathbf{B}_n \subset \{x \in \mathbf{A} : f_n(x) \text{ ne tend pas vers } f(x)\}$ et puisque la suite $\{f_n\}$ converge vers f p.p. sur $\mathbf{A}$, on obtient $m\left(\varlimsup_{n\to+\infty} \mathbf{B}_n\right) = 0$ et, en conséquence, $\lim_{n\to+\infty} m(\mathbf{B}_n) = 0$.

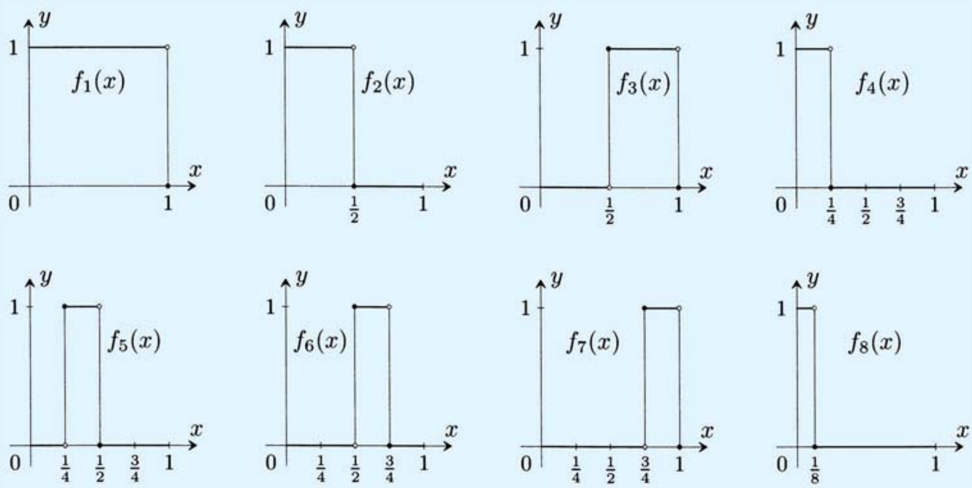
II.2.32. On choisit $\mathbf{A} = \mathbb{R}_+$ et on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [n\,, n+1], \\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{A} \setminus [n\,, n+1]. \end{cases}$$

La suite $\{f_n\}$ converge alors vers la fonction nulle sur $\mathbf{A}$ mais, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m\left(\left\{x \in \mathbf{A} : f_n(x) > \frac{1}{2}\right\}\right) = 1$.

II.2.33. Il est clair que tout entier n strictement positif peut s'écrire de façon unique comme $n = 2^k + r$, où $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < 2^k$. Pour $n = 2^k + r$, on définit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[\frac{r}{2^k}\,, \frac{r+1}{2^k}\right], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Les huit premiers termes de la suite sont représentés ci-dessus. La suite $\{f_n\}$ converge en mesure vers la fonction nulle sur $[0\,, 1]$. Cependant, elle ne converge vers zéro en aucun point de $[0\,, 1]$.

II.2.34. La sous-suite $\{f_{2^n}\}$ converge vers zéro sur $]0\,, 1]$.

II.2.35. Puisque $\{f_n\}$ converge en mesure vers f sur $\mathbf{A}$, pour tout entier strictement positif k, il existe n_k tel que

$$m\left(\left\{x \in \mathbf{A} : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}\,.$$

On peut supposer que la suite $\{n_k\}$ est strictement croissante. On pose

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{A} \setminus \bigcup_{k=m}^{+\infty} \left\{x \in \mathbf{A} : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \tfrac{1}{k}\right\}.$$

On a alors

$$m(\mathbf{A} \setminus \mathbf{A}_m) \leqslant \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}}$$

et, pour $x \in \mathbf{A}_m$,

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{pour} \quad k \geqslant m.$$

Donc $\{f_{n_k}\}$ converge vers f sur $\bigcup_{m=1}^{+\infty} \mathbf{A}_m$ et $m\left(\mathbf{A} \setminus \bigcup_{m=1}^{+\infty} \mathbf{A}_m\right) = 0$.

II.2.36. Soit x_0 un point de continuité de f. On suppose, contrairement à l'énoncé, que $f_n(x_0)$ ne tend pas vers $f(x_0)$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une sous-suite f_{n_k} telle que $|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| > \varepsilon$ ou, de façon équivalente,

$$f_{n_k}(x_0) - f(x_0) > \varepsilon \quad \text{ou} \quad f_{n_k}(x_0) - f(x_0) < -\varepsilon. \tag{$*$}$$

Puisque f est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

dès que $|x - x_0| < \delta$. Par monotonie de f_{n_k}, $f_{n_k}(x) \geqslant f_{n_k}(x_0)$ pour $x > x_0$. En conséquence, si le premier cas de $(*)$ est vérifié, alors

$$f_{n_k}(x) - f(x) > f_{n_k}(x_0) - f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\varepsilon}{2}$$

pour $x \in \,]x_0\,, x_0 + \delta[$. D'où

$$m\left(\left\{x \in \,]a\,, b[\, : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \tfrac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \geqslant \delta,$$

contradiction.

II.2.37. D'après le théorème de Lusin (voir **II.2.27**), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un ensemble fermé $\mathbf{F}_n \subset \mathbf{A}$ tel que $m(\mathbf{A} \setminus \mathbf{F}_n) < \frac{1}{n}$ et la restriction de f à $\mathbf{F}_n$ est continue. Les ensembles $\mathbf{H}_n = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$ sont fermés et la restriction de f à $\mathbf{H}_n$ est continue. Posons $\mathbf{H} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{H}_n$. $\mathbf{H}$ est alors un $\mathcal{F}_\sigma$-ensemble et $m(\mathbf{A} \setminus \mathbf{H}) = 0$. D'après le théorème de prolongement de Tietze, il existe un prolongement continu f_n de $f_{|\mathbf{H}_n}$ défini sur $\mathbb{R}$ tel que $f_n = f$ sur $\mathbf{H}_n$. Il est clair que f_n converge vers f sur $\mathbf{H}$.

II.2.38. Soit $\mathbf{H}_n$ et $\mathbf{H}$ les ensembles définis dans la solution du problème précédent. On pose

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbf{H}_n, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{H}_n. \end{cases}$$

On doit prouver que chaque fonction f_n appartient à la première classe de Baire sur $\mathbf{A}$. Pour cela, on pose $f_{n,m}(x) = f(x)$ si $x \in \mathbf{H}_n$ et $f_{n,m}(x) = 0$ si $\operatorname{dist}(x, \mathbf{H}_n) \geqslant \frac{1}{m}$ et on prolonge cette fonction en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en utilisant le théorème de prolongement de Tietze (le prolongement est encore noté $f_{n,m}$). On a alors $f_n(x) = \lim\limits_{m\to+\infty} f_{n,m}(x)$ pour $x \in \mathbf{A}$. Si maintenant

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbf{H}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{H}, \end{cases}$$

alors g est dans la seconde classe de Baire et $f = g$ p.p. sur $\mathbf{A}$.

II.3. Intégrale de Lebesgue

II.3.1. Puisque $m(\mathbb{Q}) = 0$, on a $\int_{[0\,,1]} f\, dm = \int_{[0\,,1]} x^2\, dm = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$. La fonction n'est pas Riemann-intégrable sur $[0\,,1]$ car f est discontinue en tout point de $[0\,,1[$ (comparer avec **II.1.55**).

II.3.2. Puisque $m(\mathbf{C}) = 0$, on a

$$\int_{[0\,,1]} f\, dm = \int_{[0\,,1]\setminus\mathbf{C}} f\, dm = \sum_{n=1}^{+\infty} n2^{n-1}\frac{1}{3^n} = 3.$$

II.3.3. Il découle des propriétés de l'intégrale de Lebesgue que

$$\int_{[0\,,1]} f\, dm = \int_0^{1/2} \sin(\pi x)\, dx + \int_{1/2}^1 \cos(\pi x)\, dx = 0.$$

II.3.4. Par définition de l'intégrale de Lebesgue, il existe une suite croissante $\{\varphi_n\}$ de fonctions simples positives convergente vers $|f|$ sur $\mathbf{A}$ telle que

$$\int_{\mathbf{A}} |f|\, dm = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} \varphi_n\, dm.$$

Donc, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$\int_{\mathbf{A}} (|f| - \varphi_{n_0})\, dm = \int_{\mathbf{A}} |f|\, dm - \int_{\mathbf{A}} \varphi_{n_0}\, dm < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Clairement, $|f| - \varphi_{n_0} \geqslant 0$ et $\varphi_{n_0} \leqslant M$ pour un certain M strictement positif. On pose $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. Si $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ et $m(\mathbf{B}) < \delta$, alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{B}} |f|\, dm &= \int_{\mathbf{B}} (|f| - \varphi_{n_0})\, dm + \int_{\mathbf{B}} \varphi_{n_0}\, dm \\ &\leqslant \int_{\mathbf{A}} (|f| - \varphi_{n_0})\, dm + \int_{\mathbf{B}} M\, dm < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M} M = \varepsilon.\end{aligned}$$

II.3.5. On remarque d'abord que $m(\mathbf{A}_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. En effet, puisque

$$n \times m(\mathbf{A}_n) \leqslant \int_{\mathbf{A}_n} |f|\, dm \leqslant \int_{\mathbf{A}} |f|\, dm = M < +\infty,$$

on a $m(\mathbf{A}_n) \leqslant \frac{M}{n}$. Le résultat du problème précédent implique alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}_n} |f|\, dm = 0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} n \times m(\mathbf{A}_n) = 0$ parce que $n \times m(\mathbf{A}_n) \leqslant \int_{\mathbf{A}_n} |f|\, dm$.

II.3.6. On pose $\mathbf{A}_n = \left\{x \in \mathbf{A} : f(x) > \frac{1}{n}\right\}$. On a

$$0 = \int_{\mathbf{A}} f\, dm \geqslant \int_{\mathbf{A}_n} f\, dm \geqslant \int_{\mathbf{A}_n} \frac{1}{n}\, dm = \frac{1}{n} m(\mathbf{A}_n) \geqslant 0.$$

Donc, $m(\mathbf{A}_n) = 0$ et, d'après **II.1.18**,

$$m\left(\{x \in \mathbf{A} : f(x) \neq 0\}\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} m(\mathbf{A}_n) = 0.$$

II.3.7. On pose $\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{A} : f(x) \geqslant 0\}$. On a $0 = \int_{\mathbf{B}} f\, dm = \int_{\mathbf{A}} f^+\, dm$. D'après le résultat du problème précédent, $f^+ = 0$ p.p. sur $\mathbf{A}$. De même, $f^- = 0$ p.p. sur $\mathbf{A}$.

II.3.8. Supposons, par exemple, que $\int_{\mathbf{A}} f\, dm \geqslant 0$. On obtient alors, $\int_{\mathbf{A}} |f|\, dm = \int_{\mathbf{A}} f\, dm$. D'après le résultat de **II.3.6**, $\int_{\mathbf{A}} (|f| - f)\, dm = 0$ si et seulement si $|f| - f = 0$ p.p. sur $\mathbf{A}$. Dans le cas où $\int_{\mathbf{A}} f\, dm \leqslant 0$, on peut appliquer le même raisonnement à $-f$.

II.3.9. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} f_n\,dm = 0$ et on se donne $\varepsilon > 0$. On pose $\mathbf{A}_n = \{x \in \mathbf{A} : f_n(x) > \varepsilon\}$. On a alors

$$m(\mathbf{A}_n) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbf{A}_n} \varepsilon\,dm \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbf{A}_n} f_n\,dm \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbf{A}} f_n\,dm.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} m(\mathbf{A}_n) = 0$.

La suite $\{f_n\}$ définie dans la solution de **II.2.33** vérifie la condition $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n\,dm = 0$, mais elle ne converge vers zéro en aucun point de $[0,1]$.

II.3.10. Étant donné $\varepsilon > 0$, on pose $\mathbf{A}_n = \{x \in \mathbf{A} : |f_n(x)| > \varepsilon\}$. On a

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,m(\mathbf{A}_n) \leqslant \int_{\mathbf{A}} \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\,dm \leqslant m(\mathbf{A}_n) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,m(\mathbf{A}\setminus\mathbf{A}_n),$$

ce qui implique le résultat cherché.

Pour prouver que l'hypothèse $m(\mathbf{A}) < +\infty$ est essentielle, on considère $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors $m\left(\left\{x > 0 : \frac{1}{nx} > \varepsilon\right\}\right) = \frac{1}{\varepsilon n}$, mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{1}{1+nx}\,dm = +\infty.$$

II.3.11. On suppose que la fonction f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbf{A}$ et que la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} km(\mathbf{A}_k)$ diverge. En posant

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) < n, \\ n & \text{si } f(x) \geqslant n, \end{cases}$$

on obtient

$$\int_{\mathbf{A}} f\,dm \geqslant \int_{\mathbf{A}} f_n\,dm \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbf{A}_k} f\,dm \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} km(\mathbf{A}_k).$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} km(\mathbf{A}_k) = +\infty$, on voit que $\int_{\mathbf{A}} f\,dm = +\infty$, contradiction. On suppose maintenant que la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} km(\mathbf{A}_k)$ converge. La série

$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)m(\mathbf{A}_k)$ converge alors aussi. De plus, si on pose $g(x) = k+1$ pour $x \in \mathbf{A}_k$, alors $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ pour $x \in \mathbf{A}$, d'où

$$\int_{\mathbf{A}} f\,dm \leqslant \int_{\mathbf{A}} g\,dm = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)m(\mathbf{A}_k) < +\infty.$$

II.3.12. Si les $\mathbf{A}_k$ sont les ensembles définis au problème précédent, alors le résultat sera démontré si on prouve que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} m(\mathbf{B}_k)$ converge si et seulement si $\sum_{k=0}^{+\infty} km(\mathbf{A}_k)$ converge. On a $\mathbf{B}_k = \mathbf{A}_k \cup \mathbf{A}_{k+1} \cup \cdots$ et, puisque $\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j = \varnothing$ pour $i \neq j$, on obtient $m(\mathbf{B}_k) = m(\mathbf{A}_k) + m(\mathbf{A}_{k+1}) + \cdots$. On pose $b_k = m(\mathbf{B}_k)$ et $a_k = m(\mathbf{A}_k)$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} ka_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} na_k.$$

Si la série $\sum_{k=0}^{+\infty} ka_k$ converge, alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} na_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} ka_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k < +\infty$. Dans l'autre sens, si $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k < +\infty$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} ka_k = \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} na_k \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} b_k < +\infty.$$

II.3.13. Les ensembles $\mathbf{A}_n$ sont mesurables et deux à deux disjoints et $\mathbf{A} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbf{A}_n \cup \mathbf{B}$, où $\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{A} : f(x) = +\infty\}$ est de mesure nulle. On a

$$S(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\varepsilon m(\mathbf{A}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbf{A}_n} n\varepsilon\,dm \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbf{A}_n} f\,dm = \int_{\mathbf{A}} f\,dm,$$

car l'intégrale de Lebesgue est dénombrablement additive. De même,

$$S(\varepsilon) + \varepsilon m(\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\varepsilon m(\mathbf{A}_n) \geqslant \int_{\mathbf{A}} f\,dm.$$

Il s'ensuit que

$$\int_{\mathbf{A}} f\,dm - \varepsilon m(\mathbf{A}) \leqslant S(\varepsilon) \leqslant \int_{\mathbf{A}} f\,dm$$

et le passage à la limite lorsque ε tend vers 0 donne le résultat cherché car $m(\mathbf{A}) < +\infty$.

II.3.14. D'après le lemme de Fatou (**théorème 2**),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{A}} f\,dm &\leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} f_n\,dm \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} f_n\,dm \\
&\leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f_n\,dm - \int_{\mathbb{R}\setminus\mathbf{A}} f_n\,dm \right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,dm - \varliminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus\mathbf{A}} f_n\,dm \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} f\,dm - \int_{\mathbb{R}\setminus\mathbf{A}} f\,dm = \int_{\mathbf{A}} f\,dm.
\end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} f_n\,dm = \int_{\mathbf{A}} f\,dm$.

II.3.15. Puisque $\{f_n\}$ est uniformément convergente sur $\mathbf{A}$, il existe n_0 tel que $|f_n(x) - f_{n_0}(x)| \leqslant 1$ pour $n > n_0$ et $x \in \mathbf{A}$. Donc, $|f_n| \leqslant |f_{n_0}| + 1$ et, puisque $\mathbf{A}$ est de mesure finie, $|f_{n_0}| + 1$ est intégrable sur $\mathbf{A}$. Il suffit donc d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue (**théorème 3**).

II.3.16. Supposons d'abord que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} |f_n - f|^p\,dm = 0.$$

On a alors, d'après l'inégalité de Minkowski (voir **I.6.35**),

$$\|f_n\|_p \leqslant \|f_n - f\|_p + \|f\|_p \quad \text{et} \quad \|f\|_p \leqslant \|f_n - f\|_p + \|f_n\|_p\,,$$

d'où $\left| \|f_n\|_p - \|f\|_p \right| \leqslant \|f_n - f\|_p$, ce qui montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} |f_n|^p\,dm = \int_{\mathbf{A}} |f|^p\,dm.$$

Pour prouver l'implication réciproque, on suppose d'abord que $\mathbf{A}$ est de mesure finie. Il découle de la continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue (voir, par exemple, **II.3.4**) que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\int_{\mathbf{B}} |f|^p\,dm < \varepsilon$

si $m(\mathbf{B}) < \delta$. D'après le théorème d'Egorov (voir II.2.22), il existe $\mathbf{C} \subset \mathbf{A}$ tel que $m(\mathbf{C}) < \delta$ et $f_n \underset{\mathbf{A}\setminus\mathbf{C}}{\rightrightarrows} f$. D'après **II.3.14**, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{C}} |f_n|^p\, dm = \int_{\mathbf{C}} |f|^p\, dm.$$

Donc, pour n suffisamment grand,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{A}} |f_n - f|^p\, dm &= \int_{\mathbf{A}\setminus\mathbf{C}} |f_n - f|^p\, dm + \int_{\mathbf{C}} |f_n - f|^p\, dm\\ &\leqslant \int_{\mathbf{A}\setminus\mathbf{C}} |f_n - f|^p\, dm + 2^p \left(\int_{\mathbf{C}} |f|^p\, dm + \int_{\mathbf{C}} |f_n|^p\, dm\right)\\ &\leqslant \int_{\mathbf{A}\setminus\mathbf{C}} |f_n - f|^p\, dm + 2^{p+1} \int_{\mathbf{C}} |f|^p\, dm + \varepsilon\\ &\leqslant \int_{\mathbf{A}\setminus\mathbf{C}} |f_n - f|^p\, dm + \left(2^{p+1} + 1\right) \varepsilon.\end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'appliquer le résultat de **II.3.15**.

Si $m(\mathbf{A}) = +\infty$, étant donné $\varepsilon > 0$, on trouve alors un sous-ensemble $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ de mesure finie tel que

$$\int_{\mathbf{A}} |f|^p\, dm < \int_{\mathbf{B}} |f|^p\, dm + \varepsilon.$$

En effet, en prenant

$$g_n(x) = \begin{cases} |f(x)|^p & \text{si } x \in \mathbf{A} \cap [-n\,, n],\\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{A} \setminus [-n\,, n],\end{cases}$$

on obtient, par le théorème de convergence monotone de Lebesgue (**théorème 1**),

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} g_n\, dm = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}\cap[-n\,,n]} |f|^p\, dm = \int_{\mathbf{A}} |f|^p\, dm.$$

Il suffit donc de prendre $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cap [-n_0\,, n_0]$ avec n_0 suffisamment grand. Mais alors, pour n suffisamment grand,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{A}} |f_n - f|^p\, dm &= \int_{\mathbf{B}} |f_n - f|^p\, dm + \int_{\mathbf{A}\setminus\mathbf{B}} |f_n - f|^p\, dm\\ &\leqslant \int_{\mathbf{B}} |f_n - f|^p\, dm + 2^{p+1} \int_{\mathbf{A}\setminus\mathbf{B}} |f|^p\, dm + \varepsilon\\ &\leqslant \int_{\mathbf{B}} |f_n - f|^p\, dm + \left(2^{p+1} + 1\right) \varepsilon < \left(2^{p+1} + 2\right) \varepsilon,\end{aligned}$$

la dernière inégalité se déduisant de la première partie de la démonstration.

II.3.17. On a $g - f_n \geqslant 0$ et $g + f_n \geqslant 0$. D'après le lemme de Fatou (**théorème 2**),

$$\int_{\mathbf{A}} \varliminf_{n\to+\infty} (f_n + g)\, dm \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} (f_n + g)\, dm$$

et

$$\int_{\mathbf{A}} \varliminf_{n\to+\infty} (g - f_n)\, dm \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} (g - f_n)\, dm.$$

En utilisant donc les propriétés des limites inférieures et supérieures (voir, par exemple, **II.4.19 (vol. I)** et **II.4.21 (vol. I)**), on obtient

$$\int_{\mathbf{A}} \varliminf_{n\to+\infty} f_n\, dm + \int_{\mathbf{A}} g\, dm \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} f_n\, dm + \int_{\mathbf{A}} g\, dm$$

et

$$\int_{\mathbf{A}} g\, dm - \int_{\mathbf{A}} \varlimsup_{n\to+\infty} f_n\, dm \leqslant \int_{\mathbf{A}} g\, dm - \varlimsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} f_n\, dm.$$

Puisque g est intégrable, le résultat suit.

II.3.18. On a $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = 1$ et $\int_{]0\,,1[} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n dm = 1$. Par ailleurs, $\int_{]0\,,1[} f_n\, dm = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, puisque

$$\int_{]0,1[} |f_n|\, dm = \int_0^{\frac{n}{n+1}} f_n(x)\, dx + \int_{\frac{n}{n+1}}^1 -f_n(x)\, dx = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \times \frac{1}{n+1}\,,$$

on voit que $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{]0,1[} |f_n|\, dm = +\infty$.

II.3.19. Le théorème de convergence monotone de Lebesgue (**théorème 1**) implique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbf{A}} |f_n|\, dm = \int_{\mathbf{A}} \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|\, dm < +\infty$$

et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$ converge donc p.p. Ceci implique alors la convergence p.p. de $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Il suffit maintenant d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue (**théorème 3**).

II.3.20. Soit $\varepsilon > 0$. Par équi-intégrabilité de f_n, il existe $\delta > 0$ tel que $\int_{\mathbf{B}} |f_n|\, dm < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ dès que $m(\mathbf{B}) < \delta$. On note alors que si $m(\mathbf{B}) < \delta$, d'après le lemme de Fatou (**théorème 2**),

$$\int_{\mathbf{B}} |f|\, dm \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{B}} |f_n|\, dm \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

où $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. D'après le théorème d'Egorov (voir **II.2.22**), il existe $\mathbf{C} \subset \mathbf{A}$ tel que $m(\mathbf{C}) < \delta$ et $f_n \underset{\mathbf{A}\setminus\mathbf{C}}{\rightrightarrows} f$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{A}} |f_n - f|\, dm &= \int_{\mathbf{A}\setminus\mathbf{C}} |f_n - f|\, dm + \int_{\mathbf{C}} |f_n - f|\, dm \\ &\leqslant \int_{\mathbf{A}\setminus\mathbf{C}} |f_n - f|\, dm + \int_{\mathbf{C}} |f_n|\, dm + \int_{\mathbf{C}} |f|\, dm \\ &\leqslant \int_{\mathbf{A}\setminus\mathbf{C}} |f_n - f|\, dm + \varepsilon.\end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'appliquer le résultat de **II.3.15**.

II.3.21. On suppose, contrairement à l'énoncé, que la suite $\{a_n\}$ définie par $a_n = \int_{\mathbf{A}} f_n\, dm$ ne converge pas vers $a = \int_{\mathbf{A}} f\, dm$. Il existe alors une sous-suite $\{a_{m_n}\}$ qui converge vers $b \neq a$. Par ailleurs, d'après le théorème de Riesz (voir **II.2.35**), il existe une sous-suite $\{f_{m_{k_n}}\}$ convergente vers f p.p. sur $\mathbf{A}$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (**théorème 3**), $a_{m_{k_n}}$ tend vers a lorsque n tend vers $+\infty$, contradiction.

II.3.22. La démonstration est semblable à celle du problème précédent.

II.3.23. On remarque d'abord que, d'après **II.2.16**, les fonctions $g(f_n)$ et $g(f)$ sont mesurables sur $\mathbf{A}$. Clairement, g est uniformément continue sur $[-C\,,C]$ et, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$$

pour tout $x \in \mathbf{A}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $|f_n(x) - f(x)| < \delta$. Il s'ensuit que

$$\{x \in \mathbf{A} : |g(f_n(x)) - g(f(x))| \geqslant \varepsilon\} \subset \{x \in \mathbf{A} : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\}\,,$$

ce qui prouve que $g(f_n)$ tend vers $g(f)$ en mesure. De plus, $m(\mathbf{A}) < +\infty$ et $|g(f_n(x))| \leqslant M$ où $M = \max\{|g(x)| : x \in [-C\,,C]\}$ et on peut appliquer le résultat de **II.3.21**.

II.3.24. On peut appliquer un raisonnement semblable à celui utilisé dans la solution du problème précédent.

II.3.25.

(i) On sait qu'il existe des suites croissantes de fonctions positives simples $\{\varphi_{1,n}\}$ et $\{\varphi_{2,n}\}$ définies sur $[a\,,b]$ telles que $\varphi_{1,n}$ tend vers f^+ et $\varphi_{2,n}$ tend vers f^-. On voit, en posant $\varphi_n = \varphi_{1,n} - \varphi_{2,n}$, que $\{\varphi_n\}$ est une suite de fonctions simples convergente vers f telle que $|\varphi_n| \leqslant |f|$. Puisque $|\varphi_n - f|^p$ tend vers 0 et $|\varphi_n - f|^p \leqslant 2^{p+1}\,|f|^p$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue (**théorème 3**) implique

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} |\varphi_n - f|^p\, dm = 0.$$

(ii) Il ressort de (i) qu'il suffit de montrer que si $\chi_{\mathbf{A}}$ est la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable $\mathbf{A} \subset [a\,,b]$, étant donné $\delta > 0$, il existe alors une fonction en escalier ψ telle que $\int_{[a\,,b]} |\chi_{\mathbf{A}} - \psi|^p\, dm < \delta$. D'après **II.1.12**, il existe un ensemble ouvert $\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{G} \subset \mathbf{A}$ et $m(\mathbf{A} \setminus \mathbf{G}) < \delta$. Mais $\mathbf{G}$ est la réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints $]a_i\,, b_i[$. On a donc

$$m(\mathbf{G}) = \sum_{i=1}^{+\infty}(b_i - a_i) < m(\mathbf{A}) + \delta.$$

Soit ψ la fonction caractéristique de $[a\,,b] \cap \bigcup_{i=1}^{N}\,]a_i\,,b_i[$ où N est suffisamment grand. Si h est la fonction caractéristique de $[a\,,b] \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty}\,]a_i\,,b_i[$, d'après l'inégalité de Minkowski (voir **I.6.35**),

$$\begin{aligned}
\|\chi_{\mathbf{A}} - \psi\|_p &\leqslant \|\chi_{\mathbf{A}} - h\|_p + \|h - \psi\|_p \\
&\leqslant \left(m\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}\,]a_i\,,b_i[\setminus \mathbf{A}\right)\right)^{1/p} + \left(m\left(\bigcup_{i=N+1}^{+\infty}\,]a_i\,,b_i[\right)\right)^{1/p} \\
&< \delta^{1/p} + \delta^{1/p} = 2\delta^{1/p}.
\end{aligned}$$

Puisque l'on peut choisir $\delta > 0$ arbitrairement petit, la démonstration est complète.

II.3.26. D'après **II.1.38**, il existe un sous-ensemble mesurable $\mathbf{A}$ de $[a\,,b]$ tel que

$$m\left(\mathbf{A} \cap\,]\alpha\,,\beta[\right) > 0 \quad \text{et} \quad m\left(([a\,,b] \setminus \mathbf{A}) \cap\,]\alpha\,,\beta[\right) > 0$$

pour tout intervalle $]\alpha\,,\beta[\, \subset [a\,,b]$. On va prouver que $f = \chi_{\mathbf{A}}$ a la propriété voulue. En effet, si ψ est une fonction en escalier égale à c sur $]\alpha\,,\beta[\, \subset [a\,,b]$, alors

$$\|\chi_{\mathbf{A}} - \psi\|_\infty \geqslant \max\{|c|\,,|1-c|\} \geqslant \frac{1}{2}\,.$$

On note ici que cet exemple montre que le résultat énoncé en **II.3.25(ii)** est faux lorsque $p = +\infty$.

II.3.27. Il ressort du résultat de **II.3.25** que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier ψ telle que $\|f - \psi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Il suffit donc de prouver qu'il existe une fonction continue g telle que $\|\psi - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. On pose $M = \sup\{|\psi(x)| : x \in [a\,,b]\}$ et on construit une fonction g affine par morceaux sur $[a\,,b]$ telle que $m\left(\{x \in [a\,,b] : \psi(x) \neq g(x)\}\right) < \left(\frac{\varepsilon}{4M}\right)^p$ et $|g(x)| \leqslant M$. On a alors

$$\begin{aligned}\|\psi - g\|_p &= \left(\int_{[a,b]} |\psi - g|^p \, dm\right)^{1/p} \\ &\leqslant \left((2M)^p \, m\left(\{x \in [a\,,b] : \psi(x) \neq g(x)\}\right)\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

II.3.28. Pour $a < c < b$, on pose $\mathbf{A} = [a\,,c]$ et $f = \chi_{\mathbf{A}}$. Si g est une fonction continue sur $[a\,,b]$, alors $\lim\limits_{x\to c^-} g(x) = \lim\limits_{x\to c^+} g(x) = g(c)$. Donc,

$$\|f - g\|_\infty \geqslant \max\{|g(c)|\,,|g(c) - 1|\} \geqslant \frac{1}{2}\,.$$

II.3.29. On remarque d'abord que, d'après **II.2.16**, les fonctions $g(f_n)$, $g(f)$ et $g(G)$ sont mesurables sur $\mathbf{A}$. Comme dans la solution de **II.3.23**, on peut montrer que $g(f_n)$ tend vers $g(f)$ en mesure sur $[a\,,b]$. On prouve maintenant que $g(G)$ est intégrable sur $[a\,,b]$. D'après **II.3.27**, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue h telle que $\int_{[a\,,b]} |G - h| \, dm < \varepsilon$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} |g(G)| \, dm &\leqslant \int_{[a,b]} |g(G) - g(h)| \, dm + \int_{[a,b]} |g(h)| \, dm \\ &\leqslant L\varepsilon + \int_{[a,b]} |g(h)| \, dm,\end{aligned}$$

où L est la constante de Lipschitz de g. Puisque $g(h)$ est continue, $g(G)$ est intégrable sur $[a\,,b]$. Le résultat découle alors de **II.3.21**.

II.3.30. On trouve d'abord un intervalle fermé $[a\,,b]$ et une fonction h bornée et mesurable sur $\mathbf{A}$ s'annulant à l'extérieur de $[a\,,b]$ et vérifiant

$$\int_{\mathbf{A}} |f-h|^p \, dm < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{$*$}$$

Pour cela, on considère la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [-n\,,n] \cap \mathbf{A} \text{ et } |f(x)| \leqslant n, \\ n & \text{si } x \in [-n\,,n] \cap \mathbf{A} \text{ et } f(x) > n, \\ -n & \text{si } x \in [-n\,,n] \cap \mathbf{A} \text{ et } f(x) < -n, \\ 0 & \text{si } x \notin [-n\,,n]. \end{cases}$$

La suite f_n tend vers f p.p. sur $\mathbf{A}$ et $|f_n|^p \leqslant |f|^p$. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir **théorème 3**), $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} |f_n|^p \, dm = \int_{\mathbf{A}} |f|^p \, dm$. En utilisant le résultat de **II.3.16**, on voit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{A}} |f_n - f|^p \, dm = 0$. On peut donc choisir N suffisamment grand et poser $h = f_N$ et $[a\,,b] = [-N\,,N]$. Ceci prouve la proposition énoncée au début. D'après le théorème de Lusin (voir **II.2.27**), il existe alors un ensemble fermé $\mathbf{F} \subset \mathbf{A} \cap [-N\,,N]$ tel que h soit continue sur $\mathbf{F}$ et

$$m(\mathbf{A} \cap [-N\,,N] \setminus \mathbf{F}) < \frac{\varepsilon}{3\,(2N)^p}.$$

Puis, d'après le théorème de prolongement de Tietze, il existe une fonction continue g telle que $|g| \leqslant N$ et $g = h$ sur $\mathbf{F} \cup \left]-\infty\,,-N-\frac{\varepsilon}{6N^p}\right] \cup \left[N+\frac{\varepsilon}{6N^p}\,,+\infty\right[$. Mais alors,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{A}} |h-g|^p \, dm &\leqslant \int_{\mathbf{A}\cap[-N,N]\setminus\mathbf{F}} |h-g|^p \, dm + \int_{[-N-\frac{\varepsilon}{6N^p},-N]} |h-g|^p \, dm \\ &\quad + \int_{[N,N+\frac{\varepsilon}{6N^p}]} |h-g|^p \, dm \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3\,(2N)^p}\,(2N)^p + 2\frac{\varepsilon}{6N^p}\,N^p = \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Ceci, combiné avec $(*)$, montre que la fonction g résout notre problème.

II.3.31. On remarque, avec le lemme de Fatou (**théorème 2**), que

$$\int_{[a,b]} |f|^p \, dm \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} |f_n|^p \, dm \leqslant C^p$$

et $|f|^p$ est donc intégrable sur $[a\,,b]$. On prouve maintenant que f_n est équi-intégrable sur $[a\,,b]$. En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \frac{\varepsilon^q}{C^q}$ tel que si $m(\mathbf{B}) < \delta$, d'après l'inégalité de Hölder (voir **I.6.27**),

$$\int_{\mathbf{B}} |f_n| \, dm \leqslant \|f_n\|_p \,(m(\mathbf{B}))^{\frac{1}{q}} \leqslant C\delta^{\frac{1}{q}} = \varepsilon$$

et, d'après **II.3.20**,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]} f_n\,dm = \int_{[a,b]} f\,dm.$$

On prouve tout aussi facilement que cette égalité est vérifiée lorsqu'on remplace $[a\,,b]$ par tout sous-intervalle $[a_i\,,b_i]$ de $[a\,,b]$. Donc, si S est une fonction en escalier sur $[a\,,b]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]} f_n S\,dm = \int_{[a,b]} fS\,dm.$$

Il découle de l'équi-intégrabilité de $|f_n|^p$ que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]} |f_n|^p\,dm = \int_{[a,b]} |f|^p\,dm.$$

Donc, d'après **II.3.16**, $\|f_n - f\|_p$ tend vers 0. Si $g\in L^q[a\,,b]$, on a alors, avec l'inégalité de Hölder,

$$\int_{[a,b]} |f_n g - fg|\,dm \leqslant \|f_n - f\|_p\,\|g\|_q$$

et le résultat suit.

II.3.32. Puisque $|g_n|\leqslant C$, on remarque d'abord que l'on a $|g_n f|^p \leqslant C^p\,|f|^p$ et, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (**théorème 3**), $\int_{[a,b]}|g_n f|^p\,dm$ tend vers $\int_{[a,b]}|gf|^p\,dm$. Donc, d'après le résultat de **II.3.16**, la suite $\{g_n f\}$ converge vers gf en norme dans $L^p[a\,,b]$. De plus,

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} |f_n g_n - fg|^p\,dm &\leqslant 2^p\left(\int_{[a,b]}|g_n|^p\,|f_n - f|^p\,dm + \int_{[a,b]}|fg_n - fg|^p\,dm\right)\\ &\leqslant 2^p\left(C^p\,\|f_n - f\|_p^p + \|fg_n - fg\|_p^p\right)\end{aligned}$$

et le résultat cherché suit.

II.3.33. On renvoie le lecteur à la remarque ouvrant cette section pour la définition de $\|f\|_\infty$. Si $\|f\|_\infty = 0$, le résultat est évident. Supposons que $\|f\|_\infty > 0$. Puisque $|f(x)|\leqslant \|f\|_\infty$ p.p., on voit que

$$\varlimsup_{p\to+\infty}\left(\int_{[a,b]}|f|^p\,dm\right)^{1/p} \leqslant \lim_{p\to+\infty}(b-a)^{1/p}\,\|f\|_\infty = \|f\|_\infty\,.$$

D'autre part, étant donné $0<\varepsilon<\|f\|_\infty$, on a

$$m\left(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}\right) = \delta > 0,$$

d'où

$$\int_{[a,b]} |f|^p \, dm \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \delta,$$

ce qui implique

$$\varliminf_{p\to+\infty} \left(\int_{[a,b]} |f|^p \, dm \right)^{1/p} \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

On obtient le résultat cherché en faisant tendre ε vers 0.

II.3.34. On prouve d'abord que si φ est convexe sur $\mathbb{R}$, alors le graphe de φ admet au moins une droite support en tout $x_0 \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire une droite passant par le point $(x_0, \varphi(x_0))$ et se trouvant sous le graphe de φ. Pour ce faire, on remarque que si φ est convexe, elle admet alors des dérivées à gauche et à droite φ'_+ et φ'_- et, pour $x < x_0 < x_1$,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \leqslant \varphi'_-(x_0) \leqslant \varphi'_+(x_0) \leqslant \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)}{x_1 - x_0}$$

(voir, par exemple, **II.4.19 (vol. II)**). Il s'ensuit que $y = A(x - x_0) + \varphi(x_0)$ est une droite support en x_0 si et seulement si $\varphi'_-(x_0) \leqslant A \leqslant \varphi'_+(x_0)$. Notre proposition est donc prouvée. On prend alors

$$x_0 = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f \, dm$$

et $y = A(x - x_0) + \varphi(x_0)$ une droite support en x_0. On a

$$\varphi(f(x)) \geqslant A(f(x) - x_0) + \varphi(x_0).$$

Une intégration de chacun des membres de cette inégalité par rapport à x donne le résultat cherché.

II.3.35. On pose $p = \frac{p_2}{p_1}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On a alors, avec l'inégalité de Hölder (voir **I.6.27**),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{A}} |f|^{p_1} \, dm &\leqslant \left(\int_{\mathbf{A}} |f|^{pp_1} \, dm \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbf{A}} 1^{p'} \, dm \right)^{1/p'} \\ &= \left(\int_{\mathbf{A}} |f|^{p_2} \, dm \right)^{1/p} (m(\mathbf{A}))^{1/p'} < +\infty. \end{aligned}$$

II.3.36. On pose $r = \alpha p_1 + (1-\alpha)p_2$, $0 < \alpha < 1$. Si $p = \frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors $p' = \frac{1}{1-\alpha}$ et, par l'inégalité de Hölder (voir **I.6.27**),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{A}} |f|^r \, dm &= \int_{\mathbf{A}} |f|^{\alpha p_1} |f|^{(1-\alpha)p_2} \, dm \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbf{A}} |f|^{p_1} \, dm\right)^{\alpha} \left(\int_{\mathbf{A}} |f|^{p_2} \, dm\right)^{1-\alpha} < +\infty.\end{aligned}$$

Donc,

$$\|f\|_r^r \leqslant \left(\|f\|_{p_1}^{p_1}\right)^{\alpha} \left(\|f\|_{p_2}^{p_2}\right)^{1-\alpha}.$$

En prenant le logarithme de chaque membre de cette inégalité, on obtient

$$\varphi(r) \leqslant \alpha\varphi(p_1) + (1-\alpha)\varphi(p_2).$$

II.3.37. D'après **II.3.35**, si $f \in L^1[a\,,b]$, alors $f \in L^p[a\,,b]$ pour $0 < p \leqslant 1$. En utilisant l'inégalité $\ln t < t - 1$ pour $t > 0$ et l'inégalité de Jensen (voir **II.3.34**) avec $\varphi(x) = -\ln x$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} (|f|^p - 1) \, dm &\geqslant \frac{1}{p} \ln\left(\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} |f|^p \, dm\right) \\ &\geqslant \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} \ln|f| \, dm.\end{aligned}$$

Puisque $\frac{|f(x)|^p - 1}{p}$ décroît vers $\ln|f(x)|$ lorsque p décroît vers 0, d'après le théorème de convergence monotone de Lebesgue (**théorème 1**), on a

$$\lim_{p\to 0^+} \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} (|f|^p - 1) \, dm = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} \ln|f| \, dm.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{p\to 0^+} \frac{1}{p} \ln\left(\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} |f|^p \, dm\right) = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} \ln|f| \, dm.$$

II.3.38.

(a) Si f est la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable $\mathbf{A}$, l'égalité à prouver découle alors de l'invariance par translation de l'intégrale de Lebesgue. L'égalité est donc aussi vérifiée pour les fonctions simples.

Si f est positive, il existe alors une suite croissante $\{f_n\}$ de fonctions simples convergente vers f. Ce que l'on a déjà prouvé et le théorème de convergence monotone de Lebesgue (**théorème 1**) impliquent

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dm = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,dm = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} (f_n)_t\,dm = \int_{\mathbb{R}} f_t\,dm.$$

Finalement, le résultat se déduit du fait que

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dm = \int_{\mathbb{R}} f^+\,dm - \int_{\mathbb{R}} f^-\,dm.$$

(b) D'après **II.3.30**, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue φ s'annulant en dehors d'un intervalle borné, notons-le $[a\,,b]$, telle que $\int_{\mathbb{R}} |f-\varphi|\,dm < \varepsilon$. Si $|g(x)| \leqslant M$, on obtient, en utilisant (a),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |g(f-f_t)|\,dm &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |g(f-\varphi)|\,dm + \int_{\mathbb{R}} |g(f_t-\varphi_t)|\,dm \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} |g(\varphi-\varphi_t)|\,dm \\
&\leqslant M\varepsilon + \int_{\mathbb{R}} |g(f_t-\varphi_t)|\,dm + M\int_{\mathbb{R}} |\varphi-\varphi_t|\,dm \\
&= M\varepsilon + \int_{\mathbb{R}} |g_{-t}(f-\varphi)|\,dm + M\int_{\mathbb{R}} |\varphi-\varphi_t|\,dm \\
&\leqslant 2M\varepsilon + M\int_{\mathbb{R}} |\varphi-\varphi_t|\,dm.
\end{aligned}$$

La fonction φ étant continue et s'annulant en dehors de $[a\,,b]$, elle est uniformément continue. Il existe donc $0<\delta<1$ tel que $|\varphi(x)-\varphi_t(x)| < \varepsilon$ si $|t|<\delta$. Il s'ensuit que, étant donné $\varepsilon>0$, il existe $0<\delta<1$ tel que si $|t|<\delta$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} |g(f-f_t)|\,dm \leqslant 2M\varepsilon + M\varepsilon(b-a+1).$$

II.3.39. D'après **II.3.30**, étant donné $\varepsilon>0$, il existe une fonction continue g s'annulant en dehors d'un intervalle borné, notons-le $[a\,,b]$, telle que $\|f-g\|_p < \varepsilon$. Puisque g est uniformément continue, il existe $0<\delta<1$ tel que $|g(x)-g_t(x)| < \varepsilon$ si $|t|<\delta$. En utilisant **II.3.38(a)**, on voit donc que, étant donné $\varepsilon>0$, il existe $0<\delta<1$ tel que si $|t|<\delta$, alors

$$\begin{aligned}
\|f-f_t\|_p &\leqslant \|f-g\|_p + \|g-g_t\|_p + \|g_t-f_t\|_p \\
&< \varepsilon + \varepsilon\,(b-a+1)^{1/p} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

II.3.40. Par hypothèse, f est intégrable sur $\mathbf{A}$ et

$$\int_{\mathbf{A}\setminus\mathbf{A}_\delta} f\,dm \leqslant \delta\alpha m(\mathbf{A}).$$

Donc, $\int_{\mathbf{A}_\delta} f\,dm \geqslant (1-\delta)\alpha m(\mathbf{A})$. D'autre part, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_{\mathbf{A}_\delta} f\,dm \leqslant \left(\int_{\mathbf{A}_\delta} f^2\,dm\right)^{1/2} (m(\mathbf{A}_\delta))^{1/2} \leqslant (\beta m(\mathbf{A}))^{1/2}\,(m(\mathbf{A}_\delta))^{1/2}.$$

Il s'ensuit que

$$(1-\delta)\alpha m(\mathbf{A}) \leqslant (\beta m(\mathbf{A}))^{1/2}\,(m(\mathbf{A}_\delta))^{1/2},$$

ce qui implique le résultat désiré.

II.4. Continuité absolue, dérivation et intégration

II.4.1. Puisque f est absolument continue sur $[a\,,b]$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \left|f(x_k) - f(x'_k)\right| < 1$$

pour toute collection finie $\{]x_k\,,x'_k[\}$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints de $[a\,,b]$ vérifiant

$$\sum_{k=1}^{n}(x'_k - x_k) < \delta.$$

Soit $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$ une partition de pas inférieur à δ. La variation totale $V(f; c_{k-1}, c_k)$ de f sur chaque $[c_{k-1}\,,c_k]$ est inférieure à 1. Donc, $V(f;a,b) < m$.

II.4.2. Vu le problème précédent, il suffit de considérer la fonction définie en **I.2.5** avec $\alpha = \beta = 1$.

II.4.3. Si $\alpha > \beta > 0$, alors

$$f(x) = \int_0^x \left(\alpha t^{\alpha-1}\sin\frac{1}{t^\beta} - \beta t^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{t^\beta}\right)dt$$

et l'intégrande est intégrable sur $[0\,,1]$. D'après le **théorème 2**, f est absolument continue. Si $0 < \alpha \leqslant \beta$, un raisonnement semblable à celui utilisé en **I.2.5** montre alors que f n'est pas à variation bornée et, d'après **II.4.1**, n'est pas absolument continue.

II.4.4. On remarque que la fonction

$$f^*(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \in \,]0\,,1], \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a une dérivée bornée sur $[0\,,1]$. La fonction f^* vérifie alors une condition de Lipschitz et elle est donc absolument continue. La fonction $f = |f^*|$ est aussi absolument continue sur $[0\,,1]$. De plus, puisque $g(x) = \sqrt{x} = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $[0\,,1]$ (on peut prolonger cette fonction en choisissant n'importe quelle valeur en 0), d'après le **théorème 2**, g est absolument continue. D'après **II.4.3**, la fonction

$$h(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in \,]0\,,1], \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est absolument continue sur $[0\,,1]$ et en est de même de $f(g(x)) = |h(x)|$. D'autre part, $x \mapsto g(f(x))$, comme fonction à variation non bornée, n'est pas absolument continue.

II.4.5. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x'_k) \right| < \varepsilon$$

pour toute collection finie $\{]x_k\,, x'_k[\}$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints de $[a\,,b]$ vérifiant

$$\sum_{k=1}^{n} (x'_k - x_k) < \delta.$$

Supposons, par exemple, que g est croissante. Elle est absolument continue et il existe $\delta_1 > 0$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{m} (t'_k - t_k) < \delta_1$ implique $\sum\limits_{k=1}^{m} (g(t'_k) - g(t_k)) < \delta$. Il s'ensuit que

$$\sum_{k=1}^{m} \left| f(g(t_k)) - f(g(t'_k)) \right| < \varepsilon.$$

II.4.6.

(a) Soit $\mathbf{A} \subset [a\,,b]$ un ensemble de mesure nulle. On peut supposer, sans perte de généralité, que $\mathbf{A} \subset \,]a\,,b[$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité absolue de f, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x'_k) \right| < \varepsilon$$

pour toute collection finie $\{]x_k\,,x'_k[\}$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints de $[a\,,b]$ vérifiant $\sum\limits_{k=1}^{n}(x'_k - x_k) < \delta$. Puisque $m(\mathbf{A}) = 0$, il existe un ensemble ouvert $\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{A} \subset \mathbf{G} \subset \,]a\,,b[$ et $m(\mathbf{G}) < \delta$. On sait que $\mathbf{G}$ est l'union dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints $]\alpha_i\,,\beta_i[$. On a donc $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}(\beta_i - \alpha_i) < \delta$. Pour un entier strictement positif i, soit $x_i < x'_i$ des points de $[\alpha_i\,,\beta_i]$ où f atteint ses valeurs maximale et minimale. L'application f envoie alors l'intervalle $[\alpha_i\,,\beta_i]$ sur l'intervalle fermé d'extrémités $f(x_i)$ et $f(x'_i)$. Clairement, $\sum\limits_{k=1}^{n}(x'_k - x_k) < \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En conséquence, $\sum\limits_{k=1}^{n}|f(x_k) - f(x'_k)| < \varepsilon$. On voit, en faisant tendre n vers $+\infty$, que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|f(x_k) - f(x'_k)| \leqslant \varepsilon$. D'autre part,

$$f(\mathbf{A}) \subset f(\mathbf{G}) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f\left(]\alpha_i\,,\beta_i[\right) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} f\left([\alpha_i\,,\beta_i]\right).$$

Il existe donc un recouvrement dénombrable de $f(\mathbf{A})$ par des intervalles fermés dont la mesure totale est inférieure à ε.

(b) Il s'agit d'une conséquence immédiate de **II.2.15**.

II.4.7. Non. La fonction de Cantor φ définie en **II.2.11** envoie l'ensemble de Cantor (qui est de mesure nulle) sur $[0\,,1]$. Vu le résultat du précédent problème, φ n'est pas absolument continue bien qu'elle soit continue et croissante.

II.4.8. On suit la démonstration présentée dans [23]. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbf{I}_{k,n} = \,]a + k(b-a)2^{-n}\,, a + (k+1)(b-a)2^{-n}[$ $(k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$ et on définit

$$v_n(y) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \chi_{\mathbf{B}_{k,n}}(y)$$

où $\mathbf{B}_{k,n} = f(\mathbf{I}_{k,n})$. La fonction v_n compte le nombre d'intervalles $\mathbf{I}_{k,n}$ sur lesquels l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution. De plus, si

$$m_{k,n} = \inf\{f(x) : x \in \mathbf{I}_{k,n}\}$$

et $M_{k,n} = \sup\{f(x) : x \in \mathbf{I}_{k,n}\}$, alors $\mathbf{B}_{k,n} = f(\mathbf{I}_{k,n})$ est un intervalle d'extrémités $m_{k,n}$ et $M_{k,n}$. La fonction v_n est donc mesurable et

$$\int_{\mathbb{R}} v_n(y)\,dy = \sum_{k=0}^{2^n-1} m(\mathbf{B}_{k,n}) = \sum_{k=0}^{2^n-1} (M_{k,n} - m_{k,n})\,.$$

Il découle alors de **I.2.16** que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} v_n(y)\,dy = V(f; a, b)$. Par ailleurs, $\{v_n\}$ est une suite croissante et $v_n(y) \leqslant v(y)$. Si on prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(y) = v(y)$ p.p., le résultat suivra comme conséquence du théorème de convergence monotone (voir **II.3**, **th. 1**). Pour cela, on note que si $y \neq f\left(a + k(b-a)2^{-n}\right)$ et si $v(y) = p \in \mathbb{N}^*$, on a alors aussi $v_n(y) = p$ pour n suffisamment grand. Si $v(y) = +\infty$ et $y \neq f\left(a + k(b-a)2^{-n}\right)$, étant donné $q \in \mathbb{N}^*$, il existe alors N tel que $v_N(y) \geqslant q$. Ceci montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(y) = v(y)$ pour tout $y \neq f\left(a + k(b-a)2^{-n}\right)$.

II.4.9. On suit la démonstration présentée dans [23]. Supposons que f ne soit pas absolument continue, une contradiction en découlera. Il existe ε_0 tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe une collection finie $\{]x_k\,, x'_k[\}$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints de $[a\,, b]$ vérifiant $\sum\limits_{k=1}^{n} (x'_k - x_k) < \delta$ et tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x'_k)| \geqslant \varepsilon_0$. On choisit une suite $\{\delta_i\}$ telle que la série $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \delta_i$ converge. Pour chaque δ_i, on trouve une collection finie $\left\{\left]x_{k,i}\,, x'_{k,i}\right[\right\}$ d'intervalles ouverts de $[a\,, b]$, deux à deux disjoints, vérifiant $\sum\limits_{k=1}^{n} (x'_{k,i} - x_{k,i}) < \delta_i$ et tels que

$$\sum_{k=1}^{n_i} (M_{k,i} - m_{k,i}) \geqslant \sum_{k=1}^{n_i} \left|f(x'_{k,i}) - f(x_{k,i})\right| \geqslant \varepsilon_0,$$

où $M_{k,i} = \sup\left\{f(x) : x \in \left]x_{k,i}\,, x'_{k,i}\right[\right\}$ et $m_{k,i} = \inf\left\{f(x) : x \in \left]x_{k,i}\,, x'_{k,i}\right[\right\}$. On pose

$$\mathbf{A}_i = \bigcup_{i=1}^{n_i} \left]x_{k,i}\,, x'_{k,i}\right[\quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{i=n}^{+\infty} \mathbf{A}_i.$$

On vérifie facilement que $m(\mathbf{A}) = 0$. Donc, par hypothèse, $m(f(\mathbf{A})) = 0$. Comme dans la solution du problème précédent, on définit

$$w_i(y) = \sum_{k=1}^{n_i} \chi_{\mathbf{B}_{k,i}}(y)$$

où $\mathbf{B}_{k,i} = f\left(\left]x_{k,i}\,, x'_{k,i}\right[\right)$. La fonction $w_i(y)$ compte le nombre d'intervalles $\left]x_{k,i}\,, x'_{k,i}\right[$ sur lesquels l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution. On a donc $w_i(y) \leqslant v(y)$, où $v(y)$ est l'indicatrice de Banach définie au problème précédent. On a aussi

$$\int_{\mathbb{R}} w_i(y)\,dy = \sum_{k=1}^{n_i}(M_{k,i} - m_{k,i}) \geqslant \varepsilon_0.$$

Puisque $v(y)$ est intégrable, l'ensemble $\mathbf{C} = \{y : v(y) = +\infty\}$ est de mesure nulle. Soit $\mathbf{B} = \left\{y : \lim\limits_{i\to+\infty} w_i(y) \neq 0\right\}$. On va prouver que $\mathbf{B}\setminus\mathbf{C} \subset f(\mathbf{A})$. Si $y_0 \in \mathbf{B}\setminus\mathbf{C}$, il existe alors une suite $\{i_r\}$ telle que $w_{i_r}(y_0) \geqslant 1$. Puisque $w_{i_r}(y_0) \leqslant v(y_0) < +\infty$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments distincts de la suite $\{x_{i_r}\}$ tels que $f(x_{i_r}) = y_0$ et $x_{i_r} \in \mathbf{A}_{i_r}$. Il y a donc un élément, notons-le x_0, apparaissant une infinité de fois dans la suite. Puisque $x_{i_r} \in \mathbf{A}_{i_r}$, on voit que $x_0 \in \mathbf{A}$ et $f(x_0) = y_0 \in f(\mathbf{A})$, ce qui prouve l'inclusion $\mathbf{B}\setminus\mathbf{C} \subset f(\mathbf{A})$, d'où $m(\mathbf{B}) = 0$ et, en conséquence, $\lim\limits_{i\to+\infty} w_i(y) = 0$ p.p. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir **II.3**, **th. 3**), $\lim\limits_{i\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} w_i(y)\,dy = 0$, ce qui contredit le fait que $\int_{\mathbb{R}} w_i(y)\,dy \geqslant \varepsilon_0$.

II.4.10. Le résultat découle immédiatement du problème précédent, de **II.4.1** et **II.4.6**.

II.4.11. On prouve d'abord que $V(F;a,b) \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$. En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| &= \sum_{k=0}^{n-1} \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt,\end{aligned}$$

si $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ est une partition de $[a\,, b]$, ce qui implique

$$V(F;a,b) \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Pour prouver l'inégalité opposée, on définit

$$\mathbf{P} = \{x \in \,]a\,,b[\, : f(x) \geqslant 0\} \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = \{x \in \,]a\,,b[\, : f(x) < 0\}\,.$$

On a alors

$$\int_a^b |f(t)|\,dt = \int_{\mathbf{P}} f(t)\,dt - \int_{\mathbf{N}} f(t)\,dt.$$

Par continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue (voir **II.3.4**), étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\int_{\mathbf{E}} |f(t)|\,dt < \varepsilon$ si $\mathbf{E} \subset [a\,,b]$ et $m(\mathbf{E}) < \delta$. Puisque $\mathbf{P}$ et $\mathbf{N}$ sont des ensembles mesurables, il existe des ensembles fermés $\mathbf{F_P} \subset \mathbf{P}$ et $\mathbf{F_N} \subset \mathbf{N}$ tels que $m(\mathbf{P} \setminus \mathbf{F_P}) < \delta$ et $m(\mathbf{N} \setminus \mathbf{F_N}) < \delta$. Donc,

$$\int_a^b |f(t)|\,dt < \int_{\mathbf{F_P}} f(t)\,dt - \int_{\mathbf{F_N}} f(t)\,dt + 2\varepsilon.$$

Les ensembles $\mathbf{F_P}$ et $\mathbf{F_N}$ étant fermés et disjoints, il existe des sous-ensembles ouverts de $]a\,,b[$, notons-les $\mathbf{G_P}$ et $\mathbf{G_N}$, contenant respectivement $\mathbf{F_P}$ et $\mathbf{F_N}$ tels que $m(\mathbf{G_P} \setminus \mathbf{F_P}) < \delta$ et $m(\mathbf{G_N} \setminus \mathbf{F_N}) < \delta$. On a donc

$$\int_a^b |f(t)|\,dt < \int_{\mathbf{G_P}} f(t)\,dt - \int_{\mathbf{G_N}} f(t)\,dt + 4\varepsilon.$$

On sait que tout ensemble ouvert est l'union dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. Il existe donc une union finie $\bigcup\limits_{k=1}^{n}\,]\alpha_k\,,\beta_k[\, = \mathbf{G}_n$ telle que $m(\mathbf{G_P} \setminus \mathbf{G}_n) < \delta$. D'où,

$$\int_{\mathbf{G_P}} f(t)\,dt - \int_{\mathbf{G}_n} f(t)\,dt < \varepsilon.$$

Puisque

$$\int_{\mathbf{G}_n} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} (F(\beta_k) - F(\alpha_k)),$$

on obtient

$$\int_{\mathbf{G_P}} f(t)\,dt < \sum_{k=1}^{n} (F(\beta_k) - F(\alpha_k)) + \varepsilon.$$

De même, si $\mathbf{G_N} = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}\,]\sigma_k\,,\tau_k[$, où les $]\sigma_k\,,\tau_k[$ sont deux à deux disjoints, il existe m tel que

$$\int_{\mathbf{G_N}} f(t)\,dt > \sum_{k=1}^{m} (F(\tau_k) - F(\sigma_k)) - \varepsilon.$$

Il s'ensuit que

$$\int_a^b |f(t)|\,dt < \sum_{k=1}^{n}(F(\beta_k) - F(\alpha_k)) - \sum_{k=1}^{m}(F(\tau_k) - F(\sigma_k)) + 6\varepsilon,$$

ce qui implique

$$\int_a^b |f(t)|\,dt < \sum_{k=1}^{n}|F(\beta_k) - F(\alpha_k)| + \sum_{k=1}^{m}|F(\tau_k) - F(\sigma_k)| + 6\varepsilon.$$

Puisque les intervalles deux à deux disjoints $]\alpha_k\,,\beta_k[$ sont disjoints des intervalles deux à deux disjoints $]\sigma_i\,,\tau_i[$, on voit que

$$\sum_{k=1}^{n}|F(\beta_k) - F(\alpha_k)| + \sum_{k=1}^{m}|F(\tau_k) - F(\sigma_k)| \leqslant V(F;a,b),$$

d'où

$$\int_a^b |f(t)|\,dt < V(F;a,b) + 6\varepsilon.$$

II.4.12.

(a) On pose $\mathbf{A} = g(\mathbf{E})$. On sait, d'après **II.4.6**, que $\mathbf{A}$ est un sous-ensemble mesurable de $[c\,,d]$. Si $\mathbf{A}$ est ouvert, alors $\mathbf{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\,]\alpha_n\,,\beta_n[$, où les $]\alpha_n\,,\beta_n[$ sont deux à deux disjoints et $\alpha_n = g(x_n)$, $\beta_n = g(y_n)$. On obtient, en utilisant le **théorème 2**,

$$\begin{aligned} m(\mathbf{A}) &= \sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n - \alpha_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(g(y_n) - g(x_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_n}^{y_n} g'(x)\,dx = \int_{\mathbf{E}} g'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Si $\mathbf{A}$ est fermé, $]c\,,d[\setminus\mathbf{A}$ est alors ouvert et, d'après ce que l'on vient de prouver et le **théorème 2**, on voit que l'égalité proposée est aussi vérifiée dans ce cas. Puisque $\mathbf{A}$ est mesurable, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble ouvert $\mathbf{G}$ et un ensemble fermé $\mathbf{F}$ tels que $\mathbf{F} \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{G}$, $m(\mathbf{G}) < m(\mathbf{A}) + \varepsilon$ et $m(\mathbf{F}) > m(\mathbf{A}) - \varepsilon$. Puisque $g' \geqslant 0$, on a

$$\int_{g^{-1}(\mathbf{F})} g'\,dm \leqslant \int_E g'\,dm \leqslant \int_{g^{-1}(\mathbf{G})} g'\,dm,$$

ce qui implique

$$m(\mathbf{A}) - \varepsilon < m(\mathbf{F}) \leqslant \int_E g'\,dm \leqslant m(\mathbf{G}) < m(\mathbf{A}) + \varepsilon.$$

(b) On peut supposer, sans perte de généralité, que $\mathbf{A} \subset \,]c\,,d[$. Puisque $m(\mathbf{A}) = 0$, il existe une suite d'ensembles ouverts $\mathbf{G}_n$ telle que

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{G}_{n+1} \subset \mathbf{G}_n \subset \,]c\,,d[\qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} m(\mathbf{G}_n) = 0$. On pose $\widetilde{\mathbf{A}} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{G}_n$. On a alors $\mathbf{A} \subset \widetilde{\mathbf{A}}$, $m(\widetilde{\mathbf{A}}) = 0$ et $g^{-1}(\widetilde{\mathbf{A}}) = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} g^{-1}(\mathbf{G}_n)$ est mesurable. D'après (a),

$$0 = m(\widetilde{\mathbf{A}}) = \int_{g^{-1}(\widetilde{\mathbf{A}})} g'\,dm = \int_{g^{-1}(\widetilde{\mathbf{A}})\cap\mathbf{H}} g'\,dm.$$

Donc $m(g^{-1}\left(\widetilde{\mathbf{A}}\right) \cap \mathbf{H}\Big) = 0$ et la proposition suit car $g^{-1}(\mathbf{A}) \subset g^{-1}(\widetilde{\mathbf{A}})$.

(c) D'après **II.1.12**, il existe un $\mathcal{G}_\delta$-ensemble $\mathbf{U}$ et un ensemble $\mathbf{A}$ de mesure nulle tels que $\mathbf{B} = \mathbf{U} \cup \mathbf{A}$. On a alors $g^{-1}(\mathbf{B}) = g^{-1}(\mathbf{U}) \cup g^{-1}(\mathbf{A})$ et $g^{-1}(\mathbf{U})$ est aussi un $\mathcal{G}_\delta$-ensemble car g est continue et strictement croissante. Il découle de (b) que $m\left(g^{-1}(\mathbf{A}) \cap \mathbf{H}\right) = 0$. Donc, $g^{-1}(\mathbf{B}) \cap \mathbf{H}$ est mesurable. De plus,

$$\int_{\mathbf{C}} g'\,dm = \int_{g^{-1}(\mathbf{U})\cap\mathbf{H}} g'\,dm = \int_{g^{-1}(\mathbf{U})} g'\,dm = m(\mathbf{U}) = m(\mathbf{B}),$$

la troisième égalité se déduisant de (a). On a aussi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{C}} g'\,dm &= \int_{g^{-1}(\mathbf{B})\cap\mathbf{H}} g'\,dm = \int_a^b \chi_{g^{-1}(\mathbf{B})\cap\mathbf{H}}(x) g'(x)\,dx \\ &= \int_a^b \chi_{\mathbf{B}}(g(x)) g'(x)\,dx.\end{aligned}$$

II.4.13. On suppose d'abord que f est une fonction simple sur $[c\,,d]$, autrement dit, que $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \chi_{\mathbf{A}_i}(x)$, où $[c\,,d] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i$. D'après **II.4.12(c)**, on a

$$\begin{aligned}\int_c^d f(t)\,dt &= \sum_{i=1}^{n} c_i m(\mathbf{A}_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b \chi_{\mathbf{A}_i}(g(x)) g'(x)\,dx \\ &= \int_a^b \chi_{\mathbf{B}} f(g(x)) g'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Si f est positive, il existe alors une suite croissante $\{f_n\}$ de fonctions simples convergente vers f et l'égalité demandée se déduit du théorème de convergence monotone de Lebesgue (voir **II.3**, **th. 1**). Enfin, si f est une fonction intégrable quelconque, l'égalité à prouver est une conséquence du fait que $\int_c^d f(t)\,dt = \int_c^d f^+(t)dt - \int_c^d f^-(t)\,dt$.

II.4.14. D'après le **théorème 2**, F et G sont absolument continues sur $[a\,,b]$. Nous allons prouver que FG est aussi absolument continue. Pour cela, on note respectivement A et B les extrema de $|F(x)|$ et $|G(x)|$ sur $[a\,,b]$ et on observe que

$$|F(t)G(t) - F(s)G(s)| \leqslant A\,|G(t) - G(s)| + B\,|F(t) - F(s)|\,.$$

Ceci implique clairement la continuité absolue de FG. FG est donc dérivable p.p. et $(FG)' = FG' + F'G = Fg + fG$, la dernière égalité se déduisant du **théorème 2**. L'égalité voulue en découle en faisant de nouveau appel au **théorème 2**.

II.4.15. Ceci est une conséquence immédiate du **théorème 2** et du résultat du problème précédent.

II.4.16. Toute fonction f croissante sur $[a\,,b]$ est dérivable p.p. et, d'après le **théorème 1**, f' est intégrable. Donc, d'après le **théorème 2**,

$$g(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

est absolument continue et $g'(x) = f'(x)$ p.p. Si on pose $h(x) = f(x) - g(x)$, on obtient alors la représentation $f(x) = g(x) + h(x)$, où g est absolument continue et h est singulière. Pour voir que h est croissante, on fait de nouveau appel au **théorème 1** et on obtient

$$h(x_2) - h(x_1) = f(x_2) - f(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} f'(t)\,dt \geqslant 0$$

pour $x_2 > x_1$.

II.4.17. L'exemple suivant est dû à L. Takács [*Amer. Math. Monthly*, 85(1978), 35-37]. Pour

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-a_n}, \tag{$*$}$$

où $a_1 < a_2 < \cdots$ sont des entiers strictement positifs, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{(1+r)^{a_n}}\,, \qquad r > 0.$$

De cette façon, f est bien définie sur $]0\,,1]$ et on pose $f(0) = 0$. On prouve d'abord que f est strictement croissante sur $[0\,,1]$. Clairement, $f(0) < f(x)$ pour $0 < x \leqslant 1$. Si $0 < x < y \leqslant 1$ et $y = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^{-b_n}$, où $b_1 < b_2 < \cdots$ sont des entiers strictement positifs, il existe alors un plus petit entier k tel que $a_k > b_k$. Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{r^n}{(1+r)^{a_n}} &\leqslant \frac{r^k}{(1+r)^{a_k}}\left(1 + \frac{r}{1+r} + \frac{r^2}{(1+r)^2} + \cdots\right)\\ &= \frac{r^k}{(1+r)^{a_k - 1}} \leqslant \frac{r^k}{(1+r)^{b_k}} < \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{r^n}{(1+r)^{b_n}}\,,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $f(x) < f(y)$. Pour x défini par $(*)$, on pose

$$x_n = \sum_{a_k \leqslant n} 2^{-a_k} \quad \text{et} \quad y_n = x_n + 2^{-n}.$$

On a alors $x_n < x \leqslant y_n$ et $f(y_n) - f(x_n) = \frac{r^{k_n+1}}{(1+r)^n}$, où k_n est le nombre de a_k inférieurs ou égaux à n. Puisque $k_n \leqslant n$, on peut facilement vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(y_n) - f(x_n)) = 0$, ce qui implique la continuité de f sur $]0\,,1]$. Clairement, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

On sait que f' existe et est finie p.p. Donc (voir, par exemple, **II.1.14 (vol. II)**),

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{1+r}\right)^n r^{k_n+1}.$$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} r^{k_n - k_{n-1}} = \frac{1+r}{2}$ si $f'(x) \neq 0$. Donc, soit $r = 1$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n - k_{n-1} = k$. Dans le second cas (voir, par exemple, **II.3.14 (vol. I)**), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k_n}{n} = k$. Puisque $0 \leqslant k_n \leqslant n$ sont des entiers, on conclut que $k = 0$ ou $k = 1$. Dans les deux cas, on obtient $r = 1$. En conséquence, $f' = 0$ p.p. si $r \neq 1$.

II.4.18. On considère d'abord une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt$, où φ est une certaine fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. La continuité absolue de f sur $[-K\,, K]$ découle alors de la continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue (voir **II.3.4**). De plus, on sait de **II.4.11** que

$$V(f; -K, K) = \int_{-K}^{K} |\varphi(x)|\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |\varphi|\, dm,$$

ce qui implique $V(f; -\infty, \infty) < +\infty$. Soit $\{x_n\}$ une suite tendant vers $-\infty$. La suite $\varphi \cdot \chi_{]-\infty, x_n]}$ converge alors vers zéro sur $\mathbb{R}$ et, d'après le théorème de convergence de dominée de Lebesgue (voir **II.3**, **th. 3**),

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \int_{\mathbb{R}} \varphi \cdot \chi_{]-\infty, x_n]}\, dm = 0.$$

Réciproquement, si f est absolument continue sur $[-K\,, K]$, alors, d'après le **théorème 2**,

$$f(x) = f(-K) + \int_{-K}^{x} f'(t)\, dt$$

et, en faisant tendre K vers $+\infty$, on obtient

$$f(x) = \lim_{K\to+\infty} \int_{-K}^{x} f'(t)\, dt.$$

On a de plus

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f'(t)\right| dt &= \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} \left|f'(t)\right| dt \\
&= \lim_{n\to+\infty} V(f; -n, n) = V(f; -\infty, +\infty) < +\infty,
\end{aligned}$$

la seconde égalité se déduisant de **II.4.11**.

II.4.19. Dans la formule d'intégration par parties donnée en **II.4.15**, on prend les limites lorsque a tend vers $-\infty$ et b tend vers $+\infty$ et on applique le résultat du problème précédent.

II.4.20. On remarque d'abord que f_h est bien définie car $L^p\,[a\,, b] \subset L^1\,[a\,, b]$ (voir **II.3.35**). Puisque

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\left(F(x+h) - F(x-h)\right) \quad \text{où} \quad F(x) = \int_{a-h}^{x} f(t)\, dt,$$

la continuité de f_h découle du **théorème 2**. Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, d'après l'inégalité de Hölder (voir **I.6.27**), on a

$$|f_h(x)|^p \leqslant \frac{1}{(2h)^p} \left(\int_{x-h}^{x+h} 1\, dt \right)^{\frac{p}{p'}} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)|^p\, dt = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)|^p\, dt.$$

Clairement, pour $p = 1$, on a

$$|f_h(x)| \leqslant \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)|\, dt.$$

Donc, en utilisant le théorème de Fubini et la formule de changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f_h(x)|^p\, dx &\leqslant \frac{1}{2h} \int_a^b \left(\int_{x-h}^{x+h} |f(t)|^p\, dt \right) dx \\
&= \frac{1}{2h} \int_a^b \left(\int_{-h}^{h} |f(t+x)|^p\, dt \right) dx \\
&= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \left(\int_a^b |f(t+x)|^p\, dx \right) dt \\
&= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \left(\int_{a+t}^{b+t} |f(u)|^p\, du \right) dt \\
&\leqslant \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \left(\int_a^b |f(u)|^p\, du \right) dt = \int_a^b |f(u)|^p\, du,
\end{aligned}$$

la dernière inégalité se déduisant du fait que f s'annule en dehors de $[a\,, b]$. L'inégalité $\|f_h\|_p \leqslant \|f\|_p$ est donc prouvée.

II.4.21. Si $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on a alors, avec l'inégalité de Hölder (voir **I.6.27**),

$$\begin{aligned}
\|f_h - f\|_p^p &= \int_a^b \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt - \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(x)\, dt \right|^p dx \\
&\leqslant \frac{1}{(2h)^p} \int_a^b \left(\int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt \right)^p dx \\
&\leqslant \frac{1}{(2h)^p} \int_a^b \left(\int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)|^p\, dt \right) (2h)^{p/p'}\, dx \\
&= \frac{1}{2h} \int_a^b \left(\int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)|^p\, dt \right) dx \\
&= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \left(\int_a^b |f(t+x) - f(x)|^p\, dx \right) dt,
\end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de la formule de changement de variable et du théorème de Fubini. Il est clair que l'inégalité obtenue est aussi vérifiée pour $p = 1$. Donc, d'après **II.3.39**, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\int_a^b |f(t+x) - f(x)|^p\, dx < \varepsilon$ pour $|t| < \delta$. En conséquence, si $0 < h < \delta$, alors $\|f_h - f\|_p^p < \varepsilon$.

La fonction f_h étant continue sur $[a\,, b]$, on notera ici qu'elle réalise l'approximation énoncée en **II.3.37**.

II.4.22. On a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\, dt \right| \\
&\leqslant \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt,
\end{aligned}$$

ce qui donne $F'(x) = f(x)$.

II.4.23. Si f est continue en x, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ si $|t - x| < \delta$. Donc, pour $|h| < \delta$,

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt < \varepsilon.$$

II.4.24. Si r est un nombre rationnel, la fonction $t \mapsto |f(t) - r|$ est intégrable sur $[a\,, b]$ et, d'après le **théorème 2**,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - r|\, dt = |f(x) - r|$$

pour presque tout $x \in [a\,,b]$. Notons $\mathbf{E}(r)$ l'ensemble des points de $[a\,,b]$ où l'égalité précédente n'est pas vérifiée, on a $m(\mathbf{E}(r)) = 0$. Si $\{r_n\}$ est une énumération de tous les rationnels, l'ensemble

$$\mathbf{E} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{E}(r_n) \cup \{x \in [a\,,b] : f(x) = \pm\infty\}$$

est de mesure nulle. Notre but est de prouver que tout point de $[a\,,b] \setminus \mathbf{E}$ est un point de Lebesgue de f. Soit $x_0 \in [a\,,b] \setminus \mathbf{E}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe alors r_n tel que $|f(x_0) - r_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ et

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_n|\,dt - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puisque $x_0 \notin \mathbf{E}$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_n|\,dt - |f(x_0) - r_n| \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

si $|h| < \delta$, ce qui implique

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - r_n|\,dt < \frac{2}{3}\,\varepsilon.$$

On a alors, pour $|h| < \delta$,

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,dt < \varepsilon.$$

II.4.25. On peut supposer, sans perte de généralité, que $\mathbf{A}$ est borné, par exemple $\mathbf{A} \subset [\alpha\,,\beta]$. On pose $a = \alpha - 1$ et $b = \beta + 1$. Alors, $F(x) = \int_a^x \chi_{\mathbf{A}}(t)\,dt$ vérifie $F'(x) = \chi_{\mathbf{A}}(x)$ pour presque tout $x \in [a\,,b]$. En particulier, $F'(x) = 1$ presque partout sur $\mathbf{A}$. Si x est tel que $F'(x) = 1$, alors

$$\begin{aligned}
1 = F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \chi_{\mathbf{A}}(t)\,dt \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{m\big(\mathbf{A} \cap [x-h\,,x+h]\big)}{2h}.
\end{aligned}$$

II.4.26. On sait par **II.1.11** qu'il existe un $\mathcal{G}_\delta$-ensemble $\mathbf{E}$ tel que $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$ et $m(\mathbf{E}) = m^*(\mathbf{A})$. On peut supposer que $m^*(\mathbf{A}) < +\infty$ sans perte de généralité. Donc, pour tout intervalle $\mathbf{I}$,

$$\begin{aligned}
m(\mathbf{E} \cap \mathbf{I}) &= m(\mathbf{E}) - m(\mathbf{E} \setminus \mathbf{I}) = m^*(\mathbf{A}) - m(\mathbf{E} \setminus \mathbf{I}) \\
&\leqslant m^*(\mathbf{A}) - m^*(\mathbf{A} \setminus \mathbf{I}) \leqslant m^*(\mathbf{A} \cap \mathbf{I})
\end{aligned}$$

et la première proposition se déduit du résultat donné au problème précédent. Pour prouver la seconde proposition, on remarque que si $\mathbf{A}$ est mesurable, il en est alors de même de $\mathbf{A}^c$ et presque tous les points de $\mathbf{A}^c$ sont donc des points de densité de cet ensemble, d'où des points de dispersion de $\mathbf{A}$. Pour démontrer l'implication réciproque, supposons que $\mathbf{A}$ ne soit pas mesurable. D'après **II.1.11**, il existe pour $\mathbf{A}$ un recouvrement mesurable $\mathbf{E}$ tel que $m^*(\mathbf{A}) = m(\mathbf{E})$. Puisque $\mathbf{E}$ est mesurable, presque tous les points de $\mathbf{E} \setminus \mathbf{A}$ sont des points de densité de $\mathbf{E}$ et, d'après ce qui précède, ce sont aussi des points de densité extérieure de $\mathbf{A}$. Puisque $\mathbf{A}$ n'est pas mesurable, $m^*(\mathbf{E} \setminus \mathbf{A}) > 0$. Ceci implique que l'ensemble des points de $\mathbf{A}^c$ qui ne sont pas des points de dispersion extérieure de $\mathbf{A}$ est un ensemble de mesure extérieure strictement positive.

II.4.27. On suppose que f est mesurable sur $[a\,,b]$. Le théorème de Lusin (voir **II.2.27**) implique que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fermé $\mathbf{F} \subset [a\,,b]$ tel que $m([a\,,b] \setminus \mathbf{F}) < \varepsilon$ et $f_{|\mathbf{F}}$ est continue. D'après le problème précédent, presque tous les points de $\mathbf{F}$ sont des points de dispersion de $\mathbf{F}^c$. Donc si $x_0 \in \mathbf{F}$ est un point de dispersion de $\mathbf{F}^c$, on a alors, pour tout $\varepsilon_1 > 0$,

$$\{x \in [x_0 - h\,, x_0 + h] : |f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_1\} \subset [x_0 - h\,, x_0 + h] \cap \mathbf{F}^c$$

pour $h > 0$ suffisamment petit, ce qui prouve que l'ensemble sur lequel f n'est pas approximativement continue est de mesure plus petite que ε. Puisque l'on peut choisir arbitrairement $\varepsilon > 0$, on a donc prouvé que la condition est nécessaire. On suppose maintenant que f est approximativement continue p.p. sur $[a\,,b]$. Soit c un réel. On montre que l'ensemble $\mathbf{A} = \{x \in [a\,,b] : f(x) > c\}$ est mesurable. D'après **II.4.26**, il suffit de prouver que presque tous les points de $\mathbf{A}^c$ sont des points de dispersion extérieure de $\mathbf{A}$. Soit $x_0 \in \mathbf{A}$ un point de continuité approximative de f. On prend $\varepsilon = f(x_0) - c > 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
&\frac{m^*\left(\{x \in [x_0 - h\,, x_0 + h] : |f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon\}\right)}{2h} \\
&\qquad\geqslant \frac{m^*\left(\{x \in [x_0 - h\,, x_0 + h] : f(x) \leqslant c\}\right)}{2h} \\
&\qquad\qquad= \frac{m^*\left([x_0 - h\,, x_0 + h] \cap \mathbf{A}^c\right)}{2h}
\end{aligned}$$

et la définition de la continuité approximative implique

$$\lim_{h \to 0} \frac{m^*\left([x_0 - h\,, x_0 + h] \cap \mathbf{A}^c\right)}{2h} = 0,$$

ce qui signifie que x_0 est un point de dispersion extérieure de $\mathbf{A}^c$. Presque tous les points de $\mathbf{A}$ étant des points de continuité approximative de f, on a donc prouvé que la condition est suffisante.

On notera ici qu'une fonction bornée sur $[a\,,b]$ est Riemann-intégrable si et seulement si elle est presque partout continue (voir **II.1.55**). Le résultat ci-dessus montre qu'une fonction bornée sur $[a\,,b]$ est mesurable et donc Lebesgue-intégrable si et seulement si elle est p.p. approximativement continue.

II.4.28. On suppose que x_0 est un point de Lebesgue de f. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\frac{m\left(\{x \in [x_0\,, x_0+h] : |f(x)-f(x_0)| \geqslant \varepsilon\}\right)}{h} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(x)-f(x_0)|\,dx.$$

On déduit de la définition d'un point de Lebesgue que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{m\left(\{x \in [x_0\,, x_0+h] : |f(x)-f(x_0)| \geqslant \varepsilon\}\right)}{h} = 0,$$

ce qui implique que chaque point de Lebesgue d'une fonction Lebesgue-intégrable est un point où elle est approximativement continue.

Pour prouver que la réciproque est fausse, on considère la fonction définie sur $[-1\,,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2^n & \text{si } \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On montre d'abord que f est intégrable sur $[-1\,,1]$. On a

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \frac{1}{2^{2n+1}} = 1.$$

On observe maintenant que 0 est un point de continuité approximative de f. Si $\frac{1}{2^{n+1}} < h \leqslant \frac{1}{2^n}$, pour $0 < \varepsilon < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{m\left([-h\,,h] \cap \{x : f(x) > \varepsilon\}\right)}{2h} &\leqslant \frac{m\left(\left[-\frac{1}{2^n}\,,\frac{1}{2^n}\right] \cap \{x : f(x) > \varepsilon\}\right)}{\frac{2}{2^{n+1}}} \\
&= \frac{\frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2^{2(n+1)+1}} + \cdots}{\frac{1}{2^n}} \\
&= \frac{1}{3\times 2^{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}2^n \int_0^{1/2^n} |f(x) - f(0)|\, dx &= 2^n \int_0^{1/2^n} f(x)\, dx \\ &= 2^n \sum_{k=n}^{+\infty} 2^k \frac{1}{2^{2k+1}} = 1,\end{aligned}$$

0 n'est donc pas un point de Lebesgue de f.

II.4.29. En considérant le résultat du problème précédent, il suffit de montrer que si f est bornée et mesurable sur $[a\,, b]$, alors tout point de continuité approximative de f est un point de Lebesgue de f. Si $x \in \,]a\,, b[$ est un point de continuité approximative de f et $|f(t)| \leqslant M$, $a \leqslant t \leqslant b$, étant donné $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt &= \frac{1}{h}\int_{[x,x+h]\cap\{t:|f(t)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}} |f(t) - f(x)|\, dt \\ &\quad + \frac{1}{h}\int_{[x,x+h]\cap\{t:|f(t)-f(x)|<\varepsilon\}} |f(t) - f(x)|\, dt \\ &\leqslant 2M\frac{m\left([x, x+h] \cap \{t : |f(t) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}\right)}{h} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Un passage à la limite lorsque h tend vers 0 donne

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt \leqslant \varepsilon$$

et $\varepsilon > 0$ pouvant être choisi arbitrairement petit, le résultat demandé s'ensuit.

II.4.30. On suppose d'abord que $x_0 \in \,]a\,, b[$ est un point de continuité approximative de f au sens de la définition donnée en **II.4.27**. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$\mathbf{B}_n = \left\{x \in [a\,, b] : |f(x) - f(x_0)| \geqslant \frac{1}{n}\right\}$$

et, pour h strictement positif, on pose

$$\mathbf{B}_{n,h} = \mathbf{B}_n \cap [x_0 - h\,, x_0 + h].$$

On sait de **II.1.11** qu'il existe un $\mathcal{G}_\delta$-ensemble $\mathbf{G}_n$ tel que $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{G}_n$ et $m^*(\mathbf{B}_n) = m(\mathbf{G}_n)$. Si $\mathbf{G}_{n,h} = \mathbf{G}_n \cap [x_0 - h\,, x_0 + h]$, alors $\mathbf{G}_{n,h}$ est un ensemble mesurable contenant $\mathbf{B}_{n,h}$ et $m^*(\mathbf{B}_{n,h}) = m(\mathbf{G}_{n,h})$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_n &= \mathbf{G}_{n,h} \cup (\mathbf{G}_n \setminus [x_0 - h\,, x_0 + h]),\\ \mathbf{B}_n &= \mathbf{B}_{n,h} \cup (\mathbf{B}_n \setminus [x_0 - h\,, x_0 + h])\end{aligned}$$

et, puisque $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{G}_n$ et $\mathbf{B}_{n,h} \subset \mathbf{G}_{n,h}$, on obtient

$$\begin{aligned} m^*(\mathbf{B}_n) &\leqslant m^*(\mathbf{B}_{n,h}) + m^*(\mathbf{B}_n \setminus [x_0 - h\,, x_0 + h]) \\ &\leqslant m(\mathbf{G}_{n,h}) + m(\mathbf{G}_n \setminus [x_0 - h\,, x_0 + h]) \\ &= m(\mathbf{G}_n) = m^*(\mathbf{B}_n). \end{aligned}$$

Ceci implique

$$m^*(\mathbf{B}_{n,h}) = m(\mathbf{G}_{n,h})$$

et

$$m^*(\mathbf{B}_n \setminus [x_0 - h\,, x_0 + h]) = m(\mathbf{G}_n \setminus [x_0 - h\,, x_0 + h]).$$

Par définition de la continuité approximative,

$$\lim_{h \to 0} \frac{m^*(\mathbf{B}_n \cap [x_0 - h\,, x_0 + h])}{2h} = 0$$

et il existe donc h_n tel que

$$\frac{m^*(\mathbf{B}_n \cap [x_0 - h\,, x_0 + h])}{2h} \leqslant \frac{1}{n}$$

pour $0 < h \leqslant h_n$. Si maintenant $\mathbf{C}_n = [a\,, b] \setminus \mathbf{B}_n$, alors $\mathbf{C}_n \supset [a\,, b] \setminus \mathbf{G}_n = \mathbf{H}_n$ et $m^*(\mathbf{C}_n) \geqslant m(\mathbf{H}_n) = b - a - m(\mathbf{G}_n)$. De plus, pour $0 < h \leqslant h_n$, on a

$$\frac{m^*(\mathbf{C}_n \cap [x_0 - h\,, x_0 + h])}{2h} \geqslant \frac{m(\mathbf{H}_{n,h})}{2h} \geqslant \frac{2h - m(\mathbf{G}_{n,h})}{2h} \geqslant 1 - \frac{1}{n}\,,$$

où $\mathbf{H}_{n,h} = \mathbf{H}_n \cap [x_0 - h\,, x_0 + h]$. On remarque encore que l'on peut choisir h_n de sorte que $h_{n+1} < h_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = 0$. On définit alors

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{H}_{n,h_n} \setminus \left[x_0 - \frac{h_{n+1}}{n}\,, x_0 + \frac{h_{n+1}}{n}\right]$$

et on pose

$$\mathbf{A} = \bigcup_{n=3}^{+\infty} \mathbf{A}_n \cup \{x_0\}.$$

Il découle de ce qui précède que, pour $h_{n+1} < h \leqslant h_n$, on a

$$\begin{aligned} \frac{m(\mathbf{A} \cap [x_0 - h\,, x_0 + h])}{2h} &\geqslant \frac{m(\mathbf{A}_n \cap [x_0 - h\,, x_0 + h])}{2h} \\ &= \frac{m(\mathbf{H}_{n,h}) - 2\frac{h_{n+1}}{n}}{2h} \geqslant 1 - \frac{1}{n} - \frac{h_{n+1}}{nh} \\ &> 1 - \frac{2}{n}\,, \end{aligned}$$

ce qui montre que x_0 est un point de densité de $\mathbf{A}$. On prouve maintenant que $f_{|\mathbf{A}}$ est continue en x_0. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$\frac{1}{n} < \varepsilon$. Si $|x - x_0| < \frac{h_n}{n-1}$ et $x \in \mathbf{A}$, il découle alors de la construction de $\mathbf{A}$ que $x \notin \mathbf{A}_m$ pour $m < n$. Donc, $x \in \mathbf{A}_k$ pour un certain $k \geqslant n$ et $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon$.

On suppose maintenant qu'il existe un ensemble mesurable $\mathbf{A}$ tel que x_0 soit un point de densité de $\mathbf{A}$ et tel que la restriction de f à $\mathbf{A}$ soit continue en x_0. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors $h > 0$ tel que

$$\{x \in [x_0 - h\,, x_0 + h] : |f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon\} \subset [x_0 - h\,, x_0 + h] \setminus \mathbf{A}.$$

Réciproquement,

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{m^*\left(\{x \in [x_0 - h\,, x_0 + h] : |f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon\}\right)}{2h} \leqslant 1 - \lim_{h\to 0} \frac{m\left(\mathbf{A} \cap [x_0 - h\,, x_0 + h]\right)}{2h} = 0,$$

la dernière égalité se déduisant du fait que x_0 est un point de densité de $\mathbf{A}$.

II.4.31. [C. Goffman, *Amer. Math. Monthly* 84(1977), 205-206]. Soit $\mathbf{A}$ l'ensemble de Cantor généralisé construit en **I.7.12** pour $\alpha = \frac{1}{2}$. $\mathbf{G} = [0\,, 1] \setminus \mathbf{A}$ est un sous-ensemble ouvert dense de $[0\,, 1]$. Si $\mathbf{G} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{I}_n$, les $\mathbf{I}_n$ étant des intervalles ouverts deux à deux disjoints, alors $m(\mathbf{G}) = \sum_{n=1}^{+\infty} |\mathbf{I}_n| = \frac{1}{2}$. Pour tout n, soit $\mathbf{J}_n \subset \mathbf{I}_n$ un intervalle fermé à l'intérieur de I_n tel que $|\mathbf{J}_n| = |\mathbf{I}_n|^2$. Pour tout n, on définit f sur $\mathbf{J}_n$ comme étant continue, de valeurs comprises entre 0 et 1, valant 1 au centre de $\mathbf{J}_n$ et 0 à ses extrémités. Si x n'appartient pas à $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{J}_n$, on pose alors $f(x) = 0$. On montre d'abord que f n'est pas Riemann-intégrable sur $[0\,, 1]$. Soit $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$ une partition de $[0\,, 1]$. Si $]x_{k-1}\,, x_k[\cap \mathbf{A} \neq \varnothing$, l'oscillation de f sur $[x_{k-1}\,, x_k]$ est égale à 1. Puisque $m(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}$, la somme des longueurs des intervalles $[x_{k-1}\,, x_k]$ sur lesquels l'oscillation de f est égale à 1 est supérieure à $\frac{1}{2}$. En conséquence,

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx - \underline{\int_0^1} f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{2}\,.$$

On prouve maintenant que f est approximativement continue sur $[0\,, 1]$. Par définition, f est continue sur $\mathbf{G}$. Soit $x_0 \in \mathbf{A}$. On se donne $0 < \varepsilon < 1$. Il est clair que tout intervalle $[x_0 - h\,, x_0 + h]$ $(h > 0)$ contient une infinité d'intervalles $\mathbf{I}_n$. Si h est suffisamment petit, alors seuls des intervalles $\mathbf{I}_n$ pour n assez grand peuvent être contenus dans $[x_0-h\,,x_0+h]$. Donc, pour h suffisamment petit,

$$\frac{m\left(\{x\in[x_0-h\,,x_0+h]:|f(x)-f(x_0)|>\varepsilon\}\right)}{2h}\leqslant\frac{\sum'|\mathbf{J}_n|+r_1+r_2}{2h},$$

où $\sum'$ représente la somme sur les n tels que $\mathbf{I}_n\subset[x_0-h\,,x_0+h]$, $r_1=m(\mathbf{J}_k\cap[x_0-h\,,x_0+h])$ si $x_0-h\in\mathbf{J}_k$ et $r_1=0$ autrement, $r_2=m(\mathbf{J}_s\cap[x_0-h\,,x_0+h])$ si $x_0+h\in\mathbf{J}_s$ et $r_2=0$ autrement. On a

$$\frac{r_1}{2h}\leqslant\frac{|\mathbf{I}_k|^2}{|\mathbf{I}_k|-|\mathbf{J}_k|}=\frac{|\mathbf{I}_k|}{1-|\mathbf{I}_k|}$$

et $\frac{r_2}{2h}$ vérifie aussi une majoration semblable. De plus,

$$\frac{\sum'|\mathbf{J}_n|}{2h}\leqslant\frac{\sum'|\mathbf{J}_n|}{\sum'|\mathbf{I}_n|}=\frac{\sum'|\mathbf{I}_n|^2}{\sum'|\mathbf{I}_n|}\leqslant\sum{}'\frac{|\mathbf{I}_n|^2}{|\mathbf{I}_n|}=\sum{}'|\mathbf{I}_n|.$$

Il s'ensuit que x_0 est un point de continuité approximative de f. Il suffit alors de faire appel aux résultats de **II.4.22** et **II.4.29**.

II.4.32. On note d'abord que G est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to-\infty}G(t)=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}G(t)=b-a$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ choisi arbitrairement et $k\in\mathbb{Z}$, on pose

$$\mathbf{I}_k=\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\quad\text{et}\quad\mathbf{A}_k=\left\{x\in[a\,,b]:\frac{k-1}{n}\leqslant f(x)<\frac{k}{n}\right\}.$$

On a alors $G\left(\frac{k}{n}\right)-G\left(\frac{k-1}{n}\right)=m(\mathbf{A}_k)$,

$$\frac{k-1}{n}\,m(\mathbf{A}_k)\leqslant\int_{\mathbf{A}_k}f\,dm\leqslant\frac{k}{n}\,m(\mathbf{A}_k)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{k-1}{n}\left(G\left(\frac{k}{n}\right)-G\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)&\leqslant\int_{(k-1)/n}^{k/n}t\,d(G(t))\\&\leqslant\frac{k}{n}\left(G\left(\frac{k}{n}\right)-G\left(\frac{k-1}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

Donc,

$$\left|\int_{\mathbf{A}_k}f\,dm-\int_{(k-1)/n}^{k/n}t\,d(G(t))\right|\leqslant\frac{1}{n}\left(G\left(\frac{k}{n}\right)-G\left(\frac{k-1}{n}\right)\right).$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(G\left(\frac{k}{n}\right)-G\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)=\frac{1}{n}\,(b-a-G(0))$$

et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \int_{\mathbf{A}_k} f\,dm = \int_a^b f^+(x)\,dx < +\infty$, on voit que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \int_{(k-1)/n}^{k/n} t\,d(G(t))$ converge, ce qui signifie que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t\,d(G(t))$ converge et on a

$$\left| \int_0^{+\infty} t\,d(G(t)) - \int_a^b f^+(x)\,dx \right| \leqslant \frac{1}{n}\,(b-a-G(0))\,.$$

Un passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ montre que

$$\int_0^{+\infty} t\,d(G(t)) = \int_a^b f^+(x)\,dx.$$

On peut prouver de façon complètement semblable que

$$\int_{-\infty}^{0} t\,d(G(t)) = \int_a^b f^-(x)\,dx.$$

II.5. Séries de Fourier

II.5.1. Si $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \neq 0$, alors

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \rho_n \left(\frac{a_n}{\rho_n} \cos nx + \frac{b_n}{\rho_n} \sin nx \right)$$

et il suffit de prendre α_n tel que $\sin \alpha_n = \frac{a_n}{\rho_n}$ et $\cos \alpha_n = \frac{b_n}{\rho_n}$.

II.5.2. D'après **II.3.27**, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue g sur $[-\pi\,,\pi]$ telle que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

D'après **I.4.11**,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx\,dx = 0$$

et on obtient

$$\begin{aligned}\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx \right| &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\,dx + \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx\,dx \right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

pour n suffisamment grand.

II.5.3. En faisant le changement de variable $x = t + \frac{\pi}{n}$, on obtient

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\cos nt\,dt \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\cos nt\,dt, \end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de la périodicité de l'intégrande. D'où,

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right)\cos nx\,dx = O\left(n^{-\alpha}\right).$$

II.5.4. La fonction f étant à variation bornée sur $[-\pi\,,\pi]$, on observe d'abord qu'elle est Riemann (et donc Lebesgue) intégrable sur cet intervalle. De plus, f peut s'écrire comme la différence de deux fonctions croissantes positives, par exemple $f = f_1 - f_2$. D'après la forme de Bonnet du second théorème de la moyenne (voir **I.3.17(a)**),

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\cos nx\,dx = f_1(\pi)\int_c^{\pi}\cos nx\,dx = -f_1(\pi)\frac{\sin nc}{n} = O\left(n^{-1}\right).$$

II.5.5. Puisque la fonction f est absolument continue sur $[-\pi\,,\pi]$, il existe $g \in L^1[-\pi\,,\pi]$ telle que

$$f(x) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^{x} g(t)\,dt$$

(voir le **théorème 2** énoncé au début de la section **II.4**). Une intégration par parties (**II.4.14** ou **II.4.15**) donne donc

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left(f(x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\,dx\right) \\ &= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\,dx. \end{aligned}$$

On applique maintenant le résultat de **II.5.2** pour voir que $a_n = o\left(n^{-1}\right)$. De même, $b_n = o\left(n^{-1}\right)$.

II.5.6. On voit, en intégrant k fois par parties, que les coefficients de Fourier de f sont égaux à

$$\pm\frac{1}{\pi n^k}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)\cos nx\,dx \quad \text{ou} \quad \pm\frac{1}{\pi n^k}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)\sin nx\,dx.$$

Puisque $f^{(k)}$ est continue sur $[-\pi\,,\pi]$, d'après le résultat de **I.4.11**, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)\sin nx\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)\cos nx\,dx = 0.$$

II.5.7. On a

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx)\,dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt,
\end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de l'identité trigonométrique bien connue

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\,, \quad \alpha \neq 2m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

II.5.8. Comme dans la solution de **I.4.8**, on peut montrer que si f est périodique de période 2π et intégrable sur $[-\pi\,,\pi]$, on a alors, pour tout x réel,

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt.$$

On obtient donc, en utilisant la formule démontrée en **II.5.7**,

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt,
\end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de la formule de changement de variable pour l'intégrale de Lebesgue (voir **II.4.13**). D'où,

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t+x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t+x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t+x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt.
\end{aligned}$$

II.5.9. Notre but est de montrer que $\lim_{n\to+\infty} s_n(x_0) = f(x_0)$, où $\{s_n(x_0)\}$ est la suite des sommes partielles de la série de Fourier de f en x_0. En appliquant à $f(x) \equiv 1$ la formule obtenue au problème précédent pour $s_n(x)$, on obtient

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

D'où,

$$s_n(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

En posant $\varphi(t) = f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)$, on a $|\varphi(t)| \leqslant 2L\,|t|^\alpha$ pour $|t| < \delta$. On remarque alors que $\frac{\varphi(t)}{t}$ est intégrable sur $[0\,,\pi]$. En effet,

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt \leqslant \int_0^\delta 2Lt^{\alpha-1}\,dt < +\infty.$$

La fonction

$$\frac{|\varphi(t)|}{\sin\frac{1}{2}t} = \frac{|\varphi(t)|}{t}\cdot\frac{t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

est donc aussi intégrable sur $[0\,,\pi]$. Il découle de la solution de **II.5.2** que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(s_n(x_0) - f(x_0)\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt = 0.$$

II.5.10. On prouve d'abord le lemme suivant.

Lemme. *Si g est croissante sur $[0\,,a]$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^a g(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,g(0^+).$$

On a

$$\int_0^a g(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx = g(0^+)\int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx + \int_0^a \left(g(x) - g(0^+)\right)\frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

En faisant le changement de variable $nx = t$ et en utilisant le résultat de **I.5.33**, on obtient

$$g(0^+)\int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx = g(0^+)\int_0^{na}\frac{\sin t}{t}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(0^+)\frac{\pi}{2}\,.$$

De plus, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $0 \leqslant g(x) - g(0^+) < \varepsilon$ pour $0 < x \leqslant \delta$. On écrit alors

$$\begin{aligned}\int_0^a \left(g(x) - g(0^+)\right) \frac{\sin nx}{x}\, dx &= \int_0^\delta \left(g(x) - g(0^+)\right) \frac{\sin nx}{x}\, dx \\ &\quad + \int_\delta^a \left(g(x) - g(0^+)\right) \frac{\sin nx}{x}\, dx \\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

On obtient, en utilisant la forme de Bonnet du second théorème de la moyenne donnée en **I.3.17(a)**,

$$I_1 = \left(g(\delta) - g(0^+)\right) \int_c^\delta \frac{\sin nx}{x}\, dx = \left(g(\delta) - g(0^+)\right) \int_{nc}^{n\delta} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

pour un certain $c \in [0\,, \delta]$. Puisque $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$, la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que $\left|\int_{nc}^{n\delta} \frac{\sin x}{x}\, dx\right| \leqslant M$ et $|I_1| < M\varepsilon$. Enfin, d'après **I.3.18**, I_2 tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui conclut la démonstration du lemme.

On se tourne maintenant vers la démonstration du test de Dirichlet-Jordan. On a

$$\begin{aligned}s_n(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \left(f(x_0 + t) + f(x_0 - t)\right) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{1}{2}\, t}\, dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \left(f(x_0 + t) + f(x_0 - t)\right) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{1}{2}\, t}\, dt \\ &= J_1 + J_2.\end{aligned}$$

Puisque la fonction

$$t \mapsto \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2 \sin \frac{1}{2}\, t}$$

est intégrable sur $[\delta\,, \pi]$, on voit, comme dans la solution de **II.5.2**, que J_2 tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. De plus, J_1 peut aussi s'écrire sous la forme

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \left(f(x_0 + t) + f(x_0 - t)\right) \frac{\frac{1}{2}\, t}{\sin \frac{1}{2}\, t}\, \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{t}\, dt.$$

La fonction $t \mapsto \frac{\frac{1}{2}\, t}{\sin \frac{1}{2}\, t}$ étant croissante sur $[0\,, \delta]$, la fonction

$$t \mapsto \left(f(x_0 + t) + f(x_0 - t)\right) \frac{\frac{1}{2}\, t}{\sin \frac{1}{2}\, t}$$

est à variation bornée sur $[0\,, \delta]$ et est donc égale à la différence de deux fonctions croissantes. On obtient le résultat cherché en appliquant le lemme à ces deux fonctions.

II.5.11. On considère la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\ln\frac{|x|}{2\pi}} & \text{si } x\in[-\pi\,,\pi]\setminus\{0\},\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

La fonction f est à variation bornée sur $[-\pi\,,\pi]$ mais ne vérifie aucune condition de Lipschitz (voir **I.2.13**). D'autre part, la fonction

$$g(x)=\begin{cases}x\cos\frac{x}{2\pi} & \text{si } x\in[-\pi\,,\pi]\setminus\{0\},\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

vérifie une condition de Lipschitz en 0, autrement dit $|g(x)-g(0)|\leqslant|x|$, mais n'est à variation bornée sur aucun voisinage de 0 (voir **I.2.5**).

II.5.12. On pose $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ pour $x\in\,]0\,,2\pi[$, $f(0)=0$ et on prolonge cette fonction à $\mathbb{R}$ en une fonction périodique de période 2π. D'après le test de Dirichlet-Jordan (voir **II.5.10**), la série de Fourier de f converge vers f. Puisque

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx\,dx=0\quad\text{pour } n\in\mathbb{N}$$

et

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=\frac{1}{n}\quad\text{pour } n\in\mathbb{N}^*,$$

on obtient

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}\,,\qquad 0<x<2\pi.$$

On voit, en remplaçant x par $2x$, que

$$\frac{\pi-2x}{4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}\,,\qquad 0<x<\pi.$$

Donc,

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\,,\qquad 0<x<\pi.$$

Si on prend maintenant successivement $x=\frac{\pi}{2}$ et $x=\frac{\pi}{3}$, on obtient les deux dernières égalités.

II.5.13. Si $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, alors, d'après le résultat du problème précédent, $f'(x) = -\frac{\pi - x}{2}$. Puisque $f(0) = \frac{\pi^2}{6}$, on voit que $f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}$. De même, si on pose

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3},$$

alors $g''(x) = -\frac{\pi - x}{2}$ et $g'(0) = \frac{\pi^2}{6}$. Donc, $g(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi^2 x}{6}$.

II.5.14. La fonction f définie dans la solution de **II.5.12** est à variation bornée sur $[-\pi\,,\pi]$ mais $b_n = \frac{1}{n}$ n'est pas un $o(n^{-1})$.

II.5.15. On a

$$s_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Donc $x_n = \frac{\pi}{n+1}$ et

$$s_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{k\pi}{n+1}}{\frac{k\pi}{n+1}} \frac{\pi}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

On remarque que, d'après le test de Dirichlet-Jordan (voir **II.5.10**), $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n(x) = f(x)$ pour $x \in\,]0\,,2\pi[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n(0) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n(2\pi)$ et, d'après ce qui précède, la convergence de $\{s_n\}$ ne peut pas être uniforme sur $[0\,,2\pi]$.

II.5.16. On pose $f(x) = e^{ax}$ pour $0 < x < 2\pi$, $f(0) = \frac{1+e^{2\pi a}}{2}$ et on prolonge cette fonction à $\mathbb{R}$ en une fonction 2π-périodique. On voit, en appliquant le test de Dirichlet-Jordan (voir **II.5.10**), que la série de Fourier de f converge vers f sur $\mathbb{R}$ et la première formule s'obtient par un simple calcul. Pour obtenir le seconde égalité, on prend la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées du graphe de $x \mapsto e^{ax}$, $x \in [0\,,\pi]$, pour obtenir une fonction g paire et définie sur $[-\pi\,,\pi]$. Si l'on considère la symétrie par rapport à l'origine du graphe de $x \mapsto e^{ax}$, $x \in\,]0\,,\pi[$, on obtient une fonction impaire sur $]-\pi\,,0[\,\cup\,]0\,,\pi[$. Si on pose de plus $h(0) = h(-\pi) = h(\pi) = 0$, on obtient la dernière égalité. On a aussi

$$f(0) = \frac{1 + e^{2a\pi}}{2} = \frac{e^{2a\pi} - 1}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}\right),$$

$$g(0) = 1 = \frac{e^{a\pi} - 1}{a\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^n e^{a\pi} - 1\right)\frac{a}{a^2 + n^2}.$$

II.5.17. On obtient, en utilisant la première égalité de **II.5.16**,

$$\frac{\pi}{e^{2\pi a} - 1}\, e^{ax} + \frac{\pi}{e^{-2\pi a} - 1}\, e^{-ax} = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \sin nx}{a^2 + n^2}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

Ceci peut se réécrire sous la forme

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\operatorname{sh} a(\pi - x)}{\operatorname{sh} \pi a} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \sin nx}{a^2 + n^2}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

De même,

$$\frac{\pi}{e^{2\pi a} - 1}\, e^{ax} - \frac{\pi}{e^{-2\pi a} - 1}\, e^{-ax} = \frac{1}{a} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a \cos nx}{a^2 + n^2} \quad 0 < x < 2\pi,$$

ou, de façon équivalente,

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} a(\pi - x)}{\operatorname{sh} \pi a} - \frac{1}{2a} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a \cos nx}{a^2 + n^2}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

II.5.18. On prolonge la fonction $f(x) = x^2$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, à $\mathbb{R}$ de sorte que f soit 2π-périodique. Une telle fonction vérifie le test de Dirichlet-Jordan (voir **II.5.10**) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on arrive facilement à

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

On obtient les autres égalités en prenant $x = 0$ et $x = \pi$.

II.5.19.

(a) On a

$$\begin{aligned}
a_{2n-1} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+\pi)\cos(2n-1)x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(2n-1)t\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx = 0.
\end{aligned}$$

De même, $b_{2n-1} = 0$.

(b) La démonstration est semblable à celle de (a).

II.5.20. On considère la symétrie du graphe de $x \mapsto \cos x$ $(0 < x < \pi)$ par rapport à l'origine pour obtenir une fonction f impaire sur $]-\pi\,,\pi[\setminus\{0\}$. La série de Fourier de f se réduit donc à une série de sinus. De plus, puisque $f(x+\pi) = f(x)$ pour $x \in\,]-\pi\,,0[$, d'après la question (a) du problème précédent, $b_{2n-1} = 0$. Un calcul simple donne $b_{2n} = \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}$. Pour obtenir l'autre formule, on considère la symétrie du graphe de $x \mapsto \sin x$ $(0 < x < \pi)$ par rapport à l'axe des ordonnées pour obtenir une fonction g paire sur $]-\pi\,,\pi[$. La série de Fourier de g se réduit donc à une série de cosinus et, d'après la question (a) du problème précédent, $a_{2n-1} = 0$.

II.5.21. La fonction $f(x) = \ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$ $(x \neq 2k\pi)$ est 2π-périodique et paire. D'après **I.5.1(b)**, $\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2$ et $a_0 = 0$. De plus,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\frac{\sin nx}{n}\Bigg]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx \\
&= -\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} &= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{\sin(n-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\cos kx,
\end{aligned}$$

on obtient $a_n = -\frac{1}{n}$. On peut obtenir l'autre formule par un raisonnement semblable.

II.5.22. Par périodicité, f est intégrable sur $[0\,,2\pi]$. La fonction F définie par $F(x) = \int_0^x \left(f(t) - \frac{1}{2}\,a_0\right) dt$ est donc à variation bornée sur $[0\,,2\pi]$. De plus, $F(0) = F(2\pi) = 0$ et F est 2π-périodique. D'après le test de Dirichlet-Jordan (voir **II.5.10**),

$$F(x) = \frac{1}{2}\,A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

où, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx = \frac{-1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{1}{2}\,a_0\right)\sin nx\,dx = \frac{-b_n}{n}$$

et

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{1}{2}\,a_0\right)\cos nx\,dx = \frac{a_n}{n}\,.$$

En conséquence,

$$F(x) = \frac{1}{2}\,A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n}\,.$$

En prenant $x = 0$, on obtient

$$\frac{1}{2}\,A_0 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n}\,, \tag{$*$}$$

ce qui implique la formule demandée.

II.5.23. La convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n}$ se déduit immédiatement de $(*)$ dans la solution du problème précédent. On remarque aussi que la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ converge d'après le test de Dirichlet (voir, par exemple, **III.2.13 (vol. II)**), mais qu'elle n'est la série de Fourier d'aucune fonction intégrable car la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$ diverge.

II.5.24. On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx - \pi \left(\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \right),$$

car

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (s_n(x))^2 \, dx = \pi \left(\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \right).$$

Puisque $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2 \, dx \geqslant 0$, la série $\frac{1}{2} a_0^2 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right)$ converge et sa somme est inférieure à $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx$.

II.5.25. La solution du problème précédent implique qu'il existe une constante strictement positive C telle que $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2 \, dx \leqslant C$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout ensemble mesurable $\mathbf{B} \subset [-\pi\,, \pi]$, on a

$$\left| \int_{\mathbf{B}} (f(x) - s_n(x)) \, dx \right| \leqslant \sqrt{C} \sqrt{m(\mathbf{B})}. \qquad (*)$$

On peut, sans perte de généralité, supposer que $\mathbf{A} \subset]-\pi\,, \pi[$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathbf{G}$ tel que $]-\pi\,, \pi[\supset \mathbf{G} \supset \mathbf{A}$ et $m(\mathbf{G} \setminus \mathbf{A}) < \varepsilon$. De plus, $\mathbf{G}$ est l'union dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints $]a_i\,, b_i[$. On a

$$\int_{\mathbf{A}} (f(x) - s_n(x)) \, dx = \int_{\mathbf{G}} (f(x) - s_n(x)) \, dx - \int_{\mathbf{G} \setminus \mathbf{A}} (f(x) - s_n(x)) \, dx.$$

De plus, il existe un entier strictement positif N tel que

$$m\left(\mathbf{G} \setminus \bigcup_{n=1}^{N}]a_n\,, b_n[\right) < \varepsilon.$$

Si on pose $\mathbf{G}_N = \bigcup\limits_{n=1}^{N}]a_n\,, b_n[$, on a

$$\int_{\mathbf{G}} (f(x) - s_n(x)) \, dx = \int_{\mathbf{G}_N} (f(x) - s_n(x)) \, dx + \int_{\mathbf{G} \setminus \mathbf{G}_N} (f(x) - s_n(x)) \, dx.$$

On déduit alors de $(*)$ que

$$\left| \int_{\mathbf{A}} (f(x) - s_n(x)) \, dx \right| \leqslant \left| \int_{\mathbf{G}_N} (f(x) - s_n(x)) \, dx \right| + 2\sqrt{\varepsilon C}.$$

On prolonge maintenant f à $\mathbb{R}$ par périodicité en posant $f(x+2\pi) = f(x)$ et on utilise le résultat de **II.5.22** pour prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} (f(x) - s_n(x))\, dx = 0$ pour tout $]\alpha_i\,,\beta_i[\ \subset [0\,,2\pi]$. On obtient alors, par périodicité du prolongement de f, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{a_i}^{b_i} (f(x) - s_n(x))\, dx = 0$ pour tout $]a_i\,,b_i[\ \subset [-\pi\,,\pi]$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{G}_N} (f(x) - s_n(x))\, dx = 0$ et le résultat cherché s'en déduit.

II.5.26. D'après **II.3.25**, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une fonction simple φ telle que

$$\int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - \varphi(x))^2\, dx < \varepsilon.$$

D'après le résultat du problème précédent,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,(f(x) - s_n(x))\, dx = 0.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,(f(x) - s_n(x))\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - \varphi(x))\,(f(x) - s_n(x))\, dx \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,(f(x) - s_n(x))\, dx \\ &< \sqrt{\varepsilon} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2\, dx \right)^{1/2} \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,(f(x) - s_n(x))\, dx.\end{aligned}$$

La solution de **II.5.25** implique l'existence d'une constante C telle que $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2\, dx \leqslant C$, ce qui conduit au résultat désiré.

II.5.27. D'après le résultat du problème précédent,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)g(x)\, dx \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\, a_0\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k\alpha_k + b_k\beta_k) \right).\end{aligned}$$

On notera ici que si $f = g$, on obtient alors l'*égalité* dite *de Parseval* :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{1}{2}\, a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

II.5.28. Le résultat se déduit immédiatement de **II.5.12** et de l'identité prouvée au problème précédent.

II.5.29. Le résultat de **II.5.25** implique

$$\int_{\mathbf{A}} f(x)\,dx = \int_{\mathbf{A}} g(x)\,dx$$

pour tout ensemble mesurable $\mathbf{A} \subset [-\pi\,,\pi]$. Il suffit alors de faire appel à **II.3.7**.

II.5.30.

(a) D'après **II.5.18**,

$$\frac{2}{9}\,\pi^4 + 16\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{2}{5}\,\pi^4.$$

Donc, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. De plus, d'après **II.5.17**,

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\operatorname{ch} a(\pi - x)}{\operatorname{sh}\pi a} = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a\cos nx}{a^2+n^2} \qquad (0 < x < 2\pi)$$

et

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\operatorname{sh} a(\pi - x)}{\operatorname{sh}\pi a} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\sin nx}{a^2+n^2} \qquad (0 < x < 2\pi).$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^2}{(a^2+n^2)^2} &= \frac{\pi}{4\operatorname{sh}^2\pi a}\int_0^{2\pi}\operatorname{ch}^2 a(\pi - x)\,dx\\ &= \frac{\pi\operatorname{ch} a\pi}{4a\operatorname{sh} a\pi} + \frac{\pi^2}{4\operatorname{sh}^2 a\pi}\end{aligned}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{(a^2+n^2)^2} = \frac{\pi\operatorname{ch} a\pi}{4a\operatorname{sh} a\pi} - \frac{\pi^2}{4\operatorname{sh}^2 a\pi}\,.$$

(b) Puisque

$$\cos^3 x = \frac{3\cos x}{4} + \frac{\cos 3x}{4}\,,$$

on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^6 x\,dx = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{8}\,.$$

De même,

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}$$

et

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^8 x\, dx = \frac{9}{32} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} = \frac{35}{64}.$$

II.5.31. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'égalité de Parseval (**II.5.27**),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} < +\infty.$$

II.5.32. Une intégration par parties donne

$$a_m = -\frac{1}{m}\, b'_m \quad \text{et} \quad b_m = \frac{1}{m}\, a'_m \qquad (m \in \mathbb{N}^*),$$

où a'_m et b'_m sont les coefficients de Fourier de f'. De plus, puisque f' est continue sur $[-\pi\,,\pi]$, $f' \in L^2\,[-\pi\,,\pi]$. Donc, d'après le résultat de **II.5.27**, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left((a'_n)^2 + (b'_n)^2\right)$ converge. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors

$$\begin{aligned}
\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - s_n(x)| &= \max_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{m=n+1}^{+\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \right| \\
&\leqslant \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{|a'_m| + |b'_m|}{m} \\
&\leqslant \left(\sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=n+1}^{+\infty} 2\left(\left|a'_m\right|^2 + \left|b'_m\right|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}} o(1) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\, o(1).
\end{aligned}$$

II.5.33. Si $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, alors

$$f(x+h) - f(x-h) \sim 2\sum_{n=1}^{+\infty} \sin nh(b_n \cos nx - a_n \sin nx). \qquad (*)$$

D'après l'égalité de Parseval (voir **II.5.27**),

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+h)-f(x-h))^2\,dx = 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\sin^2 nh.$$

Par hypothèse,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+h)-f(x-h))^2\,dx \leqslant 2L^2\,(2h)^{2\alpha}.$$

On obtient, en prenant $h=\frac{\pi}{2^{k+1}}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\sin^2\frac{n\pi}{2^{k+1}} \leqslant \frac{1}{2}\,L^2\left(\frac{\pi}{2^k}\right)^{2\alpha}.$$

Donc,

$$\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k}\left(a_n^2+b_n^2\right)\sin^2\frac{n\pi}{2^{k+1}} \leqslant \frac{1}{2}\,L^2\left(\frac{\pi}{2^k}\right)^{2\alpha}.$$

Puisque $\sin^2\frac{n\pi}{2^{k+1}} \geqslant \frac{1}{2}$ pour $n=2^{k-1}+1,\cdots,2^k$, on a

$$\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k}\left(a_n^2+b_n^2\right) \leqslant L^2\left(\frac{\pi}{2^k}\right)^{2\alpha}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir **I.2.12 (vol. I)**),

$$\begin{aligned}\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k}\sqrt{a_n^2+b_n^2} &\leqslant \left(\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k}\left(a_n^2+b_n^2\right)\right)^{1/2}\left(\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k}1\right)^{1/2}\\ &\leqslant L\left(\frac{\pi}{2^k}\right)^{\alpha}2^{\frac{k-1}{2}} < L\left(\frac{\pi}{2^k}\right)^{\alpha}2^{\frac{k}{2}}.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\right) \leqslant L\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2^k}\right)^{\alpha}2^{\frac{k}{2}}.$$

II.5.34. La solution du problème précédent implique

$$\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k}\left(a_n^2+b_n^2\right) \leqslant L^2\left(\frac{\pi}{2^k}\right)^{2\alpha}.$$

On peut supposer que $0 < \beta < 2$. On a alors, d'après l'inégalité de Hölder (voir **I.6.27**),

$$\begin{aligned}\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \left(a_n^2+b_n^2\right)^{\frac{\beta}{2}} &\leqslant \left(\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \left(a_n^2+b_n^2\right)\right)^{\frac{\beta}{2}} \left(\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} 1\right)^{1-\frac{\beta}{2}} \\ &\leqslant L^\beta \left(\frac{\pi}{2^k}\right)^{\alpha\beta} 2^{(k-1)\left(1-\frac{\beta}{2}\right)} \\ &= \frac{L^\beta \pi^{\alpha\beta}}{2^{1-\frac{\beta}{2}}}\, 2^{k\left(1-\frac{\beta}{2}-\alpha\beta\right)}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \left(a_n^2+b_n^2\right)^{\frac{\beta}{2}} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \left(a_n^2+b_n^2\right)^{\frac{\beta}{2}}\right) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{L^\beta \pi^{\alpha\beta}}{2^{1-\frac{\beta}{2}}}\, 2^{k\left(1-\frac{\beta}{2}-\alpha\beta\right)}\end{aligned}$$

et le résultat cherché suit.

II.5.35. On a

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2N} \left(f\left(x+\frac{i\pi}{N}\right) - f\left(x+\frac{(i-1)\pi}{N}\right)\right)^2 \\ &\qquad \leqslant L\left(\frac{\pi}{N}\right)^\alpha \sum_{i=1}^{2N} \left|f\left(x+\frac{i\pi}{N}\right) - f\left(x+\frac{(i-1)\pi}{N}\right)\right| \leqslant L\left(\frac{\pi}{N}\right)^\alpha V,\end{aligned}$$

où V est la variation totale de f sur $[0\,,2\pi]$. D'après $(*)$ dans la solution du **problème II.5.33** et d'après l'égalité de Parseval (voir **II.5.27**),

$$2N\int_0^{2\pi} \left(f\left(x+\frac{i\pi}{N}\right) - f\left(x+\frac{(i-1)\pi}{N}\right)\right)^2 dx = 8N\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2+b_n^2\right)\sin^2\frac{n\pi}{2N}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, 2N$. Donc,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2+b_n^2\right)\sin^2\frac{n\pi}{2N} \leqslant \frac{L}{4N}\left(\frac{\pi}{N}\right)^\alpha V.$$

En prenant $N = 2^k$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \sin^2 \frac{n\pi}{2^{k+1}} \leqslant \frac{L}{2^{k+2}} \left(\frac{\pi}{2^k}\right)^{\alpha} V.$$

Il suffit alors de procéder comme dans la solution du **problème II.5.33**.

II.5.36. L'exemple suivant est dû à Fejér. Soit G_n l'ensemble des $2n$ nombres

$$\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n-3}, \ldots, \frac{1}{3}, 1, -1, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{2n-1}.$$

On prend une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs $\{\lambda_n\}$ et on considère les ensembles $G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}, \ldots$ On multiplie chaque nombre de l'ensemble G_{λ_n} par n^{-2} pour obtenir la suite

$$\frac{1}{1^2(2\lambda_1-1)}, \ldots, -\frac{1}{1^2(2\lambda_1-1)}, \frac{1}{2^2(2\lambda_2-1)}, \ldots, -\frac{1}{2^2(2\lambda_2-1)}, \ldots,$$

que l'on notera $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Notre but est de prouver que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx$$

est la série de Fourier d'une fonction continue. On regroupe les termes de cette série de la façon suivante :

$$\sum_{n=1}^{2\lambda_1} \alpha_n \cos nx + \sum_{n=2\lambda_1+1}^{2\lambda_1+2\lambda_2} \alpha_n \cos nx + \sum_{n=2\lambda_1+2\lambda_2+1}^{2\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3} \alpha_n \cos nx + \cdots$$

On peut écrire cette dernière série sous la forme

$$\sum_{n=1}^{2\lambda_1} \alpha_n \cos nx + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\varphi(\lambda_n, 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + 2\lambda_{n-1}, x)}{n^2},$$

où

$$\begin{aligned}\varphi(n,r,x) = {} & \frac{\cos(r+1)x}{2n-1} + \frac{\cos(r+2)x}{2n-3} + \cdots + \frac{\cos(r+n)x}{1} \\ & - \frac{\cos(r+n+1)x}{1} - \frac{\cos(r+n+2)x}{3} - \cdots - \frac{\cos(r+2n)x}{2n-1}.\end{aligned}$$

On prouve maintenant qu'il existe une constante M (indépendante de n, r et x) telle que $|\varphi(n,r,x)| \leqslant M$. En effet,

$$\begin{aligned}\varphi(n,r,x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(r+n-k+1)x}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(r+n+k)x}{2k-1} \\ &= 2\sin\left(r+n+\frac{1}{2}\right)x \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2k-1}.\end{aligned}$$

Puisque $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k-1)\frac{x}{2}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$ pour $x \in \left]0\,,2\pi\right[$ (voir **II.5.12**), la suite des sommes partielles de cette série est bornée. Il s'ensuit que les sommes de termes regroupés,

$$\sum_{n=1}^{2\lambda_1} \alpha_n \cos nx + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\varphi(\lambda_n, 2\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+2\lambda_{n-1}, x)}{n^2}, \tag{1}$$

convergent absolument et uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. On vérifie aussi facilement que

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos nx.$$

On montre enfin que l'on peut choisir la suite $\{\lambda_n\}$ de sorte que la série précédente diverge en 0, autrement dit, de sorte que $S_n = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ diverge vers l'infini. Puisque

$$S_{2\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+2\lambda_{n-1}+\lambda_n} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2\lambda_1-1}+\frac{1}{2\lambda_1-3}+\cdots+\frac{1}{3}+1\right)$$

se comporte comme $\frac{\ln\lambda_n}{2n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$ (les deux divergent ou convergent vers la même limite), il suffit de prendre, par exemple, $\lambda_n = n^{n^2}$ et la série de Fourier de f ne converge pas vers f en $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On remarquera ici que si on remplace x par $n!x$ dans la série groupée (1), la série de Fourier correspondante diverge alors en tout point $x = \frac{k\pi}{m}$, $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. La série de Fourier diverge donc sur un ensemble dense. En effet, si $x = \frac{k\pi}{m}$, pour n assez grand, la partie du n-ième groupe dont les coefficients sont positifs a pour valeur

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2\lambda_1-1}+\frac{1}{2\lambda_1-3}+\cdots+\frac{1}{3}+1\right)$$

et, en prenant λ_n comme ci-dessus, on voit que la série ne peut pas converger en ces points.

II.5.37. Par la formule donnée en **II.5.8**

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\, dt,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
|s_n(x)| &\leqslant \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{2\sin\frac{1}{2}t}\, dt < M \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{t}\, t \\
&= M \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{|\sin u|}{u}\, du < M \int_0^1 du + M \int_1^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{du}{u} \\
&= M\left(1 + \ln\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right).
\end{aligned}$$

On peut remarquer que la majoration est uniforme sur $\mathbb{R}$.

II.5.38. On a

$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\right| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\right| dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)2t}{\sin t}\right| dt > \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)2t\right|}{t}\, dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{|\sin u|}{u}\, du > \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u}\, du \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+k\pi}\, du > \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin u\, du \\
&= \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}.
\end{aligned}$$

On sait (voir, par exemple, **II.1.41 (vol. I)**) que la suite

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \ln n$$

décroît vers la constante d'Euler $\gamma = 0{,}5772\ldots$ et $L_n > \frac{4}{\pi^2}\ln n + \frac{4}{\pi^2}\gamma$. Pour prouver l'inégalité inverse, on observe d'abord que

$$\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{\sin nt}{\tan\frac{t}{2}}\right| \leqslant 1.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
L_n &\leqslant 1 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin nt}{\tan\frac{t}{2}}\right| dt = 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left|\frac{\sin 2nt}{\tan t}\right| dt \\
&< 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin 2nt|}{t}\, dt = 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi}\frac{|\sin u|}{u}\, du \\
&= 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin u|}{u}\, du = 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+(k-1)\pi}\, dt \\
&< 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\, dt + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} < C + \frac{4}{\pi^2}\ln n + \frac{4}{\pi^2}\gamma.
\end{aligned}$$

On remarquera ici que le résultat du problème précédent est une conséquence immédiate du résultat présent.

II.5.39. On sait, par la solution de **II.5.8**, que

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t)-2f(x))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt.$$

Il suffit donc de prouver que

$$I_n = \int_0^{\pi}\left|(f(x+t)+f(x-t)-2f(x))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right| dt = o(\ln n).$$

Puisque f est uniformément continue, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \eta < 1$ tel que $|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)| < \varepsilon$ pour $|t| < \eta$. Pour $n + \frac{1}{2} > \frac{1}{\eta}$, on a

$$I_n = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}}\Phi(t)\, dt + \int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}}^{\eta}\Phi(t)\, dt + \int_{\eta}^{\pi}\Phi(t)\, dt,$$

où $\Phi(t)$ est l'intégrande de I_n. Donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}}\Phi(t)\, dt &= \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\left(n+\frac{1}{2}\right)t}\cdot\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \\
&\qquad\times|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\, dt \\
&\leqslant \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\, dt < \frac{\pi}{2}\varepsilon,
\end{aligned}$$

$$\int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}}^{\eta} \Phi(t)\,dt < \frac{\pi}{2}\,\varepsilon \int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}}^{\eta} \frac{dt}{t} < \frac{\pi}{2}\,\varepsilon \ln\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

et

$$\int_{\eta}^{\pi} \Phi(t)\,dt < \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\eta} \int_{\eta}^{\pi} |f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\,dt.$$

II.5.40. On a

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n}\\ &= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\frac{1}{2}\,t+\cdots+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}\,t}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)dt\\ &= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\frac{1}{2}\,nt}{\sin^2\frac{1}{2}\,t}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)dt.\end{aligned}$$

II.5.41. Si on substitue $f(x)\equiv 1$ dans la formule obtenue au problème précédent, on obtient

$$1 = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} 2\frac{\sin^2\frac{1}{2}\,nt}{\sin^2\frac{1}{2}\,t}\,dt.$$

La première proposition découle donc du fait que le *noyau de Fejér* $\frac{\sin^2\frac{1}{2}\,nt}{\sin^2\frac{1}{2}\,t}$ est positif. Si on a $\sigma_n(x)=M$ pour un n et un x, alors

$$\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\frac{1}{2}\,nt}{\sin^2\frac{1}{2}\,t}\left(M-f(x+t)\right)dt = 0$$

et l'intégrande est positif. La seconde proposition se déduit donc de **II.3.6**.

II.5.42. On vérifie facilement que si $S_n = c_0+c_1+\cdots+c_{n-1}$ et si $\sigma_n = \frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}$, alors

$$S_n-\sigma_n = \frac{c_1+2c_2+\cdots+(n-1)c_{n-1}}{n}.$$

Donc,

$$s_n(x) = \sigma_{n+1}(x) + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(a_k\cos kx+b_k\sin kx)}{n+1}, \tag{$*$}$$

où $s_n(x)$ et $\sigma_n(x)$ sont respectivement les sommes partielles et les moyennes de Cesàro de la série de Fourier de f. Donc, par hypothèse,

$$|s_n(x)-\sigma_{n+1}(x)| \leqslant A+B$$

et la première proposition se déduit du problème précédent. La seconde proposition est alors une conséquence immédiate de la formule (voir **II.5.12**)

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} \qquad (0 < x < 2\pi).$$

On notera ici, d'après **II.5.4**, que si f est à variation bornée sur $[-\pi\,,\pi]$, les sommes partielles de la série de Fourier de f sont alors uniformément bornées.

II.5.43. On peut supposer que $0 < x < \pi$. On pose $m = \left[\frac{\pi}{x}\right]$ et on écrit

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sin kx = \sum_{k=1}^{m} c_k \sin kx + \sum_{k=m+1}^{n} c_k \sin kx,$$

une somme vide étant considérée comme nulle. On a alors

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{m} c_k \sin kx \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{A}{k} \sin kx \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{A}{k} kx = mAx \leqslant A\pi.$$

Pour majorer la seconde somme, on utilise la formule de sommation par parties suivante[(3)] :

$$\sum_{k=m+1}^{n} c_k \sin kx = \sum_{k=m+1}^{n-1} (c_k - c_{k+1})(S_k(x) - S_m(x)) + c_n(S_n(x) - S_m(x)),$$

où

$$S_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \sin jx = \frac{\sin\frac{n\pi}{2} \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

On note que

$$\begin{aligned}
|S_k(x) - S_m(x)| &= \left| \frac{\sin\frac{kx}{2} \sin\frac{(k+1)x}{2} - \sin\frac{mx}{2} \sin\frac{(m+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \right| \\
&= \left| \frac{\cos\frac{(2k+1)x}{4} - \cos\frac{(2m+1)x}{4}}{2\sin\frac{x}{2}} \right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=m+1}^{n} c_k \sin kx \right| &\leqslant \sum_{k=m+1}^{n} (c_k - c_{k+1}) \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} + c_n \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \\
&= \frac{c_{m+1}}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{A}{(m+1)\sin\frac{x}{2}} < A.
\end{aligned}$$

(3) *Transformation d'Abel.* (N.d.T.)

II.5.44. On déduit de **II.5.41** que $|\sigma_n(x)| \leqslant M$ pour tout n et tout x. De plus, d'après l'égalité $(*)$ dans la solution de **II.5.42**,

$$\sigma_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) b_k \sin kx.$$

En prenant $x = \frac{\pi}{4m}$, on obtient

$$M \geqslant \sigma_{2m+1}\left(\frac{\pi}{4m}\right) = \sum_{k=1}^{2m} \left(1 - \frac{k}{2m+1}\right) b_k \frac{k}{2m} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{k}{2m}\,.$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{m} k b_k \leqslant 4mM.$$

Ceci combiné à l'égalité $(*)$ de la solution de **II.5.42** donne $|s_n(x)| \leqslant 5M$.

II.5.45. On sait, d'après **II.5.41**, que $|\sigma_n(x)| \leqslant M$. Donc, puisque $a_n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} M \geqslant \sigma_{2n+1}(0) &= \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} s_k(0) \geqslant \frac{1}{2n+1} \sum_{k=n}^{2n} s_k(0) \\ &\geqslant \frac{n+1}{2n+1}\, s_n(0) \geqslant \frac{1}{2}\, s_n(0). \end{aligned}$$

II.5.46. On a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n^4+1} \sin nx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n\,(n^4+1)}\,.$$

Donc (voir **II.5.12**),

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} + g(x)$$

et

$$g^{(4)}(x) = -f(x).$$

II.5.47. Puisque

$$1 = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{\pi} 2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} nt}{\sin^2 \frac{1}{2} t}\, dt$$

(voir **II.5.41**), on a

$$\sigma_n(x) - s = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} nt}{\sin^2 \frac{1}{2} t} \left(f(x+t) + f(x-t) - 2s\right) dt$$

pour tout réel s. On choisit alors $s = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$. Pour prouver que la suite $\{\sigma_n(x)\}$ converge vers s, on pose $\varphi(t) = f(x+t)+f(x-t)-2s$ et on remarque qu'il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^\delta \frac{\sin^2 \frac{1}{2}nt}{\sin^2 \frac{1}{2}t}\,\varphi(t)\,dt = 0$$

pour un certain $0 < \delta < \pi$ car

$$\left|\frac{1}{n}\int_\delta^\pi \frac{\sin^2 \frac{1}{2}nt}{\sin^2 \frac{1}{2}t}\,\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_\delta^\pi \frac{|\varphi(t)|}{\sin^2 \frac{1}{2}t}\,dt.$$

Par hypothèse, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \eta < \delta$ tel que $|\varphi(t)| < \varepsilon$ pour $|t| < \eta$. On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\int_0^\delta \frac{\sin^2 \frac{1}{2}nt}{\sin^2 \frac{1}{2}t}\,\varphi(t)\,dt &\leqslant \frac{\pi^2}{n}\int_0^\delta \frac{\sin^2 \frac{1}{2}nt}{t^2}\,|\varphi(t)|\,dt \\
&\leqslant \frac{\pi^2}{n}\int_0^\eta \frac{\sin^2 \frac{1}{2}nt}{t^2}\,\varepsilon\,dt + \frac{\pi^2}{n}\int_\eta^\delta \frac{1}{t^2}\,|\varphi(t)|\,dt \\
&= \frac{\pi^2\varepsilon}{n}\int_0^\eta \frac{\sin^2 \frac{1}{2}nt}{t^2}\,dt + \frac{\pi^2}{n}\int_\eta^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t^2}\,dt.
\end{aligned}$$

De plus, d'après **I.5.55**,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2\varepsilon}{n}\int_0^\eta \frac{\sin^2 \frac{1}{2}nt}{t^2}\,dt &= \frac{\pi^2\varepsilon}{2}\int_0^{\frac{1}{2}n\eta} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du \\
&< \frac{\pi^2\varepsilon}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du = \frac{\pi^3\varepsilon}{4}\,.
\end{aligned}$$

II.5.48. On note que si x est un point de Lebesgue de f (voir **II.4.22** pour la définition), alors

$$\Phi(t) = \int_0^t |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)|\,du = o(t).$$

On pose $\varphi(t) = f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$. Comme dans la solution du problème précédent,

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{1}{2}nt}{\sin^2 \frac{1}{2}t}\,\varphi(t)\,dt$$

et il suffit de prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi n}\int_0^\delta \frac{\sin^2 \frac{1}{2}nt}{\sin^2 \frac{1}{2}t}\,\varphi(t)\,dt = 0.$$

pour un certain $0 < \delta < \pi$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \eta < \delta$ tel que $\Phi(t) < \varepsilon t$ pour $t < \eta$. On prend alors n tel que $\sqrt[4]{n} > \frac{1}{\eta}$ et on écrit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi n}\int_0^{\delta}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nt}{\sin^2\frac{1}{2}t}\varphi(t)\,dt &= \frac{1}{2\pi n}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nt}{\sin^2\frac{1}{2}t}\varphi(t)\,dt\\ &\quad+\frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{1}{n}}^{\eta}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nt}{\sin^2\frac{1}{2}t}\varphi(t)\,dt+\frac{1}{2\pi n}\int_{\eta}^{\delta}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nt}{\sin^2\frac{1}{2}t}\varphi(t)\,dt\\ &= I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

On a

$$|I_1| \leqslant \frac{1}{2\pi n}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\frac{n^2t^2}{4}}{\frac{t^2}{\pi^2}}|\varphi(t)|\,dt = \frac{n\pi}{8}\int_0^{\frac{1}{n}}|\varphi(t)|\,dt < \frac{\pi}{8}\varepsilon.$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}|I_2| &\leqslant \frac{\pi}{2n}\int_{\frac{1}{n}}^{\eta}\frac{|\varphi(t)|}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2n}\left(\frac{\Phi(\eta)}{\eta^2}-n^2\Phi\left(\frac{1}{n}\right)+2\int_{\frac{1}{n}}^{\eta}\frac{\Phi(t)}{t^3}\,dt\right)\\ &< \frac{\pi}{2n}\left(\frac{\varepsilon}{\eta}+2\varepsilon\int_{\frac{1}{n}}^{\eta}\frac{dt}{t^2}\right) = \frac{\pi}{2n}\left(\frac{\varepsilon}{\eta}+2\varepsilon n-\frac{2\varepsilon}{\eta}\right) < \pi\varepsilon\end{aligned}$$

Enfin,

$$|I_3| \leqslant \frac{\pi}{2n\eta^2}\int_{\eta}^{\delta}|\varphi(t)|\,dt \leqslant \frac{\pi C}{2n\eta^2} \leqslant \frac{\pi C}{2\sqrt{n}}$$

où $C = \int_0^{\pi}|\varphi(t)|\,dt$.

On remarque ici que, suivant le résultat de **II.4.24**, $\{\sigma_n(x)\}$ converge vers $f(x)$ presque partout sur $\mathbb{R}$.

II.5.49. On commence par prouver que si f est périodique de période 2π sur $\mathbb{R}$, $f \in L^p\,[-\pi\,,\pi]$, $1 \leqslant p < +\infty$ et $f_t(x) = f(x-t)$, alors

$$\lim_{t\to 0}\|f_t - f\|_p = 0,$$

ce qui signifie que la translation est continue pour la norme L^p. On suppose que $|t| < \pi$. On note aussi que $\int_{-2\pi}^{2\pi}|f(x)|^p\,dx < +\infty$. D'après **II.3.30**, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g, continue sur $[-2\pi\,,2\pi]$, telle que $\int_{-2\pi}^{2\pi} |f(x) - g(x)|^p\,dx < \varepsilon$. D'où,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|^p\,dx \\
&\qquad \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - g(x-t)|^p\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x-t) - g(x)|^p\,dx \\
&\qquad\quad + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)|^p\,dx \\
&\qquad \leqslant \int_{-\pi-t}^{\pi-t} |g(x) - f(x)|^p\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x-t) - g(x)|^p\,dx + \varepsilon \\
&\qquad \leqslant 2\varepsilon + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x-t) - g(x)|^p\,dx.
\end{aligned}$$

Donc, la fonction g étant uniformément continue sur $[-2\pi\,,2\pi]$, il existe $\delta > 0$ tel que $|g(x-t) - g(x)|^p < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ pour $|t| < \delta$ et $x \in [-\pi\,,\pi]$, d'où $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|^p\,dx \leqslant 3\varepsilon$, ce qui démontre la proposition énoncée plus haut.

On suppose maintenant que f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, $f \in L^2\,[-\pi\,,\pi]$ et que g est la fonction définie précédemment. En utilisant alors successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la formule de changement de variable (**II.4.13**) et la périodicité de f, on obtient

$$\begin{aligned}
|g(x_1) - g(x_2)| &\leqslant \|f\|_2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x_1+t) - f(x_2+t)|^2\,dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_2 \left(\int_{-\pi+x_1}^{\pi+x_1} |f(s) - f(s-(x_1-x_2))|^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(s) - f(s-(x_1-x_2))|^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_2 \, \|f_{x_1-x_2} - f\|_2\,.
\end{aligned}$$

Le résultat découle alors de la continuité de f_t pour la norme L^2.

II.5.50. On a

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\,nt}{\sin^2 \frac{1}{2}\,t} \left(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\right) dt.$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ dès que $|t - x| < \delta$. Donc,

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi n} \int_0^\delta \frac{\sin^2 \frac{1}{2} nt}{\sin^2 \frac{1}{2} t} \, dt + \frac{2M}{\pi n} \int_\delta^\pi \frac{\sin^2 \frac{1}{2} nt}{\sin^2 \frac{1}{2} t} \, dt$$

où $M = \sup \{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. On sait que (voir **II.5.41**)

$$\frac{1}{\pi n} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{1}{2} nt}{\sin^2 \frac{1}{2} t} \, dt = 1.$$

Donc, si $n > \frac{1}{\delta^4}$, alors

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{\pi}{n\delta^2} 2M\pi < \varepsilon + \frac{2\pi^2 M}{\sqrt{n}} \, .$$

II.5.51. On sait, par le résultat du problème précédent, que la suite $\{\sigma_n(x)\}$ converge vers $f(x)$ uniformément sur $\mathbb{R}$. Donc, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $|g_n(x)| = |f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon$ pour tout x et tout $n \geqslant n_0$. Dans ce qui suit, $S_n(g(x))$ représente la n-ième somme partielle de la série de Fourier d'une fonction intégrable g. On remarque d'abord que

$$S_p(\sigma_n(x)) = S_q(\sigma_n(x)) = \sigma_n(x) \quad \text{si} \quad p, q > n \geqslant n_0.$$

Donc,

$$\begin{aligned} |S_p(f(x)) - S_q(f(x))| &\leqslant |S_p(\sigma_n(x)) - S_q(\sigma_n(x))| + |S_p(g_n(x))| + |S_q(g_n(x))| \\ &= |S_p(g_n(x))| + |S_q(g_n(x))| \, . \end{aligned}$$

On note maintenant que les coefficients de Fourier de g_n sont positifs. De plus, on peut écrire g_n comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, soit

$$g_n(x) = \frac{g_n(x) + g_n(-x)}{2} + \frac{g_n(x) - g_n(-x)}{2} \, .$$

Chacun des termes est borné (minoré par $-\varepsilon$ et majoré par ε) et leur série de Fourier est respectivement égale à la partie en cosinus et à la partie en sinus de la série de Fourier de g_n. Les résultats de **II.5.44** et de la solution de **II.5.45** impliquent

$$|S_p(f(x)) - S_q(f(x))| \leqslant |S_p(g_n(x))| + |S_q(g_n(x))| \leqslant 10\varepsilon + 4\varepsilon.$$

II.5.52. Le théorème de Fejér-Lebesgue (voir **II.5.48**) implique $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n(x) = f(x)$ p.p. La première proposition sera donc prouvée si on montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}(s_n(x)-\sigma_n(x)) = 0$ pour tout x. D'après l'égalité $(*)$ dans la solution de **II.5.42**,

$$|s_n(x)-\sigma_{n+1}(x)| = \frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} k(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right|}{n+1} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\sqrt{a_k^2+b_k^2}}{n+1}.$$

De plus, suivant le résultat de **II.5.50**, l'autre proposition suit.

II.5.53. On démarre avec la formule suivante démontrée dans la solution de **II.5.33** :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+h)-f(x-h))^2\,dx = 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\sin^2 nh$$

et on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f\left(x+\frac{k\pi}{r}\right)-f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{r}\right)\right)^2 dx = 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\sin^2\frac{n\pi}{2r}.$$

Donc,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{2r}\left(f\left(x+\frac{k\pi}{r}\right)-f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{r}\right)\right)^2 dx = 8r\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\sin^2\frac{n\pi}{2r}.$$

Puisque

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{2r}\left(f\left(x+\frac{k\pi}{r}\right)-f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{r}\right)\right)^2 dx \leqslant 2\omega\left(\frac{\pi}{r}\right)V(f;0,2\pi)$$

où $\omega(h) = \sup\{|f(x+h)-f(x)| : x\in\mathbb{R}\}$, on voit que

$$\lim_{r\to+\infty} r\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\sin^2\frac{n\pi}{2r} = 0 \tag{1}$$

si f est continue. On montre maintenant que (1) implique la continuité de f. En effet, si x_0 est un point où f est discontinue, alors $\left|f(x_0^+)-f(x_0^-)\right| = d > 0$, ce qui implique qu'au moins un des termes de la somme

$$\sum_{k=1}^{2r}\left(f\left(x+\frac{k\pi}{r}\right)-f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{r}\right)\right)^2$$

apporte une contribution au moins égale à $\frac{d^2}{4}$. Ceci contredit (1). On a donc prouvé que f est continue si et seulement si la condition (1) est vérifiée. Notre but est de montrer que la condition (1) est équivalente à

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{a_k^2+b_k^2}=0. \tag{2}$$

On pose

$$P_n=n\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)\sin^2\frac{k\pi}{2n}\quad\text{et}\quad T_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{a_k^2+b_k^2}.$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=0$, alors

$$P_n\geqslant n\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\sin^2\frac{k\pi}{2n}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2\left(a_k^2+b_k^2\right)\geqslant T_n^2,$$

la dernière inégalité se déduisant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir, par exemple, **I.2.12 (vol. I)**). Ceci prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=0$. Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=0$, on a alors

$$\begin{aligned}P_n&=n\sum_{k=1}^{Nn}\left(a_k^2+b_k^2\right)\sin^2\frac{k\pi}{2n}+n\sum_{k=Nn+1}^{+\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)\sin^2\frac{k\pi}{2n}\\&\leqslant n\sum_{k=1}^{Nn}\left(a_k^2+b_k^2\right)\frac{k^2\pi^2}{4n^2}+n\sum_{k=Nn+1}^{+\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)\\&\leqslant\frac{\pi^2}{4n}\sum_{k=1}^{Nn}k^2\left(a_k^2+b_k^2\right)+nC\sum_{k=Nn+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

car, d'après le résultat de **II.5.4**, les coefficients a_n et b_n sont des $O\left(n^{-1}\right)$. De plus, puisque

$$\sum_{k=Nn+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}<\frac{1}{Nn},$$

étant donné $\varepsilon>0$, il existe N tel que

$$nC\sum_{k=Nn+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}<\varepsilon.$$

Donc,

$$P_n \leqslant \frac{\pi^2}{4n} \sum_{k=1}^{Nn} k^2 \left(a_k^2 + b_k^2\right) + \varepsilon \leqslant \frac{\sqrt{C}\pi^2}{4n} \sum_{k=1}^{Nn} k\sqrt{a_k^2 + b_k^2} + \varepsilon.$$

II.5.54. On va prouver que les hypothèses du théorème de Fatou (voir **II.5.52**) sont vérifiées. On a

$$n_k \leqslant \frac{1}{q}\, n_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{q^{m-k}}\, n_m.$$

De plus, d'après **II.5.2**, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 0$. Donc, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n^* tel que $\sqrt{a_k^2 + b_k^2} < \varepsilon$ pour $n > n^*$. Si $n^* \leqslant n_m \leqslant N < n_{m+1}$, alors

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} k\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n^*} k\sqrt{a_k^2 + b_k^2} + \frac{1}{N} \sum_{k=j}^{m} n_k\sqrt{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2}$$

où $n_{j-1} \leqslant n^* < n_j$. Puisque le premier terme tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$, il suffit de prouver que le second terme tend aussi vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. Pour cela, on observe que

$$\frac{1}{N} \sum_{k=j}^{m} n_k\sqrt{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{n_m} \sum_{k=j}^{m} q^{k-m} n_m < \varepsilon \sum_{l=0}^{+\infty} q^{-l} = \varepsilon \frac{q}{q-1}\,.$$

II.5.55. Soit g une fonction de $L^q\,[-\pi\,,\pi]$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_n(x) - f(x))g(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))g(x) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{n \sin^2 \frac{t}{2}}\,dt \right) dx$$

et on obtient, avec le théorème de Fubini et l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_n(x) - f(x))g(x)\,dx \right| \\
&\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))g(x)\,dx \right| \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{n \sin^2 \frac{t}{2}}\,dt \\
&\leqslant \|g\|_q \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f_t - f\|_p \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{n \sin^2 \frac{t}{2}}\,dt,
\end{aligned}$$

où $f_t(x) = f(x-t)$ est la translation de f par $-t$. Puisque l'inégalité

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}(\sigma_n(x)-f(x))g(x)\,dx\right| \leqslant \|g\|_q \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f_t-f\|_p \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{n\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

est vérifiée pour tout $g \in L^q[-\pi\,,\pi]$ et

$$\|\sigma_n - f\|_p = \sup_{\|g\|_q=1}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(\sigma_n(x)-f(x))g(x)\,dx\right|,$$

on obtient

$$\|\sigma_n - f\|_p \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f_t-f\|_p \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{n\sin^2\frac{t}{2}}\,dt.$$

On a alors, pour $0<\delta<\pi$,

$$\begin{aligned}\|\sigma_n - f\|_p &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\|f_t-f\|_p \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{n\sin^2\frac{t}{2}}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\|f_t-f\|_p \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{n\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\\ &\leqslant \sup_{|t|<\delta}\|f_t-f\|_p + 2\|f\|_p\frac{1}{n\sin^2\frac{\delta}{2}}\end{aligned}$$

et le résultat cherché se déduit du fait que la translation f_t est continue pour la norme L^p (voir la solution de **II.5.49**).

II.5.56. On montre d'abord que la condition $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n = 0$ est suffisante pour la convergence uniforme de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ sur $[0\,,2\pi]$. Puisque $\{b_n\}$ est une suite décroissante convergente vers 0, d'après le test de Dirichlet pour la convergence uniforme (voir, par exemple, **III.2.13 (vol. II)**), la série est uniformément convergente sur $[\delta\,,2\pi-\delta]$ pour $0<\delta<\pi$. Il suffit donc de prouver que la série est uniformément convergente sur $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$. La formule de sommation par parties (transformation d'Abel) implique

$$\sum_{k=n}^{m} b_k \sin kx = \sum_{k=n}^{m-1}(b_k-b_{k+1})D_k(x) - b_nD_{n-1}(x) + b_mD_m(x),$$

où $D_k(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin kx$. En posant alors

$$r_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} b_k \sin kx,$$

on obtient

$$|r_n(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}(b_k-b_{k+1})\,|D_k(x)| + b_n\,|D_{n-1}(x)|\,. \tag{1}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 \leqslant nb_n < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$. On a $r_n(0) = 0$ et, si $x \in \left]0\,,\frac{\pi}{4}\right]$, il existe alors N tel que $\frac{1}{N} < x \leqslant \frac{1}{N-1}$. Si $n \geqslant n_0$, il y a alors deux cas possibles : soit $n \geqslant N$, soit $n < N$. Dans le premier cas, avec (1) et l'inégalité $|D_k(x)| \leqslant \frac{\pi}{x}$, on obtient

$$|r_n(x)| \leqslant b_n\frac{\pi}{x} + b_n\frac{\pi}{x} < 2\pi N b_n \leqslant 2\pi n b_n < 2\pi\varepsilon$$

et, dans le second cas,

$$\begin{aligned} |r_n(x)| &\leqslant \left|\sum_{k=n}^{N-1} b_k \sin kx\right| + \left|\sum_{k=N}^{+\infty} b_k \sin kx\right| \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{N-1} kb_kx + 2\pi\varepsilon \leqslant \frac{N-n}{N-1}\varepsilon + 2\pi\varepsilon \leqslant (2\pi+1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre que $r_n(x)$ converge uniformément vers 0 sur $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$.

Pour prouver que la condition est nécessaire, on suppose que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ converge uniformément sur $[0\,,2\pi]$. D'après le critère de convergence uniforme de Cauchy, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin kx\right| < \varepsilon$$

pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $x \in [0\,,2\pi]$. En prenant $x = \frac{\pi}{4n}$, on obtient $\frac{\pi}{4n} \leqslant kx \leqslant \frac{\pi}{2}$ pour $k = n+1,\ldots,2n$, d'où

$$\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=n+1}^{2n} b_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}nb_{2n},$$

ce qui donne $2nb_{2n} < 2\sqrt{2}\varepsilon$. Il s'ensuit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n = 0$.

II.5.57. Le problème précédent implique que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ converge uniformément vers une fonction continue si $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n = 0$. On suppose maintenant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ est la série de Fourier d'une fonction continue f. D'après le résultat de **II.5.50**, la suite $\{\sigma_n(x)\}$ des moyennes de Cesàro de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ converge uniformément vers f. Donc $f(0) = 0$ et $\sigma_n\left(\frac{\pi}{n}\right)$ converge vers 0 lorsque

n tend vers $+\infty$. Puisque $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on voit que

$$\begin{aligned}\sigma_n\left(\frac{\pi}{n}\right) &\geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(n-k)b_k \sin\frac{k\pi}{n}\\ &\geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} 2kb_k\left(1-\frac{k}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} 2kb_k\left(1-\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n}\right)\\ &\geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} kb_k \geqslant \frac{1}{n}\, b_{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}{2},\end{aligned}$$

ce qui implique que $\left[\frac{n}{2}\right] b_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

II.5.58. Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ est la série de Fourier d'une fonction bornée, la suite $\{\sigma_n(x)\}$ des moyennes de Cesàro de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ est alors bornée (voir **II.5.41**). En particulier, $\left\{\sigma_n\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$ est bornée et on peut prouver, comme dans la solution du problème précèdent, que $nb_n = O(1)$. Supposons maintenant que $nb_n = O(1)$, autrement dit, qu'il existe $C > 0$ tel que $nb_n \leqslant C$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Notre but est de prouver qu'il existe une constante M telle que

$$|s_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx\right| \leqslant M$$

pour tout x et tout n. On peut supposer, sans perte de généralité, que $0 < x < \pi$. Pour $\frac{\pi}{N+1} < x \leqslant \frac{\pi}{N}$, on a alors

$$|s_n(x)| = \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx + \left|\sum_{k=N+1}^{n} b_k \sin kx\right|$$

(une somme vide étant comptée comme nulle) et

$$\sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx \leqslant x\sum_{k=1}^{N} kb_k \leqslant \pi C.$$

De plus, une sommation par parties donne

$$\left|\sum_{k=N+1}^{n} b_k \sin kx\right|$$
$$= \left|\sum_{k=N+1}^{n-1} (b_k - b_{k+1})(D_k(x) - D_N(x)) + b_n(D_n(x) - D_N(x))\right|,$$

où

$$|D_k(x)| = \left|\sum_{j=1}^{k} b_k \sin jx\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{\pi}{x} < N+1.$$

Donc,

$$\left|\sum_{k=N+1}^{n} b_k \sin kx\right| \leqslant 2(N+1)b_{N+1} \leqslant 2C.$$

Nous sommes donc arrivés à l'objectif annoncé. Il s'ensuit que la limite simple de $s_n(x)$ est une fonction bornée (que l'on note f) et on peut utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir **II.3**, **th. 3**) pour prouver que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ est la série de Fourier de f.

II.5.59. D'après le test de convergence de Dirichlet, $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ converge simplement vers une fonction que l'on notera $f(x)$ pour $x \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Montrons maintenant que f est positive. On pose

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx.$$

On a alors, avec la transformation d'Abel,

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})K_k(x) + a_n K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k K_k(x) + a_n K_n(x),$$

où

$$K_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

De nouveau, avec la transformation d'Abel,

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2}(\Delta a_k - \Delta a_{k+1})\sum_{j=0}^{k} K_j(x) + \Delta a_{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} K_j(x) + a_n K_n(x).$$

Puisque

$$\sum_{j=0}^{k} K_j(x) = \frac{\sin^2 \frac{(k+1)x}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2}}$$

et, par hypothèse, $\Delta a_k - \Delta a_{k+1} = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geqslant 0$, on voit que

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} s_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(\Delta a_k - \Delta a_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} K_j(x) \geqslant 0.$$

On sait que la série $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ converge uniformément sur $[\varepsilon\,,\pi]$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{\pi} f(x)\,dx &= \frac{a_0}{2}(\pi-\varepsilon) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{\varepsilon}^{\pi} \cos nx\,dx \\ &= \frac{a_0}{2}(\pi-\varepsilon) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{\sin n\varepsilon}{n}\,.\end{aligned}$$

D'après la solution de **II.5.57**, cette dernière série converge uniformément sur $[0\,,\pi]$ et on obtient donc, en faisant tendre ε vers 0,

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\pi.$$

Puisque f est paire, on voit que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

De même,

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{\varepsilon}^{\pi}\cos kx\,dx + \sum_{n=1}^{k-1} a_n \int_{\varepsilon}^{\pi} \cos kx \cos nx\,dx \\ + a_k \int_{\varepsilon}^{\pi}\cos^2 kx\,dx + \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n \int_{\varepsilon}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx\end{aligned}$$

et, en faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx &= a_k\frac{\pi}{2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n \int_{\varepsilon}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx \\
&= a_k\frac{\pi}{2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n\left(\frac{\sin(k+n)\varepsilon}{2(k+n)} + \frac{\sin(k-n)\varepsilon}{2(k-n)}\right) \\
&= a_k\frac{\pi}{2}\,,
\end{aligned}$$

la dernière égalité pouvant s'obtenir comme précédemment.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. M. Apostol. *Mathematical Analysis.* Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1974.

[2] N. K. Bari. *A treatise on trigonometric series. Vols I, II.* Pergamon Press, Oxford, Macmillan, New York, 1964.

[3] P. Biler, A. Witkowski. *Problems in Mathematical Analysis.* Marcel Dekker, New York, Basel, 1990.

[4] F. Burk. *Lebesgue Measure and Integration : An Introduction.* John Wiley & Sons, New York, 1997.

[5] D. L. Cohn. *Measure Theory.* Birkhäuser, Boston, Basle, Berlin, 1980.

[6] P. N. de Souza, J.-N. Silva. *Berkeley Problems in Mathematics.* Springer Verlag, New York, 2004.

[7] A. J. Dorogovcev. *Matematičeskij analiz. Spravočnoe posobe.* Vyščaja Škola, Kiev, 1985.

[8] A. J. Dorogovcev. *Matematičeskij analiz. Sbornik zadač.* Vyščaja Škola, Kiev, 1987.

[9] R. E. Edwards. *Fourier series : A modern introduction. Vol. I.* Holt, Rinehard and Winston, Inc., New York, Montreal, London, 1967.

[10] L. C. Evans, R. F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC-Press, Boca Raton, 1992.

[11] G. M. Fikhtengol'ts. *A course in differential and integral calculus*, volume I, II, 7th ed., III, 5th ed. Nauka, Moscou, 1969. (Russe). Trad. all. : G. M. Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung*, Verlag Harri Deutsch.

[12] B. R. Gelbaum, J. M. Olmsted. *Theorems and Counterexamples in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, Berlin, 1993.

[13] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya. *Inequalities.* Cambridge University Press, 1988.

[14] E. Hewitt, K. Stromberg. *Real and Abstract Analysis.* Springer-Verlag, New York, Berlin, 1975.

[15] E. W. Hobson. *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series, Vol. I.* Dover, New York, 1957.

[16] W. J. Kaczor, M. T. Nowak. *Problems in Mathematical Analysis I : Real Numbers, Sequences and Series.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[17] W. J. Kaczor, M. T. Nowak. *Problems in Mathematical Analysis II : Continuity and Differentiation.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[18] G. Klambauer. *Real analysis.* American Elsevier, New York, 1973.

[19] G. Klambauer. *Mathematical Analysis.* Marcel Dekker, New York, Basel, 1975.

[20] S. Łojasiewicz. *An Introduction to the Theory of Real Functions.* John Wiley & Sons, Chichester, 1988.

[21] D. S. Mitrinovič, P. M. Vasič. *Analytic inequalities.* Springer-Verlag, New York, Berlin, 1970.

[22] M. E. Munroe. *Introduction to measure and integration.* Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1953.

[23] I. P. Natanson. *Teoria funkcij veščestvennoj peremennoj.* Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teoret. Lit., Moscou, 1950. (Russe). Trad. Engl. : *Theory of functions of a real variable*, Vols 1,2, Ungar, New York, 1955, 1961.

[24] J. Niewiarowski. *Zadania z teorii miary.* Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 1999. (Polonais).

[25] Y. S. Očan. *Sbornik zadač po matematičeskomu analizu.* Prosvešenie, Moscou, 1981. (Russe).

[26] G. Polya, G. Szegö. *Problems and Theorems in Analysis I.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978.

[27] W. Rogosinski. *Volume and integral.* Interscience Publishers, New York, 2nd edition, 1962.

[28] H. Royden. *Real Analysis.* Prentice Hall, 3e edition, 1988.

[29] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, 2nd edition, 1976. Trad. : *Principes d'analyse mathématique*, Dunod, 2000.

[30] R. Sikorski. *Funkcje rzeczywiste.* PWN, Varsovie, 1958. (Polonais).

[31] E. C. Titchmarsh. *The Theory of Functions.* Oxford University Press, 1976.

[32] E. T. Whittaker, G. N. Watson. *A Course of Modern Analysis.* Cambridge University Press, 1963.

[33] A. Zygmund. *Trigonometric Series.* Cambridge University Press, 1959.

TABLE DES RENVOIS

En règle générale, nous n'indiquons pas les renvois d'un problème au précédent ou au suivant. Si vous cherchez une application d'un problème, il est donc conseillé de commencer par regarder le problème suivant (parfois le précédent). Nous ne faisons pas dans cette table la différence entre un énoncé et la solution proposée et le renvoi peut donc se trouver dans l'un ou dans l'autre. L'utilisation dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue d'une inégalité prouvée pour l'intégrale de Riemann est indiquée par un renvoi à cette dernière.

I.4.16 : I.4.19
I.4.34 : I.4.36
I.4.41 : I.4.45, II.3.33
I.4.42 : I.4.48
I.4.43 : I.4.48, I.5.44
I.4.48 : I.5.47
I.5.1 : I.5.6, I.5.34, I.5.42, I.5.61, I.5.62, I.5.67, I.5.70, I.6.48, II.5.21
I.5.3 : I.5.6
I.5.10 : I.5.15, I.5.22, I.5.35
I.5.11 : I.5.17, I.5.29, I.5.44
I.5.22 : I.5.28
I.5.23 : I.5.25
I.5.24 : I.5.27, I.5.33, I.5.39, I.5.42
I.5.25 : I.5.27
I.5.29 : I.5.31
I.5.30 : I.5.55
I.5.31 : I.5.72
I.5.33 : I.5.39, I.5.42, I.5.56, II.5.10
I.5.34 : I.5.45, I.5.46, I.5.51
I.5.35 : I.5.39, I.5.42, I.5.49, I.5.50, I.5.56, I.5.63
I.5.36 : I.5.38
I.5.37 : I.5.39, I.5.42
I.5.39 : I.5.48
I.5.40 : I.5.42, I.5.50, I.5.51, I.5.54, I.5.55, I.5.56
I.5.43 : I.5.47, I.5.71
I.5.44 : I.5.46, I.5.71
I.5.47 : I.5.49, I.5.50
I.5.50 : I.5.65
I.5.52 : I.5.54
I.5.53 : I.5.57, I.5.59, I.5.60
I.5.55 : II.5.47
I.5.57 : I.5.64
I.5.64 : I.5.69
I.5.65 : I.5.68, I.5.71, I.5.72
I.5.68 : I.5.72
I.5.70 : I.5.72
I.6.1 : I.6.3, I.6.4, I.6.5, I.6.6, I.6.22, I.6.23, I.6.32, I.6.45, I.6.46, II.3.40, II.5.25, II.5.49
I.6.10 : I.6.12
I.6.11 : I.6.13
I.6.18 : I.6.21
I.6.26 : I.6.28, I.6.47
I.6.27 : I.6.35, II.3.31, II.3.35, II.3.36, II.4.20, II.4.21, II.5.34, II.5.55
I.6.29 : I.6.31, I.6.47, II.3.34
I.6.30 : I.6.38, I.6.41
I.6.34 : II.4.20
I.6.35 : II.3.16, II.3.25
I.6.37 : I.6.43, I.6.44
I.6.38 : I.6.41
I.7.1 : I.7.6, I.7.19
I.7.2 : I.7.10, II.1.1
I.7.3 : I.7.10, II.1.3
I.7.4 : I.7.7, I.7.9, I.7.12
I.7.5 : I.7.7
I.7.8 : I.7.10
I.7.12 : II.1.22, II.1.34, II.1.36, II.1.38, II.4.31
I.7.17 : I.7.20
I.7.18 : II.1.55
I.7.19 : I.7.21, I.7.22, I.7.28
I.7.22 : I.7.24
I.7.34 : I.7.36
II.1.1 : II.1.10, II.1.12, II.1.49
II.1.2 : I.7.12
II.1.5 : II.1.16, II.1.43
II.1.6 : II.1.16, II.1.47
II.1.7 : II.1.10
II.1.8 : II.1.12, II.1.14, II.1.19
II.1.9 : II.1.16
II.1.10 : II.1.14
II.1.11 : II.1.14, II.1.16, II.4.26, II.4.30

II.5.4 : II.5.14, II.5.42, II.5.53
II.5.8 : II.5.37, II.5.39, II.5.40
II.5.10 : II.5.12, II.5.15, II.5.16, II.5.18, II.5.22
II.5.12 : II.5.14, II.5.15, II.5.28, II.5.36, II.5.42, II.5.46
II.5.17 : II.5.30
II.5.18 : II.5.30
II.5.22 : II.5.25
II.5.23 : II.5.59
II.5.25 : II.5.29
II.5.27 : II.5.30, II.5.31, II.5.32, II.5.33, II.5.35
II.5.33 : II.5.35, II.5.53
II.5.40 : II.5.50, II.5.55
II.5.41 : II.5.44, II.5.45, II.5.47, II.5.50, II.5.58
II.5.42 : II.5.44, II.5.52
II.5.44 : II.5.51
II.5.45 : II.5.51
II.5.48 : II.5.52
II.5.49 : II.5.55
II.5.50 : II.5.52, II.5.57
II.5.52 : II.5.54
II.5.57 : II.5.59

INDEX